Algorithmen und Datenstrukturen Aufgabenblatt 1

Uschi Dolfus, Frederik Wille, Julian Deinert

21. Oktober 2014

Aufgabe 1

(a) $\frac{1}{x} \prec 1 \prec \log(\log(x)) \prec \log(x) \asymp \log(x^3) \prec \log(x^{\log(x)}) \prec x^{0.01} \prec x^{\frac{1}{2}} \prec x(\log(x)) \prec x^8 \prec 2^x \prec 8^x \prec x! \prec x^x$

Beweise:

i. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

ii. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\log(\log(x))} = 0$

iii. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)} = 0$, da $\log(x) < x \to \log(\log(x)) < \log(x)$

iv. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\log(x^3)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{3\log(x)} = \frac{1}{3}$

v. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x^3)}{\log(x^{\log(x)})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3\log(x)}{\log(x)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{\log(x)} = 0$

vi. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x^{\log(x)})}{x^{0.01}} = 0$, da jede Potenzfunktion schneller wächst, als jede Potenz vom Logarithmus

vii. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{0.01}}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$

viii. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x\log(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times \log(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\log(x)} = 0$

ix. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\log(x)}{x^8} = \frac{\log(x)}{x^7} = 0$

x. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^8}{2^x} = 0$

xi. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{8^x} = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{2}{8})^x = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{4})^x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1^x}{4^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{4^x} = 0$

xii. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8^x}{x!} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8\times8\times8\cdots\times8}{x\times(x-1)\times(x-2)\times\cdots\times1} = 0$

xiii. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x!}{x^x} = \frac{x\times(x-1)\times(x-2)\times\cdots\times1}{x\times x\times x\times\cdots\times x} = 0$

(b) i. Behauptung:
Sei b beliebig und $b > 1$, so gilt $\log_b(n) \in \Theta(\log_2(n))$

Beweis:
Die Behauptung ist äquivalent zu:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_b(n)}{\log_2(n)}$ = konstanter Wert. Laut Präsenzaufgaben gilt: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} <=> \log_b(a) = \frac{\log_b(x)}{\log_a(x)}$ also gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{log_b(n)}{log_2(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} log_b(2)$ = konstanter Wert für alle $b > 1$

ii. Behauptung:
wenn $f \in \Omega(g)$ ist, so ist $g \in \omega(f)$

Beweis:
Obige Behauptung ist äquivalent zu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$. Dies gilt aber nur, wenn $g(n) > f(n)$ (da sonst $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$). daraus folgt, dass der $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$ ist und somit $g \in \omega(f)$

iii. Behauptung:
Für alle $c \in \mathbb{R}+$ und $f_c(n) := \sum\limits_{i=1}^{n}(c^i)$ gilt:
$f_c(n) \in O(n) \leftrightarrow c = 1$

Beweis:
$f_c(n) \in O(n) \leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_c(n)}{n}$ = konstanter Wert
$\to \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_c(n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(c^i)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(c^1+c^2+\dots+c^n)}{n}$
$\to \sum\limits_{i=1}^{n}(c^i) > n$ für alle c ungleich 1 $\to \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(c^i)}{n} = \infty$
$\to$Nur wenn $c = 1$ ist gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(c^i)}{n}$ = konstanter Wert, denn dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(c^i)}{n} = \frac{1}{n}$