Laboratorio de Cálculo Numérico I
Método de la Potencia

1. Método de la potencia I

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\} \subset \mathbb{R}$, tal que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |_3| \geq \ldots \geq |\lambda_r|$ y $\{v_1, v_2, \ldots, , v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ con vectores propios de A tales que que $Av_i = \lambda_i v_i$.

Sea

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i, \quad \text{con} \ \ \xi_1 \neq 0.$$

Proceso

Para $k = 0, 1, 2\,3, \ldots.$ **hacer**

$\hat{v}_{k+1} \leftarrow Av_k$

$v_{k+1} \leftarrow \hat{v}_{k+1}/\lambda_1$

Fin

Lema

1. $$v_{k+1} = \xi_1 v_1 + \sum_{i=2}^{k} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} \xi_i v_i.$$

2. $$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} = 0.$$

3. $$\lim_{k\to\infty} v_{k+1} = \xi_1 v_1.$$

Se desconocen los eigen pares (λ_i, v_i)**.**

2. Método de la potencia II

Supongamos que $v \in \mathbb{R} - \{0\}$ es un vector propio asociado al valor propio λ_i. Se tiene que

$$Av = \lambda_i v \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \frac{v^T A v}{v^T v}$$

Por lo cual el valor propio λ_i depende del vector propio v.

El cociente de Raleigh con respecto a la matriz A de $v \in \mathbb{R} - \{0\}$ es

$$\phi(v) = \frac{v^T A v}{v^T v}.$$

Una observación simple es que $\phi(v) = \phi(v/\|v\|_2)$. Entonces el cociente de Raleigh se usa para vectores en la bola unitaria, con respecto a la norma 2.

En método inicia con un vector semilla en la bola unitaria e itera multiplicando por la matriz A para devolver el resultado a la bola unitaria.

Método de la potencia

S1. Sea $v_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $\|v_0\|_2 = 1$

S2. Para $k = 1,\ 2,\ ...$ hacer

$\hat{v}_k = A\ v_{k-1}$ (*Multiplicar por A*)

$v_k = \hat{v}_k / \|\hat{v}_k\|_2$ (*aproxima vector propio en la bola unitaria*)

$\hat{\lambda}_k = v_k^T A v_k$ (*aproxima valor propio/ cociente de Raleigh*)

Fin

Si v_{k-1} es un vector propio asociado a la matriz A se tiene que $v_k = \pm v_{k-1}$.

Escribir en MATLAB el método de la potencia:

function $[\lambda,\ v] = metodopotencia(A)$

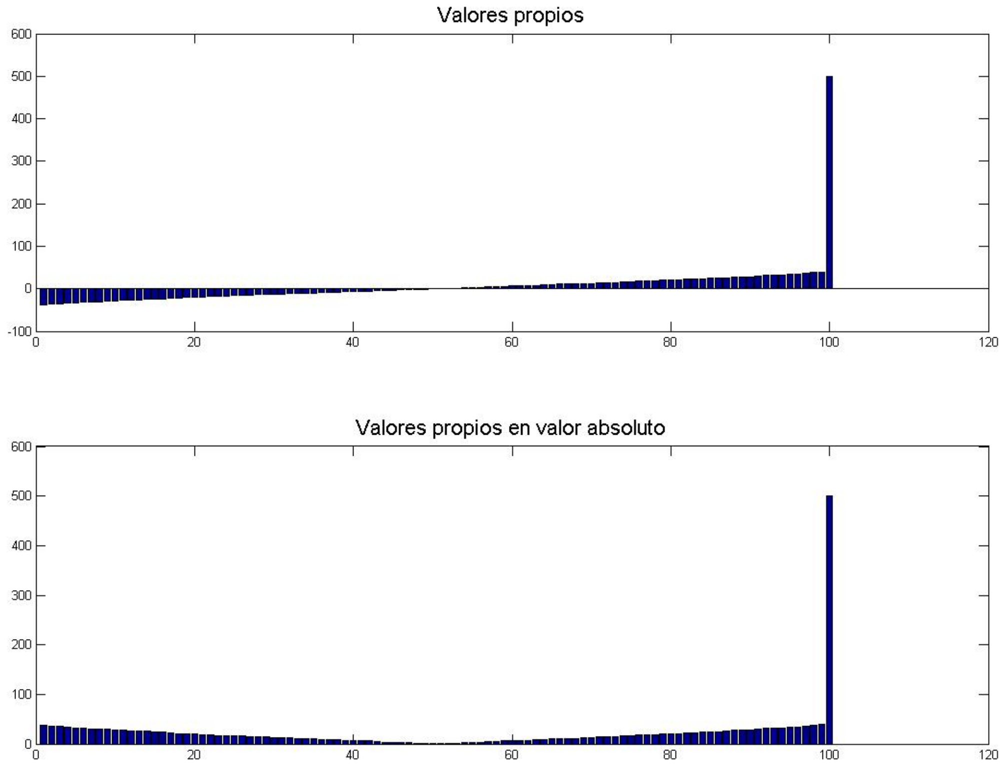
% Use n^2 iteraciones en el método de la potencia.

Veamos la convergencia del método con matrices aleatorias del tipo:

$n = 100;$

$A = 10 * rand(n);$

$A = (A + A')/2;$



La convergencia del método en la matriz A se muestra en la siguiente gráfica.