Polígono chico de área máxima

Proyecto Final

Roberto Iván López López
Adolfo Martínez
Erneso Ulloa Pérez
José Alonso Solís Lemus

Optimización Numérica, 2013

Agenda

Introducción
- Descripción del problema
- Planteamiento del problema

Restricciones

Solución
- Algoritmo utilizado
- Adecuaciones

Resultados
- CNPO y valor de $f(x)$
- Polígonos

Agenda

Polígono chico de mayor área

- Encontrar el polígono de área máxima, entre todos los polígonos posibles con n lados y diámetro $d \leq 1$. El diámetro de un polígono es la máxima distancia entre dos de sus vértices.
- El número de mínimos locales es al menos $O(n!)$ [2].
- Conforme la n crece, el área del polígono se aproxima al área de un círculo de diametro uno, i.e $\pi/4 \approx 0.7854$.

Polígono chico de mayor área

- Encontrar el polígono de área máxima, entre todos los polígonos posibles con n lados y diámetro $d \leq 1$. El diámetro de un polígono es la máxima distancia entre dos de sus vértices.
- El número de mínimos locales es al menos $O(n!)$ [2].
- Conforme la n crece, el área del polígono se aproxima al área de un círculo de diametro uno, i.e $\pi/4 \approx 0.7854$.

Polígono chico de mayor área

- Encontrar el polígono de área máxima, entre todos los polígonos posibles con n lados y diámetro $d \leq 1$. El diámetro de un polígono es la máxima distancia entre dos de sus vértices.
- El número de mínimos locales es al menos $O(n!)$ [2].
- Conforme la n crece, el área del polígono se aproxima al área de un círculo de diametro uno, i.e $\pi/4 \approx 0.7854$.

Agenda

- Se toman los pares (r_i, θ_i) como las coordenadas de los vértices del polígono.
- El área se calcula sumando las áreas de los $n-2$ triángulos que se forman tomando como vértices a dos vértices consecutivos y al origen. (figura)

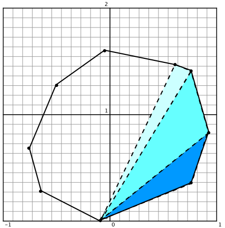


Figura : Ejemplo del cálculo del área

- Supongamos que tenemos el i-ésimo triángulo. Éste tiene como vértices a $(0,0), (r_i, \theta_i), (r_{i+1}, \theta_{i+1})$. El ángulo que sale del origen es $\theta_{i+1} - \theta_i$.
- Si tomamos como base de este triángulo al lado de longitud r_i, entonces es fácil ver que la altura para esa base es $r_{i+1} sen(\theta_{i+1} - \theta_i)$.
- Por lo tanto, el área de ese triángulo es $A_i = \frac{1}{2} r_{i+1} r_i sen(\theta_{i+1} - \theta_i)$.

La función objetivo a maximizar queda como sigue:

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} r_{i+1} r_i sen(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

- La primera restricción es que la distancia entre cualesquiera dos vértices sea menor o igual a 1.
- Sea $j > i$. Tomemos el triángulo cuyos vértices son: el origen, i y j. Es fácil ver que el ángulo que sale del origen es $\theta_j - \theta_i$. Si llamamos d_{ij} a la distancia entre esos últimos vértices, entonces, usando la ley de cosenos, se obtiene $d_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_ir_jcos(\theta_j - \theta_i)$.
- Entonces, como queremos que $d_{ij} \leq 1 \quad \forall i \forall j$, la primera restricción es $r_i^2 + r_j^2 - 2r_ir_jcos(\theta_j - \theta_i) \leq 1 \quad \forall i \forall j$ o $1 - r_i^2 - r_j^2 + 2r_ir_jcos(\theta_j - \theta_i) \geq 0 \quad \forall i \forall j$

Queremos que nuestro polígono esté en el primer y segundo cuadrante. Esto implica que:

$$\theta_i \geq 0, \pi - \theta_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{y } r_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

Además, queremos que los ángulos se vayan incrementando conforme *i* crece, para que esté planteado como en la figura. Entonces se agrega:

$$\theta_{i+1} - \theta_i \geq 0 \quad \forall i$$

Finalmente, después de poner al origen como un vértice con $r_n = 0$ y $\theta_n = \pi$, el problema queda :

$$\min_{r,\theta} \quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} r_{i+1} r_i sen(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

$$\begin{array}{lrcll}
\text{s.a} & 1 - r_i^2 - r_j^2 + 2r_i r_j cos(\theta_j - \theta_i) & \geq & 0 & 1 \leq i < j \leq n \\
& \theta_{i+1} - \theta_i & \geq & 0 & 1 \leq i < n \\
& \theta & \geq & 0 & \\
& \pi - \theta & \geq & 0 & \\
& r_i & \geq & 0 & 1 \leq i \leq n \\
& 1 - r_i & \geq & 0 & 1 \leq i \leq n
\end{array}$$

Agenda

Puntos Interiores

In:		$x_0 \in \Omega^0, f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}, g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$
1.		$z_0 \leftarrow e,\ \mu_0 \leftarrow e, \gamma_0 \leftarrow 1,\ e = (1, 1, \cdots, 1)^T$
		$\omega_0 = (x_0, z_0, \mu_0)^T$
2.		while !CNPO
	2.1	Resolver:
		$F'(\omega_k)\Delta\omega_k = -F(\omega_k)$
	2.2	Escoger $\rho_k \in (0, 1]$, tal que
		$z_k + \rho_k \Delta z_k > 0$ y $\mu_k + \rho_k \Delta \mu_k > 0$
	2.3	Actualizar: $\omega_{k+1} \leftarrow \omega_k + \rho_k \Delta\omega_k$
		$\gamma_{k+1} \leftarrow \gamma_k / 10$

Puntos interiores

En particular

El sistema lineal $F'(\omega_k)\Delta\omega_k = -F(\omega_k)$ lo resolvemos con el sistema equivalente:

$$\begin{aligned}(B_k + C_k^T Z_k^{-1} U_k C_k)\Delta x_k = {} & \nabla_x \mathcal{L}(\omega, k) - C_k^T Z_k^{-1} U_k (z_k - g(x_k)) \\ & + C_k^T Z_k^{-1}(U_k Z_k e - \gamma_k e)\end{aligned}$$

donde

- B_k es una matriz simétrica, positiva definida obtenida por un método cuasi-Newton
- $\mathrm{C}_k = \nabla g(x_k),\ U_k = diag(\mu_k),\ Z_k = diag(z_k)$.

Actualización BFGS

Calcular la B_k

B_k se escoge con s_k, y_k que satisfacen la ecuación de la secante.

$$
\begin{aligned}
s_k &= x_{k+1} - x_k \\
y_k &= \nabla_x \mathcal{L}(x_{k+1}, \mu_{k+1}) - \nabla_x \mathcal{L}(x_k, \mu_{k+1})
\end{aligned}
$$

Definimos $r_k = \theta_k y_k + (1-\theta_k) B_k s_k$ donde

$$
\theta_k = \begin{cases} 1 & s_k^T y_k \geq \sigma_k s_k^T B_k s_k \\ (1-\sigma_k)(s_k^T B_k s_k)/(s_k^T B_k s_k - s_k^T y_k) & \text{e.o.c} \end{cases}
$$

Agenda

Actualización BFGS

elección del parámetro σ_n

- Se notó que el parámetro σ_k en la actualización BFGS afectaba considerablemente dependiendo el tamaño del problema.
- Para los tamaños utilizados ($n = 4, 5, \cdots, 13$), se corrió el programa con valores de $\sigma_k \in (0.2, 0.3)$ y se seleccionaron -para cada *n*- las que mejores CNPO ofrecían.

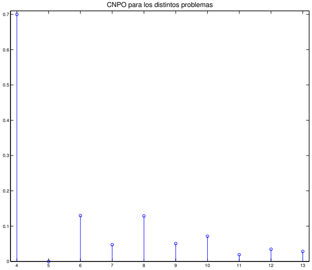
n	σ	n	σ
4	0.2850	9	0.2910
5	0.2810	10	0.2950
6	0.2750	11	0.2910
7	0.2810	12	0.2690
8	0.2620	13	0.2520

Elección del punto inicial x_0

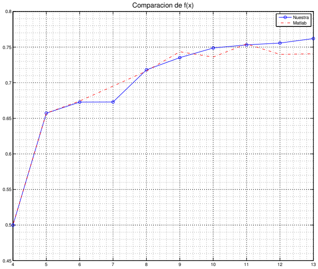
- Necesita ser un punto factible tal que $x_0 \in \Omega^0$.
- Se tomó una partición de $[0, \pi]$ igualmente espaciado, es decir
$$\theta_k = \frac{k\pi}{n}$$
- para los radios, se tomó $r_k =$0.2

Agenda

Valores de CNPO y $f(x)$ por tamaño



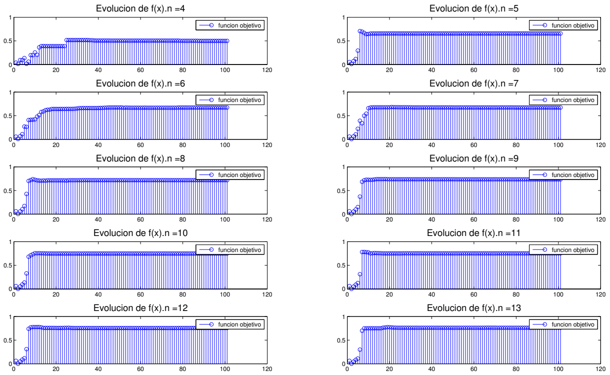
(a) CNPO



(b) Comparación con MATLAB

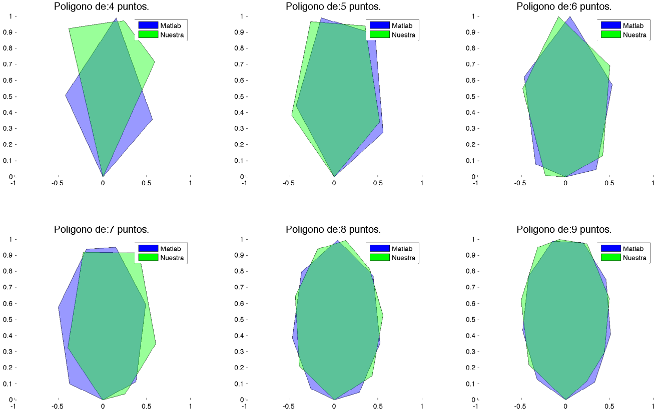
Evolución de $f(x)$ con cada iteración

por tamaño



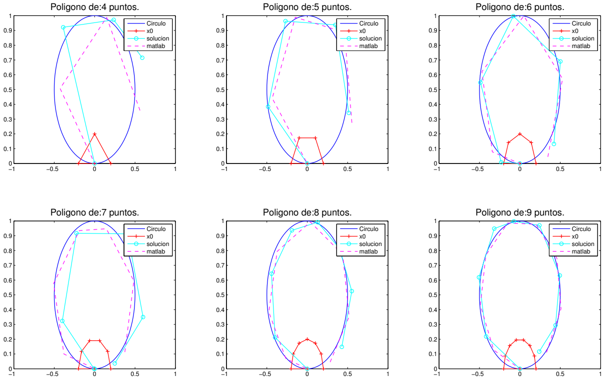
Agenda

Polígonos de tamaños $n = 4, \cdots, 9$

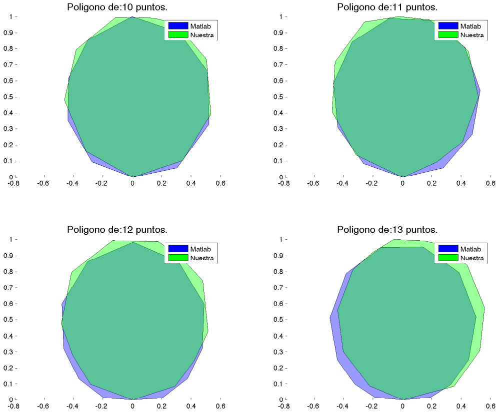


Polígonos de tamaños $n = 4, \cdots, 9$

punto inicial

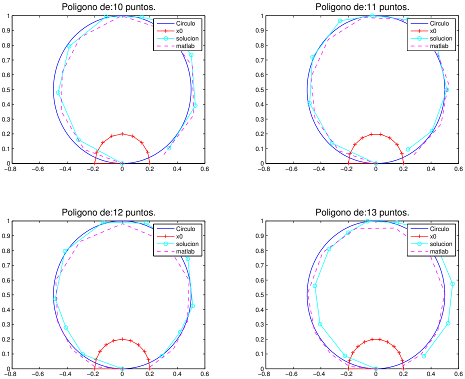


Polígonos de tamaños $n = 10, \cdots, 13$



Polígonos de tamaños $n = 10, \cdots, 13$

punto inicial



Bibliografía I

Jorge Nocedal & Stephen J. Wright.
Numerical Optimization.
Springer, 2010.

E.D. Dolan & Jorge J. Moré & Todd S. Munson
Benchmarking Optimization Software with COPS 3.0
Technical Report, Feb. 2004