

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-Механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ  
\_\_\_\_\_ А.М. Кривцов  
«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**  
**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ МЕЖДУ**  
**ТРЕЩИНАМИ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА**

# по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование

# Направленность (профиль) 01.04.03\_04 Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи

Выполнил  
студент гр. 5040103/10401 А.А. Муравцев

Руководитель  
доцент ВШТМиМФ, к.т.н. С.А. Калинин

Консультант  
к.т.н. И.Ш. Базыров

Консультант  
по нормоконтролю Е.А. Хайбулова

# Санкт-Петербург 2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО  
Физико-Механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ВШТМиМФ  
\_\_\_\_\_ А.М. Кривцов  
«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023г.

**ЗАДАНИЕ  
на выполнение выпускной квалификационной работы**

студенту Муравцеву Александру Алексеевичу, гр. 5040103/10401

1. Тема работы: Моделирование перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва пласта.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 26.05.2023.
3. Исходные данные по работе: справочная литература и актуальные публикации по теме исследования; физико-механические свойства пласта и закачиваемой в пласт жидкости; геометрические параметры скважины; характеристики перфораций.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): обзор математических моделей трещин гидроразрыва; создание модели роста нескольких трещин автоГРП; исследование влияния входных параметров на рост трещин; создание модели перераспределения потоков между трещинами.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: Базыров Ильдар Шамилевич, руководитель направления ГДМ «Газпромнефть-НТЦ», к.т.н.
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023.

Руководитель ВКР \_\_\_\_\_ С.А. Калинин, доцент ВШТМиМФ, ФизМех, к.т.н.

Задание принял к исполнению 27.02.2023

Студент \_\_\_\_\_ А.А. Муравцев

## РЕФЕРАТ

На 51 с., 11 рисунков, 2 таблицы, 2 приложения

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ТРЕЩИНЫ АВТОГРП, МОДЕЛЬ РКН, НАГНЕТАТЕЛЬНАЯ СКВАЖИНА, РОСТ ТРЕЩИН, ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ, МОДЕЛЬ УТЕЧЕК КАРТЕРА, ПРАВИЛА КИРХГОФА, ФОРМУЛЫ КЁНИНГА.

В данной работе на языке программирования Python реализован численный алгоритм расчёта потоков на каждой из нескольких трещин гидроразрыва пласта при заданных входных параметрах, определяющих текущее физическое состояние породы, скважины и трещин. С помощью совмещения формул Кёнинга с уравнениями Кирхгофа построена физико-математическая модель роста нескольких трещин автоГРП с учётом перераспределения потоков между ними при изменении входных параметров со временем. Рассмотрены случай одномерных утечек Картера и случай двумерных радиальных утечек из трещины в пласт. Проведён анализ временной зависимости полуудлины каждой из трещин автоГРП и расходов жидкости на каждой из трещин при различных сценариях изменения входных параметров со временем.

## ABSTRACT

51 pages, 11 figures, 2 tables, 2 appendices

**KEYWORDS:** WATER-INDUCED FRACTURES, PKN MODEL, INJECTION WELL, FRACTURES GROWTH, PLANE POISEUILLE FLOW, CARTER'S LEAK-OFF MODEL, KIRCHHOFF'S RULES, KONING'S FORMULAS.

In this paper a numerical algorithm for calculating flows on each of several hydraulic fractures is implemented using Python programming language.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	5
Глава 1. Обзор моделей трещины гидроразрыва пласта .....	7
1.1    Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-дeКлерка (модель KGD). ....	10
1.2    Модель радиальной трещины ГРП.....	14
1.3    Модель Перкинса-Керна-Нордгрена (модель PKN) .....	16
Глава 2. Обзор методов моделирования трещин автоГРП .....	18
Глава 3. Расчёт потоков на каждой из нескольких трещин автоГРП .....	23
3.1    Постановка задачи .....	23
3.2    Замыкающие соотношения.....	24
3.3    Описание численного алгоритма решения .....	28
3.4    Результаты.....	29
Глава 4. Моделирование роста трещин автоГРП в длину .....	32
4.1    Постановка задачи .....	32
4.2    Описание численного алгоритма решения .....	34
4.3    Результаты моделирования .....	34
Заключение .....	37
Список сокращений и условных обозначений .....	38
Словарь терминов.....	39
Список использованных источников .....	40
Приложение 1. Код для расчёта потоков на каждой из трещин автоГРП....	45
Приложение 2. Код для моделирования роста трещин автоГРП в длину....	51

## ВВЕДЕНИЕ

Важным фактором, влияющим на эффективность добычи углеводородов при разработке месторождения, является система заводнения, которая организуется с целью поддержания пластового давления и увеличения нефтеотдачи пласта. Часто при организации системы заводнения осуществляют перевод добывающих скважин, отработавших на истощение, в нагнетание. Поскольку нагнетание производится с большим расходом и давление жидкости, как правило, превышает давление разрыва породы, то на таких скважинах возникает риск инициации самопроизвольного роста техногенных трещин. Данное явление называется эффектом автоГРП, а длина трещин автоГРП может варьироваться от десятков метров до километра и более.

На момент перевода в нагнетание большинство эксплуатационного фонда скважин было ранее (во время работы в добывающем фонде) простимулировано многостадийным гидроразрывом пласта. На таких скважинах может инициироваться одновременный рост нескольких трещин автоГРП (по одной трещине из каждого порта ранее проведённого многостадийного гидроразрыва).

Неконтролируемый рост трещины автоГРП может привести к негативным последствиям, которые зависят от геометрических размеров и ориентации трещины и заключаются в том, что развитие трещины может стать причиной обводнения добывающих скважин, а также причиной прорыва воды в верхние или нижние горизонты, что снижает эффективность эксплуатации месторождения.

С другой стороны, контролируемый рост трещин автоГРП может значительно увеличить приёмистость нагнетательных скважин и существенно повысить эффективность заводнения, что приведёт к увеличению эффективности эксплуатации месторождения [3; 18].

Чтобы проводить грамотный контроль роста трещин автоГРП и снизить риски их неконтролируемого распространения важно научиться моделировать одновременный рост нескольких трещин автоГРП в длину.

Важным фактором, влияющим на скорость распространения трещины автоГРП, является расход жидкости на рассматриваемой трещине. При этом сам рост трещины может провоцировать изменение расхода на этой и соседней трещинах из-за постепенного изменения параметров,

характеризующих физическое состояние породы, скважины, перфораций и так далее. Поэтому важно на основе имеющих численных алгоритмов расчёта перераспределения потоков между трещинами ГРП [35] построить алгоритм расчёта перераспределения потоков между трещинами автоГРП и провести совмещение этого алгоритма с известными моделями роста трещины автоГРП в длину [45].

*Целью* данной работы является моделирование роста нескольких трещин автоГРП с учётом перераспределения закачиваемого в скважину расхода жидкости между этими трещинами.

*Объектом исследования* является горизонтальная нагнетательная скважина с несколькими трещинами автоГРП, которые образуются вследствие закачки в скважину воды под высоким давлением. *Предметом исследования* являются забойное давление на рассматриваемой скважине, расходы воды на каждой из трещин при заданном расходе воды на забое и зависимость полудлины каждой из трещин автоГРП от времени.

Для достижения поставленной цели будут решены следующие задачи:

- 1) обзор моделей трещины гидроразрыва пласта и литературы по моделированию роста трещины автоГРП;
- 2) расчёт потоков на каждой из нескольких трещин автоГРП при заданных входных параметрах, определяющих физическое состояние породы, скважины и трещин;
- 3) построение физико-математической модели роста нескольких трещин автоГРП с учётом перераспределения потоков между ними при изменении входных параметров со временем;
- 4) анализ зависимости полудлины каждой из трещин автоГРП, забойного давления и расходов жидкости на каждой из трещин от времени при различных сценариях изменения входных параметров со временем.

## ГЛАВА 1. ОБЗОР МОДЕЛЕЙ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

В настоящее время в симуляторах для моделирования процесса гидроразрыва пласта (ГРП) нефтяные компании используют модели Pseudo3D, Planar3D и Full3D.

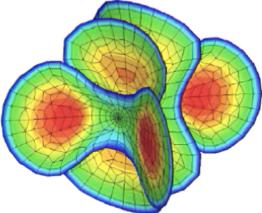
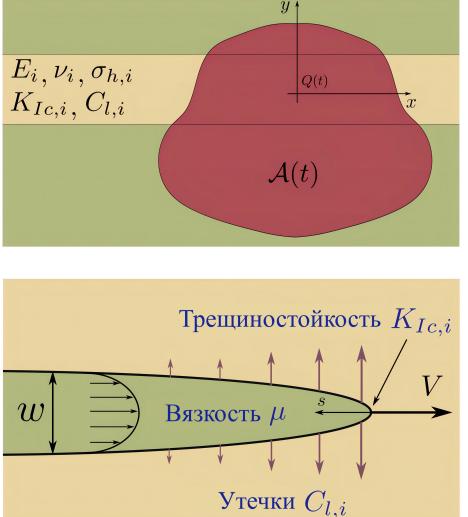
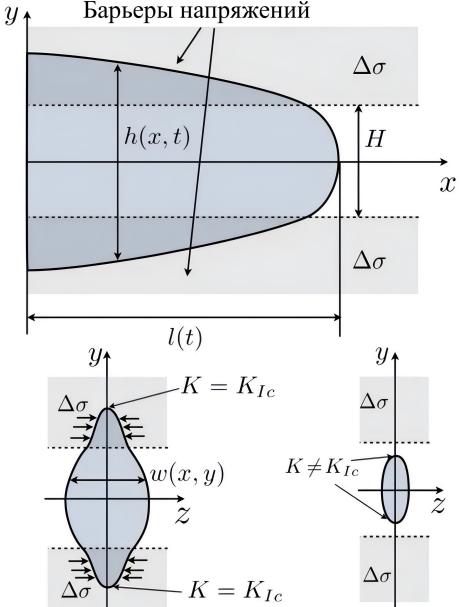
Наиболее общая модель Full3D позволяет моделировать сложные варианты развития трещины (учитывается возможность изменения направления распространения трещины и слоистость породы), решение проводится численно с применением метода конечных элементов (МКЭ), но эта модель используется редко, так как имеет низкую скорость расчёта. Основным преимуществом модели Full3D по сравнению со всеми другими моделями является отсутствие допущений относительно геометрии трещины, что позволяет моделировать изменение направления распространения трещин (например, за счёт их взаимовлияния).

В модели Planar3D предполагается, что направление минимальных горизонтальных напряжений в пласте не изменяется, то есть трещина распространяется в одной плоскости, перпендикулярной минимальным горизонтальным напряжениям в породе. В то же время модель Planar3D учитывает слоистость породы и не использует приближение малости высоты в сравнении с длиной трещины, то есть учитывает двумерное течение жидкости.

Модель Pseudo3D использует предположение о том, что высота трещины много меньше её длины и в каждом вертикальном сечении давление одинаково по сечению, то есть рассматривается случай одномерного течения жидкости. Модели Pseudo3D при небольших вычислительных затратах дают хорошее представление о возможном развитии трещины ГРП и в зависимости от численной реализации разделяются на подвиды: Lumped-Pseudo3D, Cell-based-Pseudo3D [22] и Semi-analytical-Pseudo3D [17].

Каждая из моделей Pseudo3D, Planar3D и Full3D плохо поддаётся аналитическому анализу. Однако при введении дополнительных предположений и допущений модель Planar3D преобразуется в хорошо известные модели (исторически были изучены раньше модели Planar3D), для которых можно провести аналитический анализ (найти длину, раскрытие и давление в трещине в зависимости от координаты и времени). В табл.1.1 представлены основные модели трещины ГРП с их допущениями (использованы схематичные рисунки, заимствованные из работ [19; 22; 32; 57]).

Таблица 1.1  
Допущения основных моделей трещины ГРП

Модель	Допущения	Схематичный рисунок <sup>1</sup>
Full3D	Отсутствуют; учёт большого количества физических эффектов позволяет очень точно (часто излишне точно) описать распространение трещины (рисунок заимствован из [19])	
Planar3D	Одна планарная трещина, распространяющаяся в плоскости вдоль направления максимальных горизонтальных напряжений; законы упругости рассматриваются в рамках линейно-упругой механики разрушения в общем случае без дополнительных упрощений; поток жидкости вдоль трещины двумерный (рисунок заимствован из [57])	
Pseudo3D	Длина трещины $l(t)$ много больше её высоты $h(x,t)$ ; высота трещины изменяется как по координате $x$ , так и со временем $t$ ; в каждом вертикальном сечении давление одинаково по сечению (из этого условия следует одномерность течения жидкости в трещине) (рисунок заимствован из [19; 32])	

<sup>1</sup>Схематичные рисунки заимствованы из работ Алексея Николаевича Байкина, Александра Викторовича Валова, Егора Владимировича Донцова [19; 32; 57] и J.Adachi et al. [22]

Продолжение табл. 1.1

Модель	Допущения	Схематичный рисунок
Перкинса-Керна-Нордгрена (модель РКН или модель трещины постоянной высоты)	Длина трещины много больше её фиксированной высоты $H$ ; в каждом вертикальном сечении давление одинаково по сечению (из этого условия следует эллиптичность вертикального сечения трещины и одномерность течения жидкости в трещине) (рисунок заимствован из [22])	
Модель радиальной трещины (или модель трещины в форме копейки)	Точечный перфорированный интервал; бесконечный по всем направлениям однородный пласт (рисунок заимствован из [22])	
Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка (модель KGD)	Высота трещины много больше её длины; вертикальное сечение трещины прямоугольно; в горизонтальной плоскости выполняется условие плоской деформации (рисунок заимствован из [22])	

Исторически первой С.А.Христиановичем и Ю.П.Желтовым (и независимо от них Гиртсма и деКлерком) в 1955 году была разработана модель KGD [44], которая хорошо описывает поведение трещины, распространяющейся из протяжённого перфорированного интервала, на ранних временах её распространения.

Также была разработана модель радиальной трещины ГРП, которая реализуется при гидроразрыве относительно мощных однородных пластов из ограниченных (точечных) перфорированных интервалов. Подробное описание модели радиальной трещины представлено в работах [47; 54].

В 1961 году исследователями Перкинсом и Керном была разработана более распространённая модель Перкинса-Керна [51], которая хорошо описывает поведение трещины, распространяющейся из протяжённого перфорированного интервала, на поздних временах её распространения. В дальнейшем Нордгреном [49] к модели Перкинса-Керна были добавлены эффекты потери жидкости (модель утечек жидкости из трещины).

Любая модель трещины гидроразрыва пласта состоит из нескольких основных компонентов:

- 1) уравнения баланса жидкости с учётом утечек;
- 2) модели течения жидкости с заданной реологией;
- 3) уравнения упругости, характеризующее равновесие горной породы;
- 4) условия распространения трещины;
- 5) модели транспорта проппанта.

В специфичных случаях некоторые из этих компонент могут не рассматриваться. Например, при моделировании трещин автоГРП не используется модель транспорта проппанта (так как в трещину закачивается вода) и модель жидкости (так как вязкостью закачиваемой воды обычно пренебрегают).

Далее будут представлены математические модели трещины KGD, радиальной и РКН.

### **1.1. Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка (модель KGD)**

В первой модели гидроразрыва пласта [44], разработанной С.А.Христиановичем и Ю.П.Желтовым, рассматривается трещина одной и той же ширины в любом вертикальном сечении в пределах фиксированной толщины пласта  $h$ . Другими словами, используется допущение о плоской деформации в каждой горизонтальной плоскости (это допущение более приемлемо для коротких трещин, у которых  $2x_f < h$ , где  $x_f$  – полудлина трещины). В основе лежит физическая гипотеза, что верхняя и нижняя поверхности трещины свободно скользят по кровле и подошве пласта [34].

В результате получается трещина прямоугольного вертикального сечения, а ширина трещины рассматривается как функция координаты  $x$ .

Другими словами, в модели KGD предполагается, что высота трещины  $h$  много больше её длины  $2x_f$ , у трещины прямоугольное вертикальное сечение и верно допущение о плоской деформации в горизонтальной плоскости. Эти

допущения позволяют свести задачу о моделировании роста трещины к одномерной постановке.

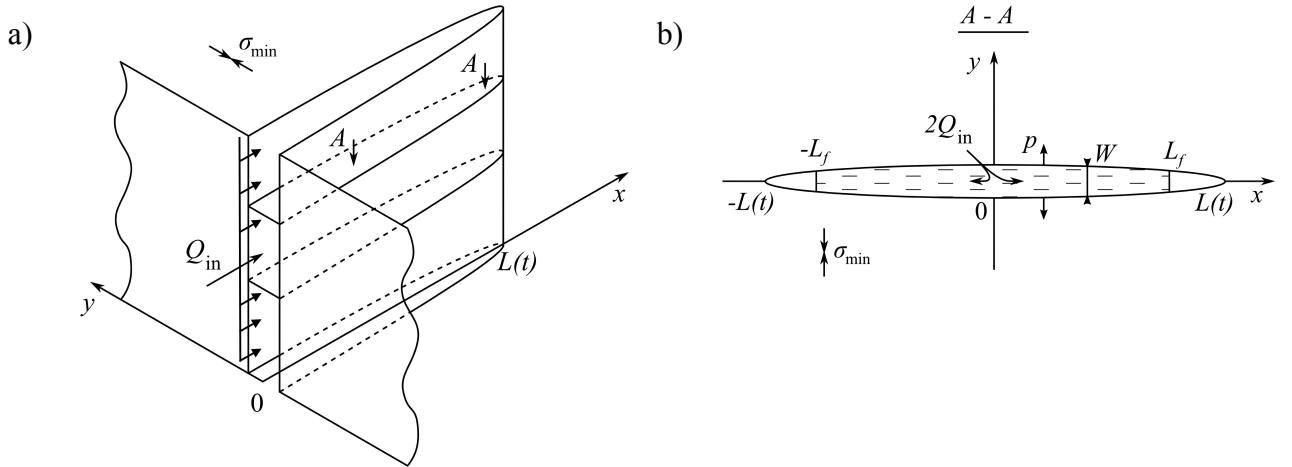


Рис.1.1. Геометрия трещины KGD [7]: *a* — в 3D; *b* — проекция А-А

### Уравнение баланса жидкости.

Для трещины KGD верно равенство, выражающее закон сохранения объёма жидкости в малом выделенном объёме трещины:

$$w(t + dt)dx = w(t)dx + q_x(x)dt - q_x(x + dx)dt - 2gdxdt, \quad (1.1)$$

где  $w$  — раскрытие выделенного объёма трещины,  $q_x$  — поток жидкости вдоль оси  $Ox$ ,  $g$  — скорость утечек.

Откуда получаем уравнение баланса жидкости:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + 2g = Q_0(t)\delta(x), \quad (1.2)$$

где  $g$  — скорость утечек из трещины в пласт;  $Q_0(t)$  — расход жидкости на скважине (в  $\text{м}^2/\text{с}$ , чтобы размерности были согласованы — как бы закачиваем жидкость в трещину на плоскости, поэтому метры в квадрате, а не в кубе).

Из модели Картера [43] скорость утечек:

$$g = \frac{C_l}{\sqrt{t - t_0(x)}}, \quad (1.3)$$

где  $C_l$  — коэффициент утечек Картера;  $t_0(x)$  — время, за которое фронт трещины достигнет координаты  $x$ .

Таким образом, уравнение баланса жидкости с учётом утечек для трещины KGD запишется в следующей форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \quad (1.4)$$

где  $C' = 2C_l$  – масштабированный коэффициент утечек Картера;  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

### **Модель течения жидкости.**

В модели трещины KGD рассматривается одномерное течение жидкости вдоль трещины, то есть имеется только одна компонента вектора скорости, которая изменяется в зависимости от координаты  $y$ :

$$v = v_x(y) \quad (1.5)$$

Из уравнений Навье-Стокса для вязкой ньютоновской жидкости:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (1.6)$$

Для ньютоновской жидкости сдвиговое напряжение:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.7)$$

Дополнительно ставим условие прилипания (отсутствия проскальзывания) на границах трещины:

$$v|_{y=\pm w/2} = 0 \quad (1.8)$$

Общее решение уравнения (1.6) после подстановки (1.7) запишется в виде:

$$v(y) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + Ay + B \quad (1.9)$$

Решение после учёта граничных условий (1.8):

$$v(y) = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{w^2 - 4y^2}{8\mu} \text{ (текущее Пуазейля).} \quad (1.10)$$

Суммарный поток (расход) жидкости:

$$q = \int_{-w/2}^{w/2} v(y) dy = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.11)$$

### **Уравнение упругости.**

Упругое равновесие горной породы характеризуется уравнением упругости, которое для трещины KGD запишется в следующей форме [26]:

$$p(x,t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s)ds}{(x-s)^2}, \quad (1.12)$$

где  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$  – модуль плоской деформации породы.

### Условие распространения.

Условие распространения трещины KGD в рамках линейно-упругой механики разрушения (ЛУМР) [15; 53] можно представить в виде:

$$\lim_{x \rightarrow L} \frac{w}{(L - x)^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'_{Ic}}{E'}, & \text{если } v > 0 \\ \frac{K'_I}{E'}, & \text{если } v = 0 \end{cases}, \quad (1.13)$$

где  $K'_I = 8K_I/\sqrt{2\pi}$  – масштабированный коэффициент интенсивности напряжений;

$K'_{Ic} = 8K_{Ic}/\sqrt{2\pi}$  – масштабированный критический коэффициент интенсивности напряжений, при котором трещина распространяется (масштабированная трещиностойкость породы).

Далее в текущей главе везде будет предполагаться, что  $v > 0$  (т.е. трещина распространяется) и условие распространения будет записываться через трещиностойкость породы  $K_{Ic}$ .

### Система уравнений модели KGD.

Таким образом, система уравнений модели трещины KGD запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ p(x, t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-L(t)}^{L(t)} \frac{w(s)ds}{(x - s)^2}, \\ \lim_{x \rightarrow L} \frac{w}{(L - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (1.14)$$

где  $C' = 2C_l$ ,  $\mu' = 12\mu$ ,  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ,  $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$ .

Приближённые полуаналитические решения для модели Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка в общем случае и точные аналитические решения

в предельных режимах распространения (например, в режиме доминирования трещиностойкости и больших утечках) представлены в работе [29].

Стоит упомянуть, что существуют многочисленные расширения модели кончика плоской трещины (в этом случае рассматривается только область вблизи кончика плоской трещины в предположении полубесконечной трещины [19]; отличается от модели (1.14)), в которых рассматриваются жидкости со степенной реологией [31], жидкости Гершеля-Балкли [24], жидкости Карро [48], эффект отставания фронта жидкости от фронта трещины [36], эффект турбулентного течения [33] и эффект утечек жидкости, зависящих от давления [42].

## 1.2. Модель радиальной трещины ГРП

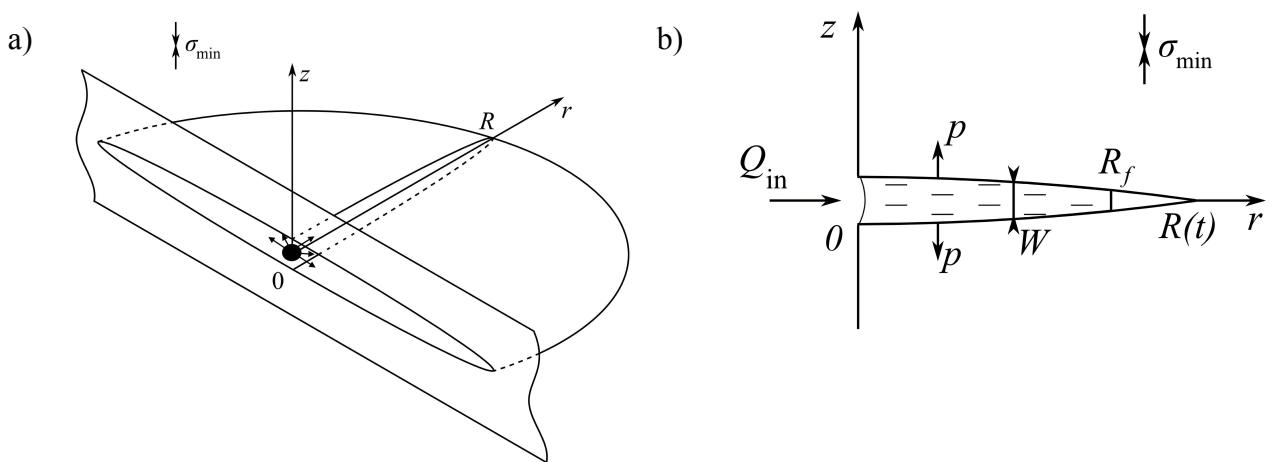


Рис.1.2. Геометрия радиальной трещины [7]: *a* — в 3Д; *b* — проекция А-А

Основные уравнения модели радиальной похожи на уравнения модели KGD. Основное отличие в том, что теперь рассматривается осесимметричная геометрия в цилиндрической системе координат. Модель радиальной трещины реализуется в бесконечном по всем направлениям однородном пласте в случае точечного перфорированного интервала.

Радиальные модели трещин применимы при распространении трещин от горизонтальных скважин на ранних временах распространения, так как именно в этом случае длина перфорированного интервала мала и трещина ещё не успела достигнуть границ (кровли и подошвы) пласта.

Система уравнений модели радиальной трещины записывается в цилиндрической системе координат в следующем виде [28]:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq) + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} = Q_0 \delta(r), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_{net}}{\partial r}, \\ p_{net}(r, t) = -\frac{E'}{2\pi R} \int_0^{R(t)} M\left(\frac{r}{R}, \frac{r'}{R}\right) \frac{\partial w(r', t)}{\partial r'} dr', \\ \lim_{r \rightarrow R} \frac{w}{(R - r)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (1.15)$$

где  $C' = 2C_l$  – масштабированный коэффициент одномерных утечек Картера,  $\mu' = 12\mu$  – масштабированная вязкость жидкости,

$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$  – модуль плоской деформации породы,

$K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$  – масштабированная трещиностойкость породы.

Ядро подынтегрального выражения равно

$$M(\rho, s) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} K\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right) + \frac{\rho}{s^2 - \rho^2} E\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right), & \rho > s, \\ \frac{s}{s^2 - \rho^2} E\left(\frac{\rho^2}{s^2}\right), & \rho < s, \end{cases} \quad (1.16)$$

где

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}$$

и

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Приближённые решения для модели радиальной трещины представлены в работе [28]. Рассмотрены несколько случаев, а именно случай доминирования вязкости с доминированием утечек, случай доминирования вязкости с отсутствием утечек, случай доминирования трещиностойкости с доминированием утечек и случай доминирования трещиностойкости с отсутствием утечек.

### 1.3. Модель Перкинса-Керна-Нордгрена (модель PKN)

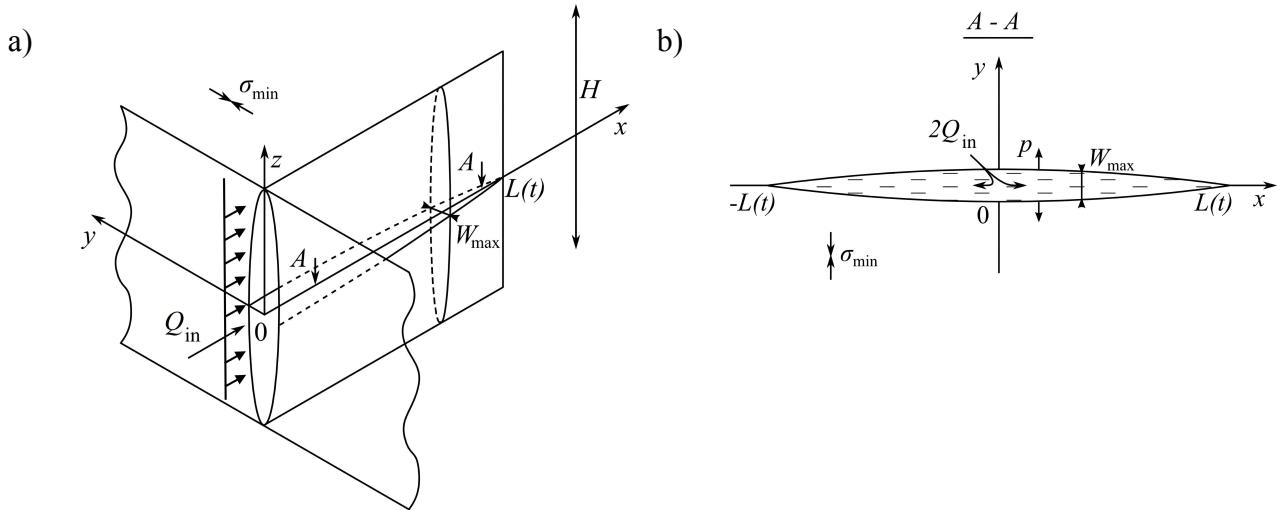


Рис.1.3. Геометрия трещины PKN [7]: *a* — в 3D; *b* — проекция А-А

В модели PKN принимается, что условие плоской деформации сохраняется в каждой вертикальной плоскости, нормальной к направлению распространения; однако, в отличие от ситуации строгой плоской деформации, состояние напряжений и деформаций не точно одинаково в следующих одна за другой плоскостях. Иными словами, в этой модели используется допущение квази-плоской деформации, причём плоскость отсчёта вертикальна и нормальна к направлению распространения. В модели PKN пренебрегается изменениями давления вдоль вертикальной координаты, а чистое давление  $p_{net}$  в трещине рассматривается как функция латеральной координаты  $x$ .

Более строго в модели PKN предполагается, что длина трещины много больше её фиксированной высоты  $H$  (отсюда вытекает выполнение условия квази-плоской деформации в вертикальных плоскостях) и в любом вертикальном сечении давление постоянно по сечению.

Из постоянства давления в каждом вертикальном сечении следует эллиптичность вертикального профиля трещины, что позволяет перейти от двумерной системы уравнений к одномерной. Этот переход осуществляется с помощью аналитического решения вдоль направления оси  $Oz$  путём усреднения:

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} w(x, z) dz \quad (1.17)$$

и записи решения вдоль оси  $Oz$  в виде эллипса:

$$w(x, z) = \frac{4}{\pi} \bar{w}(x) \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{H}\right)^2}. \quad (1.18)$$

Система уравнений модели РКН запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \\ \bar{q}_x = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p_{net}}{\partial x}, \\ p_{net}(x, t) = \frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-L(t)}^{L(t)} \bar{w}(x', t) \frac{dG(2(x' - x)/H)}{dx'} dx', \\ \lim_{x \rightarrow L} \frac{w}{(L - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (1.19)$$

где  $C' = 2C_l$ ,  $\mu' = 12\mu$ ,  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ,  $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $G(s) = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{s} E\left(\frac{1}{1 + s^2}\right)$ ,  
 $E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ .

Приближённые решения для модели трещины РКН во всём параметрическом пространстве и точные аналитические решения для предельных режимов распространения (например, для случая пренебрежимо малой вязкости жидкости и больших утечках) представлены в работе [30].

В этой главе были рассмотрены основные модели трещины ГРП. Для моделирования трещин автоГРП [9] чаще всего используется модель РКН в режиме доминирования трещиностойкости и больших утечках, так как основные предположения модели РКН (длина трещины много больше фиксированной высоты  $H$  и давление жидкости в каждом вертикальном сечении постоянно по сечению) соответствуют процессу распространения трещин автоГРП.

## ГЛАВА 2. ОБЗОР МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕЩИН АВТОГРП

По мере разработки первых моделей гидроразрыва пласта появляются первые статьи, посвящённые эффекту самопроизвольного роста трещин вследствие закачки в нагнетательную скважину жидкости под высоким давлением.

В одной из первых таких работ [38] рассматриваются различные аспекты моделирования трещин на нагнетательных скважинах, проведён обзор критериев распространения трещин, полученных методами Гриффитса [37], Ирвина [40] и Баренблатта [23], а также представлено решение задачи механики трещины в линейно-пороупругой однородной изотропной среде.

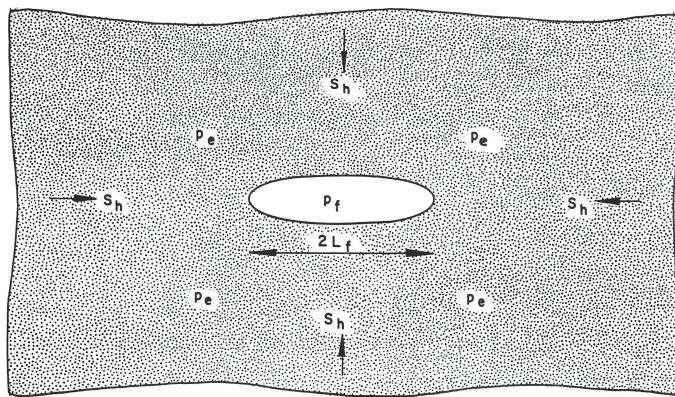


Рис.2.1. KGD трещина в пороупругой породе [38] (вид сверху; пренебрегаем вязкостью жидкости)

При выводе решения в работе [38] рассматривается трещина с полудлиной  $L_f$ , распространяющаяся от нагнетательной скважины в пористой проницаемой породе (рис. 2.1). Предполагается, что высота трещины много больше её длины, а давление по всей длине трещине одинаково и равно  $p_f$ , откуда вытекает эллиптичность горизонтального сечения трещины. Другими словами, для рассматриваемой трещины используется модель KGD с пренебрежимо малой вязкостью закачиваемой жидкости. Также предполагается, что напряжение, действующее на трещину со стороны породы, постоянно и равно  $S_h$ , а пластовое давление вдали от трещины равно  $p_e$ .

Чтобы решить задачу аналитически, вводится упрощённый профиль порового давления, напоминающий истинный профиль порового давления:

$$p(\xi) = p_e + \Delta p \exp\left(-\frac{\xi - \xi_f}{\lambda}\right), \quad (2.1)$$

где  $\xi$  – координата в эллиптической системе координат;  $\Delta p = p_f - p_e$  – репрессия на пласт;  $\lambda$  – константа темпа падения.

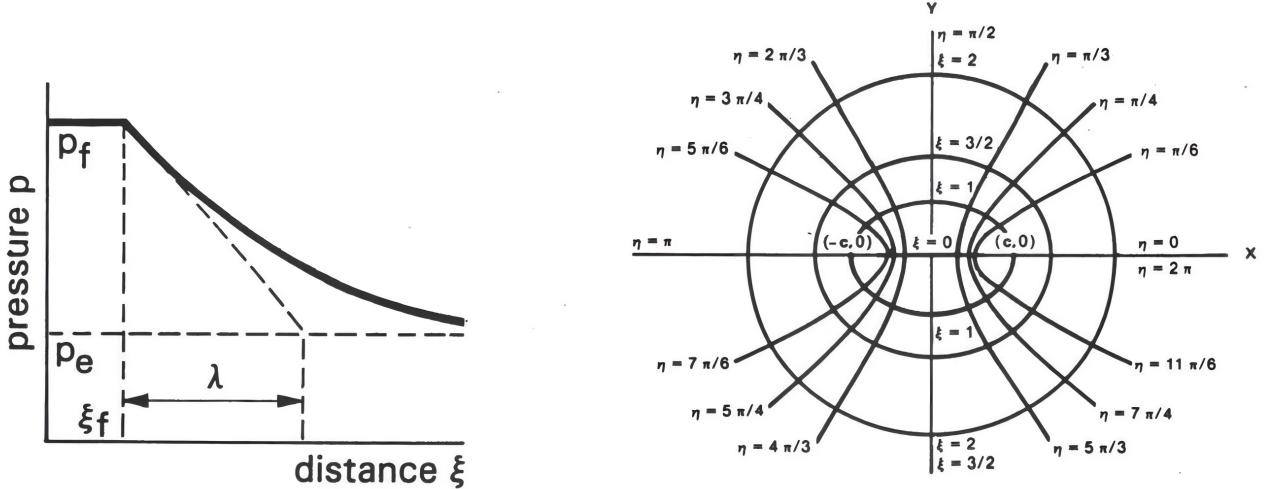


Рис.2.2. Профиль порового давления (слева) и эллиптическая система координат (справа) [38]

Этот профиль давления изображён на рис. 2.2 и удовлетворяет граничным условиям на скважине ( $p = p_f$ ) и на бесконечности ( $p = p_e$ ). Глубина проникновения давления определяется постоянной темпа падения  $\lambda$ , которую можно рассматривать как функцию времени. Зависимость между глубиной проникновения давления  $L_p$  и константой  $\lambda$  задана в следующем виде:

$$L_p = L_f \sinh \lambda \quad (2.2)$$

При  $\lambda \ll 1$  выражение (2.2) запишется в виде  $L_p = \lambda L_f$ , а при  $\lambda \gg 1$  выражение (2.2) примет следующий вид:  $\lambda = \ln(2L_p/L_f)$ .

Распределение напряжений вокруг трещины найдено в виде суммы трёх функций упругих напряжений и специальной функции пороупругих напряжений. На основе результатов, описанных в работе [55], и найденного распределения напряжений получено выражение для раскрытия трещины:

$$u(x) = \frac{2(1-\nu^2)L_f}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{L_f^2}} \left( p_f - S_h - \frac{\lambda}{1+2\lambda} A(p_f - p_e) \right), \quad (2.3)$$

где  $A = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left( 1 - \frac{c_r}{c_b} \right)$  – пороупругая константа;  $c_r$  – сжимаемость материала породы;  $c_b$  – сжимаемость породы, насыщенной флюидами.

Максимальное раскрытие трещины (вблизи скважины) запишется в виде:

$$w_f = \frac{2(1-\nu^2)L_f}{E} \left( p_f - S_h - \frac{\lambda}{1+2\lambda} A(p_f - p_e) \right) \quad (2.4)$$

Видим, что ширина трещины уменьшается при увеличении глубины проникновения давления.

Также из (2.3) вытекает формула для давления открытия/закрытия трещины ( $u = 0$ ):

$$p_{foc} = \frac{S_h - \frac{\lambda}{1+2\lambda} Ap_e}{1 - \frac{\lambda}{1+2\lambda} A} \quad (2.5)$$

Согласно (2.5) давление открытия/закрытия трещины увеличивается при увеличении глубины проникновения давления. А при малых значениях  $\lambda$  давление закрытия (оно же давление смыкания) трещины равно напряжению, действующему на трещину со стороны породы  $p_{foc} = S_h$ .

Далее с помощью метода Гриффитса [37] найдено давление распространения трещины:

$$p_{fp} = p_{foc} + \frac{K_{Ic}/\sqrt{\pi L_f}}{\left(1 - \frac{\lambda}{1+2\lambda} A\right)}, \quad (2.6)$$

где  $K_{Ic}$  – критический коэффициент интенсивности напряжений (трещиностойкость породы).

Таким образом, трещина остаётся стабильной (не распространяется), если давление в трещине выше давления открытия/закрытия трещины не более, чем на

$$\frac{K_{Ic}/\sqrt{\pi L_f}}{\left(1 - \frac{\lambda}{1+2\lambda} A\right)}.$$

Это максимальное избыточное давление уменьшается при увеличении длины трещины (для длинных трещин давление распространения практически равно давлению смыкания) и увеличивается при увеличении глубины проникновения давления.

Однако, стоит ещё раз отметить, что формула для давления распространения трещины (2.6) выведена только для трещин, у которых высота намного больше длины (модель KGD). В работе [41] получено выражение для давления распространения трещины в случае, когда её длина намного больше высоты (модель PKN), что больше соответствует действительности.

Важное исследование распространения трещин автоГРП было представлено в работе [39], в которой путём совмещения аналитической модели

трещины с численной моделью пласта изучена скорость распространения трещин. В этой работе сделан вывод, что предположение одномерности утечек (модель Картера [43]) часто приводит к ошибочным результатам.

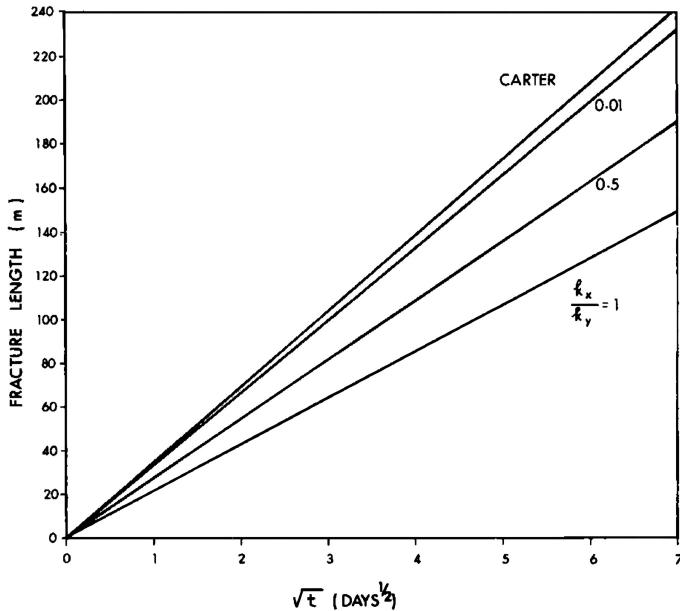


Рис.2.3. Сравнение решения в режиме Картера с численным решением, полученным при различных значениях параметра анизотропии  $k_x/k_y$  [39]

А именно было проведено сравнение решения в режиме Картера с численным решением, которое было получено при различных значениях параметра анизотропии проницаемости  $k_x/k_y$  (с помощью изменения анизотропии проницаемости осуществлялось управление направлением утечек – при  $k_x \ll k_y$  утечки одномерны и направлены перпендикулярно трещине, а при  $k_x \approx k_y$  утечки двумерны). Из рис. 2.3 видим, что использование предположения об одномерности утечек приводит к завышенным значениям длины трещины.

Позже в работе [50] представлена модель распространения одной трещины автоГРП, в которой учтены двумерность утечек и влияние термоупругих изменений на скорость распространения трещин. Было показано, что охлаждение породы вследствие закачки холодной воды может привести к очень длинным трещинам, так как при охлаждении порода сжимается и происходит термоупругое уменьшение горизонтальных напряжений пласта.

Далее в статье Кёнинга [45] предложена модель трещины автоГРП, которая может включать как одномерные утечки, перпендикулярные трещине, так и двумерные радиальные утечки.

Показано, что если скорость распространения трещины существенно выше скорости распространения возмущения пластового давления, то применима модель одномерных утечек Картера [43], перпендикулярных трещине. В этом случае получено выражение для полудлины трещины автоГРП:

$$x_f = \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)}, \quad (2.7)$$

где  $Q$  – расход нагнетаемой в рассматриваемую трещину жидкости;  $\mu$  – вязкость жидкости;  $\kappa = k_e / (\varphi_e \mu c_t)$  – коэффициент пьезопроводности пласта;  $t$  – время закачки;  $k_e$  – проницаемость пласта;  $\varphi_e$  – пористость пласта;  $c_t$  – общая сжимаемость системы (состоит из сжимаемости флюидов и сжимаемости порового пространства);  $h$  – эффективная толщина (мощность) пласта;  $\Delta p = p_f - p_e$  – разница между средним давлением в трещине и пластовым давлением;  $x_f$  – полудлина трещины.

Если же трещина распространяется существенно медленнее возмущения пластового давления, то модель утечек Картера несомненно неприменима и требуется рассматривать более сложные модели утечек, например, двумерные радиальные утечки. В этом случае в статье [45] также получена формула для полудлины трещины автоГРП:

$$x_f = 3 \exp \left( -\frac{2\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q\mu} \right) \sqrt{\kappa t} \quad (2.8)$$

В текущей работе для моделирования роста нескольких трещин автоГРП будут использованы формулы (2.7) и (2.8) из статьи Кёнинга [45].

Однако в этих формулах есть зависимость полудлины трещины от расхода на трещине и репрессии на пласт, то есть от величин, значения которых могут изменяться со временем при росте трещин автоГРП, что затрудняет прямое использование формул (2.7) и (2.8) для расчёта полудлины трещины.

Основными причинами изменения расхода на трещине автоГРП являются изменение расхода на забое скважины и перераспределение потоков между трещинами (например, вследствие ухудшения качества перфораций на одной из трещин). В следующей главе будет реализован алгоритм расчёта потоков (расходов) на каждой из нескольких трещин автоГРП при заданных входных параметрах, определяющих текущее физическое состояние породы, скважины и трещин.

## ГЛАВА 3. РАСЧЁТ ПОТОКОВ НА КАЖДОЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ТРЕЩИН АВТОГРП

Закачиваемый в скважину расход жидкости в общем случае перераспределяется между трещинами неодинаково вследствие разного качества перфораций на трещинах и других факторов.

В данной главе будет решена задача нахождения расхода  $Q_i$  на каждой  $i$ -ой трещине и забойного давления  $p_0$  при фиксированном расходе жидкости  $Q_0$  на забое скважины.

### 3.1. Постановка задачи

На рис. 3.1 представлена схема перераспределения потоков между тремя трещинами гидроразрыва пласта. На этой схеме обозначены искомые  $p_0$  (забойное давление),  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  (расходы жидкости на трещинах), а также величины, которые важно учитывать при расчёте потоков, так как их значения существенно влияют на конечный результат.

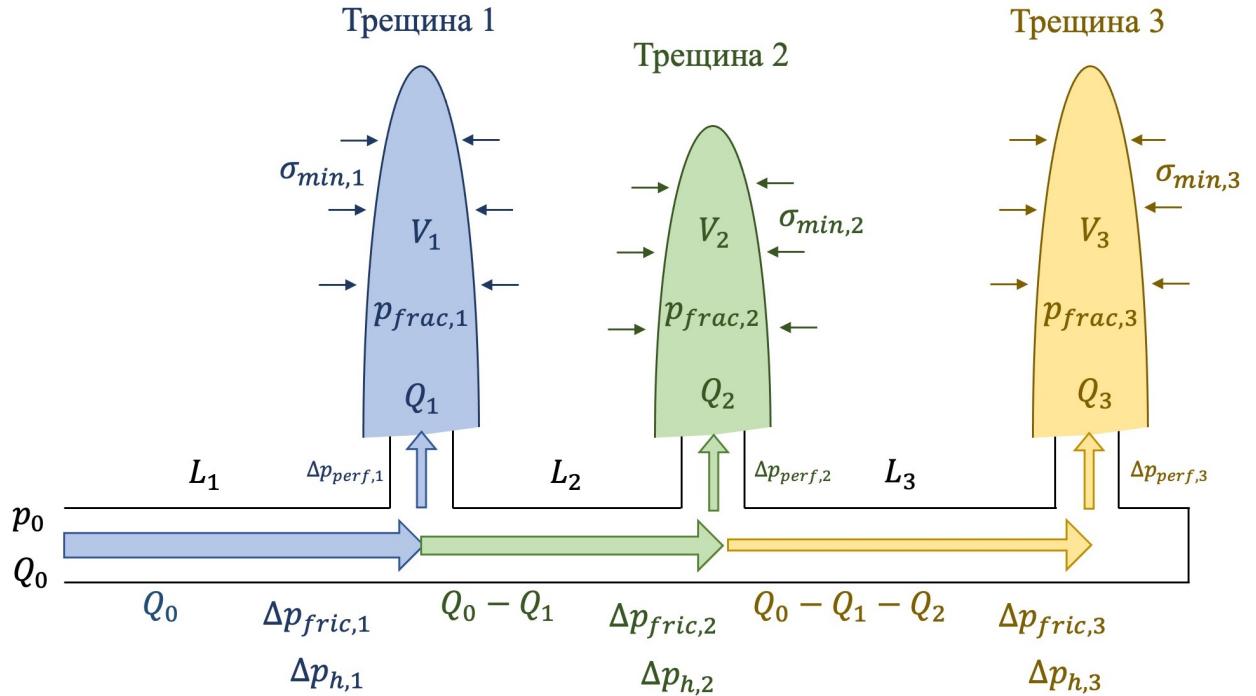


Рис.3.1. Схема перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва

Согласно первому правилу Кирхгофа весь расход, который закачиваем в скважину, перераспределяется между трещинами:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i, \quad (3.1)$$

где  $N$  – количество трещин.

Согласно второму правилу Кирхгофа каждый из путей к каждой из трещин рассматривается независимо:

$$p_0 = \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j}, \quad (3.2)$$

где  $\sigma_{\min,i}$  – давление закрытия (минимальное напряжение в пласте) на  $i$ -ой трещине;

$p_{\text{net},i} = p_{\text{frac},i} - \sigma_{\min,i}$  – чистое давление на  $i$ -ой трещине (из модели трещины);

$\Delta p_{\text{perf},i}$  – падение давления вдоль перфорации  $i$ -ой трещины;

$\Delta p_{h,i}$  – вклад гидростатического давления между  $i$ -ой и  $(i-1)$ -ой трещинами;

$\Delta p_{\text{fric},i}$  – падение давления на трение в трубе между  $i$ -ой и  $(i-1)$ -ой трещинами.

Объединяя уравнения (3.1) и (3.2), получаем алгебраическую систему уравнений относительно  $p_0$  и  $Q_i$  (где  $i = \overline{1, N}$ ). Чтобы решить эту систему из  $N+1$  уравнений с  $N+1$  неизвестной, необходимо получить замыкающие соотношения на  $p_{\text{net},i}$ ,  $\Delta p_{\text{perf},i}$  и  $\Delta p_{\text{fric},i}$ . Другими словами, необходимо получить зависимости этих величин от искомых величин  $p_0$ ,  $Q_i$  и других параметров, значения которых можно найти непосредственным измерением или задать при проектировании скважины.

### 3.2. Замыкающие соотношения

#### Выражение для чистого давления в трещине автоГРП

В работе [41] получена формула для чистого давления трещины Перкинса-Керна-Нордгрена (модели РКН):

$$p_{\text{net},i} = \sqrt{\frac{8K_{Ic,i}^2}{\pi h_{f,i}}}, \quad (3.3)$$

где  $K_{Ic,i}$  – трещиностойкость породы вблизи  $i$ -ой трещины,

$h_{f,i}$  – высота  $i$ -ой трещины (в случае РКН модели равна мощности продуктивной зоны).

### Выражение для падения давления на перфорациях

Эмпирическая формула для падения давления на перфорациях [25; 27; 46] выглядит следующим образом:

$$\Delta p_{\text{perf},i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|, \quad (3.4)$$

где  $\rho_s$  – средняя плотность смеси;

$n_{p,i}$ ,  $d_{p,i}$  – количество и диаметр перфораций;

$C_{d,i} = \frac{\min(d_{jet})}{d_p}$  – безразмерный коэффициент эрозии (в случае отсутствия твёрдых частиц в потоке  $C_{d,i} \in [0.5, 0.6]$ , а с твёрдыми частичками в потоке  $C_{d,j} \in [0.6, 0.95]$  из-за эрозии перфорации).

### Выражение для падения давления на трение в трубе

Для того, чтобы получить формулу для падения давления на трение в трубе, запишем уравнение Навье-Стокса и усредним его по площади сечения трубы:

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rx}) + \rho g \sin \theta \quad \left| \frac{1}{\pi R^2} \int_S (\cdot) dS, \right. \quad (3.5)$$

где  $dp(x)/dx$  – падение давления вдоль скважины;  $\tau_{rx}$  – напряжение сдвига;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\theta$  – угол между скважиной (нормалью к сечению трубы) и поверхностью земли.

После усреднения получаем следующее уравнение (среднее  $\bar{p}$  на самом деле можно заменить на просто  $p$ , так как давление выравнивается вдоль сечения – это можно доказать в предположениях течения тонкого слоя):

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} + \bar{\rho}g \sin \theta, \quad (3.6)$$

где  $\tau_w = -\tau_{rx}|_{r=R}$  – напряжение сдвига (трения) на стенке трубы. Это напряжение сдвига (трения) можно измерить при ламинарном течении, а также в случае турбулентного течения (например, для известного перепада давления найти  $\tau_w$  из (3.6) – то есть решить обратную задачу).

Введём коэффициент трения Фаннинга

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2}, \quad (3.7)$$

где  $u_m$  – средняя скорость потока в рассматриваемом сечении трубы.

Тогда уравнение (3.6) примет следующий вид:

$$\frac{dp}{dx} = \underbrace{-\frac{\rho u_m^2}{R} f_s}_{\text{на трение}} + \underbrace{\rho g \sin \theta}_{\substack{\text{вклад} \\ \text{гидро-} \\ \text{статического} \\ \text{давления}}} \quad (3.8)$$

Получили уравнение баланса сил: сила давления и сила тяжести уравновешиваются силой трения жидкости о стенки трубы.

Таким образом, падение давления на трение на каждом интервале рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta p_{\text{fric},i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_s \frac{\rho u_{m,i}^2}{R_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\rho(c(t,s)) \cdot f(Re) \cdot \left(Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j\right)^2}{R_i(s) S_i^2(s)} ds, \quad (3.9)$$

где  $f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_{m,i}^2 / 2}$  – коэффициент трения Фаннинга;

$\rho(c(t,s))$  – плотность смеси, которая зависит от динамически меняющейся концентрации проппанта;

$u_{m,i} = \frac{Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j}{S_i}$  – средняя скорость в рассматриваемом сечении участка трубы;

$S_i$  – площадь сечения рассматриваемого участка трубы;

$R_i$  – радиус рассматриваемого участка трубы;

$Re$  – число Рейнольдса.

Для ламинарного режима течения ньютоновской жидкости:

$$u_x = 2u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{и} \quad \tau_w = -\mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{4\mu_s u_m}{R}, \quad (3.10)$$

где  $\mu_s$  – вязкость закачиваемой в скважину жидкости.

Тогда коэффициент трения Фаннинга для ламинарного режима течения запишется в следующем виде:

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} = \frac{8\mu_s}{\rho R u_m} = \frac{16}{Re}, \quad (3.11)$$

где  $Re = \frac{\rho u_m (2R)}{\mu_s}$  – число Рейнольдса [52].

В трещины автоГРП закачивается вода без дополнительных веществ, поэтому плотность закачиваемой жидкости постоянна по всей длине скважины и равна плотности воды.

Таким образом, в случае ламинарного режима течения однородной ньютоновской жидкости (например, воды) формула для падения давления на трение в трубе (3.9) упрощается и запишется в следующем виде:

$$\Delta p_{\text{fric},i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{8\mu \left( Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j \right)}{R_i^2(s) S_i(s)} ds, \quad (3.12)$$

где  $\mu$  – вязкость воды.

### **Выражение для изменения гидростатического давления**

В общем случае изменение гидростатического давления на каждом интервале рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta p_{h,i}(t,x) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(c(t,s)) \cdot g \cdot \sin \theta(s) ds, \quad (3.13)$$

где  $x_i$  – измеренная глубина (MD)  $i$ -ого порта ГРП;

$\rho(c(t,s))$  – плотность закачиваемой в скважину смеси, которая зависит от меняющейся с координатой и временем концентрации проппанта;

$g$  – ускорение свободного падения;  $\theta(s)$  – угол между скважиной (нормалью к сечению трубы) и поверхностью земли в текущем заданном сечении трубы.

В данной работе исследуется поведение трещин, которые распространяются от одной горизонтальной скважины в одном пласте, залегающем на фиксированной глубине, поэтому изменения гидростатического давления между портами ГРП нет:

$$\Delta p_{h,i} = 0. \quad (3.14)$$

### **Замкнутая постановка задачи**

С учётом полученных замыкающих соотношений постановка задачи о расчёте потоков между трещинами автоГРП запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i, \\ p_0 = \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j}, \\ p_{\text{net},i} = \sqrt{\frac{8K_{Ic,i}^2}{\pi h_{f,i}}}, \\ \Delta p_{\text{perf},i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|, \\ \Delta p_{\text{fric},j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{8\mu \left( Q_0 - \sum_{k=1}^{j-1} Q_k \right)}{R_j^2(s) S_j(s)} ds, \\ \Delta p_{h,j} = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Подстановка последних четырёх равенств (3.15) в первые два равенства даёт замкнутую систему нелинейных алгебраических уравнений с неизвестными  $p_0$  и  $Q_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ), которая может быть решена численно, например, с помощью метода Ньютона.

### 3.3. Описание численного алгоритма решения

Используя замкнутую постановку задачи (3.15), введём вектор неизвестных  $Q^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N, p_0]$  и вектор невязок  $F^T = [F_1, F_2, \dots, F_N, F_{N+1}]$ , где

$$F_i = \begin{cases} \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j} - p_0 \\ \quad (\text{при } i \leq N) \\ Q_0 - \sum_{j=1}^N Q_j \quad (\text{при } i = N+1) \end{cases} \quad (3.16)$$

Ставится задача минимизации вектора невязок. В качестве начального приближения считается, что закачиваемый в скважину расход жидкости перераспределяется между трещинами одинаково  $Q_i = Q_0/N$  (где  $i = \overline{1, N}$ ), а забойное давление принимается равным давлению закрытия (смыкания) трещин  $p_0 = \sigma_{\min}$ .

Далее составляется матрица Якоби

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_1}{\partial p_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial p_0} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

и итеративно с помощью метода Ньютона ищется вектор неизвестных  $\bar{Q}^T$ :

$$\bar{Q}^{k+1} = \bar{Q}^k - J^{-1} \bar{F}^k \quad (3.18)$$

В качестве условия остановки выбрано следующее условие на разницу между соседними приближениями к решению:

$$|\bar{Q}^{k+1} - \bar{Q}^k|^2 \leq 10^{-4}. \quad (3.19)$$

Реализация описанного численного алгоритма решения на языке программирования Python представлена в приложении 1.

### 3.4. Результаты

Значения входных параметров, выбранные перед запуском алгоритма представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Значения входных параметров алгоритма расчёта потоков

Параметр	Значение
Расход на забое $Q_0$	800 м <sup>3</sup> /сут
Вязкость закачиваемой жидкости (воды) $\mu$	10 <sup>-3</sup> Па·с
Плотность закачиваемой жидкости (воды) $\rho$	1000 кг/м <sup>3</sup>
Проницаемость пласта $k_e$	1 мД
Пористость пласта $\varphi_e$	0.2
Общая сжимаемость $c_t$	2.2 · 10 <sup>-9</sup> Па <sup>-1</sup>
Пластовое давление $p_e$	25 МПа
Модуль плоской деформации породы $E'$	10 <sup>4</sup> МПа
Мощность пласта $H$	15 м
Количество перфораций $n_p$	32
Диаметр перфораций $d_p$	0.02 м
Безразмерный коэффициент эрозии $C_d$	0.5
Радиус участков трубы $R$	0.08 м
Длина участков трубы $L$	100 м

Продолжение табл. 3.1

Параметр	Значение
Давление смыкания $\sigma_{\min}$	40 МПа
Трещиностойкость породы $K_{Ic}$	$10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}$
Количество трещин	4

На рис 3.2 показан итеративный процесс поиска расходов жидкости на каждой из четырёх трещин автоГРП.

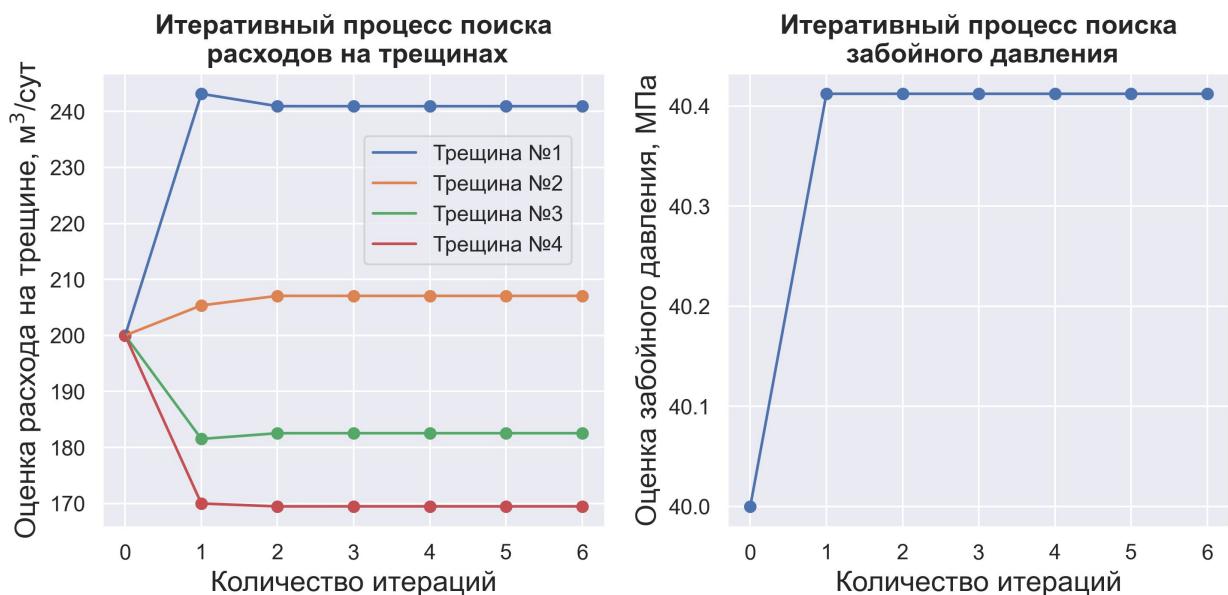


Рис.3.2. Итеративный процесс поиска расходов на трещинах и забойного давления (входные параметры алгоритма представлены в таблице 3.1)

Видим, что потоки распределились по трещинам неодинаково вследствие имеющихся потерь давления на трение в трубе (падение давления на трение при движении жидкости к первой трещине меньше, чем падение давления на трение при движении жидкости по трубе к последней трещине).

Далее проведён расчёт потоков на каждой из четырёх трещин в случае уменьшенного диаметра перфораций на второй трещине (диаметр уменьшен с 0.02 м до 0.005 м). Результаты представлены на рис. 3.3.

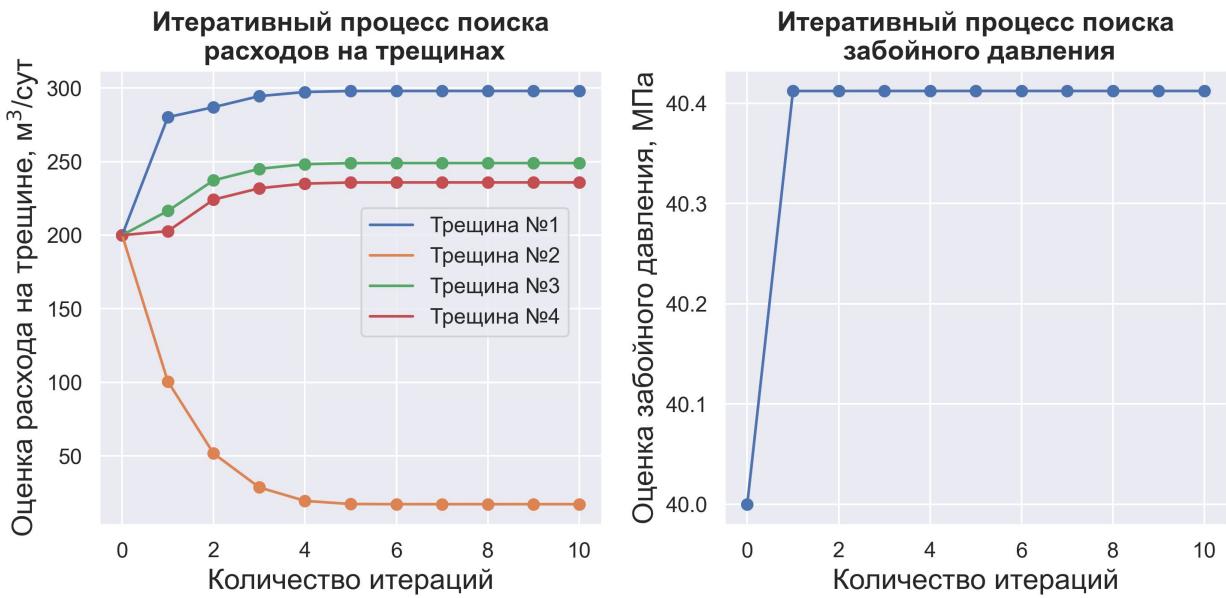


Рис.3.3. Итеративный процесс поиска расходов на трещинах и забойного давления (по сравнению с предыдущим расчётом уменьшен диаметр перфораций  $d_{p,2} = 0.005$  м на второй трещине)

Видим, что уменьшение диаметра перфораций на одной из трещин существенно сократило расход жидкости на этой трещине и при этом возросли расходы жидкости на соседних трещинах.

Итак, в данной главе реализован алгоритм расчёта потоков на каждой из нескольких трещин автоГРП. В следующей главе этот алгоритм будет использован для моделирования одновременного роста нескольких трещин автоГРП в длину.

## ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА ТРЕЩИН АВТОГРП В ДЛИНУ

### 4.1. Постановка задачи

На основе модели одномерных утечек Картера [43] в работе [45] получена первая формула Кёнигса, которая представляет собой зависимость полудлины трещины автоГРП от расхода жидкости, фильтрационно-ёмкостных свойств пласта, репрессии на пласт и времени:

$$x_f = \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)}, \quad (4.1)$$

где  $Q$  – расход нагнетаемой в рассматриваемую трещину жидкости;  $\mu$  – вязкость жидкости;  $\kappa = k_e / (\varphi_e \mu c_t)$  – коэффициент пьезопроводности пласта;  $t$  – время закачки;  $k_e$  – проницаемость пласта;  $\varphi_e$  – пористость пласта;  $c_t$  – общая сжимаемость системы (состоит из сжимаемости флюидов и сжимаемости порового пространства);  $h$  – эффективная толщина (мощность) пласта;  $\Delta p = p_f - p_e$  – разница между средним давлением в трещине и пластовым давлением (репрессия на пласт).

В текущей работе рассматривается одновременный рост нескольких трещин гидоразрыва, поэтому расход жидкости на каждой из них может динамично меняться согласно правилам Кирхгофа. Кроме того, давление в трещинах в общем случае тоже может меняться по мере увеличения объёма трещин и изменения расхода на них. Получается, что согласно формуле (4.1) есть зависимость полудлины трещины  $x_f$  от расхода на трещине  $Q$ , но при этом на расход в общем случае может влиять текущая полудлина каждой из трещин.

Таким образом, для корректного применения формулы Кёнигса приращение полудлины каждой из трещин на текущем шаге по времени необходимо найти как произведение полной производной формулы Кёнигса по времени и рассматриваемого временного шага.

Полная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial x_f}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial x_f}{\partial p_f} \frac{dp_f}{dt} \quad (4.2)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial t} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} \quad (4.3)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по расходу  $Q$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial Q} = \frac{\mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \quad (4.4)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по репрессии на пласт  $(p_f - p_e)$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial (p_f - p_e)} = -\frac{Q \mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.3), (4.4) и (4.5) в выражение (4.2), получаем:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{\mu}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \left( \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{\pi \kappa}{t}} + \sqrt{\pi \kappa t} \frac{dQ}{dt} - \frac{Q \sqrt{\pi \kappa t}}{(p_f - p_e)} \frac{d(p_f - p_e)}{dt} \right) \quad (4.6)$$

Итак, приращение полудлины трещины на каждом шаге по времени при рассмотрении случая одномерных утечек Картера записывается в следующем виде:

$$dx_f = \frac{\mu}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \left( \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{\pi \kappa}{t}} dt + \sqrt{\pi \kappa t} dQ - \frac{Q \sqrt{\pi \kappa t}}{(p_f - p_e)} d(p_f - p_e) \right) \quad (4.7)$$

Дополнительно в работе [45] получена вторая формула Кёнинга, которая применяется в случае двумерных радиальных утечек жидкости из трещины в пласт и представляет собой зависимость полудлины трещины автоГРП от расхода жидкости, фильтрационно-ёмкостных свойств пласта, репрессии на пласт и времени:

$$x_f = 3 \exp\left(-\frac{2\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q \mu}\right) \sqrt{\kappa t} \quad (4.8)$$

В этом случае частная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial t} = \frac{3}{2} \exp\left(-\frac{2\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q \mu}\right) \sqrt{\frac{\kappa}{t}} \quad (4.9)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по расходу  $Q$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial Q} = \frac{6\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q^2 \mu} \exp\left(-\frac{2\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q \mu}\right) \sqrt{\kappa t} \quad (4.10)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по репрессии на пласт  $(p_f - p_e)$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial (p_f - p_e)} = -\frac{6\pi k_e h}{Q \mu} \exp\left(-\frac{2\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q \mu}\right) \sqrt{\kappa t} \quad (4.11)$$

## 4.2. Описание численного алгоритма решения

Совмещение формулы Кёнинга с уравнениями Кирхгофа будет проведено следующим образом:

- 1) на текущем шаге по времени по имеющимся значениям полудлины трещин автоГРП предыдущего шага будут рассчитаны давления и расходы на каждой трещине;
- 2) на основе полученных значений приращения давления и расхода будет найдено приращение полудлины трещины  $dx_f$  на данном временном шаге по формуле (4.7);
- 3) по формуле  $x_f^{\text{current}} = x_f^{\text{last}} + dx_f$  будут найдены полудлины каждой из трещин на текущем временном шаге;
- 4) описанные действия будут проделаны до требуемого шага по времени (условия остановки).

## 4.3. Результаты моделирования

С помощью метода Ньютона проведено решение поставленной в первом разделе задачи. Рассматривались 3 одинаковые трещины гидроразрыва. Результаты представлены на рис. 4.1.

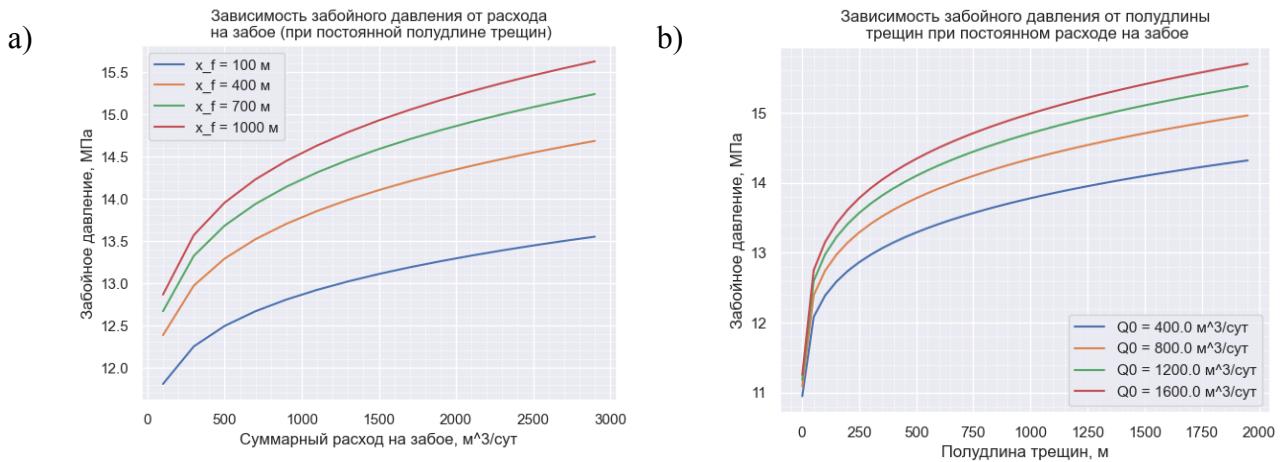


Рис.4.1. Зависимости забойного давления от основных параметров задачи: *a* — от суммарного расхода на забое; *b* — от полудлины трещин

Далее для учёта роста трещин автоГРП в длину было проведено совмещение уравнений законов Кирхгофа (3.1) и (3.2) с формулой Кёнинга

[45]:

$$x_f = \frac{q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi kh\Delta p}, \quad (4.12)$$

где  $x_f$  – полуудлина трещины автГРП;

$q$  – расход закачиваемой жидкости на трещине;

$\mu$  – вязкость закачиваемой жидкости;

$\kappa$  – пьезопроводность пласта;

$h$  – проницаемость пласта;

$h$  – эффективная проницаемая толщина (мощность) пласта;

$\Delta p$  – средняя по времени разница между пластовым и забойным давлениями;

$t$  – время закачки.

Результаты моделирования представлены на рис. 4.2.

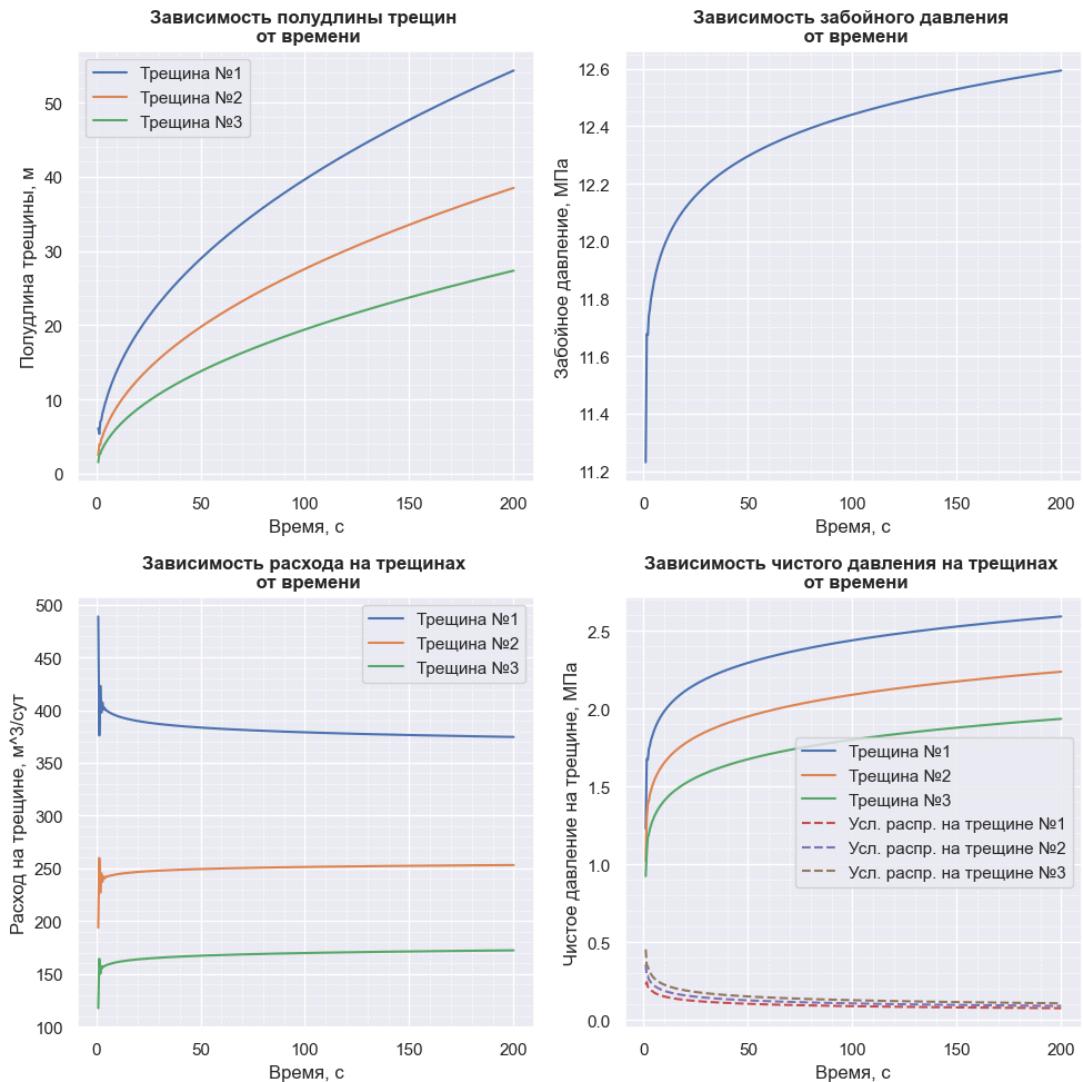


Рис.4.2. Результаты решения поставленной задачи

В проведённом численном эксперименте трещины отличаются друг от друга количеством и диаметром перфораций.

У трещины 1: количество перфораций 32, диаметр перфораций 0.02 м.

У трещины 2: количество перфораций 2, диаметр перфораций 0.01 м.

У трещины 3: количество перфораций 1, диаметр перфораций 0.01 м.

Код решения представлен по ссылке: [https://github.com/mualal/hydrofracturing/blob/master/notebooks/02\\_fractures\\_growth\\_with\\_Koning.ipynb](https://github.com/mualal/hydrofracturing/blob/master/notebooks/02_fractures_growth_with_Koning.ipynb)

Из графиков на рис. 4.2 видим, что большую часть потока забирает на себя трещина с лучшими перфорациями. Эта же трещина лидирует по скорости роста.

Также видим, что при росте трещин требуется всё большее забойное давление для того, чтобы поддерживать этот рост.

При выбранных входных параметрах построенной модели чистое давление в каждой из трещин существенно превышает давления критерия распространения, следовательно, при достаточно высоком забойном давлении все трещины будут расти одновременно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были проанализированы известные модели роста трещин гидроразрыва, для каждой из трещин автоГРП выбрана модель РКН, после чего была построена модель одновременного роста нескольких трещин автоГРП и модель перераспределения потоков между трещинами автоГРП.

Проведённый анализ показал, что на скорость роста трещины автоГРП существенно влияет качество перфораций на этой трещине.

На языке Python написан код для моделирования перераспределения потоков между трещинами автоГРП и построены графики зависимости полудлины трещин автоГРП от времени, зависимости забойного давления от времени, расходов и чистого давления на каждой из трещин от времени.

Сделан вывод, что для поддержания роста трещин автоГРП требуется увеличение забойного давления, которое влечёт за собой увеличение чистого давления на каждой из трещин и дальнейшее увеличение длины каждой из трещин автоГРП.

В дальнейшем планируется учесть возможную остановку роста одной или нескольких трещин автоГРП из-за ухудшения фильтрационных свойств на ней

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- ГРП** Гидроразрыв пласта  
**ЛУМР** Линейно-упругая механика разрушения  
**МКЭ** Метод конечных элементов  
**KGD** Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-дeКлерка  
**PKN** Модель Перкинса-Керна-Нордгрена

## СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

**автоГРП** — эффект самопроизвольного роста трещин вследствие закачки жидкости под высоким давлением

**гидроразрыв пласта (ГРП)** — метод повышения нефтеотдачи за счёт образования трещин в пласте путём закачки жидкости выше давления разрыва породы

**репрессия** — разность между забойным и текущим пластовым давлениями

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Афанасьев И. С., Тимонов А. В., Судеев И. В., Мусабиров Т. Р., Степанов М. А., Колонских А. В., Галеев Р. Р. Анализ применения и перспективы дальнейшего использования горизонтальных скважин с множественными трещинами ГРП на Приобском месторождении. — SPE 162031, 2012.
2. Базыров И. Ш. Контроль и регулирование роста техногенных трещин при вытеснении нефти из низкопроницаемых коллекторов. — Дис. канд. тех. наук, 2020.
3. Базыров И. Ш., Шель Е. В., Хасанов М. М. Анализ эффективности заводнения низкопроницаемых коллекторов нагнетательными горизонтальными скважинами с поперечными трещинами многостадийного ГРП. — PROнефть, сентябрь 2020. — DOI 10.7868/S258773992002007X.
4. Байкин А. Н. Динамика трещины гидроразрыва пласта в неоднородной пороупругой среде. — Дис. канд. тех. наук, 2016.
5. Байков В. А., Давлетбаев А. Я., Асмандияров Р. Н., Усманов Т. С., Степанова З. Ю. Специальные гидродинамические исследования для мониторинга за развитием трещин ГРП на нагнетательных скважинах. — Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело» №1, 2011. — С. 65-75.
6. Давлетбаев А. Я., Байков В. А., Бикбулатова Г. Р., Асмандияров Р. Н., Назаргалин Э. Р., Слабецкий А. А., Сергейчев А. В., Нуриев Р. И. Промысловые исследования по изучению самопроизвольного развития техногенных трещин в нагнетательных скважинах. — SPE-171232-MS, 2014.
7. Есипов Д. В., Курнаков Д. С., Латин В. Н., Чёрный С. Г. Математические модели гидроразрыва пласта. — Вычислительные технологии, том 19, №2, 2014. — С. 33-61.
8. Кабанова П. К. Моделирование давления инициации трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине в пороупругой постановке. — Магистерская диссертация, 2019.
9. Калинин С. А., Байкин А. Н., Абдуллин Р. Ф., Старовойтова Б. Н., Базыров И. Ш., Копейкин Р. Р., Головин С. В., Кичигин Е. Н. Анализ слияния трещин автоГРП в рядной системе разработки с помощью математического моделирования. — Нефтяное хозяйство, 12'2022. — С. 40-45.

10. Логвинюк А. В. Комплексный анализ и моделирование разработки Приобского месторождения для оптимизации системы поддержания пластового давления. — Магистерская диссертация, 2019.
11. Лойцянский Л. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987.
12. Мальцев В. В., Асмандияров Р. Н., Байков В. А., Усманов Т. С., Давлетбаев А. Я. Исследование развития трещин автоГРП на опытном участке Приобского месторождения с линейной системой разработки. — Нефтяное хозяйство №5, 2012. — С. 70-73.
13. Рыбаковская А. А. Поиск полных напряжений на скважине/трещине в бесконечном пласте в пороупругой постановке. — Магистерская диссертация, 2021.
14. Ткаченко Д. Р. Анализ влияния режима работы нагнетательной скважины на рост трещины автоГРП. — Магистерская диссертация, 2020.
15. Черепанов Г. Механика хрупкого разрушения. — М: Наука, 1974. — 640 с.
16. Шель Е. В., Кабанова П. К., Ткаченко Д. Р., Базыров И. Ш., Логвинюк А. В. Моделирование инициации и распространения трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине для нетрещиноватых терригенных пород на примере Приобского месторождения. — PROнефть, 2020.
17. Шель Е. В., Падерин Г. В. Модель для экспресс-оценок дизайна ГРП с использованием приближённого аналитического решения. — PROнефть №4, 2017. — С. 40-43.
18. Якупов И. Я., Егоров Е. Л., Родионова И. И., Мироненко А. А., Искеевич И. Г., Мирошниченко В. П., Сергейчев А. В. Разработка низкопроницаемых объектов Приобского месторождения в условиях образования техногенных трещин автоГРП. — Экспозиция Нефть Газ №5 (90), 2022.
19. Курс лекций «Гидроразрыв пласта», читаемый на магистерской программе «Нефтяной инжиниринг и математическое моделирование» в Новосибирском государственном университете. — URL: [https://www.youtube.com/playlist?list=PLipUmK\\_65GXEpFTHhfJBaiiv7XiwMg-PM](https://www.youtube.com/playlist?list=PLipUmK_65GXEpFTHhfJBaiiv7XiwMg-PM) (дата обращения: 27.05.2023).
20. Репозиторий с конспектом лекций курса «Гидроразрыв пласта», который читается на магистерской программе «Нефтяной инжиниринг и математическое моделирование» в Новосибирском государственном университете. — URL: <https://github.com/mualal/hydrofracturing> (дата обращения: 27.05.2023).

21. Сайт с дополнительными материалами по моделированию гидроразрыва пласта (создан на основе курса лекций «Гидроразрыв пласта», который читается на магистерской программе «Нефтяной инжиниринг и математическое моделирование» в Новосибирском государственном университете). — URL: <https://mualal.github.io/hydrofracturing/> (дата обращения: 27.05.2023).
22. *Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J.* Computer simulation of hydraulic fractures. — International Journal of Rock Mechanics, Mining Sciences №5, 2007. — P. 739-757.
23. *Barenblatt G. I.* The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. — Advances in Applied Mechanics, 1962. — P. 55-129.
24. *Bessmertnykh A. O., Dontsov E. V., Ballarini R.* A semi-infinite hydraulic fracture driven by a Herschel-Bulkley fluid. — J. Appl. Mech., 86:121008, 2019.
25. *Cramer D. D.* The Application of Limited-Entry Techniques in Massive Hydraulic Fracturing Treatments. — SPE 16189, 1987. — P. 29-46.
26. *Crouch S., Starfield A.* Boundary element methods in solid mechanics. — London: George Allen, Unwin, 1983.
27. *Crump J. B., Conway M. W.* Effects of Perforation-Entry Friction on Bottomhole Treating Analysis. — Journal of Petroleum Technology, August 1988.
28. *Dontsov E. V.* An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. — R. Soc. open sci., 3:160737, 2016.
29. *Dontsov E. V.* An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. — Int. J. Fract., 205, 2017. — 221-237.
30. *Dontsov E. V.* Analysis of a constant height hydraulic fracture. — 2021. — arXiv: 2110.13088 [physics.geo-ph].
31. *Dontsov E. V., Kresse O.* A semi-infinite hydraulic fracture with leak-off driven by a power-law fluid. — J. Fluid Mech., 837:210–229, 2018.
32. *Dontsov E. V., Peirce A. P.* An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness. — Elsevier, 2015.
33. *Dontsov E.* Tip region of a hydraulic fracture driven by a laminar-to-turbulent fluid flow. — J. Fluid. Mech., 797:R2, 2016.
34. *Economides M., Oligney R., Valkó P.* Unified Fracture Design. Bridging the Gap Between Theory and Practice. — Alvin, Texas: Orsa Press, 2002. — 260 p.

35. *Elbel J. L., Piggott A. R., Mack M. G.* Numerical Modeling of Multilayer Fracture Treatments. — SPE 23982, 1992.
36. *Garagash D., Detournay E.* The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium. — *J. Appl. Mech.*, 67:183–192, 2000.
37. *Griffith A. A.* The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. — *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1921. — P. 163-198.
38. *Hagoort J.* Waterflood-induced hydraulic fracturing. — PhD. Thesis, Delft Technical University, 1981.
39. *Hagoort J., Weatherill B. D., Settari A.* Modeling the Propagation of Waterflood-Induced Hydraulic Fractures. — SPE, 1980.
40. *Irwin G. R.* Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. — *J. Appl. Mech.*, 1957. — P. 361-364.
41. *Kabanova P. A., Shel E. V.* Modeling of Water-Induced Fracture Growth Pressure Using Poroelastic Approach. — ECMOR XVII – 17th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 2020.
42. *Kanin E. A., Garagash D. I., Osiptsov A. A.* The near-tip region of a hydraulic fracture with pressure-dependent leak-off and leak-in. — *Journal of Fluid Mechanics*, 892:A31, 2020.
43. *Karter R. D.* Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area. — Appendix of “Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension” by Howard G.C, Fast C.R., 1957. — P. 261-268.
44. *Khristianovich S. A., Zheltov Y. P.* Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids. — Rome, Italy: In Proc.4th World Petroleum Congress, vol.2, 1955. — P. 579–586.
45. *Koning E. J. L.* Fractured water-injection wells. Analytical modelling of fracture propagation. — Petroleum Development Oman LLC, 1985.
46. *Long G., Liu S., Xu G., Wong S.-W.* Modeling of Perforation Erosion for Hydraulic Fracturing Applications. — SPE-174959-MS, 2015.
47. *Madyarova M. V.* Fluid-driven penny-shaped fracture in elastic medium. — University of Minnesota, Minneapolis: Master’s thesis, 2003.
48. *Moukhtari F. E., Lecampion B.* A semi-infinite hydraulic fracture driven by a shear-thinning fluid. — *Journal of Fluid Mechanics*, 838:573–605, 2018.
49. *Nordgren R. P.* Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture. — SPE 89, August 1972. — P. 306-314.

50. *Perkins T. K., Gonzalez J. A.* The Effect of Thermoelastic Stresses on Injection Well Fracturing. — SPE, February 1985.
51. *Perkins T., Kern L.* Widths of hydraulic fractures. — SPE 89, September 1961. — P. 937 – 949.
52. *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. — Phil. Trans. Roy. Soc., 174, Papers, vol. 2, 1883. — P. 935 - 982.
53. *Rice J.* Mathematical analysis in the mechanics of fracture. — New York: In: Liebowitz H (ed) Fracture: an advanced treatise, Chap 3, vol II. Academic Press, 1968. — P. 191-311.
54. *Savitski A. A., Detournay E.* Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions. — Int. J. Solids Struct, Vol. 39, no. 26, 2002. — P. 6311–6337.
55. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of Elasticity. — New York: McGrawhill Book Company Inc., 1951.
56. *Trimonova M., Dubinya N.* The Main Tendencies of Water-Induced Hydraulic Fracture Propagation. — SPE-176638-MS, 2015.
57. *Valov A. V., Baykin A. N., Dontsov E. V.* Modeling geometry of planar hydraulic fractures using the Planar 3D ILSA approach. — Novosibirsk, 2019. — URL: [http://conf.ict.nsc.ru/files/conferences/frac2019/529244/Presentation\\_Valov.pdf](http://conf.ict.nsc.ru/files/conferences/frac2019/529244/Presentation_Valov.pdf) (visited on 27.05.2023).
58. *Valov A. V., Dontsov E. V., Baykin A. N., Golovin S. V.* An implicit level set algorithm for hydraulic fracturing with a stress-layer asymptote. — 2023. — URL: <https://arxiv.org/pdf/2305.13714.pdf> (visited on 27.05.2023).
59. View FrackOptima's Help. Software and Services for Optimal Hydraulic Fracturing Treatments. — URL: <http://www.frackoptima.com/userguide/index.html> (дата обращения: 27.05.2023).

## Приложение 1

### Код для расчёта потоков на каждой из трещин автоГРП

```
import numpy as np
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
sns.set_theme()
from tqdm import tqdm
```

```
# размеры шрифтов на графиках matplotlib

SMALL_SIZE = 12
MEDIUM_SIZE = 16
BIGGER_SIZE = 16

plt.rc('font', size=MEDIUM_SIZE)
plt.rc('axes', titlesize=SMALL_SIZE)
plt.rc('axes', labelsize=MEDIUM_SIZE)
plt.rc('xtick', labelsize=SMALL_SIZE)
plt.rc('ytick', labelsize=SMALL_SIZE)
plt.rc('legend', fontsize=SMALL_SIZE)
plt.rc('figure', titlesize=BIGGER_SIZE)
```

```
fracs_count = 4 # количество трещин
K_c = 1e6 # Па*m^(1/2) трещиностойкость породы
```

```
# параметры задачи в символьном виде

# суммарный расход на забое и забойное давление
Q_0, p_0 = symbols('Q0 p0', real=True)

# расходы на каждой из трещин
Q = np.array(symbols(f'Q1:{fracs_count+1}', real=True))
# полуудлина каждой из трещин
x_f = np.array(symbols(f'x_f1:{fracs_count+1}', real=True))
# модуль плоской деформации породы вблизи каждой из трещин
E = np.array(symbols(f'E1:{fracs_count+1}', real=True))
# мощность продуктивной зоны для каждой из трещин (высота трещин)
h = np.array(symbols(f'h1:{fracs_count+1}', real=True))
# реологические параметры жидкости
K, n = symbols('K n', real=True)
# проницаемость пласта
k_e = symbols('k_e', real=True)
# пластовое давление
```

```

p_e = symbols('p_e', real=True)
# пористость пласта
phi_e = symbols('phi_e', real=True)
# общая сжимаемость
c_t = symbols('c_t', real=True)
# время
t = symbols('t', real=True)
# чистые давления на каждой из трещин
p_frac_net = np.array(symbols(f'p_frac_net1:{fracs_count+1}', real=True))

# количество перфораций на каждой из трещин
n_p = np.array(symbols(f'n_p1:{fracs_count+1}', real=True))
# диаметры перфораций на каждой из трещин
d_p = np.array(symbols(f'd_p1:{fracs_count+1}', real=True))
# коэффициент эрозии на каждой из трещин
C_d = np.array(symbols(f'C_d1:{fracs_count+1}', real=True))
# средняя плотность смеси
rho_s = symbols('rho_s', real=True)

# радиусы участков трубы к каждой из трещин
R = np.array(symbols(f'R1:{fracs_count+1}', real=True))
# длина участков трубы, ведущих к каждой из трещин
L = np.array(symbols(f'L1:{fracs_count+1}', real=True))

# средняя скорость на рассматриваемом участке трубы к каждой из трещин
u_m = np.array(symbols(f'u_m1:{fracs_count+1}', real=True))
# давление закрытия для каждой из трещин
sigma_min = symbols(f'sigma_min1:{fracs_count+1}')

# приращение расхода на каждой из трещин
# для пошагового (во времени) использования формулы Кёнинга
dQ = np.array(symbols(f'dQ1:{fracs_count+1}', real=True))
# приращения давлений на каждой из трещин
dp_f = np.array(symbols(f'dp_net1:{fracs_count+1}', real=True))
# шаг по времени
dt = symbols('dt', real=True)^^I

```

```

# чистое давление в трещинах (без утечек)
def p_net_without_leak_off():
    V = h * (2 * x_f) * K_c * (S.Pi*h)**(1/2) / E
    a = (((n + 3) * (2 * n + 1)**n * K * E**(2*n+2)) / \
          (S.Pi * 2**(2 * n) * n**n * phi**n * \
          h**(3 * n + 3))) ** (1 / (2 * n + 3))
    # чистое давление на каждой из трещин
    p_net = a * Q**n/(2*n+3) * V**(1/(2*n+3))
    return p_net

# чистое давление в трещинах (с утечками и доминированием трещиностойкости)
def p_net_with_leak_off():
    p_net = 2**3/2 * K_c / (S.Pi * h)**(1/2)
    return p_net

```

```

# падение давления на перфорациях
def delta_p_perf():
    # падение давления на перфорациях на каждой из трещин
    delta_p_perf = 8 * rho_s / \
        (S.Pi**2 * C_d**2 * n_p**2 * d_p**4) * Q * abs(Q)
    return delta_p_perf

# падение давления на трение в трубе
def delta_p_fric():
    for i, _ in enumerate(u_m):
        u_m[i] = (Q_0 - sum([Q[j] for j in range(i)])) / (S.Pi * R[i]**2)
    # падение давления на трение в трубе для каждой из трещин
    delta_p_fric = 8 * (K / R) * (u_m / R) * L
    return delta_p_fric

```

```

# решатель уравнений Кирхгофа

def kirchhoff_solver(parameter_values):
    # массив со всеми уравнениями законов Кирхгофа
    all_eqns = np.array([])

    # добавляем левую часть уравнений второго закона Кирхгофа
    # в массив all_eqns
    for i in range(fracs_count):
        all_eqns = np.append(all_eqns, p_0 - sigma_min[i] - \
            p_net_with_leak_off()[i] - \
            delta_p_perf()[i] - \
            sum([delta_p_fric()[j] for j in range(i+1)]))

    # добавляем левую часть уравнения первого закона Кирхгофа
    # в массив all_eqns
    all_eqns = np.append(all_eqns, Q_0 - sum(Q))

    # матрица Якоби
    J = np.zeros(shape=(fracs_count+1, fracs_count+1), dtype=object)
    for i, _ in enumerate(all_eqns):
        for j, _ in enumerate(Q):
            J[i, j] = diff(all_eqns[i], Q[j])
        J[i, -1] = diff(all_eqns[i], p_0)
    J_sym = Matrix(J)
    #display(J_sym)

    # начальные приближения числовых значений неизвестных параметров задачи
    solution_values = {}
    iterative_history = []
    for i in range(fracs_count):
        # расходы на каждой из трещин (начальное приближение)
        solution_values[Q[i]] = N(Q_0.subs(parameter_values)/fracs_count)
    # забойное давление (начальное приближение)
    solution_values[p_0] = N(sigma_min[0].subs(parameter_values))

```

```

# вектор решения
solution_vector = np.array(list(N(Matrix(Q).subs(solution_values)))) + \
    [N(p_0.subs(solution_values))],
    dtype='float64').reshape(fracs_count+1,1)
iterative_history.append(solution_vector.flatten())
# предыдущий вектор решения
last_solution_vector = solution_vector - 100

# реализация метода Ньютона
while np.linalg.norm(solution_vector - last_solution_vector) > 1e-4:
    # обновляем предыдущий вектор решения
    last_solution_vector = solution_vector.copy()
    # матрица Якоби
    #print(N(J_sym.subs({**parameter_values, **solution_values})))
    J = np.array(N(J_sym.subs({**parameter_values, **solution_values})),
        dtype='float64')
    # вектор остатков
    residual_vector = np.array(
        N(Matrix(all_eqns).subs({**parameter_values, **solution_values})),
        dtype='float64'
    )
    # новый вектор решения
    solution_vector -= np.matmul(np.linalg.inv(J), residual_vector)
    iterative_history.append(solution_vector.flatten())
    for i, val in enumerate(solution_vector):
        if val < 0:
            solution_vector[i] = 1e-21
    # обновление значений текущего вектора решения
    # в словаре solution_values
    for i in range(fracs_count):
        solution_values[Q[i]] = solution_vector.reshape(fracs_count+1,)[i]
        solution_values[p_0] = solution_vector.reshape(fracs_count+1,)[-1]
return solution_values, iterative_history^I

```

```

# проверяю работу решателя уравнений Кирхгофа

parameter_values = {
    # расход на забое, м^3/с
    Q_0: 800 / 86400,
    # первый реологический параметр жидкости (вязкость воды), Па*c
    K: 0.001,
    # второй реологический параметр жидкости (ニュтоновская жидкость - вода)
    n: 1,
    # плотность закачиваемой жидкости (воды), кг/м^3
    rho_s: 1000,
    # проницаемость пласта, м^2
    k_e: 1e-15,
    # пористость пласта
    phi_e: 0.2,
    # общая сжимаемость, Па^(-1)
}

```

```

    c_t: 2.2e-9,
    # пластовое давление, Па
    p_e: 2.5e7
}

for i in range(fracs_count):
    # полудлина трещины, м
    parameter_values[x_f[i]] = 1
    # модули плоской деформации породы, Па
    parameter_values[E[i]] = 1e10
    # мощности продуктивной зоны, м
    parameter_values[h[i]] = 15
    # количества перфораций
    parameter_values[n_p[i]] = 32
    # диаметры перфораций, м
    parameter_values[d_p[i]] = 0.02
    # безразмерные коэффициенты эрозии
    parameter_values[C_d[i]] = 0.5
    # радиусы участков трубы между i-ой и (i-1)-ой трещинами, м
    parameter_values[R[i]] = 0.08
    # длины участков трубы между i-ой и (i-1)-ой трещинами, м
    parameter_values[L[i]] = 100
    # давления закрытия трещин, Па
    parameter_values[sigma_min[i]] = 4e7

solution_values, iterative_history = kirchhoff_solver(parameter_values)
display(solution_values)

```

```

# построение графиков итерационного процесса решения

fig0, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,5))

for ii in range(fracs_count):
    axs[0].plot([i for i in range(len(iterative_history))],
                [item[ii]*86400 for item in iterative_history],
                label=f'Трещина №{ii+1}')
    axs[0].scatter([i for i in range(len(iterative_history))],
                  [item[ii]*86400 for item in iterative_history])
axs[0].set_title('Итеративный процесс поиска\nрасходов на трещинах',
                 weight='bold',
                 size=15)
axs[0].set_xlabel('Количество итераций')
axs[0].set_ylabel('Оценка расхода на трещине, м$^3$/сут')
axs[0].legend(bbox_to_anchor=(0.5, 0.72), ncol=1)

axs[1].plot([i for i in range(len(iterative_history))],
            [item[fracs_count]/1e6 for item in iterative_history])
axs[1].scatter([i for i in range(len(iterative_history))],
              [item[fracs_count]/1e6 for item in iterative_history])
axs[1].set_title('Итеративный процесс поиска\nзабойного давления',
                 weight='bold',

```

```
        size=15)
axs[1].set_xlabel('Количество итераций')
axs[1].set_ylabel('Оценка забойного давления, МПа')

fig0.tight_layout()

fig0.savefig('myimage.jpg', dpi=300)
```

**Приложение 2****Код для моделирования роста трещин автоГРП в длину**

```
# формула Кёнинга
def koning_formula():
    kappa = k_e / (phi_e * K * c_t)
    x_frac = Q * K * ((S.Pi * kappa * t)**(1/2)) / \
              (2 * S.Pi * k_e * h * (p_frac_net + sigma_min - p_e))
    return x_frac
```