Optimización Numérica
Laboratorio de Computo # 5
Programación Cuadrática Sucesiva

1 Introducción

Consideremos el problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & h(x) = 0, \end{array} \tag{1}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f,\ h \in \mathcal{C}^2$.

Sea

$$l(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x), \tag{2}$$

la función lagrangeana de (1).

Las condiciones necesarias de primer orden para (1) son

$$F(x,\ \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

donde $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$.

Sean $x^* \in \mathbb{R}^n$ mínimo local y punto regular de (1) y $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ su correspondiente multiplicador de Lagrange. Entonces $F(x^*,\ \lambda^*) = 0$.

Supongamos que

1. $\nabla^2 f(x)$ y $\nabla^2 h_i(x), \nabla h_i(x)$ $i = 1, ..., m$, son funciones Lipschitz continuas en una vecindad de x^*.

2. $B_* = \nabla_x^2 l(x^*,\ \lambda^*)$ es positiva definida en $Null(\nabla h(x^*)^T)$.

Entonces las ecuaciones no-lineales en (3) pueden resolverse por el método de Newton(en este caso, Programación Cuadrática Sucesiva (PCS)) en una vecindad de $(x^*,\ \lambda^*)$.

2 PCS

Algoritmo PCS local

Paso1 Escoga $(x_0,\ \lambda_0)$. Hacer $k \leftarrow 0$.

Paso 2 **Mientras** $\|F(x_k,\ \lambda_k)\|_2 \neq 0$ **hacer**

2.1 Resuelva

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & (1/2)p^T B_k p + \nabla f_k^T p \\ \text{sujeto a} & \nabla h_k^T p + h_k = 0 \end{array}$$

para obtener p_k y $\hat{\lambda}_k$.

2.2 **Hacer** $x_{k+1} \leftarrow x_k + p_k;\ \ \lambda_{k+1} \leftarrow \hat{\lambda}_k$.

2.3 **Actualizar** $k \leftarrow k + 1$.

Fin

En el algoritmo f_k se refiere a $f(x_k)$ y similarmente en otras funciones. La matriz B_k es $\nabla_x^2 l_k$.

Programe **PCS** en MATLAB y pruebe su función con

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & e^{x_1x_2x_3x_4x_5} - (1/2)(x_1^3 + x_2^3 + 1)^2 \\ \text{sujeto a} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_5^2 - 10 = 0 \\ & x_2x_3 - 5x_4x_5 = 0 \\ & x_1^3 + x_2^3 + 1 = 0. \end{array}$$

Use el punto inicial $x_0 = (-1.71,\ 1.59,\ 1.82,\ -0.763,\ -0.763)^T$. La solución es $x^* = (-1.58,\ 1.7,\ 1.851,\ -0.765,\ -0.765)^T$.

3 Multiplicador de Lagrange

Supongamos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo local del problema (1) y λ^* su correspondiente multiplicador de Lagrange tales que las hipótesis (1)-(3) se satisfacen. En particular la matriz jacobiana de $h(x)$ en x^* es de rango m entonces la ecuación lineal para $\lambda \in \mathbb{R}^m$

$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0 \tag{4}$$

tiene como solución única a λ^*.

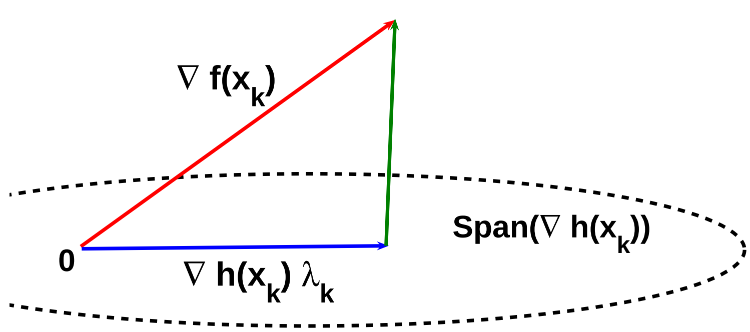
Notemos que el sistema lineal (4) es equivalente al problema de mínimos cuadrados lineales

$$\text{Minimizar} \quad \tfrac{1}{2}\|\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda\|_2^2. \tag{5}$$

Es claro que si $rango(\nabla h(x^*) = m$ entonces existe $r > 0$ tal que $rango(\nabla h(x)) = m$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x - x^*\|_2 < r$. Esta propiedad se explota en el método de programación cuadrática sucesiva.

En el paso 2.2 del método se incorpora la actualización de λ que proviene del problema de mínimos cuadrados lineales:

$$\text{Minimizar} \quad \frac{1}{2}\|\nabla f(x_k) + \nabla h(x_k)\lambda\|_2^2$$



cuya solución se determina resolviendo el sistema lineal

$$(\nabla h(x_k)^T \nabla h(x_k))\lambda = -\nabla h(x_k)^T \nabla f(x_k).$$

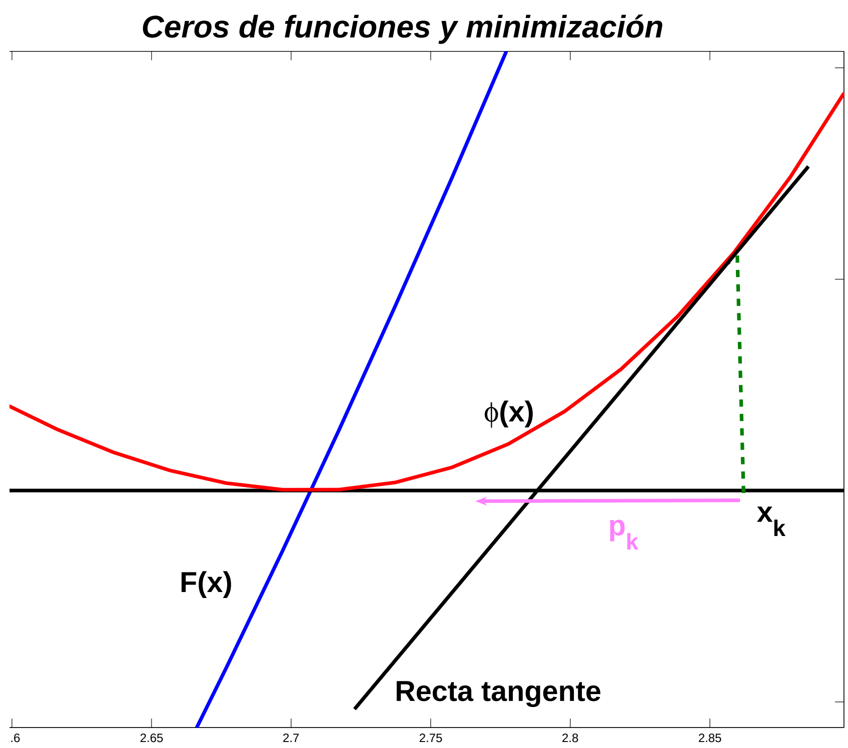
Notación

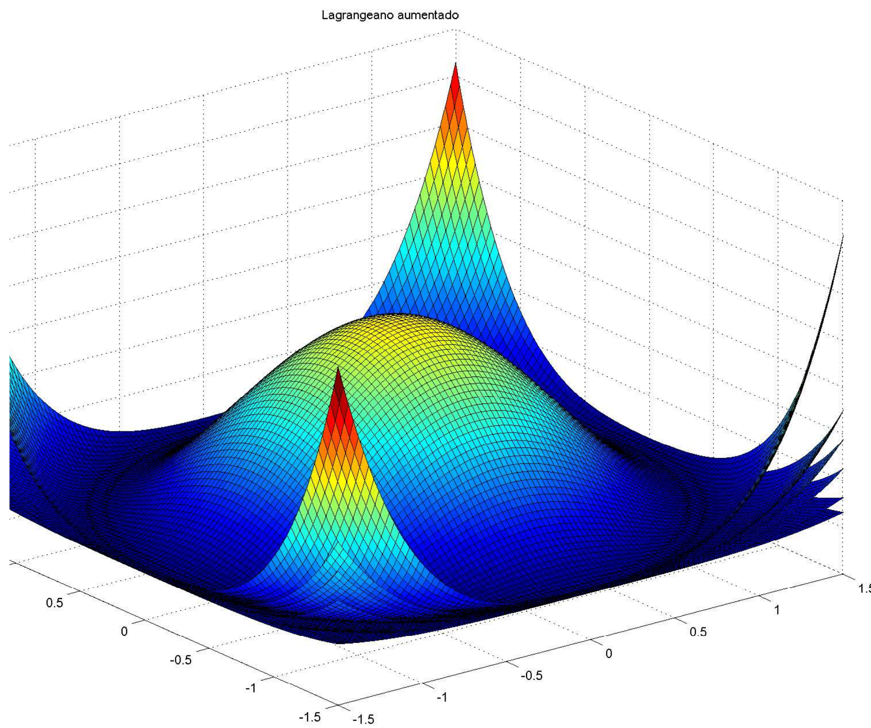
$$\nabla h(x)^T = \begin{pmatrix} \nabla h_1(x)^T \\ \nabla h_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla h_m(x)^T \end{pmatrix}.$$

4 Búsqueda de línea

El método de Newton sólo funciona con convergencia cuadrática en una vecindad de $(x^*,\ \lambda^*)$. En el caso en que los iterandos iniciales $(x_k,\ \lambda_k)$ estén alejados de la solución $(x^*,\ \lambda^*)$ el paso p_k se recortará con búsqueda de línea.

Definición. Decimos que la función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de mérito para el problema (1) en $(x^*,\ \lambda^*)$ si y sólo si $(x^*,\ \lambda^*)$ es mínimo local de $\phi(x)$.





Ejemplos

1.
$$\phi(x, \lambda^*) = (1/2)F(x,\ \lambda^*)^T F(x,\ \lambda^*)$$

2. Lagrangeano aumentado

$$\phi(x,\ \lambda^*,\ C) = l(x,;\lambda^*) + \frac{C}{2}h(x)^T h(x).$$

   donde $C > 0$ es un parámetro.

3. Función de mérito L_1

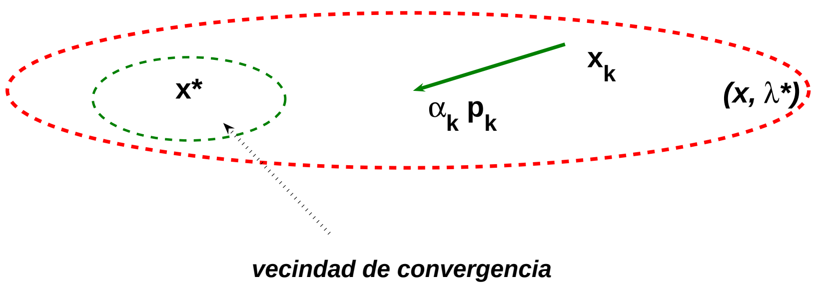
$$\phi(x,\ \lambda^*,\ C) = l(x,;\lambda^*) + C\|h(x)\|_1.$$

   donde $C > 0$ es un parámetro.

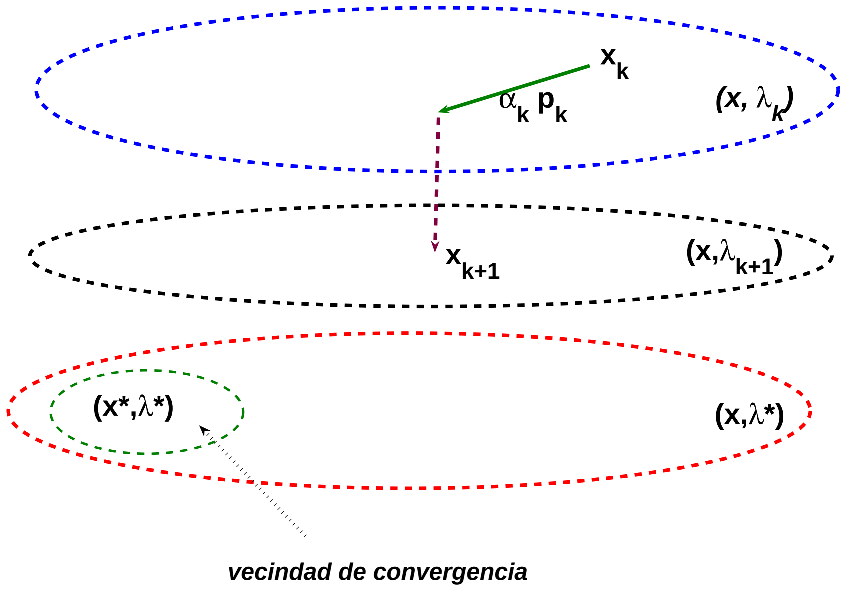
Sean p_k la única solución en el paso 2.1 y $\phi(x)$ una función de mérito para el problema (1) en $(x^*,\ \lambda^*)$ tal que

$$\phi(x_k)^T p_k < 0,$$

entonces es posible usar búsqueda de línea a lo largo de p_k.



Sin embargo, λ^* es un vector desconocido, entonces el paso p_k se recorta en el espacio $(x,\ \lambda_k)$.



x_k
$\alpha_k\ p_k$
(x, λ_k)
x_{k+1}
(x,λ_{k+1})
(x^*,λ^*)
(x,λ^*)
vecindad de convergencia

5 Método

Se usarán como funciones de mérito el lagrangeano aumentado o la función L_1. En estos casos $\phi(\ldots)$ depende también de λ y el parámetro C, pero en cada iteración se consideran como valores constantes.

Programación Cuadrática Sucesiva con búsqueda de línea

Paso1 Escoga $(x_0,\ \lambda_0)$. Hacer $k \leftarrow 0$.

Paso 2 **Mientras** $\|F(x_k,\ \lambda_k)\|_2 \neq 0$ **hacer**

2.1 Resuelva

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & (1/2)p^T B_k p + \nabla f_k^T p \\ \text{sujeto a} & \nabla h_k^T p + h_k = 0 \end{array}$$

para obtener p_k y $\hat{\lambda}_k$.

2.2 Si $||h(x_k)||_2 > 0$

Calcular $C_k > 0$ tal que $\nabla \phi(x_k,\ \lambda_k,\ C_k)^T p_k < 0$.

Determinar $\alpha_k \in (0,\ 1]$ tal que la primer condición de Wolfe se satisface.

De otro modo $\alpha_k = 1$.

2.3 **Hacer** $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k;\ \ \lambda_{k+1} \leftarrow \hat{\lambda}_k$.

2.4 **Actualizar** $k \leftarrow k + 1$.

Fin