

# Моделирование перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва пласта

Выполнил студент: А. А. Муравцев  
Научный руководитель: С. А. Калинин  
Консультант: И. Ш. Базыров

16 мая 2023 г.

# Проблематика и актуальность работы

- ▶ при эксплуатации месторождения во время перевода скважин с проведённым многостадийным гидроразрывом пласта в нагнетание (с целью поддержания пластового давления) практически невозможно избежать роста нескольких трещин автоГРП
- ▶ важно научиться моделировать одновременный рост нескольких трещин автоГРП и перераспределение потоков между ними, чтобы не допускать снижение эффективности эксплуатации месторождения вследствие прорыва трещин автоГРП к добывающим скважинам

# Цель и задачи работы

## Цель:

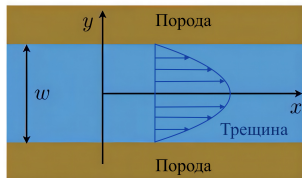
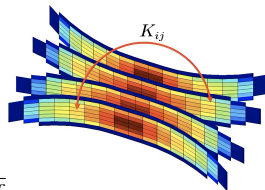
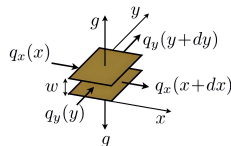
- ▶ построить модель совместного роста нескольких трещин автоГРП с учётом перераспределения потоков между ними

## Задачи:

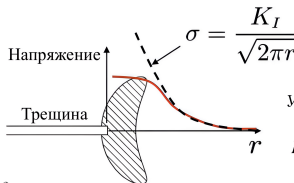
- ▶ провести обзор имеющихся моделей роста трещины гидроразрыва пласта и выбрать наиболее подходящую модель для роста трещины автоГРП
- ▶ построить физико-математическую модель роста нескольких трещин автоГРП
- ▶ реализовать численный алгоритм решения на Python
- ▶ построить графики зависимостей полудлины каждой из трещин автоГРП и расходов на каждой из трещин от времени
- ▶ построить график зависимости забойного давления от времени

# Основные компоненты полной модели трещины ГРП

- 1) закон сохранения жидкости (доминирование или отсутствие утечек);
- 2) уравнение течения жидкости в трещине (в зависимости от реологии жидкости);
- 3) уравнение упругости для горной породы;
- 4) условие распространения трещины;
- 5) транспорт проппанта



$$w = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \frac{K_I (1 - \nu^2)}{E} \sqrt{r}$$



$K_I$  — коэффициент интенсивности напряжений (КИН)

Условие распространения:  $K_I = K_{Ic}$

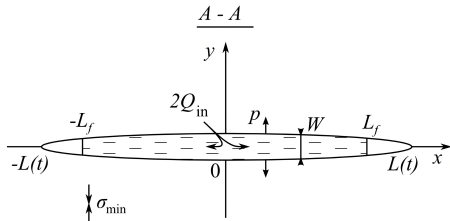
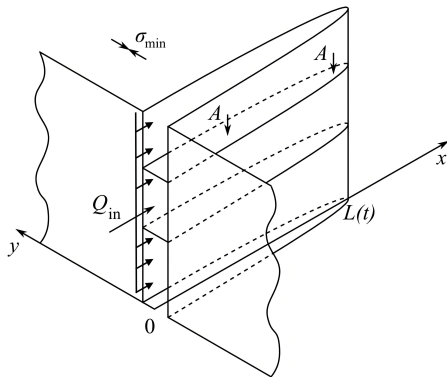
$K_{Ic}$  — трещиностойкость породы

# Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка (модель плоской трещины)

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ p(x, t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-L(t)}^{L(t)} \frac{w(s)ds}{(x-s)^2}, \\ \lim_{x \rightarrow L} \frac{w}{(L-x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases}$$

где  $C' = 2C_l$ ;  $\mu' = 12\mu$ ;  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ;

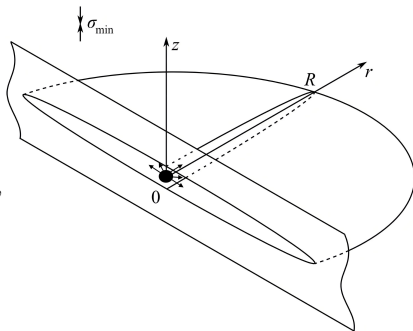
$$K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}.$$



E.V. Dontsov. An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *Int. J. Fract.*, 205:221-237, 2017

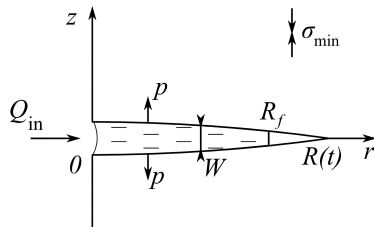
# Модель радиальной трещины

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rq) + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(r)}} = Q_0 \delta(r), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_n}{\partial r}, \\ p_n(r, t) = -\frac{E'}{2\pi R} \int_0^{R(t)} M\left(\frac{r}{R}, \frac{r'}{R}\right) \frac{\partial w(r', t)}{\partial r'} dr', \\ \lim_{r \rightarrow R} \frac{w}{(R-r)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases}$$



где  $C' = 2C_I$ ;  $\mu' = 12\mu$ ;  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ ;  $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$ ;

$$M(\rho, s) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} K\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right) + \frac{\rho}{s^2 - \rho^2} E\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right) \\ \frac{s}{s^2 - \rho^2} E\left(\frac{\rho^2}{s^2}\right) \end{cases}$$



E.V. Dontsov. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *R. Soc. Open Sci.*, 3:160737, 2016

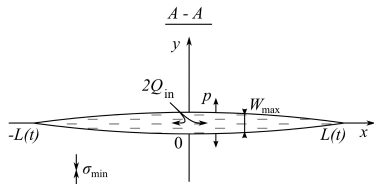
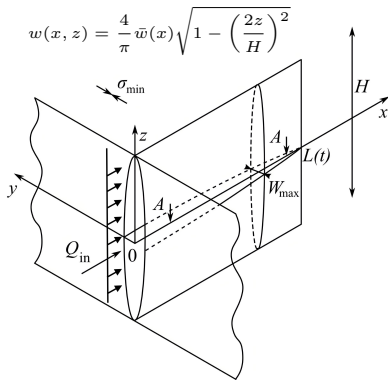
# Модель Перкинса-Керна-Нордгрена (модель РКН)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \\ \bar{q}_x = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p_n}{\partial x}, \\ p_n(x, t) = \frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-L(t)}^{L(t)} \bar{w}(x', t) \frac{dG(2(x' - x)/H)}{dx'} dx', \\ \lim_{x \rightarrow L} \frac{w}{(L - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{array} \right.$$

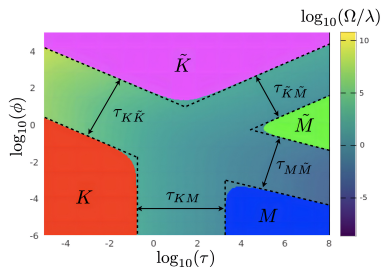
где  $C' = 2C_l$ ;  $\mu' = 12\mu$ ;  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ;  $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$ ;

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} w(x, z) dz$$

$$G(s) = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{s} E \left( \frac{1}{1 + s^2} \right)$$



# Параметрическая карта решения модели РКН



В данной работе предполагается, что трещины автоГРП распространяются в режиме больших утечек и доминирования трещиностойкости (пренебрегаем вязкостью). В этом режиме решение для среднего раскрытия:

$$\bar{w}_{\tilde{K}} = \frac{K_{Ic} \sqrt{\pi H}}{E'}$$

$$\Omega = \frac{\bar{w}}{w_*} \quad ; \quad \lambda = \frac{l}{l_*} \quad ; \quad \tau = \frac{t}{t_*} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{l(t)}$$

$$w_* = \frac{(\pi H)^{1/2} K_{Ic}}{E'} \quad ; \quad l_* = \frac{H^2 K_{Ic}^4}{2\pi E'^3 \mu Q_0}$$

$$t_* = \frac{H^{7/2} K_{Ic}^5}{2\pi^{1/2} E'^4 \mu Q_0^2} \quad ; \quad \phi = \left( \frac{H^5 K_{Ic}^6 C'^4}{4\pi^3 E'^4 \mu^2 Q_0^4} \right)^{1/4}$$

**K-режим** = доминирование трещиностойкости и отсутствие утечек (пренебрегаем вязкостью)

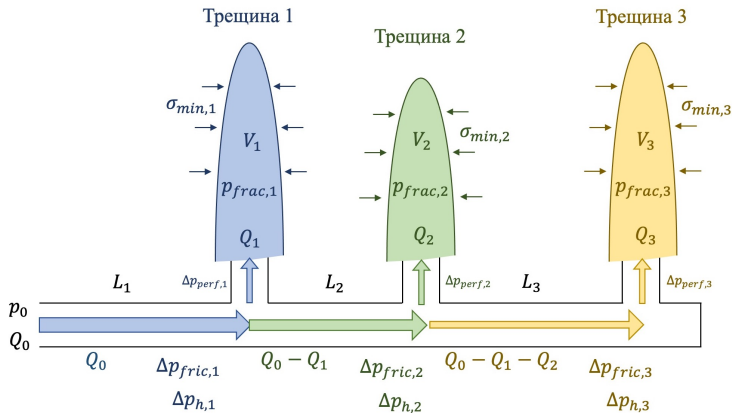
**K-tilde-режим** = доминирование трещиностойкости и большие утечки (пренебрегаем вязкостью)

**M-режим** = доминирование вязкости и отсутствие утечек (пренебрегаем трещиностойкостью)

**M-tilde-режим** = доминирование вязкости и большие утечки (пренебрегаем трещиностойкостью)



# Схема перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва и законы Кирхгофа



$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i$$

$$p_0 = \sigma_{min,i} + p_{net,i} + \Delta p_{perf,i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{fric,j}$$

# Чистое давление в трещинах PKN

$$p_{\text{net},i}(Q_i) = a_i Q_i^{\frac{n}{2n+3}} V_i^{\frac{1}{2n+3}},$$

$$\text{где } a_i = \left( \frac{(n+3)(2n+1)^n \cdot K \cdot (E'_i)^{2n+2}}{\pi 2^{2n} n^n \phi^n h_i^{3n+3}} \right)^{\frac{1}{2n+3}} - \text{параметр жёсткости,}$$

$Q_i$  и  $V_i$  – расход на  $i$ -ой трещине и объём  $i$ -ой трещины;

$K$  и  $n$  – реологические параметры степенной (неньютоновской) жидкости;

$E'_i$  – модуль плоской деформации  $i$ -ой трещины;

$h_i$  – мощность продуктивной зоны.

# Падение давления на перфорациях

$$\Delta p_{\text{perf},i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|$$

где  $\rho_s$  – средняя плотность смеси;

$n_{p,i}$ ,  $d_{p,i}$  – количество и диаметр перфораций;

$C_{d,i} = \frac{\min(d_{jet})}{d_p}$  – безразмерный коэффициент эрозии (в случае

отсутствия твёрдых частичек в потоке  $C_{d,i} \in [0.5, 0.6]$ , а с твёрдыми частичками в потоке  $C_{d,i} \in [0.6, 0.95]$  из-за эрозии перфорации).

## Падение давления на трение

$$\Delta p_{\text{fric},i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \frac{\rho u_{m,i}^2}{R_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\rho(c(t,s)) \cdot f(Re) \cdot \left( Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j \right)^2}{R_i(s) S_i^2(s)} ds$$

где  $f = \frac{\tau}{\rho u_{m,i}^2/2}$  – коэффициент трения Фаннинга;

$\rho(c(t,s))$  – плотность смеси, которая зависит от динамически меняющейся концентрации пропантанта;

$u_{m,i} = \frac{Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j}{S_i}$  – средняя скорость на рассматриваемом участке трубы;

$S_i$  – площадь сечения рассматриваемого участка трубы;

$R_i$  – радиус рассматриваемого участка трубы;

$Re$  – число Рейнольдса.

# Запись законов Кирхгофа в векторной форме

Вектор неизвестных:

$$Q^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N, p_0]$$

Вектор невязок:

$$[F_1, F_2, \dots, F_N, F_{N+1}],$$

где

$$F_i = \begin{cases} \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j} - p_0 \\ \quad (\text{при } i \leq N) \\ Q_0 - \sum_{j=1}^N Q_j \quad (\text{при } i = N + 1) \end{cases}$$

# Итеративная процедура решения

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_1}{\partial p_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial p_0} \end{bmatrix}$$

Выражение:

$$\overline{Q}^{k+1} = \overline{Q}^k - J^{-1} \overline{F}^k$$

Начальное приближение:  $Q_i = Q_0/N$  и  $p_0 = \sigma_i$  при  $i \in [1, N]$

Условие остановки:  $\left| \overline{Q}^{k+1} - \overline{Q}^k \right|^2 \leq 10^{-4}$

# Пример результатов решателя уравнений Кирхгофа

# Формула Кёнинга

Зависимость полудлины трещины автоГРП от расхода жидкости, репрессии на пласт и фильтрационно-ёмкостных свойств пласта:

$$x_f = \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)},$$

где  $\kappa = \frac{k_e}{\varphi_e \mu c_t}$  – пьезопроводность пласта;

$Q$  – расход нагнетаемой в рассматриваемую трещину жидкости;

$\mu$  – вязкость жидкости;

$t$  – время закачки;  $k_e$  и  $\varphi_e$  – проницаемость и пористость пласта

соответственно;  $c_t$  – общая сжимаемость;  $h$  – эффективная толщина

(мощность) пласта;  $\Delta p = p_f - p_e$  – разница между средним давлением в трещине и пластовым давлением.



# Приращение полудлины трещины

Полная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial x_f}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial x_f}{\partial p_f} \frac{dp_f}{dt},$$

где

$$\frac{\partial x_f}{\partial t} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} \quad ; \quad \frac{\partial x_f}{\partial Q} = \frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)};$$

$$\frac{\partial x_f}{\partial p_f} = -\frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2}$$

# Приращение полудлины трещины

Полная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} + \frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \frac{dQ}{dt} - \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} \frac{dp_f}{dt}$$

Приращение полудлины трещины на каждом шаге по времени:

$$dx_f = \frac{dx_f}{dt} dt$$

$$dx_f = \underbrace{\frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} dt}_{\text{за счёт изменения времени}} + \underbrace{\frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} dQ}_{\text{за счёт изменения расхода на трещине}} - \underbrace{\frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} dp_f}_{\text{за счёт изменения давления в трещине}}$$

# Результат совместного использования формулы Кёнинга с решателем уравнений Кирхгофа

# Влияние резкого ухудшения качества перфораций на рост трещин

# Выводы