Optimización Numérica I
Laboratorio de Computo # 1
Programación Cuadrática

1 Introducción

El problema que deseamos resolver es

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax = b, \end{array} \tag{1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $rango(A) = m$, $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ es simétrica y positiva definida en $M = \{d \in \mathbb{R}^n \mid Ad = 0\}$.

El método directo

Las condiciones necesarias de primer orden para (1) son:

$$\begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Con nuestras hipótesis, la matriz del sistema es no singular.

2 El método del rango

Suponga que Q es simétrica y positiva definida. Multiplicando la primer ecuación de (2) por AQ^{-1} obtenemos

$$Ax + AQ^{-1}A^T\lambda = -c.$$

Usando la segunda ecuación de (2) tenemos que

$$(AQ^{-1}A^T)\lambda = -c - b. \tag{3}$$

Sea λ^* la única solución de (3). Sustituyendo en la primer ecuación de (2) obtenemos

$$Qx = -c - A^T\lambda^*. \tag{4}$$

3 El método del espacio nulo

Sean $Y \in \mathcal{R}^{nxm}$ y $Z \in \mathcal{R}^{nx(n-m)}$ tales que $rango(Y) = m,\ rango(Z) = n-m$ y

$$AY = I_m, \ \text{ y } \ AZ = 0.$$

De donde

$$x = Yb + Zx_z, \text{ con } \ x_z \in \mathcal{R}^{n-m}, \tag{5}$$

Cumple la restricción lineal en (1).

Realizando la sustitución de (5) en el problema (1), se reduce al problema cuadrático sin restricciones en $\mathcal{R}^{n-m}$,

$$\min \ \frac{1}{2}{x_z}^T Z^T Q Z x_z + (Z^T(QYb + c))^T x_z. \tag{6}$$

Con nuestras hiótesis, la matriz Z^TQZ es simétrica y definida positiva.
Sea ${x_z}^*$ la única solución de (6), entonces x^* definida por (5) es la única solución de (1)

4 Programas

1. Escriba una función en Matlab que resuelva directamente (2)
   function $[x] \ = \ pc(Q, A, c, b)$
2. Escriba una función en Matlab con el método del rango:
   function $[x] \ = \ pcmera(Q, A, c, b)$
3. Escriba una función en Matlab con el método del espacio nulo:
   function $[x] \ = \ pcnulo(Q, A, c, b)$

   con los siguientes pasos

   (a) Determine las matrices Y y Z.

   (b) Resuelva el problema (6) por medio del sistema lineal

   $$Z^TQZx_z = -Z^T(QYb + c),$$

   usando la descomposición de Cholesky con la instrucción
   $R = chol(Z' * Q * Z);$
   % donde R es triangular superior tal que $R' * R = Z' * Q * Z$.

(c) Resuelva los dos sistemas lineales

$$R' * w = -Z' * (Q * Y * b + c), \quad R * x_z = w.$$

(d) Determine el valor de x usando (5).

5 Descomposición de valores singulares

Sea $A \in \mathcal{R}^{mxn}$ tal que $rango(A) = m$.

Por la descomposición de valores singulares

$$A = U\Sigma V^T,$$

donde $U \in \mathcal{R}^{mxm}$, $V \in \mathcal{R}^{nxn}$ son ortogonales y $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m) \in \mathcal{R}^{mxn}$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_m \geq 0$.

Notemos que

$$\Sigma = (D \;\; 0), \;\; \text{donde} \;\; D = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m) \in \mathcal{R}^{mxm}.$$

Defina

$$Y = V\Sigma^+ U^T, \;\; \text{con} \;\; (\Sigma^+)^T = (D^{-1} \;\; 0),$$

y $Z \in \mathcal{R}^{nx(n-m)}$ con las últimas $n - m$ columnas de V.
Por definición tenemos que $rango(Y) = m$ y $rango(Z) = n - m$.
Propiedades

1. $AY = I_m$
   Observemos que

$$\begin{aligned} AY &= (U\Sigma V^T)(V\Sigma^+ U^T) \\ &= U(\Sigma\Sigma^+)U^T \\ &= UI_m U^T \\ &= I_m. \end{aligned}$$

2. $AZ = 0$
   Por la descomposición en valores singulares y la definición de Z tenemos que

$$U\Sigma(V^T Z) = U(D \;\; 0)\begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} = 0.$$

   con $e = (1, ..., 1)^T \in \mathcal{R}^{n-m}$. El resultado se sigue trivialmente.

Pseudoinversa

Sea $A \in \mathcal{R}^{mxn}$ tal que $m \leq n$ y $rango(A) = m$.
Entonces $AA^T \in \mathcal{R}^{mxm}$ es no-singular. Defina

$$Y = A^T(AA^T)^{-1}.$$

Claramente

$$AY = I_m.$$

Sea $Z \in \mathcal{R}^{nx(n-m)}$ tal que $rango(Z) = n - m$ y $AZ = 0$.
En el método del espacio nulo con las expresiones (5) y (6), se requiere el vector

$$Yb = A^T(AA^T)^{-1}b.$$

Para no calcular inversas de matrices resolvemos las ecuaciones normales (con la descomposición de Cholesky)

$$(AA^T)w = b,$$

entonces

$$Yb = A^Tw.$$

Rango de la matriz

Sean $A \in \mathcal{R}^{mxn}$ tal que $m \leq n$, $A = [B\ N]$, $B \in \mathcal{R}^{mxm}$ no-singular, $N \in \mathcal{R}^{mx(n-m)}$ y $N \neq 0$
Define

$$Y = \begin{pmatrix} I_m \\ (B^{-1}N)^T \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ I_{n-m} \end{pmatrix},$$

donde I_p es la matriz identidad de orden p.
Para obtener la matriz $W = B^{-1}N$ se resuelven los $n - m$ sistemas lineales de la forma

$$Bw^{(k-m)} = a_k, \quad k = m + 1, ..., n,$$

donde $w^(k - m)$ es el vector de incógnitas y a_k es la k-ésima columna de A.
Es decir

$$W = [w^{(1)}, w^{(2)}, ..., w^{(n-n)}].$$

Necesitamos que

$$x = Yx_Y + Zx_Z, \tag{7}$$

donde $x_Y \in \mathcal{R}^m, \;\; x_Z \in \mathcal{R}^{n-m}$ y

$$(AY)x_Y = b.$$

Es decir, obtenemos una solución particular de $Ax = b$ por medio del sistema lineal

$$(B + NW^T)x_Y = b.$$

Sustituyendo (7) en la función objetivo (1) tenemos un problema de minimización sin restricciones

$$\min \; \frac{1}{2}{x_z}^T Z^T Q Z x_z + (Z^T(QYx_Y - c))^T x_z.$$