FGI-2 – Formale Grundlagen der Informatik II

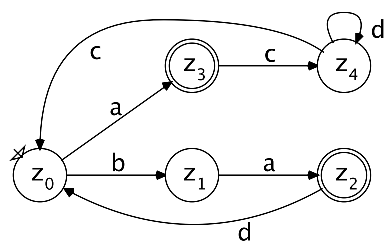
Modellierung und Analyse von Informatiksystemen

Musterlösung 2 : Büchi-Automaten, ω-reguläre Sprachen

Präsenzteil am 19./20. 10. – Abgabe am 26./27. 10. 2015

Präsenzaufgabe 2.1: Betrachten Sie den Büchi-Automaten A aus Beispiel 1.11 im Skript. Der folgende Büchi-Automat akzeptiert die Sprache:

$$L^\omega(A) = \big(\{ac\}\{d\}^*\{c\} \cup \{bad\}\big)^\omega$$



1. Erläutern Sie, warum $L^\omega(A)$ so aussieht, wie es im Skript angegeben ist.

   Lösung: Laut Beispiel 1.11 gilt $L^\omega(A) = (acd^*c + bad)^\omega$.

   A akzeptiert ein ω-Wort genau dann, wenn die Zustandsfolge zum Wort einen Endzustand unendlich oft enthält. Es muss also entweder z_2 oder z_3 unendlich oft auftreten.

   Fall z_2: Kann nur unendlich oft auftreten, wenn die Schleife z_0, z_1, z_2 unendlich oft durchlaufen wird, d.h. der Wortteil bad unendlich oft auftritt. In z_0 darf aber auch die obere Schleife zwischendurch beliebig oft gewählt werden, solange später wieder bad folgt.

   Fall z_3: Kann nur unendlich oft auftreten, wenn die Schleife z_0, z_3, z_4 unendlich oft durchlaufen wird, d.h. der Wortteil acc unendlich oft auftritt. In z_4 darf aber auch die d-Schleife beliebig oft eingeschoben werden, so dass der zu durchlaufende Wortteil auf acd^*c erweitert wird. Außerdem darf in z_0 auch die untere Schleife zwischendurch beliebig oft gewählt werden, solange später wieder acd^*c folgt.

   Als ω-reguläre Ausdrücke:

   Fall z_2: $((acd^*c)^* \cdot bad)^\omega$

   Fall z_3: $((bad)^* \cdot acd^*c)^\omega$

   Zusammen: $L^\omega(A) = ((acd^*c)^* \cdot bad)^\omega + ((bad)^* \cdot acd^*c)^\omega$

   Die beiden Alternativen lassen sich mit etwas Überlegung zum oben genannten Ausdruck zusammenfassen.

2. Betrachten Sie A als NFA. Bestimmen Sie $L(A)$.

   Lösung: $L(A) = (acd^*c + bad)^*(a + ba)$

3. Angenommen z_2 sei nicht mehr Endzustand und sei A' der resultierende Automat. Bestimmen Sie dann die resultierende Sprache $L^\omega(A')$.

Lösung: $L^\omega(A') = ((bad)^* \cdot acd^*c)^\omega$

(Die obere Schleife muss unendlich oft auftreten, um z_3 unendlich oft zu besuchen. Die untere Schleife $z_0z_1z_2$ kann sowohl endlich als auch unendlich oft auftreten. Eine unendliche Wiederholung der unteren Schleife wird aber nur akzeptiert, wenn auch die obere Schleife mit Endzustand z_3 unendlich oft dazwischen auftritt.)

Präsenzaufgabe 2.2: Zeigen Sie die erste Teilaussage von Lemma 1.15: „Die Vereinigung zweier ω-regulärer Mengen $U \cup V$ ist immer eine ω-reguläre Menge.“

1. Geben Sie ein Verfahren an, welches $U \cup V$ konstruktiv aus U und V ermittelt.

   Lösung: *A) Über ω-reguläre Ausdrücke:* Gegeben zwei ω-reguläre Ausdrücke R_U und R_V, die U respektive V beschreiben, d.h. es gelten $M_{R_U} = U$ und $M_{R_V} = V$. Dann ist gemäß Def. 1.6 und 1.17 $R_U + R_V$ ein ω-regulärer Ausdruck, der $M_{R_U+R_V} := M_{R_U} \cup M_{R_V} = U \cup V$ beschreibt.

   B) Über Büchi-Automaten: Gegeben zwei Büchi-Automaten $A_U = (Q_U, \Sigma, \delta_U, Q_{0,U}, F_U)$ und $A_V = (Q_V, \Sigma, \delta_V, Q_{0,V}, F_V)$, die U respektive V akzeptieren. Die Vereinigung der (disjunkten) Zustandsmengen und Übergangsrelationen liefert den gesuchten Büchi-Automaten B, der alle Wörter aus beiden Sprachen akzeptiert:

$$\begin{array}{lcl} Q_B & := & Q_U \cup Q_V \\ Q_{0,B} & := & Q_{0,U} \cup Q_{0,V} \\ F_B & := & F_U \cup F_V \\ \delta_B & := & \delta_U \cup \delta_V \\ & = & \{(q,x,q') \mid (q,x,q') \in \delta_U \vee (q,x,q') \in \delta_V\} \end{array}$$

   C) Ergänzung zu Variante B): Zusätzlich zur Vereinigung kann ein neuer Startzustand q_s eingeführt werden. Die bisherigen Startzustände sind dann keine mehr. Vom neuen Startzustand gehen Kanten zu allen Folgezuständen der bisherigen Startzustände mit jeweils identischer Beschriftung:

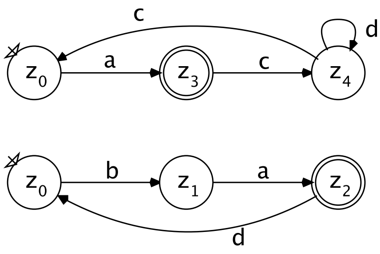
$$\begin{array}{lcl} Q_C & := & Q_B \cup \{q_s\} \\ Q_{0,C} & := & \{q_s\} \\ F_B & := & F_U \cup F_V \\ \delta_B & := & \delta_B \\ & \cup & \{(q_s,x,q') \mid \exists q \in Q_{0,U} : (q,x,q') \in \delta_U\} \\ & \cup & \{(q_s,x,q') \mid \exists q \in Q_{0,V} : (q,x,q') \in \delta_V\} \end{array}$$

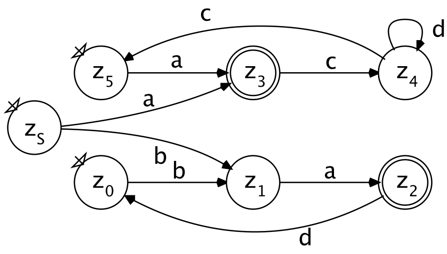
2. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die Sprachen $L_{2.2.1} = \{bad\}^\omega$ und $L_{2.2.2} = (\{ac\} \cdot \{d\}^* \cdot \{c\})^\omega$ an.

   Lösung: ω-reguläre Ausdrücke gemäß Alternative A):

$$\begin{array}{lcl} R_U & = & (bad)^\omega \\ R_V & = & (ac \cdot d^* \cdot c)^\omega \\ R_{U+V} & = & (bad)^\omega + (ac \cdot d^* \cdot c)^\omega \end{array}$$

   Büchi-Automaten B und C gemäß Alternativen B) und C):





Es gilt $L^\omega(B) = L^\omega(C) = (bad)^\omega + (acd^*c)^\omega$.

Die rechte Lösung besitzt nur einen Startzustand.

3. Begründen Sie Korrektheit und Termination Ihres Verfahrens.

Lösung: *Termination:* Alle drei Verfahren bestehen nur aus einem Schritt, terminieren also immer.

Korrektheit:

A) Gemäß Def. 1.17 ist $R_U + R_V$ ein wohlgeformter ω-regulärer Ausdruck (es werden keine in Sequenzen eingeschachtelten ω-Abschlüsse eingeführt). Gemäß Def. 1.6 beschreibt $R_U + R_V$ genau die gesuchte Menge $M_{R_U+R_V} := M_{R_U} \cup M_{R_V} = U \cup V$.

B) Korrektheit ($(U \cup V) \subseteq L^\omega(B)$): Sei $w \in U$, d.h. $w \in L^\omega(A_U)$. Dann gibt es einen unendlichen Pfad zu w in A_U, der einen Endzustand $q_e \in F_A$ unendlich oft enthält. Dieser Pfad ist in B ebenfalls möglich, da durch die Vereinigung weder Start- noch Endzustände noch Übergänge entfernt werden.

Analog kann für $w \in V$ argumentiert werden.

Korrektheit ($L^\omega(B) \subseteq (U \cup V)$): Da die Zustandsmengen vor der Vereinigung disjunkt waren, gibt es auch keine Übergänge zwischen Zuständen aus den beiden Automatenteilen. Daher können keine Wörter von B akzeptiert werden, die nicht von einem der einzelnen Automaten akzeptiert werden.

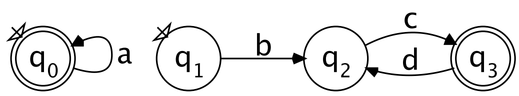
C) Da der neue Startzustand q_s in C die gleichen Übergänge bietet wie alle Startzustände in $Q_{0,B}$ zusammengenommen und die Übergänge jeweils in die gleichen Folgezustände führen, können dieselben Wörter gelesen werden. Alle akzeptierten Pfade in C unterscheiden sich ab dem zweiten Zustand nicht mehr von den akzeptierten Pfaden in B.

4. Vergleichen Sie die Sprache $L_{2.2.1} \cup L_{2.2.2}$ mit der Sprache $L^\omega(A)$ aus Präsenzaufgabe 2.1.

Lösung: In $L^\omega(A)$ können Schleifenteile gemischt auftreten, in $L_{2.2.1} \cup L_{2.2.2}$ nicht.

von
6

Übungsaufgabe 2.3: Gegeben der NFA $A_{2.3}$:



1. Geben Sie explizit die Sprache $L(A_{2.3})$ sowie die Sprachen $L^\omega(A_{2.3})$ und $(L(A_{2.3}))^\omega$ als regulären bzw. ω-regulären Ausdruck an.

Lösung: $L(A_{2.3}) = a^* + bc(dc)^*$

$L^\omega(A_{2.3}) = a^\omega + bc(dc)^\omega = a^\omega + b(cd)^\omega$

$(L(A_{2.3}))^\omega = (a^* + bc(dc)^*)^\omega$

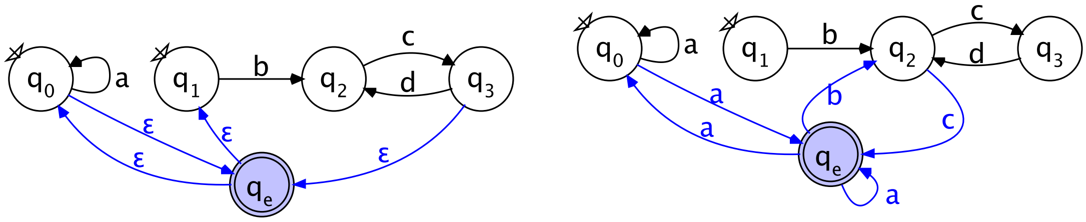
2. Diskutieren Sie den Unterschied zwischen $L^\omega(A_{2.3})$ und $(L(A_{2.3}))^\omega$. Benennen Sie zwei konkrete ω-Wörter aus jeder Sprache (Sie können die Wörter als ω-reguläre Ausdrücke ohne die Operatoren $+$, $()^+$ und $()^*$ beschreiben).

Lösung: $L^\omega(A_{2.3})$ ist die akzeptierte Sprache, wenn $A_{2.3}$ unverändert als Büchi-Automat betrachtet wird. Es gibt genau zwei unendliche Pfade in diesem Automaten, welche den ω-Wörtern $w_1 = a^\omega$ und $w_2 = b(cd)^\omega$ entsprechen.

Dagegen ist $(L(A_{2.3}))^\omega$ eine Sprache mit unendlich vielen verschiedenen ω-Wörtern, deren Teilstücke beliebig aus den akzeptierten Wörtern des NFA gewählt werden können. Beispiele sind: $w_1 = a^\omega$, $w_3 = (abc)^\omega$ oder $w_4 = (bcdc)^\omega$. Das Wort w_2 gehört *nicht* zur Sprache, da eine unendliche Wiederholung von dc nicht auf Teilwörter aus $L(A_{2.3})$ zurückgeführt werden kann (in $L(A_{2.3})$ kommen nur endlich viele Wiederholungen von dc vor, dann muss ein neues Teilwort angehängt werden, welches wieder mit b oder a beginnt).

3. Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm eines Büchi-Automaten, der $(L(A_{2.3}))^\omega$ akzeptiert. Begründen Sie die Korrektheit des Automaten.

Lösung: Aus dem Verfahren in Aufgabe 2.4 ergibt sich mit und ohne ε-Kanten:



Die Korrektheit der Automaten folgt direkt aus der Korrektheit des Verfahrens.

Übungsaufgabe 2.4: Zeigen Sie die zweite Teilaussage von Lemma 1.15: „Der ω-Abschluss U^ω einer regulären Menge U ist immer eine ω-reguläre Menge.“

von
6

Führen Sie einen konstruktiven Beweis durch. *Hinweis:* Der kurze Lösungsweg über reguläre Ausdrücke bringt maximal die halbe Punktzahl. Volle Punktzahl gibt es nur für die Konstruktion eines Büchi-Automaten.

1. Benennen Sie die Arbeitsschritte, die für einen konstruktiven Beweis des Lemmas notwendig sind.

Lösung:

- Verfahren angeben, dabei Ein- und Ausgabe benennen
- Termination beweisen
- Korrektheit beweisen

2. Entwickeln Sie ein geeignetes Konstruktionsverfahren.

Lösung: *A) über reguläre Ausdrücke:* U kann durch einen regulären Ausdruck beschrieben R_U werden (gemäß Def. 1.6 gilt dann $M_{R_U} = U$). Der ω-reguläre Ausdruck $(R_U)^\omega$ beschreibt die gesuchte Sprache, d.h. es gilt gemäß Def. 1.17 $M_{(R_U)^\omega} = U^\omega$.

B) über Automaten mit ε-Kanten: Um Verfahren C) besser nachvollziehbar beschreiben zu können, wird die Grundidee zunächst mit ε-Kanten illustriert, die sich wie in ε-FA definiert verhalten.

Zu U existiert ein NFA $A_U = (Q_U, \Sigma, \delta_U, Q_{0,U}, F_U)$ mit $L(A_U) = U$, da U regulär ist. Der Büchi-Automat mit Epsilon-Kanten $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, Q_{0,B}, F_B)$ akzeptiert $L(B) = U^\omega$.

$$
\begin{array}{lcl}
Q_B & := & Q \cup \{q_e\} \text{ (wobei } q_e \notin Q \text{ gilt)} \\
Q_{0,B} & := & Q_0 \\
F_B & := & \{q_e\} \\
\delta_B & := & \{(q,x,q') \mid (q,x,q') \in \delta\} \\
 & \cup & \{(q,\varepsilon,q_e) \mid q \in F\} \\
 & \cup & \{(q_e,\varepsilon,q') \mid q' \in Q_0\}
\end{array}
$$

(Es werden ε-Kanten von allen ursprünglichen Endzuständen zu einem neuen und einzigen Endzustand q_e hinzugefügt. Außerdem werden ε-Kanten von q_e ausgehend zu allen Startzuständen hinzugefügt.)

C) über Automaten ohne ε-Kanten: Wir konstruieren analog zu Variante B) einen Büchi-Automaten $C = (Q_C, \Sigma, \delta_C, Q_{0,C}, F_C)$ wie folgt:

$$
\begin{array}{lcl}
Q_C & := & Q \cup \{q_e\} \text{ (wobei } q_e \notin Q \text{ gilt)} \\
Q_{0,C} & := & Q_0 \\
F_C & := & \{q_e\} \\
\delta_C & := & \{(q,x,q') \mid (q,x,q') \in \delta\} \\
 & \cup & \{(q,x,q_e) \mid \exists q' \in F : (q,x,q') \in \delta\} \\
 & \cup & \{(q_e,x,q') \mid \exists q \in Q_0 : (q,x,q') \in \delta\} \\
 & \cup & \{(q_e,x,q_e) \mid \exists q \in (Q_0 \cap F) : (q,x,q) \in \delta\}
\end{array}
$$

(Anstelle der ε-Kanten werden nun die Kanten, die in ursprüngliche Endzustände hineinführen, kopiert und zum neuen Endzustand umgebogen. Ebenso werden alle Kanten, die von einem Startzustand abgehen, kopiert und vom neuen Endzustand aus zum jeweiligen Folgezustand geführt. Zudem werden Schleifen an Zuständen, welche sowohl Start- als auch Endzustand waren, an den neuen Endzustand kopiert.)

3. Weisen Sie die Qualität Ihres Verfahrens entsprechend Teilaufgabe 1 nach.

Lösung: *Termination:* Alle drei Verfahren kommen mit einem einzigen Schritt aus, terminieren also immer.

Korrektheit:

A) Da R_U ein wohlgeformter regulärer Ausdruck ist, ist laut Def. 1.17 $(R_U)^\omega$ auch ein wohlgeformter ω-regulärer Ausdruck. Da die Semantik des Operators $()^\omega$ genau dem zu beweisenden ω-Abschluss entspricht, ist die Korrektheit trivialerweise gegeben.

B) Richtung $w_i \in L(A_U) \Rightarrow w_1 w_2 w_3 \cdots \in L(B)$: Sei eine unendliche Folge von Wörtern w_i gegeben, welche alle von A_U akzeptiert werden, d.h. zu jedem w_i gibt es eine Erfolgsrechnung von einem Startzustand $q_{0,i}$ zu einem Endzustand $q_{f,i}$ mit $q_{0,i} \vdash_{A_U}^{w_i} q_{f,i}$. Dann können diese Rechnungen im Büchi-Automaten B zusammengesetzt werden:

$$q_{0,1} \vdash_B^{w_1} q_{f,1} \vdash_B^{\varepsilon} q_e \vdash_B^{\varepsilon} q_{0,2} \vdash_B^{w_2} q_{f,2} \vdash_B^{\varepsilon} q_e \vdash_B^{\varepsilon} q_{0,3} \vdash_B^{w_3} q_{f,3} \cdots$$

Der so entstehende Pfad enthält unendlich oft q_e, so dass das Wort von B akzeptiert wird.

Richtung $w \in L(B) \Rightarrow \exists w_i : w = w_1 w_2 w_3 \text{mit } w_i \in L(A_U)$: Sei ein unendliches Wort w gegeben, welches von B akzeptiert wird, d.h. im zu w gehörenden Pfad tritt q_e unendlich oft auf. Dann kann w in ein erstes Teilwort bis zum ersten Auftreten von q_e und dann in weitere Teilwörter, die von q_e zu q_e führen, zerlegt werden:

$$q_0 \xrightarrow[B]{w_1} q_e \xrightarrow[B]{w_2} q_e \xrightarrow[B]{w_3} q_e \ldots$$

Zu jedem w_i gibt es eine Erfolgsrechnung in A_U: Da q_e nur über ε-Kanten von Endzuständen aus F_U erreicht und mit ε-Kanten zu Startzuständen aus $Q_{0,U}$ verlassen werden kann, lässt sich jede Teilrechnung aus B in eine Erfolgsrechnung in A_U überführen, indem die ε-Schritte am Anfang und am Ende der Teilrechnung gestrichen werden.

C) Die Argumentation läuft analog zu Variante B). An die Stelle der ε-Übergänge treten nun die kopierten und auf q_e umgebogenen Kanten von Start- und Endzuständen aus A_U.

4. Wenden Sie das Verfahren aus Ihrem Beweis auf die reguläre Sprache an, die von NFA $A_{2.3}$ akzeptiert wird.

Lösung: Siehe Musterlösung zu Aufgabe 2.3.1 und 2.3.3.

Bisher erreichbare Punktzahl: 24