Aufgabenblatt 1 - Aufgabe 2

21. Oktober 2014

(a) Es gilt zu beweisen, dass $F_n \geq 2^{0.5 \cdot n}$ für alle $n \geq 6$ gilt.

Induktionsanfang: $n = 6$

$$F_6 = 8 \geq 2^{0.5 \cdot 6} = 8$$

Induktionsannahme: $F_n \geq 2^{0.5 \cdot n}$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned}
F_{n+1} = F_n + F_{n-1} &\geq 2^{0.5 \cdot n} \cdot 2^{0.5 \cdot (n-1)} \\
\Leftrightarrow F_n + F_{n-1} &\geq 2^{0.5 \cdot n} \cdot \left(2^{0.5 \cdot n} + 2^{0.5 \cdot -1}\right) \\
\Leftrightarrow F_n + F_{n-1} &\geq 2^{0.5 \cdot n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Nun gilt es noch zu zeigen, dass $F_{n+1} \geq 2^{0.5 \cdot n+1}$ gilt, indem wir zeigen, dass $2^{0.5 \cdot n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 2^{0.5 \cdot n+1}$ gilt. (Man kann unschwer sehen, dass aus letzterer Ungleichung erstere folgt.)

$$\begin{aligned}
2^{0.5 \cdot n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &\geq 2^{0.5 \cdot n+1} \\
\Leftrightarrow 2^{0.5 \cdot n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &\geq 2^{0.5 \cdot n} \cdot \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} &\geq \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} &\geq \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} &\geq \frac{2}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} &\geq 2
\end{aligned}$$

Da $\sqrt{2}$ größer als 1 ist, ist $\sqrt{2}+1$ größer als 2, woraus folgt, dass die Behauptung stimmt. $\square$

(b)