

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-Механический институт

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ
_____ А.М. Кривцов
« _____ » 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ МЕЖДУ
ТРЕЩИНАМИ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль) 01.04.03_04 Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи

Выполнил
студент гр. 5040103/10401 А.А. Муравцев

Руководитель
доцент, к.т.н. С.А. Калинин

Консультант
к.т.н. И.Ш. Базыров

Консультант
по нормоконтролю Е.А. Хайбулова

Санкт-Петербург 2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО
Физико-Механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ
Директор ВШТМиМФ
_____ А.М. Кривцов
«_____» _____ 2023г.

**ЗАДАНИЕ
на выполнение выпускной квалификационной работы**

студенту Муравцеву Александру Алексеевичу, гр. 5040103/10401

1. Тема работы: Моделирование перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва пласта.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 26.05.2023.
3. Исходные данные по работе: справочная литература и актуальные публикации по теме исследования; физико-механические свойства пласта и закачиваемой в пласт жидкости; геометрические параметры скважины; характеристики перфораций.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): обзор математических моделей трещин гидроразрыва; создание модели роста нескольких трещин автоГРП; исследование влияния входных параметров на рост трещин; создание модели перераспределения потоков между трещинами.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: Базыров Ильдар Шамилевич, руководитель направления ГДМ «Газпромнефть-НТЦ», к.т.н.
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023.

Руководитель ВКР _____ С.А. Калинин, доцент ВШТМиМФ, ФизМех, к.т.н.

Задание принял к исполнению 27.02.2023

Студент _____ А.А. Муравцев

РЕФЕРАТ

На 40 с., 8 рисунков, 2 таблицы, 2 приложения

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ТРЕЩИНЫ АВТОГРП, МОДЕЛЬ РКН, НАГНЕТАТЕЛЬНАЯ СКВАЖИНА, РОСТ ТРЕЩИН, ПРАВИЛА КИРХГОФА, ФОРМУЛА КЁНИНГА.

Тема выпускной квалификационной работы: «Моделирование перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва пласта».

Проверка аннотации

Проверка

ABSTRACT

40 pages, 8 figures, 2 tables, 2 appendices

KEYWORDS: WATER-INDUCED FRACTURE, PKN MODEL, INJECTION WELL, FRACTURES GROWTH, KIRCHHOFF'S RULES, KONING'S FORMULA.

The subject of the graduate qualification work is «Title of the thesis».

Check

Check

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Глава 1. Обзор моделей трещины гидроразрыва пласта	7
1.1 Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-дeКлерка	10
1.2 Модель радиальной трещины ГРП.....	12
1.3 Модель Перкинса-Керна-Нордгрена	13
Глава 2. Обзор методов моделирования трещин автоГРП	15
Глава 3. Расчёт потоков на каждой из нескольких трещин гидроразрыва...	16
3.1 Постановка задачи	16
3.2 Замыкающие соотношения.....	17
3.3 Описание численного алгоритма решения	21
3.4 Результаты.....	22
Глава 4. Моделирование роста трещин автоГРП в длину	25
4.1 Постановка задачи	25
4.2 Описание численного алгоритма решения	26
4.3 Результаты моделирования	27
Заключение	30
Список использованных источников	31
Приложение 1. Код для расчёта потоков на каждой из трещин автоГРП ...	34
Приложение 2. Код для моделирования роста трещин автоГРП в длину....	40

ВВЕДЕНИЕ

Важным фактором, влияющим на эффективность добычи углеводородов при разработке месторождения, является система заводнения, которая организуется с целью поддержания пластового давления и увеличения нефтеотдачи пласта. Часто при организации системы заводнения осуществляют перевод добывающих скважин, отработавших на истощение, в нагнетание. Поскольку нагнетание производится с большим расходом и давление жидкости, как правило, превышает давление разрыва породы, то на таких скважинах возникает риск инициации самопроизвольного роста техногенных трещин. Данное явление называется эффектом автоГРП, а длина трещин автоГРП может варьироваться от десятков метров до километра и более.

На момент перевода в нагнетание большинство эксплуатационного фонда скважин было ранее (во время работы в добывающем фонде) простимулировано многостадийным гидроразрывом пласта. На таких скважинах может инициироваться одновременный рост нескольких трещин автоГРП (по одной трещине из каждого порта ранее проведённого многостадийного гидроразрыва).

Неконтролируемый рост трещины автоГРП может привести к негативным последствиям, которые зависят от геометрических размеров и ориентации трещины и заключаются в том, что развитие трещины может стать причиной обводнения добывающих скважин, а также причиной прорыва воды в верхние или нижние горизонты, что снижает эффективность эксплуатации месторождения.

С другой стороны, контролируемый рост трещин автоГРП может значительно увеличить приёмистость нагнетательных скважин и существенно повысить эффективность заводнения, что приведёт к увеличению эффективности эксплуатации месторождения [3; 13].

Чтобы проводить грамотный контроль роста трещин автоГРП и снизить риски их неконтролируемого распространения важно научиться моделировать одновременный рост нескольких трещин автоГРП в длину.

Важным фактором, влияющим на скорость распространения трещины автоГРП, является расход жидкости на рассматриваемой трещине. При этом сам рост трещины может провоцировать изменение расхода на этой и соседней трещинах из-за постепенного изменения параметров,

характеризующих физическое состояние породы, скважины, перфораций и так далее. Поэтому важно на основе имеющихся численных алгоритмов расчёта перераспределения потоков между трещинами ГРП [20] построить алгоритм расчёта перераспределения потоков между трещинами автоГРП и провести совмещение этого алгоритма с известными моделями роста трещины автоГРП в длину [25].

Целью данной работы является моделирование роста нескольких трещин автоГРП с учётом перераспределения закачиваемого в скважину расхода жидкости между этими трещинами.

Объектом исследования является горизонтальная нагнетательная скважина с несколькими трещинами автоГРП, которые образуются вследствие закачки в скважину воды под высоким давлением. *Предметом исследования* являются забойное давление на рассматриваемой скважине, расходы воды на каждой из трещин при заданном расходе воды на забое и зависимость полудлины каждой из трещин автоГРП от времени.

Для достижения поставленной цели будут решены следующие задачи:

- 1) обзор моделей трещины гидроразрыва пласта и литературы по моделированию роста одной трещины автоГРП;
- 2) расчёт потоков на каждой из трещин автоГРП при заданных входных параметрах, определяющих физическое состояние породы, скважины и трещин;
- 3) построение физико-математической модели роста нескольких трещин автоГРП с учётом перераспределения потоков между ними при изменении входных параметров со временем;
- 4) анализ зависимости полудлины каждой из трещин автоГРП, забойного давления и расходов жидкости на каждой из трещин от времени при различных сценариях изменения входных параметров со временем.

ГЛАВА 1. ОБЗОР МОДЕЛЕЙ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

В настоящее время в симуляторах для моделирования процесса ГРП нефтяные компании используют модели Pseudo3D, Planar3D и Full3D.

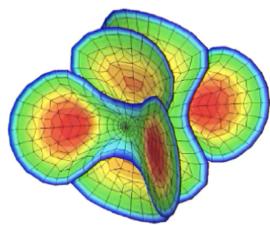
Наиболее общая модель Full3D позволяет моделировать сложные варианты развития трещины (учтывается возможность изменения направления распространения трещины и слоистость породы), решение проводится численно с применением метода конечных элементов (МКЭ), но эта модель используется редко, так как имеет низкую скорость расчёта.

В модели Planar3D предполагается, что направление минимальных горизонтальных напряжений в пласте не изменяется в зависимости от координаты, то есть трещина распространяется в одной плоскости. В то же время модель Planar3D учитывает слоистость породы и не использует приближение малости высоты в сравнении с длиной трещины, то есть учитывает двумерное течение жидкости.

Модель Pseudo3D использует предположение о том, что высота трещины много меньше её длины, то есть рассматривается случай одномерного течения жидкости.

Каждая из моделей Pseudo3D, Planar3D и Full3D плохо поддаётся аналитическому анализу. Однако при введении дополнительных предположений и допущений модель Planar3D преобразуется в хорошо известные модели (исторически были изучены раньше модели Planar3D), для которых можно провести аналитический анализ (найти раскрытие, давление в зависимости от координаты и времени). В табл.1.1 представлены основные модели трещины ГРП с их допущениями.

Таблица 1.1
Допущения основных моделей трещины ГРП

Модель	Допущения	Схематичный рисунок
Full3D	Отсутствуют; учёт большого количества физических эффектов позволяет очень точно (часто излишне точно) описать распространение трещины	

Продолжение табл. 1.1

Модель	Допущения	Схематичный рисунок
Planar3D	Одна трещина, распространяющаяся в плоскости вдоль направления максимальных горизонтальных напряжений; среда однородна по E и ν ; законы упругости рассматриваются в рамках линейно-упругой механики разрушения; ньютоновская жидкость с вязкостью μ , отсутствует fluid lag	
Pseudo3D	Одномерное течение жидкости	
Перкинса-Керна-Нордгрена (PKN)	Длина трещины много больше её фиксированной высоты H ; в каждом вертикальном сечении давление одинаково по сечению (из этого условия следует эллиптичность вертикального сечения трещины)	
Радиальная	Точечный перфорационный интервал; бесконечный по всем направлениям и однородный пласт	

Продолжение табл. 1.1

Модель	Допущения	Схематичный рисунок
Христиановича-Желтова-Гиртсма-дeКлерка (KGD)	Высота трещины много больше её длины; вертикальное сечение трещины прямоугольно; в горизонтальной плоскости выполняется условие плоской деформации	

Исторически первой С.А.Христиановичем и Ю.П.Желтовым (и независимо от них Гиртсма и дeКлерком) в 1955 году была разработана модель KGD, которая хорошо описывает поведение трещины, распространяющейся из протяжённого перфорированного интервала, на ранних временах её распространения.

Также была разработана модель радиальной трещины ГРП, которая реализуется при гидроразрыве относительно мощных однородных пластов из ограниченных (точечных) перфорированных интервалов.

Позже в 1961 году исследователями Перкинсом и Керном была разработана более распространённая модель Перкинса-Керна, которая хорошо описывает поведение трещины, распространяющейся из протяжённого перфорированного интервала, на поздних временах её распространения. В дальнейшем Нордгреном к модели Перкинса-Керна были добавлены эффекты потери жидкости.

Любая модель трещины гидроразрыва пласта состоит из нескольких основных компонентов:

- 1) уравнения баланса жидкости с учётом утечек;
- 2) модели жидкости;
- 3) уравнения упругости;
- 4) условия распространения;
- 5) модели транспорта проппанта.

Далее будут представлены математические модели трещины KGD, радиальной и РКН.

1.1. Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-дeКлерка

В первой модели гидроразрыва пласта, разработанной С.А.Христиановичем и Ю.П.Желтовым, рассматривается трещина одной и той же ширины на любой вертикальной координате в пределах фиксированной толщины пласта h . Другими словами, используется допущение о плоской деформации в каждой горизонтальной плоскости (это допущение более приемлемо для коротких трещин, у которых $2x_f < h$, где x_f – полудлина трещины). В основе лежит физическая гипотеза, что поверхности трещины свободно скользят по кровле и подошве пласта.

В результате получается трещина прямоугольного вертикального сечения, а ширина трещины рассматривается как функция координаты x .

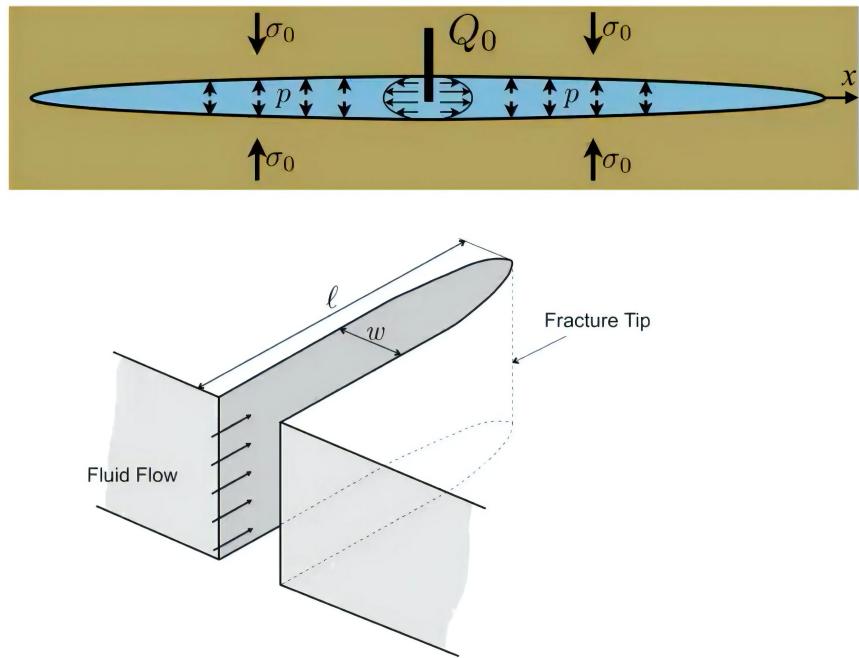


Рис.1.1. Геометрия трещины KGD

Для трещины KGD верно равенство, выражающее закон сохранения объёма жидкости в малом выделенном объёме:

$$w(t+dt)dx = w(t)dx + q_x(x)dt - q_x(x+dx)dt - 2gdxdt \quad (1.1)$$

Откуда получаем уравнение баланса жидкости:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + 2g = Q_0(t)\delta(x) \quad (1.2)$$

Из модели Картера скорость утечек:

$$g = \frac{C_l}{\sqrt{t - t_0(x)}} \quad (1.3)$$

Таким образом, уравнение баланса жидкости с учётом утечек для трещины KGD запишется в следующей форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \quad (1.4)$$

где $C' = 2C_l$.

В модели трещины KGD рассматривается одномерное течение жидкости вдоль трещины, то есть имеется только одна компонента вектора скорости, которая изменяется при движении:

$$v = v_x(y) \quad (1.5)$$

Из уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (1.6)$$

Для ньютоновской жидкости:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.7)$$

Дополнительно ставим условие неприлипания на границе:

$$v|_{y=\pm w/2} = 0 \quad (1.8)$$

Общее решение:

$$v = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + Ay + B \quad (1.9)$$

Решение после учёта граничных условий:

$$v = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{w^2 - 4y^2}{8\mu} \quad (1.10)$$

Суммарный поток (расход):

$$q = \int_{-w/2}^{w/2} v(y) dy = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.11)$$

Уравнение упругости для трещины KGD запишется в следующей форме:

$$p(x,t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s)ds}{(x-s)^2}, \quad (1.12)$$

где $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$.

Условие распространения трещины KGD можно представить в виде:

$$\lim_{x \rightarrow l} \frac{w}{(l - x)^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'}{E'}, & \text{если } v > 0 \\ \frac{K'_I}{E'}, & \text{если } v = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Таким образом, система уравнений модели трещины KGD запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ p(x,t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s)ds}{(x - s)^2}, \\ \lim_{x \rightarrow l} \frac{w}{(l - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (1.14)$$

где $C' = 2C_l$, $\mu' = 12\mu$, $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$, $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$.

Приближённые решения для модели Христиановича-Желтова-Гиртсмаде Клерка представлены в работе [17].

1.2. Модель радиальной трещины ГРП

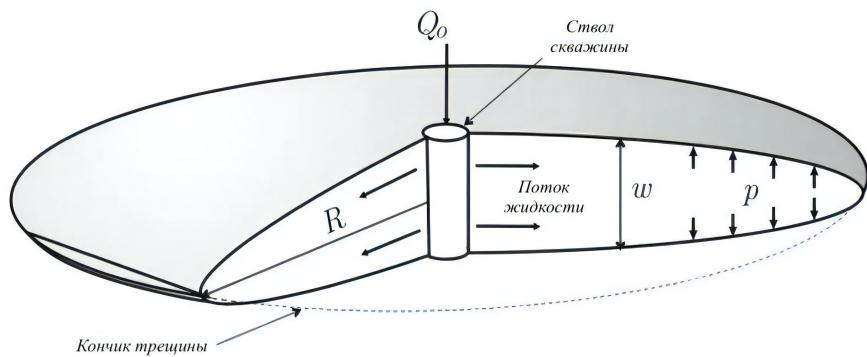


Рис.1.2. Геометрия радиальной трещины

Система уравнений модели радиальной трещины запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq) + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} = Q_0 \delta(r), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_n}{\partial r}, \\ p_n(r, t) = -\frac{E'}{2\pi R} \int_0^R M\left(\frac{r}{R}, \frac{r'}{R}\right) \frac{\partial w(r', t)}{\partial r'} dr', \\ \lim_{r \rightarrow R} \frac{w}{(R - r)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (1.15)$$

где $C' = 2C_l$, $\mu' = 12\mu$, $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$, $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$.

Приближённые решения для модели радиальной трещины представлены в работе [16]. Рассмотрены несколько случаев, а именно случай доминирования вязкости с доминированием утечек, случай доминирования вязкости с отсутствием утечек, случай доминирования трещиностойкости с доминированием утечек и случай доминирования трещиностойкости с отсутствием утечек.

1.3. Модель Перкинса-Керна-Нордгрена

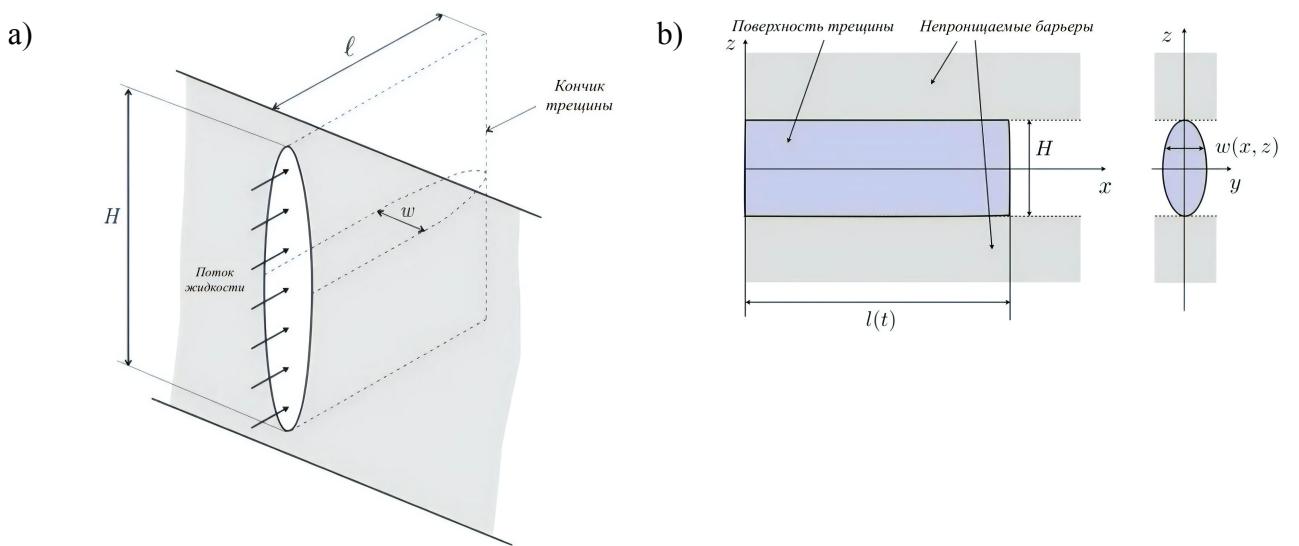


Рис.1.3. Геометрия трещины PKN: *a* — в 3Д; *b* — проекции

В модели PKN принимается, что условие плоской деформации сохраняется в каждой вертикальной плоскости, нормальной к направлению распространения;

однако, в отличие от ситуации строгой плоской деформации, состояние напряжений и деформаций не точно одинаково в следующих одна за другой плоскостях. Иными словами, в этой модели используется допущение квази-плоской деформации, причём плоскость отсчёта вертикальна и нормальна к направлению распространения. В модели PKN пренебрегается изменениями давления вдоль вертикальной координаты, а чистое давление p_{net} в трещине рассматривается как функция латеральной координаты x .

Система уравнений модели PKN запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \\ \bar{q}_x = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ p(x) = -\frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-l(t)}^{l(t)} \bar{w}(x') \frac{dG(2(x' - x)/H)}{dx'} dx', \\ \lim_{x \rightarrow l} \frac{w}{(l - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (1.16)$$

где $C' = 2C_l$, $\mu' = 12\mu$, $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$, $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$.

Приближённые решения для модели трещины PKN представлены в работе [18]. Рассмотрены несколько случаев, а именно случай доминирования вязкости с доминированием утечек, случай доминирования вязкости с отсутствием утечек, случай доминирования трещиностойкости с доминированием утечек и случай доминирования трещиностойкости с отсутствием утечек.

В работах [25; 27; 28] показано, что наиболее точно рост трещин автоГРП описывает модель PKN в случае доминирования трещиностойкости и больших утечек жидкости в пласт.

ГЛАВА 2. ОБЗОР МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕЩИН АВТОГРП

ГЛАВА 3. РАСЧЁТ ПОТОКОВ НА КАЖДОЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ТРЕЩИН ГИДРОРАЗРЫВА

Закачиваемый в скважину расход жидкости в общем случае перераспределяется между трещинами неодинаково вследствие разного качества перфораций на трещинах и других факторов.

В данной главе будет решена задача нахождения расхода Q_i на каждой i -ой трещине и забойного давления p_0 при фиксированном расходе жидкости Q_0 на забое скважины.

3.1. Постановка задачи

На рис. 3.1 представлена схема перераспределения потоков между тремя трещинами гидроразрыва пласта. На этой схеме обозначены искомые p_0 (забойное давление), Q_1 , Q_2 , Q_3 (расходы жидкости на трещинах), а также величины, которые важно учитывать при расчёте потоков, так как их значения существенно влияют на конечный результат.

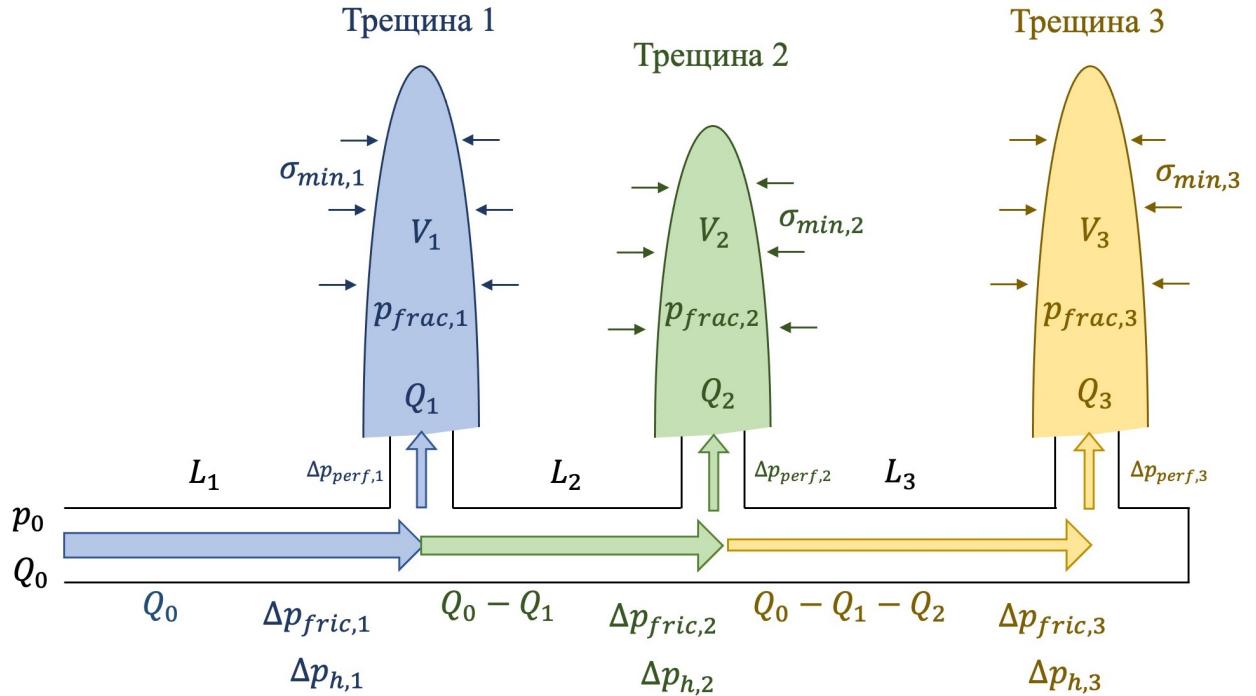


Рис.3.1. Схема перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва

Согласно первому правилу Кирхгофа весь расход, который закачиваем в скважину, перераспределяется между трещинами:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i, \quad (3.1)$$

где N – количество трещин.

Согласно второму правилу Кирхгофа каждый из путей к каждой из трещин рассматривается независимо:

$$p_0 = \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j}, \quad (3.2)$$

где $\sigma_{\min,i}$ – давление закрытия (минимальное напряжение в пласте) на i -ой трещине;

$p_{\text{net},i} = p_{\text{frac},i} - \sigma_{\min,i}$ – чистое давление на i -ой трещине (из модели трещины);

$\Delta p_{\text{perf},i}$ – падение давления вдоль перфорации i -ой трещины;

$\Delta p_{h,i}$ – вклад гидростатического давления между i -ой и $(i-1)$ -ой трещинами;

$\Delta p_{\text{fric},i}$ – падение давления на трение в трубе между i -ой и $(i-1)$ -ой трещинами.

Объединяя уравнения (3.1) и (3.2), получаем алгебраическую систему уравнений относительно p_0 и Q_i (где $i = \overline{1, N}$). Чтобы решить эту систему из $N+1$ уравнений с $N+1$ неизвестной, необходимо получить замыкающие соотношения на $p_{\text{net},i}$, $\Delta p_{\text{perf},i}$ и $\Delta p_{\text{fric},i}$. Другими словами, необходимо получить зависимости этих величин от искомых величин p_0 , Q_i и других параметров, значения которых можно найти непосредственным измерением или задать при проектировании скважины.

3.2. Замыкающие соотношения

Выражение для чистого давления в трещине автоГРП

В работе [23] получена формула для чистого давления трещины Перкинса-Керна-Нордгрена (модели РКН):

$$p_{\text{net},i} = \sqrt{\frac{8K_{Ic,i}^2}{\pi h_{f,i}}}, \quad (3.3)$$

где $K_{Ic,i}$ – трещиностойкость породы вблизи i -ой трещины,

$h_{f,i}$ – высота i -ой трещины (в случае РКН модели равна мощности продуктивной зоны).

Выражение для падения давления на перфорациях

Эмпирическая формула для падения давления на перфорациях [14; 15; 26] выглядит следующим образом:

$$\Delta p_{\text{perf},i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|, \quad (3.4)$$

где ρ_s – средняя плотность смеси;

$n_{p,i}$, $d_{p,i}$ – количество и диаметр перфораций;

$C_{d,i} = \frac{\min(d_{jet})}{d_p}$ – безразмерный коэффициент эрозии (в случае отсутствия твёрдых частиц в потоке $C_{d,i} \in [0.5, 0.6]$, а с твёрдыми частичками в потоке $C_{d,j} \in [0.6, 0.95]$ из-за эрозии перфорации).

Выражение для падения давления на трение в трубе

Для того, чтобы получить формулу для падения давления на трение в трубе, запишем уравнение Навье-Стокса и усредним его по площади сечения трубы:

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rx}) + \rho g \sin \theta \quad \left| \frac{1}{\pi R^2} \int_S (\cdot) dS, \right. \quad (3.5)$$

где $dp(x)/dx$ – падение давления вдоль скважины; τ_{rx} – напряжение сдвига; ρ – плотность жидкости; θ – угол между скважиной (нормалью к сечению трубы) и поверхностью земли.

После усреднения получаем следующее уравнение (среднее \bar{p} на самом деле можно заменить на просто p , так как давление выравнивается вдоль сечения – это можно доказать в предположениях течения тонкого слоя):

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} + \bar{\rho}g \sin \theta, \quad (3.6)$$

где $\tau_w = -\tau_{rx}|_{r=R}$ – напряжение сдвига (трения) на стенке трубы. Это напряжение сдвига (трения) можно измерить при ламинарном течении, а также в случае турбулентного течения (например, для известного перепада давления найти τ_w из (3.6) – то есть решить обратную задачу).

Введём коэффициент трения Фаннинга

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2}, \quad (3.7)$$

где u_m – средняя скорость потока в рассматриваемом сечении трубы.

Тогда уравнение (3.6) примет следующий вид:

$$\frac{dp}{dx} = \underbrace{-\frac{\rho u_m^2}{R} f_s}_{\text{на трение}} + \underbrace{\rho g \sin \theta}_{\substack{\text{вклад} \\ \text{гидро-} \\ \text{статического} \\ \text{давления}}} \quad (3.8)$$

Получили уравнение баланса сил: сила давления и сила тяжести уравновешиваются силой трения жидкости о стенки трубы.

Таким образом, падение давления на трение на каждом интервале рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta p_{\text{fric},i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_s \frac{\rho u_{m,i}^2}{R_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\rho(c(t,s)) \cdot f(Re) \cdot \left(Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j\right)^2}{R_i(s) S_i^2(s)} ds, \quad (3.9)$$

где $f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_{m,i}^2 / 2}$ – коэффициент трения Фаннинга;

$\rho(c(t,s))$ – плотность смеси, которая зависит от динамически меняющейся концентрации проппанта;

$u_{m,i} = \frac{Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j}{S_i}$ – средняя скорость в рассматриваемом сечении участка трубы;

S_i – площадь сечения рассматриваемого участка трубы;

R_i – радиус рассматриваемого участка трубы;

Re – число Рейнольдса.

Для ламинарного режима течения ньютоновской жидкости:

$$u_x = 2u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{и} \quad \tau_w = -\mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{4\mu_s u_m}{R}, \quad (3.10)$$

где μ_s – вязкость закачиваемой в скважину жидкости.

Тогда коэффициент трения Фаннинга для ламинарного режима течения запишется в следующем виде:

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} = \frac{8\mu_s}{\rho R u_m} = \frac{16}{Re}, \quad (3.11)$$

где $Re = \frac{\rho u_m (2R)}{\mu_s}$ – число Рейнольдса [29].

В трещины автоГРП закачивается вода без дополнительных веществ, поэтому плотность закачиваемой жидкости постоянна по всей длине скважины и равна плотности воды.

Таким образом, в случае ламинарного режима течения однородной ньютоновской жидкости (например, воды) формула для падения давления на трение в трубе (3.9) упрощается и запишется в следующем виде:

$$\Delta p_{\text{fric},i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{8\mu \left(Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j \right)}{R_i^2(s) S_i(s)} ds, \quad (3.12)$$

где μ – вязкость воды.

Выражение для изменения гидростатического давления

В общем случае изменение гидростатического давления на каждом интервале рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta p_{h,i}(t,x) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(c(t,s)) \cdot g \cdot \sin \theta(s) ds, \quad (3.13)$$

где x_i – измеренная глубина (MD) i -ого порта ГРП;

$\rho(c(t,s))$ – плотность закачиваемой в скважину смеси, которая зависит от меняющейся с координатой и временем концентрации проппанта;

g – ускорение свободного падения; $\theta(s)$ – угол между скважиной (нормалью к сечению трубы) и поверхностью земли в текущем заданном сечении трубы.

В данной работе исследуется поведение трещин, которые распространяются от одной горизонтальной скважины в одном пласте, залегающем на фиксированной глубине, поэтому изменения гидростатического давления между портами ГРП нет:

$$\Delta p_{h,i} = 0. \quad (3.14)$$

Замкнутая постановка задачи

С учётом полученных замыкающих соотношений постановка задачи о расчёте потоков между трещинами автоГРП запишется в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i, \\ p_0 = \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j}, \\ p_{\text{net},i} = \sqrt{\frac{8K_{Ic,i}^2}{\pi h_{f,i}}}, \\ \Delta p_{\text{perf},i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|, \\ \Delta p_{\text{fric},j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{8\mu \left(Q_0 - \sum_{k=1}^{j-1} Q_k \right)}{R_j^2(s) S_j(s)} ds, \\ \Delta p_{h,j} = 0. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Подстановка последних четырёх равенств (3.15) в первые два равенства даёт замкнутую систему нелинейных алгебраических уравнений с неизвестными p_0 и Q_i ($i = \overline{1, N}$), которая может быть решена численно, например, с помощью метода Ньютона.

3.3. Описание численного алгоритма решения

Используя замкнутую постановку задачи (3.15), введём вектор неизвестных $Q^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N, p_0]$ и вектор невязок $F^T = [F_1, F_2, \dots, F_N, F_{N+1}]$, где

$$F_i = \begin{cases} \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j} - p_0 & (\text{при } i \leq N) \\ Q_0 - \sum_{j=1}^N Q_j & (\text{при } i = N+1) \end{cases} \quad (3.16)$$

Ставится задача минимизации вектора невязок. В качестве начального приближения считается, что закачиваемый в скважину расход жидкости перераспределяется между трещинами одинаково $Q_i = Q_0/N$ (где $i = \overline{1, N}$), а забойное давление принимается равным давлению закрытия (смыкания) трещин $p_0 = \sigma_{\min}$.

Далее составляется матрица Якоби

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_1}{\partial p_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial p_0} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

и итеративно с помощью метода Ньютона ищется вектор неизвестных \bar{Q}^T :

$$\bar{Q}^{k+1} = \bar{Q}^k - J^{-1} \bar{F}^k \quad (3.18)$$

В качестве условия остановки выбрано следующее условие на разницу между соседними приближениями к решению:

$$|\bar{Q}^{k+1} - \bar{Q}^k|^2 \leq 10^{-4}. \quad (3.19)$$

Реализация описанного численного алгоритма решения на языке программирования Python представлена в приложении 1.

3.4. Результаты

Значения входных параметров, выбранные перед запуском алгоритма представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Значения входных параметров алгоритма расчёта потоков

Параметр	Значение
Расход на забое Q_0	800 м ³ /сут
Вязкость закачиваемой жидкости (воды) μ	10 ⁻³ Па·с
Плотность закачиваемой жидкости (воды) ρ	1000 кг/м ³
Проницаемость пласта k_e	1 мД
Пористость пласта φ_e	0.2
Общая сжимаемость c_t	2.2 · 10 ⁻⁹ Па ⁻¹
Пластовое давление p_e	25 МПа
Модуль плоской деформации породы E'	10 ⁴ МПа
Мощность пласта H	15 м
Количество перфораций n_p	32
Диаметр перфораций d_p	0.02 м
Безразмерный коэффициент эрозии C_d	0.5
Радиус участков трубы R	0.08 м
Длина участков трубы L	100 м

Продолжение табл. 3.1

Параметр	Значение
Давление смыкания σ_{\min}	40 МПа
Трещиностойкость породы K_{Ic}	$10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}$
Количество трещин	4

На рис 3.2 показан итеративный процесс поиска расходов жидкости на каждой из четырёх трещин автоГРП.

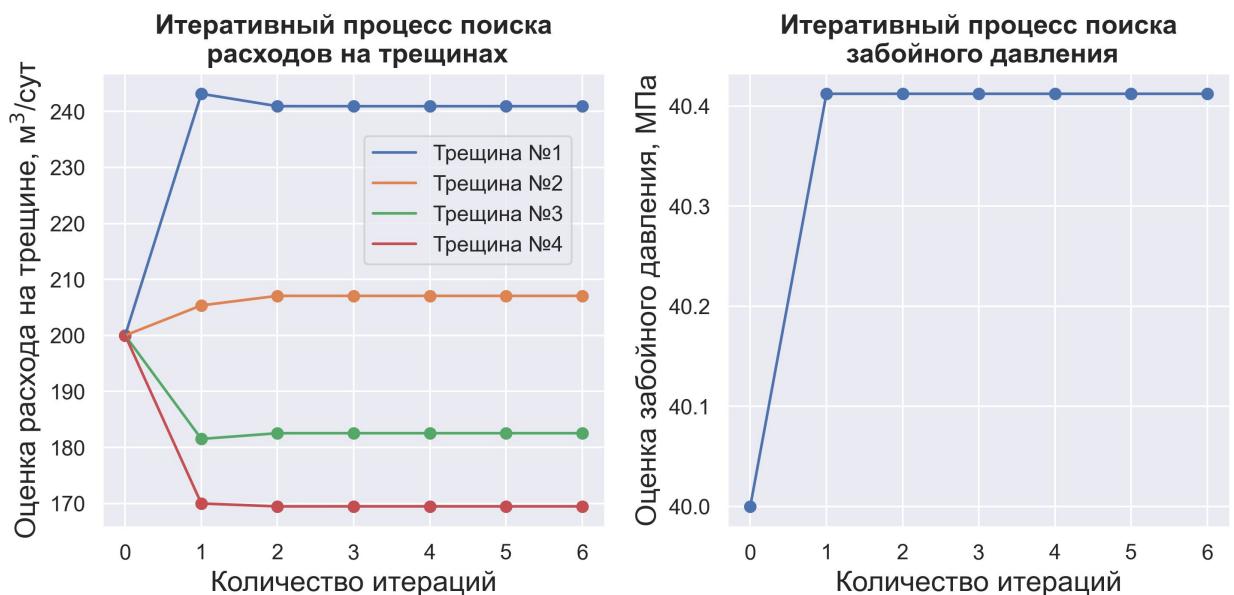


Рис.3.2. Итеративный процесс поиска расходов на трещинах и забойного давления (входные параметры алгоритма представлены в таблице 3.1)

Видим, что потоки распределились по трещинам неодинаково вследствие имеющихся потерь давления на трение в трубе (падение давления на трение при движении жидкости к первой трещине меньше, чем падение давления на трение при движении жидкости по трубе к последней трещине).

Далее проведён расчёт потоков на каждой из четырёх трещин в случае уменьшенного диаметра перфораций на второй трещине (диаметр уменьшен с 0.02 м до 0.005 м). Результаты представлены на рис. 3.3.

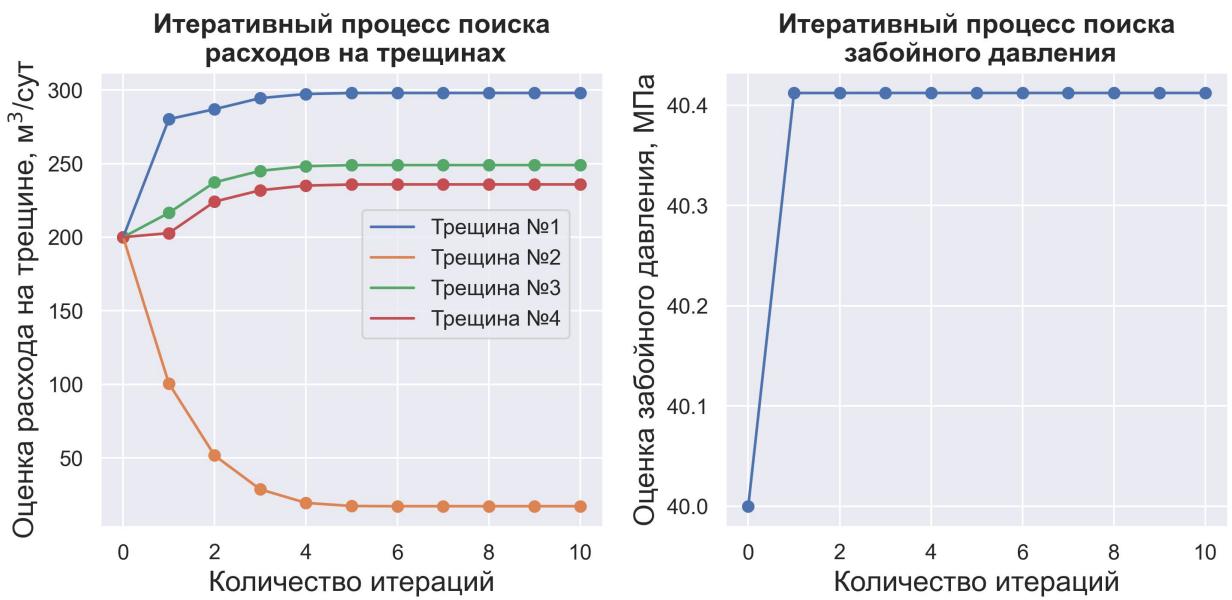


Рис.3.3. Итеративный процесс поиска расходов на трещинах и забойного давления (по сравнению с предыдущим расчётом уменьшен диаметр перфораций $d_{p,2} = 0.005$ м на второй трещине)

Видим, что уменьшение диаметра перфораций на одной из трещин существенно сократило расход жидкости на этой трещине и при этом возросли расходы жидкости на соседних трещинах.

Итак, в данной главе реализован алгоритм расчёта потоков на каждой из нескольких трещин автоГРП. В следующей главе этот алгоритм будет использован для моделирования одновременного роста нескольких трещин автоГРП в длину.

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА ТРЕЩИН АВТОГРП В ДЛИНУ

4.1. Постановка задачи

На основе модели Картера [24] в работе [25] получена формула Кёнинга, которая представляет собой зависимость полудлины трещины автоГРП от расхода жидкости и фильтрационно-ёмкостных свойств пласта:

$$x_f = \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)}, \quad (4.1)$$

где Q – расход нагнетаемой в рассматриваемую трещину жидкости;
 μ – вязкость жидкости;
 $\kappa = k_e / (\varphi_e \mu c_t)$ – коэффициент пьезопроводности пласта;
 t – время закачки;
 k_e – проницаемость пласта;
 φ_e – пористость пласта;
 c_t – общая сжимаемость;
 h – эффективная толщина (мощность) пласта;
 $\Delta p = p_f - p_e$ – разница между средним давлением в трещине и пластовым давлением.

В данной работе рассматривается одновременный рост нескольких трещин автоГРП, поэтому расход жидкости на каждой из них динамично изменяется согласно законам Кирхгофа. Кроме того, давление в трещинах тоже изменяется согласно выражению (3.3) по мере увеличения объема трещин и изменения расхода на них.

Таким образом, для корректного применения формулы Кёнинга приращение полудлины каждой из трещин необходимо найти как произведение полной производной формулы Кёнинга по времени на рассматриваемый шаг по времени.

Полная производная полудлины трещины x_f по времени t :

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial x_f}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial x_f}{\partial p_f} \frac{dp_f}{dt} \quad (4.2)$$

Частная производная полудлины трещины x_f по времени t :

$$\frac{\partial x_f}{\partial t} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} \quad (4.3)$$

Частная производная полудлины трещины x_f по расходу Q :

$$\frac{\partial x_f}{\partial Q} = \frac{\mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \quad (4.4)$$

Частная производная полудлины трещины x_f по давлению в трещине p_f :

$$\frac{\partial x_f}{\partial p_f} = -\frac{Q \mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.3), (4.4) и (4.5) в выражение (4.2), получаем:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{Q \mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi \kappa}{t}} + \frac{\mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \frac{dQ}{dt} - \frac{Q \mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} \frac{dp_f}{dt} \quad (4.6)$$

Итак, приращение полудлины трещины на каждом шаге по времени записывается в следующем виде:

$$dx_f = \frac{Q \mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi \kappa}{t}} dt + \frac{\mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} dQ - \frac{Q \mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} dp_f \quad (4.7)$$

4.2. Описание численного алгоритма решения

Совмещение формулы Кёнинга с уравнениями Кирхгофа будет проведено следующим образом:

- 1) на текущем шаге по времени по имеющимся значениям полудлины трещин автоГРП предыдущего шага будут рассчитаны давления и расходы на каждой трещине;
- 2) на основе полученных значений приращения давления и расхода будет найдено приращение полудлины трещины dx_f на данном временном шаге по формуле (4.7);
- 3) по формуле $x_f^{\text{current}} = x_f^{\text{last}} + dx_f$ будут найдены полудлины каждой из трещин на текущем временном шаге;
- 4) описанные действия будут проделаны до требуемого шага по времени (условия остановки).

4.3. Результаты моделирования

С помощью метода Ньютона проведено решение поставленной в первом разделе задачи. Рассматривались 3 одинаковые трещины гидоразрыва. Результаты представлены на рис. 4.1.

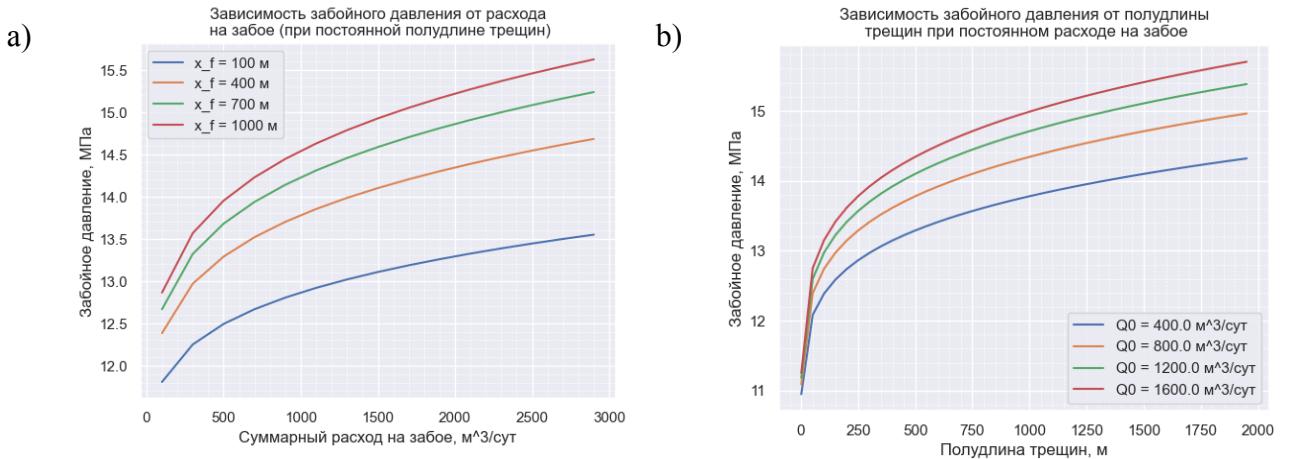


Рис.4.1. Зависимости забойного давления от основных параметров задачи: *a* — от суммарного расхода на забое; *b* — от полудлины трещин

Далее для учёта роста трещин автоГРП в длину было проведено совмещение уравнений законов Кирхгофа (3.1) и (3.2) с формулой Кёнинга [25]:

$$x_f = \frac{q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi kh\Delta p}, \quad (4.8)$$

где x_f — полудлина трещины автоГРП;

q — расход закачиваемой жидкости на трещине;

μ — вязкость закачиваемой жидкости;

k — пьезопроводность пласта;

h — проницаемость пласта;

t — эффективная проницаемая толщина (мощность) пласта;

Δp — средняя по времени разница между пластовым и забойным давлениями;

t — время закачки.

Результаты моделирования представлены на рис. 4.2.

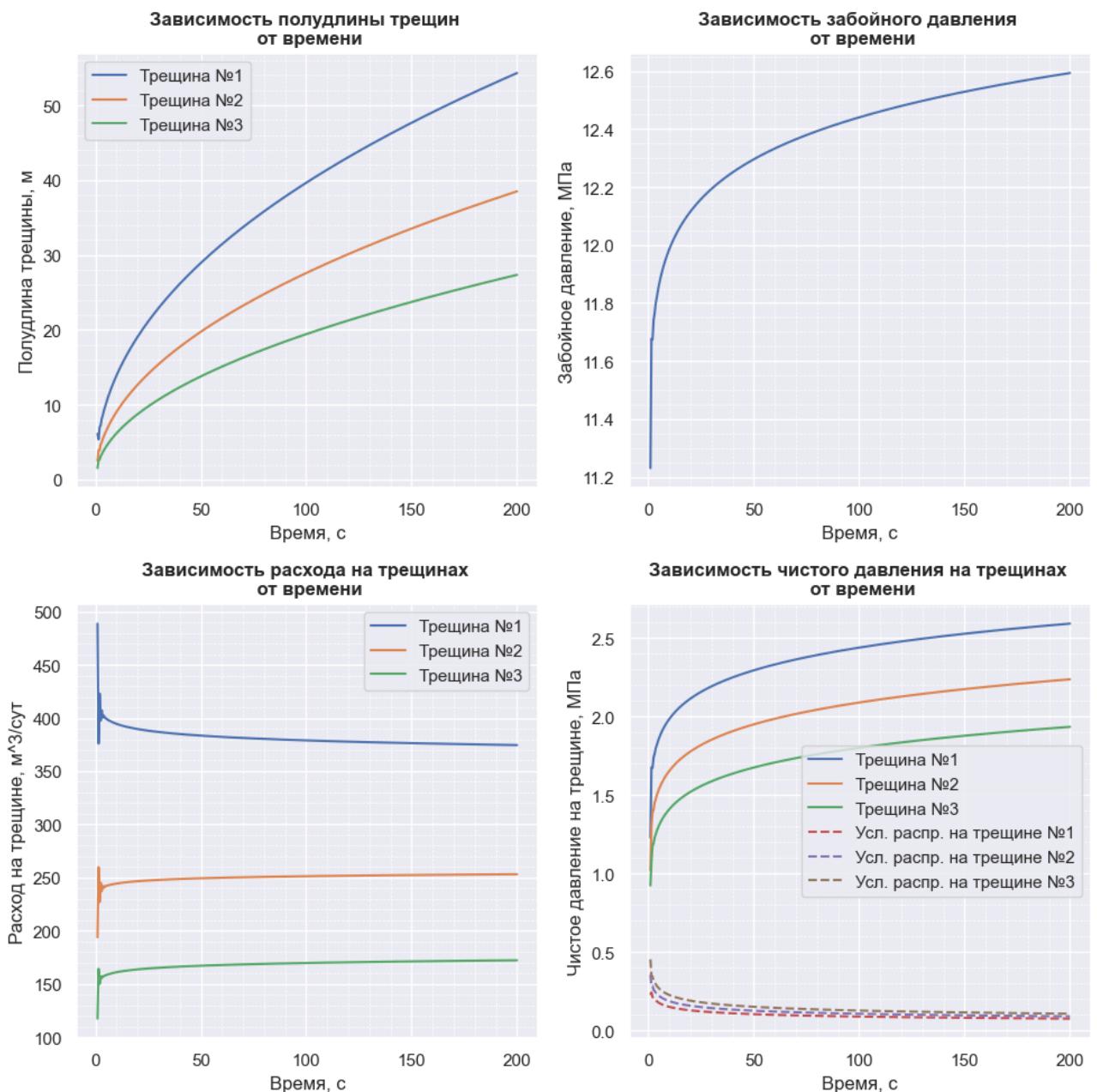


Рис.4.2. Результаты решения поставленной задачи

В проведённом численном эксперименте трещины отличаются друг от друга количеством и диаметром перфораций.

У трещины 1: количество перфораций 32, диаметр перфораций 0.02 м.

У трещины 2: количество перфораций 2, диаметр перфораций 0.01 м.

У трещины 3: количество перфораций 1, диаметр перфораций 0.01 м.

Код решения представлен по ссылке: https://github.com/mualal/hydrofracturing/blob/master/notebooks/02_fractures_growth_with_Koning.ipynb

Из графиков на рис. 4.2 видим, что большую часть потока забирает на себя трещина с лучшими перфорациями. Эта же трещина лидирует по скорости роста.

Также видим, что при росте трещин требуется всё большее забойное давление для того, чтобы поддерживать этот рост.

При выбранных входных параметрах построенной модели чистое давление в каждой из трещин существенно превышает давления критерия распространения, следовательно, при достаточно высоком забойном давлении все трещины будут расти одновременно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были проанализированы известные модели роста трещин гидроразрыва, для каждой из трещин автоГРП выбрана модель РКН, после чего была построена модель одновременного роста нескольких трещин автоГРП и модель перераспределения потоков между трещинами автоГРП.

Проведённый анализ показал, что на скорость роста трещины автоГРП существенно влияет качество перфораций на этой трещине.

На языке Python написан код для моделирования перераспределения потоков между трещинами автоГРП и построены графики зависимости полудлины трещин автоГРП от времени, зависимости забойного давления от времени, расходов и чистого давления на каждой из трещин от времени.

Сделан вывод, что для поддержания роста трещин автоГРП требуется увеличение забойного давления, которое влечёт за собой увеличение чистого давления на каждой из трещин и дальнейшее увеличение длины каждой из трещин автоГРП.

В дальнейшем планируется учесть возможную остановку роста одной или нескольких трещин автоГРП из-за ухудшения фильтрационных свойств на ней

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Афанасьев И. С., Тимонов А. В., Судеев И. В., Мусабиров Т. Р., Степанов М. А., Колонских А. В., Галеев Р. Р. Анализ применения и перспективы дальнейшего использования горизонтальных скважин с множественными трещинами ГРП на Приобском месторождении. — SPE 162031, 2012.
2. Базыров И. Ш. Контроль и регулирование роста техногенных трещин при вытеснении нефти из низкопроницаемых коллекторов. — Дис. канд. тех. наук, 2020.
3. Базыров И. Ш., Шель Е. В., Хасанов М. М. Анализ эффективности заводнения низкопроницаемых коллекторов нагнетательными горизонтальными скважинами с поперечными трещинами многостадийного ГРП. — PROнефть, сентябрь 2020. — DOI 10.7868/S258773992002007X.
4. Байков В. А., Давлетбаев А. Я., Асмандияров Р. Н., Усманов Т. С., Степанова З. Ю. Специальные гидродинамические исследования для мониторинга за развитием трещин ГРП на нагнетательных скважинах. — Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело» №1, 2011. — С. 65-75.
5. Давлетбаев А. Я., Байков В. А., Бикбулатова Г. Р., Асмандияров Р. Н., Назаргалин Э. Р., Слабецкий А. А., Сергейчев А. В., Нуриев Р. И. Промысловые исследования по изучению самопроизвольного развития техногенных трещин в нагнетательных скважинах. — SPE-171232-MS, 2014.
6. Кабанова П. К. Моделирование давления инициации трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине в пороупругой постановке. — Магистерская диссертация, 2019.
7. Калинин С. А., Байкин А. Н., Абдуллин Р. Ф., Старовойтова Б. Н., Базыров И. Ш., Копейкин Р. Р., Головин С. В., Кичигин Е. Н. Анализ слияния трещин автоГРП в рядной системе разработки с помощью математического моделирования. — Нефтяное хозяйство, 12'2022. — С. 40-45.
8. Лойцянский Л. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987.
9. Мальцев В. В., Асмандияров Р. Н., Байков В. А., Усманов Т. С., Давлетбаев А. Я. Исследование развития трещин автоГРП на опытном участке Приобского месторождения с линейной системой разработки. — Нефтяное хозяйство №5, 2012. — С. 70-73.

10. Рыбаковская А. А. Поиск полных напряжений на скважине/трещине в бесконечном пласте в пороупругой постановке. — Магистерская диссертация, 2021.
11. Ткаченко Д. Р. Анализ влияния режима работы нагнетательной скважины на рост трещины автоГРП. — Магистерская диссертация, 2020.
12. Шель Е. В., Кабанова П. К., Ткаченко Д. Р., Базыров И. Ш., Логвинюк А. В. Моделирование инициации и распространения трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине для нетрещиноватых терригенных пород на примере Приобского месторождения. — PROНефть, 2020.
13. Якупов И. Я., Егоров Е. Л., Родионова И. И., Мироненко А. А., Искеевич И. Г., Мирошниченко В. П., Сергейчев А. В. Разработка низкопроницаемых объектов Приобского месторождения в условиях образования техногенных трещин автоГРП. — Экспозиция Нефть Газ №5 (90), 2022.
14. Cramer D. D. The Application of Limited-Entry Techniques in Massive Hydraulic Fracturing Treatments. — SPE 16189, 1987. — p. 29-46.
15. Crump J. B., Conway M. W. Effects of Perforation-Entry Friction on Bottomhole Treating Analysis. — Journal of Petroleum Technology, August 1988.
16. Dontsov E. V. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. — R. Soc. open sci., 3:160737, 2016.
17. Dontsov E. V. An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. — Int. J. Fract., 205, 2017. — 221-237.
18. Dontsov E. V. Analysis of a constant height hydraulic fracture. — 2021. — arXiv: 2110.13088 [physics.geo-ph].
19. Economides M., Oligney R., Valkó P. Unified Fracture Design. Bridging the Gap Between Theory and Practice. — Alvin, Texas: Orsa Press, 2002. — 260 p.
20. Elbel J. L., Piggott A. R., Mack M. G. Numerical Modeling of Multilayer Fracture Treatments. — SPE 23982, 1992.
21. Hagoort J. Waterflood-induced hydraulic fracturing. — PhD. Thesis, Delft Technical University, 1981.
22. Hagoort J., Weatherill B. D., Settari A. Modeling the Propagation of Waterflood-Induced Hydraulic Fractures. — SPE, 1980.

23. *Kabanova P. A., Shel E. V.* Modeling of Water-Induced Fracture Growth Pressure Using Poroelastic Approach. — ECMOR XVII – 17th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 2020.
24. *Karter R. D.* Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area. — Appendix of “Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension” by Howard G.C, Fast C.R., 1957. — 261-268 p.
25. *Koning E. J. L.* Fractured water-injection wells. Analytical modelling of fracture propagation. — Petroleum Development Oman LLc, 1985.
26. *Long G., Liu S., Xu G., Wong S.-W.* Modeling of Perforation Erosion for Hydraulic Fracturing Applications. — SPE-174959-MS, 2015.
27. *Nordgren R. P.* Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture. — SPE 89, August 1972. — P. 306-314.
28. *Perkins T., Kern L.* Widths of hydraulic fractures. — SPE 89, September 1961. — P. 937 – 949.
29. *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. — Phil. Trans. Roy. Soc., 174, Papers, vol. 2, 1883. — p. 935 - 982.
30. *Trimonova M., Dubinya N.* The Main Tendencies of Water-Induced Hydraulic Fracture Propagation. — SPE-176638-MS, 2015.

Приложение 1

Код для расчёта потоков на каждой из трещин автоГРП

```
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
sns.set_theme()
from tqdm import tqdm
```

```
# размеры шрифтов на графиках matplotlib

SMALL_SIZE = 12
MEDIUM_SIZE = 16
BIGGER_SIZE = 16

plt.rc('font', size=MEDIUM_SIZE)
plt.rc('axes', titlesize=SMALL_SIZE)
plt.rc('axes', labelsize=MEDIUM_SIZE)
plt.rc('xtick', labelsize=SMALL_SIZE)
plt.rc('ytick', labelsize=SMALL_SIZE)
plt.rc('legend', fontsize=SMALL_SIZE)
plt.rc('figure', titlesize=BIGGER_SIZE)
```

```
fracs_count = 4 # количество трещин
K_c = 1e6 # Па*m^(1/2) трещиностойкость породы
```

```
# параметры задачи в символьном виде

# суммарный расход на забое и забойное давление
Q_0, p_0 = symbols('Q0 p0', real=True)

# расходы на каждой из трещин
Q = np.array(symbols(f'Q1:{fracs_count+1}', real=True))
# полуудлина каждой из трещин
x_f = np.array(symbols(f'x_f1:{fracs_count+1}', real=True))
# модуль плоской деформации породы вблизи каждой из трещин
E = np.array(symbols(f'E1:{fracs_count+1}', real=True))
# мощность продуктивной зоны для каждой из трещин (высота трещин)
h = np.array(symbols(f'h1:{fracs_count+1}', real=True))
# реологические параметры жидкости
K, n = symbols('K n', real=True)
# проницаемость пласта
k_e = symbols('k_e', real=True)
# пластовое давление
```

```

p_e = symbols('p_e', real=True)
# пористость пласта
phi_e = symbols('phi_e', real=True)
# общая сжимаемость
c_t = symbols('c_t', real=True)
# время
t = symbols('t', real=True)
# чистые давления на каждой из трещин
p_frac_net = np.array(symbols(f'p_frac_net1:{fracs_count+1}', real=True))

# количество перфораций на каждой из трещин
n_p = np.array(symbols(f'n_p1:{fracs_count+1}', real=True))
# диаметры перфораций на каждой из трещин
d_p = np.array(symbols(f'd_p1:{fracs_count+1}', real=True))
# коэффициент эрозии на каждой из трещин
C_d = np.array(symbols(f'C_d1:{fracs_count+1}', real=True))
# средняя плотность смеси
rho_s = symbols('rho_s', real=True)

# радиусы участков трубы к каждой из трещин
R = np.array(symbols(f'R1:{fracs_count+1}', real=True))
# длина участков трубы, ведущих к каждой из трещин
L = np.array(symbols(f'L1:{fracs_count+1}', real=True))

# средняя скорость на рассматриваемом участке трубы к каждой из трещин
u_m = np.array(symbols(f'u_m1:{fracs_count+1}', real=True))
# давление закрытия для каждой из трещин
sigma_min = symbols(f'sigma_min1:{fracs_count+1}')

# приращение расхода на каждой из трещин
# для пошагового (во времени) использования формулы Кёнинга
dQ = np.array(symbols(f'dQ1:{fracs_count+1}', real=True))
# приращения давлений на каждой из трещин
dp_f = np.array(symbols(f'dp_net1:{fracs_count+1}', real=True))
# шаг по времени
dt = symbols('dt', real=True)^^I

```

```

# чистое давление в трещинах (без утечек)
def p_net_without_leak_off():
    V = h * (2 * x_f) * K_c * (S.Pi*h)**(1/2) / E
    a = (((n + 3) * (2 * n + 1)**n * K * E**(2*n+2)) / \
          (S.Pi * 2**(2 * n) * n**n * phi**n * \
          h**(3 * n + 3))) ** (1 / (2 * n + 3))
    # чистое давление на каждой из трещин
    p_net = a * Q**n/(2*n+3) * V**(1/(2*n+3))
    return p_net

# чистое давление в трещинах (с утечками и доминированием трещиностойкости)
def p_net_with_leak_off():
    p_net = 2**3/2 * K_c / (S.Pi * h)**(1/2)
    return p_net

```

```

# падение давления на перфорациях
def delta_p_perf():
    # падение давления на перфорациях на каждой из трещин
    delta_p_perf = 8 * rho_s / \
        (S.Pi**2 * C_d**2 * n_p**2 * d_p**4) * Q * abs(Q)
    return delta_p_perf

# падение давления на трение в трубе
def delta_p_fric():
    for i, _ in enumerate(u_m):
        u_m[i] = (Q_0 - sum([Q[j] for j in range(i)])) / (S.Pi * R[i]**2)
    # падение давления на трение в трубе для каждой из трещин
    delta_p_fric = 8 * (K / R) * (u_m / R) * L
    return delta_p_fric

```

```

# решатель уравнений Кирхгофа

def kirchhoff_solver(parameter_values):
    # массив со всеми уравнениями законов Кирхгофа
    all_eqns = np.array([])

    # добавляем левую часть уравнений второго закона Кирхгофа
    # в массив all_eqns
    for i in range(fracs_count):
        all_eqns = np.append(all_eqns, p_0 - sigma_min[i] - \
            p_net_with_leak_off()[i] - \
            delta_p_perf()[i] - \
            sum([delta_p_fric()[j] for j in range(i+1)]))

    # добавляем левую часть уравнения первого закона Кирхгофа
    # в массив all_eqns
    all_eqns = np.append(all_eqns, Q_0 - sum(Q))

    # матрица Якоби
    J = np.zeros(shape=(fracs_count+1, fracs_count+1), dtype=object)
    for i, _ in enumerate(all_eqns):
        for j, _ in enumerate(Q):
            J[i, j] = diff(all_eqns[i], Q[j])
        J[i, -1] = diff(all_eqns[i], p_0)
    J_sym = Matrix(J)
    #display(J_sym)

    # начальные приближения числовых значений неизвестных параметров задачи
    solution_values = {}
    iterative_history = []
    for i in range(fracs_count):
        # расходы на каждой из трещин (начальное приближение)
        solution_values[Q[i]] = N(Q_0.subs(parameter_values)/fracs_count)
    # забойное давление (начальное приближение)
    solution_values[p_0] = N(sigma_min[0].subs(parameter_values))

```

```

# вектор решения
solution_vector = np.array(list(N(Matrix(Q).subs(solution_values)))) + \
    [N(p_0.subs(solution_values))],
    dtype='float64').reshape(fracs_count+1,1)
iterative_history.append(solution_vector.flatten())
# предыдущий вектор решения
last_solution_vector = solution_vector - 100

# реализация метода Ньютона
while np.linalg.norm(solution_vector - last_solution_vector) > 1e-4:
    # обновляем предыдущий вектор решения
    last_solution_vector = solution_vector.copy()
    # матрица Якоби
    #print(N(J_sym.subs({**parameter_values, **solution_values})))
    J = np.array(N(J_sym.subs({**parameter_values, **solution_values})),
        dtype='float64')
    # вектор остатков
    residual_vector = np.array(
        N(Matrix(all_eqns).subs({**parameter_values, **solution_values})),
        dtype='float64'
    )
    # новый вектор решения
    solution_vector -= np.matmul(np.linalg.inv(J), residual_vector)
    iterative_history.append(solution_vector.flatten())
    for i, val in enumerate(solution_vector):
        if val < 0:
            solution_vector[i] = 1e-21
    # обновление значений текущего вектора решения
    # в словаре solution_values
    for i in range(fracs_count):
        solution_values[Q[i]] = solution_vector.reshape(fracs_count+1,)[i]
        solution_values[p_0] = solution_vector.reshape(fracs_count+1,)[-1]
return solution_values, iterative_history^^I

```

```

# проверяю работу решателя уравнений Кирхгофа

parameter_values = {
    # расход на забое, м^3/с
    Q_0: 800 / 86400,
    # первый реологический параметр жидкости (вязкость воды), Па*c
    K: 0.001,
    # второй реологический параметр жидкости (ニュтоновская жидкость - вода)
    n: 1,
    # плотность закачиваемой жидкости (воды), кг/м^3
    rho_s: 1000,
    # проницаемость пласта, м^2
    k_e: 1e-15,
    # пористость пласта
    phi_e: 0.2,
    # общая сжимаемость, Па^(-1)
}

```

```

    c_t: 2.2e-9,
    # пластовое давление, Па
    p_e: 2.5e7
}

for i in range(fracs_count):
    # полудлина трещины, м
    parameter_values[x_f[i]] = 1
    # модули плоской деформации породы, Па
    parameter_values[E[i]] = 1e10
    # мощности продуктивной зоны, м
    parameter_values[h[i]] = 15
    # количества перфораций
    parameter_values[n_p[i]] = 32
    # диаметры перфораций, м
    parameter_values[d_p[i]] = 0.02
    # безразмерные коэффициенты эрозии
    parameter_values[C_d[i]] = 0.5
    # радиусы участков трубы между i-ой и (i-1)-ой трещинами, м
    parameter_values[R[i]] = 0.08
    # длины участков трубы между i-ой и (i-1)-ой трещинами, м
    parameter_values[L[i]] = 100
    # давления закрытия трещин, Па
    parameter_values[sigma_min[i]] = 4e7

solution_values, iterative_history = kirchhoff_solver(parameter_values)
display(solution_values)

```

```

# построение графиков итерационного процесса решения

fig0, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,5))

for ii in range(fracs_count):
    axs[0].plot([i for i in range(len(iterative_history))],
                [item[ii]*86400 for item in iterative_history],
                label=f'Трещина №{ii+1}')
    axs[0].scatter([i for i in range(len(iterative_history))],
                  [item[ii]*86400 for item in iterative_history])
axs[0].set_title('Итеративный процесс поиска\nрасходов на трещинах',
                 weight='bold',
                 size=15)
axs[0].set_xlabel('Количество итераций')
axs[0].set_ylabel('Оценка расхода на трещине, м$^3$/сут')
axs[0].legend(bbox_to_anchor=(0.5, 0.72), ncol=1)

axs[1].plot([i for i in range(len(iterative_history))],
            [item[fracs_count]/1e6 for item in iterative_history])
axs[1].scatter([i for i in range(len(iterative_history))],
              [item[fracs_count]/1e6 for item in iterative_history])
axs[1].set_title('Итеративный процесс поиска\nзабойного давления',
                 weight='bold',

```

```
        size=15)
axs[1].set_xlabel('Количество итераций')
axs[1].set_ylabel('Оценка забойного давления, МПа')

fig0.tight_layout()

fig0.savefig('myimage.jpg', dpi=300)
```

Приложение 2**Код для моделирования роста трещин автоГРП в длину**

```
# формула Кёнинга
def koning_formula():
    kappa = k_e / (phi_e * K * c_t)
    x_frac = Q * K * ((S.Pi * kappa * t)**(1/2)) / \
              (2 * S.Pi * k_e * h * (p_frac_net + sigma_min - p_e))
    return x_frac
```