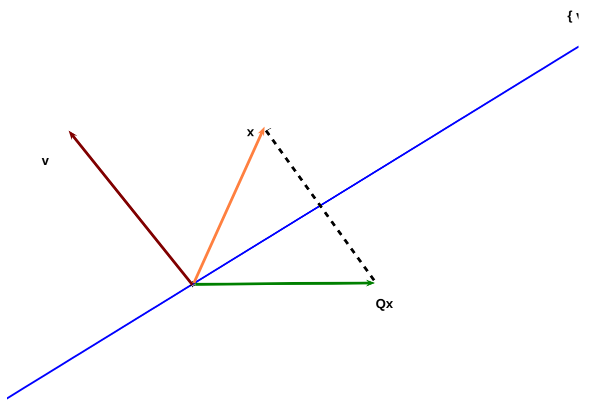
Laboratorio de Cálculo Numérico
Factorización QR
Mínimos Cuadrados Lineales

1. Reflexion de Householder

Definición. *Un reflexión de Householder es una matriz de la forma $Q = I_n - 2uu^T$, donde $u \in \mathbb{R}^n$ con $u^Tu = 1$.*

Una reflexión de Householder satisface :

1. $QQ^T = I_n$.
2. $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Qx es la reflexión de x sobre $\{u\}^\perp$



Reflexión de Householder

Problema básico. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Encontrar una reflexión de Houselder, Q tal que $Qa = ce_1$ donde e_1 es el primer vector canónico y $c = \mp\|a\|_2$.

De $Qa = a - 2(u^Ta)v = ce_1$ se tiene que $u = \alpha(x - ce_1)$ con $u^Tu = 1$. Además, $\|Qa\|_2 = \|a\|_2 \quad \Rightarrow \quad |c| = \|a\|_2$, de donde $u = \hat{u}/\|\hat{u}\|_2$ con $\hat{u} = a \pm \|a\|_2 e_1$. Para evitar cancelación catastrófica en la resta se escoge

$$\hat{u} = a + sign(a_1)\|a\|_2 e_1.$$

2. QR con Householder

Teorema. Sea $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ donde $m \leq n$ y $rango(A) = m$. Entonces existen matrices $Q, \in \mathbb{R}^{mxm}$ y $R \in \mathbb{R}^{mxn}$ tales que Q es ortogonal y R es triangular superior y $A = QR$.

Esta factorización puede obtenerse por medio de reflexiones de Householder de la siguiente manera iterativa:

---

1. $R \leftarrow A$ y $Q \leftarrow I_n$.

2. **Para** $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$

   a) $a \leftarrow R(j : n, j)$.

   b) $\hat{v} \leftarrow a + sign(a_1)\|a\|_2 e_1$
   donde e_1 es el primer vector canónico en $\mathbb{R}^{n-k+1}$.

   c) $v \leftarrow \hat{v}/\|\hat{v}\|_2$

   d) $\hat{Q}_k \leftarrow I_{n-k+1} - 2vv^T$

   e)
   $$Q_k \leftarrow \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_k \end{pmatrix}.$$

   f) $R \leftarrow Q_k R$

   g) $Q \leftarrow Q_k Q$

   Fin de Para

3. $Q \leftarrow Q^T$.
   Fin del método

---

3. Laboratorio

Escriba una función en **MATLAB** de la forma:

function $[Q,\ R] = qrhouseholder(A)$
% Se calcula la factorización QR de la matriz
% $A \in \mathbb{R}^{nxm}$ donde $m \leq n$ y $rango(A) = m$
% con reflexiones de Householder.
% $Q \in \mathbb{R}^{mxn}$ es ortogonal
% $R \in \mathbb{R}^{mxm}$ es triangular superior.
% Se tiene que $A = Q * R$.

Pruebe su función con la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1231 & 0{,}9045 & 0{,}4082 \\ -0{,}4924 & 0{,}3015 & -0{,}8165 \\ -0{,}8616 & -0{,}3015 & 0{,}4082 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8{,}1240 & -9{,}6011 & 4{,}4313 \\ -0{,}0000 & 0{,}9045 & 7{,}2363 \\ -0{,}0000 & 0{,}0000 & -7{,}3485 \end{pmatrix}$$