

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-Механический институт

Работа допущена к защите
Директор высшей школы
_____ А.М. Кривцов
«_____» _____ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
РАБОТА МАГИСТРА
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ МЕЖДУ
ТРЕЩИНАМИ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование
Направленность (профиль) 01.04.03_04 Математическое моделирование
процессов нефтегазодобычи

Выполнил
студент гр. 5040103/10401

А.А. Муравцев

Руководитель
доцент, к.т.н.

С.А. Калинин

Консультант
должность, степень

И.О. Фамилия

Консультант
по нормоконтролю

И.О. Фамилия

Санкт-Петербург
2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1. Общие положения.....	4
Глава 2. Модели трещины гидроразрыва пласта и их основные компоненты	5
2.1 Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка.....	8
2.2 Модель радиальной трещины ГРП.....	10
2.3 Модель Перкинса-Керна-Нордгрена	11
Глава 3. Решение модели РКН	13
Заключение	14
Список использованных источников	15

ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

ГЛАВА 2. МОДЕЛИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА И ИХ ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ

В настоящее время в симуляторах для моделирования процесса ГРП нефтяные компании используют модели Pseudo3D, Planar3D и Full3D.

Наиболее общая модель Full3D позволяет моделировать сложные варианты развития трещины (учитывается возможность изменения направления распространения трещины и слоистость породы), решение проводится численно с применением метода конечных элементов (МКЭ), но эта модель используется редко, так как имеет низкую скорость расчёта.

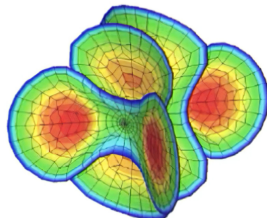
В модели Planar3D предполагается, что направление минимальных горизонтальных напряжений в пласте не изменяется в зависимости от координаты, то есть трещина распространяется в одной плоскости. В то же время модель Planar3D учитывает слоистость породы и не использует приближение малости высоты в сравнении с длиной трещины, то есть учитывает двумерное течение жидкости.

Модель Pseudo3D использует предположение о том, что высота трещины много меньше её длины, то есть рассматривается случай одномерного течения жидкости.

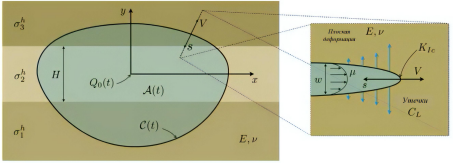
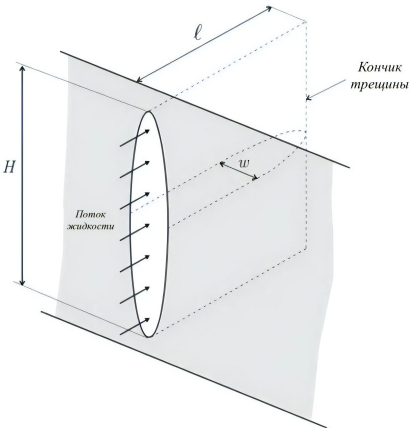
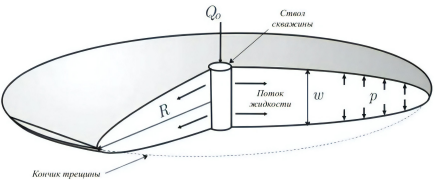
Каждая из моделей Pseudo3D, Planar3D и Full3D плохо поддаётся аналитическому анализу. Однако при введении дополнительных предположений и допущений модель Planar3D преобразуется в хорошо известные модели (исторически были изучены раньше модели Planar3D), для которых можно провести аналитический анализ (найти раскрытие, давление в зависимости от координаты и времени). В табл.2.1 представлены основные модели трещины ГРП с их допущениями.

Таблица 2.1

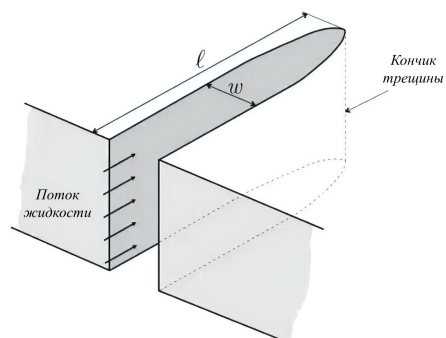
Допущения основных моделей трещины ГРП

Модель	Допущения	Схематичный рисунок
Full3D	Отсутствуют; учёт большого количества физических эффектов позволяет очень точно (часто излишне точно) описать распространение трещины	

Продолжение табл. 2.1

Модель	Допущения	Схематичный рисунок
Planar3D	Одна трещина, распространяющаяся в плоскости вдоль направления максимальных горизонтальных напряжений; среда однородна по E и ν ; законы упругости рассматриваются в рамках линейно-упругой механики разрушения; ньютоновская жидкость с вязкостью μ , отсутствует fluid lag	
Pseudo3D	Одномерное течение жидкости	
Перкинса-Керна-Нордгрена (PKN)	Эллиптическое вертикальное сечение; плоская деформация в вертикальной плоскости	
Радиальная	Проверить	

Продолжение табл. 2.1

Модель	Допущения	Схематичный рисунок
Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка (KGD)	Прямоугольное вертикальное сечение; плоская деформация в горизонтальной плоскости	

Исторически первой С.А.Христиановичем и Ю.П.Желтовым (и независимо от них Гиртсма и деКлерком) в 1955 году была разработана модель KGD, которая хорошо описывает поведение трещины, распространяющейся из протяжённого перфорированного интервала, на ранних временах её распространения.

Также была разработана модель радиальной трещины ГРП, которая реализуется при гидроразрыве относительно мощных однородных пластов из ограниченных (точечных) перфорированных интервалов.

Позже в 1961 году исследователями Перкинсом и Керном была разработана более распространённая модель Перкинса-Керна, которая хорошо описывает поведение трещины, распространяющейся из протяжённого перфорированного интервала, на поздних временах её распространения. В дальнейшем Нордгреном к модели Перкинса-Керна были добавлены эффекты потери жидкости.

Любая модель трещины гидроразрыва пласта состоит из нескольких основных компонентов:

- 1) уравнения баланса жидкости с учётом утечек;
- 2) модели жидкости;
- 3) уравнения упругости;
- 4) условия распространения;
- 5) модели транспорта проппанта.

Далее будут представлены математические модели трещины KGD, радиальной и PKN.

2.1. Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка

В первой модели гидроразрыва пласта, разработанной С.А.Христиановичем и Ю.П.Желтовым, рассматривается трещина одной и той же ширины на любой вертикальной координате в пределах фиксированной толщины пласта h . Другими словами, используется допущение о плоской деформации в каждой горизонтальной плоскости (это допущение более приемлемо для коротких трещин, у которых $2x_f < h$, где x_f – полудлина трещины). В основе лежит физическая гипотеза, что поверхности трещины свободно скользят по кровле и подошве пласта.

В результате получается трещина прямоугольного вертикального сечения, а ширина трещины рассматривается как функция координаты x .

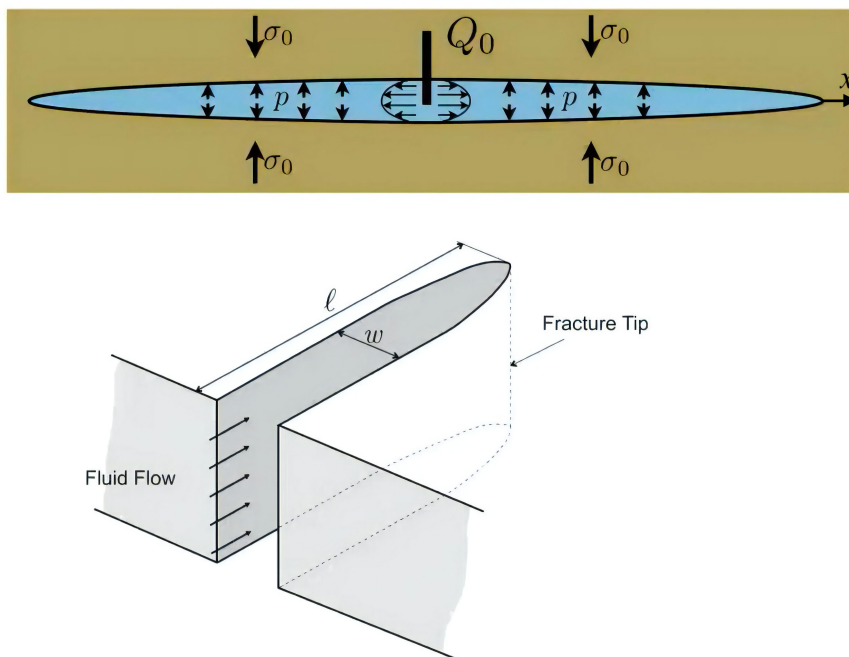


Рис.2.1. Геометрия трещины KGD

Для трещины KGD верно равенство, выражающее закон сохранения объёма жидкости в малом выделенном объёме:

$$w(t + dt)dx = w(t)dx + q_x(x)dt - q_x(x + dx)dt - 2gdxdt \quad (2.1)$$

Откуда получаем уравнение баланса жидкости:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + 2g = Q_0(t)\delta(x) \quad (2.2)$$

Из модели Картера скорость утечек:

$$g = \frac{C_l}{\sqrt{t - t_0(x)}} \quad (2.3)$$

Таким образом, уравнение баланса жидкости с учётом утечек для трещины KGD запишется в следующей форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \quad (2.4)$$

где $C' = 2C_l$.

В модели трещины KGD рассматривается одномерное течение жидкости вдоль трещины, то есть имеется только одна компонента вектора скорости, которая изменяется при движении:

$$v = v_x(y) \quad (2.5)$$

Из уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (2.6)$$

Для ньютоновской жидкости:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.7)$$

Дополнительно ставим условие неприлипания на границе:

$$v|_{y=\pm w/2} = 0 \quad (2.8)$$

Общее решение:

$$v = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + Ay + B \quad (2.9)$$

Решение после учёта граничных условий:

$$v = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{w^2 - 4y^2}{8\mu} \quad (2.10)$$

Суммарный поток (расход):

$$q = \int_{-w/2}^{w/2} v(y) dy = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.11)$$

Уравнение упругости для трещины KGD запишется в следующей форме:

$$p(x,t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s)ds}{(x-s)^2}, \quad (2.12)$$

где $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$.

Условие распространения трещины KGD можно представить в виде:

$$\lim_{x \rightarrow l} \frac{w}{(l-x)^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'}{E'}, & \text{если } v > 0 \\ \frac{K'_I}{E'}, & \text{если } v = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Таким образом, система уравнений модели трещины KGD запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ p(x,t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s)ds}{(x-s)^2}, \\ \lim_{x \rightarrow l} \frac{w}{(l-x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (2.14)$$

где $C' = 2C_l$, $\mu' = 12\mu$, $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$, $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$.

2.2. Модель радиальной трещины ГРП

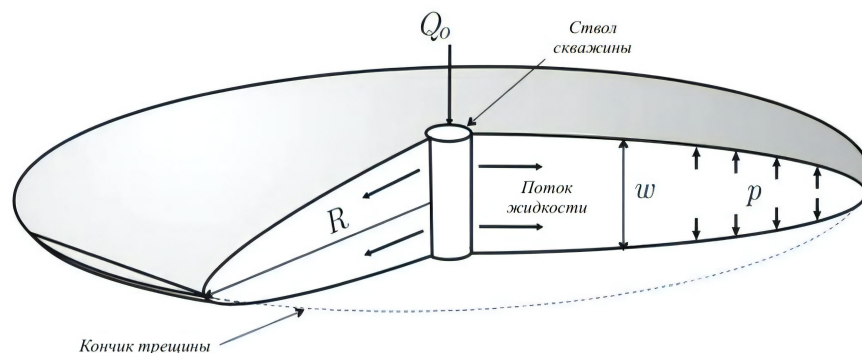


Рис.2.2. Геометрия радиальной трещины

Система уравнений модели радиальной трещины запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq) + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} = Q_0 \delta(r), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_n}{\partial r}, \\ p_n(r, t) = -\frac{E'}{2\pi R} \int_0^R M\left(\frac{r}{R}, \frac{r'}{R}\right) \frac{\partial w(r', t)}{\partial r'} dr', \\ \lim_{r \rightarrow R} \frac{w}{(R - r)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (2.15)$$

где $C' = 2C_l$, $\mu' = 12\mu$, $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$, $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$.

2.3. Модель Перкинса-Керна-Нордгрена

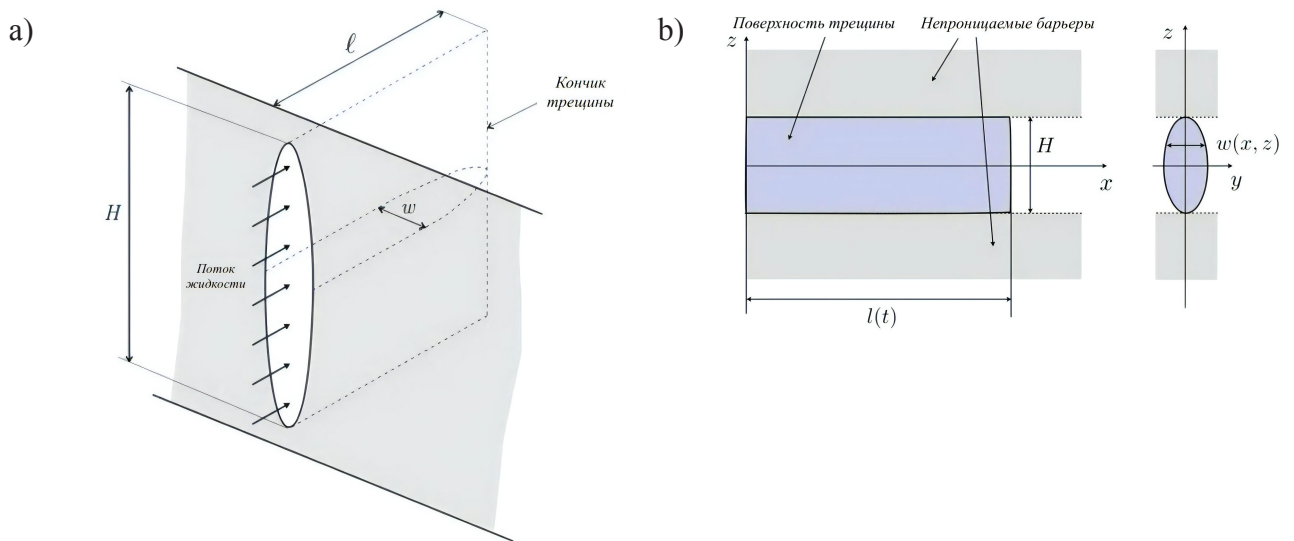


Рис.2.3. Геометрия трещины PKN: *a* — в 3D; *b* — проекции

В модели PKN принимается, что условие плоской деформации сохраняется в каждой вертикальной плоскости, нормальной к направлению распространения; однако, в отличие от ситуации строгой плоской деформации, состояние напряжений и деформаций не точно одинаково в следующих одна за другой плоскостях. Иными словами, в этой модели используется допущение квази-плоской деформации, причём плоскость отсчёта вертикальна и нормальна к направлению распространения. В модели PKN пренебрегается изменениями

давления вдоль вертикальной координаты, а чистое давление p_{net} в трещине рассматривается как функция латеральной координаты x .

Система уравнений модели PKN запишется в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \\ \bar{q}_x = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ p(x) = -\frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-l(t)}^{l(t)} \bar{w}(x') \frac{dG(2(x' - x)/H)}{dx'} dx', \\ \lim_{x \rightarrow l} \frac{w}{(l - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

где $C' = 2C_l$, $\mu' = 12\mu$, $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$, $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$.

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ РКН

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ