

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	2
1. Постановка задачи о перераспределении потоков в трещинах автоГРП. ....	4
2. Формула Кёнинга в задаче о перераспределении потоков .....	7
3. Численное решение задачи с учётом роста трещин автоГРП в длину ....	9
Заключение .....	13
Список использованных источников .....	14

## ВВЕДЕНИЕ

Важным фактором, влияющим на эффективность добычи углеводородов при разработке месторождения, является система заводнения, которая организуется с целью поддержания пластового давления и увеличения нефтеотдачи пласта. Часто для этого осуществляют перевод добывающих скважин, отработавших на истощение, в нагнетание. Однако на момент перевода в нагнетание большинство эксплуатационного фонда скважин было предварительно простимулировано многостадийным гидроразрывом пласта. Поскольку при нагнетании давление жидкости, как правило, превышает давление разрыва породы, возникает риск инициации самопроизвольного роста техногенных трещин. Данное явление называется эффектом автоГРП, а длина трещины автоГРП может варьироваться от десятков метров до километра и более.

Отрицательные последствия роста трещины автоГРП зависят от её длины, высоты и ориентации и заключаются в том, что развитие трещины может стать причиной обводнения добывающих скважин, а также причиной прорыва воды в верхние или нижние горизонты, что снижает эффективность эксплуатации месторождения.

Поскольку нагнетание жидкости производится с большим расходом, то практически невозможно избежать инициации нескольких трещин автоГРП в начале закачки [1]. Поэтому важно научиться моделировать одновременный рост нескольких трещин автоГРП в длину.

*Целью* данной работы является моделирование перераспределения потоков между несколькими трещинами автоГРП. В качестве базовой модели трещины выбрана модель Перкинса-Керна-Нордгрена, для которой в работе [2] представлены приближённые решения во всех предельных случаях. Также на практике используют модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка [3] и радиальную модель [4] трещин ГРП, но они менее точны при моделировании роста трещин автоГРП, так как эти модели построены при строгом выполнении условия плоской деформации.

*Объектом исследования* является горизонтальная нагнетательная скважина, на которой ранее (когда она работала в добывающем фонде) был проведён многостадийный гидроразрыв. *Предметом исследования* являются

забойное давление на рассматриваемой скважине и расходы воды на каждой из трещин при заданном расходе воды на забое.

Для достижения поставленной цели предполагается выполнение следующих *задач*:

- 1) обзор литературы по моделированию роста одной трещины автоГРП;
- 2) построение физико-математической модели задачи;
- 3) численная реализация алгоритма решения;
- 4) анализ зависимости полудлины каждой из трещин автоГРП от времени;
- 5) анализ зависимости забойного давления от времени;
- 6) анализ расходов на каждой из трещин в зависимости от времени;
- 7) анализ давления в каждой из трещин в зависимости от времени.

В данном отчёте представлены постановка задачи и численная реализация алгоритма решения с использованием модели Картера [5] и полной производной формулы Кёнинга [6] по времени.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТОКОВ В ТРЕЩИНАХ АВТОГРП

При моделировании перераспределения потоков между трещинами автоГРП важно учитывать падение давления на трение в скважине  $\Delta p_{fric}$  и падение давления на перфорациях  $\Delta p_{perf}$ .

На рис. 1.1 представлена схема перераспределения потоков между тремя трещинами автоГРП.

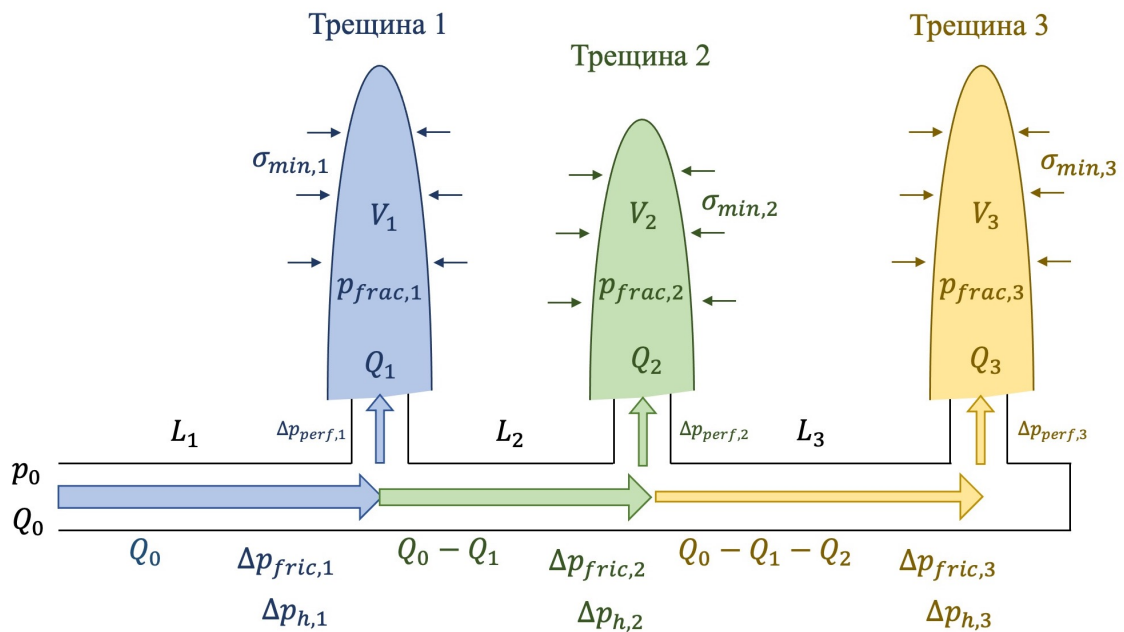


Рис.1.1.1. Схема перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва

Из рисунка 1.1 видим, что весь расход, который закачиваем в скважину, перераспределяется между трещинами (первый закон Кирхгофа):

$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i, \quad (1.1)$$

где  $N$  – количество трещин.

Каждый из путей к каждой из трещин будем рассматривать независимо, т.е. будем считать гидродинамические сопротивления независимо (второй закон Кирхгофа):

$$p_0 = \sigma_{min,i} + p_{net,i} + \Delta p_{perf,i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{fric,j}, \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{min,i}$  – давление закрытия (минимальное напряжение в пласте) на  $i$ -ой трещине;

$p_{net,i} = p_{frac,i} - \sigma_{min,i}$  – чистое давление на  $i$ -ой трещине (из модели трещины);  
 $\Delta p_{perf,i}$  – падение давления вдоль перфорации  $i$ -ой трещины;  
 $\Delta p_{h,i}$  – падение гидростатического давления между  $i$ -ой и  $(i - 1)$ -ой трещинами;  
 $\Delta p_{fric,i}$  – падение давления на трение между  $i$ -ой и  $(i - 1)$ -ой трещинами.

Для PKN модели трещины гидроразрыва известна формула для чистого давления в трещине:

$$p_{net,i}(Q_i) = a_i Q_i^{\frac{n}{2n+3}} V_i^{\frac{1}{2n+3}}, \quad (1.3)$$

где  $a_i = \left( \frac{(n+3)(2n+1)^n \cdot K \cdot (E'_i)^{2n+2}}{\pi 2^{2n} n^n \phi^n h_i^{3n+3}} \right)^{\frac{1}{2n+3}}$  – параметр жёсткости,

$Q_i$  и  $V_i$  – расход на  $i$ -ой трещине и объём  $i$ -ой трещины;

$K$  и  $n$  – реологические параметры степенной (неньютоновской) жидкости;

$E'_i$  – модуль плоской деформации  $i$ -ой трещины;

$h_i$  – мощность продуктивной зоны.

Эмпирическая формула для падения давления на перфорациях выглядит следующим образом:

$$\Delta p_{perf,i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|, \quad (1.4)$$

где  $\rho_s$  – средняя плотность смеси;

$n_{p,i}, d_{p,i}$  – количество и диаметр перфораций;

$C_{d,i} = \frac{\min(d_{jet})}{d_p}$  – безразмерный коэффициент эрозии (в случае отсутствия твёрдых частичек в потоке  $C_{d,i} \in [0.5, 0.6]$ , а с твёрдыми частичками в потоке  $C_{d,j} \in [0.6, 0.95]$  из-за эрозии перфорации).

Падение давления на трение на каждом интервале рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta p_{fric,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \frac{\rho u_{m,i}^2}{R_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\rho(c(t,s)) \cdot f(Re) \cdot \left( Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j \right)^2}{R_i(s) S_i^2(s)} ds, \quad (1.5)$$

где  $f = \frac{\tau}{\rho u_{m,i}^2 / 2}$  – коэффициент трения Фаннинга;

$\rho(c(t,s))$  – плотность смеси, которая зависит от динамически меняющейся концентрации проппанта;

$$u_{m,i} = \frac{Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j}{S_i} - \text{средняя скорость на рассматриваемом участке трубы};$$

$S_i$  – площадь сечения рассматриваемого участка трубы;

$R_i$  – радиус рассматриваемого участка трубы;

$Re$  – число Рейнольдса.

Подставляя выражения (1.3), (1.4) и (1.5) в законы Кирхгофа (1.1) и (1.2), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, которая может быть решена численно с помощью метода Ньютона.

В следующем разделе будет рассмотрен способ совмещения формулы Кёнинга (представляющей собой зависимость полудлины трещины от времени и фильтрационно-ёмкостных свойств пласта) с уравнениями Кирхгофа.

## 2. ФОРМУЛА КЁНИНГА В ЗАДАЧЕ О ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТОКОВ

На основе модели Картера [5] в работе [6] получена формула Кёнинга, которая представляет собой зависимость полудлины трещины автоГРП от расхода жидкости и фильтрационно-ёмкостных свойств пласта:

$$x_f = \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)}, \quad (2.1)$$

где  $Q$  – расход нагнетаемой в рассматриваемую трещину жидкости;

$\mu$  – вязкость жидкости;

$\kappa = k_e / (\varphi_e \mu c_t)$  – коэффициент пьезопроводности пласта;

$t$  – время закачки;

$k_e$  – проницаемость пласта;

$\varphi_e$  – пористость пласта;

$c_t$  – общая сжимаемость;

$h$  – эффективная толщина (мощность) пласта;

$\Delta p = p_f - p_e$  – разница между средним давлением в трещине и пластовым давлением.

В данной работе рассматривается одновременный рост нескольких трещин автоГРП, поэтому расход жидкости на каждой из них динамично изменяется согласно законам Кирхгофа. Кроме того, давление в трещинах тоже изменяется согласно выражению (1.3) по мере увеличения объёма трещин и изменения расхода на них.

Таким образом, для корректного применения формулы Кёнинга приращение полудлины каждой из трещин необходимо найти как произведение полной производной формулы Кёнинга по времени на рассматриваемый шаг по времени.

Полная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial x_f}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial x_f}{\partial p_f} \frac{dp_f}{dt} \quad (2.2)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial t} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} \quad (2.3)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по расходу  $Q$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial Q} = \frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \quad (2.4)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по давлению в трещине  $p_f$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial p_f} = -\frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} \quad (2.5)$$

Подставляя (2.3), (2.4) и (2.5) в выражение (2.2), получаем:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} + \frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \frac{dQ}{dt} - \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} \frac{dp_f}{dt} \quad (2.6)$$

Итак, приращение полудлины трещины на каждом шаге по времени записывается в следующем виде:

$$dx_f = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} dt + \frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} dQ - \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} dp_f \quad (2.7)$$

Совмещение формулы Кёнинга с уравнениями Кирхгофа будет проведено следующим образом:

1) на текущем шаге по времени по имеющимся значениям полудлины трещин автоГРП предыдущего шага будут рассчитаны давления и расходы на каждой трещине;

2) на основе полученных значений приращения давления и расхода будет найдено приращение полудлины трещины  $dx_f$  на данном временном шаге по формуле (2.7);

3) по формуле  $x_f^{\text{current}} = x_f^{\text{last}} + dx_f$  будут найдены полудлины каждой из трещин на текущем временном шаге;

4) описанные действия будут проделаны до требуемого шага по времени (условия остановки).



### 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С УЧЁТОМ РОСТА ТРЕЩИН АВТОГРП В ДЛИНУ

С помощью метода Ньютона проведено решение поставленной задачи. Результаты моделирования представлены на рис. 3.1.

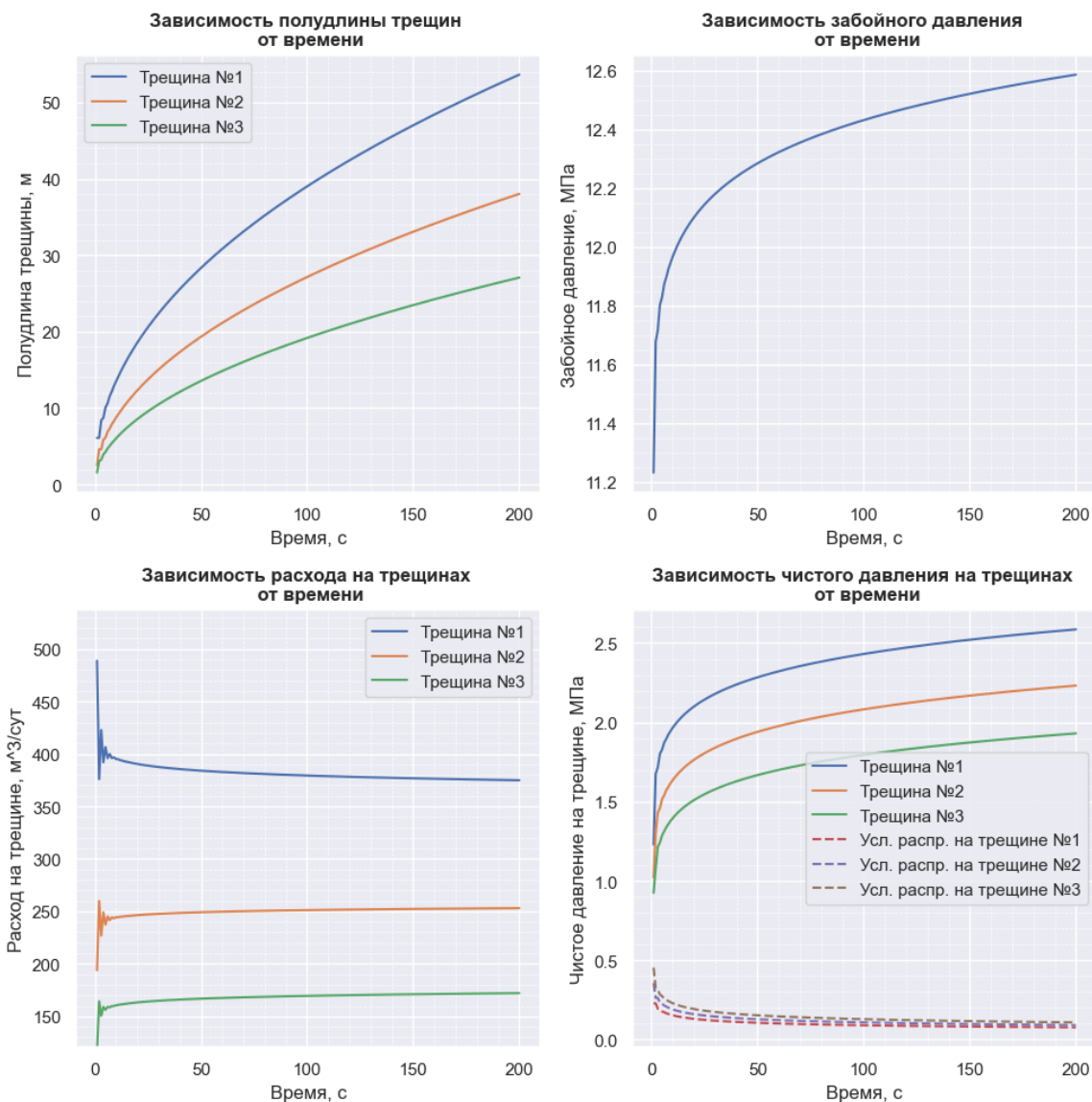


Рис.3.1. Результаты решения поставленной задачи при одновременном росте трёх трещин автоГРП

В проведённом численном эксперименте трещины отличаются друг от друга количеством и диаметром перфораций.

У трещины 1: количество перфораций 32, диаметр перфораций 0.02 м.

У трещины 2: количество перфораций 2, диаметр перфораций 0.01 м.

У трещины 3: количество перфораций 1, диаметр перфораций 0.01 м.

Код решения представлен по ссылке: [https://github.com/mualal/hydrofracturing/blob/master/notebooks/03\\_fractures\\_growth\\_with\\_Koning\\_derivative.ipynb](https://github.com/mualal/hydrofracturing/blob/master/notebooks/03_fractures_growth_with_Koning_derivative.ipynb).

Из графиков на рис. 3.1 видим, что большую часть потока забирает на себя трещина с лучшими перфорациями. Эта же трещина лидирует по скорости роста.

Также видим, что при росте трещин требуется всё большее забойное давление для того, чтобы поддерживать этот рост.

При выбранных входных параметрах построенной модели чистое давление в каждой из трещин существенно превышает давления критерия распространения, следовательно, при достаточно высоком забойном давлении все трещины будут расти одновременно.

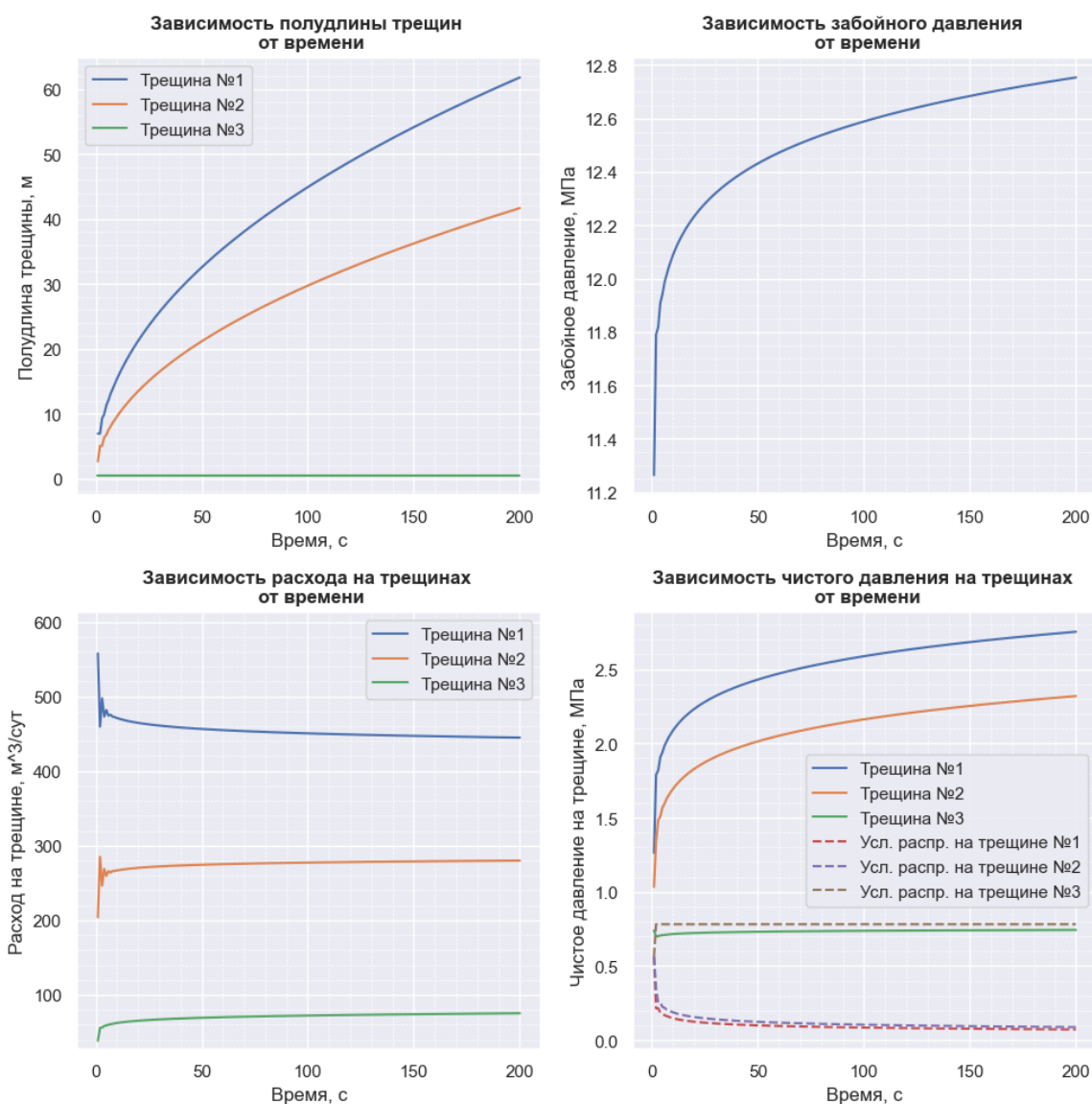


Рис.3.2. Результаты решения поставленной задачи при невыполнении критерия распространения на трещине №3

Далее проведено моделирование для случая с очень низким качеством перфораций на одной из трещин, при котором давление в этой трещине не превышает значение из критерия распространения. Результаты представлены на рис. 3.2.

В проведённом численном эксперименте трещины отличаются друг от друга количеством и диаметром перфораций.

У трещины 1: количество перфораций 32, диаметр перфораций 0.02 м.

У трещины 2: количество перфораций 2, диаметр перфораций 0.01 м.

У трещины 3: количество перфораций 1, диаметр перфораций 0.005 м.

Также проведено моделирование в случае внезапного ухудшения качества перфораций на одной из трещин в момент времени  $t_1 = 100$  с. Результаты представлены на рис. 3.3.

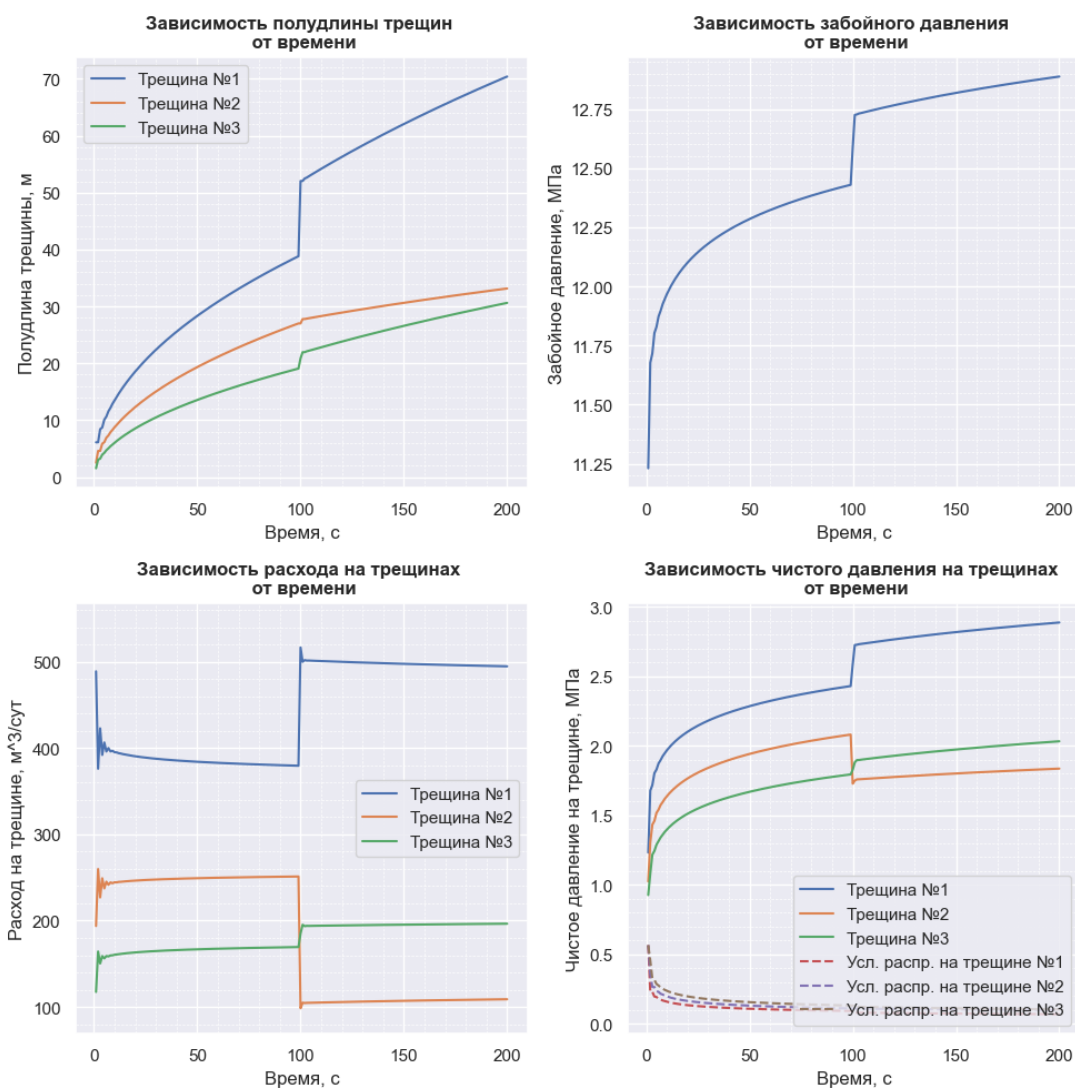


Рис.3.3. Результаты решения поставленной задачи при внезапном ухудшении качества перфораций на трещине №2 в момент времени  $t_1 = 100$  с

Из проведённого численного эксперимента (рис. 3.3) видим, что внезапное ухудшение качества перфораций на одной из трещин автоГРП может негативно повлиять на эффективность эксплуатации месторождения, так как приводит к внезапному существенному росту длины соседних трещин при условии поддержания постоянного расхода на забое.

Для проверки работоспособности кода при большем количестве трещин автоГРП проведено моделирование в случае одновременного роста четырёх трещин. Результаты представлены на рис. 3.4.

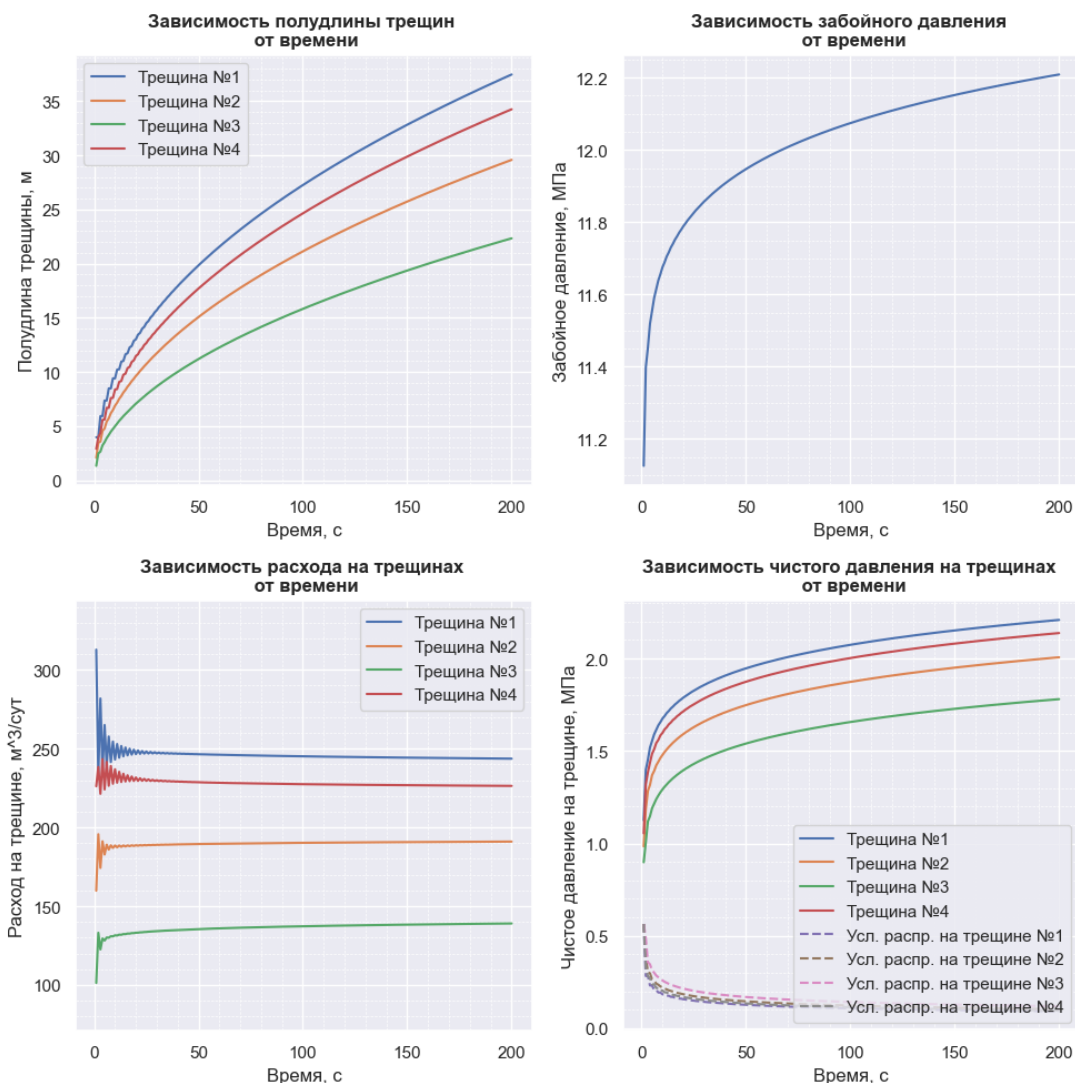


Рис.3.4. Результаты решения поставленной задачи при одновременном росте четырёх трещин автоГРП

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено моделирование роста нескольких трещин автоГРП с помощью совместного решения уравнений Кирхгофа и Кёнинга.

Проведённый анализ показал, что на скорость роста трещины автоГРП существенно влияет качество перфораций на этой трещине.

На языке Python написан код для моделирования перераспределения потоков между произвольным количеством трещин при любых заранее заданных параметрах закачиваемой ньютоновской жидкости, геолого-физических характеристиках пласта и параметрах перфораций.

Построены графики зависимости полудлины трещин автоГРП от времени, зависимости забойного давления от времени, расходов и чистого давления на каждой из трещин от времени.

Сделан вывод, что для поддержания роста трещин требуется увеличение забойного давления, которое влечёт за собой увеличение чистого давления на каждой из трещин.

Проведено моделирование роста трещин при внезапном ухудшении фильтрационных свойств на одной из них при условии поддержания постоянного расхода на забое. Сделан вывод, что подобная ситуация может оказать негативное влияние на эффективность эксплуатации месторождения, так как может привести к неконтролируемому росту трещин.

В дальнейшем планируется провести моделирование с автоматическим изменением задаваемого на забое расхода, чтобы предотвратить неконтролируемый рост трещин.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Байков В. А., Давлетбаев А. Я., Асмандияров Р. Н. Специальные гидродинамические исследования для мониторинга за развитием трещин ГРП на нагнетательных скважинах. — Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело» №1, 2011. — С. 65-75.
2. Dontsov E. V. Analysis of a constant height hydraulic fracture. — 2021. — arXiv: 2110.13088 [<https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.13088>].
3. Dontsov E. V. An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. — Int. J. Fract., 205, 2017. — 221-237.
4. Dontsov E. V. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. — R. Soc. open sci., 3:160737, 2016.
5. Karter R. D. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area. — Appendix of «Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension», by Howard G.C, Fast C.R., 1957. — 261-268 p.
6. Koning E. J. L. Fractured water-injection wells. Analytical modelling of fracture propagation. — Petroleum Development Oman LLc, 1985.