Laboratorio de Cálculo Numérico
Ecuaciones Diferenciales
Adams-Bashforth de orden 2

1. Introducción

Se tiene la ecuación diferencial de primer orden con valor inicial:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x,\ y(x)) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene derivadas continuas de varios órdenes.

2. Adams-Bashforth

Sea $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ una partición igualmente espaciada de $n+1$ puntos del intervalo $[a,\ b]$, donde, $h = x_{k+1} - x_k$, es el tamaño de paso de la partición.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo Diferencial se tiene que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\ dx = y(x_{k+1}) - y(x_k). \tag{2}$$

Por otra parte, si $h = x_{k+1} - x_k$ es pequeña podemos interpolar la función $y'(x)$ para $x \in [x_k,\ x_{k+1}]$ por el único polinomio de grado menor o igual a uno, $p_1(x)$, que pasa por los datos, $(x_{k-1},\ f_{k-1}),\ (x_k,\ f_k)$, donde $f_k = (x_k,\ y_k)$.

Se obtiene que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\ dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_1(x)\ dx, \tag{3}$$

y

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} p_1(x)\ dx = \frac{h}{2}(3f_k - f_{k-1}).$$

Método de Adams-Bashforth de orden 2

$y(1) \leftarrow y_0$
Para $k = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$ hacer
$y_{k+1} \leftarrow y_k + \frac{h}{2}(3f_k - f_{k-1})$
Fin

---

3. Laboratorio

Programar en Matlab :

function $[x, y] = adamsbashforth2(fname,\ a,\ b,\ y_0,\ n)$
% Método de Adams-Basforth para la ecuación diferencial con valor inicial
% $y'(x) = f(x,\ y(x))$
% $y(a) = y_0$.
% IN
% $fname$.- cadena de carácteres con es la función en Matlab
% de $f(x,\ y(x))$.
% a.- número real .
% b.- número real, $[a,\ b]$ es el intervalo donde se aproxima la solución.
% y_0.- vector columna de m componentes con las condiciones iniciales.
% Si $m > 1$ se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales.
% n.- número de puntos en la partición igualmente espaciada de $[a,\ b]$.
% OUT
% x.- vector columna de dimensión n con la partición de $[a,\ b]$.
% y.- matriz de dimensión nxm donde m es el número
% de ecuaciones diferenciales. El vector $y(:, i)$ es la curva solución # i.

4. Adams-Moulton

Se interpola con un polinomio de grado menor o igual a uno, $q_1(x)$, los datos $(x_k,\ f_k)$, $(x_{k+1},\ f_{k+1})$, es decir

$$q_1(x) = (f_k)\frac{(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k+1})} + (f_{k+1})\frac{(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)},$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} q_1(x)\ dx = \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1}). \tag{4}$$

y se obtiene el esquema

$$y(x_{k+1}) = y_k + \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1}).$$

que es una expresión implícita.

Para tener ventaja de esta fórmula suponemos que $\hat{y}_{k+1}$ es una aproximación a $y(x_{k+1})$ entonces se corrige y_{k+1} a

$$y_{k+1} = y_k + h * f(x_{k+1},\ \hat{y}_{k+1}).$$

El término $\hat{y}_{k+1}$ se llama el término de predicción y y_{k+1} se llama el término de correción.

5. Predictor corrector de orden dos

Programar en Matlab :

function $[y] = pc2(fname,\ a,\ b,\ y_0,\ n)$
% La cadena de caracteres $fname$ es la función en Matlab
% de $f(x,\ y(x))$ de la ecuación diferencial $y' = f(x,\ y(x))$.
% $[a,\ b]$ es el intervalo donde se aproxima la solución.
% $y(a) = y_0$ y n es tal que $h = (b - a)/(n + 1)$.
% La salida y es un vector de dimensión $n+1$ obtenido por Adams-Bashforth
% con predicción y correción tal que
% $y_k \approx y(x_k),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n + 1$

6. Ejemplos

1. $y'(x) = xy(x) + x^3, \;\; y(0) = 1, \; x \in [0, \; 1].$
   La solución explícita es : $y(x) = 3e^{x^2/2} - x^2 - 2.$

2. $y'(x) = 3y(x), \; y(0) = 5, \; x \in [0, \; 1]$
   Solución : $y(x) = 5e^{3x}.$

Use las funciones $adamsbashforth.m$ y $pc2.m$ con $n = 10$ y grafica las soluciones verdaderas y las aproximaciones.

Gráfica de las soluciones del ejemplo 1