

Содержание

Приближённое решение для плоской трещины ГРП, учитывающее трещиностойкость, вязкость жидкости и утечки (Е.В. Донцов)	3
1 Введение	3
2 Основные уравнения для плоской трещины ГРП (модели KGD)	5
3 Приближённое решение для плоской трещины ГРП	6
3.1 Краткое описание методологии	6
3.2 Решение в отмасштабированных переменных	8
4 Сравнение с вершинными решениями	9
4.1 Предельное решение в M вершине	9
4.2 Предельное решение в \tilde{M} вершине	9
4.3 Предельное решение в K вершине	9
4.4 Предельное решение в \tilde{K} вершине	9
4.5 Интерполяция параметра λ	9
5 Структура решения	9
5.1 Переход вдоль границы MK	9
5.2 Переход вдоль границы $M\tilde{M}$	9
5.3 Переход вдоль границы $K\tilde{K}$	9
5.4 Переход вдоль границы $\tilde{M}\tilde{K}$	9
6 Сравнение с численным решением	9
7 Резюме	9
8 Данные по работе	9
Приложение А. Функции $g_\delta(\hat{K}, \hat{C})$ и $\Delta(\hat{K}, \hat{C})$	9
Приложение В. Численная схема	9
Список использованной литературы	9

Приближённое решение для радиальной трещины ГРП, учитывающее трещиностойкость, вязкость жидкости и утечки (Е.В. Донцов)	12
1 Введение	12
2 Основные уравнения для радиальной трещины ГРП	14
3 Приближённое решение для радиальной трещины ГРП	16
3.1 Краткое описание методологии	16
3.2 Решение в отмасштабированных переменных	16
4 Сравнение с вершинными решениями	16
4.1 Предельное решение в M вершине	16
4.2 Предельное решение в \tilde{M} вершине	16
4.3 Предельное решение в K вершине	16
4.4 Предельное решение в \tilde{K} вершине	16
4.5 Интерполяция параметра λ	16

5	Структура решения	16
6	Сравнение с численным решением	16
7	Резюме	16
	Приложение А. Функции $g_\delta(\hat{K}, \hat{C})$ и $\Delta(\hat{K}, \hat{C})$	16
	Приложение В. Численная схема	16
	Список использованной литературы	16
Анализ трещины гидроразрыва пласта постоянной высоты (Е.В. Донцов)		20
1	Введение	20
2	Основные уравнения	22
3	Область кончика	24
4	Вершинные (асимптотические) решения	27
5	Полное решение	31
6	Примеры применения	35
7	Резюме	36
	Список использованной литературы	37

Приближённое решение для плоской трещины ГРП, учитывающее трещиностойкость, вязкость жидкости и утечки (Е.В. Донцов)

Аннотация

Цель этой статьи состоит в том, чтобы разработать приближенное решение для распространяющейся плоской трещины гидроразрыва пласта, поведение которой определяется комбинированным взаимодействием вязкости жидкости, трещиностойкости и утечки жидкости. Аппроксимация построена на предположении, что поведение трещины в первую очередь определяется трехпроцессной (вязкостью, трещиностойкостью и утечкой) многомасштабной асимптотикой кончика и глобальным балансом объема жидкости. Во-первых, рассматриваются решения предельных режимов распространения, которые можно привести к явному виду. После этого исследуются области применимости предельных решений и анализируются переходы от одного предельного решения к другому. Для количественной оценки погрешности построенного приближенного решения его предсказания сравниваются с эталонным численным решением. Результаты показывают, что аппроксимация способна прогнозировать параметры трещины гидроразрыва для всех предельных и переходных режимов с погрешностью менее одного процента. Следовательно, результаты данной работы могут быть использованы для получения быстрого решения для плоской трещины гидроразрыва с утечкой, которое можно использовать для быстрой оценки геометрии трещины или в качестве опорного решения для оценки точности более совершенных симуляторов гидроразрыва пласта.

1 - Введение

Гидроразрыв пласта – это технология, которая в основном используется в нефтяной промышленности для стимуляции нефтяных и газовых скважин, см. к примеру (Economides and Nolte 2000). Большие объемы жидкости для гидроразрыва закачиваются глубоко в недра для создания трещин, которые служат высокопроницаемыми путями, увеличивающими добычу углеводородов. Несмотря на то, что гидроразрыв пласта известен в нефтяных приложениях, он также используется для восстановления отходов (Frank and Barkley 2005), удаления отходов (Abou-Sayed et al. 1989) и предварительного кондиционирования при добыче горных пород (Jeffrey and Mills 2000). Естественные проявления гидроразрывов включают подъем магмы через литосферу (дайки), который широко изучался в последние десятилетия (Spence and Turcotte 1985; Lister 1990; Lister and Kerr 1991; Rubin 1995; Roper and Lister 2005, 2007; Dontsov, 2016b), и заполненные жидкостью трещины в ложах ледников (Tsai and Rice 2010). Модели гидроразрыва обычно включают поток вязкой жидкости внутри трещины, баланс между жидкостью внутри трещины и жидкостью, просачивающейся в окружающий пласт, упругое равновесие породы и критерий распространения, учитывающий сопротивление породы. Существует множество моделей гидроразрыва пласта, различающихся геометрией трещины, реологией жидкости гидроразрыва и типом критерия распространения, и это лишь некоторые из них. Поскольку численные симуляторы для гидроразрыва пласта выходят за рамки данного исследования, читатели могут обратиться к недавним обзорным статьям, которые содержат более подробные описания различных моделей гидроразрыва пласта (Adachi et al. 2007; Weng 2015; Peirce 2016).

Известно, что трещины гидроразрыва имеют сложное многомасштабное поведение даже для простейших случаев полубесконечной или конечной плоской трещины (KGD) и радиальной трещины, см. к примеру подробный обзорный документ (Detournay 2016). Полубесконечная трещина ГРП является моделью кончика трещины гидроразрыва [см. (Peirce and Detournay 2008) об этом упрощении в случае плоской трещины] и, следовательно, является фундаментальной проблемой, которая проливает свет на глобальное поведение более сложной трещины гидроразрыва. Проблема концевой области трещины гидроразрыва хорошо изучена в работах (Desroches et al. 1994; Lenoach 1995; Garagash and Detournay 2000; Detournay and Detournay 2003; Garagash et al. 2011; Dontsov and Peirce 2015; Dontsov 2016c), где включены различные комбинации доминирующих физических процессов, связанных с вязкостью флюида, трещиностойкостью породы, запаздыванием между трещиной и фронтом флюида (fluid lag), утечкой флюида и (в последнее время) турбулентным течением флюида. Эволюция во времени и режимы распространения плоской трещины KGD и радиальной трещины гидроразрыва (или трещины в форме копейки) также были тщательно изучены, соответственно: (Adachi and Detournay 2002; Garagash and Detournay 2005; Garagash 2006; Adachi and Detournay 2008; Hu and Garagash 2010, Detournay 2004) и (Detournay 2004; Savitski and Detournay 2002; Bungier et al. 2005; Bungier and Detournay 2007; Madyarova 2003). В недавней обзорной статье (Detournay 2016) представлено более подробное резюме результатов и подчеркнута сложное многомасштабное поведение пространственного изменения и временной эволюции трещин гидроразрыва. Ввиду многомасштабного поведения трещин ГРП большинство исследований сосредоточено на предельных режимах распространения, при которых доминирует один из механизмов, определяющих отклик. Есть только несколько исследований, которые строго рассматривают полное решение, в которых учтены вязкость жидкости, трещиностойкость и утечка жидкости одновременно. В контексте трещин KGD это сделано в (Hu and Garagash 2010). Для радиальных трещин ГРП (трещин в форме копейки) аналогичные полные многомасштабные решения были получены в работах (Madyarova 2003; Dontsov 2016a). Исследования (Hu and Garagash 2010; Madyarova 2003) были сосредоточены на разработке численных решений, а также на анализе многомасштабного поведения. Напротив, цель исследования (Dontsov 2016a) состояла в том, чтобы разработать приближенное аналитическое решение, способное достаточно точно отразить всю сложность многомасштабного поведения, что позволяет быстро получить решение и еще больше увеличивает понимание поведения решения. Следуя процедуре, описанной в (Dontsov 2016a) для радиальной трещины, целью данного исследования является разработка аналитического решения для плоской трещины, которое учитывает одновременное взаимодействие эффектов трещиностойкости, вязкости жидкости и утечки жидкости. Численное решение и анализ этой задачи были выполнены в (Hu and Garagash 2010). По этой причине в данном исследовании ограничен анализ исходной задачи, но в то же время исследование сосредоточено на разработке, анализе и оценке точности приближенного решения.

Важность разработанного приближенного решения для плоской трещины гидроразрыва можно обозначить следующим образом. Во-первых, показано, что область кончика играет решающую роль в моделировании гидроразрыва, поскольку аппроксимация основана на предположении, что глобальная эволюция трещины в основном определяется поведением около кончика и глобальным балансом объема жидкости. Аппроксимация относительно проста в реализации и позволяет быстро получить решение, что может быть полезно для быстрых оценок параметров трещины при любых значениях трещиностойкости, вязкости жидкости и утечек. Решение еще больше повышает уровень понимания проблемы, позволяя быстро и более тща-

тельно исследовать параметрическое пространство. В частности, с помощью этого решения построена карта решений, которая указывает области применимости предельных решений и позволяет легко определить, соответствует ли решение при заданном наборе параметров задачи одному из предельных случаев (для которого приведены явные решения). Наконец, разработанное приближенное решение может быть использовано в качестве опорного решения для оценки точности различных симуляторов ГРП, а также может быть использовано в качестве начального условия для повышения устойчивости численных схем на ранних временах.

Эта работа организована следующим образом. В разделе 2 описаны основные уравнения для плоской трещины ГРП, которая приводится в движение ньютоновской жидкостью в проницаемой породе с заданной трещиностойкостью. В разделе 3 описана процедура получения приближенного решения. Анализ предельных режимов распространения представлен в разделе 4. Раздел 5 посвящен описанию структуры решения путем анализа областей перехода от одного предельного решения к другому. Наконец, в разделе 6 представлена оценка точности аппроксимации в сравнении с эталонным численным решением. Результаты обобщены в разделе 7.

2 - Основные уравнения для плоской трещины ГРП (модели KGD)

В этом исследовании рассматривается распространение плоской (или KGD) трещины ГРП в проницаемой породе, и в этом разделе кратко описаны основные уравнения, связанные с математической моделью трещины. Во-первых, удобно ввести четыре основных параметра материала, которые появляются в модели, как

$$\begin{aligned} \mu' &= 12\mu, & E' &= \frac{E}{1 - \nu^2} \\ K' &= 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_{Ic}, & C' &= 2C_L, \end{aligned} \quad (1)$$

где μ – вязкость жидкости (жидкость предполагается ньютоновской), E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, K_{Ic} – первая мода трещиностойкости породы; C_L – параметр утечки Картера. Обратите внимание, что указанные выше параметры материала будут появляться исключительно в масштабированной форме (1) в остальной части статьи.

Используя обозначения, согласующиеся с (1), баланс объёма несжимаемой ньютоновской жидкости внутри одномерной трещины можно записать как

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0 \delta(x), \quad q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

где $w(x, t)$ – ширина трещины, q – поток в направлении x (т.е. вдоль трещины), член, пропорциональный C' , учитывает утечку по модели Картера, $t_0(x)$ – это момент времени, когда фронт трещины находился в точке x , p – давление жидкости, Q_0 – закачиваемый расход жидкости (считается постоянным во времени).

Упругое равновесие горной породы характеризуется уравнением упругости, которое для симметричной плоской трещины даётся выражением (см. к примеру Crouch and Starfield 1983;

Hills et al. 1996)

$$p(x, t) = -\frac{E'}{2\pi} \int_0^l \frac{x}{x^2 - x'^2} \frac{\partial w(x', t)}{\partial x'} dx', \quad (3)$$

где l – длина одиночного крыла трещины (полудлина трещины). Эффект обратного напряжения, который объясняет изменение давления флюида в окружающей породе из-за утечки, не учитывается в модели для простоты. В этом случае необходимо соблюдать осторожность при использовании результатов для очень больших значений утечки.

Распространение трещины моделируется в соответствии с Механикой Линейно-Упругого Разрушения (LEFM) (Rice 1968)

$$w \rightarrow \frac{K'}{E'} (l - x)^{1/2}, \quad x \rightarrow l, \quad (4)$$

что означает, что первая мода коэффициента интенсивности напряжения равна трещиностойкости распространяющейся трещины. В дополнение к условию распространения (4) реализуется условие нулевого потока на кончике трещины, т.е. $q(l, t) = 0$.

Другим важным соотношением является глобальный баланс объёма жидкости, который получается путем интегрирования (2) по времени и пространству и может быть записан как

$$\int_0^l \left(w(x, t) + 2C' \sqrt{t - t_0(x)} \right) dx = \frac{Q_0 t}{2}, \quad (5)$$

где для получения результата использовались равенства $q(l, t) = 0$ и $w(l, t) = 0$.

3 - Приближённое решение для плоской трещины ГРП

3.1 - Краткое описание методологии

Основное допущение, которое используется в этом исследовании для получения приближенного решения, заключается в том, что на эволюцию трещины в основном влияет поведение около кончика и глобальный баланс объёма жидкости (5). Следовательно, решение для ширины трещины аппроксимируется функцией, которая автоматически удовлетворяет поведению вблизи кончика и аппроксимирует решение при удалении от кончика, как

$$w(x, t) = \left(\frac{l + x}{2l} \right)^\lambda w_a(l - x), \quad (6)$$

где w_a – асимптотическое решение вблизи кончика трещины, а λ – параметр, который будет определен позже. Асимптотическое решение на кончике w_a удовлетворяет основным уравнениям (2), (3) и (4) в области кончика, определяемой как $(l - x)/l \ll 1$. В результате построенная аппроксимация (6) автоматически решает (2), (3) и (4) в области кончика и только аппроксимирует решение вдали от кончика. Обратите внимание, что решение для кончика w_a получается при рассмотрении полубесконечной трещины, которая стационарно распространяется в условиях плоской упругой деформации (Garagash et al. 2011; Dontsov and Peirce 2015), а также зависит от параметров материала (1) и времени через $l(t)$ и $\dot{l}(t)$.

Чтобы приступить к аппроксимации, необходимо задать решение вблизи кончика w_a , которое можно быстро вычислить. Поэтому численное решение для w_a не подходит, и для данного исследования используется заамкнутое приближенное решение для w_a (Dontsov and Peirce 2015). Это приближенное асимптотическое решение для кончика с тремя процессами (т.е. трещиностойкостью, вязкостью и утечкой) имеет максимальную ошибку 0.14%, согласуется с принятой моделью плоской трещины и учитывает влияние трещиностойкости, вязкости жидкости и утечек, а также незамедлительно обеспечивает нас решением. В статье (Dontsov and Peirce 2015) показано, что приближенное решение на кончике удовлетворяет условию $w_a(s) \propto s^\delta$, где $s = l - x$ и δ – медленно меняющаяся функция. В этой ситуации приближение для ширины трещины (6) сводится к

$$w(x, t) = \left(\frac{l+x}{2l} \right)^\lambda \left(1 - \frac{x}{l} \right)^{\bar{\delta}} w_a(l). \quad (7)$$

Изменение длины трещины во времени для предельных режимов распространения плоской трещины (Bunger et al. 2005; Adachi and Detournay 2002, 2008; Garagash and Detournay 2005; Garagash 2006; Detournay 2004; Hu and Garagash 2010) всегда представляется в форме $l(t) \propto t^\alpha$ и α – число, равное либо 2/3, либо 1/2. На основании этого результата далее предполагается, что длина трещины для приближенного решения имеет вид $l(t) \propto t^\alpha$, где α – медленно меняющаяся со временем функция. В этом приближении функция времени срабатывания $t_0(x)$ может быть определена из соотношения $x/l = (t_0/t)^\alpha$. Результат можно подставить в глобальный баланс объёма жидкости (5) вместе с (7), чтобы получить

$$w_a(l) \int_0^1 \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^\lambda (1-\xi)^{\bar{\delta}} d\xi + 2C't^{1/2} + \int_0^1 \sqrt{1-\xi^{1/\alpha}} d\xi = \frac{Q_0 t}{2l}, \quad (8)$$

где $\xi = x/l$ – масштабированная пространственная координата. Интегралы в (8) могут быть вычислены и тогда уравнение преобразуется к следующему виду:

$$w_a(l) 2^{1+\bar{\delta}} B_0\left(\frac{1}{2}; \lambda+1, \bar{\delta}+1\right) + 2C't^{1/2} \alpha B\left(\alpha, \frac{3}{2}\right) = \frac{Q_0 t}{2l}, \quad (9)$$

где $B(a, b)$ – бета-функция и

$$B_0(x; a, b) \equiv \int_x^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = B(a, b) - B(x; a, b),$$

где $B(x; a, b)$ – неполная бета-функция. Сведение интегрального уравнения (5) к алгебраическому уравнению (9) является одним из ключевых шагов в выводе приближенного решения для плоской трещины ГРП.

Оставшаяся часть этого раздела кратко описывает процедуру вывода приближенного решения, а в разд.3.2 даётся более подробное описание. Первоначально должны быть заданы параметры материала (1), скорость нагнетания Q_0 и функция $w_a(l)$. Отметим, что $w_a(l)$ также зависит от параметров материала (1) и времени через $\dot{l} = \alpha l/t$. Кроме того, выражение для $\bar{\delta}$ появляется из асимптотического решения для кончика трещины. Затем, задав λ (процедура описана позже в разделе 4.5) и приняв начальное предположение $\alpha = 2/3$ (соответствующее нулевой утечке), уравнение (9) можно решить относительно $l(t)$ (например, с помощью мето-

да Ньютона). После историю изменения длины трещины $l(t)$ во времени можно использовать для обновления значения α , используя выражение $\alpha = d \log(l)/d \log(t)$. Затем уравнение (9) снова решается с новыми значениями α . Такая итерационная процедура выполняется до тех пор, пока не будет достигнута сходимость, которая обычно достигается быстро (две или три итерации) из-за относительно небольшого изменения α . История длины трещины $l(t)$ является основным параметром, который необходимо рассчитать, и через него могут быть выражены другие величины. Как только $l(t)$ получено, пространственное изменение ширины может быть выведено из (7). Эффективность, определяемая как отношение текущего объема трещины к общему количеству закачиваемой жидкости, может быть рассчитана как

$$\eta(t) = \frac{2^{2+\bar{\delta}} l w_a(l)}{Q_0 t} B_0 \left(\frac{1}{2}; \lambda + 1, \bar{\delta} + 1 \right) \quad (10)$$

Один из простейших способов вычисления давления жидкости состоит в том, чтобы подставить (7) в (3) и вычислить интеграл, так что

$$p = \frac{E' w_a(l)}{l} \mathcal{F}(\lambda, \bar{\delta}, \xi),$$

$$\mathcal{F}(\xi, \lambda, \bar{\delta}) = \frac{1}{2^{1+\lambda} \pi} \int_0^1 \frac{\partial M(\xi, s)}{\partial s} (1+s)^\lambda (1-s)^{\bar{\delta}} ds, \quad (11)$$

$$M(\xi, s) = \frac{\xi}{\xi^2 - s^2},$$

где функцию $\mathcal{F}(\xi, \lambda, \bar{\delta})$ можно оценить численно.

3.2 - Решение в отмасштабированных переменных

Для того, чтобы решить (9) численно, необходимо сначала задать асимптотическое решение для кончика w_a . Как показано в (Dontsov and Peirce 2016, 2017), решение w_a неявно задается следующим уравнением

4 - Сравнение с вершинными решениями

4.1 - Предельное решение в M вершине

4.2 - Предельное решение в \tilde{M} вершине

4.3 - Предельное решение в K вершине

4.4 - Предельное решение в \tilde{K} вершине

4.5 - Интерполяция параметра λ

5 - Структура решения

5.1 - Переход вдоль границы MK

5.2 - Переход вдоль границы $M\tilde{M}$

5.3 - Переход вдоль границы $K\tilde{K}$

5.4 - Переход вдоль границы $\tilde{M}\tilde{K}$

6 - Сравнение с численным решением

7 - Резюме

8 - Данные по работе

Приложение А. Функции $g_\delta(\hat{K}, \hat{C})$ и $\Delta(\hat{K}, \hat{C})$

Приложение В. Численная схема

Список использованной литературы

Abou-Sayed A, Andrews D, Buhidma I (1989) Evaluation of oily waste injection below the permafrost in prudhoe bay field. In: Proceedings of the California regional meetings. CA, Society of Petroleum Engineers. Richardson, Bakersfield, pp 129–142

Adachi J, Siebrits E, Peirce A, Desroches J (2007) Computer simulation of hydraulic fractures. Int J Rock Mech Min Sci 44:739–757

Adachi J, Detournay E (2002) Self-similar solution of a plane strain fracture driven by a power-law fluid. Int J Numer Anal Methods Geomech 26:579–604

Adachi JI, Detournay E (2008) Plane-strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock. Eng Fract Mech 75:4666–4694

Bunger A, Detournay E, Garagash D (2005) Toughness dominated hydraulic fracture with leak-off. Int J Fract 134:175–190

Bunger A, Detournay E (2007) Early time solution for a penny-shaped hydraulic fracture. ASCE J Eng Mech 133:175–190

- Crouch S, Starfield A (1983) Boundary element methods in solid mechanics. George Allen and Unwin, London
- Desroches J, Detournay E, Lenoach B, Papanastasiou P, Pearson J, Thiercelin M, Cheng AD (1994) The crack tip region in hydraulic fracturing. *Proc R Soc Lond A* 447:39–48
- Detournay E (2004) Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks. *Int J Geomech* 4:35–45
- Detournay E (2016) Mechanics of hydraulic fractures. *Annu Rev fluid Mech* 48(31):139
- Detournay E, Garagash D (2003) The tip region of a fluid-driven fracture in a permeable elastic solid. *J fluid Mech* 494:1–32
- Dontsov E (2016a) An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *R Soc Open Sci* 3(160):737
- Dontsov E (2016b) Propagation regimes of buoyancy-driven hydraulic fractures with solidification. *J fluid Mech* 797:128
- Dontsov E (2016c) Tip region of a hydraulic fracture driven by a laminar-to-turbulent fluid flow. *J fluid Mech* 797:R2
- Dontsov E, Peirce A (2016) Implementing a universal tip asymptotic solution into an implicit level set algorithm (ILSA) for multiple parallel hydraulic fractures. In: *Proceedings of the 50th US rock mechanics symposium*, Houston, TX, ARMA-2016-268. American Rock Mechanics Association, Houston
- Dontsov E, Peirce A (2015) A non-singular integral equation formulation to analyze multiscale behaviour in semi-infinite hydraulic fractures. *J fluid Mech* 781:R1
- Dontsov E, Peirce A (2017) A multiscale implicit level set algorithm (ILSA) to model hydraulic fracture propagation incorporating combined viscous, toughness, and leak-off asymptotics. *Comput Methods Appl Mech Eng* 313:53–84
- Economides M, Nolte K (eds) (2000) *Reservoir stimulation*, 3rd edn. Wiley, Chichester
- Frank U, Barkley N (2005) Remediation of low permeability subsurface formations by fracturing enhancements of soil vapor extraction. *J Hazard Mater* 40:191–201
- Garagash D (2006) Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: asymptotics of large toughness. *Eng Fract Mech* 73:456–481
- Garagash D, Detournay E, Adachi J (2011) Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off. *J fluid Mech* 669:260–297
- Garagash D, Detournay E (2000) The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium. *J Appl Mech* 67:183–192
- Garagash D, Detournay E (2005) Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: small toughness solution. *ASME J Appl Mech* 72:916–928
- Hills D, Kelly P, Dai D, Korsunsky A (1996) *Solution of crack problems, the distributed dislocation technique, solid mechanics and its applications*, vol 44. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht
- Hu J, Garagash D (2010) Plane-strain propagation of a fluid-driven crack in a permeable rock with fracture toughness. *J Eng Mech* 136:1152–1166

- Jeffrey R, Mills K (2000) Hydraulic fracturing applied to inducing longwall coal mine goaf falls. Pacific Rocks 2000. Balkema, Rotterdam, pp 423–430
- Lenoach B (1995) The crack tip solution for hydraulic fracturing in a permeable solid. J Mech Phys Solids 43:1025–1043
- Lister JR (1990) Buoyancy-driven fluid fracture: the effects of material toughness and of low-viscosity precursors. J fluid Mech 210:263–280
- Lister J, Kerr R (1991) fluid-mechanical models of crack propagation and their application to magma transport in dykes. J Geophys Res 96:10,049–10,077
- Madyarova M (2003) fluid-driven penny-shaped fracture in elastic medium. Master’s thesis, University of Minnesota
- Peirce A (2016) Implicit level set algorithms for modelling hydraulic fracture propagation. Phil Trans R Soc A 374(20150):423. doi:10.1098/rsta.2015.0423
- Peirce A, Detournay E (2008) An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures. Comput Methods Appl Mech Eng 197:2858–2885
- Rice J (1968) Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In: Liebowitz H (ed) Fracture: an advanced treatise, Chap 3, vol II. Academic Press, New York, pp 191–311
- Roper S, Lister JR (2005) Buoyancy-driven crack propagation from an over-pressured source. J fluid Mech 536:79–98
- Roper S, Lister JR (2007) Buoyancy-driven crack propagation: the limit of large fracture toughness. J fluid Mech 580:359380
- Rubin A (1995) Propagation of magma-filled cracks. Annu Rev Earth Planet 23:287–336
- Savitski A, Detournay E (2002) Propagation of a fluid-driven penny-shaped fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions. Int J Solids Struct 39:6311–6337
- Spence D, Turcotte D (1985) Magma-driven propagation of cracks. J Geophys Res 90:575–580
- Tsai V, Rice J (2010) A model for turbulent hydraulic fracture and application to crack propagation at glacier beds. J Geophys Res 115(F03):007
- Weng X (2015) Modeling of complex hydraulic fractures in naturally fractured formation. J Unconv Oil Gas Res 9:114–135

Приближённое решение для радиальной трещины ГРП, учитывающее трещиностойкость, вязкость жидкости и утечки (Е.В. Донцов)

Аннотация

В данной статье разработано приближенное решение в замкнутой форме для радиальной модели трещины ГРП, поведение которой определяется взаимодействием трех конкурирующих физических процессов, связанных с вязкостью жидкости, трещиностойкостью и утечкой жидкости. Основное допущение, которое позволяет построить решение, заключается в том, что поведение трещины в основном определяется трехпроцессной многомасштабной асимптотикой кончика и глобальным балансом объема жидкости. Сначала разработанное приближение сравнивается с существующими решениями для всех предельных режимов распространения. Затем строится карта решений, на которой указаны области применимости предельных решений. Также показано, что построенная аппроксимация точно улавливает скейлинг, связанный с переходом от какого-либо одного предельного решения к другому. Разработанная аппроксимация тестируется в сравнении с эталонным численным решением; продемонстрировано, что точность прогнозов ширины и радиуса трещины находится в пределах долей процента для широкого диапазона параметров. В результате построенная аппроксимация дает быстрое решение для радиальной трещины ГРП, которое может быть использовано для быстрых расчётов дизайна ГРП или в качестве опорного решения для оценки точности различных симуляторов ГРП.

1 - Введение

Трещины гидроразрыва представляют собой заполненные жидкостью трещины, которые распространяются под действием давления жидкости, действующего вдоль поверхности трещины. Наиболее распространенным и известным применением ГРП является стимуляция нефтяных и газовых скважин с целью увеличения добычи углеводородов [1]. Другие промышленные применения включают процесс восстановления отходов [2], утилизацию отходов [3] и предварительное кондиционирование при добыче горных пород [4]. Гидроразрывы также встречаются в природе в процессе подъема магмы через литосферу за счет силы плавучести [5–9] или в виде флюидонаполненных трещин в ложах ледников [10].

На протяжении многих лет рассматривались различные геометрические формы трещин гидроразрыва. Усилия исследователей сместились от разработки простых моделей, таких как модель Христиановича–Желтова–Гиртсма–Де Клерка (KGD) для трещины в условиях плоской деформации [11], к более сложным моделям планарной трещины гидроразрыва [12–14], множественным трещинам гидроразрыва [15–17] или сети трещин [18]. Подробные обзоры различных моделей ГРП можно найти в [19–21]. Кроме того, существуют методы, в которых трещины не моделируются явно, такие как фазовое поле [22, 23], метод отдельных элементов [24, 25] и перидинамика [26]. Основным преимуществом таких методологий является возможность легче (чем обычными методами) рассчитывать трещины сложной геометрии. В то же время прогнозы таких подходов должны быть тщательно проверены на соответствие эталонным решениям, чтобы гарантировать, что новые методы способны отразить все особенности

традиционных подходов.

Известно, что даже для простейших геометрий трещины ГРП подчиняются сложному многомасштабному поведению, см. к примеру подробный обзор [27]. Эта многомасштабная природа возникает как во времени, когда несколько масштабов времени определяют эволюцию трещины, так и в пространстве, где решение может претерпевать изменения на разных масштабах длины области кончика. Как указано в [27], масштабы времени и длины связаны; то есть конкретный временной масштаб в развитии трещины соответствует преобладанию одного масштаба длины в области кончика. Признавая важность и многомасштабный характер концевой области, многие исследования были посвящены именно количественной оценке поведения гидроразрыва в области кончика [28–35]. С другой стороны, временная эволюция и режимы распространения были изучены для плоской трещины KGD в [36–40] и для радиальной трещины ГРП в [40–44]. В недавней обзорной статье [27] представлен более подробный обзор результатов и показана сложность поведения трещины даже при простой геометрии.

Ввиду многомасштабного поведения трещины гидроразрыва основной целью данной статьи является количественная оценка такого поведения для случая радиальной трещины ГРП, где последняя приводится в движение ньютоновской жидкостью и распространяется в проницаемой среде в предположении отсутствия задержки фронта жидкости от фронта трещины. Большинство предыдущих исследований, посвященных проблеме трещины в форме копейки, были сосредоточены на предельных режимах распространения и асимптотических решениях в замкнутой форме (или точных аппроксимациях) для задачи [40–43]. Единственным исключением является работа [44], в которой получено численное решение полной задачи. Численное решение, однако, относительно трудно получить из-за временной и пространственной многомасштабной природы решения. Напротив, в этом (текущем) исследовании разработано приближенное решение в закрытой форме, которое дает результаты практически мгновенно и точно отражает сложное поведение радиальной трещины ГРП во всех масштабах длины и времени. В частности, разработанное решение способно описать все существующие предельные решения и все возможные переходы между ними, так что оно покрывает все траектории в параметрическом пространстве для рассматриваемой задачи. Такой вывод стал возможным благодаря использованию замкнутой аппроксимации асимптотического решения для кончика, полученной в [34], которая используется для аппроксимации профиля ширины трещины. Как только геометрия трещины известна, глобальный баланс объема жидкости используется для определения поведения решения.

Важность полученного решения можно резюмировать следующим образом. Во-первых, оно показывает, что область кончика играет решающую роль в моделировании гидроразрыва. Оно также позволяет быстро получить решение, которое может быть полезно для быстрой оценки геометрии трещины для любых значений трещиностойкости, вязкости жидкости и утечки. Благодаря относительно простой реализации решения его можно использовать как опорное решение для оценки точности других симуляторов ГРП и одновременно как начальное условие для повышения устойчивости численных схем на ранних временах. Наконец, полученная аппроксимация позволяет построить карту решений, которая указывает области применимости предельных решений и позволяет легко определить, соответствует ли решение при заданных параметрах задачи одному из предельных случаев.

Эта статья организована следующим образом. Раздел 2 описывает основные уравнения для радиальной трещины гидроразрыва с утечкой. Раздел 3 описывает процедуру получения

приближенного решения. Сравнение разработанного приближения с существующими предельными решениями представлено в разделе 4. Раздел 5 содержит описание структуры решения, где указаны зоны применимости предельных решений. Наконец, в разделе 6 оценивается точность аппроксимации путем сравнения ее предсказаний с эталонным численным решением, за которым следует краткое резюме полученных результатов.

2 - Основные уравнения для радиальной трещины ГРП

В данном исследовании рассматривается распространение осесимметричной («радиальной» или «копеечной») формы трещины гидроразрыва в проницаемой породе [27, 44]. В модели появляются четыре основных параметра материала, которые для удобства можно ввести в масштабированном виде, как

$$\mu' = 12\mu, \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad K' = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_{Ic}, \quad C' = 2C_L, \quad (2.1)$$

где μ – вязкость жидкости, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, K_{Ic} – мода 1 трещиностойкости породы, C_L – параметр утечки Картера.

Баланс объёма несжимаемой ньютоновской жидкости внутри трещины можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq) + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} = Q_0 \delta(r), \quad q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.2)$$

где $w(r, t)$ – ширина трещины, q – поток в радиальном направлении, слагаемое, содержащее C' , учитывает утечку по модели Картера, $t_0(r)$ – момент времени, в который фронт трещины находился в точке r , p – давление жидкости, Q_0 – скорость закачки жидкости (считается постоянной во времени).

Уравнение упругости, которое характеризует упругое равновесие породы, связывает давление жидкости внутри трещины с шириной трещины как [41, 44, 45]

$$p(r, t) = -\frac{E'}{2\pi R} \int_0^R M\left(\frac{r}{R}, \frac{r'}{R}\right) \frac{\partial w(r', t)}{\partial r'} dr', \quad (2.3)$$

где R – радиус трещины и ядро равно

$$M(\rho, s) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} K\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right) + \frac{\rho}{s^2 - \rho^2} E\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right), & \rho > s, \\ \frac{s}{s^2 - \rho^2} E\left(\frac{\rho^2}{s^2}\right), & \rho < s. \end{cases} \quad (2.4)$$

Функции $K(\cdot)$ и $E(\cdot)$ обозначают полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Распространение трещин моделируется классическим результатом Механики Линейно-Упругого Разрушения (LEFM), в котором раскрытие трещины в области кончика соответ-

ствует решению квадратного корня [46]

$$w \rightarrow \frac{K'}{E'} (R - r)^{1/2}, r \rightarrow R, \quad (2.5)$$

что означает, что коэффициент интенсивности напряжений равен трещиностойкости для распространяющейся трещины. Условие распространения (2.5) также должно быть дополнено условием отсутствия потока на кончике трещины, т.е. $q(R, t) = 0$.

Для использования в будущем полезно рассмотреть глобальный баланс объёма жидкости, который можно получить, интегрируя (2.2) по времени и пространству как

$$\int_0^R \left(w(r', t) + 2C' \sqrt{t - t_0(r')} \right) r' dr' = \frac{Q_0 t}{2\pi}, \quad (2.6)$$

где для вывода результата использовались равенства $q(R, t) = 0$ и $w(R, t) = 0$.

3 - Приближённое решение для радиальной трещины ГРП

3.1 - Краткое описание методологии

3.2 - Решение в отмасштабированных переменных

4 - Сравнение с вершинными решениями

4.1 - Предельное решение в M вершине

4.2 - Предельное решение в \tilde{M} вершине

4.3 - Предельное решение в K вершине

4.4 - Предельное решение в \tilde{K} вершине

4.5 - Интерполяция параметра λ

5 - Структура решения

6 - Сравнение с численным решением

7 - Резюме

Приложение А. Функции $g_\delta(\hat{K}, \hat{C})$ и $\Delta(\hat{K}, \hat{C})$

Приложение В. Численная схема

Список использованной литературы

1. Economides MJ, Nolte KG (eds). 2000 Reservoir stimulation, 3rd edn. Chichester, UK: John Wiley & Sons.
2. Frank U, Barkley N. 2005 Remediation of low permeability subsurface formations by fracturing enhancements of soil vapor extraction. J.Hazard. Mater. 40, 191–201. (doi:10.1016/0304-3894(94)00069-S)
3. Abou-Sayed AS, Andrews DE, Buhidma IM. 1989 Evaluation of oily waste injection below the permafrost in prudhoe bay field. In Proc.the CaliforniaRegionalMeetings,Bakersfield,CA,5–7 April, pp. 129–142. Richardson, TX: Society of Petroleum Engineers.
4. Jeffrey RG, Mills KW. 2000 Hydraulic fracturing applied to inducing longwall coal mine goaf falls. In PacificRocks2000,Balkema,Rotterdam, pp. 423–430.
5. Spence D, Turcotte D. 1985 Magma-driven propagation of cracks. J.Geophys.Res. 90, 575–580. (doi:10.1029/JB090iB01p00575)
6. Lister JR. 1990 Buoyancy-driven fluid fracture: the effects of material toughness and of low-viscosity precursors.J.FluidMech.210,263–280.(doi:10.1017/ S0022112090001288)
7. Rubin AM. 1995 Propagation of magmafilled cracks. Annu.Rev.EarthPlanet 23, 287–336. (doi:10.1146/annurev.ea.23.050195. 001443)

8. Roper SM, Lister JR. 2007 Buoyancy-driven crack propagation: the limit of large fracture toughness. *J.FluidMech.* 580, 359–380. (doi:10.1017/S002211 2007005472)
9. Dontsov EV. 2016 Propagation regimes of buoyancy-driven hydraulic fractures with solidification. *J.FluidMech.* 797, 1–28. (doi:10.1017/ jfm.2016.274)
10. Tsai VC, Rice JR. 2010 A model for turbulent hydraulic fracture and application to crack propagation at glacier beds. *J.Geophys.Res.* 115, F03007. (doi:10.1029/2009JF001474)
11. Khristianovic SA, Zheltov YP. 1955 Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids. In *Proc.4th World Petroleum Congress, Rome, Italy, 6–16June, vol. 2*, pp. 579–586.
12. Vandamme L, Curran JH. 1989 A three-dimensional hydraulic fracturing simulator. *Int. J. Numer. MethodsEng.* 28, 909–927. (doi:10.1002/nme. 1620280413)
13. Peirce A, Detournay E. 2008 An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures. *Comput. Methods Appl.Mech.Eng.* 197, 2858–2885. (doi:10.1016/j.cma.2008.01.013)
14. Dontsov EV, Peirce AP. 2017 A multiscale implicit level set algorithm (ILSA) to model hydraulic fracture propagation incorporating combined viscous, toughness, and leak-off asymptotics. *Comput.MethodsAppl.Mech. Eng.* 313, 53–84. (doi:10.1016/j.cma.2016.09.017)
15. Peirce AP, Bunger AP. 2014 Interference fracturing: non-uniform distributions of perforation clusters that promote simultaneous growth of multiple hydraulic fractures. *SPEJournal* 20, 384–395. (doi:10.2118/172500-PA)
16. Wu K, Olson J, Balhoff MT, Yu W. 2015 Numerical analysis for promoting uniform development of simultaneous multiple fracture propagation in horizontal wells. In *Proc.theSPEAnnual Technical Conf.and Exhibition, Houston, TX, 28–30 September*. SPE-174869-MS. Society of Petroleum Engineers.
17. Dontsov EV, Peirce AP. 2016 Implementing a universal tip asymptotic solution into an implicit level set algorithm (ILSA) for multiple parallel hydraulic fractures. In *50th U.S. Rock Mechanics/Geomechanics Symposium, Houston, TX, 26–29June*. American Rock Mechanics Association.
18. Kresse O, Weng X, Gu H, Wu R. 2013 Numerical modeling of hydraulic fracture interaction in complex naturally fractured formations. *RockMech. RockEng.* 46, 555–558. (doi:10.1007/s00603012-0359-2)
19. Adachi J, Siebrits E, Peirce A, Desroches J. 2007 Computer simulation of hydraulic fractures. *Int.J. RockMech.Min.Sci.* 44, 739–757. (doi:10.1016/j. ijrmms.2006.11.006)
20. Weng X. 2015 Modeling of complex hydraulic fractures in naturally fractured formation. *J.Unconv. OilGasRes.* 9, 114–135. (doi:10.1016/j.juogr. 2014.07.001)
21. Peirce AP. 2016 Implicit level set algorithms for modelling hydraulic fracture propagation. *Phil. Trans.R.Soc.A* 374, 20150423. (doi:10.1098/rsta.2015.0423)
22. Bourdin B, Chukwudozie C, Yoshioka K. 2012 A variational approach to the numerical simulation of hydraulic fracturing. In *SPEAnnualTechnical Conferenceand Exhibition, SanAntonio, TX, 8–10 October*. SPE 159154. Society of Petroleum Engineers.
23. Mikelic A, Wheeler MF, Wick T. 2015 Phase-field modeling of a fluid-driven fracture in a poroelastic medium. *Comput.Geosci.* 19, 1171–1195. (doi:10.1007/s10596-015-9532-5)
24. Damjanac B, Detournay C, Cundall PA, Varun. 2013 Three-dimensional numerical model of hydraulic fracturing in fractured rock mass. In *Effective and sustainablehydraulicfracturing* (eds AP Bunger, J McLennan, R Jeffrey), ch. 41, pp. 819–830. Rijeka, Croatia: Intech.

25. Damjanac B, Cundall P. 2016 Application of distinct element methods to simulation of hydraulic fracturing in naturally fractured reservoirs. *Comput. Geotech.* 71, 283–294. (doi:10.1016/j.compgeo. 2015.06.007)
26. Ouchi H, Katiyar A, Foster JT, Sharma MM. 2015 A peridynamics model for the propagation of hydraulic fractures in heterogeneous, naturally fractured reservoirs. In *SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference*, TheWoodlands, TX, 3–5 February. SPE 173361. Society of Petroleum Engineers.
27. Detournay E. 2016 Mechanics of hydraulic fractures. *Annu.Rev.FluidMech.* 48, 31139. (doi:10.1146/ annurev-fluid-010814-014736)
28. Desroches J, Detournay E, Lenoach B, Papanastasiou P, Pearson JRA, Thiercelin M, Cheng AH-D. 1994 The crack tip region in hydraulic fracturing. *Proc.R.Soc. Lond.A* 447, 39–48. (doi:10.1098/rspa.1994.0127)
29. Lenoach B. 1995 The crack tip solution for hydraulic fracturing in a permeable solid. *J.Mech.Phys.Solids* 43, 1025–1043. (doi:10.1016/0022-5096(95) 00026-F)
30. Garagash D, Detournay E. 2000 The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium. *J.Appl. Mech.* 67, 183–192. (doi:10.1115/1.321162)
31. Detournay E, Garagash D. 2003 The tip region of a fluid-driven fracture in a permeable elastic solid. *J.FluidMech.* 494, 1–32. (doi:10.1017/S002211 2003005275)
32. Garagash DI, Detournay E, Adachi JI. 2011 Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off. *J.FluidMech.* 669, 260–297. (doi:10.1017/S0022 11201000501X)
33. Lecampion B, Peirce AP, Detournay E, Zhang X, Chen Z, Bunger AP, Detournay C, Napier J, Abbas S, Garagash D, Cundall P. 2013 The impact of the near-tip logic on the accuracy and convergence rate of hydraulic fracture simulators compared to reference solutions. In *Effective and sustainable hydraulic fracturing* (eds AP Bunger, J McLennan, R Jeffrey), ch. 43, pp. 855–873. Rijeka, Croatia: Intech.
34. Dontsov E, Peirce A. 2015 A non-singular integral equation formulation to analyze multiscale behaviour in semi-infinite hydraulic fractures. *J.FluidMech.* 781, R1. (doi:10.1017/jfm.2015.451)
35. Dontsov EV. 2016 Tip region of a hydraulic fracture driven by a laminar-to-turbulent fluid flow. *J.Fluid Mech.* 797, R2. (doi:10.1017/jfm.2016.322)
36. Adachi JI, Detournay E. 2002 Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid. *Int.J.Numer.Anal.MethodsGeomech.* 26, 579–604. (doi:10.1002/nag.213)
37. Garagash D, Detournay E. 2005 Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: small toughness solution. *ASMEJ.Appl.Mech.* 72, 916–928. (doi:10.1115/1.2047596)
38. Garagash DI. 2006 Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: asymptotics of large toughness. *Eng.Fract.Mech.* 73, 456–481. (doi:10.1016/j.engfracmech. 2005.07.012)
39. Adachi JI, Detournay E. 2008 Plane-strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock. *Eng.Fract.Mech.* 75, 4666–4694. (doi:10.1016/j.engfracmech.2008.04.006)
40. Detournay E. 2004 Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks. *Int.J. Geomech.* 4, 35–45. (doi:10.1061/(ASCE)15323641(2004)4:1(35))
41. Savitski AA, Detournay E. 2002 Propagation of a fluid-driven penny-shaped fracture in an

impermeable rock: asymptotic solutions. *Int. J. Solids Struct.* 39, 6311–6337.
(doi:10.1016/S00207683(02)00492-4)

42. Bunger A, Detournay E, Garagash D. 2005 Toughness-dominated hydraulic fracture with leak-off. *Int.J.Fract.* 134, 175–190. (doi:10.1007/s10704-005-0154-0)

43. Bunger AP, Detournay E. 2007 Early time solution for a penny-shaped hydraulic fracture. *ASCEJ.Eng. Mech.* 133, 175–190. (doi:10.1061/(ASCE)07339399(2007)133:5(534))

44. Madyarova MV. 2003 Fluid-driven penny-shaped fracture in elastic medium. Master’s thesis, University of Minnesota, Minneapolis.

45. Cleary M, Wong S. 1985 Numerical simulation of unsteady fluid flow and propagation of a circular hydraulic fracture. *Int.J.Numer.Anal.Methods Geomech.* 9, 1–14. (doi:10.1002/nag.1610090102)

46. Rice JR. 1968 Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In *Fracture: an advanced treatise*, vol. II (ed. H Liebowitz), ch. 3, pp. 191–311. New York, NY: Academic Press.

47. Dontsov EV. 2016 Data from: An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity and leak-off. Dryad Digital Repository. (doi:10.5061/dryad.gh469)

Анализ трещины гидроразрыва пласта постоянной высоты (Е.В. Донцов, 26 октября 2021)

Аннотация

В данной работе проводится анализ задачи о трещине гидроразрыва пласта постоянной высоты. Предполагается, что трещина распространяется при закачке ньютоновской жидкости, и в модель также включены эффекты трещиностойкости и утечки. В первую очередь представлен анализ области кончика для такой трещины. Исследуются предельные решения и их расположение в двумерном параметрическом пространстве. Кроме того, строится приближенное решение задачи и проверяется его точность во всем параметрическом пространстве. Затем представлен анализ конечной трещины. Получены аналитические выражения для предельных решений. Построено полное численное решение, а также разработана аппроксимация, основанная на решении для области кончика и на глобальном балансе объемов. Численное решение используется для проверки точности аппроксимации, а сама аппроксимация используется для исследования всего параметрического пространства задачи. Это, в свою очередь, позволяет определить зоны применимости предельных решений, которые в дальнейшем можно использовать для количественной оценки того, какие параметры задачи наиболее сильно влияют на динамику трещины.

1 - Введение

Трещины ГРП чаще всего создаются под землей с целью повышения нефтеотдачи и газоотдачи пластов [1]. В настоящее время для моделирования такого явления без особого труда используются сложные численные модели, которые могут учитывать распространение одной или нескольких трещин ГРП, взаимодействие между трещинами, перенос проппанта, тепловые эффекты, химические эффекты, эффекты многофазного потока и т. д. Тем не менее, понимания основных механизмов и поведения трещин гидроразрыва лучше достигать с помощью простых моделей, которые фокусируются на конкретном аспекте проблемы, игнорируя при этом остальные сложности. Это относится к данному исследованию относительно простой геометрии трещины гидроразрыва пласта постоянной высоты.

Существует множество «простых» моделей трещины гидроразрыва пласта. Слово «простой» здесь по существу означает, что математическая формулировка задачи является одномерной. В результате такого математического упрощения можно более детально исследовать задачу и лучше понять структуру решения. Первый пример — задача о полубесконечной трещине гидроразрыва, являющаяся моделью кончика конечной планарной трещины [2, 3, 4]. Предельные аналитические решения задачи были впервые получены в [5] и [6] для случая доминирования вязкости и утечек соответственно. Последнее предельное решение, соответствующее доминированию трещиностойкости, вытекает из классической Механики Линейно-Упругого Разрушения (LEFM) [7]. Общее решение задачи, учитывающее ньютоновскую жидкость, Картерову утечку и трещиностойкость, получено в [3]. Позднее в [8] было получено быстрое приближение для этого решения, которое затем было использовано в качестве условия распространения в планарной модели трещины гидроразрыва [9]. Также стоит упомянуть многочисленные расширения модели, которые учитывают степенные жидкости [10], жидкости Гершеля-Балкли [11], жидкости Карро [12], эффект отстаивания жидкости [13], эффект турбу-

лентного течения [14], эффект когезионной зоны [15], эффект проппанта [16] и эффект утечки, зависящей от давления [17]. Эта модель уже показывает, как можно понять множественные физические эффекты, рассматривая относительно простой сценарий.

Трещины в условиях плоской деформации и радиальные трещины гидроразрыва можно считать «простыми» геометриями, поскольку математическая формулировка для них также является одномерной. В отличие от полубесконечной трещины, для которой существует три предельных решения, конечная трещина имеет четыре предельных случая. Обратите внимание, что это относится только к модели, в которой учитываются эффекты трещиностойкости, вязкости и утечек Картера, т.е. игнорируются эффекты запаздывания жидкости, когезионной зоны, сложной реологии жидкости и т.д. Вышеупомянутые четыре случая определяются конкуренцией между трещиностойкостью трещины и вязкостью флюида, а также запасом флюида внутри трещины или внутри горной формации. Поэтому эти пределы определяются следующим образом: Storage-Toughness (доминирование трещиностойкости при малых утечках), Storage-Viscosity (доминирование вязкости при малых утечках), Leak-off-Toughness (доминирование трещиностойкости при больших утечках) и Leak-off-Viscosity (доминирование вязкости при больших утечках), см. к примеру обзорную статью [18]. Ранние исследования были сосредоточены преимущественно на поиске решений для этих предельных случаев [19, 20, 21, 22]. Первый анализ полной задачи дан в [23] для случая трещины в условиях плоской деформации и в [24] для случая радиальной геометрии. Альтернативный анализ для этих задач был представлен в [25, 26]. Быстрое приближенное решение глобальной задачи строится с использованием полубесконечного решения (или решения для кончика трещины) [8] и глобального баланса объема. Такое быстрое решение позволило просканировать всё параметрическое пространство и построить карту решений, определяющую области применимости предельных решений. Позже аналогичная концепция использовалась для анализа влияния анизотропии и степенной реологии на параметрическое пространство в [27], для исследования влияния когезионной зоны в [15] и для построения сверхбыстрого симулятора ГРП в [28].

Последней, но не менее важной, «простой» геометрией является трещина гидроразрыва постоянной высоты или трещина Перкинса-Керна-Нордгрена (РКН) [29, 30]. Технически в список «простых» случаев можно включить и псевдотрехмерную модель [31, 32, 33]. Но она заметно сложнее в том смысле, что её параметрическое пространство больше (шире), что делает анализ более сложным. Классическая модель РКН не учитывает влияние трещиностойкости, а учитывает только вязкость и утечку. Решения с преобладанием вязкости и утечек можно найти в [1]. Анализ области кончика, опять же при отсутствии трещиностойкости, выполнен в [34]. Лабораторные наблюдения, подтверждающие предсказанное поведение вблизи кончика, подытожены в [35]. Отметим, что для этой геометрии трещины также проводится анализ эффектов турбулентного течения [36, 37]. Во всех приведенных выше исследованиях не рассматривается влияние трещиностойкости на решение. Есть два подхода включения трещиностойкости в модель. Первый подход был предложен в [38], в нём граничное условие на давление на кончике берётся из условия для радиальной трещины с однородным давлением. Позднее это условие было пересмотрено в [39], где авторы предложили несколько изменить его, исходя из энергетических соображений. Второй подход заключается в замене соотношения локальной упругости, используемого в классической модели РКН, более точным нелокальным выражением, которое можно комбинировать со стандартным критерием распространения LEFM [40]. Хотя показано, что второй подход более точен [40], с его помощью сложнее проводить анализ. Поэтому в данном исследовании используется модель с локальной упругостью и граничным условием

конечного давления на кончике трещины.

Как видно из приведенного выше обзора литературы, параметрические пространства для всех «простых» моделей, кроме случая РКН, были тщательно проанализированы для случая, когда модель учитывает одновременное взаимодействие между трещиностойкостью, вязкостью и утечкой. Вероятно, это связано с тем, что процедура учета влияния трещиностойкости в модели РКН была введена сравнительно недавно. Чтобы заполнить пробел, эта работа направлена на исследование параметрического пространства для области кончика трещины РКН, т.е. расширение работы [34] на случай влияния трещиностойкости. Кроме того, более крупной задачей данной работы является тщательное исследование параметрического пространства для конечной трещины и определение всех предельных решений и зон их применимости в параметрическом пространстве. В частности, структура данной работы такова. Раздел 2 описывает основные уравнения для рассматриваемой задачи. Затем в разделе 3 анализируется задача о концевой области и строится параметрическая карта для этой задачи. После этого в разделе 4 представлены вершинные решения для конечной трещины РКН. Параметрическая карта для конечной трещины построена в разделе 5 с использованием быстрого приближенного решения, которое сравнивается с более точным численным решением. Наконец, в разделе 6 представлены примеры применения, а в разделе 7 подведены итоги.

2 - Основные уравнения

Рассмотрим задачу о трещине гидроразрыва постоянной высоты или просто трещине РКН, изображенной на рис. 1(а). Пусть трещина вертикальна и занимает плоскость (x, y) , причем y — вертикальная координата, а x — горизонтальная координата. Пусть H — высота трещины, l — полудлина. Высота H считается постоянной для всей трещины, а длина является функцией времени. Также предполагается, что $H \ll l$, что позволяет упростить основные уравнения до одномерных.

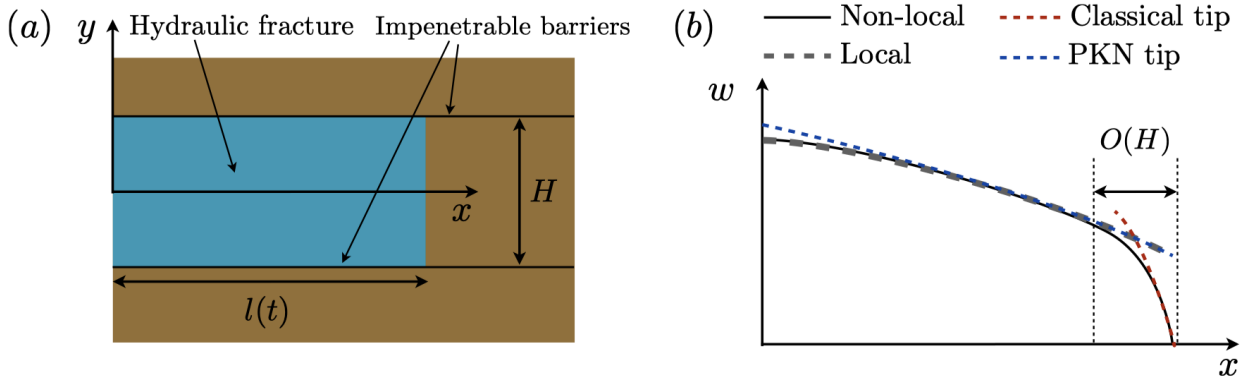


Рис. 1: (а) Схема трещины гидроразрыва постоянной высоты. (б) Зависимость ширины трещины w от координаты x для разных моделей

Различные решения задачи и их асимптоты схематично показаны на рис.1(б). Черная линия указывает на наиболее точное решение, использующее соотношение нелокальной упругости. Она имеет классическую концевую асимптотику, вытекающую из задачи о полубесконечной трещине с плоской деформацией (штриховая красная линия). Пунктирная серая линия указывает на решение, в котором используется локальная упругость вместе с граничным усло-

вием давления на конце, чтобы уловить эффект трещиностойкости. Это приводит к прерывистому поведению ширины трещины на кончике. Хотя это граничное условие и не является физическим, оно на самом деле означает поведение на некотором расстоянии от кончика $O(H)$. Действительно, как показано в [40], решения с локальной и нелокальной упругостью сближаются друг с другом при удалении от кончика трещины, а различия сосредоточены в области $O(H)$ вблизи кончика. Общие характеристики трещины, такие как длина и ширина в стволе скважины, фиксируются точно, так как $H \ll l$. Кроме того, можно также рассмотреть асимптотику кончика для трещины PKN, которая схематично показана пунктирной синей линией. Она справедлива на расстояниях, соизмеримых с длиной трещины l , в отличие от классической асимптоты (штриховая красная линия), которая точна на расстояниях порядка высоты трещины H для рассматриваемой геометрии. Для упрощения анализа в данном исследовании рассматривается модель с локальной эластичностью.

Используя классические допущения модели PKN [29, 30], каждое поперечное сечение вертикальной трещины считается эллиптическим, а давление определяется на основе допущения выполнения условия локальной плоской деформации. Это означает, что

$$w(x, y) = \frac{4}{\pi} \bar{w}(x) \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{H}\right)^2}; \quad p(x) = \frac{2E' \bar{w}(x)}{\pi H}; \quad \bar{w}(x) = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} w(x, y) dy, \quad (1)$$

где $w(x, y)$ – раскрытие трещины, $\bar{w}(x)$ – эффективная ширина, $p(x)$ – давление жидкости, $E' = E/(1 - \nu^2)$ – модуль Юнга плоской деформации. В предположении $H \ll l$, усреднённые по вертикали уравнения для случая ньютоновской жидкости гидроразрыва, принимают вид:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x); \quad \bar{q}_x = -\frac{1}{12H\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-H/2}^{H/2} w^3 dy = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

где μ – вязкость жидкости, \bar{q}_x – средний горизонтальный поток, $C' = 2C_l$ – масштабированный коэффициент утечек Картера [41], $t_0(x)$ обозначает момент времени, в который фронт трещины находился в точке x . Уравнения (1) и (2) можно объединить, чтобы получить уравнение

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad (3)$$

которое является единственным управляющим уравнением модели PKN.

Для моделирования условия бокового распространения, учитывающего трещиностойкость, используется модель из [39], а именно

$$p(l) = \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}} m, \quad (4)$$

где K_{Ic} – трещиностойкость и l – полудлина трещины. Как показано в [40], это условие распространения способно адекватно отразить влияние трещиностойкости на рост поперечного трещины, даже если поведение вблизи кончика менее точное. Уравнение (4) можно переписать

с использованием (1) в следующем виде:

$$\bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}. \quad (5)$$

Эта форма условия распространения используется в качестве граничного условия для (3), что приводит к тому, что вся задача формулируется только в терминах $\bar{w}(x)$ и $l(t)$. Давление, с другой стороны, может быть получено из (1), если это необходимо.

Эволюция длины регулируется балансом объёма на кончике, который требует, чтобы

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\bar{q}_x(l)}{\bar{w}(l)} = -\frac{2E'}{3\pi^3\mu H} \frac{\partial \bar{w}^3}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad (6)$$

которое связывает пространственную производную ширины со скоростью роста трещины.

Для полноты глобальный баланс объёма может быть получен путем интегрирования (3) по времени и пространству как

$$\int_0^l \left[\bar{w}(x) + 2C' \sqrt{t - t_0(x)} \right] dx = \frac{Q_0 t}{2H}. \quad (7)$$

В приведенном выше выражении первый член означает объем трещины, второй член представляет собой общий объем утечки, а правая часть представляет собой объем закачки.

3 - Область кончика

Сначала рассматривается задача вблизи кончика, которая соответствует полубесконечной трещине PKN, стационарно распространяющейся со скоростью V . Чтобы вывести из (3) соответствующие определяющие уравнения для области кончика, используется стандартный подход, в соответствии с которым вводится новая движущаяся координата $\hat{x} = Vt - x$ (см., например, [3, 4]). В этом случае определяющее дифференциальное уравнение для области кончика принимает вид

$$\frac{E'}{2\pi^3\mu H} \frac{d\bar{w}^4}{d\hat{x}} = V\bar{w} + 2C'\sqrt{V\hat{x}}; \quad \bar{w}(0) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'} \quad (8)$$

Здесь второе уравнение – это просто граничное условие (5).

К сожалению, решить дифференциальное уравнение (8) аналитически не представляется возможным. В то же время можно получить предельные решения. В пределе большой трещиностойкости ширина просто равна граничному условию в (8). Чтобы получить решение для нулевой трещиностойкости и нулевой утечки (с преобладанием вязкости), и трещиностойкость, и утечка должны быть установлены равными нулю в (8). Это приводит к разрешимому дифференциальному уравнению. В пределе большой утечки и отсутствия трещиностойкости член « $V\bar{w}$ » и трещиностойкость должны быть удалены в (8), что снова приводит к разрешимому

дифференциальному уравнению. Резюме всех трех предельных (или вершинных) решений:

$$\bar{w}_k = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}; \quad \bar{w}_m = \left(\frac{3\pi^3 \mu H V}{2E'} \right)^{1/3} \hat{x}^{1/3}; \quad \bar{w}_{\tilde{m}} = \left(\frac{8\pi^3 \mu H C' V^{1/2}}{3E'} \right)^{1/4} \hat{x}^{3/8}, \quad (9)$$

где первое — решение для трещиностойкости, второе — решение для вязкости, а третье — решение для утечек. Эти результаты согласуются с предыдущим анализом в [34, 39].

Также возможно вычислить решения km и $k\tilde{m}$. Действительно, для этих случаев можно решить дифференциальное уравнение (8), чтобы получить

$$\bar{w}_{km} = (\bar{w}_k^3 + \bar{w}_m^3)^{1/3}; \quad \bar{w}_{k\tilde{m}} = (\bar{w}_k^4 + \bar{w}_{\tilde{m}}^4)^{1/4}. \quad (10)$$

На основании такой формы решения строится следующее приближённое решение:

$$\bar{w}_{m\tilde{m}k} = (\bar{w}_k^p + \bar{w}_m^p + \bar{w}_{\tilde{m}}^p)^{1/p}, \quad p = 3.4, \quad (11)$$

где степень p подобрана так, чтобы минимизировать максимальную ошибку по сравнению с численным решением. Это решение точно фиксирует случаи предельных вершин, а также аппроксимирует поведение в переходных областях. Также возможно построить более точное решение:

$$\bar{w}_{m\tilde{m}k} = \left[w_{km} (\bar{w}_{km}^4 + \bar{w}_{\tilde{m}}^4)^{1/4} + w_{k\tilde{m}} (\bar{w}_{k\tilde{m}}^3 + \bar{w}_m^3)^{1/3} \right] [w_{km} + w_{k\tilde{m}}]^{-1}, \quad (12)$$

что, кроме того, также учитывает краевые решения, описанные выше.

Для проверки правильности предлагаемых приближений и упрощения анализа удобно переформулировать задачу (8) в безразмерном виде, введя следующие параметры:

$$\Omega = \frac{\bar{w}}{\bar{w}_k} = \frac{E' \bar{w}}{(\pi H)^{1/2} K_{Ic}}; \quad \hat{\xi} = \frac{\pi^{3/2} \mu V E'^2 \hat{x}}{2 K_{Ic}^3 H^{1/2}}; \quad \chi = \left(\frac{8 C'^2 K_{Ic}}{\pi^{5/2} \mu H^{1/2} V^2} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

В этом случае уравнение (8) сводится к

$$\frac{d\Omega}{d\hat{\xi}} = \frac{1}{\Omega^2} + \frac{\chi \hat{\xi}^{1/2}}{\Omega^3}; \quad \Omega(0) = 1. \quad (14)$$

При этом асимптотические решения принимают вид

$$\Omega_k = 1; \quad \Omega_m = (3\hat{\xi})^{1/3}; \quad \Omega_{\tilde{m}} = \left(\frac{8\chi}{3} \right)^{1/4} \hat{\xi}^{3/8}, \quad (15)$$

который позволяет переформулировать 2 предложенных приближения к решению (11) и (12).

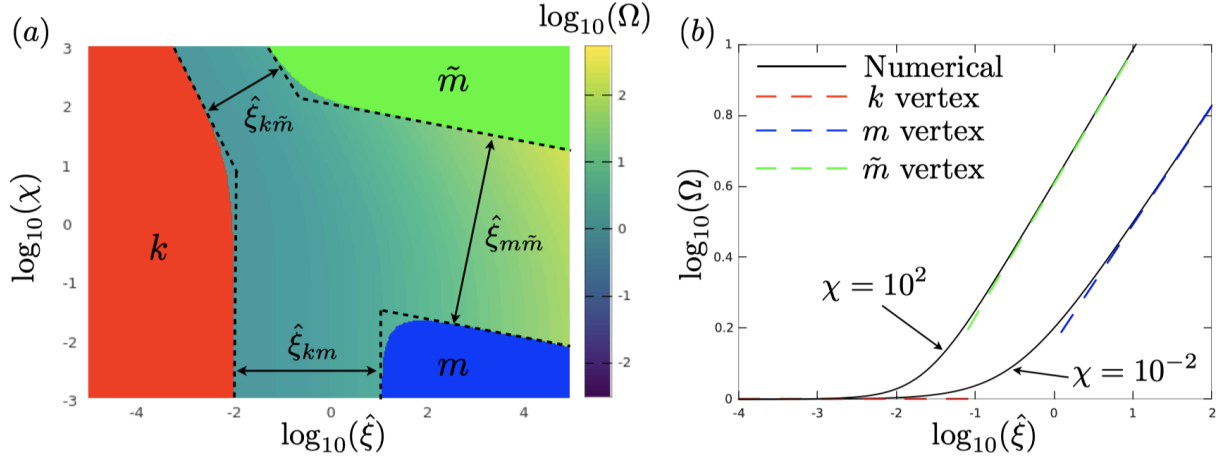


Рис. 2: (a) Параметрическое пространство для задачи моделирования кончика РКН трещины. Цветные области показывают зоны применимости предельных вершинных решений (15) и они также обведены пунктирными чёрными линиями определяемыми выражениями (16). (b) Численное решение зависимости безразмерного раскрытия от безразмерной координаты для двух значений утечки $\chi = 10^{-2}$ и $\chi = 10^2$ (сплошные черные линии). Вершинные решения (15) показаны пунктирными линиями.

На рис.2(a) показано численное решение уравнения (14) (вычисленное с использованием явного интегрирования уравнения (14) методом Рунге-Кутты 4-го порядка) в параметрическом пространстве $(\hat{\xi}, \chi)$. Области применимости асимптотических решений (15) выделены цветными областями. Эти области определяются как зоны, в которых относительная разница между глобальным решением и соответствующим предельным решением не превышает 1%. В частности, красная область соответствует применимости решения трещиностойкости или « k » решения, синяя область представляет область доминирования вязкости или « m » решение, а зеленая зона показывает зону применимости решения при доминировании утечек или « \tilde{m} » решение. Имеется три переходных области, а именно от k к m , от k к \tilde{m} и от m к \tilde{m} . Они оцениваются по следующим параметрам:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{km} &= \hat{\xi}, \quad \hat{\xi}_{km,1} \approx 0.010, \quad \hat{\xi}_{km,2} \approx 11; \\ \hat{\xi}_{k\tilde{m}} &= \hat{\xi}\chi^{2/3}, \quad \hat{\xi}_{k\tilde{m},1} \approx 0.062, \quad \hat{\xi}_{k\tilde{m},2} \approx 4.4; \\ \hat{\xi}_{m\tilde{m}} &= \hat{\xi}\chi^6, \quad \hat{\xi}_{m\tilde{m},1} \approx 1.85 \cdot 10^{-8}, \quad \hat{\xi}_{m\tilde{m},2} \approx 2.1 \cdot 10^{12}.\end{aligned}\tag{16}$$

Эти параметры вместе с соответствующими им минимальным и максимальным значениями количественно определяют границы применимости предельных вершинных решений и показаны штриховыми черными линиями на рис.2(a). Простейший способ определить эти переходные параметры состоит в том, чтобы в масштабе приравнять соответствующие вершинные решения, т.е. $\Omega_k \sim \Omega_{\tilde{m}}$ или $1 \sim \chi^{1/4}\hat{\xi}^{3/8}$, откуда следует, что $\hat{\xi}_{k\tilde{m}} = \hat{\xi}\chi^{2/3}$.

На рис. 2(b) показаны линейные графики численного решения, рассчитанного для $\chi = 10^{-2}$ и $\chi = 10^2$ в зависимости от $\hat{\xi}$ (черные линии). Штриховыми линиями показаны вершинные решения (15). Наблюдаются постепенные переходы от решений трещиностойкости к решениям по утечкам или вязкости.

Характерным наблюдением является то, что решение начинается с вершины k , затем при некоторых значениях χ проходит через промежуточную асимптоту m , а \tilde{m} – решение в дальней зоне. Это отличается от классического решения для полубесконечной трещины в условиях плоской деформации, для которого дальнейшее поле всегда является решением m , а \tilde{m} является промежуточным. Кроме того, учитывая относительно пологий наклон перехода $m\tilde{m}$ в параметрическом пространстве рис.2(а), на практике переход от m к \tilde{m} может быть затруднен.

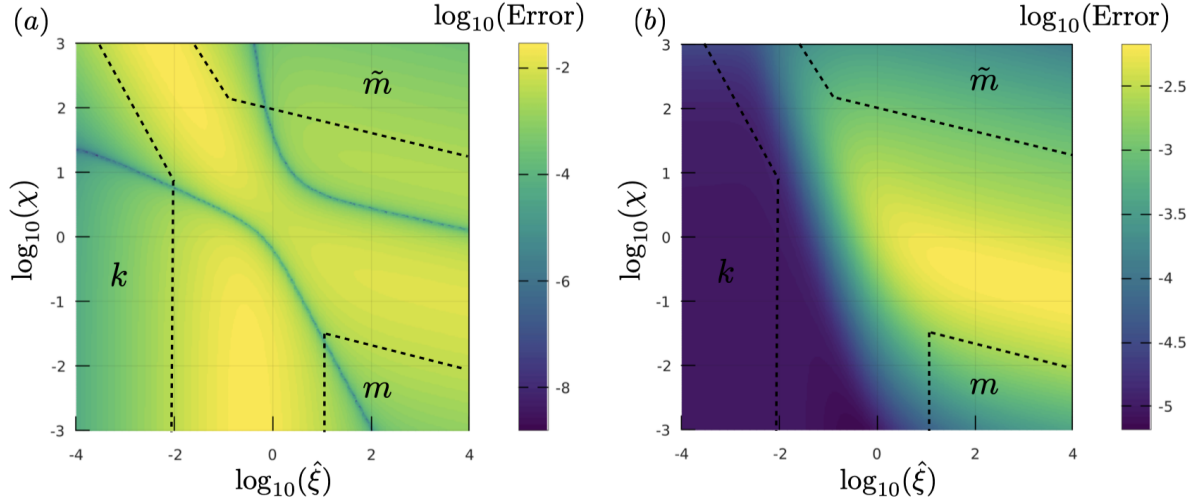


Рис. 3: (а) Относительная ошибка между численным решением и аппроксимациями (11) (рис. (а)) и (12) (рис. (б))

Для количественной оценки точности аппроксимаций (11) и (12) на рис.3 представлена относительная ошибка между приближенным и численным решениями. Пространство (а) дает результат для простого решения (11), а пространство (б) соответствует более полному приближению (12). Максимальная ошибка на всём параметрическом пространстве для первого случая составляет 3%, а для второго, более точного случая, чуть меньше 0.7%. Распределение ошибки также отличается. Для более простого случая (11) ошибка распределяется примерно равномерно в пределах переходных областей и затухает к пределам вершин. Во втором случае (12) вершина k и переходы из этой вершины в m и \tilde{m} оказываются заметно точнее, а ошибка возникает в основном в переходе $m\tilde{m}$. Это неудивительно, поскольку для построения приближения (12) используются точные решения для переходов km и $k\tilde{m}$.

4 - Вершинные (асимптотические) решения

Аналогично задачам о трещинах при условии плоской деформации и радиальных трещинах для геометрии РКН существует четыре предельных решения. Они определяются конкуренцией между трещиностойкостью и вязкостью, а также накоплением жидкости в трещине и пористой среде. В частности, определим Storage-Viscosity или предел как случай, соответствующий преобладанию вязкости и отсутствию утечек, Storage-Toughness или предел K как случай доминирования трещиностойкости и отсутствия утечек, Leak-off-Viscosity или \tilde{M} предел в случае преобладания вязкости и высокой степени утечки, и, наконец, Leak-off-Toughness или предел \tilde{K} в случае преобладания вязкости и высокой степени утечки, см. к примеру обзорную статью [18].

Storage-Viscosity.

Для случая Storage-Viscosity основное уравнение (3), граничное условие (5) и баланс объёма (7) сводятся к

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} = \frac{Q_0}{H} \delta(x); \quad \int_0^l \bar{w}(x) dx = \frac{Q_0 t}{2H}; \quad \bar{w}(l) = 0. \quad (17)$$

Явным образом включив в глобальное решение поведение вблизи кончика с преобладанием вязкости (9) и ища решение в форме

$$\bar{w} = \left(\frac{3\pi^3 \mu H}{2E'} \right)^{1/3} (i)^{1/3} l^{1/3} (1 - \xi)^{1/3} f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{l(t)}, \quad (18)$$

баланс объёма в (17) сводится к

$$\left(\frac{3\pi^3 \mu H}{2E'} \right)^{1/3} (i)^{1/3} l^{4/3} \int_0^1 (1 - \xi)^{1/3} f(\xi) d\xi = \frac{Q_0 t}{2H}. \quad (19)$$

Уравновешивая степени t и другие размерные параметры в приведенном выше уравнении, решение для длины можно записать как

$$l = c \left(\frac{5E'Q_0^3}{48\pi^3 \mu H^4} \right)^{1/5} t^{4/5}, \quad (20)$$

где c – числовая константа, и уравнение баланса объёма принимает вид:

$$c^{5/3} \int_0^1 (1 - \xi)^{1/3} f(\xi) d\xi = 1. \quad (21)$$

С приведенным выше определением ширины (18) и длины (20) уравнение Рейнольдса в (17) преобразуется в

$$\frac{1}{4} (1 - \xi)^{1/3} f(\xi) - \xi \frac{d(1 - \xi)^{1/3} f(\xi)}{d\xi} - \frac{3}{4} \frac{d^2(1 - \xi)^{4/3} (f(\xi))^4}{d\xi^2} = 0 \quad (22)$$

с граничными условиями

$$-c^{5/3} \frac{3}{5} \frac{d(1 - \xi)^{4/3} f^4}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 1, \quad f|_{\xi=1} = 1. \quad (23)$$

Вместо решения дифференциального уравнения (22) решение ищется в виде $f = 1 + a(1 - \xi)$, т.е. разлагая его вблизи кончика. Подставляя этот результат в (22) и уравновешивая степени $(1 - \xi)$, предполагая, что последний является малым параметром, получается $a = -1/96$. Это показывает, что линейная поправка к решению на кончике (т.е. $f = 1$) составляет порядка 1% даже вблизи источника. Поэтому представляется достаточным рассмотреть

только линейный член и записать приближенное решение для f в виде

$$f(\xi) \approx 1 - \frac{1 - \xi}{96}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (21), числовой коэффициент c принимает вид

$$c = \left(\frac{224}{167} \right)^{3/5} \approx 1.193. \quad (25)$$

Подводя итог, приближенное вершинное решение M вычисляется с использованием (18), (20), (24) и (25) как

$$\begin{aligned} \bar{w}_M &= 1.76 \left(\frac{\mu Q_0^2}{E'H} \right)^{1/5} t^{1/5} (1 - \xi)^{1/3} \left(1 - \frac{1 - \xi}{96} \right), \\ p_M &= 1.12 \left(\frac{\mu E'^4 Q_0^2}{H^6} \right)^{1/5} t^{1/5} (1 - \xi)^{1/3} \left(1 - \frac{1 - \xi}{96} \right), \\ l_M &= 0.38 \left(\frac{E' Q_0^3}{\mu H^4} \right)^{1/5} t^{4/5}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь уравнение локальной упругости (1) используется для вычисления давления. Заметим, что это приближенное решение основано главным образом на поведении вблизи кончика, а условие на входе (23) не выполняется. Поэтому вблизи входа могут быть некоторые расхождения с «истинным» решением. Эти выражения совпадают с приведенными в [1] с точностью до нескольких процентов. Это приемлемое отличие, поскольку для вывода выражений, представленных в [1], также используются аппроксимации.

Leak-off-Viscosity.

Для случая Leak-off-Viscosity трещиностойкость и объем трещины пренебрежимо малы. В результате определяющее уравнение (3), граничное условие (5) и глобальный баланс объема (7) сводятся к

$$-\frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad 2C' \int_0^l \sqrt{t - t_0(x)} dx = \frac{Q_0 t}{2H}, \quad \bar{w}(l) = 0. \quad (27)$$

Приняв зависимость длины от времени как $l \propto t^\alpha$, время воздействия, необходимое для расчёта утечки становится равным $t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$. В этом случае глобальный баланс объема сводится к

$$2C' t^{1/2} l \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^{1/\alpha}} d\xi = \frac{Q_0 t}{2H}. \quad (28)$$

Уравновешивая степени t в приведенном выше выражении, получаем $\alpha = 1/2$, а длина

равна

$$l = \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}. \quad (29)$$

Зная выражение для $t_0(x)$, уравнение Рейнольдса в (27) сводится к виду

$$-\frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t} \sqrt{1 - (x/l)^2}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad \bar{w}(l) = 0, \quad (30)$$

которое можно решить и получить

$$\bar{w} = \left(\frac{2\pi \mu Q_0^2}{E' C' H} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi); \quad g(\xi) = \left[\xi \left(\sin^{-1}(\xi) - \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{1 - \xi^2} \right]^{1/4}; \quad \xi = \frac{x}{l}. \quad (31)$$

Наконец решение для вершины \tilde{M} можно обобщить как

$$\begin{aligned} \bar{w}_{\tilde{M}} &= \left(\frac{2\pi \mu Q_0^2}{E' C' H} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi), \\ p_{\tilde{M}} &= \left(\frac{32\mu E'^3 Q_0^2}{\pi^3 C' H^5} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi), \\ l_{\tilde{M}} &= \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H} \end{aligned} \quad (32)$$

где функция $g(\xi)$ определена в (31). Это решение в точности совпадает с решением [1].

Отметим, что функция $g(\xi)$, определённая в (31), имеет следующую асимптотику:

$$g(\xi)|_{\xi \rightarrow 1} = \left(\frac{8}{9} \right)^{1/8} (1 - \xi)^{3/8}, \quad g(0) = 1. \quad (33)$$

Учитывая, что $(8/9)^{1/8} \approx 0.985$, т.е. близка к единице, функция g может быть аппроксимирована через её асимптотическое поведение как

$$g(\xi) \approx \left(\frac{8}{9} \right)^{1/8} (1 - \xi)^{3/8} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{9}{8} \right)^{1/8} \right) (1 - \xi) \right]. \quad (34)$$

Эта форма решения для ширины трещины очень похожа на решение Storage-Viscosity (26). Общим также является то, что множитель перед «поправочным членом» $(1 - \xi)$ относительно мал, порядка 1%.

Storage-Toughness.

В пределе отсутствия вязкости и отсутствия утечек весь закачиваемый объем остается внутри трещины и отсутствует градиент давления вдоль трещины. Вследствие постоянного давления и локальной упругости ширина трещины в этом пределе постоянна. Комбинация

граничного условия (5) и баланса объемов (7) приводит к решению в виде

$$\begin{aligned}\bar{w}_K &= \frac{K_{Ic}\sqrt{\pi H}}{E'}, \\ p_K &= \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}}, \\ l_K &= \frac{E'Q_0t}{\sqrt{4\pi}K_{Ic}H^{3/2}}.\end{aligned}\tag{35}$$

Leak-off-Toughness.

В пределе доминирования трещиностойкости ширина и давление постоянны вдоль трещины и определяются исключительно граничным условием на кончике (5), как и в предыдущем случае. Разница возникает из-за баланса объема, в котором нагнетаемая жидкость теперь уравнивается утечкой, а именно

$$\int_0^l 2C' \sqrt{t - t_0(x)} dx = \frac{Q_0t}{2H}.\tag{36}$$

Аналогично случаю Leak-off-Viscosity, приняв зависимость длины от времени как $l \propto t^\alpha$, получим $t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$, и в этом случае приведенный выше интеграл сводится к

$$2C't^{1/2}l \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^{1/\alpha}} d\xi = \frac{Q_0t}{2H}.\tag{37}$$

Уравниваем степени t и становится ясно, что $\alpha = 1/2$. В результате приведенное выше уравнение позволяет найти l , что в сочетании с выражениями для ширины и давления, вытекающими из граничного условия, дает следующий результат

$$\begin{aligned}\bar{w}_{\bar{K}} &= \frac{K_{Ic}\sqrt{\pi H}}{E'}, \\ p_{\bar{K}} &= \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}}, \\ l_{\bar{K}} &= \frac{Q_0t^{1/2}}{\pi C'H}.\end{aligned}\tag{38}$$

Интересно отметить, что разница этого результата с предыдущим решением Storage-Toughness заключается только в длине трещины, в то время как ширина и давление точно такие же. С другой стороны, длина такая же, как и для предела Leak-off-Viscosity.

5 - Полное решение

Этот раздел направлен на построение и анализ полного решения модели трещины PKN, которое включает эффекты трещиностойкости, вязкости и утечки. Построены два типа ре-

шений: полуаналитическое быстрое приближенное решение и полностью численное решение. Первое позволяет быстро вычислить решение и исследовать всё параметрическое пространство, а второе позволяет проверить точность аппроксимации.

Как видно из предельных вершинных решений (26), (32), (35) и (38), пространственное изменение ширины трещины хорошо аппроксимируется соответствующими вершинными асимптотами (9). Существует некоторое расхождение для решений Storage-Viscosity и Leak-off-Viscosity, но оно составляет порядка 1% и поэтому для простоты игнорируется. Исходя из этого наблюдения, ширина в глобальном решении принимается в виде:

$$\bar{w} = \bar{w}_{m\tilde{m}k} \left(\hat{x} = l(1 - \xi), V = \dot{l} \right), \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad (39)$$

где $\bar{w}_{m\tilde{m}k}$ – приближенное решение для полубесконечной трещины (12), которое также зависит от E' , K_{Ic} , μ , C' и H . Отметим, что подход к построению глобального решения из асимптотического решения для кончика был применен в [25] для радиальной трещины и в [26] для трещины в условиях плоской деформации. Одним из заметных отличий для трещины PKN является тот факт, что асимптота кончика прерывиста на кончике и, следовательно, не очень точно аппроксимировать пространственное поведение с помощью $(1 - \xi)^\delta$ (с медленно меняющейся функцией δ), как это было сделано в предыдущих случаях. Для построения глобального решения по (39) необходимо также учитывать глобальный баланс объёма (7). Приняв $l \propto t^\alpha$, где α – медленно меняющаяся функция времени, время воздействия утечки принимает вид $t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$ и баланс объёма (7) сводится к

$$l \int_0^1 \bar{w}_{m\tilde{m}k}(l(1 - \xi), \alpha l/t) d\xi + 2C't^{1/2}l \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^{1/\alpha}} d\xi = \frac{Q_0 t}{2H}. \quad (40)$$

Интеграл, связанный с утечкой, в приведенном выше уравнении может быть вычислен аналитически, что приводит к следующей системе уравнений

$$l \int_0^1 \bar{w}_{m\tilde{m}k}(l(1 - \xi), \alpha l/t) d\xi + \sqrt{\pi}C't^{1/2}l \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \frac{3}{2})} = \frac{Q_0 t}{2H}, \quad \alpha = \frac{d \log(l)}{d \log(t)} \quad (41)$$

где $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию. Интеграл ширины трещины в приведенном выше выражении вычисляется численно. Поскольку α меняется медленно, первое уравнение можно решить итеративно для l , например используя метод Ньютона. Как только длина l вычисляется для двух моментов времени, значение α обновляется. Такие итерации продолжаются до тех пор, пока не будет достигнута сходимость. Как только эти величины вычислены, решение по ширине оценивается с помощью (39), а давление всегда можно вычислить с помощью (1).

Для численного решения рассматриваемой задачи, как и в предыдущем случае, вводится подвижная координата $\xi = x/l(t)$. Для дальнейшего упрощения задачи используется следующая нормализация

$$\Omega = \frac{\bar{w}}{w_*}, \quad \lambda = \frac{l}{l_*}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad (42)$$

где масштабы ширины, длины и времени задаются следующими формулами:

$$w_* = \frac{(\pi H)^{1/2} K_{Ic}}{E'}, \quad l_* = \frac{H^2 K_{Ic}^4}{2\pi E'^3 \mu Q_0}, \quad t_* = \frac{H^{7/2} K_{Ic}^5}{2\pi^{1/2} E'^4 \mu Q_0^2}. \quad (43)$$

При такой нормировке основные уравнения (3), (5) и (6) сводятся к

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} - \frac{\xi \dot{\lambda}}{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \Omega^4}{\partial \xi^2} + \frac{\phi}{\sqrt{\tau - \tau_0(\xi)}} = \delta(\xi), \quad \Omega(1) = 1, \quad \frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{4}{3\lambda} \frac{\partial \Omega^3}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}. \quad (44)$$

Здесь безразмерный параметр, описывающий утечку, рассчитывается как

$$\phi = \left(\frac{H^5 K_{Ic}^6 C'^4}{4\pi^3 E'^4 \mu^2 Q_0^4} \right)^{1/4} \quad (45)$$

Решение приведенной выше безразмерной задачи (44) состоит в нахождении $\Omega(\tau, \phi)$ и $\lambda(\tau)$. После решения безразмерной задачи физические величины можно восстановить с помощью (42) и (43). Это свидетельствует о том, что параметрическое пространство для задачи является двумерным и состоит из безразмерного времени τ и безразмерной утечки ϕ , что в чем-то аналогично случаю радиальной трещины [25]. Численное решение задачи (44) вычисляется с использованием центральной разности для дискретизации пространственных производных и обратной разности для аппроксимации производной по времени для обеспечения устойчивости численной схемы.

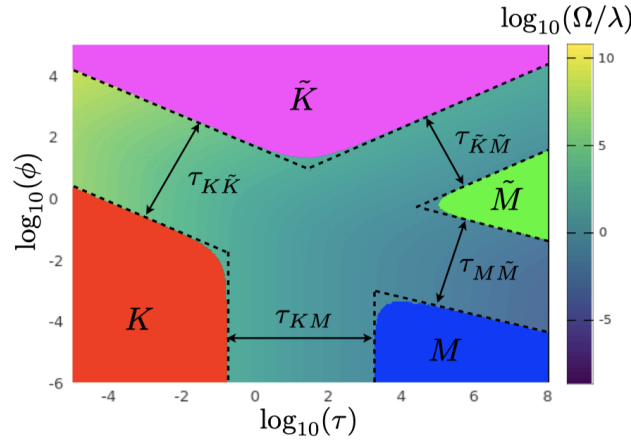


Рис. 4: Параметрическое пространство для трещины PKN. Зоны применимости предельных вершинных решений выделены красным (K или Storage-Toughness), синим (M или Storage-Viscosity), пурпурным (\tilde{K} или Leak-off-Toughness) и зелёным (\tilde{M} или Leak-off-Viscosity)

На рис.4 показано параметрическое пространство для рассматриваемой задачи, вычисляемое с помощью быстрого приближенного решения (41). В частности, решение строится в пространстве (τ, ϕ) в терминах отношения Ω/λ (см. (42), (43), (45)). Это делается для того, чтобы отображаемая величина была разной для всех предельных случаев. Зоны применимости предельных вершинных решений обозначены красной, синей, пурпурной и зеленой областями. Последние определяются как области, в которых разница Ω/λ с соответствующим вершинным решением меньше 1%. Красная область соответствует решению Storage-Toughness (35), синяя область представляет предел Storage-Viscosity (26), пурпурная область определяет пре-

дел Leak-off-Toughness (38), а зеленая область соответствует решению Leak-off-Viscosity (32). Штриховыми линиями на рис.4 обозначены зоны применимости вершинных решений. Чтобы получить соответствующий параметр, определяющий переход, необходимо приравнять либо длину, либо ширину (в зависимости от того, что отличается) между двумя режимами. Например, переход между K и M определяется параметром, вычисляемым из $l_M \sim l_K$ или $\bar{w}_M \sim \bar{w}_K$. Для количественной оценки параметра перехода $\tilde{K}K$ следует использовать $l_{\tilde{K}} \sim l_K$. Ширина не может быть использована, так как они для обоих режимов идентичны. Аналогично, для перехода $\tilde{K}\tilde{M}$ необходимо использовать ширину $\bar{w}_{\tilde{K}} \sim \bar{w}_{\tilde{M}}$, поскольку длины одинаковы. Наконец, для $M\tilde{M}$ можно использовать либо ширину, либо длину, т. е. $l_M \sim l_{\tilde{M}}$ или $\bar{w}_M \sim \bar{w}_{\tilde{M}}$. Значения параметров перехода определяются численно. Сводка результатов показана ниже:

$$\begin{aligned}
\tau_{MK} &= \tau, & \tau_{MK,1} &= 0.11, & \tau_{MK,2} &= 2.3 \cdot 10^3, \\
\tau_{K\tilde{K}} &= \tau\phi^2, & \tau_{K\tilde{K},1} &= 5.7 \cdot 10^{-5}, & \tau_{K\tilde{K},2} &= 3.1 \cdot 10^3, \\
\tau_{\tilde{K}\tilde{M}} &= \tau\phi^{-2}, & \tau_{\tilde{K}\tilde{M},1} &= 0.18, & \tau_{\tilde{K}\tilde{M},2} &= 6.5 \cdot 10^4, \\
\tau_{M\tilde{M}} &= \tau\phi^{10/3}, & \tau_{M\tilde{M},1} &= 2.0 \cdot 10^{-7}, & \tau_{M\tilde{M},2} &= 2.9 \cdot 10^3.
\end{aligned} \tag{46}$$

Обратите внимание, что определения зон применимости предельных решений несколько произвольны, и результат может измениться, если используется другая метрика или другое пороговое значение. Кроме того, может быть небольшое несоответствие, так для построения параметрической карты используется приближённое решение. В то же время, поскольку параметрическое пространство построено в логарифмическом масштабе, незначительные изменения границ, определяемых (46), не должны заметно изменить результат.

В полученном результате интересно то, что трещина развивается во времени от вершины K и в конечном итоге достигает вершины \tilde{M} . Оно может пройти через \tilde{K} , M или ни через одно из них в промежуточные моменты времени. Это несколько противоположно геометрии радиальной трещины, для которой решение всегда исходит из вершины M , а затем достигает решения \tilde{K} в долгосрочной перспективе. Это также отличается от трещины в условиях плоской деформации, для которой решение начинается на краю MK и в конечном итоге достигает края $\tilde{M}\tilde{K}$.

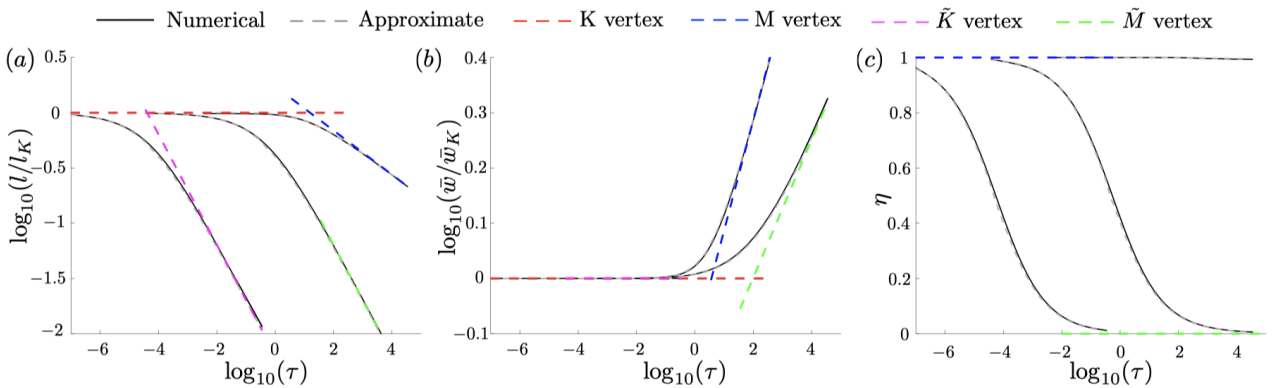


Рис. 5: Сравнение между численным, приближённым и вершинным решениями для трёх значений параметра безразмерных утечек $\phi = \{10^{-4}, 1, 10^2\}$. (a) Нормализованная длина трещины в зависимости от времени. (b) Нормализованная ширина трещины около скважины в зависимости от времени. (c) Эффективность в зависимости от времени.

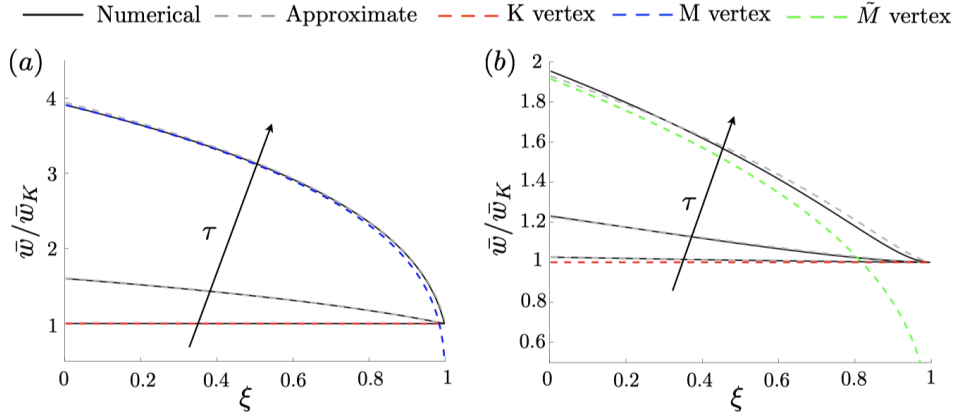


Рис. 6: Сравнение между численным, приближённым и вершинным решениями в терминах изменения ширины трещины в зависимости от нормализованной пространственной координаты ξ . (a) Соответствует значениям параметров $\phi = 10^{-4}$ и $\tau = \sqrt{4\pi}\{10^{-2}, 10, 10^3\}$. (b) Соответствует значениям $\phi = 1$ и $\tau = \sqrt{4\pi}\{0.5, 50, 5 \cdot 10^3\}$

Также поучительно проверить, что решение, построенное с использованием асимптоты на кончике и баланса объёма, точно аппроксимирует численное решение. На рис.4 три значения параметра утечки выбраны $\phi = \{10^{-4}, 1, 10^2\}$. Эти три значения ϕ позволяют исследовать переходы от решения K к другим трём вершинам. На рис.5 показано сравнение между численным решением (сплошные чёрные линии) и приближённым решением (пунктирные серые линии) через изменение нормированной длины трещины l/l_K , ширины в стволе скважины w/w_K и эффективности η , где последняя определяется как отношение объема трещины к закачиваемому объёму. Вершинные решения показаны пунктирными цветными линиями. Можно заметить, что решение действительно переходит из предела K в предел M , \tilde{M} или \tilde{K} . Кроме того, приближенное решение визуальнo почти неотличимо от решения, рассчитанного численно. Для дальнейшего сравнения двух решений на рис.6 показано нормированное изменение ширины трещины вдоль её длины для $\phi = 10^{-4}$ и $\tau = \sqrt{4\pi}\{10^{-2}, 10, 10^3\}$, а также для $\phi = 1$ и $\tau = \sqrt{4\pi}\{0.5, 50, 5 \cdot 10^3\}$. Заметим, что случай, соответствующий $\phi = 10^2$, тривиален, так как ширина для этого перехода постоянна. Результаты снова показывают, что разница между численным и приближенным решениями невелика. Таким образом, подтверждается, что параметрическое пространство, вычисленное с помощью быстрого приближенного решения, построено с достаточной степенью точности.

6 - Примеры применения

Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, в этом разделе представлены два примера того, как параметрическая карта может использоваться в приложениях.

Сначала рассмотрим полевой случай с параметрами $H = 20$ м, $K_{Ic} = 1$ МПа \cdot м^{1/2}, $C' = 10^{-6}$ м/с^{1/2}, $E' = 30$ ГПа, $\mu = 0.01$ Па \cdot с, $Q = 0.01$ м³/с, $t = 1000$ с. Из выражений (42), (43) и (45) безразмерные параметры для этого случая равны $\tau \approx 8 \cdot 10^4$ и $\phi \approx 4 \cdot 10^{-4}$. Глядя на параметрическую карту на рис.4, можно сделать вывод, что решение соответствует случаю с преобладанием Storage-Viscosity. Следовательно, длина трещины может быть рассчитана из выражения (26) и равна $l \approx 170$ м.

Во-вторых, рассмотрим параметры, используемые в [40] для оценки производительности

различных численных алгоритмов в режиме трещиностойкости. Соответствующие параметры взяты из лабораторных экспериментов и равны $H = 0.05$ м, $K_{Ic} = 1.57$ МПа · м, $C' = 0$ м/с^{1/2}, $E' = 3.9$ ГПа, $\mu = 30.2$ Па · с, $Q = 1.7$ мм³/с, $t = 604$ с. Согласно уравнениям (42), (43) и (45) безразмерные параметры для этого случая равны $\tau = 0.2$ и $\phi = 0$. Эти параметры попадают в режим Storage-Toughness на параметрической карте, представленной на рис.4. Таким образом, это подтверждает, что в [40] действительно сравниваются разные алгоритмы в режиме трещиностойкости. Наконец, уравнение (35) можно использовать для расчета длины трещины и эта длина равна 6.5 см, что также согласуется с численными результатами, представленными в [40].

7 - Резюме

В данной работе исследована задача трещины гидроразрыва постоянной высоты или трещины PKN. Рассмотрены комбинированные эффекты трещиностойкости, вязкости жидкости и утечек. Кроме того, для уменьшения сложности анализа вместо более точного соотношения нелокальной упругости используется локальная упругость.

Сначала намечается анализ проблемы для области кончика трещины. Показано, что, как и в классическом случае полубесконечной трещины в условиях плоской деформации, существует три предельных или вершинных решения, связанных с преобладанием либо трещиностойкости, либо вязкости, либо утечек. Получена параметрическая карта решений, в которой очерчены зоны применимости предельных решений. Кроме того, строятся два приближенных решения задачи и оценивается их точность во всем параметрическом пространстве.

Для конечной трещины PKN сначала получаются явные выражения для четырех предельных решений. Эти пределы имеют то же значение, что и пределы для других геометрий трещины ГРП, таких как трещина в условиях плоской деформации и радиальная трещина, и включают пределы Storage-Viscosity, Storage-Toughness, Leak-off-Viscosity и Leak-off-Toughness. Полное решение для конечной трещины PKN вычисляется с использованием двух подходов: численного решения и быстрого приближения. Последний использует развитое асимптотическое решение на кончике в качестве аппроксимации пространственного изменения ширины всей трещины. Этот подход в сочетании с глобальным балансом объема позволил построить быстрое решение проблемы. Точность этого приближения оценивается путем сравнения его предсказаний с предсказаниями численного решения. С помощью этого быстрого решения исследуется всё параметрическое пространство задачи и намечаются зоны применимости предельных решений. Одно интересное наблюдение состоит в том, что глобальное решение эволюционирует от предела Storage-Toughness на раннем этапе до предела Leak-off-Viscosity на поздних временах. Это отличается от поведения для ранее проанализированных геометрий радиальной трещины и плоской трещины. Полученные результаты позволяют легко оценить положение внутри параметрического пространства при любых входных параметрах задачи для трещины постоянной высоты, что может быть использовано, например, для приведения промысловых данных к лабораторному эксперименту или использования ближайшего предельного решения для оценки геометрии трещины ГРП.

Список использованной литературы

- [1] M.J. Economides and K.G. Nolte, editors. Reservoir Stimulation. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 3rd edition, 2000.
- [2] E. Detournay and D. Garagash. The tip region of a fluid-driven fracture in a permeable elastic solid. *J.Fluid Mech.*, 494:1–32, 2003.
- [3] D.I. Garagash, E. Detournay, and J.I. Adachi. Multiscale tip asymptotics in hydraulic fracture with leak-off. *J. Fluid Mech.*, 669:260–297, 2011.
- [4] A. Peirce and E. Detournay. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197:2858–2885, 2008.
- [5] J. Desroches, E. Detournay, B. Lenoach, P. Papanastasiou, J.R.A. Pearson, M. Thiercelin, and A.H.-D. Cheng. The crack tip region in hydraulic fracturing. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 447:39–48, 1994.
- [6] B. Lenoach. The crack tip solution for hydraulic fracturing in a permeable solid. *J. Mech. Phys. Solids*, 43:1025–1043, 1995.
- [7] J.R. Rice. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In H. Liebowitz, editor, *Fracture: An Advanced Treatise*, volume II, chapter 3, pages 191–311. Academic Press, New York, NY, 1968.
- [8] E. Dontsov and A. Peirce. A non-singular integral equation formulation to analyze multiscale behaviour in semi-infinite hydraulic fractures. *J. Fluid. Mech.*, 781:R1, 2015.
- [9] E.V. Dontsov and A.P. Peirce. A multiscale implicit level set algorithm (ILSA) to model hydraulic fracture propagation incorporating combined viscous, toughness, and leak-off asymptotics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 313:53–84, 2017.
- [10] E.V. Dontsov and O. Kresse. A semi-infinite hydraulic fracture with leak-off driven by a power-law fluid. *J. Fluid Mech.*, 837:210–229, 2018.
- [11] A.O. Bessmertnykh, E.V. Dontsov, and R. Ballarini. A semi-infinite hydraulic fracture driven by a Herschel-Bulkley fluid. *J. Appl. Mech.*, 86:121008, 2019.
- [12] F.-E. Moukhtari and B. Lecampion. A semi-infinite hydraulic fracture driven by a shear-thinning fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 838:573–605, 2018.
- [13] D. Garagash and E. Detournay. The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium. *J. Appl. Mech.*, 67:183–192, 2000.
- [14] E.V. Dontsov. Tip region of a hydraulic fracture driven by a laminar-to-turbulent fluid flow. *J. Fluid. Mech.*, 797:R2, 2016.
- [15] D.I. Garagash. Cohesive-zone effects in hydraulic fracture propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 133:103727, 2019.
- [16] A. Bessmertnykh, E. Dontsov, and R. Ballarini. The effects of proppant on the near-front behavior of a hydraulic fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, page 107110, 2020.
- [17] E.A. Kanin, D.I. Garagash, and A.A. Osipov. The near-tip region of a hydraulic fracture with pressure-dependent leak-off and leak-in. *Journal of Fluid Mechanics*, 892:A31, 2020.
- [18] E. Detournay. Mechanics of hydraulic fractures. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 48:31139, 2016.
- [19] A. Savitski and E. Detournay. Similarity solution of a penny-shaped fluid-driven fracture

in a zero-toughness linear elastic solid. *CR. Acad. Sci. II B*, 329:255–262, 2001.

[20] J.I. Adachi and E. Detournay. Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 26:579–604, 2002.

[21] A. Bunger, E. Detournay, and D. Garagash. Toughness-dominated hydraulic fracture with leak-off. *Int. J. Fract.*, 134:175–190, 2005.

[22] J. I. Adachi and E. Detournay. Plane-strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock. *Engng Fract. Mech.*, 75:4666–4694, 2008.

[23] J. Hu and D.I. Garagash. Plane-strain propagation of a fluid-driven crack in a permeable rock with fracture toughness. *J. Eng. Mech.*, 136:1152–1166, 2010.

[24] M.V. Madyarova. Fluid-driven penny-shaped fracture in elastic medium. Master’s thesis, University of Minnesota, 2003.

[25] E.V. Dontsov. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *R. Soc. open sci.*, 3:160737, 2016.

[26] E.V. Dontsov. An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *Int. J. Fract.*, 205:221–237, 2017.

[27] E.V. Dontsov. Scaling laws for hydraulic fractures driven by a power-law fluid in homogeneous anisotropic rocks. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 43:519–529, 2019.

[28] E. Dontsov, A. Bunger, B. Abell, and R. Suarez-Rivera. Ultrafast hydraulic fracturing model for optimizing cube development. In *Proceedings of the Unconventional Resources Technology Conference*, doi:10.15530/urtec-2019-884, 2019.

[29] T.K. Perkins and L.R. Kern. Widths of hydraulic fractures. *J. Pet. Tech. Trans. AIME*, pages 937–949, 1961.

[30] R.P. Nordgren. Propagation of vertical hydraulic fractures. *Soc. Petrol. Eng. J.*, pages 306–314, 1972.

[31] A. Settari and M.P. Cleary. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry (p3dh). In *Proceedings of the 6th SPE symposium on reservoir simulation of the Society of Petroleum Engineers*, SPE 10505, pages 185–214, 1986.

[32] J. I. Adachi, E. Detournay, and A. P. Peirce. An analysis of classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers. *Int. J. of Rock Mech. and Min. Sci.*, 47:625–639, 2010.

[33] E. Dontsov and A. Peirce. An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness. *Eng. Frac. Mech.*, 142:116–139, 2015.

[34] Y. Kovalyshen and E. Detournay. A reexamination of the classical PKN model of hydraulic fracture. *Transp Porous Med*, 81:317–339, 2010.

[35] P. Xing, K. Yoshioka, J. Adachi, A. El-Fayoumi, and A. P. Bunger. Laboratory measurement of tip and global behavior for zero-toughness hydraulic fractures with circular and blade-shaped (PKN) geometry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 104:172–186, 2017.

[36] N. Zolfaghari, C. R. Meyer, and A. P. Bunger. Blade-shaped hydraulic fracture driven by a turbulent fluid in an impermeable rock. *Journal of Engineering Mechanics*, 143(11):04017130, 2017.

[37] H. Zia and B. Lecampion. Propagation of a height contained hydraulic fracture in turbulent

flow regimes. *International Journal of Solids and Structures*, 110-111:265–278, 2017.

[38] K.G. Nolte. Fracturing-pressure analysis for nonideal behavior. *J. Pet. Technol.*, 43:210–218, 1991.

[39] E. Sarvaramini and D. Garagash. Breakdown of a pressurized fingerlike crack in a permeable solid. *J. Appl. Mech*, 82:061006, 2015.

[40] E.V. Dontsov and A. P. Peirce. Comparison of toughness propagation criteria for blade-like and pseudo3d hydraulic fractures. *Eng. Frac. Mech.*, 160:238–247, 2016.

[41] E.D. Carter. Optimum fluid characteristics for fracture extension. In Howard GC, Fast CR, editors. *Drilling and production practices*, pages 261–270, 1957.