Cálculo Numérico I
Descomposición en Valores Singulares

1. Descomposición en Valores Singulares

Teorema. Sea $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ con $m \leq n$ y $rango(A) = r$ entonces existen $U \in \mathbb{R}^{mxm}$, $V \in \mathbb{R}^{nxn}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{mxn}$ tales que

1. $A = U\Sigma V^T$.
2. $U^T U = I_m, \quad V^T V = I_n$
3. $\Sigma = diag(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots, \sigma_r,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

Los valores σ_i son los valores singulares de la matriz A.

2. Mínimos Cuadrados Lineales

Sea $A \in \mathbb{R}^{mxn},\ b \in \mathbb{R}^m$ tales que $m \geq n$ y $rango(A) = n$,

Consideremos el problema de mínimos cuadrados lineales

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \|Ax - b\|_2 \\ x \in \mathbb{R}^n. & \end{array} \tag{1}$$

y la solución de la ecuación normal

$$(A^T A)x = A^T b, \tag{2}$$

donde $A^T A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es no-singular y la solución de (2) está dada por

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Usando la descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
A^T A &= (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) && (3)\\
& && (4)\\
&= V\Sigma^T (U^T U)\Sigma V^T && (5)\\
&= V\Sigma^T I_m \Sigma V^T && (6)\\
&= VDV^T, && (7)
\end{aligned}
$$

con

$$D = \Sigma^T \Sigma = diag(\sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \ldots,\ \sigma_n^2) \in \mathbb{R}^{nxn}.$$

De donde

$$
\begin{aligned}
(A^T A)^{-1} &= (V(D)V^T)^{-1} && (8)\\
& && (9)\\
&= VD^{-1}V^T && (10)
\end{aligned}
$$

y

$$D^{-1} = diag(\sigma_1^{-2},\ \sigma_2^{-2},\ \ldots,\ \sigma_n^{-2}) \in \mathbb{R}^{nxn}.$$

De donde

$$
\begin{aligned}
(A^T A)^{-1} A^T &= (VD^{-1}V^T)(V\Sigma U^T) && (11)\\
&= VD^{-1}\Sigma U^T && (12)\\
&= V\Sigma^* U^T, && (13)
\end{aligned}
$$

con $\Sigma^* = diag(\sigma_1^{-1},\ \sigma_2^{-1},\ ...., \sigma_n^{-1}) \in \mathbb{R}^{nxm}$.

La solución de (1) se escribe como

$$x = (V\Sigma^* U^T)b.$$

donde $\hat{\Sigma}^{-1} \in R^{nxm}$ y $\hat{\Sigma}^{-1} = diag(\sigma_1^{-1},\ \sigma_2^{-1},\ ...., \sigma_n^{-1})$.

3. Comprimir Imágenes

Cualquier imagen en blanco y negro puede guardarse en una matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ tal que $m \geq n,\ rango(A) = n,\ a_{ij} \in [0,1], i = 1 : m,\ j = 1 : n$ y a_{ij} es un tono de color gris, por ejemplo $a_{ij} = 0$ es el color negro y $a_{ij} = 1$ es el color blanco.

Considere la decomposición en valores singulares de

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^T \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i {v_i}^T, \end{aligned}$$

es decir A es la suma de n matrices de rango uno, donde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n > 0$. Supongamos que existe $r \leq n$ tal que $\sigma_r \approx 0$ entonces numéricamente la parte de

$$B_r = \sum_{i=r}^{n} \sigma_i u_i {v_i}^T,$$

aporta poco a la imagen y la imagen puede reproducirse como

$$A = \sum_{i=1}^{r-1} \sigma_i u_i {v_i}^T.$$

También la matriz puede ser muy grande y no se necesita tener toda la información de la imagen, es decir la imagen puede verse con ayuda de

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i {v_i}^T$$

con un valor adecuado de $k < n$. De hecho A_k es única solución del problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \|A - B\|_2 \\ \text{sujeto a} & B \in \mathbb{R}^{mxn},\ rango(B) = k. \end{array}$$

Además $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$, de donde el error relativo en términos de la imagen es $\|A - A_k\|_2 / \|A\|_2 = \sigma_{k+1}/\sigma_1$

En MATLAB obtenga la imagen de un payaso en una matriz de 320x200, de la siguiente forma

---

load clown.mat;
$[U, S, V] = svd(X);$
$colormap('gray');$
$figure(1)$
$image(X)$
$[U, S, V] = svd(X);$

$k = 30;$
$colormap('gray');$
$figure(2)$
$image(U(:, 1:k) * S(1:k, 1:k) * V(:, 1:k)')$

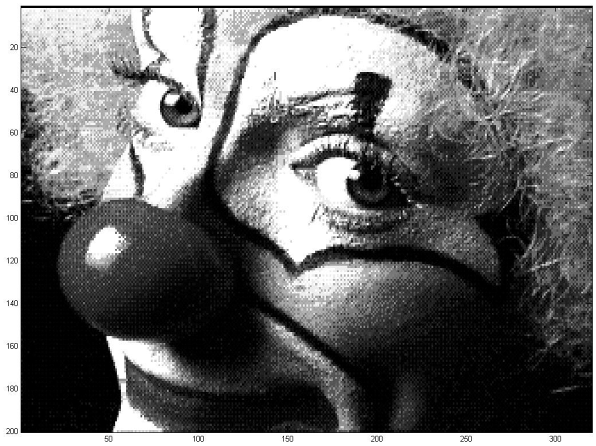
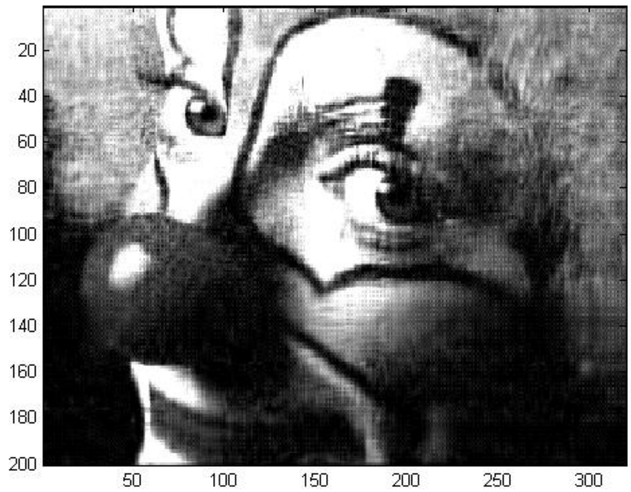


Imagen con $k = 30$, es decir, los treinta primeros valores singulares:



4. Calcular la Descomposición en Valores Singulares

De la descomposición en valores singulares

$$A = U\Sigma V^T,$$

se tiene que

$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T)$$

es decir

$$A^T A = V\Sigma^T \Sigma V,$$

donde

$$\Sigma^T \Sigma = diag(\sigma_1^2,\ \sigma_2^2, \ldots,\ \sigma_r^2,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^{nxn}.$$

La matriz $A^T A$ se le llama la matriz de covarianza de A.

De las relaciones algebraicas anteriores se tiene un método para aproximar la descomposición en valores singulares con los siguientes pasos:

---

a) $A \in \mathbb{R}^{mxn}$.

b) $B = A^T A$.

c) Calcular los valores y vectores propios de la matriz simétrica B,

$$B = V \Lambda V^T.$$

d) Definir $\Sigma = \Lambda^{1/2}$.

e) Resolver los sistemas lineales para la matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{mxm}$,

$$U\Sigma = AV,$$
