Finding Delta of Look-back Options using Deep Learning

2018131030 전영준
연세대학교

Ⅰ. 연구 배경

1. 금융거래(Financial transactions)

현재 가격이 1인 사과 1개를 구매자가 판매자로부터 현재 시점에 구매하는 상황에는 아무런 금융 제도가 필요하지 않다. 그러나, 돈을 미래에 지불하는 약속을 하거나 사과를 미래에 받는 약속을 한다면 신용이라는 개념이 필요하다. 그렇다면 현재 시점에 미래의 구매 약속만 하고 미래에 거래가 이뤄진다면 어떨까.
선도계약(Forward Contract)이란 거래하기로 한 시점(만기 시점 T)에 미리 정해진 가격(선도가격 K)으로 기초자산을 사거나 팔고자 하는 거래이다. 즉, 정해진 시점에 정해진 가격으로 거래하기로 계약하는 것이다. 이때 기초자산을 사고자 하는 사람을 long position에 있다고 하고 팔고자 하는 사람을 short position에 있다고 한다. 선도계약을 통해 long position에 있는 사람은 기초자산의 가격 S_t가 오르더라도 선도가격 K에 구매할 수 있고, short position에 있는 사람은 기초자산의 가격 S_t가 떨어지더라도 선도가격 K에 판매할 수 있게 된다. 따라서 long position에 있는 사람의 보수는 $S_T - K$가 되고, short position에 있는 사람의 보수는 $K - S_T$가 된다.

2. 옵션(Options)

옵션도 선도계약과 마찬가지로 기초자산의 파생상품의 일종이지만, 거래를 약속하는 계약이 아니라 거래를 할 수 있는 권리를 갖는다는 점에서 다르다. 옵션(Option)은 크게 행사하는 시점이 언제인지에 따라 크게 아메리칸 옵션(American option)과 유러피안 옵션(European option)으로 나뉜다. 아메리칸 옵션은 만기 시점 T 이전에 미리 정해진 가격(행사가격 K)으로 기초자산을 사거나 팔 수 있는 권리를 상품화한 것이다. 즉, 만기 시점 T 이전 시점 언제든지 옵션을 행사하면 기초자산을 K에 사거나 팔 수 있다. 반면 유러피안 옵션은 만기 시점 T에만 옵션을 행사할 수 있다는 점에서 차이가 있다. 본고에서는 유러피안 옵션만 다루므로, 이하 내용에서 옵션이라함은 유러피안 옵션을 뜻한다. 선도계약에서와 마찬가지로 옵션에서도 short position과 long position을 구분할 수 있다. 옵션에서는 옵션을 구매한 사람, 즉 권리를 행사할 수 있는 사람을 long position이라 하고 옵션을 판매한 사람을 short positon이라 한다.

콜옵션(Call option)은 만기 시점 T에 행사가격 K로 기초자산을 살 수 있는 권리이다. 콜옵션을 산 사람은 기초자산의 가격이 오르면 더 낮은 가격 K로 기초자산을 구매할 수 있으므로 양의 보수를 얻게 된다. 반대로 콜옵션을 판 사람은 기초자산의 가격이 오르면 더 낮은 가격에 팔아야 하는 의무 때문에 음의 보수를 얻게 된다. 풋옵션(Put option)은 만기 시점 T에 행사가격 K로 기초자산을 팔 수 있는 권리이다. 풋옵션을 산 사람은 기초자산의 가격이 낮아지면 더 높은 가격 K로 기초자산을 판매할 수 있으므로 양의 보수를 얻게 된다. 반대로 풋옵션을 판 사람은 기초자산의 가격이 낮아지면 더 높은 가격에 사야 하는 의무 때문에 음의 보수를 얻게 된다. 따라서 콜옵션의 보수를 수식으로 나타내면 $\max(K-S_T,0)$이고, 풋옵션의 보수는 $\max(S_T-K,0)$가 된다.

3. Option Pricing

1) 복제(Replication)

미래에 두 가지 사건 A, B 중 하나가 일어난다고 가정하자. 은행에 10원을 예금하면 A, B 두 경우 모두 11원을 돌려주고, 9원짜리 복권을 구매하면 A일 때 22원, B일 때 0원을 얻는다. 그렇다면 A일 때 22원을 얻고 B일 때 11원을 얻는 금융상품 X의 적정가격은 얼마일까. 먼저, 적정가격이 무엇인지 정의하자. 적정한 가격이 되려면, 이 금융상품을 이용한 차익거래(arbitrage)가 없어야 한다고 하자. 즉, arbitrage-free price를 적정가격이라고 정의하면, X는 은행 예금과 복권 구매의 복제(Replication)로 만들어질 수 있다. 은행 예금을 10원만큼 하는 행위를 x_1만큼, 9원짜리 복권 구매하는 행위를 x_2만큼 하여 X의 보수와 같게 구성하려 하는 것은 아래 방정식을 푸는 것과 같다.

$$\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}\times x_1+\begin{bmatrix}22\\0\end{bmatrix}\times x_2=\begin{bmatrix}22\\11\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}=0.5$$

따라서, X라는 금융상품은 예금과 복권으로 복제될 수 있으며, 가격을 구하면 아래와 같다.

$$10\times x_1+9\times x_2=10\times 1+9\times 0.5=14.5$$

2) Arrow-Debrew Security

복제의 방법을 이용하여 A에는 1원을, B에는 0원을 주는 금융상품 Y와 A에는 0원을, B에는 1원을 주는 금융상품 Z를 만들어 보자.

$$\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}\times y_1+\begin{bmatrix}22\\0\end{bmatrix}\times y_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ y_1=0,\ y_2=\frac{1}{22},\ Y=y_1\times M+y_2\times T=\frac{1}{22}T$$

(M은 10원을 예금하는 금융상품, T는 9원짜리 복권)

Y의 가격P_Y는 $P_Y = 0 \times 10 + \frac{1}{22} \times 9 = \frac{9}{22}$이다.

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix} \times z_1 + \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \end{bmatrix} \times z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ z_1 = \frac{1}{11}, \ z_2 = -\frac{1}{22}, \ Z = z_1 \times M + z_2 \times T = \frac{1}{11} M - \frac{1}{22} T$$

(M은 10원을 예금하는 금융상품, T는 9원짜리 복권)

Z의 가격P_Z는 $P_Z = \frac{1}{11} \times 10 - \frac{1}{22} \times 9 = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$이다.

이 가상의 금융상품(채권) Y, Z를 각각 u_1, u_2라고 하고 Arrow-Debrew Security라고 한다. 이를 이용하여 앞서 계산한 금융상품 X의 적정가격 P_X를 쉽게 계산할 수 있고, 어떠한 보수를 주는 금융상품이더라도 아래와 유사하게 적정가격을 계산할 수 있다.

$$P_X = 22 \times \frac{u_1}{u_1 + u_2} \times (u_1 + u_2) + 11 \times \frac{u_2}{u_1 + u_2} \times (u_1 + u_2)$$

여기서 $u_1 + u_2$는 미래에 항상 1의 보수를 주는 금융상품의 가격이므로 discount factor(df)이고, 위 식을 df를 이용하여 다시 쓰면 아래와 같다.

$$P_X = df \times \left[22 \times \frac{u_1}{u_1 + u_2} + 11 \times \frac{u_2}{u_1 + u_2} \right] = df \times E[X]$$

($E[X]$는 미래의 기대 보수)

이처럼 어떠한 보수를 갖는 금융상품이더라도 Arrow-Debrew Security의 가격을 안다면 금융상품의 적정가격을 기대 미래보수의 현재가치 $df \times E[X]$로 계산할 수 있다.

3) Option Pricing[1)]

현재가치가 S인 기초자산의 미래가치가 uS 또는 dS로 바뀌고, 이때 미래에 r을 돌려주는 채권의 가격이 1이라고 하자. 이때 행사가격이 K인 콜옵션의 가격 C를 계산해 보자. 콜옵션의 보수는 기초자산의 미래가치에 따라 $C_u = \max(uS - K, 0)$, $C_d = \max(dS - K, 0)$으로 바뀐다. 기초자산을 델타(delta) Δ만큼, 채권을 B만큼 사서 콜옵션의 보수를 복제하면,

$$\begin{bmatrix} uS \\ dS \end{bmatrix} \times \Delta + \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} C_u \\ C_d \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ \Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}, \ B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r}$$

$$\begin{aligned} C &= S \times \Delta + 1 \times B \\ &= S \times \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} + 1 \times \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} \\ &= \frac{1}{r} \times \left[C_u \left(\frac{r-d}{u-d} \right) + C_d \left(\frac{u-r}{u-d} \right) \right] \end{aligned}$$

이때, $\frac{1}{r}$이 discount factor df이고, $p = \frac{r-d}{u-d}$, $1-p = \frac{u-r}{u-d}$가 위험 중립 확률(risk-neutral probability)이 되어 콜옵션의 가격을 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$C = [pC_u + (1-p)C_d]/r$

이때, 콜옵션의 가격은 기초자산의 미래가치가 uS 또는 dS로 바뀔 확률과는 무관한 것을 관찰할 수 있다.

4. 기계학습(Machine learning)과 딥러닝(Deep learning)

기계학습(Machine learning)이란 명시적인 프로그래밍 없이 컴퓨터가 데이터로부터 결정을 내릴 능력을 학습하는 것을 말한다. 지도 학습(Supervised learning)이란 labeled data를 이용하여 학습하는 것이고, 비지도 학습(Unsupervised learning)이란 unlabeled data를 이용하여 학습하는 것이다. 지도 학습은 주어진 예측 변수(predictor variable)로 목표 변수(target variable)를 예측하는 것이 목표이고, 크게 분류(Classification)와 회귀(Regression)로 나뉜다. 컴퓨터에게 학습하기 전에 데이터 전처리(Preprocessing data) 과정이 필요하다. 손실된 데이터를 어떻게 다룰지 정하고 정규화(normalization)를 통해 모델의 성능 저해 요소를 줄인다. 이때, 표준화(standardization)와 같은 방법들을 사용할 수 있다. 학습 과정에서는 데이터를 여러 개로 나누고 여러 모델을 동시에 학습하여 성능을 평가하는 교차 검증(Cross validation, CV) 방법을 이용할 수 있다.

딥러닝(Deep learning)이란 기계학습의 일종으로 신경망(Neural network)의 구조에서 은닉층(hidden layer)을 다중으로 쌓아 깊은(deep) 네트워크(network) 구조를 만들어 컴퓨터를 학습(learn)하는 것을 말한다. 딥러닝에서는 순전파(forward propagation)를 통해 최적화(optimization)를 한다. 이때 손실 함수(loss function)를 최소화시키는 방향으로 최적화하며, 기울기 하강법(gradient descent)을 이용하여 손실 함수를 최소화한다. 이 과정에서 학습률(learning rate)이라는 파라미터를 이용하여 얼마나 빠르게 학습시킬지가 중요하다. 기울기 하강법을 이용하여 순전파하는 과정은 다수의 은닉층이 있을 때, 제대로 하이퍼파라미터(hyper parameter)가 튜닝(tuning)되지 않기 때문에 역전파(back propagation) 과정을 거친다.

Ⅱ. 연구 방법 및 목적

1. 연구 방법 - 딥러닝(Deep learning)을 이용한 Delta

콜옵션(Call option)과 풋옵션(Put option)의 경우 Black, F. & Scholes, M.[2)]에 의해 델타(delta)가 밝혀져 있다. 즉, 이자율 r, 변동성 σ, 초기 기초자산의 가격 S_t, 옵션의 행사가격 K, 만기 시점 T이 주어져 있을 때, 옵션을 복제(Replication)하려면 기초자산을 얼마나 보유

해야 하는지를 밝혀낸 것이고 다음과 같다.

$$\triangle_{Call} = N(d_1),\ \triangle_{Put} = \triangle_{Call} - 1$$

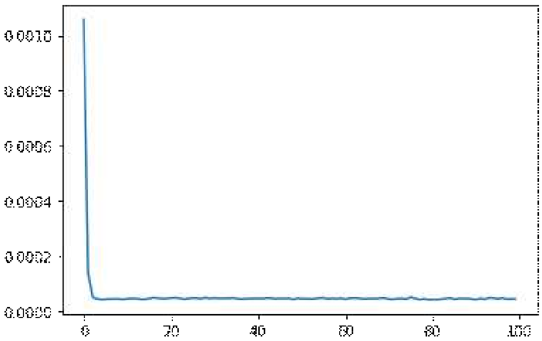
단, $d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S_t}{K} + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2 = \dfrac{\ln\dfrac{S_t}{K} + \left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$

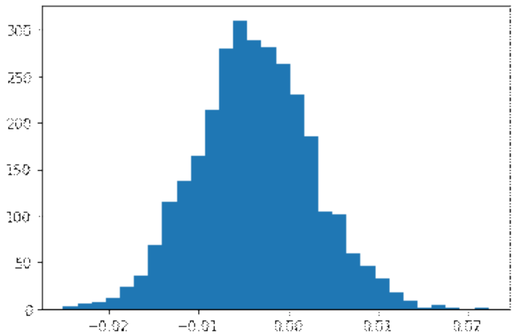
이에 따라 콜옵션 가격을 구해 보면 아래와 같다.

$$C = S_t N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

단, $N(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

만약 이런 공식이 주어져 있지 않다면, 델타가 얼마일지 알 수가 없다. 그때 딥러닝을 이용해서 델타를 구할 수 있고, 60개짜리 30일간의 주가 데이터 3000개를 이용하여 콜옵션의 델타를 파라미터로 하는 딥러닝 모델을 만들어 결과를 보면 다음과 같다. 왼쪽은 손실 함수의 추이를, 오른쪽은 예측값의 분포를 나타낸 것으로 0이 가까워야 성능이 좋다.





한편, 이 모델은 옵션의 가격을 알고 있기에 델타를 예측할 수 있다. 옵션의 적정가격을 알 수 없다면 몬테카를로 방법(Monte Carlo method)을 이용하여 적정가격을 구할 수 있다. 몬테카를로 방법은 무작위 추출을 반복하여 근사적으로 값을 구하는 방법이다. 이를 이용하기 위해 무작위로 주가 데이터를 생성하고, 옵션의 보수를 계산한다. 이렇게 옵션의 보수를 반복적으로 생성하여 기댓값을 구하고, 현재가치로 환산해주면 arbitrage-free price를 구할 수 있다.

2. 연구 목적

본 연구의 목적은 룩백 옵션(Look-back Option)의 델타를 예측하는 파라미터로 하는 딥러닝 모델을 이용하여 룩백 옵션을 델타 헷징(hedging)하는 것이다. 이 모델을 통해 룩백 옵션의

델타를 찾을 수 있다.

Ⅲ. 연구 내용

1. 룩백 옵션(Look-back Option)

룩백 옵션(Look-back Option)은 옵션의 발행 시점부터 만기 시점 사이에서 기초자산의 최소 또는 최고 가격에 따라 보수(payoff)가 결정되는 옵션이다. 룩백 옵션에는 floating strike와 fixed strike 두 가지가 있다.

1) Look-back options with floating strike

floating strike가 있는 룩백 옵션은 옵션의 행사가격이 변동하고 만기에 결정되는 옵션이다. 콜옵션의 행사가격은 옵션이 발행된 시점부터 만기 시점 사이의 기간동안의 기초자산의 최소가 되고, 풋옵션의 행사가격은 기초자산의 최고 가격이 된다.

$$LC_{float} = \max(S_T - S_{\min}, 0) = S_T - S_{\min}$$
$$LP_{float} = \max(S_{\max} - S_T, 0) = S_{\max} - S_T$$

2) Look-back options with fixed strike

fixed strike가 있는 룩백 옵션은 옵션의 행사가격이 고정되어 있지만 옵션이 만기 가격으로 결정되지 않는 옵션이다. 콜옵션의 만기 가격은 옵션이 발행된 시점부터 만기 시점 사이의 기간동안의 기초자산의 최고가 되고, 풋옵션의 행사가격은 기초자산의 최소 가격이 된다.

$$LC_{fix} = \max(S_{\max} - K, 0)$$
$$LP_{fix} = \max(K - S_{\min}, 0)$$

2. Arbitrage-free price of look-back options with floating strike

floating strike가 있는 룩백 옵션은 옵션의 적정가격이 Marek Musiela & Marek Rutkowski[3]에 의해 알려져 있다. 이자율이 r, 기초자산의 변동성이 σ, 현재 시점이 t, 만기 시점이 T, $\tau = t - T$라 하고, $M = \max_{0 \le u \le t} S_u$, $m = \min_{0 \le u \le t} S_u$, $S_t = S$라 하면, floating strike가 있는 룩백 콜옵션과 룩백 풋옵션의 가격은 다음과 같다.

$$LC_t = SN(a_1(S,m)) - me^{-r\tau}N(a_2(S,m)) - \frac{S\sigma^2}{2r}\left(N(-a_1(S,m)) - e^{-r\tau}\left(\frac{m}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}N(-a_3(S,m))\right),$$

$$LP_t = -SN(-a_1(S,M)) + Me^{-r\tau}N(-a_2(S,M)) + \frac{S\sigma^2}{2r}\left(N(a_1(S,M)) - e^{-r\tau}\left(\frac{M}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}N(a_3(S,M))\right)$$

단,

$$a_1(S,H) = \frac{\ln\frac{S}{H} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$a_2(S,H) = \frac{\ln\frac{S}{H} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$a_3(S,H) = \frac{\ln\frac{S}{H} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$N(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$r = 0.01$, $\sigma = 0.2$, $T = \frac{30}{365}$, $M = 2000$(주가 데이터 개수), $N = 60$(시간 분할 수)일 때, floating strike가 있는 룩백 옵션의 가격을 구해보았다. np.random.seed는 1로 두었으며, 주가 데이터마다 $S_{\min}$, $S_{\max}$을 구하여 이용하였다. 옵션 가격에 대입할 때에는 2000개의 $S_{\min}$(또는 $S_{\max}$)을 평균하여 평균적인 주식의 최소(또는 최대)가격를 반영하였다.

floating strike	룩백 콜옵션	룩백 풋옵션
옵션 가격	0.05600886244316999	0.05885521568467633

3. 몬테카를로 방법(Monte Carlo method)을 이용한 룩백 옵션의 가격

몬테카를로 방법을 이용하여 $r = 0.01$, $\sigma = 0.2$, $T = \frac{30}{365}$, $M = 2000$(주가 데이터 개수), $N = 60$(시간 분할 수)일 때, floating strike가 있는 룩백 옵션의 가격을 구해보았다. np.random.seed는 1로 두었으며, 주가 데이터마다 $S_{\min}$, $S_{\max}$을 구하여 이용하였다. discount factor e^{-rT}를 이용하여 현재가치를 구하였다.

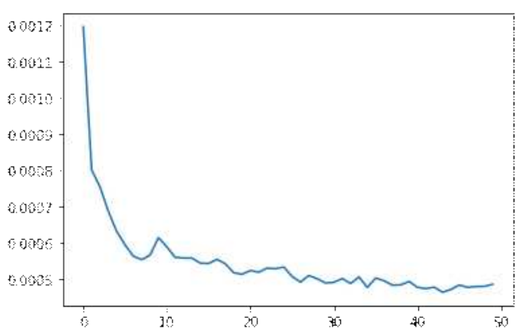
	floating strike	
	룩백 콜옵션	룩백 풋옵션
옵션 가격	0.08245262740969769	0.0012456355978604655
	fixed strike	
	룩백 콜옵션	룩백 풋옵션
옵션 가격	0.04375600590598895	0.039942257101569206

Ⅳ. 연구 결과

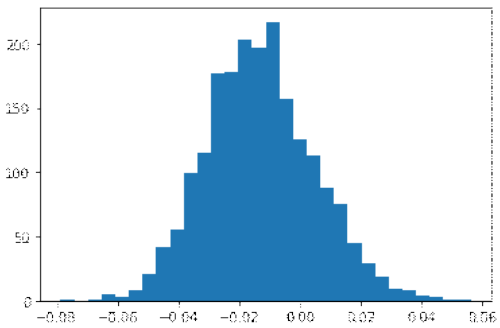
floating strike가 있는 룩백 콜옵션, 룩백 풋옵션 그리고 fixed strike가 있는 룩백 콜옵션, 룩백 풋옵션 총 4가지 옵션에 대하여 딥러닝 모델을 구성하였다. 4가지 모델 모두 델타를 파라미터로 하며, 델타 헷징 방법을 이용하여 옵션의 payoff를 복제하는 방식이다. 그렇게 해서 복제한 옵션의 payoff에서 옵션의 적정가격을 뺀 것이 0이 되도록 목표 변수(target variable)를 설정하였다. 기초자산의 초기가격과 옵션의 행사가격은 1로 두었으며, 시계열 데이터를 사용하므로 입력벡터(input vector)를 순차적으로 대입하는 RNN(Recurrent Neural Network)기반의 모델을 구성하였다. 이어서 나올 그림에서는 목표 변수가 0이므로 loss가 작을수록, 예측 변수(predict variable)의 히스토그램이 0에 몰려 있을수록, 예측 변수의 scatter diagram이 0에 몰려 있을수록 성능이 좋다는 것을 나타낸다.

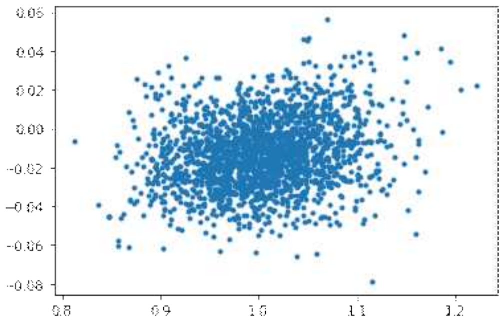
1. Look-back call option with floating strike

$r=0.01$, $\sigma=0.2$, $T=\dfrac{30}{365}$, $M=2000$(주가 데이터 개수), $N=60$(시간 분할 수)일 때, floating strike가 있는 룩백 콜옵션의 델타를 찾도록 모델을 구성하였다. floating strike가 있는 룩백 콜옵션은 적정가격 공식이 주어져 있으므로 몬테카를로 방법을 사용한 가격이 아닌 공식으로 구한 가격을 사용하였다. batch_size는 32로, 에포크(epoch)의 개수는 50으로 하였다.
에포크(epoch)마다 변화하는 손실 함수의 추이는 다음과 같다.



예측 변수의 히스토그램과 scatter diagram은 다음과 같다.

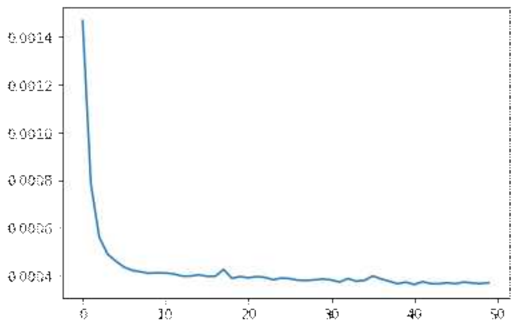




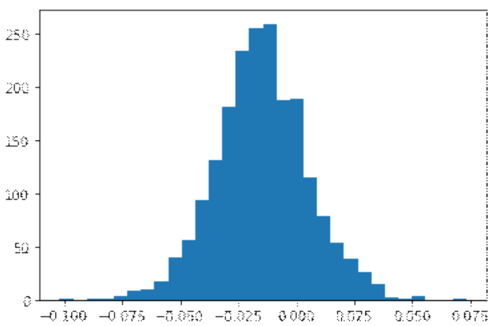
2. Look-back put option with floating strike

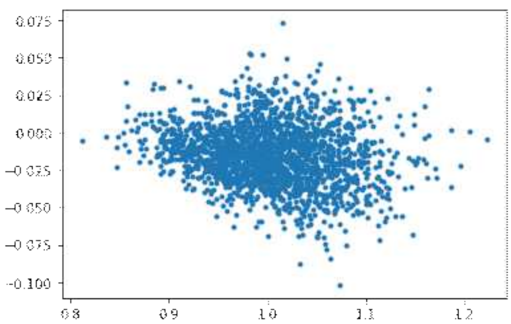
$r=0.01$, $\sigma=0.2$, $T=\dfrac{30}{365}$, $M=2000$(주가 데이터 개수), $N=60$(시간 분할 수)일 때, floating strike가 있는 룩백 풋옵션의 델타를 찾도록 모델을 구성하였다. floating strike가 있는 룩백 풋옵션은 적정가격 공식이 주어져 있으므로 몬테카를로 방법을 사용한 가격이 아닌 공식으로 구한 가격을 사용하였다. batch_size는 32로, 에포크(epoch)의 개수는 100으로 하였다.

에포크(epoch)마다 변화하는 손실 함수의 추이는 다음과 같다.



예측 변수의 히스토그램과 scatter diagram은 다음과 같다.

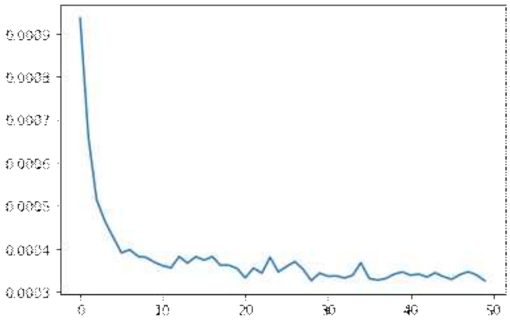




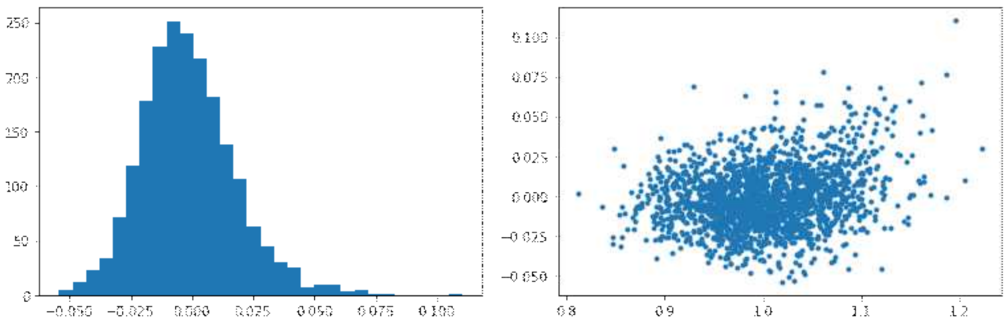
3. Look-back call option with fixed strike

$r = 0.01$, $\sigma = 0.2$, $T = \dfrac{30}{365}$, $M = 2000$(주가 데이터 개수), $N = 60$(시간 분할 수)일 때, fixed strike가 있는 룩백 콜옵션의 델타를 찾도록 모델을 구성하였다. fixed strike가 있는 룩백 콜옵션은 적정가격 공식이 주어져 있지 않으므로 몬테카를로 방법을 사용한 가격을 사용하였다. batch_size는 32로, 에포크(epoch)의 개수는 50으로 하였다.

에포크(epoch)마다 변화하는 손실 함수의 추이는 다음과 같다.



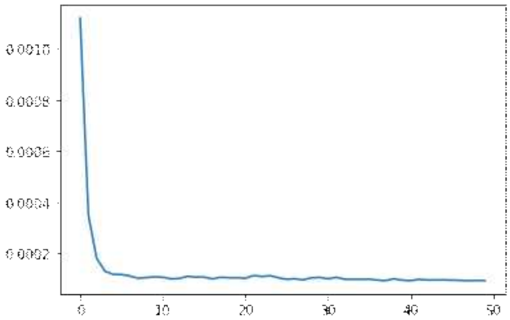
예측 변수의 히스토그램과 scatter diagram은 다음과 같다.



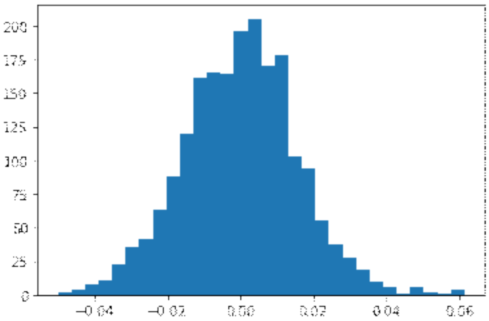
4. Look-back put option with fixed strike

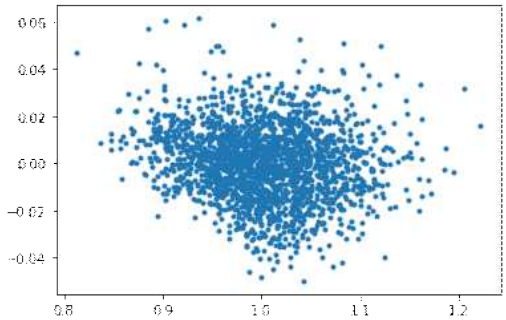
$r = 0.01$, $\sigma = 0.2$, $T = \dfrac{30}{365}$, $M = 2000$(주가 데이터 개수), $N = 60$(시간 분할 수)일 때, fixed strike가 있는 룩백 콜옵션의 델타를 찾도록 모델을 구성하였다. fixed strike가 있는 룩백 콜옵션은 적정가격 공식이 주어져 있지 않으므로 몬테카를로 방법을 사용한 가격을 사용하였다. batch_size는 32로, 에포크(epoch)의 개수는 50으로 하였다.

에포크(epoch)마다 변화하는 손실 함수의 추이는 다음과 같다.



예측 변수의 히스토그램과 scatter diagram은 다음과 같다.





V. 결론

4가지 룩백 옵션(look-back option) 모두에서 딥러닝을 이용하여 예측 변수가 목표 변수인 0에 가깝게 하는 델타를 찾을 수 있음을 확인했다.

참고문헌

1) John C. Cox, Stephen A. Ross & Mark Rubinstein. (1979). Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics. 7(3). 229-263.
2) Fischer Black & Myron Scholes. (1973). The Journal of Political Economy, 81(3). 637-654.
3) Marek Musiela & Marek Rutkowski. (1997). Martingale Methods in Financial Modelling. Springer. 214-218.