Cálculo Numérico I
Laboratorio
Método de la Potencia Inversa
Cociente de Raleigh

1. Método de la Potencia Inversa

La idea del método es tener una aproximación μ a un valor propio de A, digamos λ^*, es decir $0 \neq |\lambda^* - \mu| \approx 0$ tal que $(\lambda^* - \mu)^{-1}$ sea el valor propio dominante en valor absoluto para $(A - \mu I_n)^{-1}$ y en consecuencia usar el método de la potencia.

El paso correspondiente a multiplicar, $\hat{v}_k = (A - \mu I_n)^{-1} v_k$, donde v_k es un vector de norma uno se reemplaza por resolver el sistema lineal,
$(A - \mu I_n)\hat{v}_k = v_k$. Por otro lado no se calcula el cociente de Raleigh para el nuevo vector v_k en $(A - \mu I_n)^{-1}$, en su lugar se define el cociente de Raleigh para A ya que los vectores propios de A y $(A - \mu I_n)^{-1}$ son los mismos.

Método Potencia Inversa

S1. Sea $v_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $\|v_0\| = 1$ y $\mu \in \mathbb{R}$.
S2. Para $k = 1,\ 2,\ \ldots$ hacer
Resolver el sistema lineal
$(A - \mu I_n)\hat{v}_k = v_{k-1}$ (*Multiplicar por* $(A - \mu I_n)^{-1}$)
$v_k \leftarrow \hat{v}_k / \|\hat{v}_k\|_2$ (*aproxima vector propio en la bola unitaria*)
$\hat{\lambda}_k \leftarrow v_k^T A v_k$ (*aproxima valor propio de* A */ cociente de Raleigh*)
Fin

---

2. Método de la Potencia Inversa con cociente de Raleigh

En el método de la potencia inversa se necesita una aproximacióm μ a un valor propio λ^*. Sin embargo se desconoce tal valor propio. Un esquema dinámico de aproximar el valor propio en la potencia inversa es usar el cociente de Raleigh que se genera en cada iteración.

Método de la Potencia Inversa con Cociente de Raleigh

S1. Sea $v_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $\|v_0\| = 1$ y $\lambda_0 = v_0^T A v_0$.
S2. Para $k = 1,\ 2,\ \ldots$ hacer
Resolver el sistema lineal
$(A - \lambda_{k-1} I_n)\hat{v}_k = v_{k-1}$ (*Multiplicar por* $(A - \lambda_{k-1} I_n)^{-1}$
$v_k \leftarrow \hat{v}_k / \|\hat{v}_k\|_2$ (*aproxima vector propio en la bola unitaria*)
$\hat{\lambda_k} \leftarrow v_k^T A v_k$ (*aproxima valor propio de A / cociente de Raleigh*)
Fin

---

3. Laboratorio

Programar en Matlab los métodos de la potencia inversa y la versión con el cociente de Raleigh.

function $[\lambda,\ x] = potenciainversa(A,\ \mu)$
% *El método se detiene si:* $|\lambda_{k-1} - \lambda_k| < 10^{-10}$ *o* $k > n^2$.

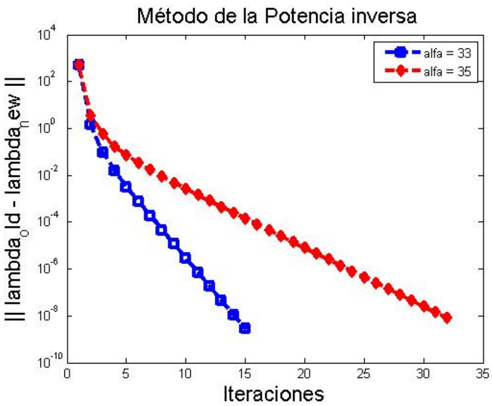
function $[\lambda,\ x] = cocienteraleigh(A)$
% el método se detiene si $|\lambda_{k-1} - \lambda_k| < 10^{-8}$ o $k > n^2$.

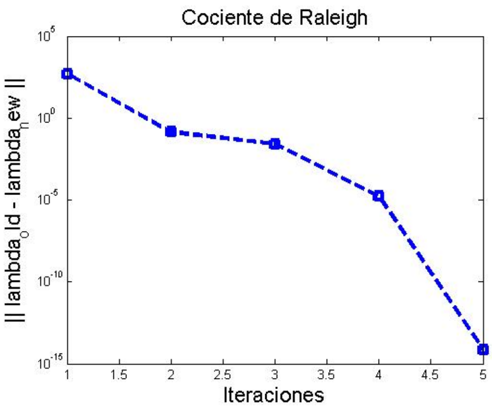
3.1. Ejemplo

Con los comandos:

$u = diag(1:32);\quad A = diag(u);$

Probamos la matriz diagonal, $A = diag(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 31,\ 32)$,
con ambos métodos y la convergencia de muestra en las siguientes gráficas.


Método de la Potencia inversa
alfa = 33
alfa = 35
|| lambda_o Id - lambda_n ew ||
Iteraciones


Cociente de Raleigh
|| lambda_o Id - lambda_n ew ||
Iteraciones