Laboratorio de Cálculo Numérico
Método de Galerkin

1. Introducción

Consideramos el problema de una ecuación diferencial con valores en la frontera:

$$\begin{aligned} &y'' = f(t,\ y',\ y) \\ &y(a) = \alpha \\ &y(b) = \beta. \end{aligned} \tag{1}$$

El espacio de funciones cuadrado integrables en $[a,\ b]$ es

$$L^2[a,\ b] = \{y : [a,\ b] \to \mathbb{R} \mid \int_a^b (y(t))^2\ dt \text{ existe y es finita }\},$$

con producto escalar

$$< y_1(t), y_2(t) >= \int_a^b y_1(t) y_2(t)\ dt.$$

Sea $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}$ una partición igualmente espaciada de $[a,\ b]$ con espacio $h > 0$.

El principio de colocación para resolver (1) es considerar un subespacio vectorial de dimensión $(n+1)$, $\mathcal{V} \subset L^2[a,\ b]$ tal que

$$\mathcal{V} = \text{Gen}\{\phi_0(t),\ \phi_1(t),\ \ldots,\ \phi_n(t)\},$$

y la solución, $y^*(t)$, de (1) está en $\mathcal{V}$, es decir

$$y^*(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(t)$$

para algunos escalares $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n$.

2. Principio de Garlekin

Se trata de resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & < y'' - f(y',\ y,\ t), y'' - f(y',\ y,\ t) > \\ \text{Sujeto a} & y(t) \in \mathcal{V}, \end{array}$$

Como el problema anterior es de mínimos cuadrados y las funciones

$$\{\phi_0(t),\ \phi_1(t),\ \ldots,\ \phi_n(t)\ \},$$

son linealmente independientes, se pide ortogonalidad entre la función residual, $y'' - f(y',\ y,\ t)$, y el espacio $\mathcal{V}$, es decir,

$$< y'' - f(y',\ y,\ t),\ \phi_i(t) >= 0,\ \ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

$$\int_a^b (y'' - f(y',\ y,\ t))\phi_i(t)\ dt = 0,\ \ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{2}$$

La relación (2) se reduce, usando integración por partes e;

$$\int_a^b f(y',\ y,\ t)\phi_i(t)\ dt = \phi_i(b)y'(b) - \phi(a)y'(a) - \int_a^b y'(t)\ \phi'_i(t)\ dt, \tag{3}$$

para $i = 0,\ 1\ \ldots,\ n$.

3. B-Spline

Se definen las funciones $\phi_i(t)$ de la siguiente forma:

$$\phi_0(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (t_1 - t)/h & t \in [t_0,\ t_1] \\ 0 & \text{de otro modo} \end{array} \right. ,$$

$$\phi_i(t) = \left\{ \begin{array}{ll} (t - t_{i-1})/h & t \in [t_{i-1},\ t_i] \\ (t_{i+1} - t)/h & t \in [t_i,\ t_{i+1}]0 \\ \text{de otro modo} & \end{array} \right. ,$$

$$\phi_n(t) = \begin{cases} (t - t_n)/h & t \in [t_{n-1},\ t_n] \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Al conjunto

$$\{\phi_0(t),\ \phi_1(t),\ \ldots,\ \phi_n(t)\ \},$$

se denominan como funciones B-Spline.

El Caso lineal

Si $f(y',\ y,\ t9$ es lineal, la relación (3) determina un sistema lineal cuadrado de orden $(n+1)$.

Ejemplo

$$\begin{array}{l} y'' = 4y \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 3. \end{array}$$

La relación (3) da un sistema lineal tridiagonal

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1\beta \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -y_b\beta \end{pmatrix},$$

con

$$\alpha = \frac{8}{3}h + \frac{2}{h}, \quad \beta = \frac{2}{3}h - \frac{1}{h}.$$

Se resuelve el sistema tridiagonal para obtener los coeficientes c_i y se construye la función

$$y^*(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i(t).$$