Fisica Computacional 2022

Guía de TP N° 2: Ecuaciones diferenciales ordinarias

septiembre , 2022

1. Sea la ecuación diferencial ordinaria,

$$y'(x) = -\alpha y$$

considerar el método de Euler para esta ecuación,

a) Encontrar el valor crítico h_c que asegure que el método sea estable.
b) Implementar el método de Euler y utilizarlo para analizar el error en la solucion como funcion de la discretizacion, para valores menores y mayores de h_c.

2. Para la ecuación del problema anterior,

$$y'(x) = -\alpha y$$

considerar el método de RK2 para esta ecuación,

a) Encontrar el valor crítico h_c que asegure que el método sea estable .
b) Implementar el método de RK2 y utilizarlo para analizar el error en la solucion como funcion de la discretizacion, para valores menores y mayores de h_c.

Problemas Propuestos

3. Considerar un modelo de la maquina de *pinball*[1], en la cual una esfera metálica impacta en una serie de obstáculos, y luego escapa del potencial hacia infinito. Uno esperaría que la dispersion de la esfera sea un proceso continuo, y sin embargo se observa en experimentos que para ciertas condiciones, la trayectoria de entrada y de salida despues de los multiples rebotes en los obstaculos aparentemente no presentan relacion.

En el presente problema se propone un modelo de la maquina de pinball, impactando una particula en 2D de cierta masa m y con cierta velocidad inicial v, en un potencial de la forma

$$V(x, y) = V_0 x^2 y^2 e^{-(x^2+y^2)} \tag{1}$$

este potencial tiene cuatro picos circulares en el plano x-y, con V_0 positivo el potencial es repulsivo, como en la maquina pinball, mientras que en el caso en el que sea negativo tenemos un potencial atractivo que puede tener estados ligados. Para analizar el comportamiento de nuestra *máquina*, calcularemos la sección de scattering, definida como el numero de particulas por unidad de tiempo dispersadas en el detector (a un angulo θ respecto de la direccion incidente en el plano), por angulo solido, por la intensidad incidente. Si b es el parametro de impacto, y θ es el angulo de salida de una particula incidente con dicho parametro de impacto, entonces podemos calcular la seccion diferencial de scattering como :

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta} \frac{1}{|\frac{d\theta}{db}|} \tag{2}$$

para obtener dicha sección primero es necesario realizar la dinamica para diferentes valores de b, y distintas energias incidentes.

(a) Obtenga el lagrangiano correspondiente a este problema, asi como las ecuaciones de lagrange correspondientes, tanto en coordenadas cartesianas como en polares.
(b) Analice cuales son las cantidades conservadas para este problema.
(c) En coordenadas cartesianas implemente las ecuaciones resultantes(las ecuaciones de la segunda ley de Newton)utilizando el metodo de RK4.
(d) Para una particula incidente con una velocidad en la direccion y, el parametro de impacto es la coordenada inicial x. El valor inicial de y deberia ser ajustado para que la particula se encuentre inicialmente en una region donde el cociente entre la energia potencial y la cinetica sea del orden de 10^{-10}.
Elija m=0.5, $v_y(0) = 0.5$, $v_x(0) = 0.0$, Δb=0.05, $|b| \leq 1$. Dibuje las trayectorias, buscando trayectorias donde encuentre comportamientos *usuales* e *inusuales*.
(e) Dibuje las trayectorias en el espacio de las fases, comparando estas con las que se esperarian en sistemas ligados y no ligados.
(f) determinar el angulo de dispersion para diferentes valores de b, y con estos la seccion diferencial de scattering. Identificar las discontinuidades en $\sigma(\theta)$ con los tipos de trayectorias. (g) Analizar variando la energia.
(h) Graficar el tiempo de delay, $T(b)$, buscando caracteristicas de autosimililaridad en la curva T vs b.

4. Considerar un pendulo formado por una cuerda de longitud l y una masa m. Se tiene una fuerza de amortiguamiento $f_r = -kv$ y una fuerza impulsora armonica $f(t) = f_0 \cos(wt)$. Plantear las ecuaciones de Newton para este sistema, y expresarla en la forma adimensional:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta\frac{d\theta}{dt} + \sin(\theta) = f cos(\omega t)$$

a) Expresar esta ecuación como un sistema de dos ecuaciones de la forma $y'(t) = f(t, y)$.
b) Implementar el método de Runge Kutta de orden 4 (RK4) y utilizarlo para encontrar la solución de este problema. Tener en cuenta que el angulo debe encontrarse entre 0 y 2π(o entre $-\pi$ a π).
c) Analizar la exactitud de la solución con este método considerando oscilaciones pequenãs para β y f nulos.
d) Considerar un valor de ω=2/3(cercano y levemente menor a la frecuencia del modo normal del oscilador simple) y un valor de $\beta = 0.5$. Analizar el diagrama de fases θ-ω. En particular dibujar variando f tomando valores entre 0.9 a 1.51. Encontrar los puntos donde hay cambios cualitativos en el grafico, buscando puntos donde el sistema pasa de oscilatorio(valores de θ acotados), libratorio(valores de ω acotados) a caotico(un diagrama denso de lineas de trayectoria).
e) El exponente de Lyapunov es una magnitud que permite determinar si un sistema es caotico o no. La magnitud mide como el cambio en una condición inicial se incrementa con el tiempo,

$$\delta x(t) = \exp(\lambda t) \cdot \delta x(0)$$

λ positivo implica que a tiempos largos la incerteza aumenta de manera exponencial, y el sistema puede ser caotico.

Numericamente, el exponente se puede definir como

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \ln(\frac{\delta x(t)}{\delta x(0)})/t$$

Calcular el exponente de lyapunov para los parametros del problema utilizados en d), y verificar en que casos, hay valores de λ positivo y un diagrama de fases del sistema *denso*(es decir, a tiempos largos, todos los puntos de una region son accesibles por la dinamica).

5. Hoddking and Huxley en 1952[4] propusieron un modelo para describir la transmisión del impulso nervioso que se propaga a través de la membrana celular. Sus resultados obtenidos mediante mediciones en el axón de un calamar gigante describen basicamente la dinámica del potencial de acción, que es la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la membrana de la celula, formando un *capacitor*. Este potencial se modifica basicamente debido a la permeabilidad de la membrana de la célula, en la que pueden circular cargas de diferentes iones que funcionan como corrientes de fugas para el capacitor. El modelo de Fitz Hugh Nagumo es un modelo simplificado que describe las caracteristicas mas importantes del comportamiento del potencial de la membrana :

$$\frac{dv}{dt} = v(a - v)(v - 1) - w + I_a \tag{3}$$

$$\frac{dw}{dt} = bv - \gamma w \tag{4}$$

Donde v es el potencial de acción y w una variable auxiliar e I_a. Inicialmente suponemos que $I_a = 0$

(a) Implementar la solución de este problema usando el metodo de Runge Kutta de orden 4.

(b) Explorar los tipos de solución para diferentes valores de γ , b y a. Particularmente, se distinguen dos comportamientos, un comportamiento de tipo *disparo* o activacion de señal, y otro normal o de reposo. Analizar numéricamente bajo que condiciones el sistema de *excita*.

(c) Un sistema no excitable se puede volver periodicamente excitable si se aplica una corriente constante I_a. Analizar este comportamiento mediante simulación numérica.

Bibliografía

1. R. Landau, Manuel J. Paezy Cristian Bordeianu, *A Survey in Computational Physics*, Pricenton University Press, 2008.

4. Hodgkin AL,Huxley AF (1952) Journal of Physiology 117:500–544.