Laboratorio de Cálculo Numérico I
Reducción a forma de Hessenberg

Definición. La matriz $H \in \mathbb{R}^{nxn}$ es triangular superior de Hessenberg si y sólo si $h_{i,\,j} = 0$ para $j = 1,\ \ldots, i-2$ y $i = 3,\ \ldots,\ n$

Ejemplos

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{-1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 5 \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{-1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{0} & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 5 \end{array}\right)$$

Teorema. Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ existen $Q,\ H \in \mathbb{R}^{nxn}$ tal es que Q es ortogonal, $Qe_1 = Q^T e_1 = e_1$ donde $e_1 \in \mathbb{R}^n$ es el primer vector canónico y $QAQ^T = H$ es matriz triangular superior de Hessenberg.

Demostración (inducción en n).

Notemos que para $n = 2$, cualquier $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ es triangular superior de Hessenberg, de donde $Q = I_2$ es la matriz buscada.

Supongamos que el resultado es cierto para matrices de orden $n-1$.
Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y consideremos la partición de A en los bloques

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & z^T \\ y & B \end{pmatrix} \text{ con } B \in \mathbb{R}^{(n-1)x(n-1)},\ y, z \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{1}$$

Construimos una reflexión de Householder $P = I_{n-1} - 2uu^T$ donde $u \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\|u\|_2 = 1$ y $Py = \alpha\hat{e}_1$ con $\hat{e}_1$ el primer vector canónico en $\mathbb{R}^{n-1}$.
Se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & z^T \\ y & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & P^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & z^T P^T \\ \alpha \hat{e}_1 & \hat{B} \end{pmatrix},$$

donde $\hat{B} = PBP^T$.

Por hipótesis de inducción para $\hat{B}$, existen $Q_1,\ H_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)x(n-1)}$ tales que

1. Q_1 es ortogonal.
2. $Q_1 \hat{e_1} = Q_1^T \hat{e}_1 = \hat{e}_1$.
3. H_1 es una matriz triangular superior de Hessenberg.
4. $Q_1 \hat{B} Q_1^T = H_1$.

En particular $\hat{B} = Q_1^T H_1 Q_1$.
De donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & z^T P^T \\ \alpha e_1 & \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & z^T P^T Q_1^T \\ \alpha \hat{e}_1 & H_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}.$$

Definamos la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q_1 P \end{pmatrix}.$$

Es decir, Q es ortogonal y $Qe_1 = Q^T e_1 = e_1$.
Además

$$QAQ^T = H = \begin{pmatrix} a_{11} & z^T P^T Q_1 \\ \alpha \hat{e}_1 & H_1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de Hessenberg superior.

$\diamond$

La demostración muestra un algoritmo para obtener la similitud de A con una matriz de Hessenberg superior.

$function\ [H] = Hessenberg(A)$
% Reducción de la matriz A en una matriz de Hessenberg.
$[n,n] = size(A);\quad H = A;$
for $i = 1 : n-2$
$\quad u = house(H(i+1:n,i));$
$\quad H(i+1:n,i:n) = H(i+1:n,i:n) - 2*u*(u'*H(i+1:n,i:n));$
$\quad H(1:n,i+1:n) = H(1:n,i+1:n) - 2*(H(1:n,i+1:n)*u)*u';$
$\quad H(i+2:n,i) = zeros(n-i-1,1);$
end

El número de operaciones aritméticas del algoritmo es de $(10/3)n^3$.