Laboratorio de Cálculo Numérico
Valores propios con QR
Dr. Zeferino Parada

1. Introducción

Teorema. Sea $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ tal que $m \leq n$ y $rango(A) = m$ entonces existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{mxm}$ y $R \in \mathbb{R}^{mxn}$ tales que

a. $A = QR$.

b.- $Q^T Q = I_m$.

c.- R es triangular superior.

A la conclusión (a) se le denomina la factorización QR de la matriz A.

Ejercicio. Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y considere una factorización QR de A entonces las matrices $A = QR$ y $A_+ = RQ$ comparten los mismos valores propios.

Definición. Decimos que $H \in \mathbb{R}^{nxn}$ es una matriz superior de Hessenberg si y sólo si $H_{i,\,j} = 0$ para $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ i-2$.

Es decir H es superior de Hessenberg si y sólo si H es triangular superior y las entradas $H_{i,\,i-1}$ pueden ser distintas de cero.

Ejemplos

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{-1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 5 \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{-1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{0} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 5 \end{array}\right)$$

Teorema. Para cada $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ existen matrices $H,\ Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ tales que H es superior de Hessenberg, Q es ortogonal y $Q^T A Q = H$.

2. Valores Propios con iteración QR

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$
2. Calcula una matriz $H \in \mathbb{R}^{nxn}$ superior de Hessenberg tal que $\sigma(A) = \sigma(H)$.
3. Defina H_0 y $k \leftarrow 0$.
4. **Para** $k = 0,\ 1\ 2,\ \dots,$ **hacer**
    a) $H_k = Q_k R_k$ factorización QR.
    b) $H_{k+1} \leftarrow R_k Q_k$.
    c) $k \leftarrow k + 1$.

    Fin
5. **Fin**

3. Prueba

Escriba el código en Matlab:

```
% scriptvpqr.m
% Calcula los valores propios de una matriz
% superior de Hessenberg.
n = 10;
A = rand(n);
[Q, R] = qr(A);     % haremos nuestra factorización QR
V = diag(1 : n);
A = Q' * V * Q;     % valores propios de A son 1, 2, ..., 10
H = hess(A);
for k = 1 : 100
    [Q, R] = qr(H);
    H = R * Q;
end

H  % escribir H en la pantalla
% H final es triangular superior con diagonal 1, 2, ..., 10
```
