Laboratorio de Cálculo Numérico
Ecuaciones Diferenciales
Diferencias Finitas

1. Introducción

Definición. Un problema de dos valores en la frontera es una ecuación diferencial del tipo

$$\begin{aligned} & y'' = f(t,\ y',\ y) \\ & y(a) = \alpha \\ & y(b) = \beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Decimos que el problema de dos valores en la frontera es lineal si y sólo si

$$f(t,\ y',\ y) = p(t)y' + q(t)y + r(t),$$

donde $p,\ q,\ r\ :\ [a,\ b] \to \mathbb{R}$ tiene derivadas continuas de cualquier orden.

2. Diferencias Finitas

Consideramos el problema lineal

$$y'' = p(t)y' + q(t)y + r(t), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{2}$$

donde $q(t) > 0$ para todo valor de t.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $h = (b-a)/n$. Construimos la partición

$$\mathcal{P} = \{t_k = a + hk,\ |\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\ \}$$

Para cada punto $t_k,\ 0 < k < n$ aproximamos numéricamente

$$y''(t_k) = p(t_k)y'(t_k) + q(t_k)y(t_k) + r(t_k) \tag{3}$$

usando aproximaciones a la primera y segunda derivada:

$$y''(t_k) = \frac{y(t_{k-1}) - 2y(t_k) + y(t_{k+1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^4) \tag{4}$$

$$y'(t_k) = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_{k-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{5}$$

Sustituimos (4) y (5) en (3) y considerando $y(t_k) = y_k,\ p(t_k) = p_k,\ q(t_k) = q_k,\ r(t_k) = r_k$ y omitiendo los términos del error h^4 y h^2 se tiene la ecuación lineal en las variables $y_{k-1},\ y_k,\ y_{k+1}$

$$\left(\frac{-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}}{h^2}\right) + p(t_k)\left(\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right) + q(t_k)y_k = -r(t_k).$$

o bien

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p_k\right) y_{k-1} + (2 + h^2 q_k)y_k - \left(1 - \frac{h}{2}p_k\right) y_{k+1} = -h^2 r_k, \qquad (6)$$

es decir, se tiene un sistema lineal tridiagonal de orden $(n-1)x(n-1)$,

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{A}$ es tridiagonal:

Diagonal principal: $2 + h^2 q_k,\quad k = 1,\ \ldots,\ n-1$
Primera subdiagonal: $\left(-1 - \frac{h}{2}p_k\right),\quad k = 2,\ \ldots,\ n-1$
Primer supradiagonal: $\left(-1 + \frac{h}{2}p_k\right)\quad k = 1,\ \ldots,\ n-2.$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots, \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -hr_1 \\ -hr_2 \\ \ldots, \\ -hr_{n-2} \\ -hr_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{h}{2}p_1\right)\alpha \\ 0 \\ \ldots, \\ 0 \\ \left(1 - \frac{h}{2}p_{n-1}\right)\beta \end{pmatrix}$$

3. Laboratorio

Escribir una función en Matlab:

function $[t, y]$ = **diferfinitas**(fnamep, fnameq, fnamer, $a,\ b, \alpha,\ \beta, n$)
% Se resuelve el problema
% $y'' = fnamep * y' + fnameq * y + fnamer,\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$
% La entrada n indica que la partición tiene $n+1$ puntos igualmente
% espaciados que se encuentran en el vector de salida t.
% El vector y de dimensión $n+1$ es la aproximación numérica

% tal que $y(1) = \alpha,\ y(n+1) = \beta$ y $y(t(k)) \approx y(k)$.

Resuelva el problema

$$y'' = -\left(\frac{2}{t}\right) y' + \left(\frac{2}{t^2}\right) y + \frac{sen(ln\ t)}{t^2}, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2.$$

Trate valores de $n = 10,\ 20,\ 50,\ 100,\ 500$. Grafique las soluciones que obtiene.