

**Общая информация.**

Видеолекции курса доступны по ссылке: [GO TO HYDRAULIC FRACTURING](#).

Приближённое полуаналитическое решение для радиальной трещины ГРП: [GO TO CLOSED-FORM SOLUTION IN MATLAB](#).

Оригинальная лекция Энтони Пирса: [GO TO LECTURE RECORDING](#).

Дополнительные материалы по ГРП: [GO TO FRACKOPTIMA'S HELP](#).

## Содержание

<b>1 Лекция 16.02.2021 (Донцов Е.В.)</b>	<b>4</b>
1.1 Из чего состоит любая модель ГРП? Основные компоненты . . . . .	5
1.1.1 Модель утечки по Картеру . . . . .	6
1.1.2 Течение жидкости в трещине ГРП . . . . .	9
1.1.3 Равновесие (упругость) горной породы. Уравнение упругости . . . . .	10
<b>2 Лекция 02.03.2021 (Донцов Е.В.)</b>	<b>12</b>
2.1 Из чего состоит любая модель ГРП? Продолжение . . . . .	12
2.1.1 Равновесие (упругость) горной породы. Уравнение упругости . . . . .	12
2.1.2 Условие распространения трещины ГРП . . . . .	14
2.2 Математическая модель планарной трещины ГРП (planar3D) . . . . .	16
2.3 Краткий обзор упрощённых и полных моделей (геометрий) трещины ГРП . . . . .	18
2.3.1 Плоская трещина (модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-де Клерка)	18
2.3.2 Полубесконечная (semi-infinite) трещина и плоская трещина (KGD модель)	19
2.3.3 Модель Перкинса-Керна-Нордгрена (PKN модель) . . . . .	20
2.3.4 Модель радиальной трещины ГРП, псевдо-3D и планар-3D модели . . . . .	20
2.3.5 Multi-fracture и multi-well модели . . . . .	21
2.3.6 Более сложные модели . . . . .	22
2.4 Промежуточная систематизация материала лекций . . . . .	23
2.5 Математическая модель плоской трещины ГРП . . . . .	23
2.6 Математическая модель полубесконечной трещины ГРП . . . . .	24
<b>3 Лекция 09.03.2021 (Донцов Е.В.)</b>	<b>28</b>
3.1 Математическая модель полубесконечной трещины ГРП. Продолжение . . . . .	28
3.2 Математическая модель плоской трещины ГРП. Продолжение . . . . .	35
<b>4 Лекция 16.03.2021 (Донцов Е.В.)</b>	<b>46</b>
4.1 Математическая модель радиальной трещины ГРП . . . . .	46
4.2 Математическая модель Перкинса-Керна-Нордгрена (модель PKN) . . . . .	53
<b>5 Лекция 23.03.2021 (Донцов Е.В.)</b>	<b>64</b>
5.1 Математическая модель EP3D (Enhanced pseudo-3D model) . . . . .	64
5.2 Краткое повторение рассмотренных моделей . . . . .	70

<b>6 Лекция 02.04.2021 (Валов А.В.)</b>	<b>74</b>
6.1 Модель Planar3D ILSA . . . . .	74
6.1.1 Предположения модели . . . . .	74
6.1.2 Вспомогательные обозначения . . . . .	74
6.1.3 Основные уравнения . . . . .	74
6.1.4 Граничные условия . . . . .	75
6.1.5 Дискретизация области моделирования. Классификация элементов . . . . .	78
6.1.6 Дискретизация уравнений . . . . .	79
<b>7 Лекция 08.04.2021 (Валов А.В.)</b>	<b>81</b>
7.1 Модель Planar3D ILSA: дискретизация, поиск фронта, алгоритм . . . . .	81
7.1.1 Дискретизация уравнений. Продолжение . . . . .	81
7.1.2 Зачем вводили классификацию элементов? . . . . .	83
<b>8 Лекция 13.04.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>85</b>
8.1 Модель Planar3D Biot: постановка задачи, перенос граничных условий . . . . .	85
<b>9 Лекция 20.04.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>86</b>
9.1 Модель Planar3D Biot: слабая постановка, штраф, пороупругие эффекты . . . . .	86
<b>10 Лекция 27.04.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>87</b>
10.1 Перенос проппанта: постановка задачи, обезразмеривание, оседание . . . . .	87
<b>11 Лекция 30.04.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>88</b>
11.1 Перенос проппанта: осреднение, численный алгоритм, бриджинг . . . . .	88
<b>12 Лекция 11.05.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>89</b>
12.1 Моделирование течения жидкости в скважине . . . . .	89
12.1.1 Зачем моделировать скважину? . . . . .	89
12.1.2 Предположения модели . . . . .	91
12.1.3 Определяющие уравнения . . . . .	92
12.1.4 Численный алгоритм . . . . .	93
12.1.5 Вычисление средней скорости . . . . .	97
12.1.6 Средняя скорость для степенной жидкости . . . . .	98
12.1.7 Коэффициент трения Фаннинга для ламинарного и турбулентного течений	99
12.1.8 Расчёт давления . . . . .	103
12.2 Разделение потоков между трещинами . . . . .	106
12.2.1 Два закона Кирхгофа . . . . .	108
12.2.2 Давление на $i$ -ой трещине . . . . .	109
12.2.3 Падение давления на перфорациях . . . . .	111
12.2.4 Падение гидростатического давления . . . . .	112
12.2.5 Падение давления на трение . . . . .	112
12.2.6 Векторная форма . . . . .	113
12.2.7 Итеративная процедура решения . . . . .	114

12.2.8 Начальные приближения метода Ньютона . . . . .	114
12.2.9 Эффекты, связанные с распределением потоков . . . . .	115
12.3 Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине . . . . .	117
12.3.1 Введение . . . . .	117
12.3.2 Математическая модель: законы сохранения . . . . .	119
12.3.3 Математическая модель: граничные условия . . . . .	120
12.3.4 Примеры расчётов . . . . .	123
12.3.5 Заключение . . . . .	127
12.3.6 Список источников . . . . .	128
<b>13 Лекция 18.05.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>129</b>
13.1 Модели инициации трещины гидроразрыва . . . . .	129
13.1.1 Моделирование гидроразрыва . . . . .	129
13.1.2 Инициация трещины . . . . .	130
13.1.3 Расчёт напряжённо-деформированного состояния . . . . .	131
13.1.4 Численные решения уравнений упругого равновесия . . . . .	132
13.1.5 Приближённые решения (2D) . . . . .	133
13.1.6 Приближённые решения (3D) . . . . .	136
13.1.7 НДС для перфорированной скважины . . . . .	138
13.1.8 Примеры для перфорированной скважины . . . . .	139
13.1.9 Дополнительные эффекты . . . . .	140
13.1.10 Серийные численные расчёты . . . . .	142
13.1.11 Критерии инициации трещины . . . . .	145
13.1.12 Учёт эффекта размера . . . . .	147
<b>14 Условие задачи</b>	<b>150</b>
14.1 Законы Кирхгофа для перераспределения потоков между трещинами . . . . .	150
14.2 Формула для давления $p_{net,i}$ на $i$ -ой трещине . . . . .	150
14.3 Формула для падения давления $\Delta p_{perf,i}$ на перфорациях . . . . .	151
14.4 Формула для гидростатического давления $\Delta p_{h,i}$ . . . . .	151
14.5 Формула для падения давления $\Delta p_{fric,i}$ на трение . . . . .	151
14.6 Итеративная процедура решения с помощью метода Ньютона . . . . .	152

# Гидроразрыв пласта

## Конспект лекций и семинаров

Муравцев А.А.<sup>1</sup>      Донцов Е.В.<sup>2</sup>      Валов А.В.<sup>3</sup>      Байкин А.Н<sup>4</sup>

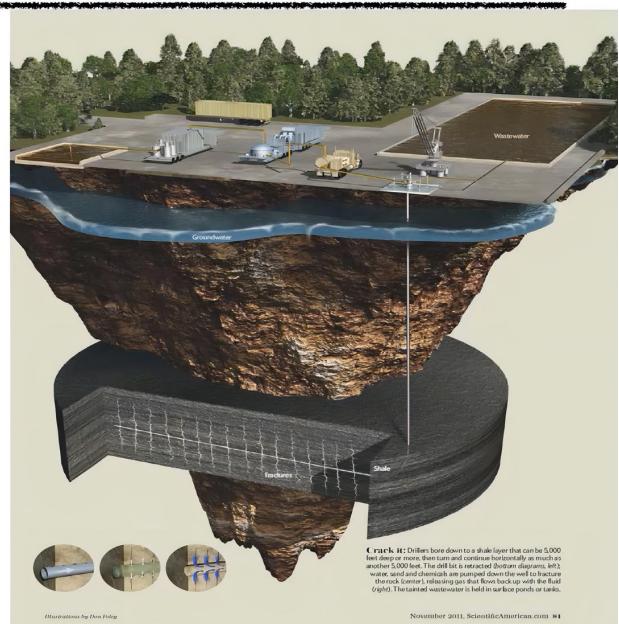
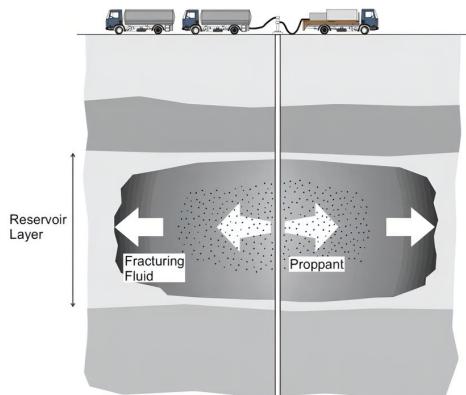
22 марта 2023 г.

### 1 Лекция 16.02.2021 (Донцов Е.В.)

План на сегодня: рассказать про основные компоненты моделирования ГРП (HF = hydraulic fracturing), про основные используемые уравнения и основные геометрии.

#### Hydraulic fracturing (HF)

- ▶ Essential components of HF modeling
- ▶ Governing equations
- ▶ Basic HF model geometries



В двух словах разница между conventional и unconventional:

- 1) conventional – то, что было, грубо говоря, до 2000-х годов – вертикальная скважина, пласт, рвём гидроразрывом пласта, обычно одна трещина;
- 2) unconventional – когда сланцы, например, то бурится горизонтальная скважина, проводится многостадийный ГРП (за одну стадию можем сделать несколько трещин (несколько портов),

<sup>1</sup>конспектирует; email: almuravcev@yandex.ru

<sup>2</sup>W.D. Von Gonten Laboratories, Houston, USA

<sup>3</sup>Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН

<sup>4</sup>Новосибирский государственный университет, Россия

затем поставить перегородку, сделать ещё несколько трещин (портов) и так далее); можем также сделать несколько скважин.

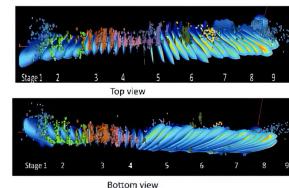
Концептуально с точки зрения математики разницы между conventional и unconventional практически нет. У нас либо одна трещина (conventional) или множество трещин (unconventional), т.е. с точки зрения моделирования unconventional моделировать дольше, сложнее. Но повторюсь, что концептуально основная физика везде одинакова.

## 1.1 Из чего состоит любая модель ГРП? Основные компоненты

Essential pieces of a hydraulic fracture model

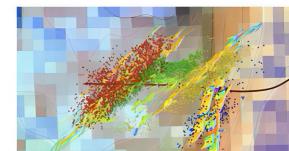
**1. Volume balance of the injected fluid (incompressible):**

$$\text{Volume injected} = \text{Fracture volume} + \text{leak-off}$$



**2. Fluid flow equations:**

Viscous pressure drop inside the fracture

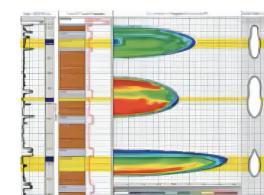


**3. Rock equilibrium (elasticity):**

$$\text{Fluid pressure} = \text{Stress} + \text{Stiffness} * \text{FracWidth}$$

**4. Propagation condition:**

Some parameter reaches a critical value near the front



**5. Proppant transport (not covered):**

Particles flow with fluid + gravitational settling

Основные компоненты любой модели гидроразрыва пласта:

- 1) закон сохранения жидкости; в 99% случаев предполагается, что жидкость несжимаема, тогда выполняется закон сохранения объёма; но бывают случаи сжимаемых жидкостей (например, когда ГРП делают газом или делают пенный ГРП), тогда выполняется закон сохранения массы, т.е. закачиваемый объём жидкости равен объёму жидкости в трещине плюс утечки (трещину ГРП делаем в пористом резервуаре, поэтому есть утечки из трещины в резервуар – в зависимости от пористости и других параметров утечки могут либо доминировать, либо нет: например, 90% закачиваемой жидкости может утекать в пласт или наоборот оставаться в трещине);
- 2) уравнение течения жидкости в трещине; допустим мы уже создали трещину в резервуаре (обычно она очень узкая и длинная: например, 1 сантиметр в ширину и порядка сотни метров в длину) и закачиваем в неё жидкость (которая часто бывает довольно вязкой), тогда у нас может быть существенное падение давления от скважины до кончика трещины (так как грубо говоря, всю эту жидкость нужно пропихнуть по всей трещине); необходимы уравнения течения жидкости в зависимости от реологии жидкости;
- 3) равновесие (упругость) горной породы; когда мы открываем трещину в упругом материале, то мы предполагаем, что порода линейно упругая (по крайней мере в первом приближении); чтобы открыть трещину (т.е. просто открыть (как надуть шарик), а не распространить), нам

необходимо приложить какое-то давление на стенки трещины (это давление и есть давление жидкости внутри трещины); у нас получается некое распределение давления внутри трещины, и оно как-то неравномерно открывает эту трещину; чем сильнее мы хотим открыть трещину, тем больше должно быть давление жидкости внутри;

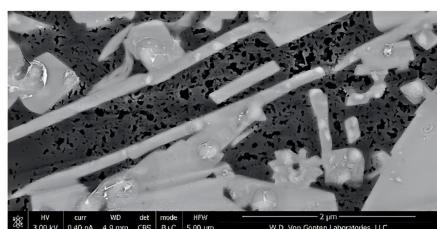
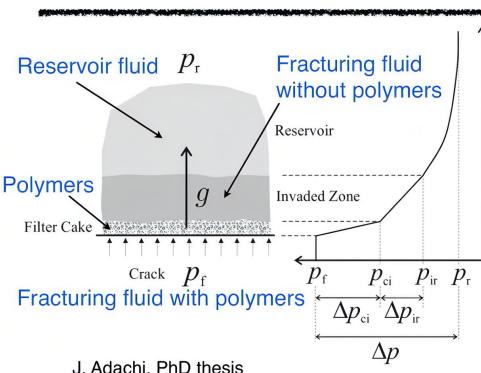
концептуальное уравнение: Fluid Pressure = Stress + Stiffness \* FracWidth – давление жидкости должно превысить напряжение в породе + жёсткость трещины (которая напрямую зависит от модуля Юнга породы), умноженную на среднее открытие трещины; но большую часть составляет именно напряжение в породе, а дополнительное слагаемое с жёсткостью обычно много меньше (но тем не менее очень важно для моделирования);

4) условие распространения трещины; грубо говоря, продолжая аналогию с шариком – это критерий, при котором шарик лопнет; при достижении критического значения некого параметра около кончика трещины начнётся распространение трещины;

5) транспорт проппанта; это тоже очень важный компонент физики модели ГРП; высокопроводимый проппант нужен для того, чтобы при смыкании трещины ГРП остались проводимые каналы; с точки зрения моделирования внутри жидкости течёт суспензия; обычно частицы проппанта (часто используется песок или керамический проппант с примерной плотностью 2.65 г/см<sup>3</sup>) тяжелее жидкости (у воды плотность приблизительно 1 г/см<sup>3</sup>), поэтому интересно моделировать процесс оседания проппанта.

### 1.1.1 Модель утечки по Картеру

Carter's leak-off model



#### Flow through filter cake:

$$g_c = \alpha \frac{dh_c}{dt}$$

this equation says that the growth rate of the filter cake is linearly proportional to the amount of fluid leaked from the fracture (the constant of proportionality is related to the content of polymers)

$$g_c = \frac{\kappa_c \Delta p_{ci}}{\mu} \frac{dh_c}{h_c}$$

this is Darcy's law (quasi-static flow)

$$\text{Solution: } g_c = \frac{C_c}{\sqrt{t}} \quad C_c = \sqrt{\frac{\alpha \kappa_c \Delta p_{ci}}{2 \mu_b}}$$

#### Flow through invaded zone:

$$g_i = \frac{\kappa}{\mu_{\text{filt}}} \frac{\Delta p_{ir}}{h_i}$$

this is Darcy's law (quasi-static flow)

$$g_i = \phi \frac{dh_i}{dt}$$

this is volume balance that states that the volume of fluid leaked into the formation determines the size of the invasion zone

$$\text{Solution: } g_i = \frac{C_i}{\sqrt{t}} \quad C_i = \sqrt{\frac{\phi \kappa_r \Delta p_{ir}}{2 \mu_b}}$$

Давайте рассмотрим модель утечки по Картеру. Эта модель является доисторической для рассматриваемой области (для моделирования ГРП), её развил Картер ещё в 1956-1957 годах (тогда ещё только зарождался ГРП). Первый коммерческий ГРП был сделан примерно в 1950-х годах. Но тем не менее модель Картера и сейчас очень часто (почти повсеместно) используется при моделировании ГРП, потому что она очень простая и очень много физики в себе несёт.

В левом верхнем углу на слайде изображен рисунок (из PhD диссертации J. Adachi), на котором

изображена область вблизи трещины. Обычно жидкость ГРП состоит из основной жидкости (base fluid) и полимеров (их добавляют, чтобы химия или реология совпадала с той, которая нужна для дизайна ГРП, например, для нужной длины трещины или нужного транспорта проппанта и так далее). Идея в том, что есть жидкость с полимерами. Когда эта жидкость начинает фильтроваться в породу, то происходит следующее: в классической модели считаем, что полимеры большие, длинные и с трудом залезают в поровое пространство, т.е. полимеры в основном осаждаются на стенке трещины. В итоге, образуется Filter Cake, который состоит из полимеров, добавляемых в жидкость ГРП.

Далее идёт Invaded Zone, в которой жидкость ГРП без полимеров затекает в породу и вымешивает жидкость резервуара.

Далее идёт сам резервуар, в котором давление поднялось (так как мы вытеснили часть жидкости из Invaded Zone в резервуар).

Таким образом, концептуально график зависимости давления от вертикальной координаты  $y$  выглядит следующим образом: на стенке трещины давление равно давлению жидкости, на бесконечности – давление резервуара; давление жидкости больше, чем давление резервуара (иначе не смогли бы сгенерировать трещину ГРП); есть падение давления на корке Filter Cake (предполагается, что оно линейное); есть падение давления в Invaded Zone (тоже предполагается, что оно линейное); и дальше есть падение давления в резервуаре.

Итак, есть три характерных падения давления. Может быть так, что какое-то из них много меньше, чем другое; какое-то давление доминирует; может быть отсутствие Filter Cake (если в жидкости ГРП нет полимеров). Но мы рассмотрим более общий случай и пройдёмся по уравнениям. На слайде в левом нижнем углу представлена картина пористости сланца, полученная с помощью электронного микроскопа (маленькие поры, различные минералы и видно, что через эти поры жидкость утекает).

Первым делом рассмотрим течение через корку Filter Cake.

Первое уравнение

$$g_c = \alpha \frac{dh_c}{dt} \quad (1.1)$$

говорит нам о том, что скорость роста корки Filter Cake линейно пропорциональна количеству жидкости, утекающему из трещины за единицу времени (или другими словами, линейно пропорциональна скорости утечки), а константа пропорциональности определяется экспериментально. По сути  $\alpha$  связана с концентрацией полимеров.

Второе уравнение

$$g_c = \frac{\kappa_c}{\mu} \frac{\Delta p_{ci}}{h_c} \quad (1.2)$$

это закон Дарси для течения жидкости через корку Filter Cake (полагаем, что падение давления на корке связано со скоростью утечек по линейному закону Дарси).

Приравнивая уравнения (1.1) и (1.2) и решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, получаем

$$g_c = \frac{C_c}{\sqrt{t}} \quad C_c = \sqrt{\frac{\alpha \kappa_c \Delta p_{ci}}{2\mu}} \quad (1.3)$$

т.е. скорость утечек обратно пропорциональна  $\sqrt{t}$ .

Далее рассмотрим следующую зону Invaded Zone.

Опять же предполагаем, что распределение давления линейное (довольно тонкая зона Invaded Zone) и выполняется линейный закон Дарси

$$g_i = \frac{\kappa_r}{\mu} \frac{\Delta p_{ir}}{h_i} \quad (1.4)$$

В качестве второго уравнения возьмём закон сохранения объёма

$$g_i = \varphi \frac{dh_i}{dt} \quad (1.5)$$

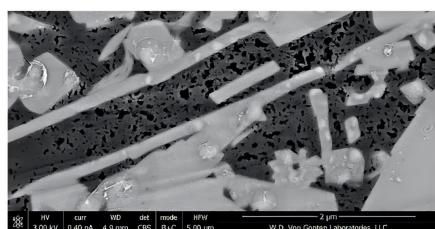
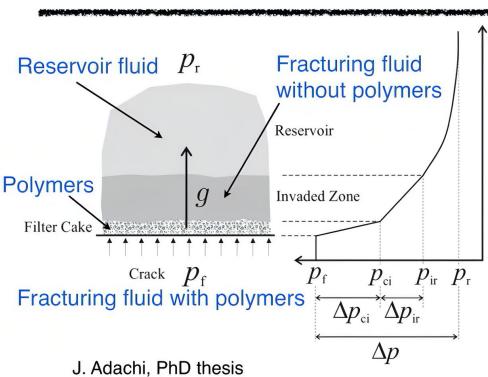
(т.е. объём жидкости, утекающей из корки Filter Cake, определяет размер зоны Invaded Zone)

Приравнивая уравнения (1.4) и (1.5) и решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, получаем

$$g_i = \frac{C_i}{\sqrt{t}} \quad C_i = \sqrt{\frac{\varphi \kappa_r \Delta p_{ir}}{2\mu}} \quad (1.6)$$

(подобно корке Filter Cake в Invaded Zone скорость утечек обратно пропорциональна  $\sqrt{t}$ ).

### Carter's leak-off model



#### Flow in reservoir:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad \text{1D diffusion equation (volume balance + Darcy)}$$

$p|_{t=0} = p_r$  initial condition       $D = \frac{\kappa_r}{\mu_r c_t \phi}$  diffusion coefficient

$p|_{y=0} = p_{ir}$  boundary condition

To solve this equation, introduce new variable:

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{4Dt}} \implies -\frac{y}{2t\sqrt{4Dt}} p' = \frac{D}{4Dt} p'' \implies -2\xi p' = p''$$

Solution of the above differential equation is:

$$p = p_r + (p_{ir} - p_r) \operatorname{erfc}(\xi) \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

The leak-off flux is then (from Darcy):

$$g_r = -\frac{k_r \partial p}{\mu_r \partial y}|_{y=0} = \frac{C_r}{\sqrt{t}} \quad C_r = \sqrt{\frac{k_r c_t \phi}{\pi \mu_r}} (p_{ir} - p_r)$$

I

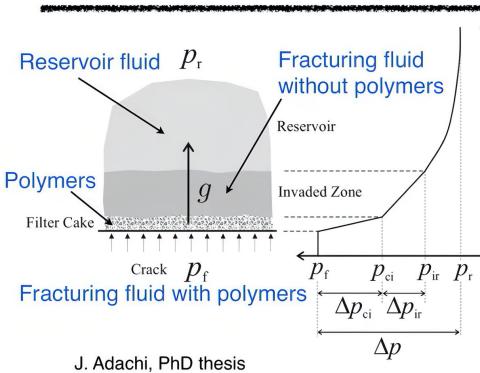
Последний аспект физики здесь – это поведение жидкости в резервуаре. Одно из главных предположений модели Картера: предполагаем, что диффузия одномерная и перпендикулярная стенке трещины (т.е. рассматриваем изменение давления только по оси  $y$ ). Но на самом деле это не совсем так: если вы представите себе кончик трещины, то у него будет некая двумерная диффузия (или даже трёхмерная диффузия) вокруг кончика.

При каких условиях мы можем использовать предположение одномерности модели Картера? Тогда, когда характерное расстояние, на котором осуществляется падение давления много меньше, чем длина трещины. Вблизи кончика модель может не выполняться, но в где-то в середине

трещины модель вполне себе применима.

Итак, рассматриваем одномерную модель, т.е. решаем уравнение одномерной диффузии, перпендикулярной стенке трещины. Уравнение диффузии (диффузия в пороупругом материале) – это опять таки закон Дарси плюс закон сохранения объёма.

### Carter's leak-off model



**Combined result if all the mechanisms are present:**

$$g = \frac{C_l}{\sqrt{t}}, \quad C_l = \frac{2\bar{C}_c\bar{C}_i\bar{C}_r}{\bar{C}_c\bar{C}_i + \sqrt{\bar{C}_c^2\bar{C}_i^2 + 4C_r^2(\bar{C}_c^2 + \bar{C}_i^2)}},$$

In the above result, the individual leak-off coefficients are computed by using the total pressure drop, i.e.

$$\bar{C}_c = \sqrt{\frac{\alpha\kappa_c\Delta p}{2\mu_b}}, \quad \bar{C}_i = \sqrt{\frac{\phi\kappa_i\Delta p}{2\mu_b}}, \quad \bar{C}_r = \sqrt{\frac{\kappa_r c_t \phi}{\pi\mu_r}} \Delta p.$$

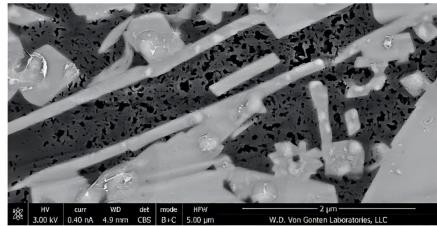
**Recall the main assumptions of the model:**

1D diffusion, i.e. the diffusion length scale should be much smaller than the fracture size

The net pressure is often neglected, whereby  $\Delta p = \sigma_0 - p_r$

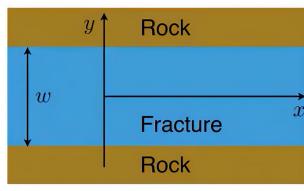
It is implicitly assumed that one type of fracturing fluid is used

More reading: Economides&Nolte 2000, section 6-4.



### 1.1.2 Течение жидкости в трещине ГРП

#### Fluid flow



$$v = v_x(y)$$

given the geometry, we have only one component of the velocity vector that varies only across the channel

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

this comes from Navier-Stokes equations or equilibrium equations

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

this states that the rheology is Newtonian

$$\text{Herschel-Bulkley } \tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n$$

$v|_{y=\pm w/2} = 0$  this is no-slip boundary condition at the fracture walls

$$\text{Power-law } \tau = k\dot{\gamma}^n$$

General solution:

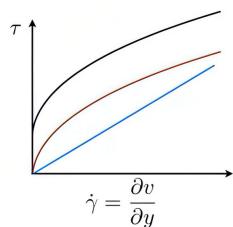
Actual solution:

$$v = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + Ay + B$$

$$v = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{w^2 - 4y^2}{8\mu}$$

$$\text{Total flux is: } q = \int_{-w/2}^{w/2} v(y) dy = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \text{HB fluid: } q_{\text{HB}} &= -\frac{w^{2+1/n}}{M'^{1/n}} \frac{\partial p}{\partial x} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{1/n-1} \left( 1 - \frac{2\tau_0}{w} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1} \right)^{1+1/n} \left( 1 + \frac{2\tau_0}{w} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1} \frac{n}{n+1} \right) \\ M' &= \frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} k, \end{aligned}$$

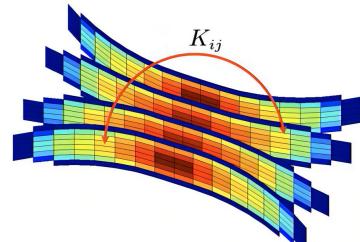


Каждая модель ГРП должна включать в себя течение жидкости. Обычно рассматривается следующая проблема. Допустим мы открыли трещину, есть некое открытие трещины  $w$  и течение вдоль оси  $x$  (допустим, что она одномерное). Открытие трещины обычно измеряется в миллиметрах, а длина трещины обычно составляет десятки или сотни метров. Т.е. получается очень

узкая трещина и именно поэтому мы предполагаем, что в каждой точке трещины течение стационарно. Т.е. необходимо решить стационарное уравнение Навье-Стокса.

### 1.1.3 Равновесие (упругость) горной породы. Уравнение упругости

#### Elasticity



Elasticity equation ensures that rock surrounding open fracture(s) is in equilibrium.

Every open element induces a stress change (all components) in the whole space.

The interaction coefficient (induced stress divided by aperture) depends on the elastic properties and the distance from the element and generally decays quickly  $\sim 1/r^3$  for 3D geometry.

For a plane strain fracture, the elasticity equation reads:

$$p = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s) ds}{(x-s)^2} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}$$

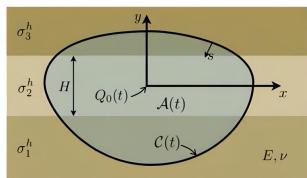
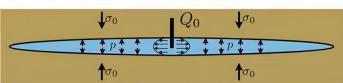
1

For a planar fracture, the elasticity equation reads:

$$p(x, y, t) = \sigma^h(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{\mathcal{A}(t)} \frac{w(x', y', t) dx' dy'}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]^{3/2}},$$

For general expressions in 3D, see Crouch and Starfield, 1983

For expressions in layered materials, see Peirce and Siebrits, 2000



Уравнение упругости. Почему это сложно? Потому что мы решаем уравнение упругости вокруг всей трещины. Т.е. мы решаем уравнение упругости в 3D (или как минимум в 2D) вокруг трещины. До этого у нас всё было одномерное: одномерные утечки Картера, одномерное течение жидкости в трещине. А всё что одномерное, то просто. Здесь же упругость как минимум двухмерная (а в большинстве случаев трёхмерная). А в большинстве случаев решать трёхмерные задачи (особенно аналитически) не сильно весело, но можно.

В двух словах: пусть у нас есть несколько трещин (может быть одна трещина) и есть некоторое количество численных элементов, в которых трещина открыта. Если приоткроем один из элементов ещё больше, то изменим поле напряжений везде в материале. Т.е. у нас есть коэффициенты взаимодействия: как открытие любого из рассматриваемых элементов влияет на сжимающие напряжения в каждом другом элементе.

Аналогия с шариками: есть несколько тесно соединённых друг с другом шариков; мы надуваем один из шариков и в это же время все остальные сжимаются.

Т.е. суть уравнения упругости – это посчитать коэффициенты взаимодействия (коэффициенты влияния) между элементами. Ясно, что эти взаимодействия угасают с расстоянием, но тем не менее формально каждый элемент меняет поле напряжений во всём трёхмерном пространстве. Обычно уравнение упругости относительно сложное (нелокальное) и оно обычно относительно медленно считается (в некоторых случаях по крайней мере).

Но я покажу вывод для плоской трещины (plain strain) – предполагаем, что у нас двухмерная модель с некоторым открытием трещины. Есть некое давление распределённое по оси  $x$ . Есть сжимающие напряжения. Мы выведем связь между распределением давления вдоль оси  $x$ , сжимающими напряжениями снаружи  $\sigma_0$  и формой открытия трещины  $w(x)$ . Нелокальная связь в

том, что давление в точке зависит от интеграла открытия по всей трещине. Т.е. изменение давления в произвольной ячейке приведёт к изменению давления по всей трещине. Важная особенность в том, что интеграл в формуле гиперсингулярный и его нужно понимать в смысле главного значения.

Для планарной трещины аналогично.

## 2 Лекция 02.03.2021 (Донцов Е.В.)

### 2.1 Из чего состоит любая модель ГРП? Продолжение

Давайте вспомним предыдущую лекцию.

В модели ГРП есть **несколько основных концепций**, несколько основных физических процессов, которые необходимо описать и которые любой симулятор ГРП описывает (не важны тип геометрии, количество трещин, способ решения явный/неявный – главное: учесть правильную физику/механику).

**Первое:** закон сохранения жидкости. Предполагается, что она несжимаемая: закачиваем некий объём жидкости в скважину, часть этого объёма генерирует трещину и плюс часть жидкости утекает в виде утечек

**Второе:** градиент давления внутри трещины, который образуется из-за вязкого течения жидкости.

**Третье:** уравнение упругости. Мы деформируем породу вокруг трещины; считаем породу линейно-упругим материалом; после деформаций должно выполняться условие равновесия.

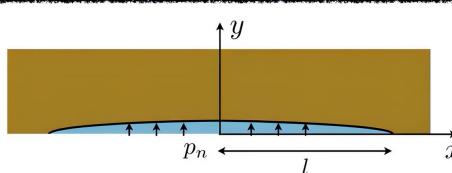
**Четвёртое:** критерий распространения. Аналогия с шариком: уравнение упругости показывает соотношение давления в шарике с его объёмом, а критерий распространения – это условие при котором шарик лопнет. То же самое с трещиной: упругость даёт нам соотношение между давлением жидкости внутри и открытием трещины, а критерий распространения позволяет найти условие, при котором трещина будет распространяться.

**Пятое:** транспорт проппанта.

В прошлый раз мы подробно остановились на модели утечек Картера и на уравнениях течения жидкости в трещине. Сейчас продолжим говорить про упругость и критерии распространения.

#### 2.1.1 Равновесие (упругость) горной породы. Уравнение упругости

##### Derivation of elasticity equation (plane strain)



Hooke's law

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= 2\mu\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}), \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\epsilon_{xy}\end{aligned}$$

Equilibrium equations

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Normal stress continuity

$$\sigma_{yy}|_{y=0} = -p_n = -(p - \sigma_0)$$

Boundary conditions

$$u_y|_{y=0} = \frac{w}{2} \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = 0$$

Need to solve for

$$\sigma_{yy}|_{y=0} - ?$$

Governing equations in terms of displacements

$$\begin{aligned}(2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &= 0, \\ (2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} &= 0\end{aligned}$$

Apply Fourier transform

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g) &= \hat{g}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ikx} dx, \\ \mathcal{F}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) &= ik\mathcal{F}(g), \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) = -k^2\mathcal{F}(g),\end{aligned}$$

System of ODEs

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} &= \hat{d}_x, \\ \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} &= \hat{d}_y,\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}}$$

$$\frac{\partial \hat{d}_x}{\partial y} = \frac{2\mu + \lambda}{\mu} k^2 \hat{u}_x - \frac{\lambda + \mu}{\mu} ik\hat{d}_x + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} k^2 \hat{u}_y,$$

$$\frac{\partial \hat{d}_y}{\partial y} = -\frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} ik\hat{d}_x + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} k^2 \hat{d}_x + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} k^2 \hat{u}_y,$$

Упругость: порода вокруг трещины должна быть в равновесии в зависимости от того, какое у трещины открытие или сдвиговое смещение в каждом элементе трещины.

В чём сложность расчёта теории упругости? В том, что этот процесс очень нелокальный. Например, если у нас есть несколько трещин, несколько элементов (множество элементов в каждой трещине), то изменение открытия в каждом элементе влечёт за собой изменение поля напряжений во всём пространстве. Т.е. если мы немного изменим степень открытости одного из элементов, то у нас будет влияние на все элементы. С практической точки зрения коэффициент взаимодействия уменьшается довольно быстро с расстоянием ( $\sim 1/r^3$  для трёхмерной геометрии). Т.е. с точки зрения практики можем задать некий радиус, после которого будем обрезать взаимодействия. Но тем не менее всё равно взаимодействие будет нелокальным. В этом сложность упругости.

Для плоской трещины у нас есть довольно простое выражение.

Если рассматриваем плоскую трещину и двухмерную задачу, то давление в трещине равно сжимающему напряжению на бесконечности и плюс дополнительный интеграл от открытия трещины (как функции координаты) с сингулярным ядром.

Т.е. открытие в любой точке трещины влияет на давление по всей трещине.

Для планарной трещины есть более сложное выражение, которое выводится абсолютно аналогично выражению для плоской трещины.

Далее выведем выражение для плоской трещины; для планарной – вывод такой же.

Я буду давать относительно простые примеры и относительно простые геометрии, но все рассматриваемые задачи решены и для сложных геометрий, и для полностью трёхмерных геометрий.

Вы можете найти все эти коэффициенты взаимодействия между элементами (интегральные ядра) для полностью трёхмерной задачи.

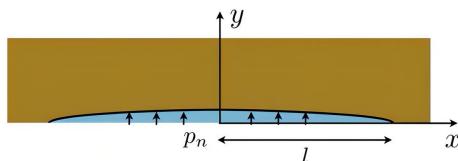
Всё, что я Вам покажу, верно для однородного по упругим свойствам материала. Но в реальности могут быть геологические слои и модули упругости Юнга и коэффициенты Пуассона могут меняться от слоя к слою.

Если Вам не страшна жёсткая математика и Вы хотите посчитать коэффициенты взаимодействия между элементами в слоистой среде, то можете посмотреть статью Pierce и Siebrits.

Но нам в рамках курса важна общая концепция: откуда берутся выражения и что описывают с точки зрения физики/механики.

Давайте выведем уравнение упругости. Что такое уравнение упругости? Это условие того, что порода вблизи трещины находится в равновесии. Мы рассматриваем плоскую трещину и вследствие симметрии рассматриваем половину задачи (только верхнюю часть трещины, например).

### Derivation of elasticity equation (plane strain)



$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A} \mathbf{Y}$$

Eigenvalues of  $A$ :  $k, k, -k, -k$ .

Solution (resonance)

$$\mathbf{Y} = c_1 \mathbf{v}_1 e^{-|k|y} + c_2 (\mathbf{v}_1 y + \mathbf{v}_2) e^{-|k|y}$$

Boundary conditions

$$\hat{\sigma}_{xy}|_{y=0} = 0, \\ \hat{u}_y|_{y=0} = \hat{w}(k)/2,$$

$$p = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s) ds}{(x-s)^2}$$

Solution in frequency domain

$$\hat{p}_n = \frac{\hat{w}|k|}{4} E' = \frac{i k \hat{w} E'}{4} \frac{|k|}{ik} = -\frac{i E'}{4} \operatorname{sgn}(k) \widehat{\frac{dw}{dx}},$$

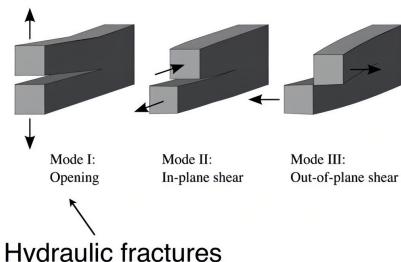
I

$$\widehat{\frac{dw}{dx}} = ik \hat{w}$$

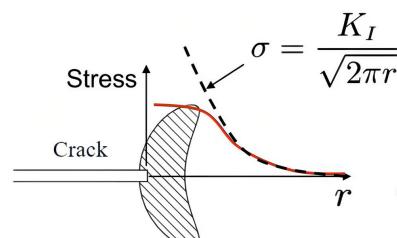
$$\leftarrow p_n(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{i E'}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(k) \frac{dw}{ds} e^{ik(x-s)} ds dk.$$

## 2.1.2 Условие распространения трещины ГРП

### Propagation condition



Hydraulic fractures



$K_I$  - Stress Intensity Factor (SIF)

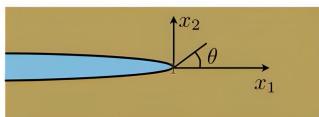
Propagation condition:  $K_I = K_{Ic}$

$K_{Ic}$  - fracture toughness



[https://en.wikipedia.org/wiki/Fracture\\_mechanics](https://en.wikipedia.org/wiki/Fracture_mechanics)

### Mode I solution near the tip



#### Solution methodology:

- Write elasticity equations via Airy stress function
- Solve the equations assuming stress-free crack and finite displacement at the tip
- See lecture notes on fracture mechanics for more info: <http://www.mate.tue.nl/~piet/edu/frm/pdf/frmsyl1213.pdf>

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [\cos(\frac{1}{2}\theta) \{1 - \sin(\frac{1}{2}\theta) \sin(\frac{3}{2}\theta)\}]$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [\cos(\frac{1}{2}\theta) \{1 + \sin(\frac{1}{2}\theta) \sin(\frac{3}{2}\theta)\}]$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [\cos(\frac{1}{2}\theta) \sin(\frac{1}{2}\theta) \cos(\frac{3}{2}\theta)]$$

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\cos(\frac{1}{2}\theta) \{\kappa - 1 + 2\sin^2(\frac{1}{2}\theta)\}]$$

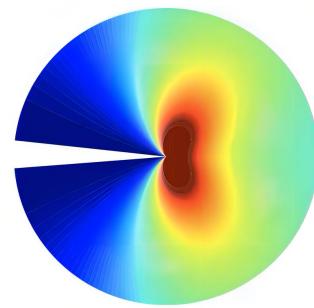
$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\sin(\frac{1}{2}\theta) \{\kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)\}]$$

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Fracture width around the crack tip:

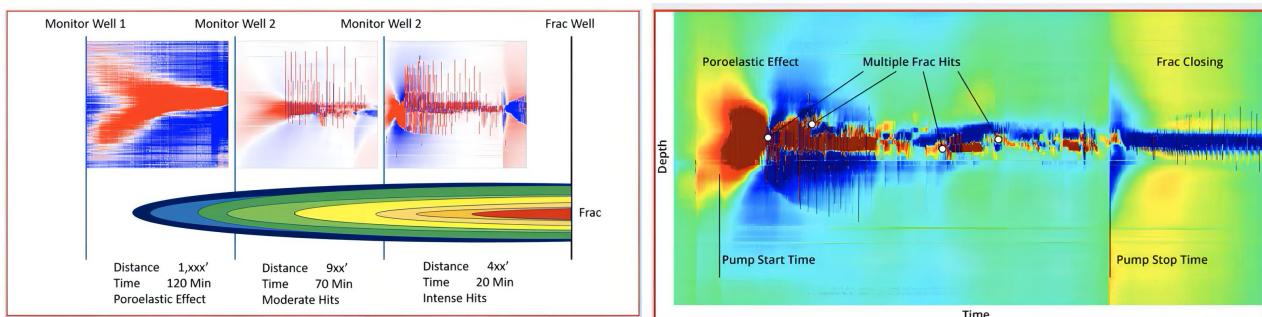
$$w = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \frac{K_I(1-\nu^2)}{E} \sqrt{r}$$

Stress field around the crack tip:



### Observation of the crack tip stress in the field

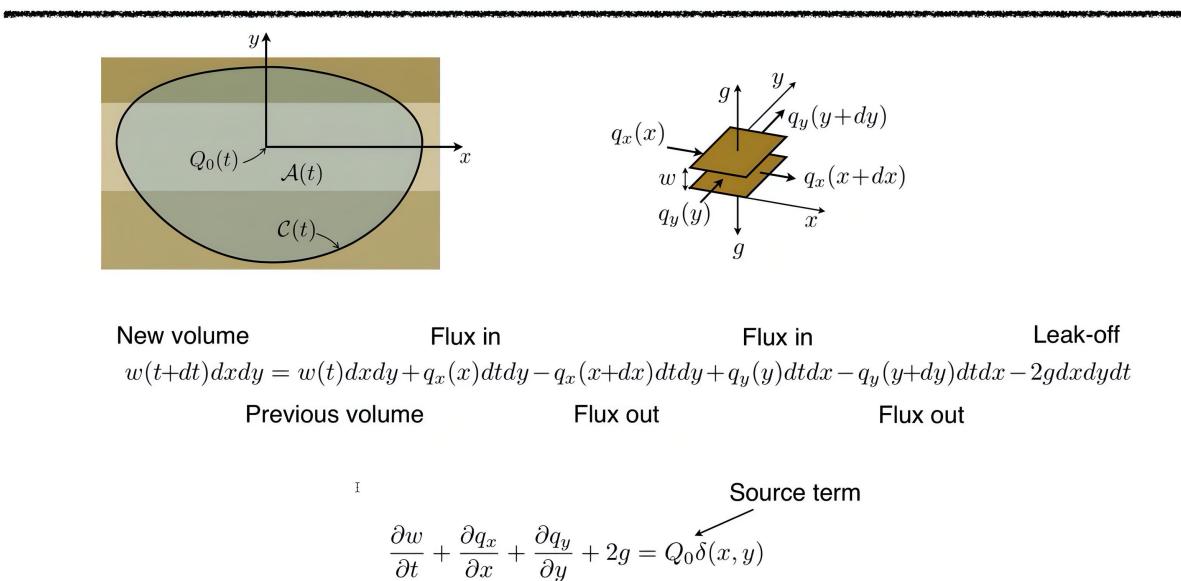
- Fiber optic cables are used to measure stretch versus time along the cable length
- A cable is often placed in a neighboring horizontal well, while the primary well is being fractured
- The characteristic lobes of the approaching crack are clearly visible



Silixa.com Richter et al. 2020

## 2.2 Математическая модель планарной трещины ГРП (planar3D)

Volume balance for a planar hydraulic fracture



Рассмотрим планарную трещину ГРП: трещина лежит в плоскости  $Oxy$ , раскрытие трещины по оси  $Oz$ .

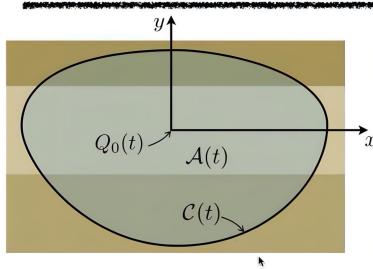
Запишем закон сохранения объема: новый объем есть старый объем плюс входящий поток по оси  $Ox$  минус выходящий поток по оси  $Ox$  плюс входящий поток по оси  $Oy$  минус выходящий поток по оси  $Oy$  минус утечки. Далее делим обе части полученного равенства на  $dxdydt$  и получаем закон сохранения объема в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + 2g = Q_0 \delta(x, y) \quad (2.1)$$

Здесь мы не забыли добавить источниковое слагаемое в начале координат (поток жидкости, нагнетаемый из скважины).

Далее (на следующем слайде) выпишем определяющие уравнения для планарной трещины. Эти уравнения позволяют связать неизвестные величины, входящие в только что полученное уравнение.

### Governing equations for a planar hydraulic fracture



$$\text{Scaling} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \mu' = 12\mu, \quad K' = \sqrt{\frac{32}{\pi}} K_{Ic}, \quad C' = 2C_l,$$

$$\text{Volume balance} \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x,y)}} = Q_0(t)\delta(x,y),$$

$$\text{Fluid flow} \quad \mathbf{q} = -\frac{w^3}{\mu'} \nabla p,$$

$$\text{Elasticity} \quad p(x,y,t) = \sigma_0(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{A(t)} \frac{w(x',y',t) dx' dy'}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]^{3/2}},$$

$$\text{Propagation} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'}{E'}, & \text{if } V > 0, \\ \frac{K'_l}{E'}, & \text{if } V = 0. \end{cases}$$

К полученному закону сохранения объёма добавляем:

связь потока с градиентом давления (в прошлый раз выводили это нелинейное уравнение для ньютоновской жидкости);

уравнение упругости (ранее выводили его для плоской трещины – для планарной трещины оно немного сложнее, но суть та же: интегральное уравнение, согласно которому давление зависит от локальных сжимающих напряжений и интеграла с неким ядром от раскрытия – изменение раскрытия в некоторой точке будет изменять давление жидкости и напряжение на берегах трещины везде);

критерий распространения (мы ввели понятие трещиностойкости, по которой можем определить, будет ли происходить рост трещины ГРП).

В итоге, получаем систему уравнений, которая описывает процесс распространения планарной трещины ГРП.

Мы получили систему уравнений в общем случае для планарной трещины, далее будем делать упрощающие предположения и строить другие (более простые) модели (геометрии) распространения трещины ГРП.

Из общей системы видим, что решение будет зависеть от плоского модуля Юнга, вязкости, трещиностойкости, коэффициента утечек Картера, сжимающих напряжений  $\sigma_0(y)$  и расхода  $Q_0(t)$ .

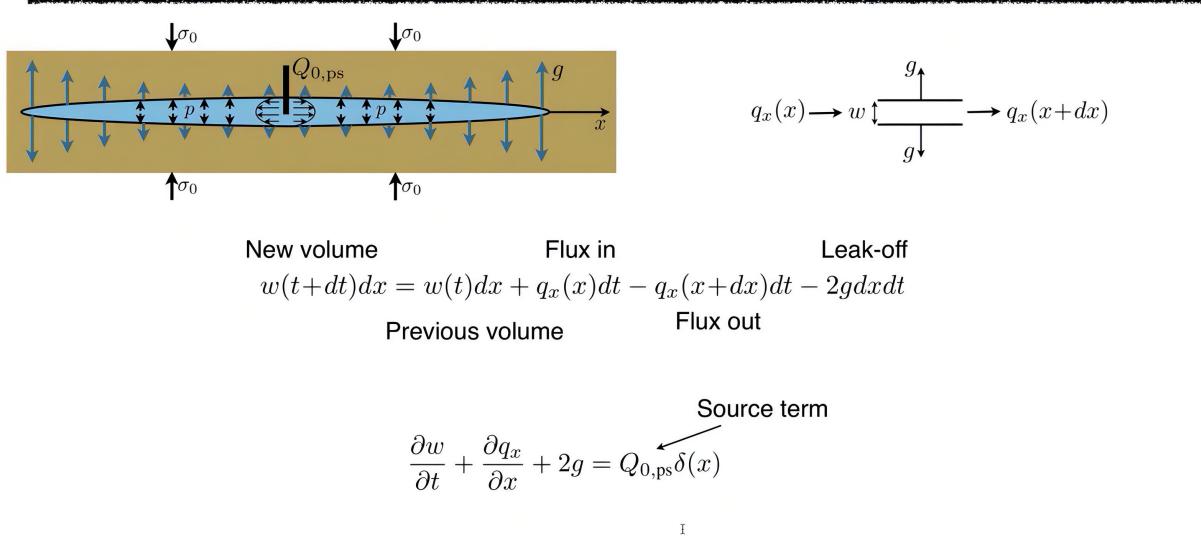
Другими словами, есть входные параметры породы, входные параметры жидкости и параметры закачки, от которых зависит результат (длина, высота, раскрытие, давление и так далее).

Решение системы уравнений для планарной трещины – это трёхмерная проблема упругости и двухмерная проблема течения.

## 2.3 Краткий обзор упрощённых и полных моделей (геометрий) трещины ГРП

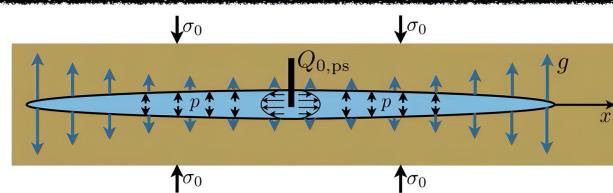
### 2.3.1 Плоская трещина (модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-де Клерка)

Volume balance for a plane strain hydraulic fracture



Делаем первое упрощение: переходим к модели плоской трещины, а именно читаем, что нет зависимости искомых величин от координаты  $y$ .

Governing equations for a plane strain hydraulic fracture



$$\text{Scaling} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \mu' = 12\mu, \quad K' = \sqrt{\frac{32}{\pi}} K_{Ic}, \quad C' = 2C_l,$$

$$\text{Volume balance} \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = Q_{0,ps}(t)\delta(x),$$

$$\text{Fluid flow} \quad q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\text{Elasticity} \quad p(x, t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{w(s)ds}{(x-s)^2},$$

$$\text{Propagation} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'}{E'}, & \text{if } V > 0, \\ \frac{K'_I}{E'}, & \text{if } V = 0. \end{cases}$$

Для плоской трещины поток имеет только одну компоненту. Уравнение упругости в случае плоской трещины тоже преобразуется (для планарной трещины у него более общий вид, а мы как раз выводили это уравнение упругости в случае плоской трещины).

Решение системы уравнений для плоской трещины – это двухмерная проблема упругости и

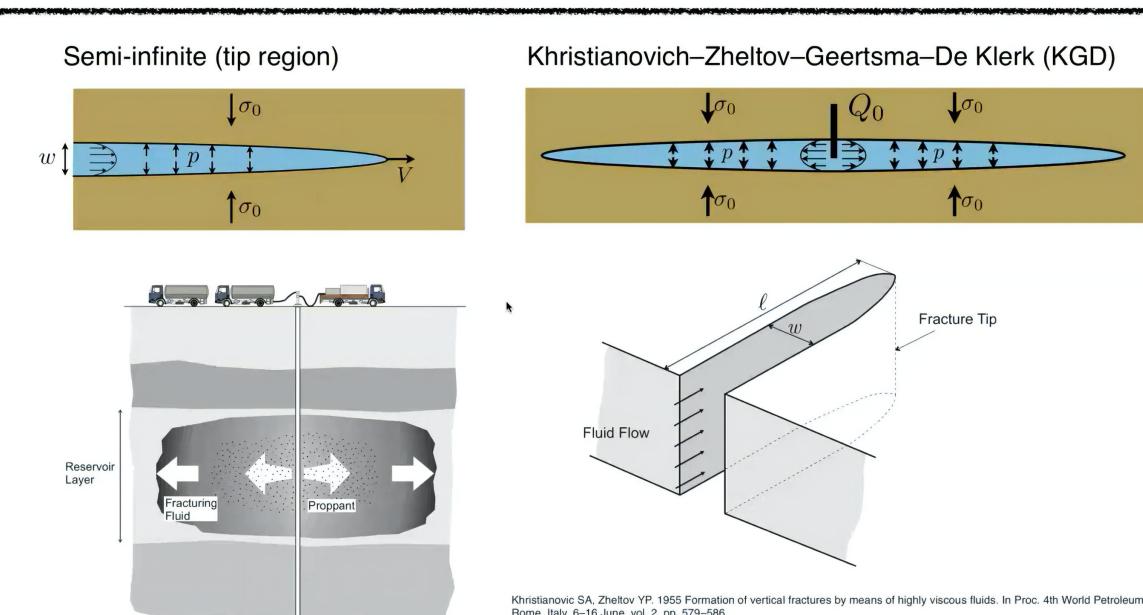
одномерная проблема течения. Т.е. для плоской трещины задача упругости решается в плоскости и реализуется плоскодеформированное состояние. Другими словами, плоская трещина рассматривается в условиях плоской деформации.

Ясно, что в общем виде решить полученную систему уравнений аналитически мы не можем: ведь есть интегральное уравнение, дифференциальное уравнение в частных производных, есть нелинейное слагаемое и движущаяся граница (т.к. длина трещины растёт). А в интегральном уравнении гиперсингулярный интеграл. Т.е. все кошмары математики, которые только могут присниться, здесь есть.

Поэтому далее будем рассматривать более простые модели, которые получаются из модели плоской трещины при использовании ряда предположений.

### 2.3.2 Полубесконечная (semi-infinite) трещина и плоская трещина (KGD модель)

HF geometries - the simplest



Модель полубесконечной трещины – это модель кончика трещины. Если мы не хотим полностью рассматривать плоскую трещину, а хотим узнать, что происходит именно возле кончика, то тогда рассматривается задача о полубесконечной трещине, которая распространяется равномерно со скоростью  $V$ .

Дополнительно сделал для вас картинку модели плоской трещины (модели KGD) в 3D. Допустим у нас есть вертикальная скважина с несколькими перфорациями; в начальный момент времени начинаем закачку; до тех пор, пока высота трещины много больше её длины, трещина растёт по модели KGD. Когда длина трещины становится сопоставимой с её высотой, то модель KGD не работает.

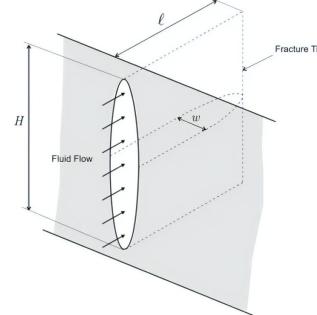
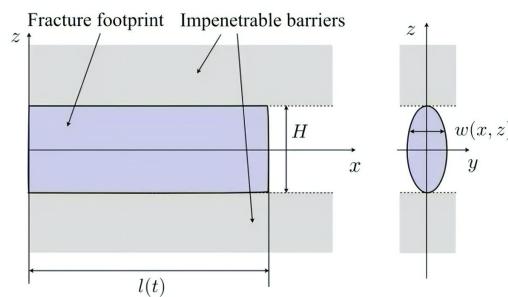
Другими словами, модель KGD работает на ранних временах закачки жидкости.

### 2.3.3 Модель Перкинса-Керна-Нордгрена (PKN модель)

#### HF geometries

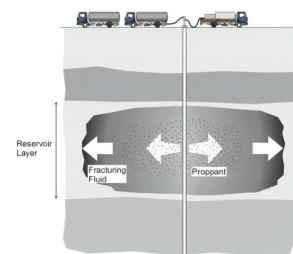
##### Perkins–Kern–Nordgren (PKN)

T.K. Perkins, L.R. Kern, Widths of hydraulic fractures, J. Pet. Tech. Trans. AIME (1961) 937–949.  
R.P. Nordgren, Propagation of vertical hydraulic fractures, Soc. Petrol. Eng. J. (1972) 306–314.



In conventional field applications, solution evolves from KGD geometry at early times to PKN geometry for late times

KGD (early time) -> PKN (developed fracture)

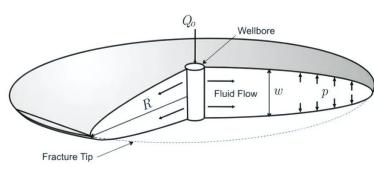


Модель PKN применима в случаях, когда длина трещины много больше её высоты.

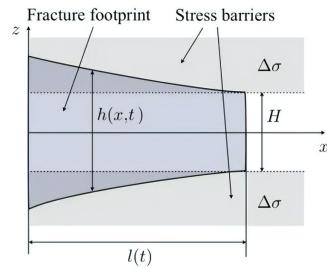
### 2.3.4 Модель радиальной трещины ГРП, псевдо-3D и планар-3D модели

#### HF geometries

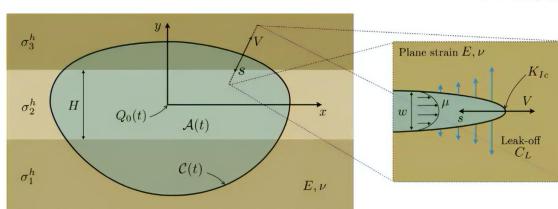
##### Radial



##### Pseudo-3D



##### Planar-3D



Seitari A, Cleary M. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry (P3DH). SPE 10505; 1982, p. 185–214.

Далее с развитием вычислительных технологий появились более сложные модели.

Есть ещё относительно простая модель, а именно модель радиальной трещины: нет никаких слоёв в породе, рассматриваем вертикальную или горизонтальную скважину, проблема осесимметричная.

KGD и PKN реализуется в случае протяжённого перфорационного интервала. А радиальная

трещина реализуется в случае закачки из точечного источника (обычно на горизонтальных скважинах трещина начинает расти из точки и во все стороны).

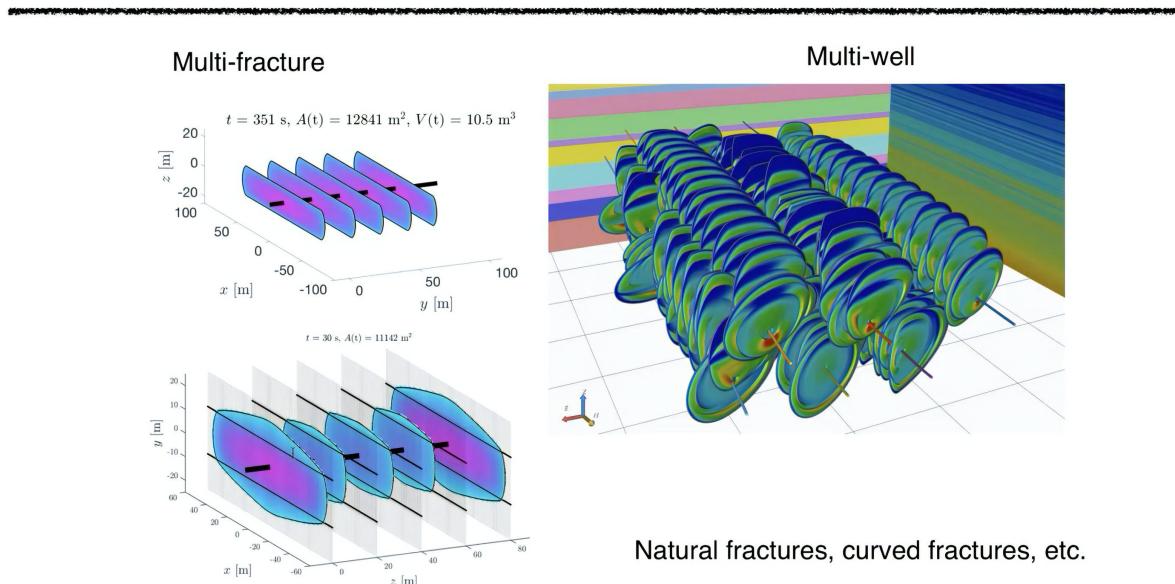
Но всё равно радиальная модель – это больше фундаментальная модель (больше для понимания теории), ведь на практике практически всегда есть слои и радиальная модель не применима.

Псевдотрёхмерная модель – это дальнейшее усложнение PKN модели в случае, когда допускается рост трещины в высоту через имеющиеся барьеры (слои породы).

И есть наиболее общий случай планарной трещины, уравнения для которой мы уже получили. Фактически все остальные модели (геометрии) выводятся из модели планарной трещины при использовании различных допущений.

### 2.3.5 Multi-fracture и multi-well модели

HF geometries

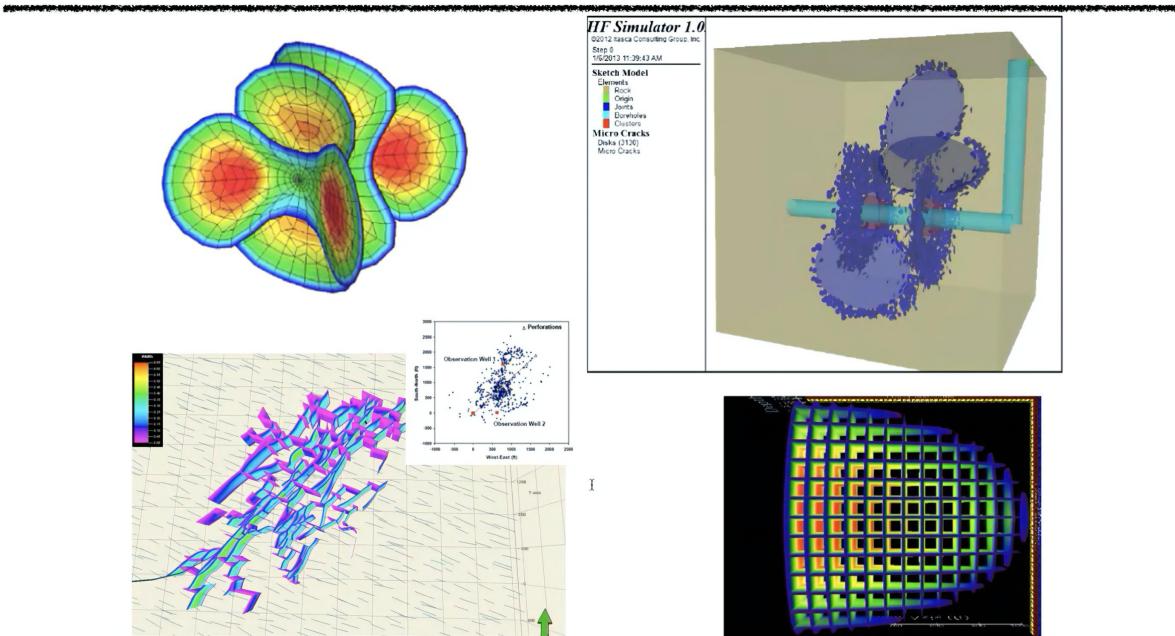


Для желающих есть ещё модели с множеством трещин, с множеством скважин, с учётом их взаимодействия.

Но концептуально всё примерно то же самое.

### 2.3.6 Более сложные модели

HF geometries - other complex



У многих есть желание доделать более сложные трещины, учесть все взаимодействия между трещинами, рассмотреть различные системы трещин.

Но вы должны понимать, что основные процессы и основная физика (механика) одна и та же. Не важен характер геометрии (даже если будут сложные формы подобные представленным на слайде), у нас всё равно будет упругое равновесие породы, всё равно будет течение жидкости и всё равно будет закон сохранения объёма.

Просто это всё будет решаться в более сложной постановке.

## 2.4 Промежуточная систематизация материала лекций

Recall from lecture 1

- **Essential pieces of HF model**

- Volume balance and leak-off
- Fluid flow
- Elasticity
- Propagation condition
- Proppant transport

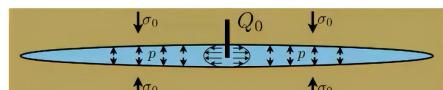
- **Various fracture geometries**

- Semi-infinite
- KGD (plane strain)
- PKN
- Radial
- Pseudo-3D
- Planar 3D
- Complex

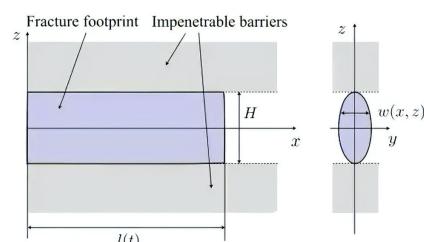
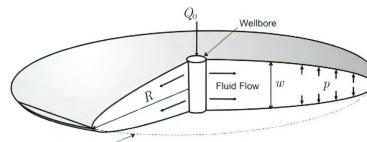
- **Governing equations**

- KGD (plane strain)

- **Derivation of elasticity equation**



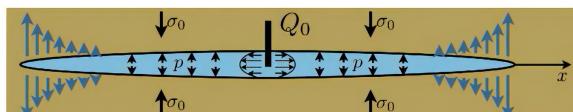
I



Представлен краткий обзор пройденного материала.

## 2.5 Математическая модель плоской трещины ГРП

Mathematical model for plane strain HF



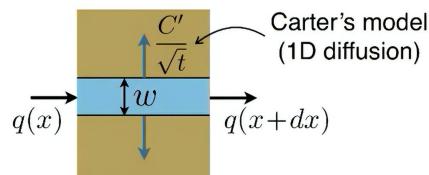
Scaled quantities

$$C' = 2C_L \quad \mu' = 12\mu$$

Volume balance of fluid

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0 \delta(x)$$

Fracture width  
Leak-off  
Source



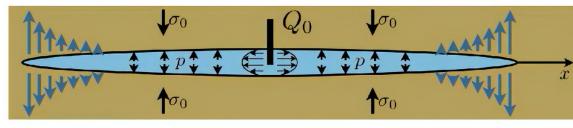
Laminar fluid flow flux

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v = -(\frac{1}{4}w^2 - y^2) \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$q = \int_{-w/2}^{w/2} v dy = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

## Mathematical model for plane strain HF



Scaled quantities

$$C' = 2C_L \quad \mu' = 12\mu$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$$

Volume balance of fluid

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = Q_0 \delta(x)$$

Fracture width  
Leak-off  
Source

Elasticity

$$p = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s) ds}{(x-s)^2}$$

Fluid pressure  
Fracture length

Laminar fluid flow flux

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}$$

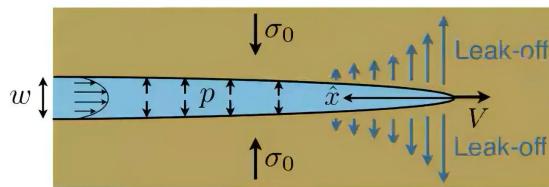
Propagation condition (LEFM)

$$w \rightarrow \frac{K'}{E'} \sqrt{l-x} \quad (K_I = K_{Ic})$$

Здесь ещё раз представлены основные уравнения модели плоской трещины (модели KGD).

## 2.6 Математическая модель полубесконечной трещины ГРП

## Tip asymptotics: semi-infinite hydraulic fracture



Material parameters

$$C' = 2C_L \quad \mu' = 12\mu$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$$

Fluid volume balance

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = 0$$

Traveling wave

$$\frac{w(Vt-x)}{w} \longrightarrow \frac{q}{w} = V + 2C'V^{1/2} \frac{\hat{x}^{1/2}}{w}$$

Elasticity

$$p = \sigma(\hat{x}) + \frac{E'}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dw(\hat{s})}{d\hat{s}} \frac{d\hat{s}}{\hat{x}-\hat{s}}$$

Необходимо вывести уравнения для полубесконечной трещины, зная уравнения для плоской трещины.

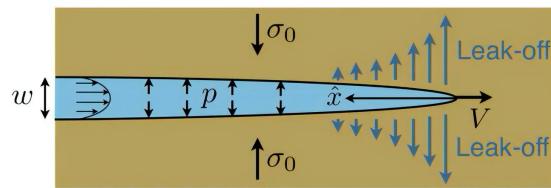
Мы знаем одномерный закон сохранения объёма жидкости для плоской трещины. Пусть трещина распространяется равномерно со скоростью  $V$ . Соответственно решение (раскрытие) будет зависеть только от переменной  $\hat{x} = Vt - x$ .

Здесь на слайде при интегрировании закона сохранения объёма важно учесть, что в кончике

$w = 0$  и, как следствие, поток  $q$  равен нулю.

Уравнение упругости остаётся в той же форме. Здесь уравнение упругости переписано через производную раскрытия, поэтому в ядре пропал квадрат. И важно, что интегрируем от нуля до бесконечности. Исходно интеграл берётся по всей трещине, но так как трещина полубесконечная, то от нуля до бесконечности.

### Tip asymptotics: semi-infinite hydraulic fracture



#### Material parameters

$$\begin{aligned} C' &= 2C_L & \mu' &= 12\mu \\ E' &= \frac{E}{1-\nu^2} & K' &= \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

#### Fluid volume balance

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Traveling wave } w(Vt-x)} \quad \frac{q}{w} = V + 2C'V^{1/2}\frac{\hat{x}^{1/2}}{w}$$

#### Elasticity

$$w = \frac{K'}{E'}\hat{x}^{1/2} + \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty K(\hat{x}, \hat{s})(p(\hat{s}) - \sigma(\hat{s})) d\hat{s} \quad K(\hat{x}, \hat{s}) = \ln \left| \frac{\hat{x}^{1/2} + \hat{s}^{1/2}}{\hat{x}^{1/2} - \hat{s}^{1/2}} \right| - 2\frac{\hat{x}^{1/2}}{\hat{s}^{1/2}}$$

#### Fluid flow

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad q = \frac{w^3}{\mu'} \frac{dp}{d\hat{x}}$$

#### LEFM propagation condition

$$w = \frac{K'}{E'}\hat{x}^{1/2}, \quad \hat{x} \rightarrow 0$$

Но на самом деле будем использовать уравнение упругости немного в другом виде. Предыдущее уравнение упругости можно обернуть, т.е. вместо связи давления с открытием мы можем найти открытие в виде интеграла от давления. Чтобы обернуть нужно взять преобразование Фурье и затем обернуть это преобразование Фурье.

Поверьте, что это можно сделать и у нас будет новое ядро (для связи открытия с давлением). В данном виде ядро всё ещё имеет некую слабую сингулярность (при  $\hat{x} = \hat{s}$ ).

На самом деле можно взять интегральное соотношение для конечной трещины и взять предел полубесконечной трещины (один из кончиков уходит на бесконечность) и тогда тоже получим это же логарифмическое ядро.

Уравнение потока остаётся неизменным (единственное, что в новых координатах уходит минус).

Критерий распространения в данной постановке по сути уже вшит в уравнение упругости, поэтому его можно отдельно не рассматривать.

Таким образом, получили основные уравнения (закон сохранения объёма, уравнение упругости и условие на поток), адаптированные под полубесконечную трещину.

## Non-singular formulation

---

### 1. Integrate elasticity equation by parts

$$w = \frac{K'}{E'} x^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(x, s) \frac{dp}{ds} ds \quad F(x, s) = (s - x) \ln \left| \frac{x^{1/2} + s^{1/2}}{x^{1/2} - s^{1/2}} \right| - 2x^{1/2}s^{1/2}$$

### 2. Substitute pressure gradient into the result

$$w(x) = \frac{K'}{E'} x^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(x, s) \frac{\mu'}{w(s)^2} \left[ V + 2C'V^{1/2} \frac{s^{1/2}}{w(s)} \right] ds$$

### 3. Apply scaling

$$\tilde{w} = \frac{E' w}{K' x^{1/2}}, \quad \chi = \frac{2C'E'}{V^{1/2} K'}, \quad \tilde{x} = (x/l)^{1/2}, \quad \tilde{s} = (s/l)^{1/2}, \quad l = \left( \frac{K'^3}{\mu' E'^2 V} \right)^2$$

### 4. Final result

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G(\tilde{s}/\tilde{x}) \left[ \frac{1}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} \right] d\tilde{s} \quad G(t) = \frac{1-t^2}{t} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + 2$$

Non-singular

w = “toughness” + “viscosity” + “leak-off”

Далее рассматриваем несингулярную постановку этой задачи. Зачем? Мы хотим найти решение и одна из проблем, которая часто встречается в моделях гидроразрыва пласта, это сингулярность интегральных ядер.

Если мы хотим посчитать решение даже численно, то могут быть некоторые проблемы со сходимостью из-за сингулярности ядра.

Есть сможем сделать проблему несингулярной, то тогда решать её численно и аналитически становится в разы легче.

Берём уравнение упругости и интегрируем его по частям, используя граничные условия на давление.

Когда мы проинтегрируем его по частям, то ядро становится несингулярным.

Далее с помощью подстановок уравнений друг в друга избавляемся от давления, т.к. хотим записать уравнение на раскрытие (хотим посчитать раскрытие трещины и исследовать зависимость раскрытия от утечек, вязкости, трещиностойкости и так далее).

Получается, что все уравнения сводятся к одному интегральному уравнению (в котором защиты и уравнение потока, и уравнение упругости, и закон сохранения объёма).

На в постановке 2 (на слайде) всё равно есть проблема, потому что  $w$  стремится к нулю на кончике, поэтому вблизи кончика возникнут проблемы сходимости численного алгоритма.

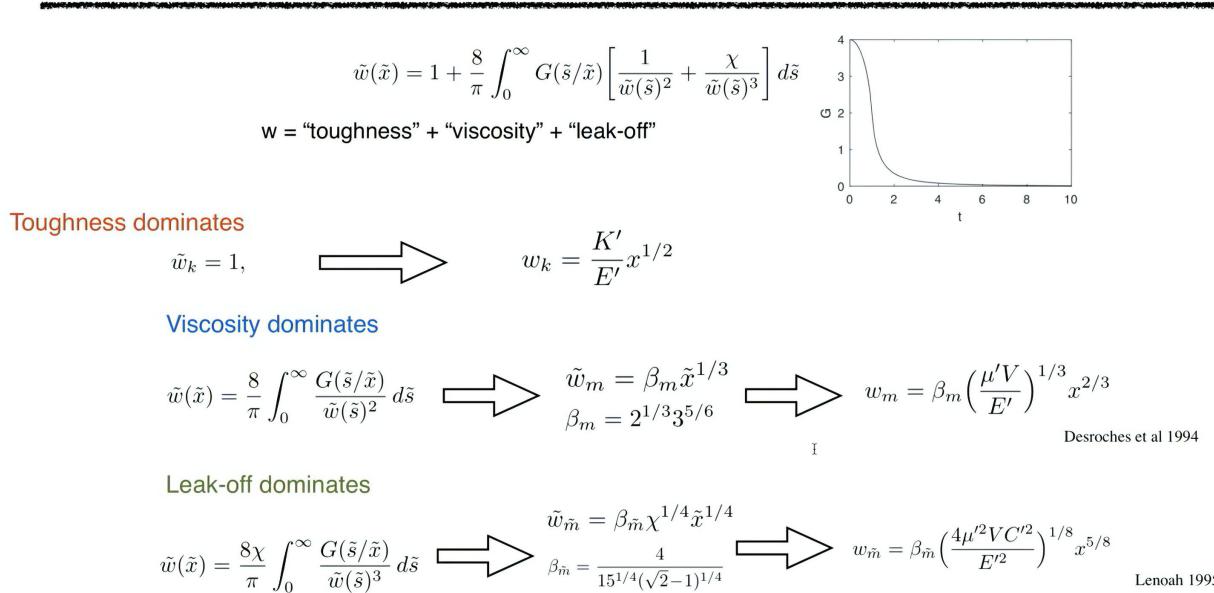
Вводим масштабирование (безразмерные параметры) и получаем окончательное уравнение для безразмерного раскрытия трещины, в котором отсутствуют сингулярности.

Если мы решим это уравнение, то получим безразмерную форму раскрытия трещины как функцию безразмерного  $\tilde{x}$  и как функцию коэффициента утечек.

У каждого слагаемого в полученном уравнении есть физический смысл. Три процесса влияют на безразмерное раскрытие: трещиностойкость, вязкость и утечки.

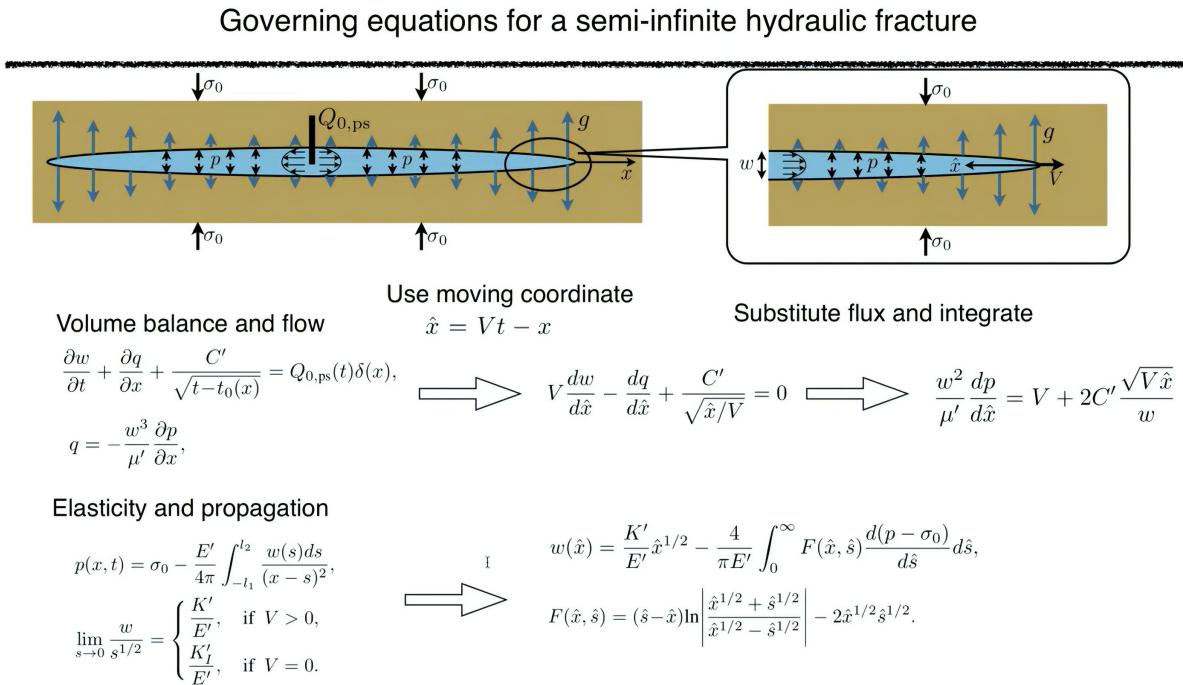
Трещина открывается за счёт трещиностойкости плюс она открывается ещё сильнее, если есть вязкость, и плюс ещё сильнее, если есть утечки.

### Limiting vertex solutions



### 3 Лекция 09.03.2021 (Донцов Е.В.)

#### 3.1 Математическая модель полубесконечной трещины ГРП. Продолжение



Я доработал вывод уравнений для модели полубесконечной трещины, поэтому давайте ещё раз его вспомним.

Трудно сразу провести анализ полученной нами системы уравнений для модели плоской трещины. Поэтому (чтобы понять происходящее) рассмотрим более простую задачу о полубесконечной трещине. Это самая простая геометрия и для неё легче всего найти решение.

Что такое полубесконечная трещина? Зачем она нужна?

Если рассмотрим задачу о плоской трещине и приблизимся к кончику трещины (т.е. мы хотим понять, что происходит возле границы трещины, когда она распространяется), то как раз получим геометрию полубесконечной трещины. Понятно, что ничего полубесконечного в жизни не бывает, это некая математическая идеология, но необходимо понимать, что физически мы рассматриваем проблему возле кончика трещины.

Основные (изначальные) уравнения соответствуют плоской трещине. Далее, чтобы перейти к полубесконечной трещине, мы рассматриваем проблему, в которой рассматриваемая трещина едет (распространяется) с некой постоянной скоростью  $V$ .

Вводим движущуюся систему координат (начало координат находится в кончике трещины, ось  $O\hat{x}$  направлена внутрь трещины):

$$\hat{x} = Vt - x \tag{3.1}$$

Предполагаем, что в этой системе координат задача стационарная, т.е. вся зависимость от времени зашита в  $\hat{x}$  (нет ещё отдельной дополнительной зависимости от времени).

Тогда уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_{0,ps}(t)\delta(x) \quad (3.2)$$

перепишется в виде обыкновенного дифференциального уравнения:

$$V \frac{dw}{d\hat{x}} - \frac{dq}{d\hat{x}} + \frac{C'}{\sqrt{\hat{x}/V}} = 0 \quad (3.3)$$

Далее интегрируем полученное уравнение по  $\hat{x}$ :

$$\frac{w^2}{\mu'} \frac{dp}{d\hat{x}} = V + 2C' \frac{\sqrt{V\hat{x}}}{w} \quad (3.4)$$

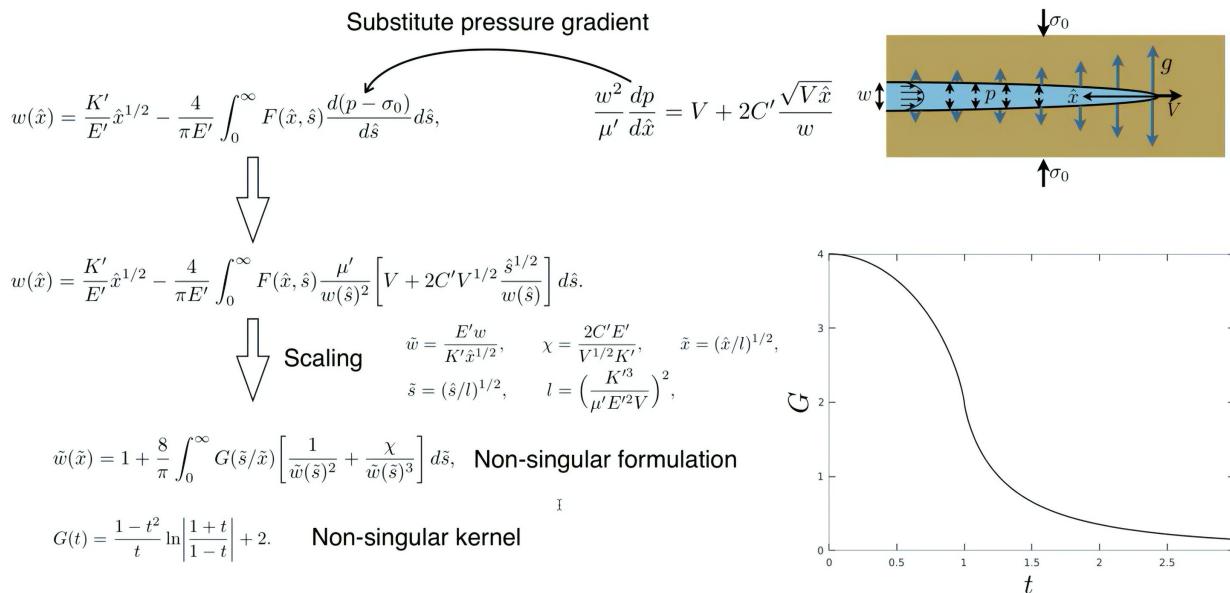
(здесь учли, что  $q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}$ ).

Далее следующий шаг упрощения задачи: вместо прямого уравнения упругости используем обратное уравнение упругости, в котором открытие будет функцией градиента давления. Самое главное, что в этой формулировке мы автоматически удовлетворяем критерию распространения. Открытие будет равно некой корневой зависимости (т.е. это и есть критерий распространения) плюс некое слагаемое, зависящее от градиента давления.

Если интересно: все эти функции считаются через преобразование Фурье. В Фурье-образах интегральное уравнение превращается в очень простое соотношение между давлением и открытием.

Итог: у нас было 4 уравнения (закон сохранения объёма, связь потока с градиентом давления, упругость и критерий распространения); после всех математических манипуляций остались только 2 уравнения.

### Non-singular formulation



Далее рассмотрим некий математический трюк, с помощью которого из оставшихся двух уравнений сделаем только одно уравнение.

Получили одно интегральное уравнение на открытие, в котором присутствуют все входные параметры задачи.

Далее производим масштабирование (обезразмеривание), т.е. вводим безразмерные переменные. Идея в том, что после того, как мы отмасштабируем уравнение, мы получим очень простое безразмерное уравнение в представленной на слайде форме.

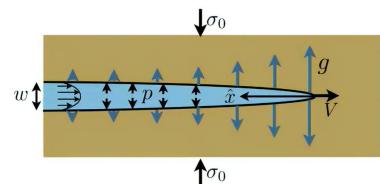
Фактически получили уравнение на одно безразмерное открытие  $\tilde{w}$ .

Важно то, что в полученном уравнении нет сингулярностей.

### Non-singular formulation

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G(\tilde{s}/\tilde{x}) \left[ \frac{1}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} \right] d\tilde{s},$$

w = “toughness” + “viscosity” + “leak-off”



Toughness dominates

$$\tilde{w}_k = 1, \quad \Rightarrow \quad w_k = \frac{K'}{E'} \hat{x}^{1/2},$$

Viscosity dominates

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(\tilde{s}/\tilde{x})}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} d\tilde{s} \quad \Rightarrow \quad \tilde{w}_m = \beta_m \tilde{x}^{1/3} \quad \Rightarrow \quad w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} \tilde{x}^{2/3}$$

Desroches et al 1994

Leak-off dominates

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = \frac{8\chi}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(\tilde{s}/\tilde{x})}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} d\tilde{s} \quad \Rightarrow \quad \tilde{w}_{\bar{m}} = \beta_{\bar{m}} \chi^{1/4} \tilde{x}^{1/4} \quad \Rightarrow \quad w_{\bar{m}} = \beta_{\bar{m}} \left( \frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} \tilde{x}^{5/8},$$

Lenoah 1995

Итак, мы пришли к одному уравнению на безразмерное открытие, в котором есть 3 характерных слагаемых: первое (внешинтегральное) слагаемое описывает эффект трещиностойкости, второе слагаемое включает в себя эффект вязкости, третье слагаемое отвечает за утечки.

Соответственно выделяют 3 аналитических решения:

- 1) в случае доминирования трещиностойкости (при очень маленьких вязкости и утечках, например, закачиваем воду в практически непроницаемый резервуар);
- 2) в случае доминирования вязкости (чтобы трещиностойкость была пренебрежимо малой, можно представить себе, что мы закачиваем жидкость в уже существующую трещину) – получается некое интегральное уравнение – на следующем слайде будет представлено полное решение этого уравнения;
- 3) в случае доминирования утечек.

### Derivation of the viscosity solution

Governing integral equation

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(\tilde{s}/\tilde{x})}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} d\tilde{s}$$

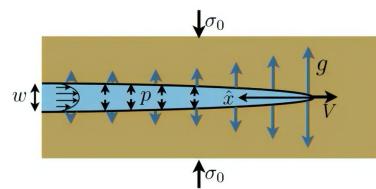
$\downarrow$

$$\beta_m \tilde{x}^{\alpha_m} = \frac{8\tilde{x}^{2\alpha_m-1}}{\pi\beta_m^2} \int_0^\infty \frac{G(t)}{t^{2\alpha_m}} dt$$

$\downarrow$

Form of the solution

$$\tilde{w} = \beta_m \tilde{x}^{\alpha_m}$$



$$\alpha_m = 1/3 \quad \beta_m = 2^{1/3} 3^{5/6},$$

$\downarrow$

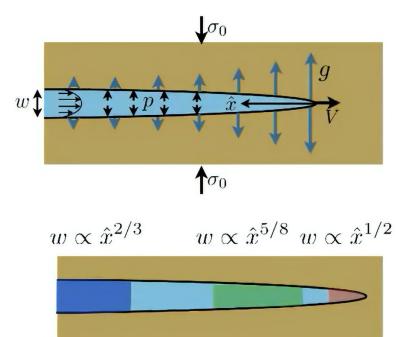
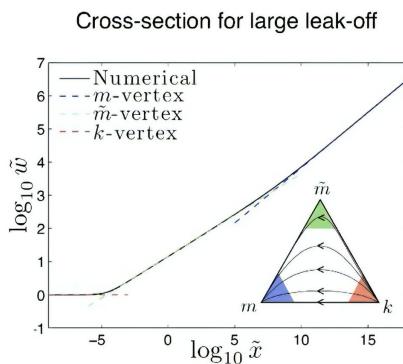
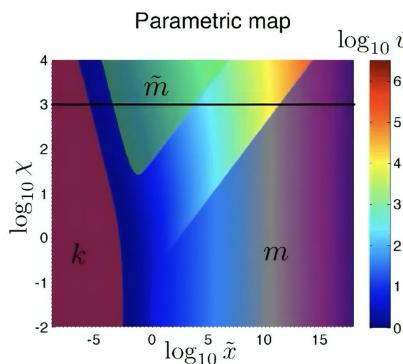
$$\tilde{w}_m = \beta_m \tilde{x}^{1/3}$$

Leak-off dominated solution can be derived in a similar way.

Теперь покажу вывод решения в случае доминирования вязкости.

Предполагаем решение в форме степенной функции, подставляем и находим константы (интеграл считается аналитически).

### Structure of the solution



Vertex solutions:

$$\tilde{w}_k = 1, \quad \tilde{w}_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \chi^{1/4} \tilde{x}^{1/4}, \quad \tilde{w}_m = \beta_m \tilde{x}^{1/3},$$

$\downarrow$

Solution transitions gradually from one limiting solution to another starting from toughness, then passing through leak-off (for large leak-off), and then reaching viscosity vertex.

Теперь посмотрим, как выглядит полное решение. Можем его найти численно.

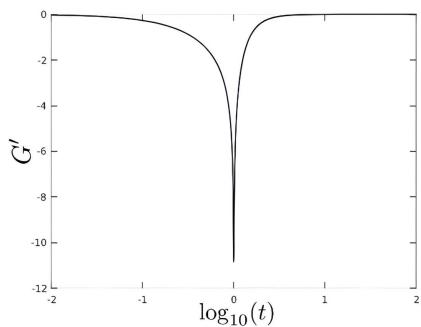
На центральном графике на слайде: чёрная линия – численное решение рассматриваемого интегрального уравнения (при некотором наборе входных параметров), цветными линиями показаны предельные аналитические решения.

Видим, что по порядку величины не ошибёмся, если возьмём максимум известных аналитических решений.

### Approximate solution

$\tilde{w}(\tilde{x}) = 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G(\tilde{s}/\tilde{x}) \left[ \frac{1}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} \right] d\tilde{s}$ , Numerical solution of this equation is time consuming and can be a limiting factor for some applications, such as using it as a propagation condition for a planar fracture. So, need to construct an efficient approximation.

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \text{Differentiate} \\ \downarrow \\ \frac{d\tilde{w}(\tilde{x})}{d\tilde{x}} = -\frac{8}{\pi} \int_0^\infty G'(\tilde{s}/\tilde{x}) \frac{\tilde{s}}{\tilde{x}^2} \left[ \frac{1}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} \right] d\tilde{s}, \quad \tilde{w}(0) = 1. \\ \downarrow \\ \text{Assume that } \tilde{w} \propto \tilde{x}^\delta \\ \downarrow \\ \frac{d\tilde{w}(\tilde{x})}{d\tilde{x}} = -\frac{8}{\pi} \int_0^\infty G'(\tilde{s}/\tilde{x}) \frac{\tilde{x}^{2\delta-1}}{\tilde{s}^{2\delta-1}} \frac{d\tilde{s}}{\tilde{x}} \left[ \frac{\tilde{s}^{2\delta}}{\tilde{w}(\tilde{s})^2 \tilde{x}^{2\delta}} \right] - \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G'(\tilde{s}/\tilde{x}) \frac{\tilde{x}^{3\delta-1}}{\tilde{s}^{3\delta-1}} \frac{d\tilde{s}}{\tilde{x}} \left[ \frac{\chi \tilde{s}^{3\delta}}{\tilde{w}(\tilde{s})^3 \tilde{x}^{3\delta}} \right]. \\ \downarrow \\ \text{Replace } G' \text{ with Delta function (set } \tilde{s} = \tilde{x} \text{ in [ ] and compute integrals)} \\ \tilde{w}' = \frac{C_1(\delta)}{\tilde{w}^2} + \frac{\chi C_2(\delta)}{\tilde{w}^3}, \quad \delta = \tilde{x} \frac{\tilde{w}'}{\tilde{w}}, \quad \tilde{w}(0) = 1, \\ C_1(\delta) = \frac{4(1-2\delta)}{\delta(1-\delta)} \tan(\pi\delta), \quad C_2(\delta) = \frac{16(1-3\delta)}{3\delta(2-3\delta)} \tan\left(\frac{3\pi}{2}\delta\right). \end{array}$$



Повторюсь, что даже в приближении решения в виде максимума предельных решений будет относительно неплохой ответ (он будет негладкий, но он будет вполне точный).

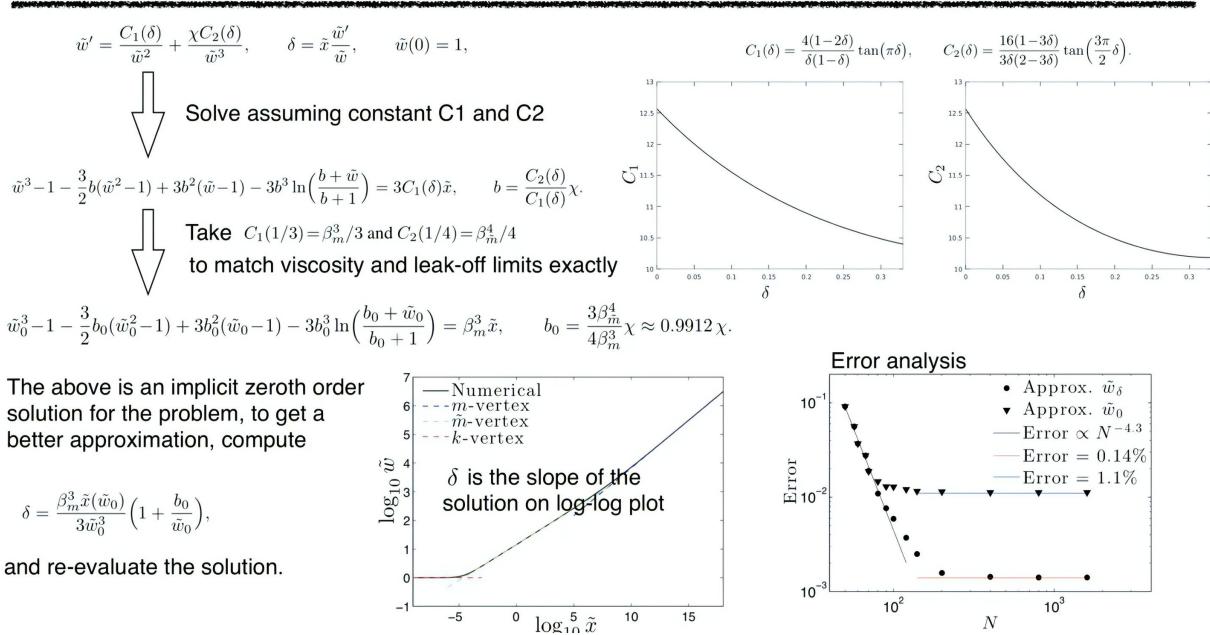
Но давайте выведем гладкое и ещё более точное приближённое решение.

Для этого:

- 1) дифференцируем интегральное уравнение;
- 2) предполагаем, что безразмерное открытие пропорционально некой степени безразмерной координаты  $\tilde{x}$  (мы же видели, что все предельные решения имеют степенной характер зависимости от координаты);
- 3) заменяем функцию  $G'$  делта-функцией (если нарисуем график функции  $G'$ , то увидим, что она очень похожа на делта-функцию) – здесь ещё важно, что выражение в квадратных скобках меняется слабо, так как мы предполагаем, что  $\delta$  меняется слабо (от 0 до 1/3 – оно не меняется на порядки).

Важно, что в итоге получается некое дифференциальное уравнение, в котором  $C_1$  и  $C_2$  слабо меняются в зависимости от  $\delta$ .

### Approximate solution



Из верхних графиков на слайде видим, что  $C_1$  и  $C_2$  слабо изменяются в зависимости от  $\delta$ . Т.е. даже если примем  $C_1$  и  $C_2$  за константы, то всё равно с хорошей точностью опишем решение. Так и сделаем.

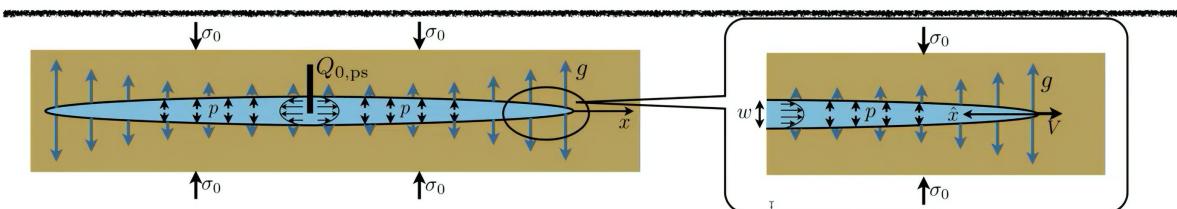
Получим неявную зависимость открытия  $\tilde{w}_0$  от  $\tilde{x}$  и  $\chi$ . И это общая форма решения во всём параметрическом пространстве.

Далее можно пересчитать  $\delta$  на основе полученного решения, подставить его в уравнение и найти следующее приближение к решению.

Первое приближение даёт максимальную погрешность в 1 процент (по сравнению с численным решением), а второе приближение даёт максимальную погрешность в 0.14 процента. Это погрешность между только что полученным приближённым полуаналитическим решением и численным решением во всём параметрическом пространстве.

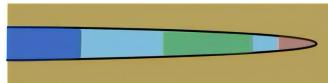
Таким образом, получили хорошее полуаналитическое приближение для полного решения полубесконечной трещины.

## Things to remember for the semi-infinite hydraulic fracture

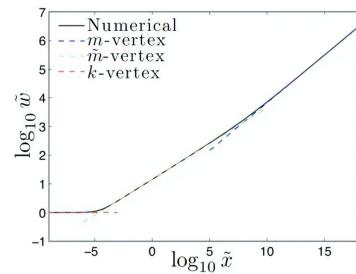


- Semi-infinite geometry describes tip region of a finite hydraulic fracture
- There are three limiting analytic solutions: toughness, viscosity, and leak-off
- The global solution gradually transitions from one limiting case to another
- There is computationally efficient approximate solution for the problem that can be used as a propagation condition for finite fractures

$$w \propto \hat{x}^{2/3} \quad w \propto \hat{x}^{5/8} \quad w \propto \hat{x}^{1/2}$$



$$w_k = \frac{K'}{E'} \hat{x}^{1/2}, \quad w_{\bar{m}} = \beta_{\bar{m}} \left( \frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} \hat{x}^{5/8}, \quad w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} \hat{x}^{2/3}.$$



На этом мы заканчиваем раздел про полубесконечную трещину.

Я хочу, чтобы вы запомнили, что полубесконечная трещина – это модель трещины ГРП, которая описывает кончик конечной трещины (плоской, планарной и т.п.).

Для полубесконечной трещины существует 3 предельных аналитических решения (доминирование трещиностойкости, вязкости или утечек), которые представляют из себя некие степенные функции, показывающие характер зависимости раскрытия от расстояния от кончика трещины и всех входных параметров задачи.

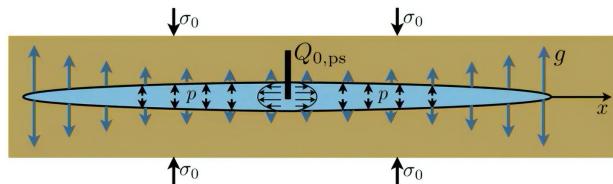
Полное решение модели полубесконечной трещины плавно переходит от одного предельного решения к другому.

Если на пальцах необходимо посчитать полное решение, то можно взять максимум между предельными аналитическими решениями (и тем самым оценить открытие в зависимости от входных параметров задачи).

Получено приближённое решение для полного решения задачи о полубесконечной трещине. Это приближённое решение может быть использовано в качестве условия распространения в численных моделях расчёта ГРП.

### 3.2 Математическая модель плоской трещины ГРП. Продолжение

Plane strain hydraulic fracture



Governing equations

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = Q_{0,ps}(t)\delta(x),$$

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_n}{\partial x},$$

$$p_n(x) = -\frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s)ds}{(x-s)^2},$$

$$w \rightarrow \frac{K'}{E'} \sqrt{l-x}, \quad x \rightarrow l.$$

Scales

$$\frac{w_*}{t} = \frac{q_*}{l_*} = \frac{C'}{t^{1/2}} = \frac{Q_{0,ps}}{l_*},$$

$$q_* = \frac{w_*^3 p_*}{\mu' l_*},$$

$$p_* = \frac{E' w_*}{l_*},$$

$$w_* = \frac{K'}{E'} l_*^{1/2}.$$

6 equations, 4 unknowns

Давайте обсудим (проведём анализ) плоской трещины (двуухмерная упругость, одномерное течение) более подробно.

Ранее изучили более простую модель полубесконечной трещины и для неё выяснили, что в определённых предельных случаях можем посчитать точное аналитическое решение, а полное решение задачи получается приближённым (с ошибкой примерно 0.1 процента). Т.е. для полу бесконечной трещины не можем абсолютно точно найти полное решение.

Для плоской трещины ситуация будет очень похожая: в каких-то приближениях (предельных случаях) мы сможем найти точное решение. А полное решение можно будет тоже построить (сострять) из предельных решений, но оно будет приближённым.

Ещё раз напомню проблему: есть одномерная трещина, которая распространяется в упругом материале (в условиях плоских деформаций), закачиваем жидкость с определённым расходом  $Q_0$ , есть входные параметры (вязкость, утечки, трещиностойкость, модуль Юнга), мы хотим посчитать открытие как функцию времени и координаты.

Сделаем некий математический трюк (масштабирование / обезразмеривание). Давайте посмотрим, в каких пределах по порядку величины меняются слагаемые в рассматриваемых уравнениях. В итоге, получаем алгебраическую систему уравнений на характерные масштабы рассматриваемых величин (обозначены индексом \*).

Но видим, что в этой алгебраической системе 6 уравнений и 4 неизвестных. Поэтому нет общего красивого решения. Но если мы занулим некоторые параметры, то тогда сможем получить аналитическое решение (аналогичная ситуация была и для полубесконечной трещины). Мы хотим 4 уравнения и 4 неизвестных, поэтому нужно занулить два каких-то параметра.

Замечание: в постановке задачи в определяющих уравнениях нет сжимающего напряжения  $\sigma_0$ .

Т.е. на самом деле решение этой задачи по большей части не зависит от  $\sigma_0$ . Это сжимающее напряжение сидит в определении коэффициента Картера (если  $p_n$  много меньше, чем  $\sigma_0$  минус поровое давление, то можно коэффициент Картера посчитать при  $p = \sigma_0$ ). Величина  $p_n$  – это так называемое чистое давление (net pressure), которое определяет, насколько преодолели давление  $\sigma_0$  (чтобы раскрыть трещину).

В такой постановке важно, что  $\sigma_0$  постоянно.

### Scaling for viscosity-storage solution

Viscosity-storage => no toughness, no leak-off

$$\begin{aligned} \frac{w_*}{t} &= \frac{q_*}{l_*} = \frac{\cancel{C'}}{\cancel{t^{1/2}}} = \frac{Q_{0,ps}}{l_*}, \\ q_* &= \frac{w_*^3 p_*}{\mu' l_*}, \\ p_* &= \frac{E' w_*}{l_*}, \\ w_* &= \cancel{\frac{K'}{E'}} l_*^{1/2}. \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Scaling solution}} \quad \begin{aligned} l_* &= \left( \frac{Q_{0,ps}^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/6}, & w_* &= \left( \frac{\mu' Q_{0,ps}^3 t^2}{E'} \right)^{1/6}, & p_* &= \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

### M-vertex solution

$$\begin{aligned} w_m(\xi, t) &= 1.1265 \left( \frac{\mu' Q_0^3 t^2}{E'} \right)^{1/6} (1+\xi)^{0.588} (1-\xi)^{2/3}, \\ p_m(\xi, t) &= 2.7495 \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3} \mathcal{F}\left(\xi, 0.588, \frac{2}{3}\right), \\ l_m(t) &= 0.6159 \left( \frac{Q_0^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/6}. \end{aligned}$$

Рассмотрим предельное решение viscosity-storage, которое реализуется при доминировании вязкости (нет трещиностойкости и нет утечек). Убираем два соответствующих уравнения и получаем 4 уравнения с четырьмя неизвестными. Решаем полученную алгебраическую систему уравнений и находим выражения для характерных величин (зависимости от входных параметров задачи и времени).

Заметьте, что результат получили чисто из масштабирования и при этом не решали дифференциальные уравнения.

Если найдём точное решение (*M-vertex solution*) для рассматриваемого режима (доминирование вязкости), то увидим, что оно представляет из себя некий числовой множитель умножить на только что найденный нами характерный масштаб и умножить на некоторую безразмерную функцию от безразмерной координаты  $\xi$ .

Видим, что открытие, полученное чисто из масштабирования (без решения дифференциальных уравнений) отличается от точного решения примерно на 13 процентов.

### Scaling for toughness-storage solution

---

Toughness-storage => no viscosity, no leak-off

$$\frac{w_*}{t} = \frac{q_*}{l_*} = \cancel{\frac{C'}{t^{1/2}}} = \frac{Q_{0,ps}}{l_*},$$

$$q_* = \cancel{\frac{w_*^3 p_*}{\mu' l_*}},$$

$$p_* = \frac{E' w_*}{l_*},$$

$$w_* = \frac{K'}{E'} l_*^{1/2}.$$

Scaling solution



$$l_* = \left( \frac{E' Q_{0,ps} t}{K'} \right)^{2/3}, \quad w_* = \left( \frac{K'^2 Q_{0,ps} t}{E'^2} \right)^{1/3}, \quad p_* = \left( \frac{K'^4}{E'^2 Q_{0,ps} t} \right)^{1/3}$$

I

#### K-vertex solution

$$w_k(\xi, t) = 0.6828 \left( \frac{K'^2 Q_{0,t}}{E'^2} \right)^{1/3} (1 - \xi^2)^{1/2},$$

$$p_k(\xi, t) = 0.1831 \left( \frac{K'^4}{E' Q_{0,t}} \right)^{1/3},$$

$$l_k(t) = 0.9324 \left( \frac{E' Q_{0,t}}{K'} \right)^{2/3}.$$

Рассмотрим предельный случай toughness-storage, который реализуется при доминировании трещиностойкости (нет вязкости и нет утечек). Убираем два соответствующих уравнения и получаем 4 уравнения с четырьмя неизвестными. Решаем полученную алгебраическую систему уравнений и находим выражения для характерных величин (зависимости от входных параметров задачи и времени).

Заметьте, что результат получили чисто из масштабирования и при этом не решали дифференциальные уравнения.

Если найдём точное решение (*K*-vertex solution) для рассматриваемого режима (доминирование трещиностойкости), то увидим, что оно представляет из себя некий числовой множитель умножить на только что найденный нами характерный масштаб и умножить на некоторую безразмерную функцию от безразмерной координаты  $\xi$ .

Видим, что открытие, полученное чисто из масштабирования (без решения дифференциальных уравнений) отличается от точного решения примерно на 30 процентов.

Обратите внимание, что при доминировании трещиностойкости давление не зависит от координаты, т.к. нет вязкости.

Примечание: давление падает только тогда, когда есть вязкость; именно из-за вязкости возникает трение, которое необходимо преодолеть, и соответственно появляется падение давления из-за трения; а если нет вязкости, то нет и градиента давления, поэтому давление не зависит от координаты.

### Toughness-viscosity transition

---

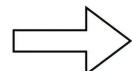
Use either

$$l_m \sim l_k$$

$$w_m \sim w_k$$

$$p_m \sim p_k$$

Dimensionless toughness



$$K_m = \left( \frac{K'^4}{\mu' E'^3 Q_{0,ps}} \right)^{1/4}$$

$K_m \ll 1$  M vertex (viscosity dominated)

$K_m \gg 1$  K vertex (toughness dominated)

$K_m \sim 1$  M-K transition

**This is only part of the story, how about leak-off?**

Теперь давайте рассмотрим качественный переход между трещиностойкостью и вязкостью.

На примере полубесконечной трещины видели, что есть несколько предельных степенных решения, а общее решение плавно переходит от одного предельного решения к другому.

Для полубесконечной трещины переход происходил при увеличении расстояния от кончика трещины.

А здесь (в рассматриваемой задаче о плоской трещине) переход между режимами будет происходить с течением времени (решение будет плавно переходить от одной функции к другой функции).

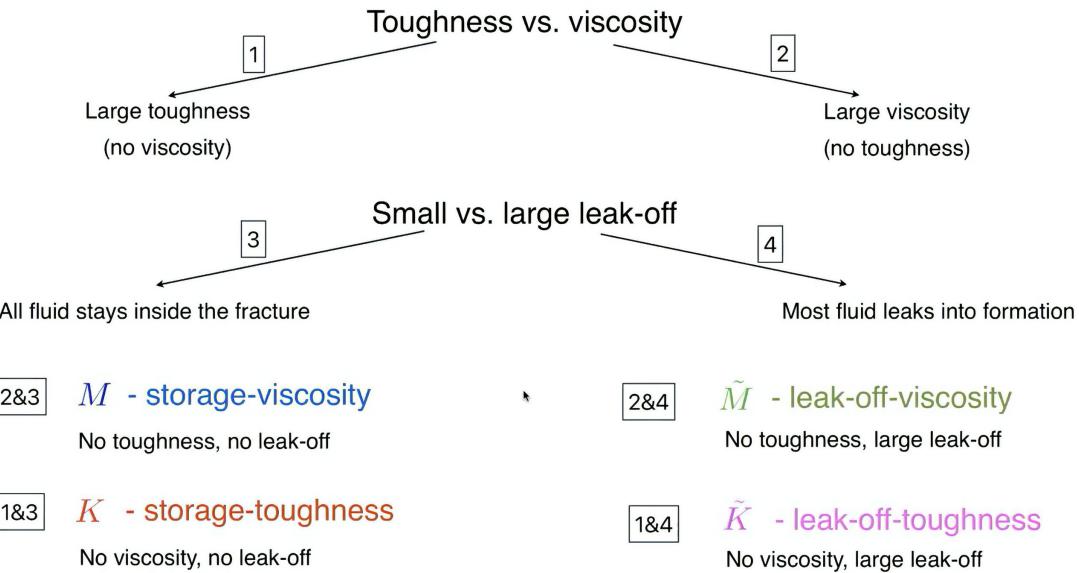
Чтобы определить, какой параметр отвечает за этот переход, берём решение для масштабов длин (или открытый, или давлений) в двух режимах и приравниваем их. Получаем безразмерную трещиностойкость. Этот параметр определяет, насколько большая трещиностойкость.

Если безразмерная трещиностойкость много меньше единицы, то эффект трещиностойкости много меньше эффекта вязкости (*M vertex solution*).

Если безразмерная трещиностойкость много больше единицы, то эффект трещиностойкости будет доминировать (вязкость будет мала по сравнению с трещиностойкостью; *K vertex solution*). Ясно, что мы не можем просто сравнить вязкость и трещиностойкость (хотя бы потому что у них разные размерности), поэтому необходимо проводить анализ в безразмерных переменных.

Но рассмотрели ещё только первую часть, так как рассматривали предельные решения и переход между ними в случае отсутствия утечек.

### Hydraulic fracture regimes of propagation



В общем и целом для конечной плоской трещины есть соревнование на доминирование между трещиностойкостью и вязкостью (эти два процесса создают сопротивление росту трещины и отвечают за диссипацию); и дополнительно есть характеристика утечек (Большая часть жидкости остаётся в трещине или же Большая часть жидкости утекает в породу).

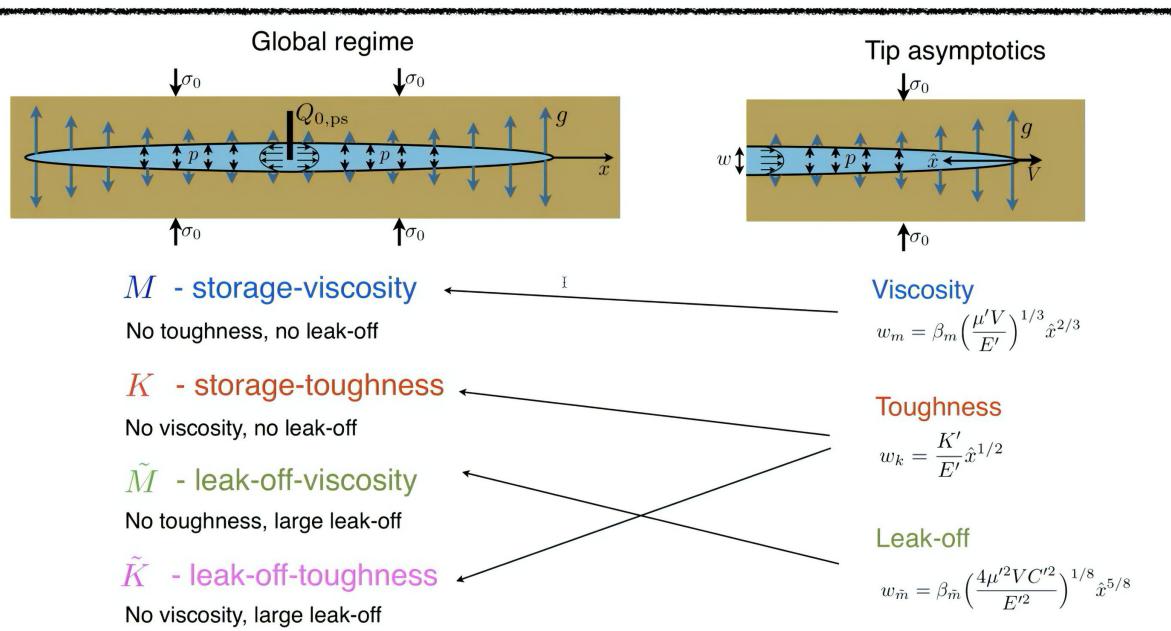
Соответственно получаем 4 предельных решения:

- 1) доминирующая вязкость и маленькие утечки (режим  $M$  – storage-viscosity);
- 2) доминирующая вязкость и большие утечки (режим  $\tilde{M}$  – leak-off-viscosity);
- 3) доминирующая трещиностойкость и маленькие утечки (режим  $K$  – storage-toughness);
- 4) доминирующая трещиностойкость и большие утечки (режим  $\tilde{K}$  – leak-off-toughness).

Это довольно большое отличие от полубесконечной трещины (для неё было только 3 предельных решения).

Замечание: 4 предельных режима будут не только в случае плоской трещины, но и для радиальной трещины, и для PKN модели.

## Tip asymptotics vs. regime



Важно знать связь между предельными решениями для плоской конечной трещины и предельными решениями для полубесконечной трещины. Вопрос стоит так: задан предельный режим распространения плоской трещины, необходимо определить какой режим реализуется возле кончика.

Вязкостная асимптота на кончике соответствует решению  $M$  (режим storage-viscosity) плоской трещины. Другими словами, когда плоская конечная трещина распространяется в предельном режиме большой вязкости и малых утечек, то возле кончика поведение будет описываться вязкостной асимптотой решения для полубесконечной трещины.

Появляется некая неоднозначность с трещиностойкостью: если доминирует трещиностойкость, то не важна интенсивность утечек, на кончике всегда открытие ведёт себя как корень из  $\hat{x}$ , т.е. для двух предельных решений плоской трещины одна и та же асимптота на кончике.

Но хочу обратить внимание, что решение вдали от кончика всё равно разное, например, в storage-toughness объём трещины будет больше, чем в leak-off-toughness (при одинаковой скорости зачёчки), так как в режиме storage-toughness нет утечек. Но поведение возле кончика в режимах storage-toughness и leak-off-toughness одинаковое.

Вообще это достаточно интересно, что асимптотика трещиностойкости реализуется на двух предельных решениях модели плоской трещины.

В предельном режиме большой вязкости и больших утечек плоской трещины (leak-off-viscosity) на кончике этой трещины реализуется асимптотический режим утечек полубесконечной трещины.

Дальше пойдём в большие глухие дебри. Расскажу больше про предельные режимы модели плоской трещины, при каких параметрах реализуются эти режимы, где найти решения для всех

этих предельных режимов и как построить приближённое решение, которое описывает все 4 предельных случая и переходы между ними.

Домашние задания по выводу формул на самом деле сложно сделать сходу; есть много технических деталей.

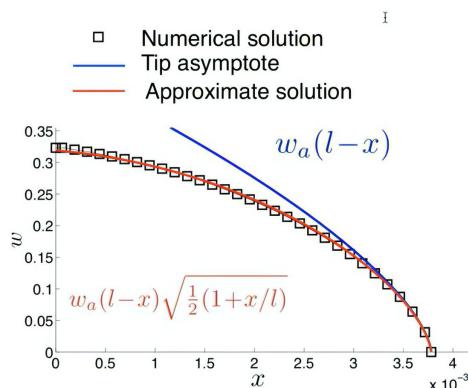
### Solution for the problem

- **Numerical solution**

- Discretize governing equations using finite differences, see Dontsov, 2017

- **Approximate solution**

- Global volume balance
- Approximate solution for width based on the tip asymptote



#### Global volume balance

$$\int_0^l (w(x, t) + 2C' \sqrt{t - t_0(x)}) dx = \frac{Q_{0,ps} t}{2},$$

$$l(t) \propto t^\alpha \implies x/l = (t_0/t)^\alpha$$

#### Approximate solution for width

$$w(x, t) = \left(\frac{l+x}{2l}\right)^\lambda w_a(l-x),$$

$\lambda$  - fitting parameter

Далее давайте поговорим про численное и приближённое аналитическое решения в общем случае.

Ранее поговорили о том, как можно на пальцах оценить решение, но понятно, что полностью точно решить систему уравнений модели плоской трещины аналитически практически невозможно (т.к. в нём есть дифференциальное уравнение в частных производных + интегральное уравнение + нелинейности + подвижные границы).

Один из основных методов решения такой системы – это метод численного решения. Но также можно найти приближённое аналитическое решение.

Численное решение: берём систему уравнений, дискретизируем её с помощью метода конечных разностей и после этого решаем дискретную систему уравнений. Этот метод применим к любому типу уравнений (и в рассматриваемом случае тоже), но мы не будем заморачиваться на деталях численной реализации.

Я хочу рассказать вам, как качественно построить приближённое решение и почему оно работает.

Зачем мы хотим построить приближённое решение? Хотим качественно понять и уловить основные моменты решения, чтобы более точно описать процесс распространения трещины.

На графике на слайде я привожу пример раскрытия плоской трещины как функцию координаты  $x$ . Численное решение показано квадратными маркерами. Если нарисуем асимптотическое решение возле кончика, то оно будет выглядеть подобно синей линии. Возле кончика асимптотическое решение всегда (при любых значениях входных параметров) будет совпадать с реше-

нием плоской трещины. В этом и есть суть асимптотики. Мы знаем приближённое асимптотическое решение на кончике для всех режимов (значений входных параметров модели).

Недавно я заметил, что если домножить это асимптотическое решение на  $\sqrt{\frac{1}{2}(1+x/l)}$ , то полученное решение будет очень хорошо совпадать с численным решением.

Откуда берётся этот множитель?

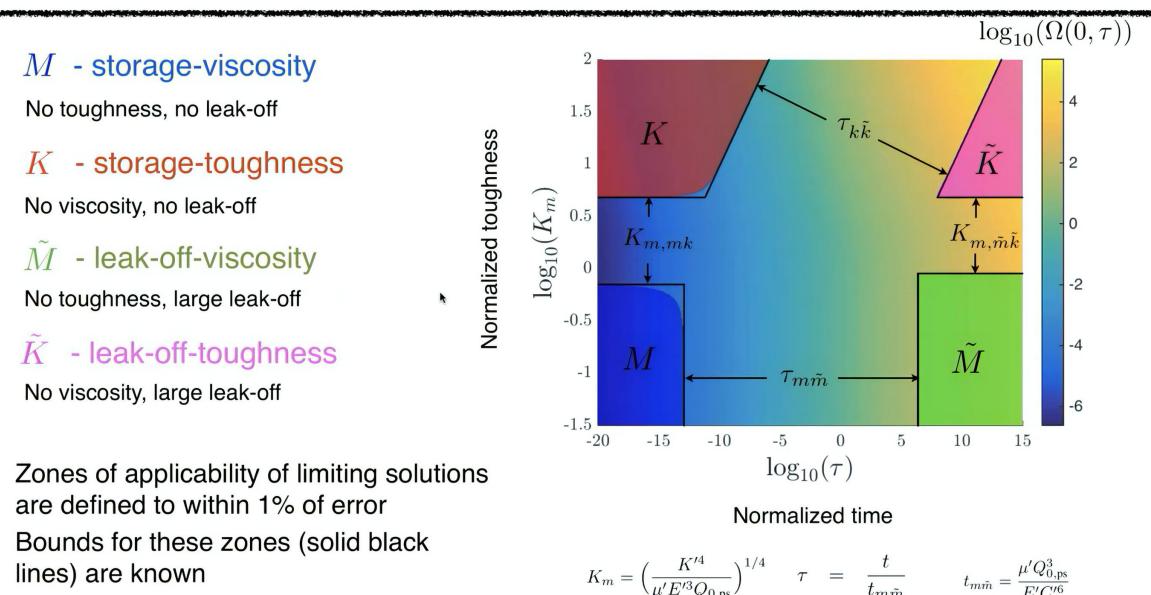
Для решения, которое соответствует режиму трещиностойкости, мы знаем аналитическое решение для открытия (это будет просто эллипс) и мы знаем аналитическое решение для асимптотики (это будет корень). Далее просто берём отношение одного решения к другому и получаем множитель.

Для режимов  $K$  и  $\tilde{K}$  этот множитель точен, а для решения с доминирующей вязкостью этот множитель приблизителен, но тем не менее он описывает 90-95% всего решения и поэтому его можно использовать.

Но это же не полное решение, для полного решения необходимо найти длину от времени, открытие от времени и т.д. Чтобы это всё найти мы используем только что найденную форму решения для открытия как функцию координаты  $x$  и подставляем её в общий закон сохранения объёма. Получаем 2 уравнения с двумя неизвестными, которые решаются численно, но без использования полной численной схемы (решаются очень быстро). В режиме трещиностойкости параметр  $\lambda = 1/2$ , а при других (более нетривиальных) режимах мы этот параметр подгоняем под численное решение. При этом  $\lambda$  для разных режимов варьируется слабо. Но вообще лямбду отличную от одной второй используем, если хотим увеличить точность (например, уменьшить погрешность с 5% до 1%).

Зачем это надо? Чтобы построить карту режимов...

Regimes of propagation for a plane strain hydraulic fracture



Ранее обсуждали, как получить безразмерную трещиностойкость  $K_m$ . Аналогичным образом можем получить безразмерное время (оно нормируется на величину, представленную на слайде).

Используя полуаналитическое приближённое решение, можно найти решение во всём параметрическом пространстве очень быстро (примерно за 1 час).

Численное решение тоже можно было использовать, но тогда количество точек в параметрическом пространстве, на которых производился бы расчёт, пришлось бы уменьшить. Плюс это всё решалось бы несколько недель, нужно было бы организовать распараллеливание.

В общем, приближённым полуаналитическим решением построить карту режимов в разы удобнее.

И в итоге мы можем построить зоны применимости всех предельных решений.

Замечание: численное решение часто начинает разваливаться или сильно замедляется (требует очень маленький шаг по времени) при очень высоких утечках; у приближённого полуаналитического решения таких проблем нет.

На карте режимов цветом показано безразмерное открытие как функция двух безразмерных параметров ( $K_m$  и  $\tau$ ).

Видим, что полное решение плавно перетекает от одного предельного режима к другому (похожая ситуация была и для модели полубесконечной трещины).

Замечание. Есть такая особенность, что из  $M$  режима вы не сможете попасть в режим  $\tilde{K}$  с течением времени (при неизменных остальных входных параметрах модели); из  $M$  режима вы можете попасть в режим  $\tilde{M}$  с течением времени. Это связано с тем, что по оси абсцисс на карте режимов отложено время, а безразмерная трещиностойкость (отложенная по оси ординат) зафиксирована.

Это одно из важных свойств рассматриваемой модели плоской трещины, и не у всех моделей ГРП есть такое свойство.

### Limiting solutions for a plane strain hydraulic fracture

#### $M$ - storage-viscosity

$$\begin{aligned} w_m(\xi, t) &= 1.1265 \left( \frac{\mu' Q_{0,ps}^3 t^2}{E'} \right)^{1/6} (1+\xi)^{0.588} (1-\xi)^{2/3}, \\ p_m(\xi, t) &= 2.7495 \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3} \mathcal{F}(\xi, 0.588, \frac{2}{3}), \\ l_m(t) &= 0.6159 \left( \frac{Q_{0,ps}^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/6}, \end{aligned}$$

#### $\tilde{M}$ - leak-off-viscosity

$$\begin{aligned} w_{\tilde{m}}(\xi, t) &= 0.8165 \left( \frac{\mu' Q_{0,ps}^3 t}{E' C'^2} \right)^{1/4} (1+\xi)^{0.520} (1-\xi)^{5/8}, \\ p_{\tilde{m}}(\xi, t) &= 3.6783 \left( \frac{C'^2 \mu' E'^3}{Q_{0,ps} t} \right)^{1/4} \mathcal{F}(\xi, 0.520, \frac{5}{8}), \\ l_{\tilde{m}}(t) &= 0.3183 \frac{Q_{0,ps} t^{1/2}}{C'}, \end{aligned}$$

#### $K$ - storage-toughness

$$\begin{aligned} w_k(\xi, t) &= 0.6828 \left( \frac{K'^2 Q_{0,ps} t}{E'^2} \right)^{1/3} (1-\xi^2)^{1/2}, \\ p_k(\xi, t) &= 0.1831 \left( \frac{K'^4}{E' Q_{0,ps} t} \right)^{1/3}, \\ l_k(t) &= 0.9324 \left( \frac{E' Q_{0,ps} t}{K'} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

#### $\tilde{K}$ - leak-off-toughness

$$\begin{aligned} w_{\tilde{k}}(\xi, t) &= 0.3989 \left( \frac{K'^4 Q_{0,ps}^2 t}{E'^4 C'^2} \right)^{1/4} (1-\xi^2)^{1/2}, \\ p_{\tilde{k}}(\xi, t) &= 0.3133 \left( \frac{K'^4 C'^2}{Q_{0,ps}^2 t} \right)^{1/4}, \\ l_{\tilde{k}}(t) &= 0.3183 \frac{Q_{0,ps} t^{1/2}}{C'}, \end{aligned}$$

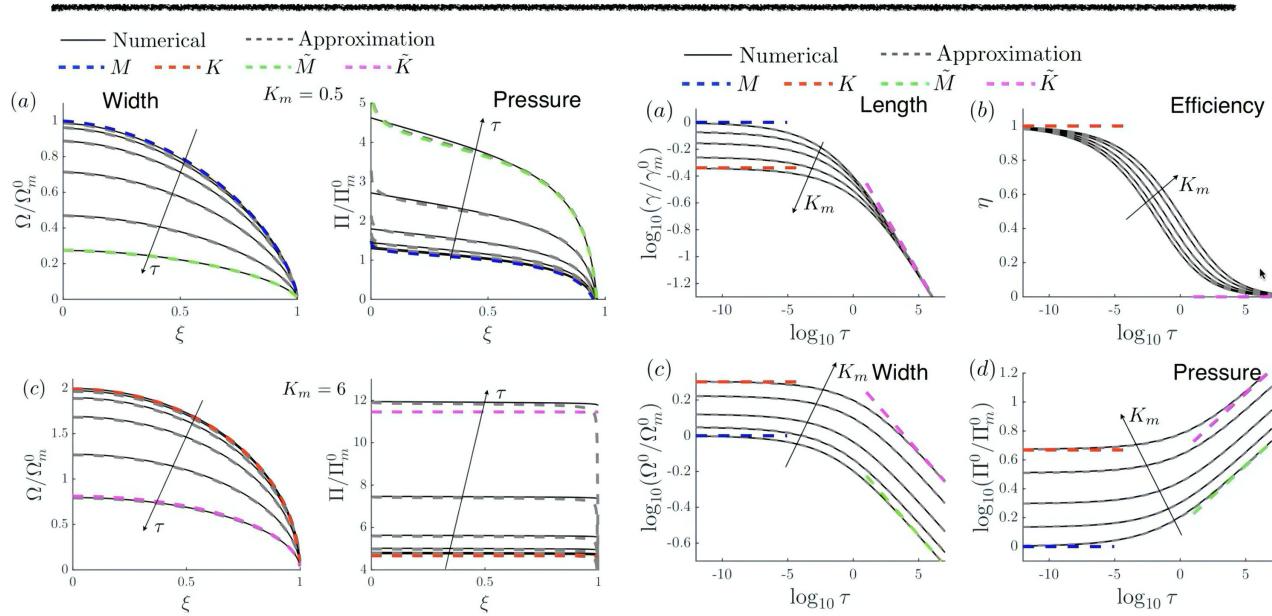
Elasticity function:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi, \lambda, \bar{s}) &= \frac{1}{2^{1+\lambda} \pi} \int_0^1 \frac{\partial M(\xi, s)}{\partial s} (1+s)^\lambda (1-s)^{\bar{s}} ds, \\ M(\xi, s) &= \frac{\xi}{\xi^2 - s^2}, \end{aligned}$$

Для всех четырёх предельных режимов плоской трещины есть явные аналитические формулы для открытия, давления и длины трещины (в виде функций координаты и времени, а также входных параметров модели).

Аналогично модели полу бесконечной трещины при необходимости знать полное решение модели плоской трещины можно воспользоваться максимумом (или минимумом) из всех предельных решений. С помощью такого подхода можно оценить длину трещины, давление и открытие на пальцах (например, при проведении лабораторного эксперимента).

### Numerical vs. approximate solutions



Здесь представлено много графиков.

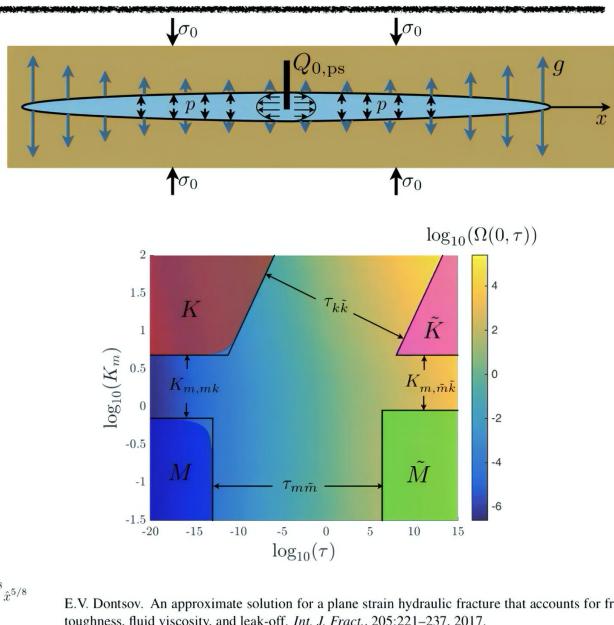
Давайте я акцентирую внимание на нескольких из них. Из левых четырёх графиков можем увидеть сильную разницу между режимами трещиностойкости ( $K_m = 6$ ) и вязкости ( $K_m = 0.5$ ). Давление вдоль трещины в режиме трещиностойкости постоянно, а в режиме доминирования вязкости давление существенно изменяется вдоль трещины.

$\xi$  – безразмерная координата;  $\Omega$  – безразмерное открытие;  $\Pi$  – безразмерное давление;  $\gamma$  – безразмерная длина;  $\eta$  – эффективность (определяет утечки; если равна 1, то вся закачанная жидкость осталась в трещине; если равна 0, то вся жидкость утекла из трещины)

Все величины на графиках (открытие, давление и длина) нормированы на соответствующие вязкостные решения без утечек для соответствующих величин.

### Things to remember for the plane strain hydraulic fracture

- Estimation of the solution based on scaling
  - Definition of fracture regimes
  - The relationship between the regimes for a finite fracture and tip asymptote
  - The existence of approximate solution constructed using global volume balance and tip asymptote
  - The existence of explicit expressions for limiting or vertex cases
  - Parametric space for the problem, two dimensionless parameters, dimensionless toughness and dimensionless time
- |  |  |
|--|--|
| <b>M - storage-viscosity</b><br>No toughness, no leak-off      | <b>Viscosity</b><br>$w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} \dot{x}^{2/3}$           |
| <b>K - storage-toughness</b><br>No viscosity, no leak-off      | <b>Toughness</b><br>$w_k = \frac{K'}{E'} \dot{x}^{1/2}$  |
| <b>M̃ - leak-off-viscosity</b><br>No toughness, large leak-off | <b>Leak-off</b>  |
| <b>K̃ - leak-off-toughness</b><br>No viscosity, large leak-off | $w_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} \dot{x}^{5/8}$ |



E.V. Dontsov. An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *Int. J. Fract.*, 205:221–237, 2017.

На этом мы заканчиваем раздел про плоскую трещину. В этом разделе на самом деле есть очень много технических деталей, которые я специально опустил.

Ранее (ещё до подробного разбора модели плоской трещины) мы прошлись по техническим деталям вывода базовых уравнений моделей трещины ГРП, по техническим деталям вывода решений для полубесконечной трещины.

Чем сложнее становится геометрия, тем насыщеннее становится математика.

Но я думаю, что здесь наиболее важно понимание физики и понимание того, какие предельные решения существуют, в чём их смысл, как они переходят друг в друга и как их использовать.

Для плоской трещины решаем двухмерное уравнение упругости и одномерное уравнение течения.

Мы оценили решение, исходя из оценки масштабов слагаемых в системе уравнений (смогли оценить решение в предельных случаях с точностью до численного множителя).

Важно помнить связь между предельными режимами плоской трещины и асимптотиками возле кончика трещины.

Для плоской трещины существует приближённое полуаналитическое решение.

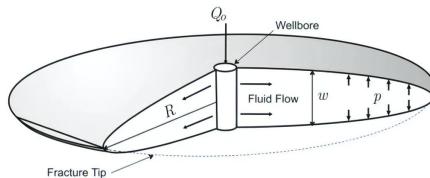
Также существуют точные аналитические решения для четырёх предельных режимов. Их важно знать, например, если вы написали свой численный алгоритм для трещины ГРП и хотите его проверить. Важно делать проверку в разных режимах, так как, например, только в режиме  $K$  не сможем проверить правильность имплементации вязкостных эффектов.

Важно, что для модели плоской трещины существует параметрическое пространство, которое можно реконструировать, используя, например, полученные приближённые полуаналитические решения.

## 4 Лекция 16.03.2021 (Донцов Е.В.)

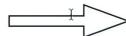
### 4.1 Математическая модель радиальной трещины ГРП

Radial hydraulic fracture



#### Governing equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq) + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} &= Q_0 \delta(r), \\ q &= -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_n}{\partial r}, \\ p_n(r, t) &= -\frac{E'}{2\pi R} \int_0^R M\left(\frac{r}{R}, \frac{r'}{R}\right) \frac{\partial w(r', t)}{\partial r'} dr', \\ w \rightarrow \frac{K'}{E'}(R-r)^{1/2}, \quad r \rightarrow R. \end{aligned}$$



#### Scales

$$\begin{aligned} \frac{w_*}{t} &= \frac{q_*}{R_*} = \frac{C'}{t^{1/2}} = \frac{Q_0}{R_*^2}, \\ q_* &= \frac{w_*^3 p_*}{\mu' R_*}, \\ p_* &= \frac{E' w_*}{R_*}, \\ w_* &= \frac{K' R_*^{1/2}}{E'}. \end{aligned}$$

6 equations, 4 unknowns

Напомню: в случае радиальной геометрии рассматриваем планарную трещину (растёт, например, в плоскости  $Oxy$ ), есть точечный источник и объёмная закачка жидкости  $Q_0$ ; предполагается, что слоёв нет (или эффекты слоёв малы); радиальная симметрия и задача всё равно одномерная; единственная разница с плоской трещиной в том, что дивергенция потока будет записана в цилиндрических координатах и уравнение упругости будет другим (а именно другое ядро  $M$  – довольно сложная функция – её можно найти, но важно знать, что она другая).

Уравнения для радиальной и плоской трещин очень похожи: также есть утечки, есть связь потока и градиента давления, есть критерий распространения.

Аналогично, в случае радиальной трещины можем взять уравнение и оценить значения в нём по порядку величины (ввести безразмерные величины).

Но в чём разница с плоской трещиной?

Появился квадрат в первом уравнении перед характерным масштабом длины, т.к. в исходном уравнении изменились расход (он был двухмерный с размерностью  $\text{m}^2/\text{с}$ ; теперь он трёхмерный с размерностью  $\text{m}^3/\text{с}$ ) и дельта-функция (она была одномерной с размерностью  $1/\text{м}$ ; теперь у неё размерность  $1/\text{м}^2$ ).

И такая разница в один характерный масштаб длины даёт совершенно другой ответ для решения. Такой, так сказать, геометрический фактор.

### Scaling for viscosity-storage solution

Viscosity-storage => no toughness, no leak-off

$$\begin{aligned} \frac{w_*}{t} &= \frac{q}{R_*} = \frac{C'}{t^{1/2}} = \frac{Q_0}{R_*^2}, \\ q &= \frac{w_*^3 p_*}{\mu' R_*}, \\ p_* &= \frac{E' w_*}{R_*}, \\ w &\neq \frac{K' R_*^{1/2}}{E'}. \end{aligned}$$

Scaling solution

$$R_* = \left( \frac{Q_0^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/9}, \quad w_* = \left( \frac{\mu'^2 Q_0^3 t}{E'^2} \right)^{1/9}, \quad p_* = \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3}$$

M-vertex solution<sup>I</sup>

$$\begin{aligned} w_m(\rho, t) &= 1.1901 \left( \frac{\mu'^2 Q_0^3 t}{E'^2} \right)^{1/9} (1+\rho)^{0.487} (1-\rho)^{2/3}, \\ p_m(\rho, t) &= 2.4019 \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3} \mathcal{F}(\rho, 0.487, \frac{2}{3}), \\ R_m(t) &= 0.6944 \left( \frac{Q_0^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/9}, \end{aligned}$$

Аналогично, можем оценить решение в пределе viscosity-storage (т.е. когда нет трещиностойкости и нет утечек): решаем алгебраическую систему уравнений аналитически и получаем зависимость радиуса, открытия и давления от времени. Здесь радиус зависит от времени в степени 4/9; в плоской трещине степень была равна 2/3 (т.е. в случае радиальной трещины радиус от времени растёт не так быстро – что вполне логично: наш блин растекается, площадь становится больше и поэтому скорость роста со временем уменьшается).

Если сравним с более полным (но тоже приближённым) решением, увидим, что добавились численные множители и зависимость от безразмерного радиуса, которые мы не могли найти с помощью обезразмеривания.

### Regimes of propagation for a radial hydraulic fracture

*M* - storage-viscosity

No toughness, no leak-off

*K* - storage-toughness

No viscosity, no leak-off

*M̃* - leak-off-viscosity

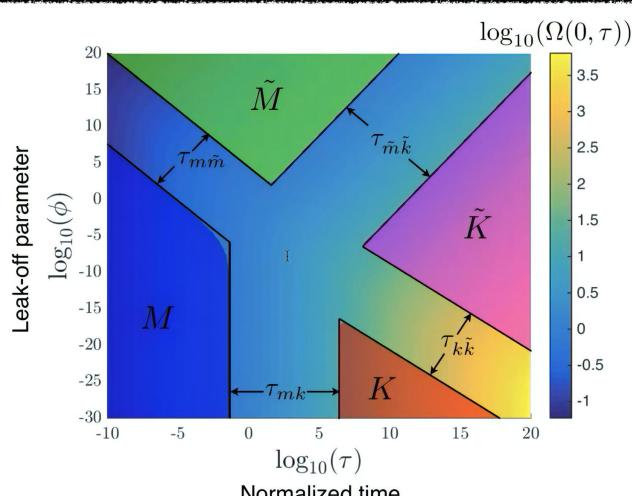
No toughness, large leak-off

*K̃* - leak-off-toughness

No viscosity, large leak-off

Zones of applicability of limiting solutions  
are defined to within 1% of error

Bounds for these zones (solid black  
lines) are known



$$\phi = \frac{\mu'^3 E'^{11} C'^4 Q_0}{K'^{14}} \quad \tau = \frac{t}{t_{mk}} \quad t_{mk} = \left( \frac{\mu'^5 E'^{13} Q_0^3}{K'^{18}} \right)^{1/2}$$

Абсолютно аналогично можно найти приближённое решение; я не буду рассказывать про дета-

ли: берём асимптотику, закон сохранения объёма, решаем и получаем приближённое решение (единственная разница будет в интегрировании по объёму за счёт появившегося дополнительного радиуса).

Но сильно изменяется параметрическое пространство и то, как решение себя ведёт. Здесь сильно другие безразмерные параметры: по оси  $Ox$  безразмерное время (оно теперь не зависит от утечек); по оси  $Oy$  безразмерные утечки.

Аналогично есть 4 концептуальных предела.

Но важно, что теперь во времени решение может перескакивать от одного предела к другому.

Можно понять на пальцах: когда трещина очень маленькая, то реализуется режим  $M$  (скорость распространения относительно большая), далее при продолжении закачки трещина расширяется (скорость распространения становится меньше) и вязкостная диссиляция падает, т.е. переходим в режим  $K$ ; если продолжается дальнейший рост трещины, то её площадь ещё больше возрастает и утечки через эту большую площадь начинают доминировать.

Ещё раз: качественно поведение совсем другое, но то, как вы можете использовать параметрическое пространство, идентично тому, что было в плоской трещине, т.е. мы можем посчитать два безразмерных параметра, они дадут нам точку на параметрическом пространстве, из которой вы узнаете текущий режим.

### Regimes of propagation for radial HF

---

#### $M$ - storage-viscosity

$$\begin{aligned} w_m(\rho, t) &= 1.1901 \left( \frac{\mu'^2 Q_0^3 t}{E'^2} \right)^{1/9} (1+\rho)^{0.487} (1-\rho)^{2/3}, \\ p_m(\rho, t) &= 2.4019 \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3} \mathcal{F}(\rho, 0.487, \frac{2}{3}), \\ R_m(t) &= 0.6944 \left( \frac{Q_0^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/9}, \end{aligned}$$

#### $\tilde{M}$ - leak-off-viscosity

$$\begin{aligned} w_{\tilde{m}}(\rho, t) &= 1.0574 \left( \frac{\mu'^4 Q_0^6 t}{E'^4 C'^2} \right)^{1/16} (1+\rho)^{0.397} (1-\rho)^{5/8}, \\ p_{\tilde{m}}(\rho, t) &= 3.0931 \left( \frac{\mu'^4 E'^{12} C'^6}{Q_0^2 t^3} \right)^{1/16} \mathcal{F}(\rho, 0.397, \frac{5}{8}), \\ R_{\tilde{m}}(t) &= 0.4502 \left( \frac{Q_0^2 t}{C'^2} \right)^{1/4}, \end{aligned}$$

#### $K$ - storage-toughness

$$\begin{aligned} w_k(\rho, t) &= 0.6537 \left( \frac{K'^4 Q_0 t}{E'^4} \right)^{1/5} (1-\rho^2)^{1/2}, \\ p_k(\rho, t) &= 0.3004 \left( \frac{K'^6}{E' Q_0 t} \right)^{1/5}, \\ R_k(t) &= 0.8546 \left( \frac{E' Q_0 t}{K'} \right)^{2/5}. \end{aligned}$$

#### $\tilde{K}$ - leak-off-toughness

$$\begin{aligned} w_{\tilde{k}}(\rho, t) &= 0.4744 \left( \frac{K'^8 Q_0^2 t}{E'^8 C'^2} \right)^{1/8} (1-\rho^2)^{1/2}, \\ p_{\tilde{k}}(\rho, t) &= 0.4139 \left( \frac{K'^8 C'^2}{Q_0^2 t} \right)^{1/8}, \\ R_{\tilde{k}}(t) &= 0.4502 \left( \frac{Q_0^2 t}{C'^2} \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

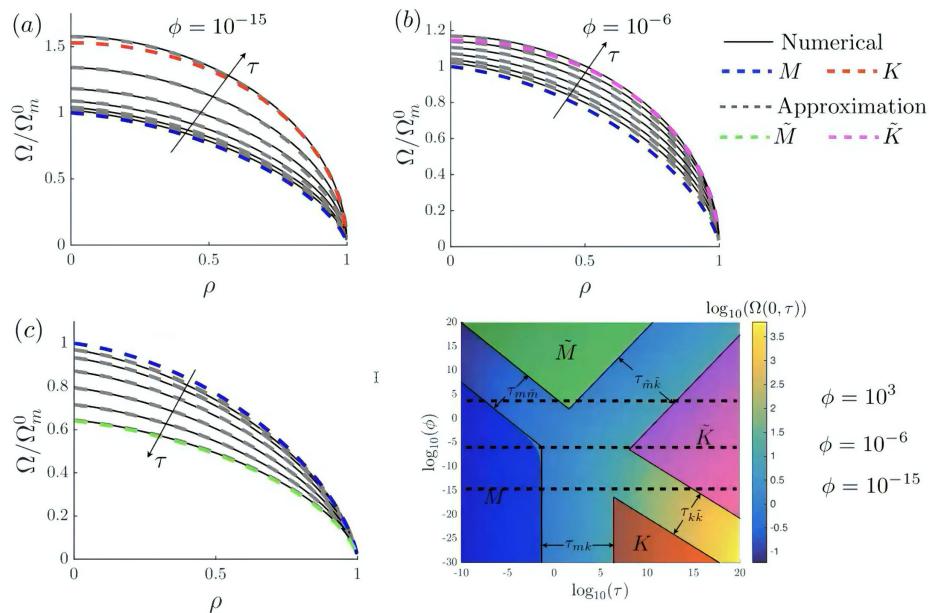
$$\text{Elasticity function: } \mathcal{F}(\rho, \lambda, \bar{\delta}) = \frac{1}{2^{1+\lambda}\pi} \int_0^1 \frac{\partial M(\rho, s)}{\partial s} (1+s)^\lambda (1-s)^{\bar{\delta}} ds,$$

Для каждого из режимов есть аналитические решения на открытие, радиус и давление.

Из этих всех формул важно знать, как зависит радиус от времени (в степени примерно 1/2, если утечки маленькие, и в степени 1/4, если утечки большие).

Радиусы в режимах  $\tilde{M}$  и  $\tilde{K}$  одинаковы (определяется только утечками).

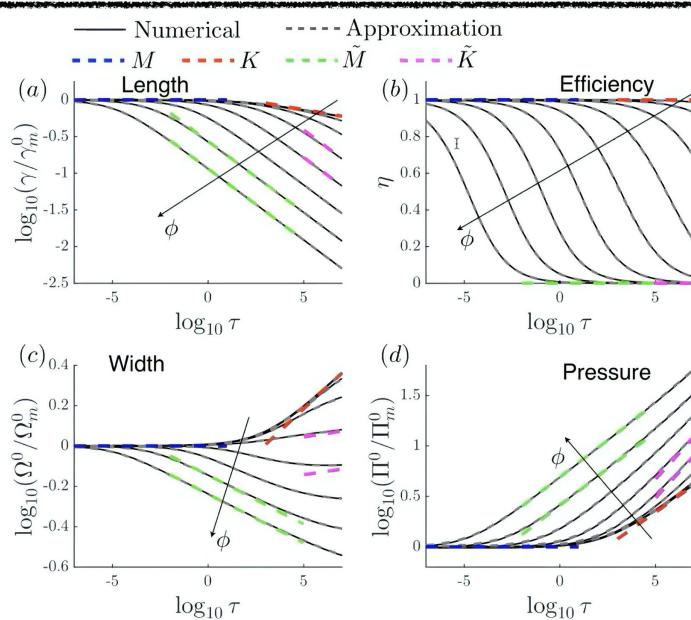
## Comparison with numerical solution



Здесь всё примерно то же самое, что и для плоской трещины: решение переходит от одного к другому (со временем). То же самое с формой: в режиме трещиностойкости эллиптическое решение.

На самом деле все решения (что для плоской трещины, что для радиальной) – открытие как функция радиуса – в самом первом приближении есть эллипсы; при изменении режима этот эллипс немного приплоскивается возле кончика.

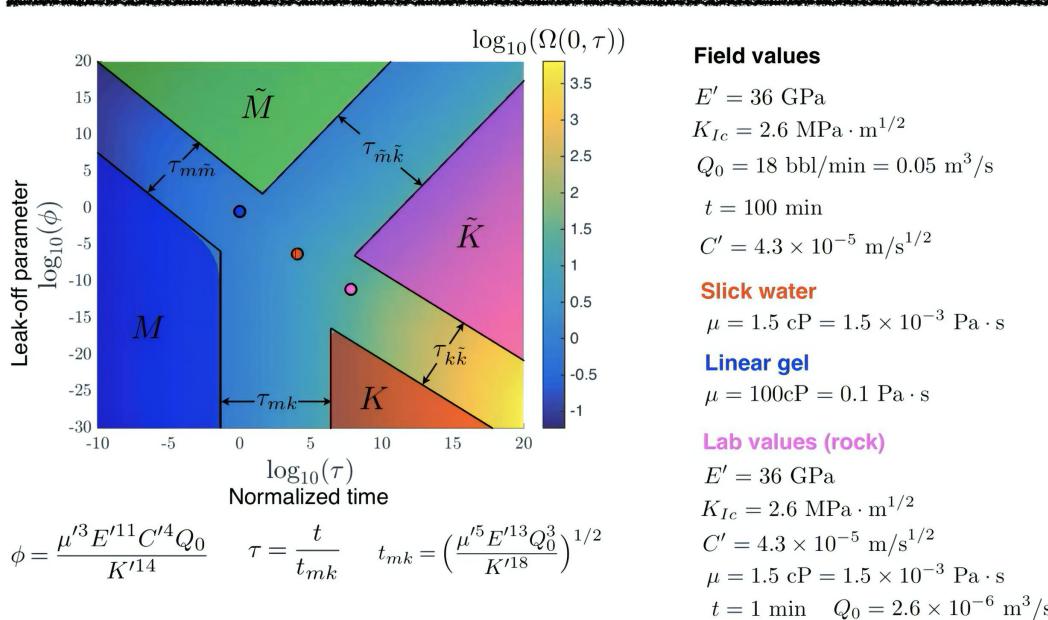
## Comparison with numerical solution



Цель графиков, представленных на слайде, показать, что решение плавно переходит от одного к другому. И мы знаем аналитические решения для пунктирных линий (пределные решения), мы можем их использовать, чтобы оценить полное решение без использования численного расчёта.

Т.е. всё то же самое, что и для плоской трещины.

### Radial hydraulic fracture: examples



Здесь показаны точки в параметрическом пространстве для разных значений входных параметров.

Если возьмём различные полевые условия, различные лабораторные условия, то на параметрическом пространстве реально можем быть везде.

Правда вряд ли будем слишком глубоко в режиме  $\tilde{M}$  или  $\tilde{K}$  (обычно всё таки возле границы), но влево/вправо между трещиностойкостью и вязкостью очень легко прыгать.

Эффективность = доля жидкости, которая осталась в трещине после закачки и утечек.

И без расчётов мы знаем, что оба параметра (и трещиностойкость, и вязкость) важны: оба эти параметра влияют на рост трещины.

Slick Water = практически подобна воде, чуть-чуть более вязкая (эффективность около 1/2).

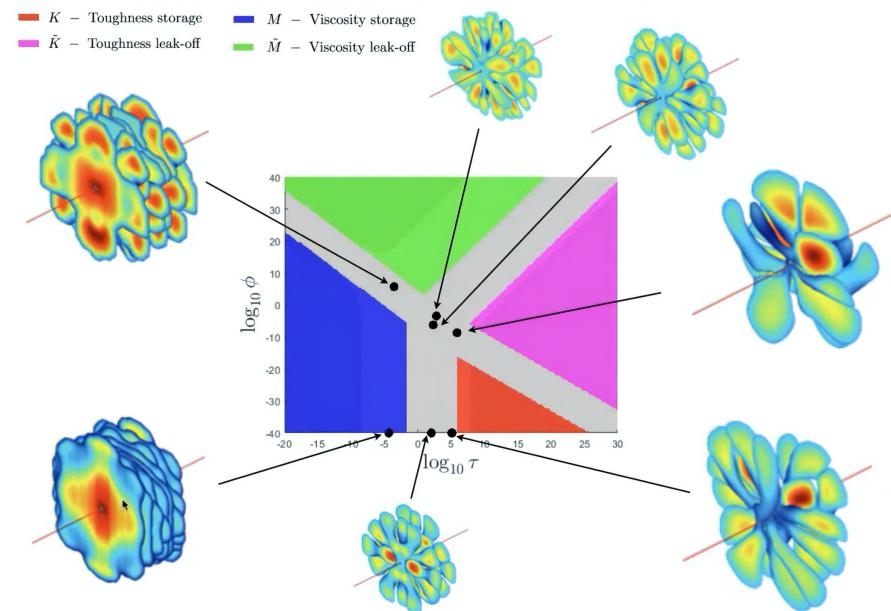
Linear Gel = вязкий гель.

Чтобы результаты лабораторных экспериментов соответствовали результатам, полученным в полях, необходимо сохранять положение в параметрическом пространстве.

В лабораторных экспериментах для этого обычно увеличивается вязкость.

Замечание: в модели радиальной трещины понятие безразмерная трещиностойкость не актуально, т.к. трещиностойкость  $K'$  есть и в  $\phi$ , и в  $\tau$ .

### Application to multiple fractures



Хочу привести вам интересные результаты численного моделирования распространения множественных трещин ГРП.

Здесь нет сильной теории, подтверждающей результаты; можно считать, что это просто численный эксперимент.

На слайде представлено параметрическое пространство с предельными решениями.

Теперь вместо одной радиальной трещины будем распространять несколько радиальных трещин (10 трещин), которые будут расположены близко друг к другу (т.е. они друг с другом взаимодействуют – есть уравнение упругости и если мы открываем одну трещину, то меняем напряжённое состояние во всём пространстве и влияем на другие трещины).

Если будем распространять эти трещины в режиме доминирующей вязкости, то они будут оставаться более-менее радиальными и параллельными друг другу (правда не очень равномерное раскрытие, но оно всё же более-менее радиальное).

Если же будем растить эти 10 трещин в режиме доминирующей трещиностойкости, то тогда решение будет нестабильным и все трещины будут расти в разные стороны.

Результатами этих численных экспериментов я хочу вам показать, что понимание физики и доминирующего процесса (вязкости или трещиностойкости) очень важно (это не просто некие аналитические выражения), так есть сильное влияние доминирующего процесса на форму трещин множественного ГРП. Другими словами, морфология рассматриваемой системы трещин сильно меняется в зависимости от рассматриваемого режима (положения в параметрическом пространстве) – это очень важно с практической точки зрения.

В режиме трещиностойкости раскрытие трещины в центре очень маленькое, а в режиме доминирующей вязкости в центре всегда самое большое раскрытие трещины (это соответствует принципу минимума затрачиваемой энергии – при доминировании вязкости есть существенный градиент давления вдоль трещины).

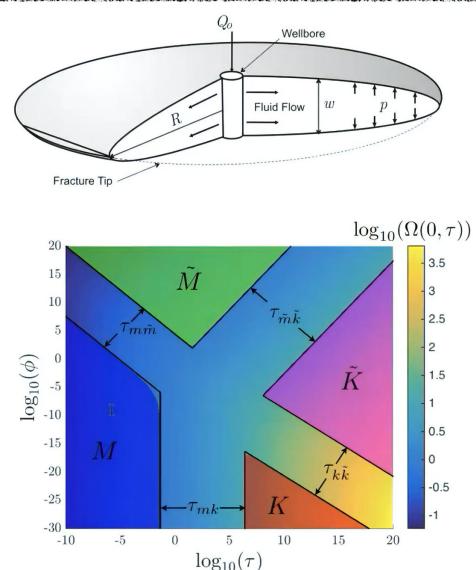
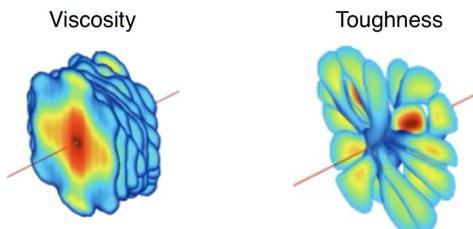
Замечание 1: во все рассматриваемые трещины (10 штук) закачивался одинаковый расход; если это не так, то трещины начали бы бороться за расход (и тогда обычно выигрывают одна или две трещины, а остальные не растут); при использовании постоянного расхода для каждой из трещин они начинают взаимодействовать и при доминировании трещиностойкости возникает нестабильность и трещины начинают расти в разные стороны.

Замечание 2: в режиме трещиностойкости давление по всей длине трещины постоянно и с точки зрения механики трещина не чувствует, где у неё находится источник, вообще говоря, эта радиальная трещина может немного смещаться в разные стороны, потому что она не знает, где её центр закачки (давление постоянно); а в режиме вязкой диссипации давление в точке закачки всегда больше, чем на некотором удалении от источника, соответственно, трещина получается более устойчивой.

На самом деле и в численном решении есть проблемы с  $K$  режимом: на грубых сетках трещина может распространяться немного не симметрично (может уходить чуть вправо или чуть влево).

### Things to remember for radial hydraulic fracture

- Estimation of the solution based on scaling
- Definition of fracture regimes
- The relationship between the regimes for a finite fracture and tip asymptote (the same as for plane strain)
- The existence of approximate solution constructed using global volume balance and tip asymptote (similar to plane strain)
- The existence of explicit expressions for limiting or vertex cases
- Parametric space for the problem, two dimensionless parameters, dimensionless leak-off and dimensionless time
- Fracture regimes affect morphology of multiple hydraulic fractures



E.V. Dontsov. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *R. Soc. open sci.*, 3:160737, 2016.

На этом мы заканчиваем раздел про радиальную трещину.

Аналогично плоской трещине вы должны понимать, как можно на пальцах оценить решение, исходя из масштабов.

Важно понимать определение предельных режимов и их соотношение с асимптотиками на кончике трещины (идентично плоской трещине).

Параметрическое пространство для радиальной трещины существенно отличается от параметрического пространства для плоской трещины.

Важно знать о существовании приближённого полуаналитического решения: вводите размерные входные параметры задачи, по ним считаются некоторые безразмерные параметры и далее, используя приближённое полуаналитическое решение, можно найти решение поставленной задачи.

Карту режимов можно использовать для тестирования численных схем, для проведения соответствий между лабораторными и полевыми экспериментами, для понимания морфологии системы трещин множественного ГРП.

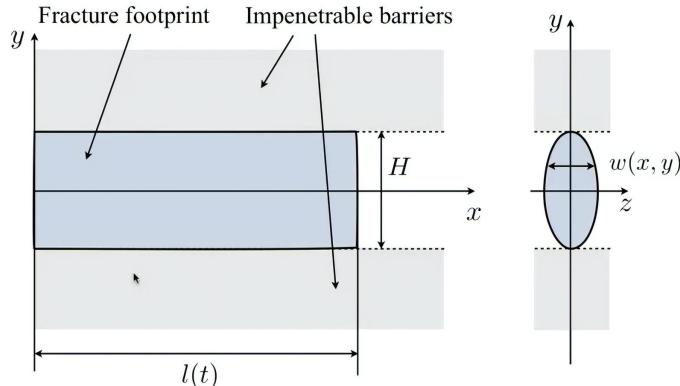
Если хотите подробно посмотреть на всю математику модели, то предлагаю вам ознакомиться со статьёй, название которой представлено на слайде.

В этой статье есть [ссылка на код](#) (на MatLab), который рассчитывает приближённое решение для всех возможных значений входных параметров.

## 4.2 Математическая модель Перкинса-Керна-Нордгрена (модель PKN)

PKN or constant height hydraulic fracture

- Fracture height is assumed to be constant
- Length  $\gg$  height (long time solution)
- Flux is predominantly horizontal
- Pressure is assumed to be constant in the vertical cross-section
- Far away from the tip, local elasticity applies. That is the pressure is determined by the width at the particular point (as opposed to non-local relation for which the pressure depends on the integral of the width with some kernel)
- Fracture width is elliptical in each cross-section
- These assumptions allow to reformulate the two-dimensional fracture problem as one-dimensional, effectively solving the solution in the vertical direction analytically



Рассмотрим ещё одну очень важную модель. Она ещё более важна с точки зрения практики, чем модель радиальной трещины.

Вспомним, что модель плоской трещины легче всего сформулировать и посчитать (она исторически была самой первой моделью), далее усложнили до радиальной модели, и ещё далее усложнили до модели PKN, которую сейчас и будем рассматривать.

Модель PKN (Перкинса-Керна-Нордгрена) тоже одномерная, но она более близка к реальным геометриям. Ясно, что есть слои, есть разные типы пород и шансы получить радиальную трещину с точки зрения практики малы.

Основные предположения геометрии PKN: есть одна планарная трещина, распространяющаяся симметрично влево и вправо, мы рассматриваем одну сторону; высота трещины постоянна (предполагается, что сверху и снизу расположены граничащие слои с очень большими напряжениями или с очень высокой трещиностойкостью и трещина туда не распространяется); длина трещины много больше её высоты; вертикальная компонента потока пренебрежимо мала и градиентом давления по оси  $Oy$  тоже пренебрегаем (предполагаем, что давление постоянно вдоль оси  $Oy$ ; другими словами, давление является одномерной функцией от  $x$ ); в каждом вертикаль-

ном сечении открытие эллиптическое.

Напомню, что эллиптическое открытие как раз соответствует постоянному давлению, т.е. для плоской и радиальной трещины в случае постоянного давления ( $K$ -режим) открытие трещины эллиптическое.

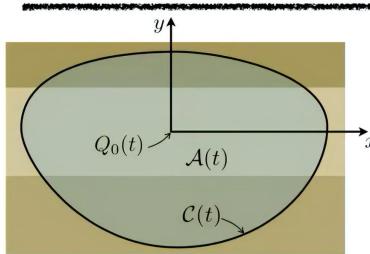
Используя эти основные предположения, мы сможем по сути усреднить уравнения по оси  $Oy$  и получить одномерную систему уравнений для рассматриваемой геометрии вдоль оси  $Ox$ .

Почему одномерную?

Потому что это старая модель (80-х годов) и тогда ещё не было широкодоступных вычислительных мощностей.

Все одномерные модели можно относительно легко имплементировать, их можно относительно легко анализировать и по ним можно многое понять (быстро посчитать), т.е. одномерные модели имеют свои преимущества.

### Governing equations for PKN geometry



$$\text{Scaling} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \mu' = 12\mu, \quad K' = \sqrt{\frac{32}{\pi}} K_{Ic}, \quad C' = 2C_l,$$

Apply vertical averaging

$$w(x, y) = \frac{4}{\pi} \bar{w}(x) \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{H}\right)^2}, \quad \bar{w}(x) = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} w(x, y) dy,$$

$$\text{Volume balance} \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x,y)}} = Q_0(t) \delta(x, y),$$

$$\text{Fluid flow} \quad \mathbf{q} = -\frac{w^3}{\mu'} \nabla p,$$

$$\text{Elasticity} \quad p(x, y, t) = \sigma_0(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{A(t)} \frac{w(x', y', t) dx' dy'}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{3/2}}, \quad \xrightarrow{\text{I}}$$

$$\text{Propagation} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'}{E'}, & \text{if } V > 0, \\ \frac{K'_l}{E'}, & \text{if } V = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x),$$

$$\bar{q}_x = -\frac{1}{H\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-H/2}^{H/2} w^3 dy = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$p(x) = -\frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-l(t)}^{l(t)} \bar{w}(x') \frac{dG(2(x'-x)/H)}{dx'} dx'$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \frac{K'}{E'}$$

Перейдём к выводу уравнений модели PKN.

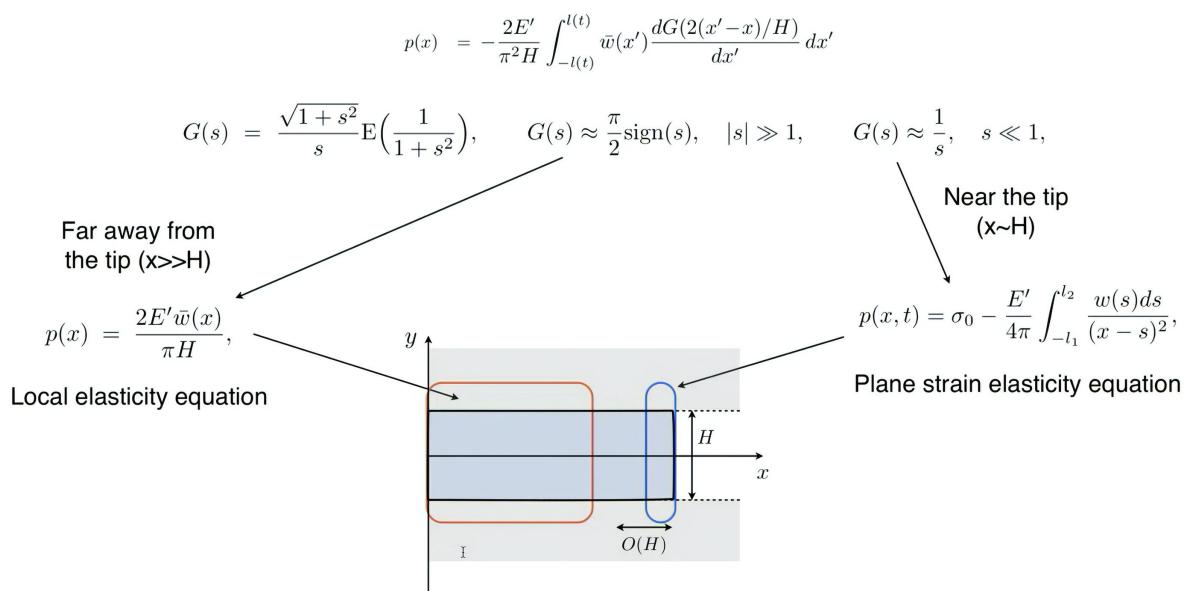
Стартуем с более общей формулировки для планарной трещины: двухмерный закон сохранения жидкости, связь потока и градиента давления, уравнение упругости и условие распространения. Что делаем далее?

Используя предположения модели PKN, усредняем уравнения и из двухмерной системы уравнений получаем одномерную. По сути мы аналитически решаем по вертикали (говорим, что в вертикальном сечении открытие эллиптическое – это как бы аналитическое решение по вертикали).

Если присмотреться к полученной системе уравнений, то она практически совпадает с системой для плоской трещины. Единственное, что сильно изменяется, это уравнение упругости.

Таким образом, главное отличие модели PKN и плоской трещины – это уравнение упругости.

### Elasticity equation for PKN fracture



Давайте более внимательно посмотрим на уравнение упругости для модели PKN, в частности на ядро  $G$  этого уравнения.

На слайде приведена явная форма для ядра;  $E$  – это эллиптический интеграл, но его не стоит бояться, т.к. он является регулярной гладкой функцией, которая меняется в пределах от  $\pi/2$  до 1. Т.е. основная зависимость зашита в множителе перед этим эллиптическим интегралом.

Важно, что при  $|s| \gg 1$ :

$$G(s) \approx \frac{\pi}{2} \text{sign}(s) \quad (4.1)$$

и тогда под интегралом появляется дельта-функция. Другими словами, от интеграла остаётся только среднее раскрытие  $\bar{w}(x)$ . Это означает, что давление в трещине пропорционально среднему раскрытию.

Физически получили, что вдали от кончика трещины давление будет пропорционально среднему раскрытию. Это называется локальным уравнением упругости.

Нелокальное уравнение упругости соответствует зависимости давления в точке от интеграла от раскрытия по всей трещине. Локальное уравнение упругости соответствует зависимости давления в точке от локального раскрытия в этой точке.

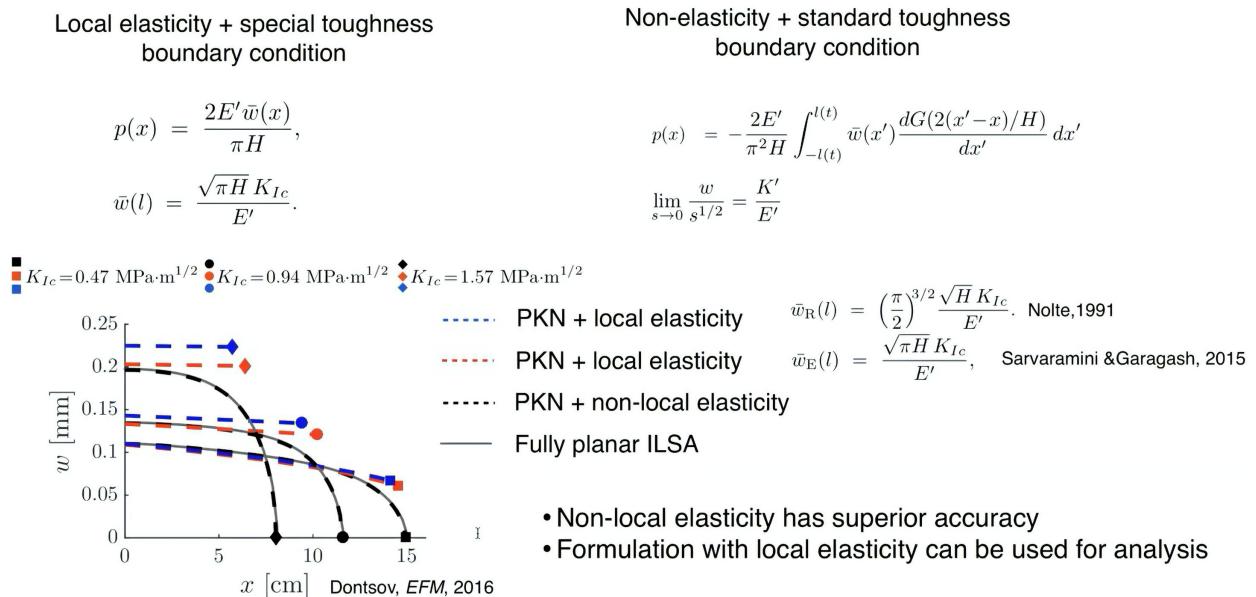
При  $s \ll 1$  (вблизи кончика трещины):

$$G(s) \approx \frac{1}{s} \quad (4.2)$$

и тогда получаем ядро плоской трещины.

Таким образом, получили как бы более общее уравнение упругости, которое описывает поведение трещины возле кончика в форме аналогичной плоской трещине, а при удалении от кончика оно плавно переходит в локальное уравнение упругости.

### Two options for the solution



Есть два варианта поиска решения для модели PKN:

- 1) более простое решение, которое опирается на локальную упругость; говорим, что вдали от кончика применимо локальное уравнение упругости, а возле кончика будем использовать специальные граничные условия (чтобы описать поведение возле кончика), но не будем использовать более сложные уравнения упругости возле кончика (итог: локальное уравнение упругости + специальный критерий распространения на кончике);
- 2) решение исходного интегрального уравнения упругости честно и численно; используем честное граничное условие на критерий распространения и честное уравнение упругости (итог: полное уравнение упругости + стандартный критерий распространения).

На графиках приведён пример из статьи. Показаны графики зависимости открытия от координаты  $x$ : представлены полная модель planar ILSA, модель PKN с нелокальной упругостью и две модели PKN с локальной упругостью (с различными специальными критериями распространения).

Важно, что при низкой трещиностойкости все решения примерно совпадают вдали от кончика и есть различие лишь возле кончика.

Встаёт вопрос: какую задачу мы хотим решить? Ведь в зависимости от задачи можем использовать разные методы.

Если задача состоит в том, чтобы оценить общую длину трещины и общее раскрытие, то использовать локальную упругость вполне можно.

Но если мы хотим точно описать поведение возле кончика и в принципе иметь более точное решение, то тогда лучше использовать нелокальную упругость и считать всё численно.

### Tip region of PKN fracture

---

Equations for finite fracture

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x),$$

$$\bar{q}_x = -\frac{1}{H\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-H/2}^{H/2} w^3 dy = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$p(x) = \frac{2E' \bar{w}(x)}{\pi H},$$

$$\bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}.$$

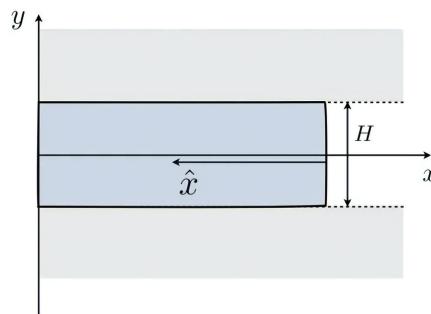
Semi-infinite PKN fracture

Use moving coordinate

$$\hat{x} = Vt - x$$

$$\frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{d\bar{w}^4}{d\hat{x}} = V\bar{w} + 2C' \sqrt{V\hat{x}},$$

$$\bar{w}(0) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}.$$



Цель этого и следующих нескольких слайдов – это сделать анализ трещины PKN по тем же мотивам, что было сделано для плоской трещины и для радиальной трещины.

Можем ли мы построить карту режимов, чтобы понять, при каких параметрах будет режим трещиностойкости?

Для этого легче работать с моделью локальной упругости.

Первое: мы решаем задачу на кончике именно для модели PKN. Делаем стандартную процедуру: переходим в движущуюся систему координат. Здесь всё примерно то же самое, что и для модели полубесконечной трещины, но здесь более простые уравнение упругости и граничное условие. Получаем достаточно простое дифференциальное уравнение с некоторыми параметрами, которое далее можем анализировать и решать.

### Known solutions for the tip region

---

$$\frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{d\bar{w}^4}{d\hat{x}} = V\bar{w} + 2C' \sqrt{V\hat{x}},$$

$$\bar{w}(0) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}.$$

Limiting solutions

$$\bar{w}_k = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}, \quad \bar{w}_m = \left( \frac{3\pi^3 \mu H V}{2E'} \right)^{1/3} \hat{x}^{1/3}, \quad \bar{w}_{\tilde{m}} = \left( \frac{8\pi^3 \mu H C' V^{1/2}}{3E'} \right)^{1/4} \hat{x}^{3/8},$$

Toughness

Viscosity

Leak-off

Exact edge solutions

$$\bar{w}_{km} = (\bar{w}_k^3 + \bar{w}_m^3)^{1/3}, \quad \bar{w}_{k\tilde{m}} = (\bar{w}_k^4 + \bar{w}_{\tilde{m}}^4)^{1/4}.$$

Less accurate, but simple approximation

$$\bar{w}_{m\tilde{m}k} = (\bar{w}_k^p + \bar{w}_m^p + \bar{w}_{\tilde{m}}^p)^{1/p}, \quad p = 3.4,$$

More accurate approximation

$$\bar{w}_{m\tilde{m}k} = \left[ w_{km} (\bar{w}_{km}^4 + \bar{w}_{\tilde{m}}^4)^{1/4} + w_{k\tilde{m}} (\bar{w}_{k\tilde{m}}^3 + \bar{w}_m^3)^{1/3} \right] [w_{km} + w_{k\tilde{m}}]^{-1},$$

Подобно модели полубесконечной трещины для модели кончика PKN получаются 3 предельных решения: доминирование трещиностойкости, вязкости или утечек.

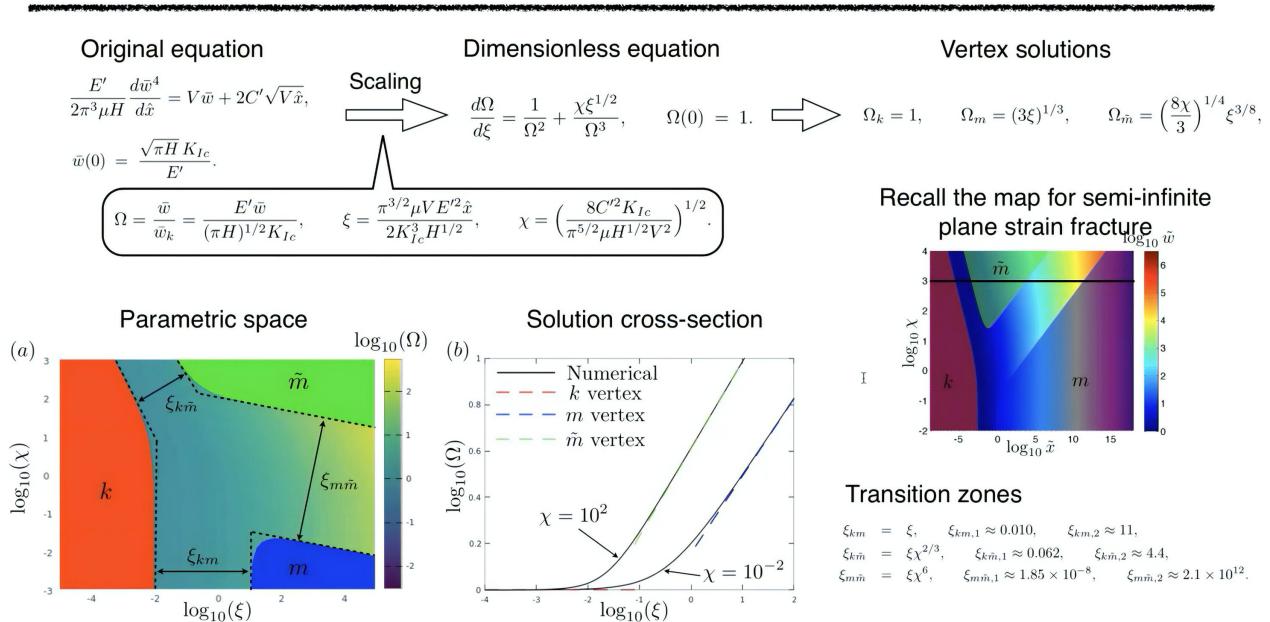
Но степени в решениях отличаются от полубесконечной и плоской трещин.

Здесь можем пойти и дальше (т.к. уравнение несложное) и посчитать точное решение для К-М режима (учитываем одновременно и трещиностойкость, и вязкость, но утечками пренебрегаем).

Аналогично можем посчитать точное решение при трещиностойкости и утечках (вязкостью пренебрегаем).

Но полностью решить полученное дифференциальное уравнение можем только приближённо. Первая аппроксимация (менее точная): взять среднюю степень между предельными решениями. Вторая аппроксимация (более точная): построить более сложное решение, к которому в дальнейшем ещё вернёмся.

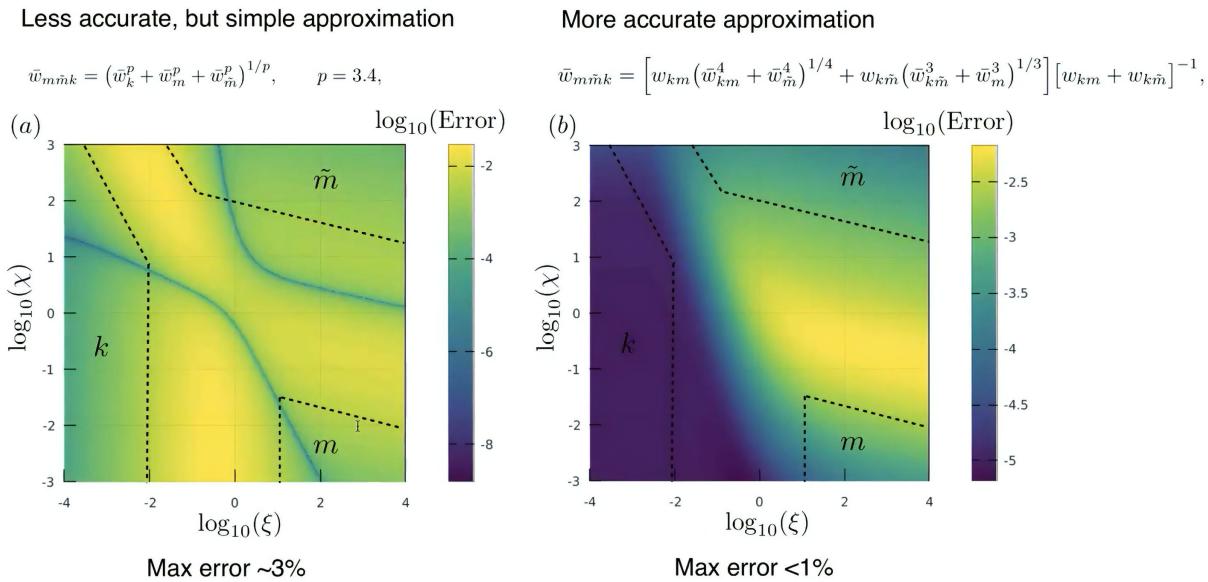
### Parametric space



Есть некое размерное уравнение, мы делаем масштабирование и после этого масштабирования получаем более простое дифференциальное уравнение. Решаем и получаем предельные решения в безразмерной форме.

Важно, что опять же можем построить параметрическое пространство для полубесконечной трещины PKN (в модели локальных деформаций). Для этого численно решаем полученное дифференциальное уравнение во всём параметрическом пространстве (это делается очень быстро).

### Accuracy of the approximations

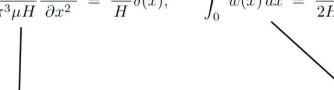
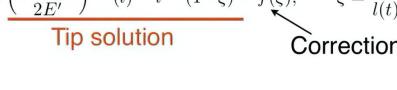
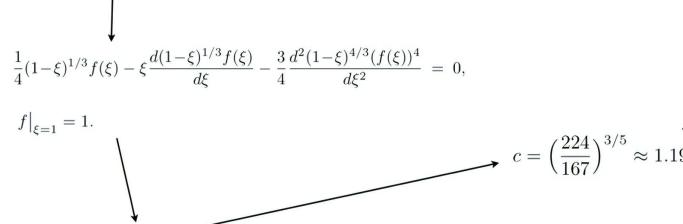
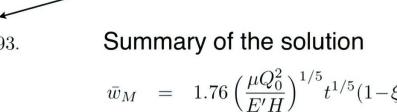


На данном слайде показаны карты ошибок между численным решением во всём параметрическом пространстве и двумя приближёнными аналитическими решениями.

Видно, что более сложное приближённое решение даёт более высокую точность.

Зачем рассматриваем и анализируем полубесконечную трещину модели PKN? Это необходимо для того, чтобы построить полное решение и параметрическое пространство для конечной трещины PKN.

### Vertex solutions for the finite fracture: storage viscosity

Governing equations	Explicitly incorporate tip solution
$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad \int_0^l \bar{w}(x) dx = \frac{Q_0 t}{2H}, \quad \bar{w}(l) = 0.$	$\bar{w} = \underbrace{\left( \frac{3\pi^3 \mu H}{2E'} \right)^{1/3} l^{1/3} t^{1/3} (1-\xi)^{1/3} f(\xi)}_{\text{Tip solution}}, \quad \xi = \frac{x}{l(t)},$
	
$\left( \frac{3\pi^3 \mu H}{2E'} \right)^{1/3} l^{1/3} t^{4/3} \int_0^1 (1-\xi)^{1/3} f(\xi) d\xi = \frac{Q_0 t}{2H}. \longrightarrow l = c \left( \frac{5E' Q_0^3}{48\pi^3 \mu H^4} \right)^{1/5} t^{4/5},$	$c^{5/3} \int_0^1 (1-\xi)^{1/3} f(\xi) d\xi = 1.$
	
$\frac{1}{4} (1-\xi)^{1/3} f(\xi) - \xi \frac{d(1-\xi)^{1/3} f(\xi)}{d\xi} - \frac{3}{4} \frac{d^2 (1-\xi)^{4/3} (f(\xi))^4}{d\xi^2} = 0,$	<b>Summary of the solution</b>
$f _{\xi=1} = 1.$	$\bar{w}_M = 1.76 \left( \frac{\mu Q_0^2}{E' H} \right)^{1/5} t^{1/5} (1-\xi)^{1/3} \left( 1 - \frac{1-\xi}{96} \right),$
$f(\xi) \approx 1 - \frac{1-\xi}{96}.$	$p_M = 1.12 \left( \frac{\mu E'^4 Q_0^2}{H^6} \right)^{1/5} t^{1/5} (1-\xi)^{1/3} \left( 1 - \frac{1-\xi}{96} \right),$
<b>Correction is very small!</b>	$l_M = 0.38 \left( \frac{E' Q_0^3}{\mu H^4} \right)^{1/5} t^{4/5}.$

Решение для полубесконечной трещины PKN будем использовать в качестве основы, чтобы построить полное решение для конечной трещины.

Сначала давайте построим узловые решения для конечной трещины PKN (аналогично плоской

и радиальной трещинам есть 4 предельных решения).

Давайте первым рассмотрим самый сложный предельный режим, а именно режим storage viscosity (нет трещиностойкости и нет утечек).

Ищем решение в следующем виде: решение на кончике, умноженное на некую поправку  $f(\xi)$ .

Подставляем это решение в закон сохранения объёма и видим, что можем посчитать длину как функцию времени.

Дополнительно подставляем решение в дифференциальное уравнение и раскладываем полученное уравнение по степеням  $(1 - \xi)$ .

Получаем, что в первом приближении  $f(\xi) \approx 1$ .

Это говорит нам, что для трещины PKN мы просто можем взять решение для полубесконечной трещины и это будет достаточно точный ответ для конечной трещины.

### Vertex solutions for the finite fracture: leak-off viscosity

#### Governing equations

$$\frac{E'}{2\pi^3\mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad 2C' \int_0^l \sqrt{t-t_0(x)} dx = \frac{Q_0 t}{2H}, \quad \bar{w}(l) = 0.$$

$\downarrow$

$$l \propto t^\alpha \quad t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$$

$$2C' t^{1/2} l \int_0^1 \sqrt{1-\xi^{1/\alpha}} d\xi = \frac{Q_0 t}{2H}. \xrightarrow{\alpha = 1/2} l = \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}.$$

$$\frac{E'}{2\pi^3\mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t}\sqrt{1-(x/l)^2}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad \bar{w}(l) = 0,$$

$\downarrow$

$$\bar{w} = \left( \frac{2\pi\mu Q_0^2}{E'C'H} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi), \quad g(\xi) = \left[ \xi \left( \sin^{-1}(\xi) - \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{1-\xi^2} \right]^{1/4}, \quad \xi = \frac{x}{l}.$$

$\downarrow$

$$g(\xi) \approx \left( \frac{8}{9} \right)^{1/8} \underline{(1-\xi)^{3/8}} \left[ 1 - \left( 1 - \left( \frac{9}{8} \right)^{1/8} \right) (1-\xi) \right].$$

**Tip solution**

**Correction**

Correction is very small!

#### I Summary of the solution

$$\begin{aligned} \bar{w}_{\tilde{M}} &= \left( \frac{2\pi\mu Q_0^2}{E'C'H} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi), \\ p_{\tilde{M}} &= \left( \frac{32\mu E'^3 Q_0^2}{\pi^3 C' H^5} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi), \\ l_{\tilde{M}} &= \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}. \end{aligned}$$

В режиме leak-off viscosity доминирует вязкость и есть большие утечки.

Приравниваем утечки закачанному в трещину объёму. Предполагаем, что  $l$  пропорциональна  $t^\alpha$ .

Решаем уравнение и получаем, что  $\alpha = 1/2$ .

Решаем исходное дифференциальное уравнение и получаем ответ. Сама функция выглядит сложно, но можно сделать её разложение и получить некое приближение.

## Vertex solutions for the finite fracture: storage and leak-off toughness

---

No viscosity implies no pressure gradient 

Width is spatially constant and is determined by the boundary condition at the tip

### Storage toughness

$$\int_0^l \bar{w}(x) dx = \frac{Q_0 t}{2H}, \quad \bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}$$

### Summary of the solution

$$\begin{aligned}\bar{w}_K &= \frac{K_{Ic} \sqrt{\pi H}}{E'}, \\ p_K &= \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}}, \\ l_K &= \frac{E' Q_0 t}{\sqrt{4\pi K_{Ic} H^{3/2}}}.\end{aligned}$$

### Leak-off toughness

$$\int_0^l 2C' \sqrt{t - t_0(x)} dx = \frac{Q_0 t}{2H}, \quad \bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}$$

$$\downarrow \quad l \propto t^\alpha \quad t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$$

$$2C' t^{1/2} l \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^{1/\alpha}} d\xi = \frac{Q_0 t}{2H} \xrightarrow{\alpha = 1/2} l = \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}.$$

### Summary of the solution

$$\begin{aligned}\bar{w}_{\tilde{K}} &= \frac{K_{Ic} \sqrt{\pi H}}{E'}, \\ p_{\tilde{K}} &= \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}}, \\ l_{\tilde{K}} &= \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}.\end{aligned}$$

При доминировании трещиностойкости всё гораздо проще, так как нет градиента давления вдоль трещины (и нет градиента открытия, так как рассматриваем локальную упругость). Другими словами, раскрытие постоянно и определяется из граничного условия.

В итоге мы получили 4 предельных решения для трещины PKN.

## Fast approximate solution for a finite PKN fracture

---

We saw earlier that all the vertex solutions are approximated accurately by the tip solution. Therefore, the solution is sought in the following form:

$$\bar{w} = \bar{w}_a (1 - \xi)^\delta, \quad \bar{w}_a = \bar{w}_{m\tilde{m}k}(x = l, V = \dot{l}) \quad \delta = \frac{d \log(\bar{w}_{m\tilde{m}k})}{d \log(\hat{x})}, \quad \xi = \frac{x}{l},$$

Full solution      Tip asymptote      Spatial behavior from asymptote

### Global volume balance

$$\int_0^l [\bar{w}(x) + 2C' \sqrt{t - t_0(x)}] dx = \frac{Q_0 t}{2H}.$$

$\downarrow \quad l \propto t^\alpha \quad t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{w}_a(l, \alpha l/t) l}{1 + \delta} + \sqrt{\pi} C' t^{1/2} l \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \frac{3}{2})} &= \frac{Q_0 t}{2H}, \\ \delta &= \frac{d \log(\bar{w}_{m\tilde{m}k})}{d \log(\hat{x})}, \quad \alpha = \frac{d \log(l)}{d \log(t)},\end{aligned}$$

This system of equations can be solved quickly

Полное решение для трещины PKN строим в следующем виде: произведение асимптотики на некую поправку ( $\delta$  зависит от режима).

## Scaling

---

### Original system of equations

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x),$$

$$\bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'},$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\dot{q}_x(l)}{\bar{w}(l)} = -\frac{2E'}{3\pi^3 \mu H} \frac{\partial \bar{w}^3}{\partial x} \Big|_{x=l},$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\bar{w}}{w_*}, & \lambda &= \frac{l}{l_*}, & \tau &= \frac{t}{t_*}, & \xi &= x/l(t) & \phi &= \left( \frac{H^5 K_{Ic}^6 C'^4}{4\pi^3 E'^4 \mu^2 Q_0^4} \right)^{1/4}. \\ w_* &= \frac{(\pi H)^{1/2} K_{Ic}}{E'}, & l_* &= \frac{H^2 K_{Ic}^4}{2\pi E'^3 \mu Q_0}, & t_* &= \frac{H^{7/2} K_{Ic}^5}{2\pi^{1/2} E'^4 \mu Q_0^2}. \end{aligned}$$

### Dimensionless system of equations

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} - \frac{\xi \dot{\lambda}}{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \Omega^4}{\partial \xi^2} + \frac{\phi}{\sqrt{\tau-\tau_0(\xi)}} = \delta(\xi),$$

$$\Omega(1) = 1, \quad \mathbb{I}$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{4}{3\lambda} \frac{\partial \Omega^3}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}.$$

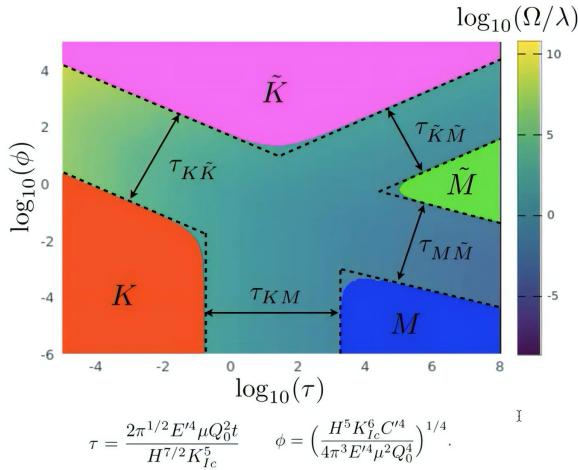
Scaling

The dimensionless system of equations can be solved numerically using standard finite difference technique.

## Parametric space

---

- Parametric space is computed using the fast solution
- Zones of applicability of the vertex solutions are indicated
- The zone boundaries are quantified



### $M$ - storage-viscosity

No toughness, no leak-off

### $K$ - storage-toughness

No viscosity, no leak-off

### $\tilde{M}$ - leak-off-viscosity

No toughness, large leak-off

### $\tilde{K}$ - leak-off-toughness

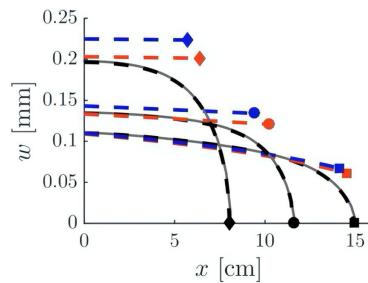
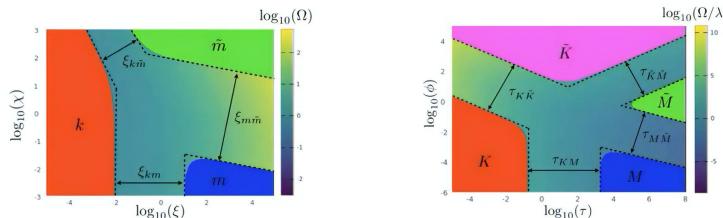
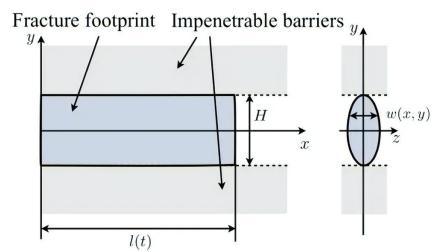
No viscosity, large leak-off

### Transitions

$$\begin{aligned} \tau_{MK} &= \tau, & \tau_{MK,1} &= 0.16, & \tau_{MK,2} &= 1.6 \times 10^3, \\ \tau_{KK} &= \tau \phi^2, & \tau_{KK,1} &= 5.6 \times 10^{-5}, & \tau_{KK,2} &= 2.8 \times 10^3, \\ \tau_{\tilde{K}\tilde{M}} &= \tau \phi^{-2}, & \tau_{\tilde{K}\tilde{M},1} &= 0.18, & \tau_{\tilde{K}\tilde{M},2} &= 6.6 \times 10^4, \\ \tau_{MM} &= \tau \phi^{10/3}, & \tau_{MM,1} &= 2.3 \times 10^{-7}, & \tau_{MM,2} &= 2.8 \times 10^3. \end{aligned}$$

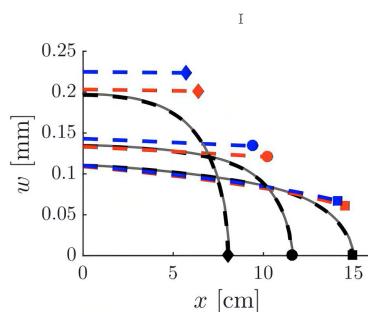
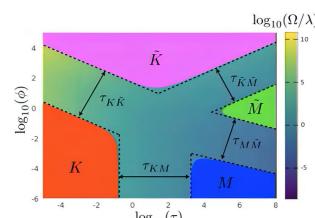
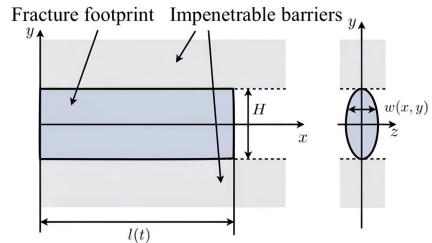
### Things to remember

- Assumptions of PKN model, including constant height, length  $\gg$  height, horizontal flux, constant pressure in each vertical cross-section, elliptical width in each vertical cross-section
- There are two approaches to solve the problem:
  - Use non-local elasticity, which is good for numerical scheme and leads to superior accuracy
  - Use local elasticity with a specific boundary condition at the tip, which is less accurate, but easier for analysis
- PKN fracture has its own formulation for the tip region, which is different from that for a semi-infinite plane strain fracture, approximate solution exists
- Parametric space for the finite fracture is evaluated
- Limiting vertex solutions exist, as well as the global approximate solution



### Things to remember

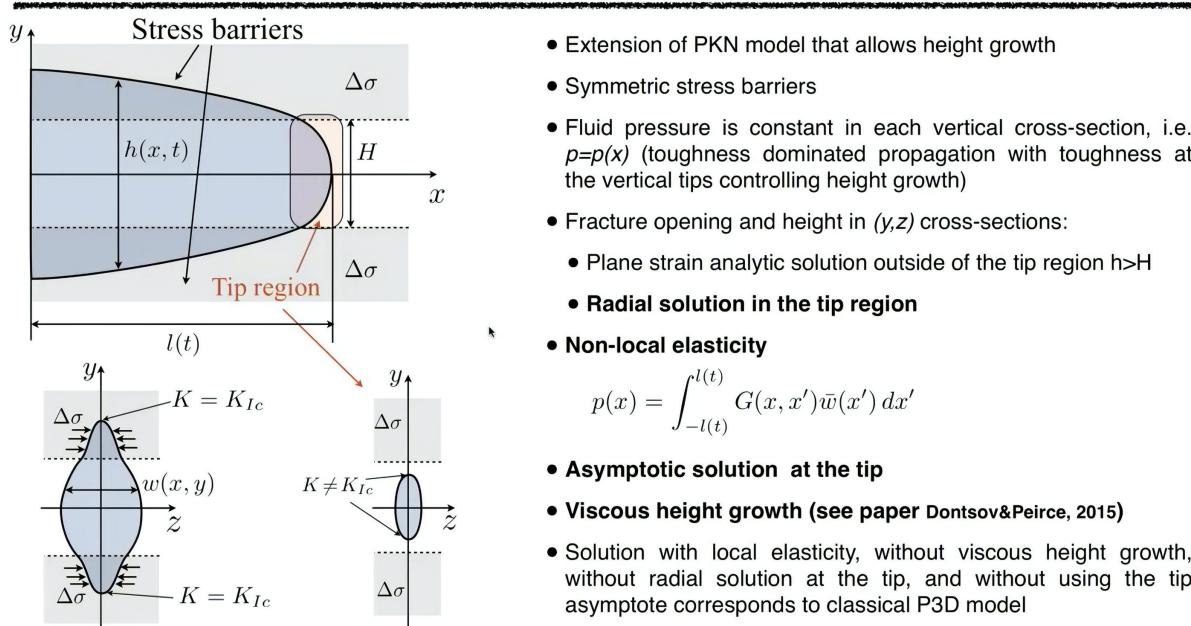
- Assumptions of PKN model, including constant height, length  $\gg$  height, horizontal flux, constant pressure in each vertical cross-section, elliptical width in each vertical cross-section
  - There are two approaches to solve the problem:
    - Use non-local elasticity, which is good for numerical scheme and leads to superior accuracy
    - Use local elasticity with a specific boundary condition at the tip, which is less accurate, but easier for analysis
  - Parametric space for the finite fracture is evaluated
  - Limiting vertex solutions exist, as well as the global approximate solution
- <https://arxiv.org/abs/2110.13088>



## 5 Лекция 23.03.2021 (Донцов Е.В.)

### 5.1 Математическая модель EP3D (Enhanced pseudo-3D model)

Enhanced pseudo-3D (EP3D) model



Далее рассмотрим псевдотрёхмерную модель. Эта модель также относится к классу простых фундаментальных моделей, которые были разработаны в 80-х и 90-х годах, т.е. когда ещё не было широкодоступных больших вычислительных мощностей (другими словами, была необходимость произвести моделирование с использованием более простых подходов).

Про более сложные численные модели (planar3D ILSA и Biot) поговорим на следующих лекциях.

Важно, что на простых моделях можем многое изучить и можем понять, как будет вести себя более сложная модель.

Целью псевдотрёхмерной модели является улучшение модели PKN. Ранее обсуждали модель PKN (одномерная, постоянная высота). Одномерность позволяла относительно легко анализировать уравнение, получить приближённые решения, делать какие-то оценки на пальцах. У модели PKN реалистичная геометрия и она довольно часто реализуется на практике. Примечание: у радиальной трещины геометрия не совсем реалистична, потому что в породе практически всегда есть слои, которые не учитываются этой моделью (она не может реализоваться в случае наличия слоёв в породе).

Псевдотрёхмерная модель довольно часто реализуется на практике и является следующим шагом (после модели PKN) по сложности. Она всё ещё одномерная.

Давайте посмотрим, что включает в себя эта модель.

Теперь вместо полностью непроницаемых барьеров над и под разрывуаром высоты  $H$  будем рассматривать стресс барьеры с дополнительным сжимающим напряжением  $\Delta\sigma$  (в пределе

$\Delta\sigma \rightarrow \infty$  приходим к модели PKN).

Соответственно трещина может расти через эти стресс-барьеры, т.е. её высота  $h$  будет зависеть от координаты  $x$  и времени  $t$  (местами может быть больше, чем  $H$ , а может быть и меньше, чем  $H$ ).

Главное отличие псевдотрёхмерной модели от модели PKN – это появившаяся зависимость высоты трещины от координаты  $x$ .

Остальные предположения отчасти похожи: мы говорим, что давление постоянно в каждом вертикальном сечении и это значит, что распространение в каждом вертикальном сечении доминируется трещиностойкостью.

Формально мы должны использовать критерий распространения на вертикальном кончике трещины и этот критерий распространения будет определять высоту трещины. До этого (в модели PKN) у нас не было критерия распространения по высоте, а был только критерий распространения по оси  $Ox$ .

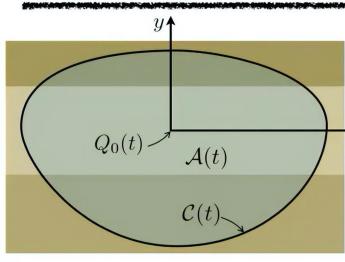
Сейчас (в псевдотрёхмерной модели) добавляется критерий распространения по высоте.

Открытие в каждом сечении вдали от кончика задаётся решением для плоской трещины, т.е. оно будет уже не эллиптическим, но есть явное выражение открытия как функции от  $y$  (выглядит примерно похоже на левый нижний рисунок на слайде – эллипс, приплюснутый сверху и снизу – т.к. сверху и снизу напряжения немного больше, чем в центре).

На кончике трещине будем предполагать, что открытие эллиптическое (даже если высота меньше чем ширина резервуара  $H$ ).

Ещё раз повторюсь, что основные предположения очень похожи на модель PKN, но самое главное отличие заключается в том, что мы рассматриваем зависимость высоты от координаты и открытие теперь не эллиптическое, а имеет более сложную форму.

### Governing equations



$$\text{Scaling} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \mu' = 12\mu, \quad K' = \sqrt{\frac{32}{\pi}} K_{Ic}, \quad C' = 2C_l,$$

I Apply vertical averaging

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{H} \int_{-h/2}^{h/2} w(x, y) dy,$$

We also need  $h(\bar{w})$

$$\text{Volume balance} \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x,y)}} = Q_0(t)\delta(x,y),$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H}\delta(x),$$

$$\text{Fluid flow} \quad \mathbf{q} = -\frac{w^3}{\mu'} \nabla p,$$

$$\bar{q}_x = -\frac{1}{H\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} w^3 dy,$$

$$\text{Elasticity} \quad p(x, y, t) = \sigma_0(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{A(t)} \frac{w(x', y', t) dx' dy'}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]^{3/2}}, \quad \longrightarrow$$

$$p(x) = \int_{-l(t)}^{l(t)} G(x, x') \bar{w}(x') dx'$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'}{E'}, & \text{if } V > 0, \\ \frac{K'_I}{E'}, & \text{if } V = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \frac{K'}{E'}$$

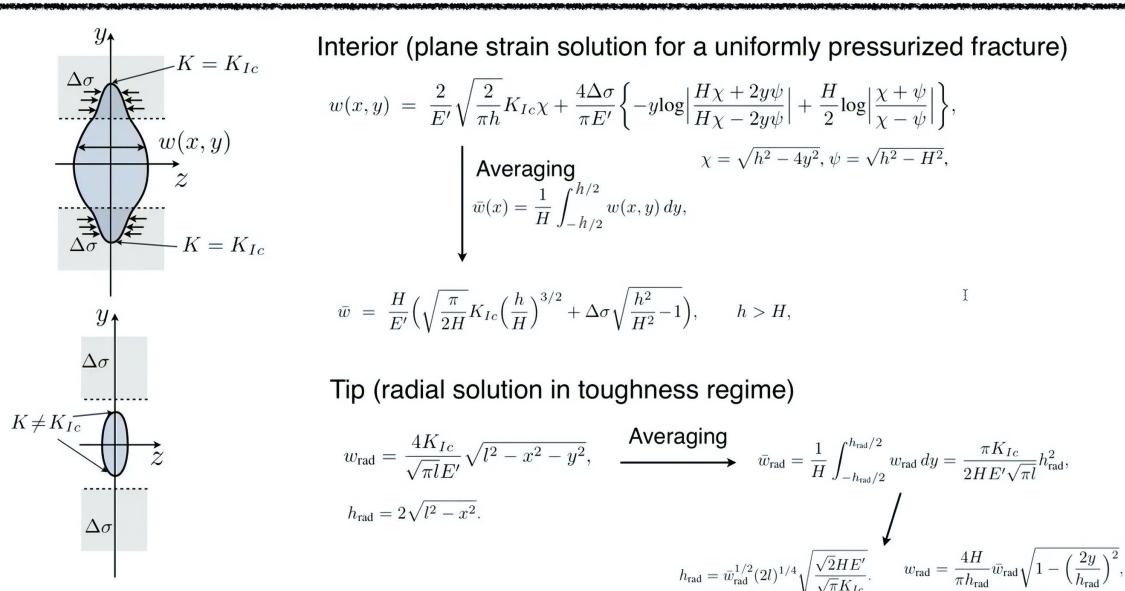
Давайте посмотрим, как будем вводить основные уравнения для псевдотрёхмерной модели. Опять же стартовой точкой являются полностью двухмерные уравнения для планарной трещи-

ны. Затем мы используем все наши предположения и похожее усреднение (но заметьте, что интегрируем по всей высоте трещины, но делим на высоту резервуара  $H$ ).

После усреднения опять же получается одномерное уравнение для закона сохранения объёма (выглядит абсолютно идентично модели PKN). Уравнение для потока немного другое, потому что здесь вместо интегрирования эллиптического открытия мы интегрируем более сложную функцию, которую аналитически проинтегрировать нельзя (поэтому этот интеграл считается численно). Уравнение упругости тоже другое. А критерий распространения остаётся тем же самым.

Кроме того есть ещё одно очень важное отличие от модели PKN: нам теперь необходимо знать функциональную зависимость высоты трещины от открытия. Напомню, что в модели PKN мы всё решали на среднее открытие. В псевдотрёхмерной модели нужно дополнительное условие на высоту  $h$  от среднего открытия, чтобы полученная система решалась.

### Width solution



Давайте теперь немного пройдёмся по решению для открытия. Длинная формула, представленная на слайде, даёт раскрытие в виде функции от  $x$  и  $y$ . В частности, нам важна зависимость раскрытия от  $y$ .

Первое слагаемое представляет собой эллиптическую часть, а дополнительные логарифмы во втором слагаемом дают приплюстнутость эллипсу.

Важно то, что эта функция раскрытия аналитическая. И тогда в выражении для потока можем численно проинтегрировать  $w^3$ .

Наша цель – найти зависимость высоты  $h$  от среднего открытия  $\bar{w}$ . Чтобы её найти, мы формулу для раскрытия усредняем (интеграл считаем аналитически – интеграл от  $w$  можем найти аналитически, а интеграл от  $w^3$  не можем).

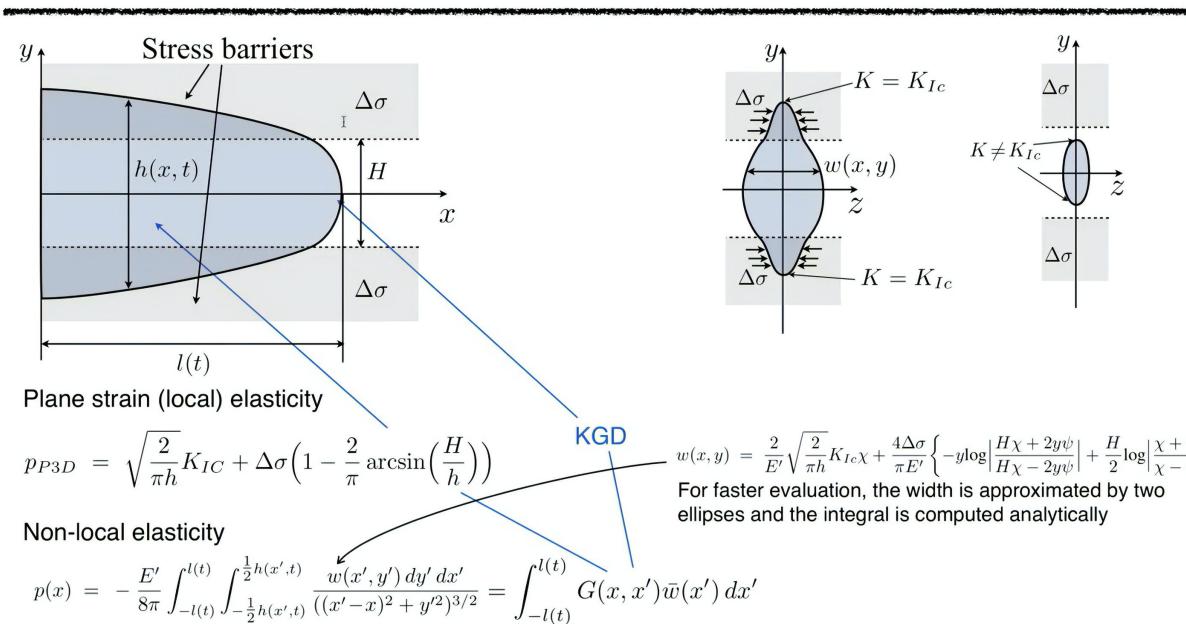
Полученное выражение даёт нам зависимость среднего давления от высоты. Численно обращаем эту формулу и получаем искомую зависимость  $h$  от  $\bar{w}$ .

Но это верно при  $h > H$ , т.е. когда трещина проросла через стресс-барьеры.

Если же  $h < H$ , то используется аналогичная формула для радиального решения в режиме трещиностойкости. Мы знаем, что открытие является эллиптическим (мы это знаем из решения для  $K$  режима) и знаем высоту. После усреднения можем получить связь между средним открытием и высотой.

Итак, одно из главных отличий от модели PKN – это то, что нам нужно заботиться о том, как считать высоту трещины.

### Non-local elasticity



Последнее, что важно знать про псевдотрёхмерную модель – это уравнение упругости.

На слайде представлена связь давления с критерием распространения (некоторые математические детали опущены, но здесь ничего сложного нет, кроме расчёта интегралов). И это уравнение по сути и есть уравнение локальной упругости, которое в данном случае связывает локальное значение высоты  $h$  и давление.

Итак, высота  $h$  явно связана со средним открытием и давление явно связано с высотой, соответственно можем получить явную локальную связь давления и среднего открытия.

Но более точная формула может быть получена при расчёте упругости по нелокальной формуле (формула для планарной трещины) – аналогично модели PKN.

Берём длинную формулу для открытия, подставляем в нелокальное уравнение упругости и пытаемся проинтегрировать по  $y$ .

Но здесь удача не на нашей стороне, и мы не можем найти полученный интеграл аналитически. Здесь появляются 2 подхода:

1) интегрируем численно (т.е. добавляем некие дополнительные численные расчёты и усложняем схему);

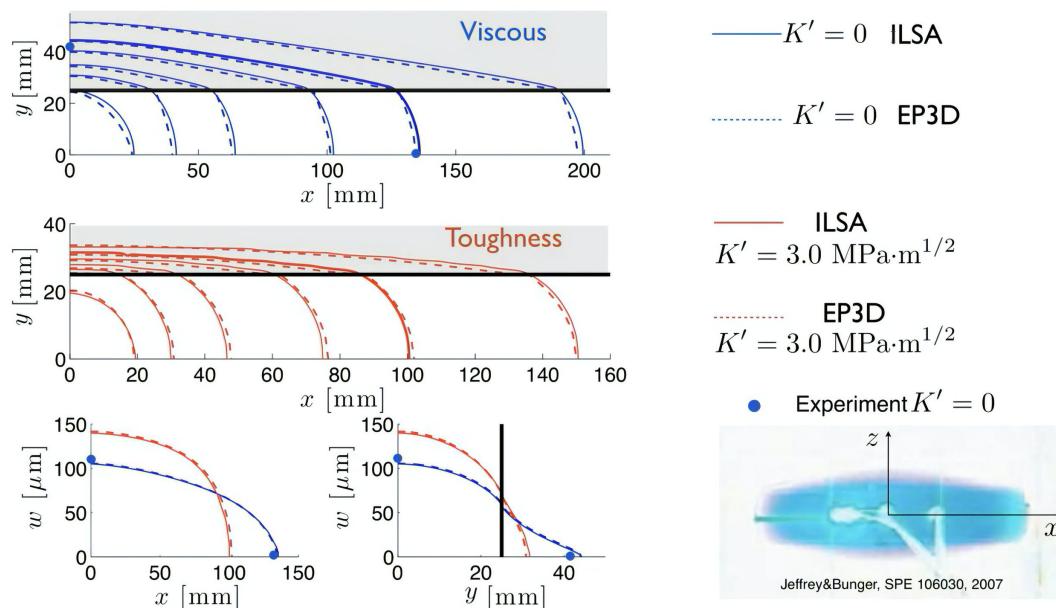
2) приближённо аппроксимировать длинную формулу для раскрытия двумя эллипсами и посчитать интеграл аналитически.

Возле кончика полученной интегральной ядро становится идентичным ядру, которое описывает

модель KGD или плоскую трещину (т.е. то же самое, что и для модели PKN). А вдали от кончика получим выражение для локальной упругости.

Т.е. структура полученного ядра очень похожа на модель PKN, но так как у нас более сложная трещина, то будет более сложное выражение для локальной упругости.

### Enhanced P3D (EP3D) vs. ILSA



Далее хотел бы сравнить модели EP3D и planar3D ILSA.

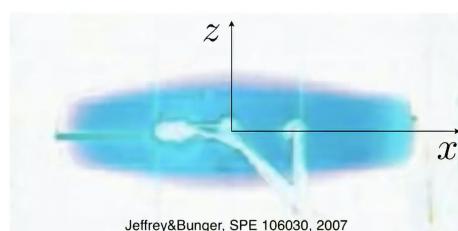
planar3D ILSA – это полностью двухмерная модель.

Вопрос в том, насколько мы теряем в точности за счёт наших предположений модели EP3D.

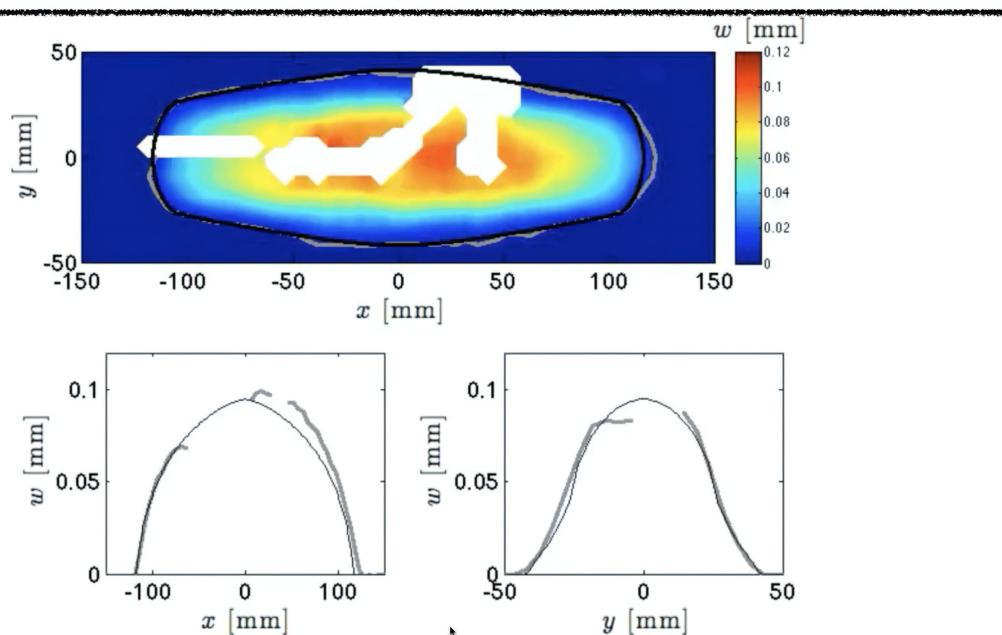
На слайде производится сравнение для двух случаев: при доминировании вязкости и при доминировании трещиностойкости. Рисуем четвертинку фронта трещины.

Видим, что всё отлично совпадает.

### Comparison with experiment



### Comparison with experiment

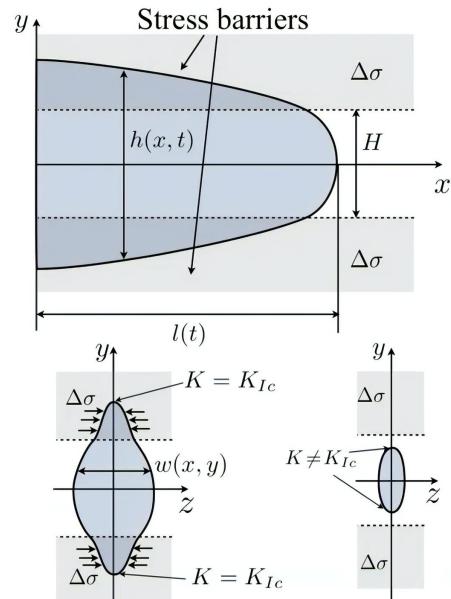
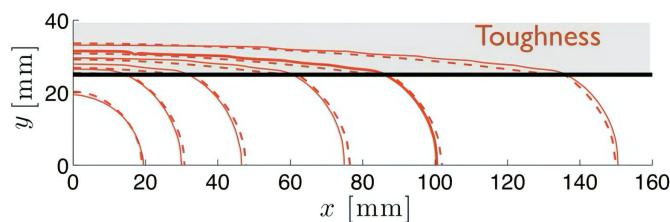


Сравнение модели EP3D с экспериментом. Цветом показаны экспериментальные раскрытия. В области белого цвета были скважины и нельзя было оцифровать открытия.

Снизу на слайде показано сравнение открытия (как функцию  $x$  и  $y$ ) в численном расчёте и реальном эксперименте.

### Things to remember

- Assumptions of P3D model, including equilibrium height growth model, length  $\gg$  height, horizontal flux, constant pressure in each vertical cross-section, plane strain solution for width in each vertical cross-section
- Non-local elasticity and other corrections allow to significantly improve accuracy of the model
- There are extensions for asymmetric stress layers as well as multiple layers
- This model is suited more for numerical calculations, rather than analysis. However, analysis of the classical P3D model can be found in Adachi et. al, 2010.



Рассмотрели последнюю фундаментальную модель. На самом деле в ней много деталей и большинство из этих деталей я опустил, потому что мне кажется важным, чтобы вы запомнили суть и основные предположения модели.

Самое главное: псевдотрёхмерная модель представляет из себя по сути улучшенную модель PKN. Здесь есть очень похожие предположения (длина много больше высоты, давление в каж-

дом вертикальном сечении постоянно, используется решение для плоской трещины в каждом сечении). Но самое главное отличие – это зависимость высоты от координаты  $x$ , т.е. трещина может проникать через стресс-барьеры  $\Delta\sigma$ . А PKN – это по сути предел модели EP3D, когда  $\Delta\sigma \rightarrow \infty$ .

Модель EP3D уже достаточно сложно анализировать в плане режимов (сложно сказать, когда будет режим трещиностойкости, вязкости и так далее), поэтому эта модель больше подходит для численных расчётов.

Хотя в некоторых приближениях можно сделать анализ классической псевдотрёхмерной модели, но не в общем случае.

## 5.2 Краткое повторение рассмотренных моделей

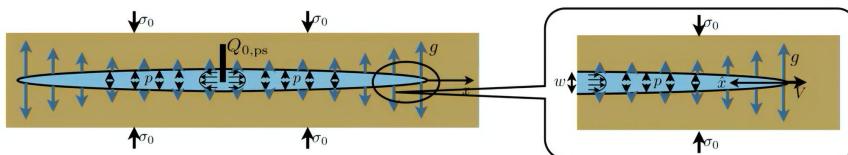
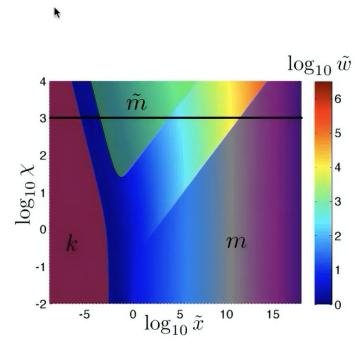
Recall main learnings: fundamentals and semi-infinite fracture

- Work towards a balanced life and invest in your knowledge!

An investment in knowledge pays the best interest.

-Benjamin Franklin

- Essential pieces of a hydraulic fracture model: volume balance, fluid flow, elasticity, propagation, proppant transport
- Derivation of the governing equations for planar and plane strain fracture geometries
- Semi-infinite hydraulic fracture as a model for the tip region
  - There are three limiting analytic solutions: toughness, viscosity, and leak-off
  - The global solution gradually transitions from one limiting case to another
  - There is computationally efficient approximate solution for the problem that can be used as a propagation condition for finite fractures



$$w \propto \hat{x}^{2/3} \quad w \propto \hat{x}^{5/8} \quad w \propto \hat{x}^{1/2}$$

Теперь хочу кратко повторить изученные модели.

Сначала мы обсудили основные компоненты любой модели ГРП (закон сохранения объёма, уравнение течения жидкости, упругость, критерий распространения и транспорт проппанта). Далее изучили вывод уравнений для планарной и плоской трещин.

Рассмотрели первую (самую простую) фундаментальную модель полубесконечной трещины: модель для кончика трещины (в общем случае верна для кончика планарной трещины, но применима и для кончика плоской, радиальной, PKN и EP3D моделей). Выяснили, что для полубесконечной трещины есть 3 предельных решения: есть режим трещиностойкости, режим вязкости и режим утечек. Возле кончика всегда реализуется режим трещиностойкости, далее при удалении от кончика трещины он может перейти в режим утечек и при ещё большем удалении от кончика – в режим вязкости. Важно, что есть три режима и три соответствующие характерные степенные зависимости раскрытия от расстояния от кончика трещины (1/2 – режим трещиностойкости; 5/8 – режим утечек и 2/3 – режим вязкости).

## Recall main learnings: plane strain fracture

- Estimation of the solution based on scaling
- Definition of fracture regimes
- The relationship between the regimes for a finite fracture and tip asymptote
- The existence of approximate solution constructed using global volume balance and tip asymptote
- The existence of explicit expressions for limiting or vertex cases
- Parametric space for the problem, two dimensionless parameters, dimensionless toughness and dimensionless time

 $M$  - storage-viscosity

No toughness, no leak-off

Viscosity

$$w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} \dot{x}^{2/3}$$

 $K$  - storage-toughness

No viscosity, no leak-off

Toughness

$$w_k = \frac{K'}{E'} \dot{x}^{1/2}$$

 $\tilde{M}$  - leak-off-viscosity

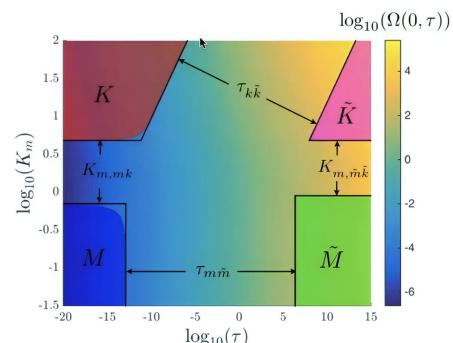
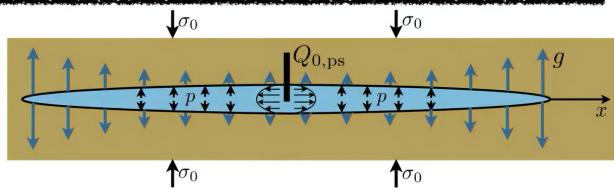
No toughness, large leak-off

Leak-off

$$w_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} \dot{x}^{5/8}$$

 $\tilde{K}$  - leak-off-toughness

No viscosity, large leak-off

E.V. Dontsov. An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *Int. J. Fract.*, 205:221–237, 2017.

Далее рассмотрели модель плоской трещины. В этой модели двухмерная упругость и одномерное течение.

Здесь важно запомнить, что существует приближённое решение, которое построено на основе общего закона сохранения объёма и асимптотического решения на кончике трещины.

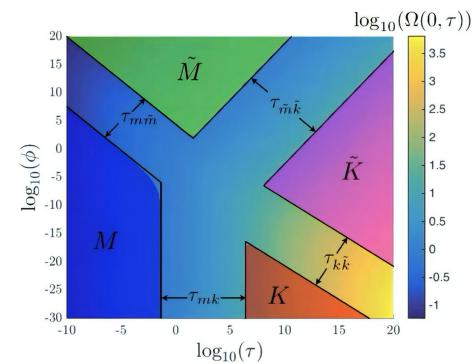
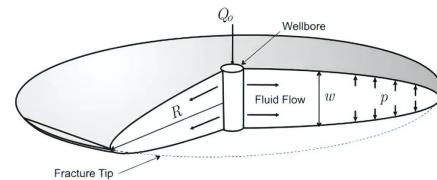
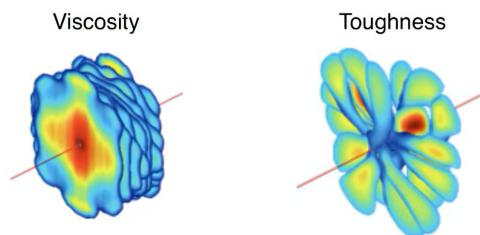
Теперь в параметрическом пространстве 4 характерных решения (в параметрическом пространстве по оси абсцисс некое безразмерное время, а по оси ординат какой-то другой параметр, в данном случае это безразмерная трещиностойкость).

Для всех простых конечных трещин (плоская, радиальная, PKN) есть 4 предельных решения: storage-viscosity, storage-toughness, leak-off-viscosity, leak-off-toughness. Либо доминирует вязкость, либо трещиностойкость и утечки либо большие, либо малые.

Соответственно, для этой модели можем посчитать приближённое решение и построить параметрическое пространство.

### Recall main learnings: radial fracture

- Estimation of the solution based on scaling
- Definition of fracture regimes
- The relationship between the regimes for a finite fracture and tip asymptote (the same as for plane strain)
- The existence of approximate solution constructed using global volume balance and tip asymptote (similar to plane strain)
- The existence of explicit expressions for limiting or vertex cases
- Parametric space for the problem, two dimensionless parameters, dimensionless leak-off and dimensionless time
- Fracture regimes affect morphology of multiple hydraulic fractures



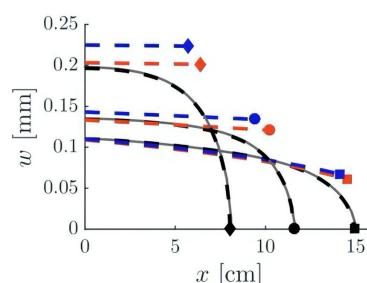
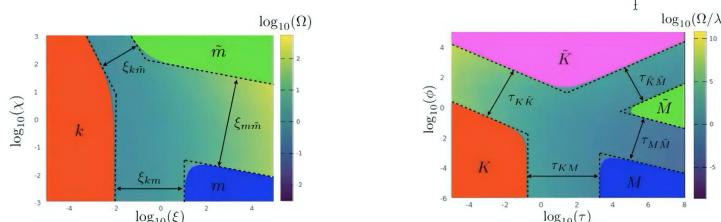
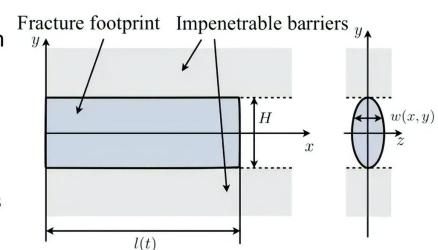
E.V. Dontsov. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *R. Soc. open sci.*, 3:160737, 2016.

То же самое для радиальной трещины. Те же самые режимы, но другое параметрическое пространство. Опять же мы знаем решение в каждой точке параметрического пространства, у нас есть аналитические выражения для решения в этих четырёх предельных случаях.

Для радиальной геометрии важно, что при распространении множества трещин рядом друг с другом, они взаимодействуют между собой и получаем очень разные морфологии (геометрии) трещин в зависимости от того, где находимся в параметрическом пространстве. Причём не важен размер трещин, а важно именно расположение в параметрическом пространстве.

### Recall main learnings: PKN fracture

- Assumptions of PKN model, including constant height, length  $\gg$  height, horizontal flux, constant pressure in each vertical cross-section, elliptical width in each vertical cross-section
- There are two approaches to solve the problem:
  - Use non-local elasticity, which is good for numerical scheme and leads to superior accuracy
  - Use local elasticity with a specific boundary condition at the tip, which is less accurate, but easier for analysis
- PKN fracture has its own formulation for the tip region, which is different from that for a semi-infinite plane strain fracture, approximate solution exists
- Parametric space for the finite fracture is evaluated
- Limiting vertex solutions exist, as well as the global approximate solution



Для модели PKN те же самые 4 режима, но совсем другие выражения для  $\phi$  и  $\tau$ .

PKN модель тоже является очень простой фундаментальной моделью, но среди простых моделей она достаточно хорошо применима на практике.

Основные предположения: высота постоянна, длина много больше высоты, давление постоянно в каждом сечении, эллиптическое открытие в каждом сечении. Затем идут технические детали: берём уравнения для планарной трещины, усредняем их по высоте, получаем упрощённые уравнения для модели PKN.

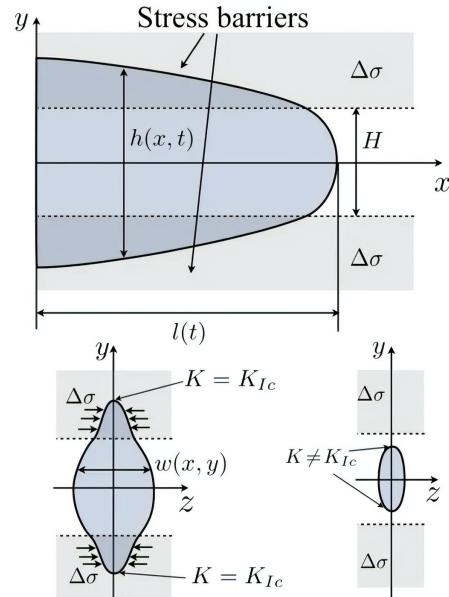
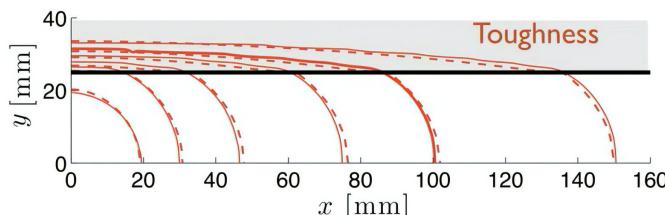
Конечно, на практике часто реализуются более сложные сценарии, но всё равно модель PKN одна из самых близких к практике. И так как эта модель всё ещё относительно простая, то для неё можем построить приближённое решение, аналитически оценить все параметры, проанализировать и найти параметрическое пространство.

И для этой модели тоже есть приближённое решение для каждого режима. Опять же можно использовать принцип максимума (среди радиусов, открытий или давлений), чтобы оценить решение в любой точке параметрического пространства.

Если вы хотите сделать лабораторный эксперимент и сравнить результаты с полевыми данными, то опять же это необходимо делать, исходя из параметрического пространства, т.е. аналогично рассмотренному ранее примеру для радиальной трещины.

### Recall main learnings: pseudo-3D fracture

- Assumptions of P3D model, including equilibrium height growth model, length  $\gg$  height, horizontal flux, constant pressure in each vertical cross-section, plane strain solution for width in each vertical cross-section
- Non-local elasticity and other corrections allow to significantly improve accuracy of the model
- There are extensions for asymmetric stress layers as well as multiple layers
- This model is suited more for numerical calculations, rather than analysis. However, analysis of the classical P3D model can be found in Adachi et. al, 2010.



Псевдотрёхмерная модель тоже относится к классу фундаментальных одномерных моделей, но больше предполагает численные расчёты (простые и быстрые).

Главное отличие псевдотрёхмерной модели от модели PKN в том, что есть рост трещины через стресс-барьеры.

Но основные предположения очень похожи: длина много больше высоты; давление в вертикальном сечении постоянно; используем аналитическое решение для открытия, чтобы усреднить двухмерное уравнение по высоте и получить одномерное уравнение.

## 6 Лекция 02.04.2021 (Валов А.В.)

### 6.1 Модель Planar3D ILSA

#### 6.1.1 Предположения модели

Предположения модели:

- 1) одна трещина (плоская);
- 2) среда однородна по  $E$  и  $\nu$ ;
- 3) работаем в рамках линейно-упругой механики разрушения (ЛМР);
- 4) жидкость ньютоновская с вязкостью  $\mu$ ;
- 5) утечки по Картеру,  $C_L$ ;
- 6) среда однородна по  $K_{Ic}$  и  $C_L$ ;
- 7) пренебрегаем силой тяжести;
- 8) отсутствует fluid lag.

#### 6.1.2 Вспомогательные обозначения

Перед тем, как переходить к уравнениям, давайте введём вспомогательные обозначения:

$$\mu' = 12\mu, \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad K' = 4 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_{Ic}, \quad C' = 2C_L \quad (6.1)$$

(мы просто на основе входных параметров модели ввели некоторые обозначения, которые позволят нам записать уравнения чуть-чуть короче).

#### 6.1.3 Основные уравнения

Теперь давайте переходить к уравнениям. У нас есть две составляющие: упругая среда, которая описывается неким уравнением упругости, и течение жидкости по трещине.

##### Упругость.

Упругость связывает давление жидкости в трещине и раскрытие этой трещины:

$$p(x, y, t) = \sigma_h(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{A(t)} \frac{w(x', y', t) dx' dy'}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{3/2}} \quad (6.2)$$

##### Гидродинамика.

Уравнение для течения жидкости в трещине.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = Q_0(t) \delta(x - x_0, y - y_0) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x, y)}}, \quad (6.3)$$

где  $\vec{q}$  – это поток жидкости по трещине;  $Q_0(t) \delta(x - x_0, y - y_0)$  – точечный источник потока;  $t_0(x, y)$  – это время, при котором фронт трещины находился в точке  $(x, y)$ ; величина  $(t - t_0)$  – это время экспозиции (смысл времени экспозиции в том, что жидкость начинает утекать из некоторой точки только тогда, когда фронт трещины до неё доедет).

Для потока  $\vec{q}$  выполняется закон Пуазейля:

$$\vec{q} = -\frac{w^3}{\mu'} \nabla p \quad (6.4)$$

(т.е. поток жидкости по трещине берём из аналитического решения уравнения Навье-Стокса для канала с фиксированной шириной  $w$ )

Подставляя (6.4) в (6.3), получаем уравнение Рейнольдса, которое описывает течение жидкости по трещине:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{w^3}{\mu'} \nabla p\right) = Q_0(t) \delta(x - x_0, y - y_0) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x, y)}}, \quad (6.5)$$

### Planar3D ILSA Model (Peirce, Dontsov, 2017)

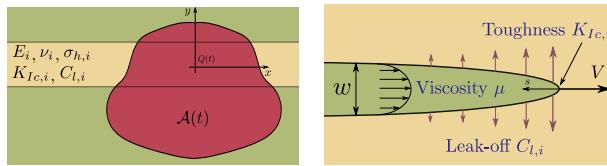


Figure 1 : Scheme of planar hydraulic fracture in layered medium.

<b>Elasticity equation</b>	$p(x, y, t) = \sigma_h(y) - \int_{A(t)} w(x', y', t) G(x, y, x', y') dx' dy',$ $G_{\text{homogeneous}}(x, y, x', y') = \frac{E'}{8\pi [(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{3/2}},$
<b>Lubrication equation</b>	$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\mu'} \nabla \cdot (w^3 \nabla p) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x, y)}} + Q(t) \delta(x, y),$
<b>Boundary conditions</b>	$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \quad \lim_{s \rightarrow 0} w^3 \frac{\partial p}{\partial s} = 0.$

A. Valov et al., LIH SB RAS 1 July, 2019 3 / 23

#### 6.1.4 Границные условия

Первое граничное условие следует из предположения, что мы работаем в рамках линейно-упругой механики разрушения:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w(s)}{s^{1/2}} = \frac{K'}{E'} \quad (6.6)$$

(равносильно условию  $K_I = K_{Ic}$ )

Второе граничное условие – это условие нулевого потока на кончике трещины:

$$\vec{q} \cdot \vec{n} \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{w^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad (6.7)$$

(условие отсутствия fluid lag)

#### Универсальное асимптотическое решение в окрестности фронта трещины

Сделаем небольшое лирическое отступление про линейные асимптотики. Зачем нам линейные асимптотики? У нас есть плоская трещина. Локально если рассмотреть некоторую окрестность фронта, то задача очень похожа на распространение одномерной полубесконечной трещины

с постоянной скоростью  $v$ . У этой задачи есть три предельных режима. Здесь наверное стоит начать с того, что в кончике трещины на самом деле есть 3 конкурирующих процесса.

Первый процесс (toughness) – это затрачивание энергии на образование новой поверхности трещины (т.е. чтобы образовать новую поверхность трещины, требуется выполнение критерия разрушения).

Второй процесс (leak-off) – это утекание жидкости из трещины.

Третий процесс (viscosity) – это вязкая диссипация жидкости по трещине (жидкость течёт с параболическим фронтом, есть трение, энергия затрачивается на то, чтобы протолкнуть эту жидкость по трещине).

### Tip asymptotic solution

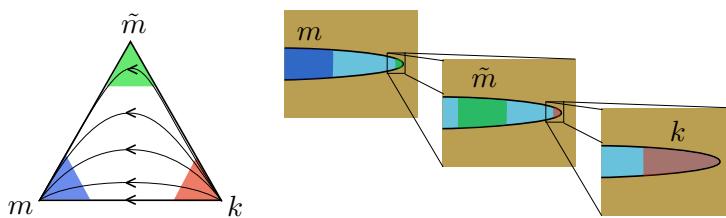


Figure 2 : Parametric triangle corresponding to the all asymptotic regimes:  $k$  is toughness dominated,  $\tilde{m}$  is leak-off dominated,  $m$  is viscosity dominated.

$$w_k = \frac{K'}{E'} s^{1/2}, \quad w_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} s^{5/8}, \quad w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} s^{2/3}.$$

Если брать только один из этих эффектов, а двумя другими пренебрегать, то мы можем получить 3 предельных режима:

- доминирование разрушения породы

$$w_k = \frac{K'}{E'} s^{1/2} \tag{6.8}$$

- доминирование утечек

$$w_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{4\mu'^2 v C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} s^{5/8} \tag{6.9}$$

- доминирование вязкости

$$w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' v}{E'} \right)^{1/3} s^{2/3} \tag{6.10}$$

Для более точного моделирования было бы полезно учитывать не один из трёх режимов, а все 3 режима сразу (и переходные режимы между ними).

Всю задачу о полубесконечной трещине с учётом всех трёх эффектов можно приблизённо решить и получить универсальное асимптотическое решение:

$$\frac{s^2 v \mu'}{E' w^3} = g_\delta \left( \frac{K' s^{1/2}}{E' w}, \frac{2 s^{1/2} C'}{w v^{1/2}} \right) \tag{6.11}$$

(это приближённое решение, но оно в пределах одного процента или даже лучше совпадает с точным решением; исходная задача полубесконечной трещины представляет собой нелинейное интегральное уравнение на полубесконечной прямой, которое неизвестно, как решить несложными способами; однако получили, что приближённо решение задачи полубесконечной трещины можно свести к функциональной зависимости между  $w$  и  $s$ ).

Введя следующие обозначения

$$\hat{S}(w, s) = \frac{s^2 v \mu'}{E' w^3} \quad \hat{K}(w, s) = \frac{K' s^{1/2}}{E' w} \quad \hat{C}(w, s) = \frac{2s^{1/2} C'}{w v^{1/2}} \quad (6.12)$$

перепишем универсальную асимптотику

$$\hat{S}(w, s) = g_\delta(\hat{K}(w, s), \hat{C}(w, s)) \quad (6.13)$$

Функция  $g_\delta$  – это функция, у которой есть вполне определённый аналитический вид. Т.е. теперь нет необходимости решать дифференциальное или интегральное уравнение. Если мы знаем  $s$ , то можем его подставить и, решив нелинейное алгебраическое уравнение, найти  $w$ . Т.е. зная расстояние до фронта трещины, мы можем найти раскрытие. Или, зная раскрытие, можем найти расстояние до фронта трещины. Другими словами, в полученной асимптотике всегда предполагается, что нам известна одна из величин: или расстояние до фронта, или раскрытие трещины. И по одному из этих параметров находится другой параметр, например, с помощью метода Ньютона.

Полученная универсальная асимптотика верна только в случае  $v > 0$  (трещина куда-то постоянно едет, т.е. выполняется критерий разрушения  $K_I = K_{Ic}$ ). Если же трещина остановилась, то критерий разрушения не выполняется (т.е.  $K_I < K_{Ic}$ ) и вместо универсальной асимптотики рассматривают toughness асимптотику:

$$w = \frac{K'_I}{\mu'} s^{1/2} \quad (6.14)$$

(методы расчёта коэффициента  $K'_I$  – это отдельная кухня).

Таким образом, важно понимать, что универсальная асимптотика верна только для случая, когда выполнен критерий разрушения.

Зачем вспомнили при универсальную асимптотику? Если мы локально рассмотрим кусочек трещины вблизи фронта, то там трещина движется одномерно с постоянной скоростью, а для этого случая у нас есть приближённое решение, которое близко к точному.

Вблизи кончика трещины самые большие градиенты, т.е. если мы разрабатываем численный метод для решения задачи, то особое внимание необходимо уделить кончику трещины, потому что там самые большие градиенты, а значит самые большие ошибки.

Идея заключается в следующем: хотим в окрестности кончика трещины найти аналитическое решение (оно у нас есть) и сказать, что в окрестности фронта трещины раскрытие должно равняться некоторому аналитическому раскрытию.

Т.е. условно мы в кончике трещины задачу решаем практически точно, а когда мы отдаляемся от кончика трещины, то там градиенты искомых функций меньше и ошибка численного алгоритма

будет меньше.

Мы пытаемся с помощью универсальной асимптотики практически точно решить задачу в окрестности фронта, тем самым уменьшив численную ошибку будущего алгоритма.

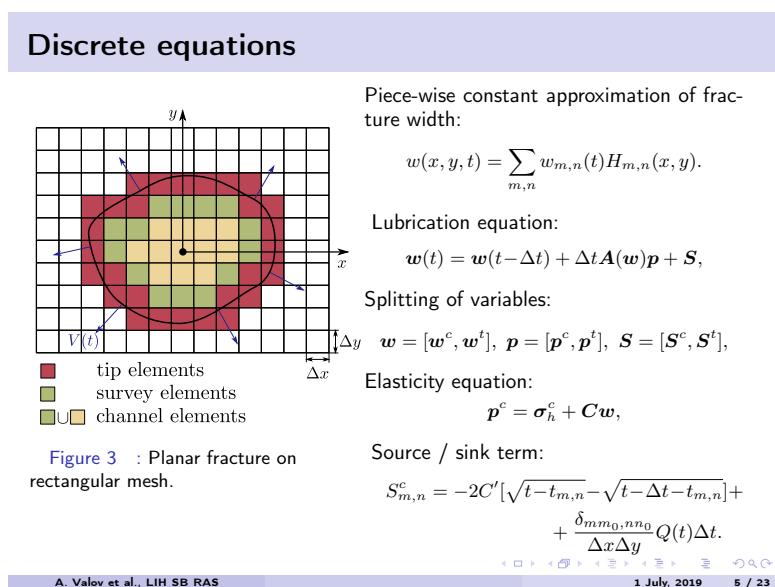
При этом эта универсальная асимптотика покрывает условие  $K_I = K_{Ic}$ , которое было изначально (т.е. мы не теряем это условие).

Итак, мы выписали уравнения, граничные условия, вспомнили асимптотики и решили использовать универсальную асимптотику в окрестности фронта в качестве точного решения, т.е. первое граничное условие перепишем в виде:

$$w(s) \sim w_a(s) \text{ при } s \rightarrow 0 \quad (6.15)$$

### 6.1.5 Дискретизация области моделирования. Классификация элементов

В принципе мы всё обсудили для того, чтобы начать разрабатывать численный алгоритм. Давайте к нему и перейдём. Для того, чтобы записать численный алгоритм, сначала нужно разобраться с областью моделирования.



Есть плоскость, которую мы покрываем прямоугольными элементами (с шириной  $dx$  и с высотой  $dy$ ). Есть фронт трещины, который распространяется со скоростью  $v$ , и эта скорость локально в каждом участке фронта различная (каждый участок фронта едет со своей скоростью). Рассматриваемая трещина покрывает собой некоторый набор прямоугольных элементов. Эти элементы удобно будет разделить на 3 категории:

- 1) концевые элементы (пересекаются контуром трещины и частично заполнены жидкостью);
- 2) внутренние элементы (находятся внутри трещины и полностью заполнены жидкостью);
- 3) опорные элементы (тоже являются внутренними элементами, но дополнительно граничат с концевыми элементами).

### 6.1.6 Дискретизация уравнений

Итак, есть плоскость с сеткой, теперь необходимо заняться дискретизацией искомых функций. У нас две искомые функции:

1) раскрытие трещины  $w(x, y, t)$ , которое мы будем аппроксимировать кусочно-постоянно, т.е.

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n} w_{m,n}(t) H_{m,n}(x, y), \quad (6.16)$$

где

$$H_{i,j}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A_{i,j} \\ 0, & (x, y) \notin A_{i,j} \end{cases} \quad (6.17)$$

2) давление  $p(x, y, t)$ , которое аналогично будем аппроксимировать кусочно-постоянно.

### Дискретизация уравнения упругости

Подставляя кусочно-постоянную аппроксимацию раскрытия  $w$  в уравнение упругости, получаем:

$$p_{i,j}(t) = \sigma_{h_{i,j}} + \sum_{k,l} C_{i,j,k,l} w_{k,l}(t), \quad (6.18)$$

где

$$C_{i,j,k,l} = -\frac{E'}{8\pi} \left[ \frac{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_j - y)^2}}{(x_i - x)(y_j - y)} \right]_{x=x_k - \frac{\Delta x}{2}, y=y_l - \frac{\Delta y}{2}}^{x=x_k + \frac{\Delta x}{2}, y=y_l + \frac{\Delta y}{2}} \quad (6.19)$$

Здесь использовали обозначение квадратных скобок с индексами:

$$[f]_{x=x_1, y=y_1}^{x=x_2, y=y_2} = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) \quad (6.20)$$

$C_{i,j,k,l}$  – это матрица упругости (характеризует упругое влияние элемента с индексами  $(k, l)$  на элемент с индексами  $(i, j)$ ).

Заметим, что матрица упругости зависит только от входных параметров (от свойств пластина) и выбранной сетки, т.е. эту матрицу требуется посчитать только один раз (нет необходимости пересчитывать её в процессе расчёта).

### Дискретизация уравнения Рейнольдса

Далее обсудим более сложную часть, а именно дискретизацию уравнений Рейнольдса. Поскольку уравнение Рейнольдса изначально появилось из закона сохранения массы, то нам нужно его аппроксимировать таким образом, чтобы масса сохранялась (т.е. нам нужна консервативная численная схема интегрирования).

Постепенно будем выводить консервативную схему.

Уравнение Рейнольдса:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{w^3}{\mu'} \nabla p\right) = Q_0(t) \delta(x - x_0, y - y_0) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x, y)}}, \quad (6.21)$$

Проинтегрируем уравнение Рейнольдса от  $t - \Delta t$  до  $t$  (т.е. возьмём 1 шаг по времени и по этому шагу по времени просто проинтегрируем уравнение):

$$\underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial w}{\partial \tau} d\tau}_{\text{интегрируем точно}} - \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \operatorname{div}\left(\frac{w^3}{\mu'} \nabla p\right) d\tau}_{\substack{\text{интегрируем приближённо} \\ \text{по формуле правых} \\ \text{прямоугольников}}} = \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \varphi(\tau) d\tau}_{\text{не трогаем}}, \quad (6.22)$$

где

$$\varphi(t) = Q_0(t) \delta(x - x_0, y - y_0) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x, y)}} \quad (6.23)$$

Для интегрирования дивергенции используем именно формулу правых прямоугольников (а, например, не формулу Симпсона), чтобы итоговая численная схема была проще. При использовании формулы Симпсона не факт, что схема будет устойчива.

Воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница и формулой правых прямоугольников, получаем:

$$w(t) - w(t - \Delta t) - \Delta t \left[ \operatorname{div}\left(\frac{w^3}{\mu'} \nabla p\right) \right]_t = \int_{t-\Delta t}^t \varphi(\tau) d\tau \quad (6.24)$$

## 7 Лекция 08.04.2021 (Валов А.В.)

### 7.1 Модель Planar3D ILSA: дискретизация, поиск фронта, алгоритм

Продолжаем разрабатывать численный алгоритм для модели Planar3D ILSA.

#### 7.1.1 Дискретизация уравнений. Продолжение

В прошлый раз остановились на дискретизации уравнения Рейнольдса. А именно проинтегрировали его по одному шагу по времени и, воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница и формулой правых прямоугольников, получили:

$$w(t) - w(t - \Delta t) - \Delta t \left[ \operatorname{div} \left( \frac{w^3}{\mu'} \nabla p \right) \right]_t = \int_{t-\Delta t}^t \varphi(\tau) d\tau \quad (7.1)$$

#### Дискретизация уравнения Рейнольдса. Продолжение

Далее проинтегрируем полученное уравнение по элементам. Запишем:

$$\int_{A_{i,j}} (w(t) - w(t - \Delta t)) dA - \Delta t \left[ \int_{A_{i,j}} \operatorname{div} \left( \frac{w^3}{\mu'} \nabla p \right) dA \right]_t = \int_{t-\Delta t}^t \psi(\tau) d\tau, \quad (7.2)$$

где

$$\psi(t) = \int_{A_{i,j}} \left( Q_0(t) \delta(x - x_0, y - y_0) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x, y)}} \right) dA \quad (7.3)$$

Вспомним теорему Гаусса-Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} \vec{f} dV = \int_{\partial V} \vec{f} \cdot \vec{n} ds$$

и перепишем уравнение (7.2) в следующем виде:

$$\int_{A_{i,j}} (w(t) - w(t - \Delta t)) dA - \Delta t \left[ \int_{C_{i,j}} \frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} dC \right]_t = \int_{t-\Delta t}^t \psi(\tau) d\tau \quad (7.4)$$

Здесь дополнительно воспользовались равенством:  $\nabla p \cdot \vec{n} = \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}$ .

С полученным уравнением (7.4) уже можно работать.

Напомню, что раскрытие трещины  $w(x, y, t)$  аппроксимируем кусочно-постоянно:

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n} w_{m,n}(t) H_{m,n}(x, y), \quad (7.5)$$

где

$$H_{i,j}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A_{i,j} \\ 0, & (x, y) \notin A_{i,j} \end{cases} \quad (7.6)$$

После подстановки кусочно-постоянного раскрытия  $w$  слагаемые в уравнении (7.4) перепишутся в следующем виде:

$$\int_{A_{i,j}} (w(t) - w(t - \Delta t)) dA = (w_{i,j}(t) - w_{i,j}(t - \Delta t)) \Delta x \Delta y \quad (7.7)$$

(т.к. раскрытие кусочно-постоянно);

$$\begin{aligned} \int_{t-\Delta t}^t \psi(\tau) d\tau &= \int_{A_{i,j}} \int_{t-\Delta t}^t \left( Q_0(t) \delta(x - x_0, y - y_0) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x, y)}} \right) d\tau dA \approx \\ &\approx \Delta x \Delta y \Delta t [Q_{i,j}]_t - 2C' \Delta x \Delta y \left( \sqrt{t - t_{0,i,j}} - \sqrt{t - \Delta t - t_{0,i,j}} \right) \end{aligned} \quad (7.8)$$

(здесь воспользовались формулой средних прямоугольников при интегрировании по ячейке и формулой правых прямоугольников при интегрировании по временному шагу; полученная формула верна только для внутренних элементов, так как при использовании формулы средних прямоугольников берём значение функции только в центре элемента; для концевых элементов выведем формулу позже);

$$\begin{aligned} \int_{C_{i,j}} \frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} dC &= \int_{C_{i,j}^{\text{right}}} \frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} dC + \int_{C_{i,j}^{\text{left}}} \frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} dC + \int_{C_{i,j}^{\text{top}}} \frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} dC + \int_{C_{i,j}^{\text{bot}}} \frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} dC \approx \\ &\approx \underbrace{\frac{w_{i+1,j}^3 + w_{i,j}^3}{2\mu'}}_{\text{обозначим за } M_{i+\frac{1}{2},j}} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} \Delta y - \underbrace{\frac{w_{i,j}^3 + w_{i-1,j}^3}{2\mu'}}_{\text{обозначим за } M_{i-\frac{1}{2},j}} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \Delta y + \\ &+ \underbrace{\frac{w_{i,j+1}^3 + w_{i,j}^3}{2\mu'}}_{\text{обозначим за } M_{i,j+\frac{1}{2}}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} - \underbrace{\frac{w_{i,j}^3 + w_{i,j-1}^3}{2\mu'}}_{\text{обозначим за } M_{i,j-\frac{1}{2}}} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \Delta x = \\ &= \left( M_{i+\frac{1}{2},j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} - M_{i-\frac{1}{2},j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \Delta y + \\ &+ \left( M_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} - M_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \Delta x \end{aligned} \quad (7.9)$$

(идея здесь такая: разбиваем интеграл по границе на сумму интегралов по кусочкам границы; аппроксимируем подынтегральную функцию на каждом кусочке и считаем интеграл). Таким образом, уравнение (7.4) перепишется в следующем виде:

$$(w_{i,j}(t) - w_{i,j}(t - \Delta t)) \Delta x \Delta y = \Delta x \Delta y \Delta t [Ap]_{i,j} + \Delta x \Delta y \Delta t Q_{i,j} - \Delta x \Delta y \Delta L_{i,j}, \quad (7.10)$$

где

$$\begin{aligned} [Ap]_{i,j} = & \frac{1}{\Delta x} \left[ M_{i+\frac{1}{2},j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} - M_{i-\frac{1}{2},j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta y} \left[ M_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} - M_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad (7.11)$$

Вспомним, что у нас есть дополнительное граничное условие нулевого потока на границе трещины:

$$\vec{q} \cdot \vec{n} \underset{s \rightarrow 0}{=} 0 \quad (7.12)$$

Чтобы удовлетворить этому условию нулевого потока на границе, необходимо занулить потоки через внешние границы концевых элементов.

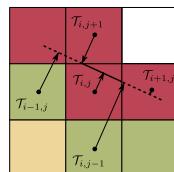
Лирическое отступление. В интернете есть [оригинальная лекция](#) Энтони Пирса (Anthony Peirce). Можете ради интереса посмотреть её. Там есть некоторые нюансы, которые мы сегодня опустили: например, метод микроскопа. Изначально модель была придумана не с универсальной асимптотикой. Если проследить эволюцию статей, то можно посмотреть, как развивалась мысль.

Итак, на текущий момент мы разобрались с уравнением упругости (его мы просто взяли и проинтегрировали), разобрались с уравнением Рейнольдса (выписали схему конечных объёмов). Теперь необходимо разобраться, зачем мы делили элементы на внутренние, опорные и концевые.

### 7.1.2 Зачем вводили классификацию элементов?

У нас есть граничное условие:  $w \underset{s \rightarrow 0}{\sim} w_a(s)$ . Мы будем его использовать, чтобы определять положение фронта и раскрытие в концевых элементах.

## Locating the fracture front using the level set algorithm



Determining the distance to the front from centers of survey elements using the universal asymptotic solution:

$$\frac{s_i^2 V_i \mu'}{E' (w_i^s)^3} = g_\delta \left( \frac{K' s_i^{1/2}}{E' w_i^s}, \frac{2 s_i^{1/2} C'}{w_i^s V_i^{1/2}} \right), \quad V_i = \frac{s_i - s_{i,0}}{\Delta t}$$

Boundary conditions:

$$\mathcal{T}(x_i, y_i) = -s_i$$

Eikonal equation:

$$|\nabla \mathcal{T}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}\right)^2} = 1$$

Upwind scheme for Eikonal equation:

$$\max \left( \frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i-1,j}}{\Delta x}, \frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i+1,j}}{\Delta x}, 0 \right)^2 + \max \left( \frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i,j-1}}{\Delta y}, \frac{\mathcal{T}_{i,j} - \mathcal{T}_{i,j+1}}{\Delta y}, 0 \right)^2 = 1$$

Figure 4 : Defining location of the moving piecewise linear fracture front.

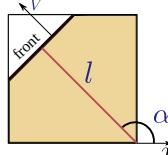


Figure 5 : Governing parameters of tip element.

A. Valov et al., LIH SB RAS

1 July, 2019 6 / 23

## Tip volume calculation

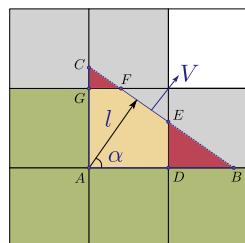


Figure 6 : Schematics of the procedure for tip volume calculation.

The average fracture width:

$$w^t = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \begin{cases} \mathcal{V}_\Delta(\ell) - \mathcal{H}(\ell - \Delta y \sin \alpha) \mathcal{V}_\Delta(\ell - \Delta y \sin \alpha) \\ \quad - \mathcal{H}(\ell - \Delta x \cos \alpha) \mathcal{V}_\Delta(\ell - \Delta x \cos \alpha), & \alpha \neq 0, \pi/2, \\ \Delta y M_0(\ell), & \alpha = 0, \\ \Delta x M_0(\ell), & \alpha = \pi/2. \end{cases}$$

The fluid volume in ADEFG:

$$\mathcal{V}_{ADEFG} = \mathcal{V}_{ABC} - \mathcal{H}(\ell - \Delta y \sin \alpha) \mathcal{V}_{GFC} - \mathcal{H}(\ell - \Delta x \cos \alpha) \mathcal{V}_{DBE}$$

Fluid volume in a single triangle:

$$\mathcal{V}_\Delta(\ell) \equiv \int_0^\ell \frac{sw_a(\ell-s)}{\sin \alpha \cos \alpha} ds = \frac{\ell M_0(\ell) - M_1(\ell)}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

Moments  $M_0$  and  $M_1$ :

$$M_0(\ell) = \int_0^\ell w_a(s) ds = \frac{2 w_a(\ell) \ell}{3 + \delta},$$

$$M_1(\ell) = \int_0^\ell w_a(s)s ds = \frac{2 w_a(\ell) \ell^2}{5 + \delta}$$

A. Valov et al., LIH SB RAS 1 July, 2019 7 / 23

## 8 Лекция 13.04.2021 (Байкин А.Н.)

### 8.1 Модель Planar3D Biot: постановка задачи, перенос граничных условий

Как может проявляться так называемый пороупругий эффект? ...

## 9 Лекция 20.04.2021 (Байкин А.Н.)

### 9.1 Модель Planar3D Biot: слабая постановка, штраф, пороупругие эффекты

## 10 Лекция 27.04.2021 (Байкин А.Н.)

### 10.1 Перенос проппанта: постановка задачи, обезразмеривание, оседание

## 11 Лекция 30.04.2021 (Байкин А.Н.)

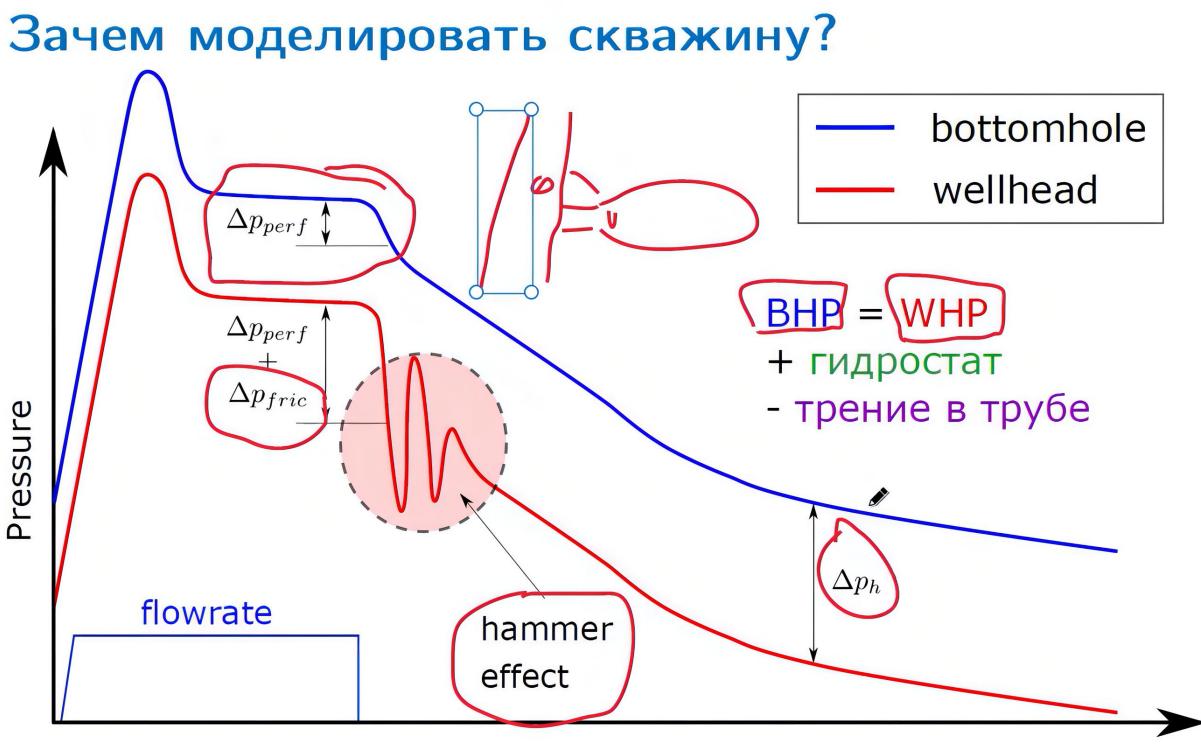
### 11.1 Перенос проппанта: осреднение, численный алгоритм, бриджинг

## 12 Лекция 11.05.2021 (Байкин А.Н.)

### 12.1 Моделирование течения жидкости в скважине

Мы с вами движемся дальше. Сегодня у нас будет тема про моделирование скважин. Т.е. до этого мы рассматривали преимущественно именно процессы в самой трещине, процессы в окружающем пласте (такие как утечки или деформация породы), а закачка всегда предполагалась на забое скважины (расход задавался на входе в саму трещину). Но вообще говоря у нас с вами есть скважины и то давление на входе в трещину, которое мы получаем в расчётах, не совпадает с давлением, которое мы получаем при измерении какими-то приборами (как на поверхности, так и когда мы опускаем датчик давления вниз к забою).

#### 12.1.1 Зачем моделировать скважину?



Зачем нам необходимо моделировать скважину?

Во-первых, чтобы знать, какое давление на забое скважины и как оно соотносится с давлением на устье скважины. Почему это важно? С одной стороны, можно было бы сказать: давайте поставим датчик давления на забое и всё будет классно, но этот датчик давления будет стоять не на самой трещине (т.е. между датчиком и трещиной будет либо участок трубы, либо как минимум участки перфорации, вдоль которых возникает падение давления из-за трения; в итоге, измеряемое давление ВНР будет немного выше, чем давление на входе в трещину). Датчик забойного давления ВНР (забойный манометр) практически никогда не ставят, потому что это дорого; обычно мы знаем только давление на устье ВНР.

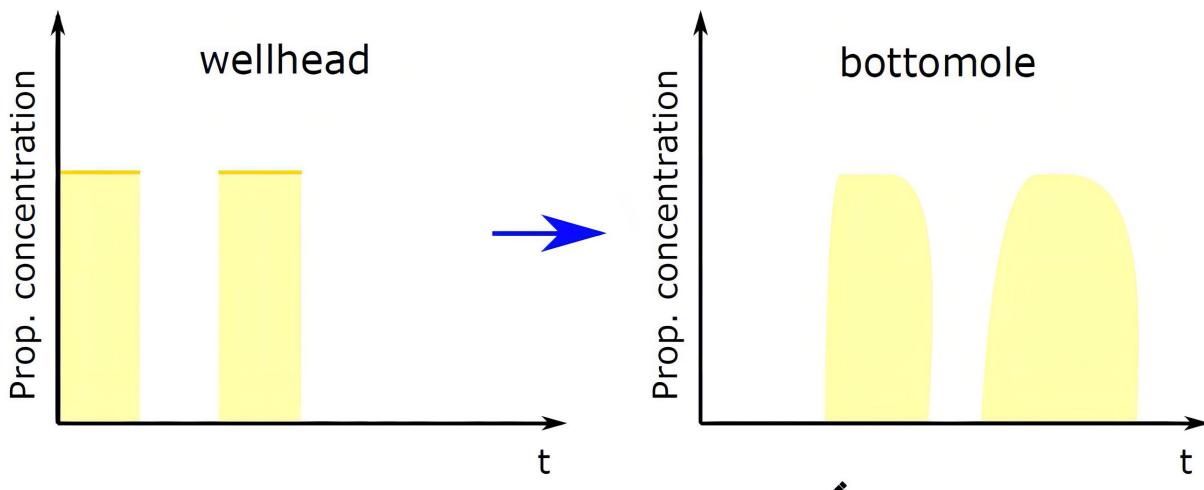
Чтобы осуществить пересчёт ВНР через известное ВНР нам необходимо учсть падение давления за счёт трения жидкости при движении по трубе и гидростатическое давление. Т.е. получа-

ем, что за счёт трения давление на забое снижается (относительно WHP), а за счёт гидростатики давление на забое увеличивается (относительно WHP).

Кроме того, скважину интересно моделировать, чтобы объяснить наблюдаемый hammer effect: при резком закрытии скважины наблюдаются колебательные движения жидкости между скважиной и трещиной, которые имеют форму затухающих колебаний. И по этим затухающим колебаниям пытаются проводить диагностику. Как минимум говорят, что если есть hammer effect, то связь между скважиной и трещиной достаточно хорошая (т.е. перфорацию сделали достаточно качественно). Дальше по hammer эффекту пытаются оценить размеры трещины (ширину, длину).

Ещё дальше пытаются понять, какой порт заработал (если есть несколько портов) – правда это уже немного другая технология, которая называется tube waves от компании Schlumberger.

## Зачем моделировать скважину?



Для чего ещё моделировать скважину?

Если мы запустили пульсы проппанта (с определённой концентрацией) наверху (на устье), то никто не говорит, что они в таком же первозданном виде дойдут до забоя. Вообще говоря, они могут размазаться.

Сегодня мы размазывание не будем рассматривать, потому что для этого нужна двухскоростная модель, а сегодня мы рассмотрим только односкоростную модель. Но вообще говоря из-за того, что у нас есть профиль скорости, частички проппанта будут собираться (проваливаться) к центру.

Также может происходить оседание проппанта. В принципе всё, что происходило с проппантом в трещине (например, оседание), верно и для скважины.

Размазывание концентрации проппанта важно моделировать, чтобы понимать, какое значение концентрации будет на входе в трещину.

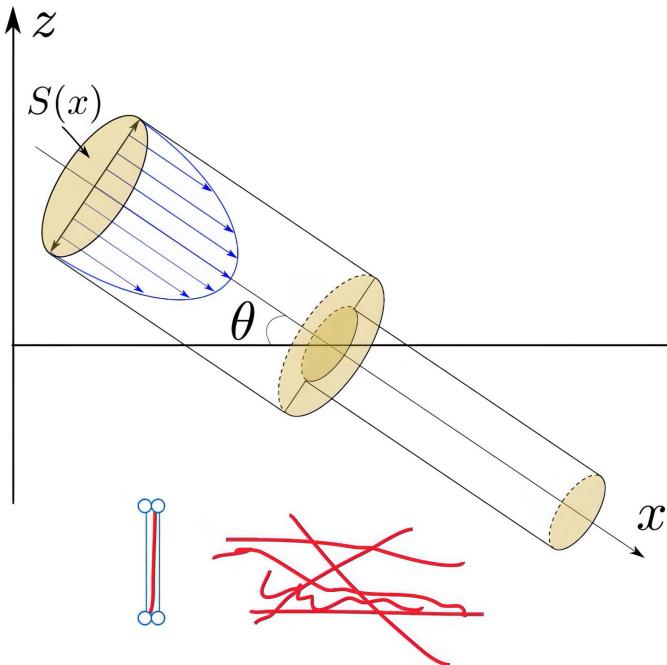
Замечание аудитории. Слышали, что при движении по круглой трубе частички проппанта будут

собираясь в кольцо на расстоянии 0.6 радиуса от центра. Говорят, что это связано с тем, что сами частички проппанта могут крутиться вокруг своей оси.

Сегодня рассмотрим модель попроще, чтобы вы поняли общую схему, а дальше уже можно придумывать более сложные модели (главное понять, какой эффект хочется описать).

### 12.1.2 Предположения модели

## Предположения



- ▶ Наклонная скважина, переменного радиуса  $R$
- ▶ Односкоростная модель  $\vec{u}_p = \vec{u}_f = \vec{u}_m$
- ▶ Жидкость степенная
- ▶ Течение не расслаивается
- ▶ Ламинарный, переходный, турбулентный режимы
- ▶ Сжимаемостью пренебрегаем

Теперь давайте приступим к самой модели.

Основные предположения модели:

- 1) наклонная скважина переменного радиуса  $R$  (на рисунке я специально нарисовал 2 цилиндра, т.к. скважина, вообще говоря, может иметь переменное сечение, но в реальности оно обычно кусочно постоянное: берут кусок трубы одного диаметра засовывают, дальше другого диаметра, дальше обсадная колонна и так далее);
- 2) односкоростная модель  $\vec{u}_p = \vec{u}_f = \vec{u}_m$  (жидкость и проппант движутся с одинаковой скоростью и эта скорость равна усреднённой скорости, формула для которой была в прошлый раз) – это оправдано, когда жидкость достаточно вязкая и частицы проппанта как-бы заморожены в жидкость;
- 3) жидкость неньютоновская (т.е. жидкость со степенной реологией);
- 4) течение не расслаивается (не может быть такого, что где-то на горизонтальном участке проппант внизу пошёл (полностью осел) и течение расслоилось);
- 5) ламинарный, переходный, турбулентный режимы;
- 6) сжимаемостью жидкости пренебрегаем.

### 12.1.3 Определяющие уравнения

#### Определяющие уравнения

Законы сохранения объема жидкости и проппанта:

$$\frac{\partial(cS(x))}{\partial t} + \frac{\partial(cS(x)u_p)}{\partial x} = 0, \quad c_p \equiv c \quad (1)$$

$$\frac{\partial((1-c)S(x))}{\partial t} + \frac{\partial((1-c)S(x)u_f)}{\partial x} = 0, \quad c_f \equiv 1 - c \quad (2)$$

Односкоростная модель  $u_p = u_f = u_m$ , где  $u_m$  — среднеобъемная усредненная скорость смеси по сечению  $S(x)$

$$\frac{\partial(S(x)u_m)}{\partial x} = \frac{\partial(Q(t, x))}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$Q(t, x) = Su_m = \underline{const}(t) = Q_{inlet}(t), \quad S = \pi R^2 \quad (4)$$

Границное условие на устье



$$c|_{x=0} = c_{inlet}(t). \quad (5)$$

Что нам нужно, чтобы описать течение рассматриваемой жидкости?

1) Закон сохранения объема проппанта:

$$\frac{\partial(cS(x))}{\partial t} + \frac{\partial(cS(x)u_p)}{\partial x} = 0, \quad c_p \equiv c \quad (12.1)$$

2) Закон сохранения объема жидкости:

$$\frac{\partial((1-c)S(x))}{\partial t} + \frac{\partial((1-c)S(x)u_f)}{\partial x} = 0, \quad c_f \equiv 1 - c \quad (12.2)$$

Уравнения (12.1) и (12.2) уже усредненные по сечению скважины, но они выводятся точно также, как и для течения проппанта в трещине (только сейчас вместо раскрытия трещины  $w(x)$  используем площадь сечения  $S(x)$  и сейчас нет утечек).

Далее используя предположение односкоростной модели  $u_p = u_f = u_m$ , где  $u_m$  — среднеобъемная усредненная скорость смеси по сечению  $S(x)$ , складываем уравнения (12.1) и (12.2) (дополнительно учтём, что производная площади сечения по времени равна нулю):

$$\frac{\partial(S(x)u_m)}{\partial x} = \frac{\partial(Q(t, x))}{\partial x} = 0, \quad (12.3)$$

где  $Q(t, x) = Su_m = \underline{const}(t) = Q_{inlet}(t)$ ,  $S = \pi R^2$ .

Полученное уравнение говорит нам о том, что расход через любое поперечное сечение скважины одинаков (нет зависимости расхода от координаты  $x$ ) и зависит от расхода, закачиваемого в скважину сверху. Если изменяется сечение скважины, то соответственно изменяется скорость течения так, чтобы расход оставался прежним.

3) Граничное условие (на концентрацию проппанта) на устье скважины:

$$c|_{x=0} = c_{inlet}(t) \quad (12.4)$$

Если проводить аналогию с течением проппанта в трещине, то уравнение (12.3) аналогично эллиптическому уравнению, в котором необходимо было искать давление.

В итоге: мы знаем расход  $Q_{inlet}(t)$ ; знаем площадь  $S(x)$ ; можем найти скорость  $u_m(x, t)$ ; как только знаем скорость, мы можем подставить её в уравнение (12.1), решить это уравнение и с учётом граничного условия (12.4) найти концентрацию проппанта.

При решении данной задачи можно использовать тот же алгоритм, что и для переноса проппанта в трещине, т.е. взять одномерную разностную схему (например, Лакса-Вендроффа с лимитерами), но я хотел бы ещё показать другой численный алгоритм. В данном случае, когда рассматриваем односкоростную модель, этот алгоритм проще, намного быстрее и точнее.

#### 12.1.4 Численный алгоритм

### Численный алгоритма

**Упр.** Доказать, что уравнение переноса для проппанта можно переписать в виде

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + u_m \frac{\partial c}{\partial x} = 0.} \quad (6)$$

Разобьем суммарное время закачки на  $k - 1$  временных интервалов

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad t_0 = 0. \quad (7)$$

$F_k$  значение величины  $F$  в момент времени  $t_k$ .

В лагранжевых координатах  $(t, X)$  на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$  имеем решение вида



$$c(t, X(t)) = c(t, X|_{t=t_k}), \quad \underline{X(t) = X|_{t=t_k} + \int_{t_k}^t u_m(X(s))ds}. \quad (8)$$

Можно показать, что в случае односкоростной модели уравнение (12.1) для переноса проппанта можно переписать в более простом виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_m \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (12.5)$$

(уравнение (12.1) – это закон сохранения в дивергентной форме; а уравнение (12.5) – это классическое уравнение переноса, которое всем известно с урматов).

Физический смысл уравнения (12.5): концентрация  $c$  неизменно переносится векторным полем

$\vec{u}$  (в данном случае со скоростью  $u_m$  вдоль скважины).

Опять же мы здесь должны сделать (ввести) дискретизацию по времени. Разобьём суммарное время закачки на  $k - 1$  временных интервалов:

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad t_0 = 0 \quad (12.6)$$

Введём вспомогательное обозначение:  $F_k$  – это значение величины  $F$  в момент времени  $t_k$ .

В Лагранжевых координатах  $(t, X)$  на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$  имеем решение вида:

$$c(t, X(t)) = c(t, X|_{t=t_k}), \quad X(t) = X|_{t=t_k} + \int_{t_k}^t u_m(X(s))ds \quad (12.7)$$

Грубо говоря, мы в начале трубы выпускаем некоторую лагранжеву частицу со скоростью  $u_m$ , и формула (12.7) говорит нам, что эта частица через время  $t$  дойдёт до положения с координатой  $X$ . И соответственно, если  $c$  на входе будет постоянным, то концентрация за рассматриваемое время тоже не изменится.

## Численный алгоритма

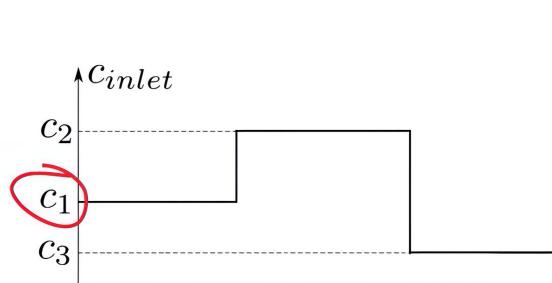


Figure: Кусочно-постоянное по времени граничное условие на концентрацию пропанта

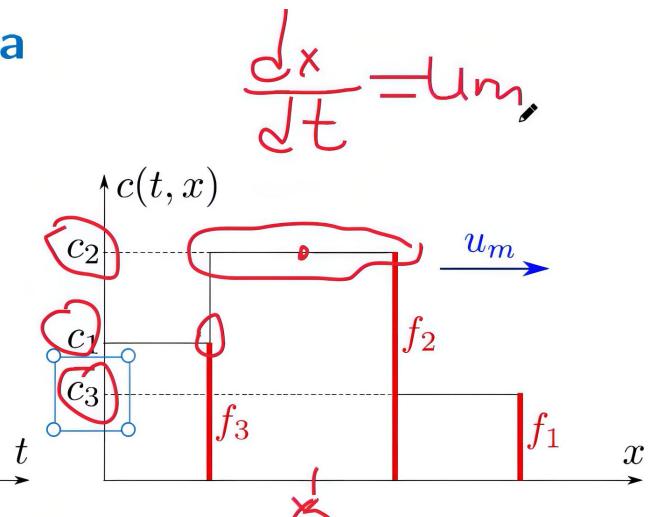


Figure: Фронты концентрации пропанта, распространяющиеся в скважине

Соответственно мы можем рассматривать весь этот процесс в виде набора фронтов концентрации. За каждый новый шаг по времени мы выпускаем новый фронт, далее он движется по трубе и мы фиксируем кусочно постоянный уровень концентрации пропанта на каком-то участке скважины.

Чтобы перейти в Эйлерову сетку в точке  $x$ , мы просто смотрим между какими фронтами эта точка  $x$  лежит и говорим, что концентрация равна этому значению.

Здесь (для односкоростной модели) всё достаточно просто и можно обойтись решением обычных дифференциальных уравнений для концентрации пропанта.

## Численный алгоритма

$$\varepsilon = \frac{2R}{L}$$

Аналогично выводу транспорта проппанта для трещины из ур-ий НС.  
Вдоль оси  $Ox$ :

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau_{rx}) + \rho g \sin \theta.$$

$$\tau_{ij} = 2\mu_s D_{ij}, \quad D = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T), \quad \tau_{rx} = \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r}$$

Формула Нолти:

$$\mu_s(c) = \mu_f \left(1 - \frac{c}{c_{max}}\right)^{-2.5n_{clean}},$$

$c_{max} = 0.65$  — максимальная концентрация упаковки.

Нам нужна не только концентрация, а прежде всего нам нужно знать давление. Если на забое будет слишком большое давление, то жидкость может просто порвать трубу. Как будем считать давление? Для этого берём уравнение Навье-Стокса. Выводим аналогично выводу транспорта проппанта для трещины. Но здесь в роли малого параметра будет

$$\varepsilon = \frac{2R}{L},$$

где  $2R$  — диаметр скважины;  $L$  — длина скважины (диаметр скважины порядка 10 см, а длина скважины порядка 1 км — ясно, что параметр  $\varepsilon$  будет достаточно малым и можно использовать приближение тонкого слоя, но уже в цилиндрической геометрии).

Вдоль оси  $Ox$  (ось направлена вдоль скважины;  $\theta$  — угол между осью скважины и поверхностью Земли;  $\tau$  — тензор вязких напряжений):

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau_{rx}) + \rho g \sin \theta \quad (12.8)$$

В случае ньютоновской жидкости:

$$\tau_{ij} = 2\mu_s D_{ij}, \quad D = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T), \quad \tau_{rx} = \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r}. \quad (12.9)$$

(в приближении тонкого слоя можно показать, что будет всего одна компонента  $\tau_{rx}$ )

Кроме того, есть зависимость вязкости смеси от концентрации проппанта. Формула Нолти:

$$\mu_s(c) = \mu_f \left(1 - \frac{c}{c_{max}}\right)^{-2.5n_{clean}}, \quad (12.10)$$

где  $c_{max} = 0.65$  — максимальная концентрация упаковки проппанта,  $\mu_f$  — вязкость чистой жид-

кости (гель без проппанта),  $n_{clean}$  – индекс течения (один из реологических параметров) чистой жидкости (без проппанта).

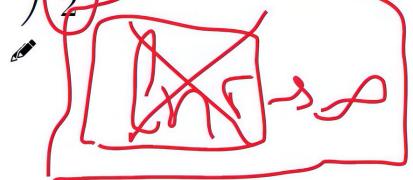
В случае неньютоновской жидкости по формуле Нолти будет изменяться не вязкость, а реологический параметр  $K$ .

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \rho g \sin \theta \quad (9)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = \left( \frac{dp(x)}{dx} - \rho g \sin \theta \right) r \quad (10)$$

С учетом  $\tau_{rx}|_{r=0} = 0$ : 

$$\mu_s \frac{r \partial u_x}{\partial r} = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right) \frac{r^2}{2} \quad (11)$$

Гран. условие  $u_x|_{r=R} = 0$ : 

$$u_x(r) = \underbrace{\frac{1}{4\mu_s} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right) r^2}_{{u}_{max}} + C = \underbrace{-\frac{R^2}{4\mu_s} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right) \left( 1 - \left( \frac{r^2}{R^2} \right) \right)}_{{u}_{max}} = u_{max} \left( 1 - \left( \frac{r^2}{R^2} \right) \right) \quad (12)$$

Первоначальная наша задача: вывести вид профиля скорости. По сути сейчас докажем формулу для течения Пуазейля с учётом силы тяжести.

Подставим (12.9) для  $\tau_{rx}$  в (12.8):

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \rho g \sin \theta \quad (12.11)$$

Домножим на  $r$ :

$$\frac{d}{dr} \left( r \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = \left( \frac{dp(x)}{dx} - \rho g \sin \theta \right) r \quad (12.12)$$

Интегрируем с учётом  $\tau_{rx}|_{r=0} = 0$  (условие регулярности):

$$\mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right) \frac{r}{2} \quad (12.13)$$

Интегрируем ещё раз:

$$u_x(r) = \frac{1}{4\mu_s} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right) r^2 + C \quad (12.14)$$

Используя граничное условие  $u_x|_{r=R} = 0$  (условие прилипания на границе), находим константу  $C$ . Получаем:

$$u_x(r) = \underbrace{-\frac{R^2}{4\mu_s} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)}_{{u}_{max}} = u_{max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (12.15)$$

Максимальная скорость  $u_{max}$  достигается при  $r = 0$ .

### 12.1.5 Вычисление средней скорости

## Вычисление средней скорости

$$\begin{aligned}
 u_m &= \frac{1}{|S|} \int_S u_x dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R u_{max} r \left(1 - \left(\frac{r^2}{R^2}\right)\right) dr d\varphi = \\
 &= u_{max} \frac{2\pi \cancel{r^2}}{\pi R^2} \int_0^{R/R} \cancel{r} \left(1 - \left(\frac{r^2}{R^2}\right)\right) d\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{u_{max}}{2} \quad (13)
 \end{aligned}$$
  

$$\boxed{u_m = -\frac{R^2}{8\mu_s} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right)} \quad (14)$$

В целом отсюда можно найти давление для ламинарного течения!

Нашли максимальную скорость  $u_{max}$ , а уравнение переноса записано в терминах средней скорости, поэтому необходимо найти соотношение между средней скоростью и максимальной скоростью.

Возьмём и усредним найденный профиль скорости по сечению (сделаем в полярных координатах, т.е. якобиан  $r$ ):

$$\begin{aligned}
 u_m &= \frac{1}{|S|} \int_S u_x dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R u_{max} r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr d\varphi = \\
 &= u_{max} \frac{2\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{r}{R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) d\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{u_{max}}{2} \quad (12.16)
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем среднюю скорость ламинарного течения:

$$u_m = -\frac{R^2}{8\mu_s} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right) \quad (12.17)$$

В целом отсюда можно найти давление для ламинарного течения! Интегрируем по  $x$  (по оси скважины).  $\theta$  может меняться,  $\rho$  может меняться,  $R$  может меняться, вязкость  $\mu_s$  зависит от концентрации,  $u_m$  тоже меняется в зависимости от сечения. Соответственно берём интегрируем и отсюда находим давление  $p(x)$ . Но мы поступим немного по-другому.

### 12.1.6 Средняя скорость для степенной жидкости

## Средняя скорость для степенной жидкости

**Упр.** Найти профиль и среднюю скорость для степенной жидкости

$$\tau_{ij} = K_s \dot{\gamma}^{n-1} D_{ij}, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}^2},$$

**Ответ:**

$$u_x = u_{max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right)$$

Выражение для  $u_{max}$  и  $u_m$  найдите сами.



В тех же самых предположениях можем вывести профиль скорости для степенной жидкости:

$$\tau_{ij} = K_s \dot{\gamma}^{n-1} D_{ij}, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}^2} \quad (12.18)$$

Профиль скорости:

$$u_x = u_{max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right) \quad (12.19)$$

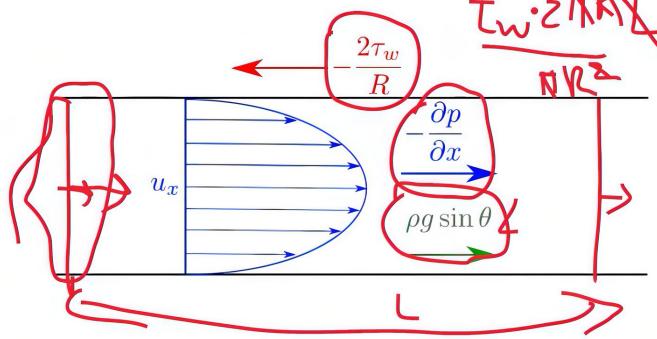
### 12.1.7 Коэффициент трения Фаннинга для ламинарного и турбулентного течений

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau_{rx}) + \rho g \sin \theta \quad \left| \frac{1}{\pi R^2} \int_S (\cdot) dS \right. \quad (15)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} + \bar{\rho}g \sin \theta, \quad (16)$$

где  $\tau_w = -\tau_{rx}|_{r=R}$  — напряжение сдвига (трения) на стенке трубы.

Его можно измерить!



Коэффициент трения Фаннинга

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\rho u_m^2}{R} f_s + \rho g \sin \theta$$

Сейчас выведем формулу для давления немного по-другому. Опять стартуем с уравнения Навье-Стокса и сразу усредняем (по площади):

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau_{rx}) + \rho g \sin \theta \quad \left| \frac{1}{\pi R^2} \int_S (\cdot) dS \right. \quad (12.20)$$

Получаем следующее уравнение ( $\bar{p}$  на самом деле можно заменить на просто  $p$ , так как мы знаем, что давление выравнивается вдоль сечения — это можно доказать в предположениях течения тонкого слоя):

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} + \bar{\rho}g \sin \theta, \quad (12.21)$$

где  $\tau_w = -\tau_{rx}|_{r=R}$  — напряжение сдвига (трения) на стенке трубы. Его можно измерить при ламинарном течении, а также и в случае турбулентного течения (например, для известного перепада давления найти  $\tau_w$  из (12.21) — т.е. решить обратную задачу), поэтому этот вывод формулы для давления более общий (в предыдущем выводе не понятно, что такое профиль скорости в случае турбулентного течения).

Видим, что для определения давления профиль скорости нам и не нужен. Можем найти давление, если известен  $\tau_w$  (находим давление просто проинтегрировав уравнение (12.21)).

Обычно экспериментаторы работают с безразмерными величинами для того, чтобы можно было масштабировать результаты (измерить на одной трубе, а распространить результаты на трубы произвольного диаметра), поэтому вводят коэффициент трения Фаннинга:

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} \quad (12.22)$$

Тогда уравнение (12.21) примет вид:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\rho u_m^2}{R} f_s + \rho g \sin \theta \quad (12.23)$$

Какой физический смысл у полученного уравнения? Это баланс сил: есть сила давления, кроме того проталкивать жидкость нам помогает сила тяжести, а препятствует трение жидкости о стенки трубы. Поэтому можно вывести уравнение (12.21) другим способом, а именно просто расписать баланс сил:

силы трения  $\tau_w \cdot 2\pi R \cdot L$ ;

силы прикладываемого давления  $(p_1 - p_2) S$

силы тяжести  $\rho g \sin \theta \cdot S \cdot L$

Получим:

$$(p_2 - p_1) S + \rho g \sin \theta \cdot S \cdot L - \tau_w \cdot 2\pi R \cdot L = 0 \quad (12.24)$$

разделим обе части на  $S \cdot L$ :

$$\frac{p_1 - p_2}{L} + \rho g \sin \theta - \tau_w \cdot \frac{2\pi R}{\pi R^2} = 0 \quad (12.25)$$

равносильно

$$\frac{p_2 - p_1}{L} = \rho g \sin \theta - \frac{2\tau_w}{R}, \quad (12.26)$$

что и требовалось показать.

$$\begin{aligned} u_x &= 2u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \\ \tau_w &= \cancel{0} \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{4\mu_s u_m}{R} \\ f_s &= \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} = \frac{4\mu_s u_m}{\cancel{R} \cancel{\rho u_m^2 / 2}} = \frac{8 \cdot 2}{\rho u_m (2R) \mu_s} = \boxed{\frac{16}{Re}} \\ Re &= \frac{\rho u_m (2R)}{\mu_s} \end{aligned} \quad (17)$$

**Упр.** Показать, что для степенной жидкости

$$f_s = \frac{16}{Re'}, \quad Re' = \frac{\rho u_m^{2-n} (2R)^n}{K_s \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n 8^{n-1}} \text{ — обобщ. число Рейнольдса}$$

Metzner, A. B. & Reed, J. C. **Flow of Non-Newtonian Fluids - Correlation of the Laminar, Transition, and Turbulent-Flow Regions** // Aiche Journal, 1, 434–440, 1955

Давайте найдём коэффициент Фаннинга для ламинарного течения.

Профиль скорости:

$$u_x = 2u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \quad (12.27)$$

Подставляем профиль скорости в выражение для  $\tau_w$ :

$$\tau_w = -\mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{4\mu_s u_m}{R} \quad (12.28)$$

Подставляем  $\tau_w$  в выражение для коэффициента Фаннинга:

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} = \frac{4\mu_s u_m}{R \rho u_m^2 / 2} = \frac{8 \cdot 2}{\rho u_m (2R) / \mu_s} = \frac{16}{Re}, \quad (12.29)$$

где

$$Re = \frac{\rho u_m (2R)}{\mu_s} \text{ — число Рейнольдса}$$

Для степенной жидкости можно показать, что

$$f_s = \frac{16}{Re'}, \quad (12.30)$$

где

$$Re' = \frac{\rho u_m^{2-n} (2R)^n}{K_s \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n 8^{n-1}} \text{ — обобщённое число Рейнольдса}$$

## Турбулентное течение

### Экспериментальная корреляция

$$1/\sqrt{f_{s, turb}} = \frac{4.0}{n^{0.75}} \log_{10}(Re') f_{s, turb}^{1-n/2} - \frac{0.4}{n^{1.2}}. \quad (18)$$

Dodge, D. W. & Metzner, A. B. Turbulent Flow of Non-Newtonian Systems // AIChE Journal, 5, 189–204, 1959

Ограничение  $Pr(Re')^2 f_{s, turb} > 5 \times 10^5$

Хорошая аппроксимация

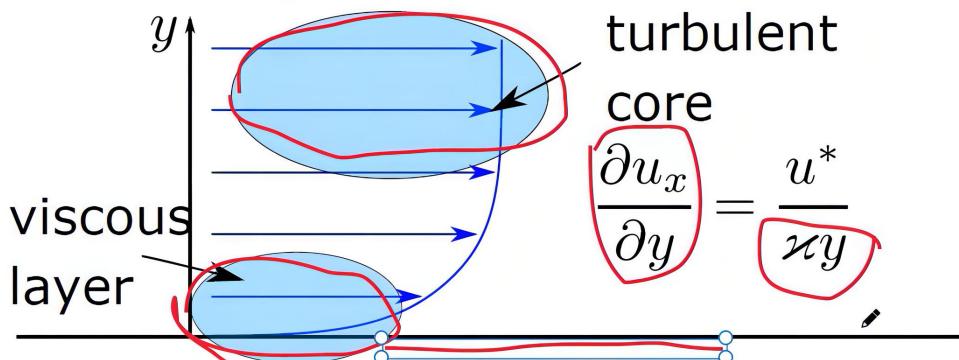
$$f_{s, turb} = 0.079 n^{0.675} (Re')^{-0.25} \quad (19)$$

Rohsenow, W.M., Hartnett, J.P., Cho, Y.I. **Handbook of Heat Transfer** (Third Edition) // The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, NY (USA), 1998

Для турбулентного течения явной формулы для коэффициента Фаннинга нет, но есть экспериментальные корреляции. Эти экспериментальные корреляции записаны в неявном виде. Есть разные корреляции как для ньютоновской, так и для неニュтоновской жидкостей. Коэффициенты в корреляциях могут зависеть от шероховатости трубы. Обычно в корреляциях дополнительно присутствуют число Рейнольдса и реологический параметр жидкости  $n$ .

Из неявных корреляций можно приблизенно выразить коэффициент трения Фаннинга  $f_s$ .

## Two layered mixing model



Турбулентная диффузия пропорциональна  $y$  (фон Карман)

$$u_x \sim A \log_{10} y + B \quad (20)$$

Почему у корреляции с предыдущего слайды именно такой вид? Откуда взялся логарифм? Есть так называемая двухслойная модель турбулентности. О чём она нам говорит? Вблизи стенки трубы скорости маленькие, соответственно число Рейнольдса небольшое и будет слой, в котором преимущественно ламинарное течение. А в центре, где влияние вязкости небольшое (а скорость большая) имеется турбулентное ядро.

По так называемой модели фон Кармана сдвиг скорости обратно пропорционален расстоянию от стенки:

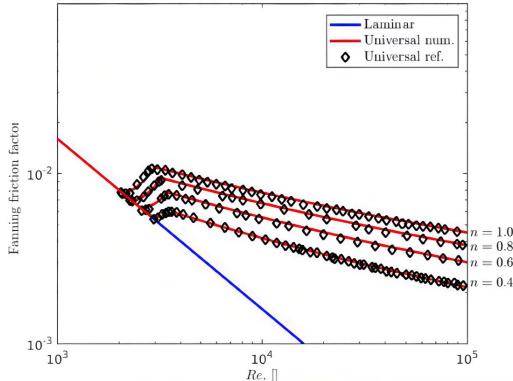
$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{u^*}{\kappa y} \quad (12.31)$$

Иначе говоря, если вводить турбулентную вязкость (или турбулентную диффузию), то она будет пропорциональна  $y$ .

Соответственно при интегрировании этого уравнения и получается логарифм с неопределёнными коэффициентами, значения которых определяются с помощью подгонки к экспериментальным данным.

Здесь не буду сильно останавливаться. Просто, чтобы вы на пальцах понимали, откуда здесь внезапно появился логарифм.

$$f_s = \begin{cases} f_{s, lam}, & Re' \leq Re'_{lam}, \\ \log_{10} f_{s, lam} + \log_{10} \left( \frac{f_{s, turb}}{f_{s, lam}} \right) \frac{\log_{10} (Re'/Re'_{lam})}{\log_{10} (Re'_{turb}/Re'_{lam})}, & Re'_{lam} \leq Re' \leq Re'_{turb} \\ f_{s, turb}, & Re' \geq Re'_{turb}, \end{cases}$$



$Re'_{lam} = 3250 - 1150n,$   
 $Re'_{turb} = 4150 - 1150n -$   
 критические значения числа  
 Рейнольдса при переходе в  
 разные режимы

Итак, у нас есть ламинарный коэффициент трения Фаннинга и есть турбулентный коэффициент трения Фаннинга. А что в промежутке?

В промежутке задана линейная интерполяция в логарифмических координатах.

Откуда эта линейная интерполяция была получена? Из экспериментов были получены критические значения числа Рейнольдса при переходе в разные режимы. На графике видим хорошее совпадение с экспериментальными данными.

### 12.1.8 Расчёт давления

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} + \bar{\rho}g \sin \theta, \quad (21)$$

$$p_{bh}(t, x) = p_{wh}(t) + \underline{\Delta p_h(t, x)} - \underline{\Delta p_{fric}(t, x)}, \quad (22)$$

Гидростатика:

$$\Delta p_h(t, x) = \int_0^x \rho_s(c(t, s)) g \sin(\theta(s)) ds \quad (23)$$

$$\rho_s(c) = \rho_p c + \rho_f (1 - c) \quad (24)$$

Трение:

$$\Delta p_{fric}(t, x) = \int_0^x \frac{2\tau_w(t, s)}{R(s)} ds - \text{давление трения}, \quad (25)$$

Теперь давайте перейдём к самому расчёту давления. У нас есть градиент давления, который равен гидростатике минус трение (грубо говоря):

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} + \bar{\rho}g \sin \theta \quad (12.32)$$

Если проинтегрировать по всей скважине, то мы получим, что давление на забое есть давление на устье плюс гидростатика минус падение давления за счёт трения о стенку трубы.

$$p_{bh}(t, x) = p_{wh}(t) + \Delta p_h(t, x) - \Delta p_{fric}(t, x) \quad (12.33)$$

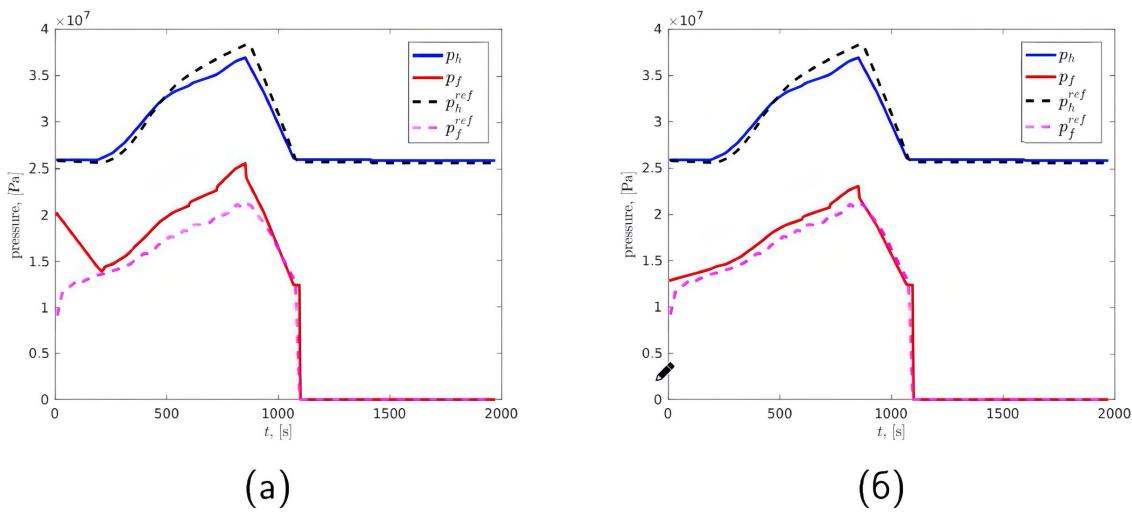
Гидростатика:

$$\Delta p_h(t, x) = \int_0^x \rho_s(c(t, s)) g \sin \theta(s) ds \quad (12.34)$$

$$\rho_s(c) = \rho_p c + \rho_f (1 - c) \quad (12.35)$$

Трение:

$$\Delta p_{fric}(t, x) = \int_0^x \frac{2\tau_w(t, s)}{R(s)} ds - \text{давление трения} \quad (12.36)$$



**Figure: Гидростатическое давление и давление трения (модель VS MFRAC).**  
Для базового давления трения используются таблицы

- (a): формула Nolte, нач. жидкость №1
- (б): формула Keck, нач. жидкость №2

Хотел бы показать сравнение с полевыми данными. Мы построили односкоростную модель, которая включает в себя уравнение переноса и формулу для давления.

Здесь мы будем сравнивать давления:  $p_f^{ref}$  – давление трения экспериментальное,  $p_h^{ref}$  – давление гидростатическое экспериментальное. Видно, что гидростатическое давление хорошо подгоняется под экспериментальные данные, а с давлением трения есть некоторые проблемы. Почему эти проблемы могут возникать и как их можно исправить? На левом графике видно, что в

начале давление трения в модели падает, а по полевым данным растёт. А на следующем участке завышено давление трения в модели.

Здесь сразу опишу ситуацию: здесь закачивалось несколько жидкостей. Как мы исправили эту ситуацию? Мы меняли свойства жидкости. На правом графике поставили вторую жидкость и получилось лучшее совпадение с полевыми данными. Плюс немного играли с корреляциями: можно использовать формулу Nolte, а можно использовать формулу Keck и таким образом подбивать (калибровка корреляции может дать более адекватный результат).

Кстати, то что жидкость не та качается (реологические параметры  $K$  и  $n$  другие) – это нормальная ситуация, ведь то, что забрасывается в трубу не совпадает с тем, что указано в паспорте, потому что во-первых гель может не успеть сшиться (и тогда трения совсем другие будут, т.к.  $K$  и  $n$  разные у сшитого и несшитого геля), а во-вторых невозможно узнать все условия проведения полевого эксперимента (в лучшем случае нам дают графики давления и полевой отчёт, в котором представлено расписание закачки и т.д.)

На практике инженеры используют не корреляции для коэффициента трения Фаннинга, а у них уже есть таблицы с величиной градиента давления трения ( $-2\tau_w/R$ ) для различных диаметров трубы и различных расходов жидкости.

Из step-down теста, постепенно снижая расход и смотря, как падает давление, можно посчитать коэффициент трения Фаннинга в трубе.

Обычно это заносится в базу данных. А дальше используется, если качаем с тем же расходом и трубы примерно такие же – то берём соответствующий коэффициент Фаннинга. И на удивление он неплохо даёт согласование результатов.

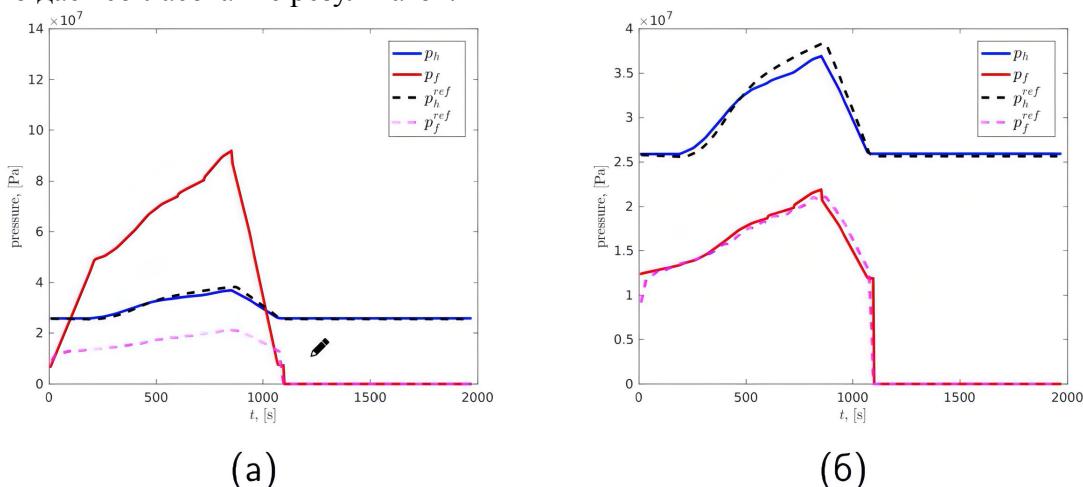


Figure: Гидростатическое давление и давление трения (модель VS MFRAC).  
Давления трения расчитываются по формуле Virk

(a): формула Nolte, нач. жидкость №1

(б): формула Keck, нач. жидкость №2,  $n = 1.0, 0.88, 0.47$  и  
 $K = 10^{-3}, 40 \times 10^{-3}, 0.85 \text{ Па}\cdot\text{s}^n$

В следующем кейсе сравнения с полевыми данными снова давление трения очень существенно завышено в модели (см. левый график).

Что сделали?

Взяли и поменяли коэффициенты  $K$  и  $n$  (по сути взяли реологические параметры не для сшито-

го геля, а для линейного геля) и тогда результаты модель и промысловые данные очень хорошо совпали.

Восходящий тренд за счёт добавления проппанта (трение увеличивается). Далее падение, так как продавили чистой жидкостью (падает и трение и гидростат). Затем остановили закачку: гидростат остался на месте, а трение упало в нуль.

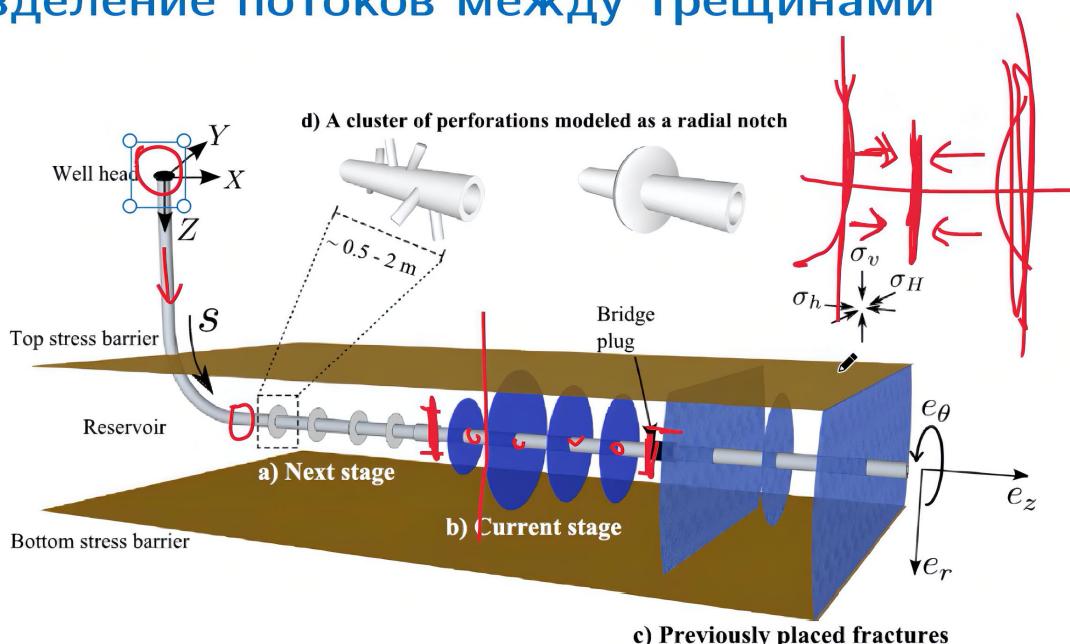
Этими кейсами я хочу вам показать: во-первых, как с помощью этих моделей можно достаточно адекватно описывать поведение давления; во-вторых, как проводить калибровку модели на полевые данные.

Переходим к следующей теме.

## 12.2 Разделение потоков между трещинами

В предыдущем разделе рассмотрели скважину от устья до забоя. Но у нас между трещиной и забоем могут быть участки скважины (во-первых, датчик забойного давления обычно выше трещины; во-вторых, у нас есть трение вдоль перфораций). Это ещё усугубляется задачей многостадийного ГРП, когда у нас есть несколько портов.

### Разделение потоков между трещинами

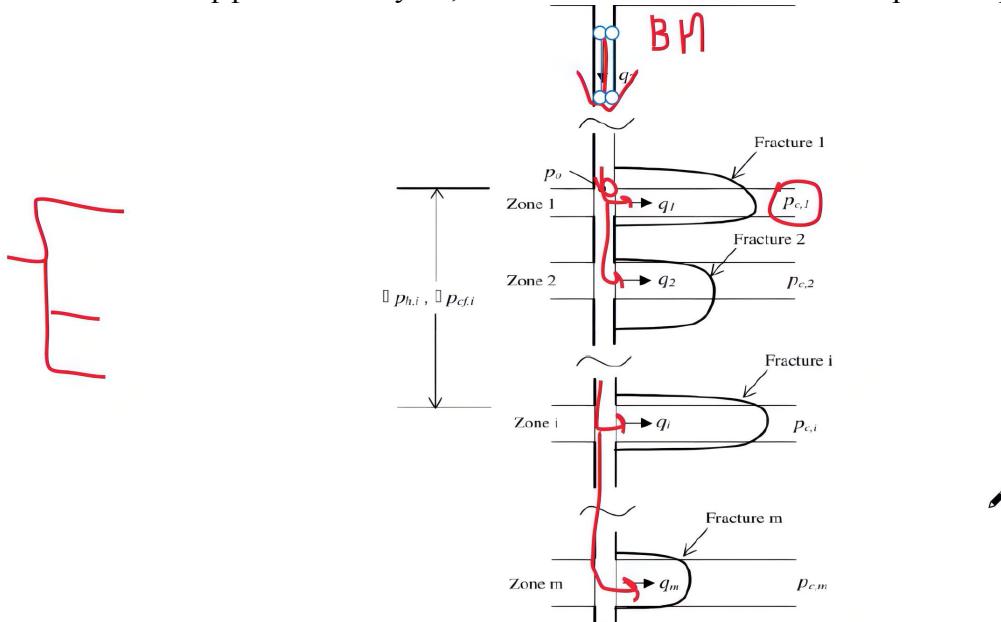


Я вам рассказывал про технологию *plug and purf*, когда опускают перфорационный пистолет, который сразу может сделать несколько отверстий (портов). В итоге при закачке растим несколько трещин и весь расход, который качаем в скважину, перераспределяется между трещинами. В зависимости от чего? Во-первых, в зависимости от трения по трубе и гидростатики. Во-вторых (что более существенно), от давления на перфорациях. Например, одна перфорация сделана хорошо и через неё будет хорошая проводимость. Другая перфорация сделана плохо и через неё будет плохая проводимость. Кроме того, есть эффект влияния соседних трещин друг на друга.

Если есть 3 трещины, то боковые трещины пойдут криво, но мы это не учитываем (пока рассматриваем плоские трещины).

Если успеем добраться, то потом расскажу, что делать с кривыми трещинами.

Но даже если у нас 3 плоские трещины, то боковые трещины за счёт упругого воздействия через породу зажимают центральную трещину. Соответственно в боковые трещины будет втекать больше жидкости и расход на них будет выше, чем в центральной части. Но сегодня этот эффект (называемый stress shadow) рассматривать не будем (посмотрим только гидравлику). Учитываться этот эффект далее будет, но явно этот механизм сегодня рассматривать не будем.



Необходимо расчитывать при одновременной закачке в несколько портов

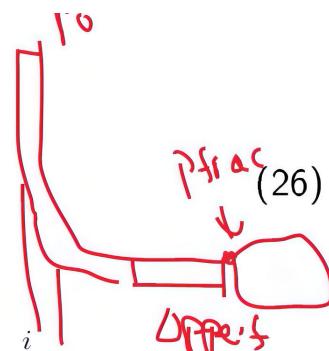
Так можно схематически представить разделение потоков между трещинами. Есть полный заекаиваемый расход, далее жидкость течёт в каждую из трещин с давлениями  $p_{c,1}, p_{c,2}, \dots, p_{c,i}$  и так далее.

### 12.2.1 Два закона Кирхгофа

#### Two Kirchhoff's laws

1. Slurry is incompressible  $\Rightarrow$  volume conservation:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i$$



2. Pressure continuity:

$$p_0 = \sigma_{min,i} + p_{net,i} + \Delta p_{perf,i} - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{fric,j}, \quad (27)$$

where  $p_{frac}$

- ▶  $\sigma_{min,i}$  — closure pressure (min in-situ stress) in  $i^{\text{th}}$  port
- ▶  $p_{net,i} = p_{frac,i} - \sigma_{min,i}$  — net pressure in  $i^{\text{th}}$  port (from frac model)
- ▶  $\Delta p_{perf,i}$  — perforation pressure drop at  $i^{\text{th}}$  port
- ▶  $\Delta p_{h,i}$  — hydrostatic pressure drop between  $i^{\text{th}}$  and  $(i-1)^{\text{th}}$  ports
- ▶  $\Delta p_{fric,i}$  — friction pressure drop between  $i^{\text{th}}$  and  $(i-1)^{\text{th}}$  ports

Первый закон Кирхгофа:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i \quad (12.37)$$

(весь расход, который закачиваем сверху перераспределяется между трещинами).

Второй закон Кирхгова (здесь в качестве потенциала выступает давление и вместо электрических сопротивлений будут гидродинамические сопротивления):

$$p_0 = \sigma_{min,i} + p_{net,i} + \Delta p_{perf,i} - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{fric,j}, \quad (12.38)$$

где

$\sigma_{min,i}$  — давление закрытия (минимальное напряжение в пласте) на  $i$ -ой трещине;

$p_{net,i} = p_{frac,i} - \sigma_{min,i}$  — давление на  $i$ -ой трещине (из модели трещины);

$\Delta p_{perf,i}$  — падение давления вдоль перфорации  $i$ -ой трещины;

$\Delta p_{h,i}$  — падение гидростатического давления между  $i$ -ой и  $(i-1)$ -ой трещинами;

$\Delta p_{fric,i}$  — падение давления трения между  $i$ -ой и  $(i-1)$ -ой трещинами.

Другими словами, второй закон Кирхгофа говорит нам о том, что с точки зрения потенциалов можно независимо рассматривать каждый из путей (к каждой из трещин) и считать гидродинамические сопротивления независимо.

### 12.2.2 Давление на $i$ -ой трещине

Analytical approach (PKN model)

- $p_{net,i}$  — net pressure

$$p_{net,i}(Q_i) = a_i Q_i^{\frac{n}{2n+3}} V_i^{\frac{1}{2n+3}}, \quad (28)$$

$$a_i = \left( \frac{(n+3)(2n+1)^n K (E'_i)^{2n+2}}{\pi 2^{2n} n^n \phi^n h_i^{3n+3}} \right)^{\frac{1}{2n+3}}, \quad (29)$$

where

- $a_i$  — stiffness parameter
- $Q_i, V_i$  — injection rate and fracture volume in  $i$ 'th layer
- $K, n$  — power-law fluid rheology parameters
- $E'_i$  — plane strain modulus
- $\phi$  — geometric parameter
- $h_i$  — pay zone thickness

В довольно старой статье есть вывод формулы для  $p_{net,i}$  (подход с использованием модели PKN).

Т.е. для PKN модели можно найти явную зависимость между  $p_{net,i}$  и закачиваемым расходом  $Q_i$ .

Сразу скажу, что нам будут нужны следующие зависимости от расхода:  $p_{net,i}(Q_i)$ ,  $\Delta p_{perf,i}(Q_i)$  и  $\Delta p_{fric,i}(Q_i)$ . Зачем?

У нас неизвестными будут  $Q_i$  и неизвестным будет  $p_0$ . Поэтому необходимо придумать дополнительные замыкающие соотношения. И нам нужны именно зависимости от расхода  $Q$ , т.к. в итоге мы получим нелинейное уравнение, которое необходимо будет решать методом Ньютона и при этом необходимо считать производные (т.е. нужны именно зависимости от расхода  $Q$ , а не просто значение в точке).

Если есть аналитическое выражение (подобное приведённому на слайде), то посчитать производную несложно. Но PKN моделью мир клином не сошёлся.

## Fracture net pressure

### Numerical approach

►  $p_{net,i}$  — net pressure

$$p_{net,i} = p_{net,i}(Q_i) \quad (30)$$

### Preparation for Newton method

$$p_{net,i}(Q_i + \Delta Q_i) \approx p_{net,i}(Q_i) + \frac{\partial p_{net,i}}{\partial Q_i}(Q_i) \Delta Q_i \quad (31)$$

### Calculate derivatives

$$\frac{\partial p_{net,i}}{\partial Q_i}(Q_i) \approx \frac{p_{net,i}(Q_i + \delta Q_i) - p_{net,i}(Q_i)}{\delta Q_i}, \quad \delta Q_i = 10^{-3} \times Q_i \quad (32)$$

Если у нас модель Planar3D ILSA, то можно вообще говоря добавить всё в единую постановку, т.е. сопрячь ILSA и течение по скважине в одну постановку, тогда в каком-то смысле будет проще.

Будет большая система. Но есть неприятности: представляете, что у вас 10 трещин, тогда будет огромная заполненная матрица, которая в жизни никогда не посчитается (и распараллелить это тоже нормально не получится).

Поэтому хотелось бы, чтобы отдельно был алгоритм, отвечающий за разделение потоков, и отдельно был бы алгоритм, который считает рост трещины и выдаёт  $p_{net,i}(Q_i)$ .

Но есть проблема, что методу Ньютона нужна производная. Её нужно будет считать численно, т.е. мы будем брать и запускать Planar3D ILSA с расходом  $(Q_i + \delta Q_i)$ , где  $\delta Q_i$  — небольшое изменение расхода  $Q_i$ .

На слайде:  $\Delta Q_i$  может быть намного больше, чем  $\delta Q_i$ .

$\delta Q_i$  должно быть небольшим, чтобы наиболее точно посчитать производную, необходимую для реализации метода Ньютона.

Итак, запускаем Planar3D ILSA с расходом  $(Q_i + \delta Q_i)$  и находим  $p_{net,i}$ , затем снова запускаем Planar3D ILSA с расходом  $Q_i$  и снова находим  $p_{net,i}$ . Считаем разность полученных значений  $p_{net,i}$ , делим на  $\delta Q_i$  и получаем значение производной.

После этого полученное значение производной заносим в матрицу, которая нам определит потоки.

### 12.2.3 Падение давления на перфорациях

#### Perforation friction

- ▶  $\Delta p_{perf,i}(Q_i)$  — perforation friction pressure drop

$$\Delta p_{perf,i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|, \quad (33)$$

where

- ▶  $\rho_s$  — (averaged) density of the slurry
- ▶  $n_{p,i}, d_{p,i}$  — number and diameter of perforations
- ▶  $C_{d,i} = \frac{\min(d_{jet})}{d_p}$  — dimensionless discharge coefficient:
  - ▶  $C_{d,i} \in [0.5, 0.6]$  without solids
  - ▶  $C_{d,i} \in [0.6, 0.95]$  with solids due to perforations erosion

Здесь на слайде представлена эмпирическая формула для падения давления на перфорациях. В отличие от падения давления на трение по трубе здесь поток  $Q_i$  в квадрате. Падение давления на перфорациях зависит от плотности смеси, числа перфораций, диаметра перфораций и коэффициента эрозии.

Коэффициент эрозии: когда через перфорацию пролетает проппант, то на ней возникает эрозия (появляются шероховатости, границы размываются и ухудшается проводимость перфорации).

Формула чисто экспериментальная. Аналитического вывода подобных формул я нигде не встречал. Только уже такие готовые зависимости, ничего лучше пока нет.

### 12.2.4 Падение гидростатического давления

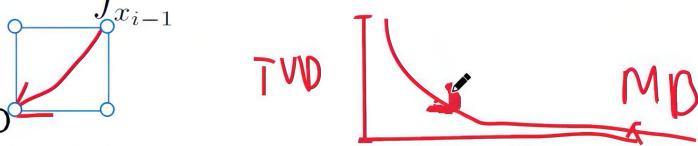
## Hydrostatic pressure drop

- $\Delta p_{h,i}$  is hydrostatic pressure change in each casing interval according to the weight of the fluid column:

$$\Delta p_{h,i}(t, x) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(c(t, s)) \cdot g \cdot \sin(\theta(s)) ds, \quad (34)$$

where

- $x_i$  —  $i^{\text{th}}$  port MD
- $\rho(c(t, s))$  — density of the slurry, that depends on dynamic proppant concentration
- $g$  — gravitational acceleration
- $\theta(s)$  — angle between wellbore and land surface in given point (cross-section)



Гидростатическое давление: интегрируем между двумя портами.  $x$  – это измеренная глубина (MD).

Как видите, здесь зависимости от  $Q_i$  нет, т.е. это выражение уйдёт в правую часть уравнения.

### 12.2.5 Падение давления на трение

## Tube friction pressure drop

- $\Delta p_{fric,i}$  is friction pressure drop in each casing interval

$$\Delta p_{fric,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \frac{\rho u_{m,i}^2}{R_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\rho(c(t, s)) f(Re) \left(Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j\right)^2}{R_i(s) S_i^2(s)} ds \quad (35)$$

where

- $f = \frac{\tau}{\rho u_{m,i}^2 / 2}$  — Fanning friction factor: ratio between the local shear stress and the local flow kinetic energy density
- $\rho(c(t, s))$  — density of the slurry
- $u_{m,i} = \frac{Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j}{S_i}$  — average flow velocity in the pipe (**important**: no  $Q_i$  term since we mean pressure drop along wellbore till given  $i^{\text{th}}$  port)
- $S_i$  — cross-section pipe area for  $i^{\text{th}}$  port
- $R_i$  — radius of given circular pipe
- $Re$  — Reynold's number

Здесь вся та же самая формула для трения о стенки трубы. Здесь только нужно помнить, что часть расхода уже ушла в предыдущие трещины (порты), т.е. необходимо смотреть, сколько

жидкости протекает на конкретном участке трубы.

Здесь на слайде представлена формула, а идею этой формулы мы уже обсуждали.

### 12.2.6 Векторная форма



Equations (26)-(27) generate  $(n+1) \times (n+1)$  system of nonlinear equations in  $(n+1)$  unknowns, which can be expressed in vector form

$$\boxed{Q^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N, p_0]} \quad (36)$$

and residual vector

$$F^T = [F_1, F_2, \dots, F_N, F_{N+1}], \quad \text{---} \ominus \min \quad (37)$$

where

$$F_i = \begin{cases} \sigma_{min,i} + p_{net,i} + \Delta p_{perf,i} - \\ \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{fric,j} - p_0, & \text{for } i \leq N \\ Q_0 - \sum_{i=1}^N Q_i, & \text{for } i = N+1 \end{cases}$$

Получаем вектор неизвестных с расходами  $Q_i$ , которые идут в трещины, и давлением на забое  $p_0$ .

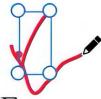
Наша задача: приравнять к нулю или хотя бы минимизировать вектор невязки.

Берём уравнения двух законов Кирхгофа, переносим всё в правую часть и получаем вектор невязки.

### 12.2.7 Итеративная процедура решения

#### Iterative procedure

then Jacobian matrix can be defined as

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_1}{\partial p_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial p_0} \end{bmatrix} \quad (38)$$


so the iterative procedure for estimating the vector  $\bar{Q}$  is that via

$$\bar{Q}^{k+1} = \bar{Q}^k - J^{-1} \bar{F}^k, \quad (39)$$

the convergence condition  $|\bar{Q}^{k+1} - \bar{Q}^k|^2 \leq \tau \sim 10^{-4}$  can be checked. If no, the next iteration in (39) goes until this scheme converges.

Опять же говорю, что рассматриваемые уравнения нелинейные. Строится метод Ньютона. Всё более менее стандартно. В матрице  $J$  как раз и нужны те производные, которые считаем или аналитически (если есть явная зависимость от расхода), или численно (если есть возможность дополнительно провести расчёт с близким значением расхода).

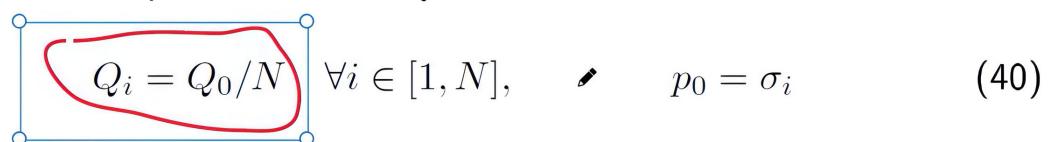
Далее дожидаемся сходимости.

### 12.2.8 Начальные приближения метода Ньютона

#### Initial guess

During the computation the initial guess for the iterative procedure will be the values from the previous timestep, however, there are no such values at the beginning.

The impact of the initial solution on the hydraulic fracturing problem decreases as volume of injected fluid increases above volume of the initial fracture, then for heuristic reasons all the injection rates considered to be uniform, while the bottomhole pressure equals to the pressure of closed fracture — closure pressure in the layer:

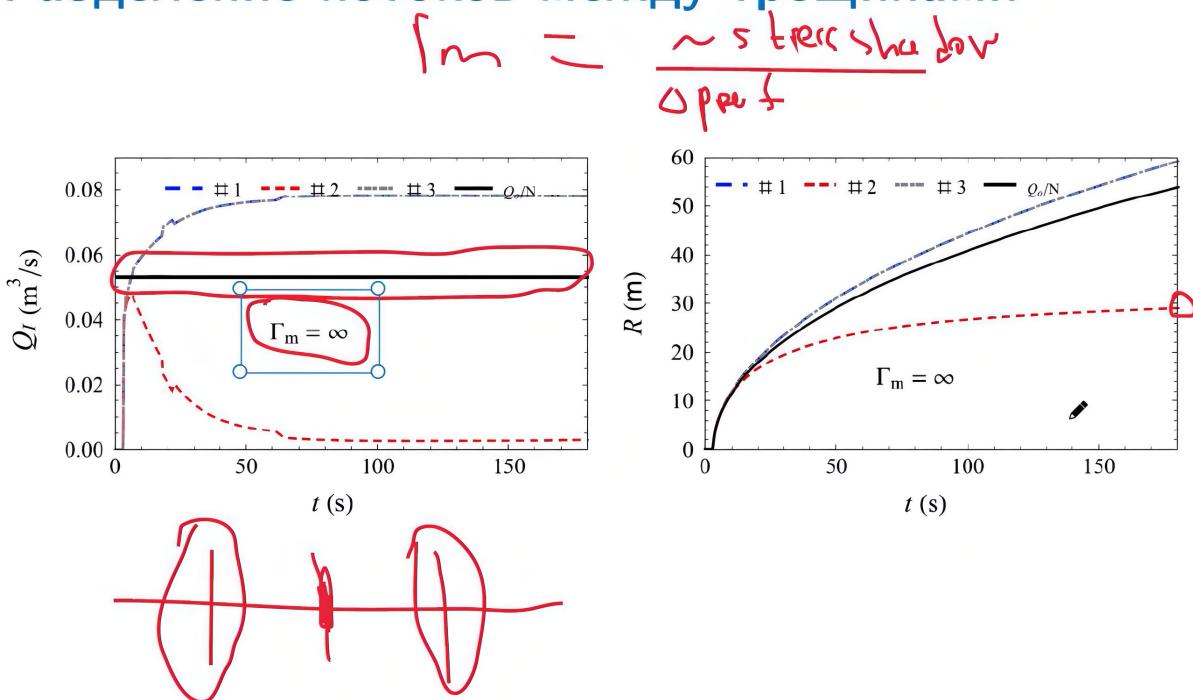


$$Q_i = Q_0/N \quad \forall i \in [1, N], \quad p_0 = \sigma_i \quad (40)$$

В качестве начального приближения используются равные расходы  $Q_i$ .

### 12.2.9 Эффекты, связанные с распределением потоков

#### Разделение потоков между трещинами



Далее хотел бы вам показать эффекты, связанные с разделением потоков между трещинами.

В статье рассматривались 3 радиальные трещины.

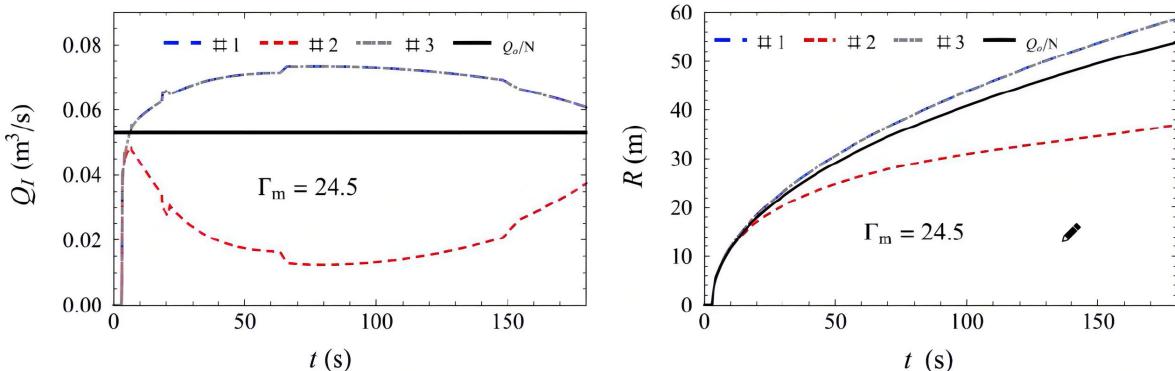
Здесь есть параметр:

$$\Gamma_m = \frac{\sim \text{stress shadow}}{\Delta p_{perf}} \quad (12.39)$$

Из левого графика на слайде выше видим, что когда  $\Gamma_m = \infty$ , то серединная трещина (#2) вообще перестаёт расти и весь расход уходит на крайние трещины, которые между собой поровну его делят. Жирной чёрной линией на графике представлен средний расход, если бы он равномерно делился между трещинами.

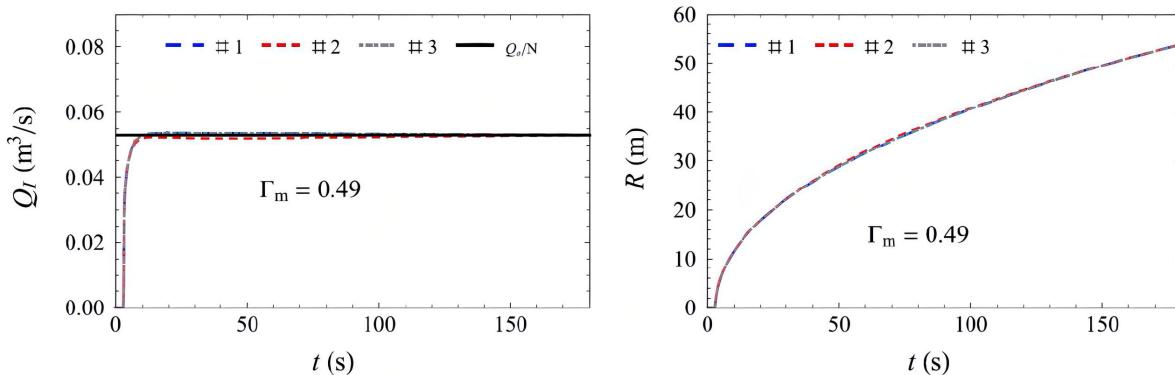
На правом графике на слайде выше представлены зависимости радиуса каждой из трещин от времени. Видим, что у средней трещины (#2) радиус практически перестаёт меняться в зависимости от времени.

## Разделение потоков между трещинами



Если  $\Gamma_m$  уменьшать, то соответственно серединная трещина будет не так сильно обделена. И на больших временах на графике даже начинает лучше расти.  $\Gamma_m$  – это некоторый полуаналитический безразмерный комплекс, а в численном решении всё сложнее получается на дальней перспективе.

## Разделение потоков между трещинами



Когда  $\Gamma_m$  мал, поток между трещинами распределяется практически равномерно и все трещины растут примерно одинаково.

Обычно этого удается добиться, когда ставим трещины далеко друг от друга, чтобы они друг на друга не влияли.

Если по этой части нет вопросов, переходим к следующей теме. Я немного расскажу про hammer

effect, т.е. про те самые затухающие колебания. А именно как они получаются.

## 12.3 Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине

Составители слайдов презентации: Ляпидевский В.Ю и Неверов В.В.

### 12.3.1 Введение

#### Введение

Во время гидравлического разрыва пласта (ГРП) необходимо знать информацию о давлении в нижней части скважины и параметрах созданной трещины.

Одним из способов быстрой оценки параметров трещины является анализ волнового пакета, возникающего при резкой остановке закачки.

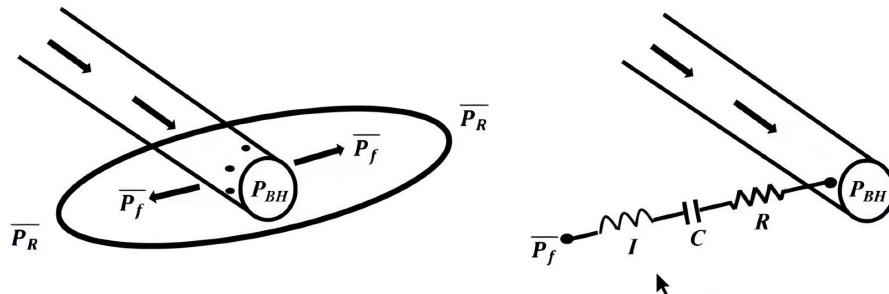
Работы по изучению гидроудара и влияния трещины на вид волнового пакета начались в 80-е годы прошлого века [1], [3] и ведутся до сих пор [2], [5], [6]

В работах [2], [6] была предложена модель расчета гидроудара в скважине и нахождения характеристик трещины.

Целью данной работы является определение оптимального набора параметров, необходимого для расчета волнового пакета.

## Введение

Рассматривается течение слабосжимаемой жидкости в скважине, соединенной с трещиной через тонкие каналы.



Течение в скважине описывается уравнениями акустики, влияние трещины ГРП учитывается через условие на нижней границе.

Характеристики трещины находятся из параметров  $R$ ,  $C$ ,  $I$  [8]

## Введение

Приведем модель, рассмотренную в работе Carey, Mondal, Sharma 2015 [2]:

- **уравнения акустики:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = g \sin \theta - f \frac{u|u|}{R}, \quad (2)$$

где  $u$  — скорость,  $\rho$  — плотность,  $p = c^2(\rho - \rho_0) + p_0$ ,  $c^2 = \text{const}$ ,  $\theta$  — угол наклона,  $f$  — коэффициент трения Фаннинга

- **граничные условия:**

• при  $x = 0$ :  $Q = S_0 u = Q(t)$  — задан расход от времени

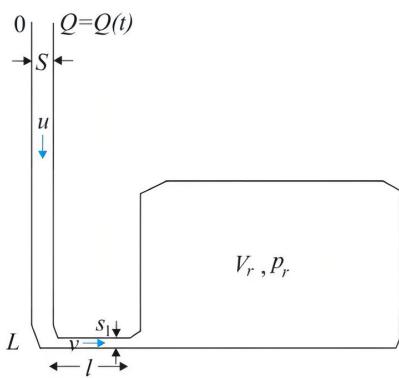
• при  $x = L$ :

$$p_L - p_r = RQ + \frac{1}{C} \int Q dt + I \frac{dQ}{dt}, \quad (3)$$

где  $p_L$  — давление на дне скважины,  $p_r$  — давление в резервуаре (трещине)

### 12.3.2 Математическая модель: законы сохранения

## Математическая модель: законы сохранения



Рассматривается скважина переменного сечения  $S(x)$ , которая через перфорации площадью  $S_p$  и длиной  $l_p$  соединяется с резервуаром (трещиной). Обозначим  $u$  — скорость жидкости в скважине,  $v$  — скорость жидкости в перфорациях,  $p_r$  — равновесное давление в трещине.

Предположим, что объем трещины меняется несущественно  
 $V_r \equiv \text{const}$  и давление внутри трещины распределено  
равномерно  $p_r = p_r(t)$

Течение в скважине описывается уравнениями акустики в  
каналовом приближении

$$(\rho S)_t + (\rho S u)_x = 0 \quad (4)$$

$$u_t + \left( \frac{u^2}{2} + c_0^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right)_x = g \sin \theta - f \frac{u |u|}{R} \quad (5)$$

5/15

Есть скважина и трещина. Трещина представляет собой некоторый объем  $V_r$  с давлением  $p_r$ . Колебательный процесс довольно быстрый (примерно на масштабе 100 секунд он затухает). Поэтому считают, что в течение времени рассмотрения колебаний давления трещина не растёт, т.е. мы фиксируем её объем.

Что должны сделать, чтобы смоделировать колебания?

Берём уравнения акустики: закон сохранения массы для сжимаемой жидкости и закон сохранения импульса (но он теперь нестационарный; усредняем сжимаемого Навье-Стокса — появляется коэффициент трения и добавляются конвективные слагаемые).

Для замыкания использована связь между давлением и плотностью.

Подобно газовой динамике вводится скорость звука  $c_0$ .

### 12.3.3 Математическая модель: граничные условия

## Математическая модель: граничные условия

- **При  $x = 0$  :**

На верхней границе задается расход жидкости

$$Q = Q(t) = u(t) \cdot S(0)$$

- **При  $x = L$  :**

Закон сохранения массы для резервуара

$$\rho_t = Mv, \quad M = \frac{\rho_0 S_p}{V_r}, \quad (6)$$

Уравнение импульса для перфораций

$$v_t = \frac{K}{\rho_0} (p_L - p_r) - \varphi, \quad K = \frac{1}{l_p}, \quad (7)$$

для ламинарного случая  $\varphi = \frac{8\pi\nu v}{S_p}$ , для турбулентного

течения  $\varphi = f \frac{v|v|}{r_p}$ ,

$$S(L) \cdot u(L, t) = S_p \cdot v(t) \quad (8)$$

На верхней границе задан расход (здесь и задана зависимость расхода от времени, т.е., например, резкое закрытие скважины для инициации hammer эффекта), а при  $x = L$  записывается некоторое уравнение для перфораций (закон сохранения импульса для перфораций – аналог того падения давления вдоль перфораций, только оно здесь записано в динамическом виде с некоторыми неопределенными коэффициентами) плюс закон сохранения массы именно для трещины (считаем, что изменение плотности пропорционально скорости закачки; подобно мячику: объем у мячика изменяется не сильно, но он становится плотнее).

На слайде выше представлен именно наш подход, который прорабатывается в институте гидродинамики.

## Математическая модель

Выпишем условие Carey, Mondal на нижней границе в виде:

$$\Delta p = IQ_{tt} + RQ_t + \frac{Q}{C}, \quad (9)$$

В ламинарном случае из уравнений (6), (7) получаем условие

$$\Delta p = \frac{\rho_0}{K}v_{tt} + \frac{8\pi\mu}{S_p K}v_t + c^2 M v, \quad (10)$$

Таким образом, при выборе коэффициентов

$$I = \frac{\rho_0}{KS_p}, \quad R = \frac{8\pi\mu}{S_p^2 K}, \quad C = \frac{1}{c^2 S_p M}$$

границные условия в обоих моделях совпадают

Все эти уравнения собираются в одно. И смотрите: здесь интересно то, что можно провести аналогию с колебательным контуром. Есть индуктивность, активное сопротивление, ёмкость. Аналогию с колебательным контуром в основном проводят западные коллеги. Но в принципе плюс минус одинаково.

У нас в институте гидродинамики в итоговом выражении есть физически обоснованные константы, а у западных коллег просто колебательный контур.

## Математическая модель

Условие (10) упрощается в случае, когда можно пренебречь  $v_t$  в левой части (7),

$$\rho_t = K_1 (p_L - p_r), \quad K_1 = \frac{K M S_p}{8 \rho_0 \pi \nu}, \quad M = \frac{\rho_0 S_p}{V_r}, \quad (11)$$

приходим к условию, в которое входит давление в резервуаре.

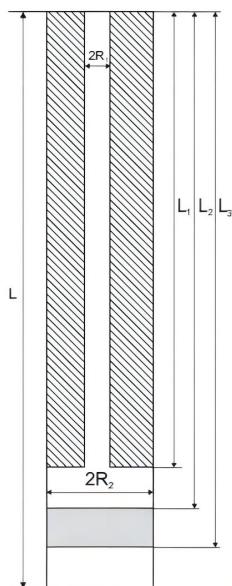
Расчет волнового пакета в скважинах Patzek & De, 2000 и Hwang, 2017 проводился по двум моделям:

- модель с условием (10) на нижней границе (пересчет коэффициентов R, C, I)
- упрощенная модель с условием (11) на нижней границе

Было показано, что обе модели дают хорошее совпадение с экспериментальными данными, поэтому для рассматриваемых скважин достаточно использовать более простую равновесную модель.

### 12.3.4 Примеры расчётов

#### Примеры расчетов: Wang



В работе Wang, 2008 приведено описание гидроудара в экспериментальной скважине, конструкция которой приведена на рисунке слева.

Было замечено, что для данной скважины давление в нижней части за время существования волнового пакета практически не менялось.

Это позволило расщепить полную задачу на задачи в верхней и нижней частях скважины, т.к. в точке  $x = L_1$  условия (6), (7) заменяются на условие  $p(L_1) = \text{const}$

## Примеры расчетов

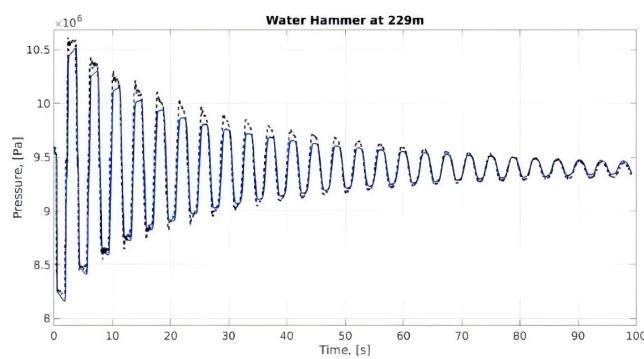
В процессе эксперимента (Wang) резко прекращалась подача воды в скважину и проводились замеры давления на глубинах 229, 762 и 1356 метров.

Параметры скважины и жидкости, использующиеся в расчетах, были выбраны в соответствии с экспериментальными данными

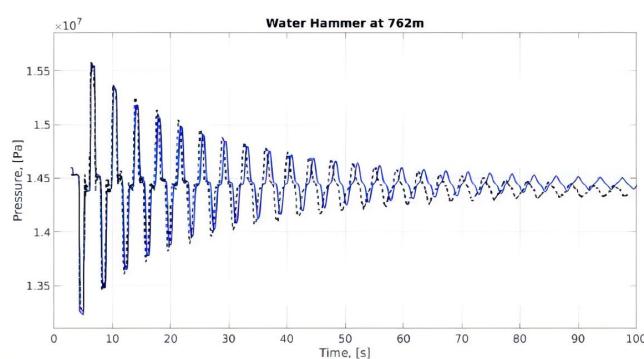
$$L = 1433 \text{ м}, L_1 = 1301 \text{ м}, L_2 = 1379 \text{ м}, L = 1402 \text{ м}, \quad (12)$$

$$R_1 = 0.03711 \text{ м}, R_2 = 0.0889 \text{ м}, c_0 = 1370 \text{ м/с}, p_a = 7.5 \cdot 10^6 \text{ Па}, \\ u_0 = 0.887 \text{ м/с}, \theta = 7.3^\circ, g = 9.8 \cdot \cos\varphi \text{ м/с}^2, K'_0 = K_0 c_0^2 = 200 \text{ 1/с.}$$

## Примеры расчетов: течение в верхней части



На верхнем рисунке — реальное давление и результаты расчетов на глубине 229 м



На нижнем рисунке — на глубине 762 м.

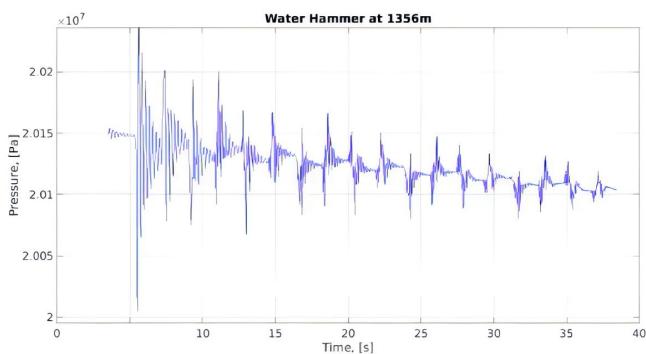
Данный результат был получен без привлечения дополнительной информации о течении в нижней части скважины.

Фишка в том, что есть сравнение нашей модели с экспериментальными данными (представлено на графиках на слайде выше). Видно, что с помощью модели достаточно хорошо удаётся описать происходящий колебательный процесс.

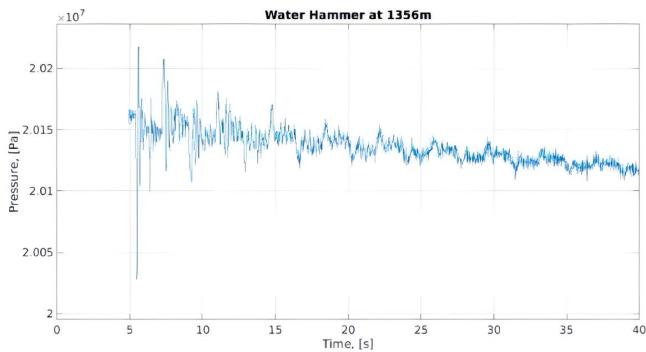
Но здесь оказалось, что на результат очень сильно влияет скорость звука. Если мы не знаем достаточно точно скорость звука, то очень сложно правильно смоделировать этот процесс.

Кроме того, оказалось, что вообще говоря hammer effect очень мало чувствителен к параметрам трещины (а западные коллеги усердно пытались определять параметры трещины с помощью hammer эффекта, но тоже не получилось разумных результатов).

## Примеры расчетов: течение в нижней части



На верхнем рисунке показаны результаты расчетов давления на глубине 1356 м.

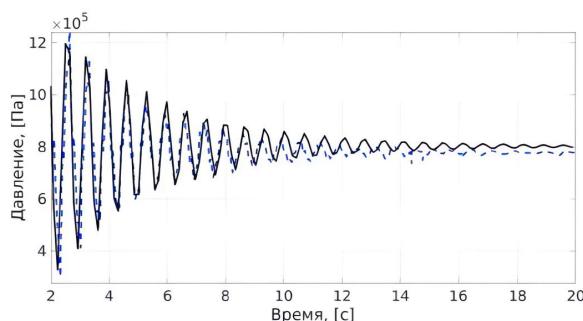
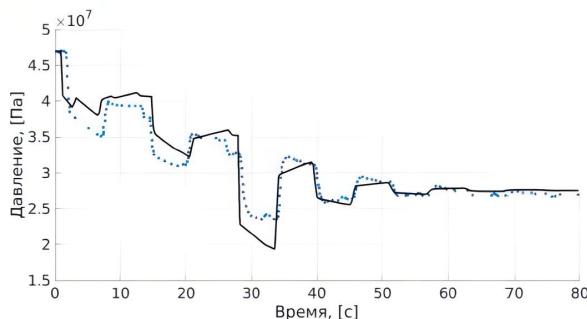


На нижнем рисунке — реальное значение давления на глубине 1356 м.



## Примеры расчетов

Рассмотрим скважины с более сложной конструкцией, описанные в работах Patzek & De, 2000 и Hwang, 2017



На верхнем рисунке показано сравнение реального давления (син.) и расчета по равновесной модели. Экспериментальные данные из работы [6].

На нижнем рисунке — расчет одной из скважин [4].

### 12.3.5 Заключение

## Заключение

- В работе была получена модель, описывающая развитие волнового пакета в скважине, соединенной с резервуаром. Данная модель при выборе коэффициентов может быть сведена к [2], [6].
- Показано, что в данную модель можно упростить и снизить количество неизвестных параметров.
- Проведены расчеты по полной и упрощенной моделям и показано, что обе модели обеспечивают хорошее совпадение с экспериментом
- Получен набор параметров, необходимых для расчета волнового пакета:
  - конструкция скважины
  - реология жидкости
  - скачок давления на устье при остановке закачки

### 12.3.6 Список источников

## Список источников

- [1] C. Holzhaugen, R. Gooch, Impedance of hydraulic fracture: its measurement and use for estimating fracture closure and dimensions, Paper SPE 13892 presented at the SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symposium, 1985.
- [2] M. Carey, S. Mondal, M. Sharma, Analysis of water hammer signatures for fracture diagnostics, Paper SPE 174866-MS presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2015.
- [3] C. Holzhaugen, H. Egan, Fracture diagnostics in East Texas and Western Colorado using hydraulic-impedance method, Paper SPE 15215 presented at the SPE Unconventional Gas technology Symposium, 1986.
- [4] T. Patzek, A. De, Lossy transmission line model of hydrofractured well dynamics, Journal of Petroleum Science and Engineering, 2000, vol. 25, no. 12, P. 59-77.
- [5] X. Wang, K. Hovem, D. Moos, Y. Quan, Water hammer effects on water injection well performance and longevity, Paper SPE 112282 presented at the SPE International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control, 2008.
- [6] J. Hwang, J. Szabian, M. Sharma, Hydraulic Fracture Diagnostics and Stress Interference Analysis by Water Hammer Signatures in Multi-Stage Pumping Data, URTeC 2687423.
- [7] S. Choi, W. Huang, Impact of water hammer in deep sea water injection wells, Paper SPE 146300 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2011.
- [8] J. Shlyapoberdsky, J.K. Wang, W.W. Walhaug, Overpressure calibrated design of hydraulic fracture stimulations, Paper SPE 18194, 1988.

## 13 Лекция 18.05.2021 (Байкин А.Н.)

### 13.1 Модели инициации трещины гидроразрыва

#### 13.1.1 Моделирование гидроразрыва

## Моделирование гидроразрыва



С точки зрения моделирования гидроразрыва мы с вами по большей части рассматривали распространение уже так называемой развитой трещины, т.е. когда она инициировалась, вышла на направление перпендикулярное минимальным главным напряжениям в пласте и распространяется по определённому закону.

Практика показывает, что эта магистральная трещина распространяется преимущественно в некоторой выделенной плоскости (по крайней мере в однородном пласте).

СЕГОДНЯ мы с вами рассмотрим процесс, который изображён на первом рисунке на слайде, т.е. процесс инициации: есть открытый ствол или перфорация и начинаем закачивать жидкость, растёт давление и спрашивается, при каком давлении порода порвётся и трещина начнёт распространяться.

Есть ещё промежуточный процесс между инициацией трещины и развитой трещиной – это так называемое начальное распространение трещины: трещина, инициированная из открытого ствола скважины или перфорации (которые могут быть ориентированы под некоторым углом), может быть не перпендикулярна минимальным сжимающим напряжениям, тогда в процессе начального распространения эта трещина попытается выйти в магистральную плоскость каким-то образом. Во время этого переходного процесса трещина может изгибаться, может пе-

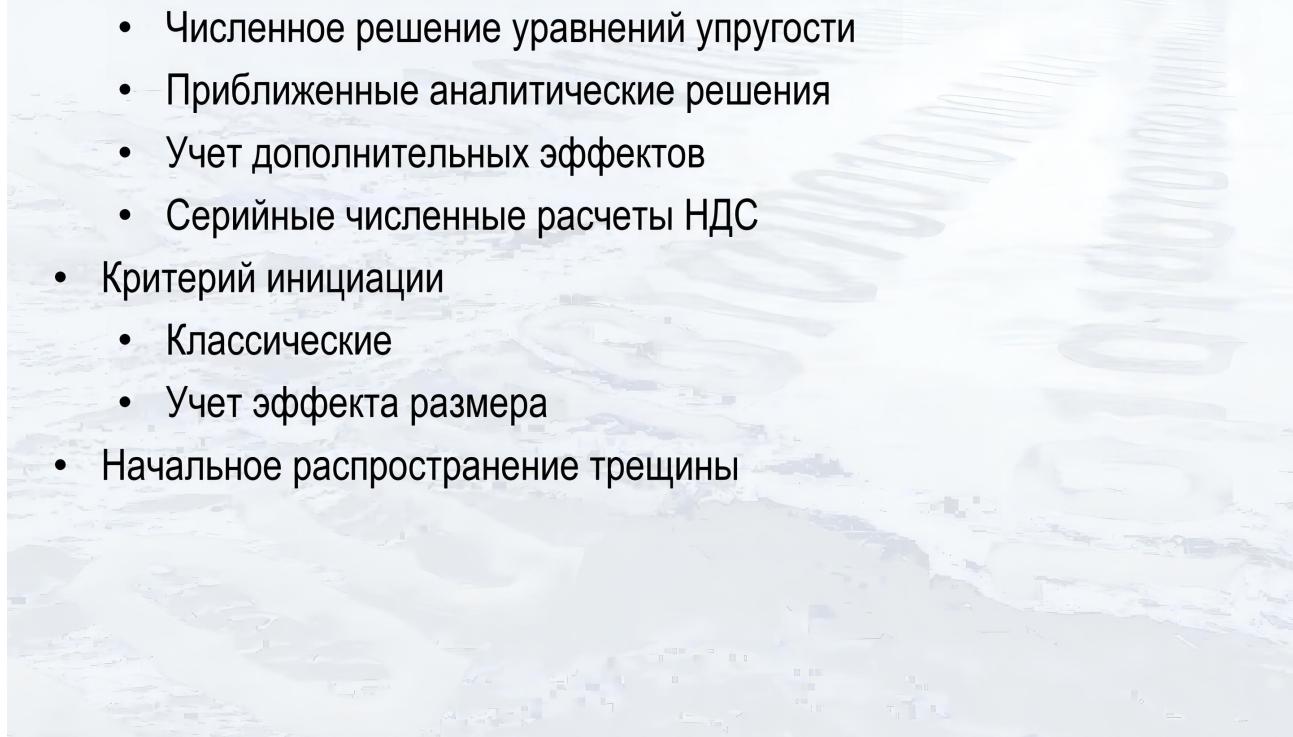
регибаться, что даст дополнительное гидродинамическое сопротивление в этой зоне (вообще говоря можно получить сток); если трещина сильно перегнётся в этой зоне, то это даст неблагоприятные последствия.

### 13.1.2 Инициация трещины

#### Инициация трещины

Этапы расчета :

- Напряженно-деформированное состояние
  - Численное решение уравнений упругости
  - Приближенные аналитические решения
  - Учет дополнительных эффектов
  - Серийные численные расчеты НДС
- Критерий инициации
  - Классические
  - Учет эффекта размера
- Начальное распространение трещины



Здесь представлен небольшой outline нашей сегодняшней беседы. Будут продемонстрированы результаты группы Чёрного из института вычислительных технологий.

### 13.1.3 Расчёт напряжённо-деформированного состояния

## Расчет напряженно-деформированного состояния

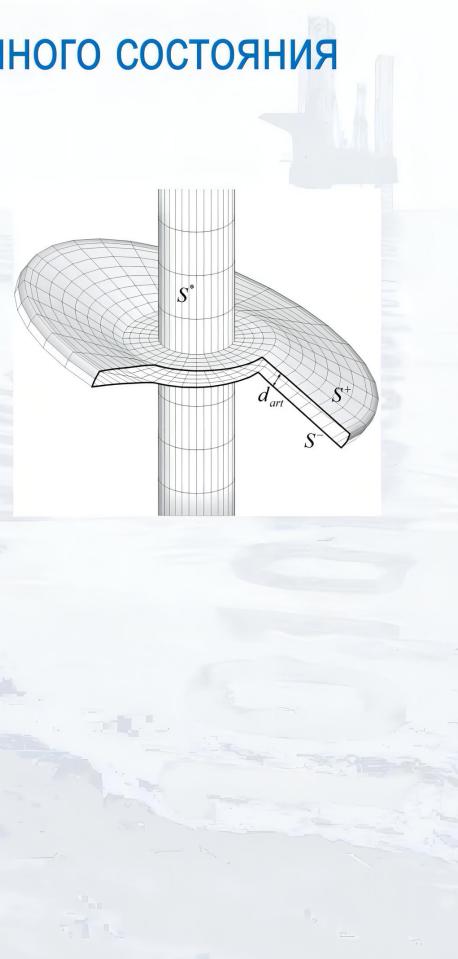
### Постановка задачи

$$\sigma_{ij,j}(x) = 0, \quad x \in V \quad \text{уравнения равновесия}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{kk} \quad \text{закон Гука}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{определение деформаций}$$

$$t(x)|_{S_i} = g(x) \quad \text{границные условия}$$



4  
5/15/2020

Сначала давайте поговорим, как формулируется задача об инициации. Понятно, что у нас есть скважина (с перфорацией) и вокруг есть некоторая упругая среда, представляющая собой породу. Эта упругая среда подчиняется уравнению равновесия и закону Гука (в самом простом случае без учёта пластичности, нелинейных вкраплений и так далее), также есть связь между деформациями и перемещениями.

Далее необходимо поставить граничные условия. Здесь на слайде они выписаны в общем виде, но сразу скажу, что это будут граничные условия на бесконечности (или в какой-то дали от ствола скважины – условной бесконечности; можно показать, что если отойти на расстояние порядка 10 диаметров от ствола скважины, то скважина перестанет влиять на напряжённо-деформированное состояние), а на самой скважине задаётся давление жидкости (которое всегда действует перпендикулярно поверхности, т.е. оно будет действовать по нормали и пытаться как-бы сдвинуть/расширить породу).

Сразу пробегусь, как можно это всё решить численно. На рисунке на слайде сетка изображена не просто так. Группа Чёрного предлагает решать эту задачу методом граничных элементов.

### 13.1.4 Численные решения уравнений упругого равновесия

## Численные решения уравнений упругого равновесия

### Метод граничных элементов

Интегральное уравнение для точки границы

$$-0.5u_i(x') = \int_S U_{ij}(x', x) t_j(x) dS(x) - \int_S T_{ij}(x', x) u_j(x) dS(x)$$

Выражение координат и неизвестных функций через базисные функции

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^M \mathbf{x}^m \varphi_m(\xi_1, \xi_2), \quad \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^M \mathbf{u}^m \varphi_m(\xi_1, \xi_2), \quad \mathbf{t}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^M \mathbf{t}^m \varphi_m(\xi_1, \xi_2)$$

Система линейных уравнений для коэффициентов разложения

$$-0.5u_j(x') + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M U_{ij}^{nm} t_j^{nm} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M T_{ij}^{nm} u_j^{nm}$$

$$(T^* - \frac{1}{2}I)\mathbf{u} = U^* \mathbf{t}$$

Искусственный разрез  
для классического МГЭ



5  
5/15/2020

В прошлом семестре у вас уже был метод граничных элементов. Он основан на так называемой теореме взаимности.

В чём основная фишка этого метода? Он позволяет свести вообще говоря трёхмерную задачу к можно сказать двумерной, т.е. когда уравнения и неизвестные записываются в некоторой двумерной поверхности.

Основной минус: матрица системы получается в итоге полностью заполненной – это является накладными расходами этого метода.

В интегральное соотношение необходимо подставить дискретизацию. Можно сказать, что это такой метод конечных элементов на поверхности. И после этого у нас формируется система линейных уравнений.

Это такой в данном случае метод, где можно «бить пушкой по воробьям» (в смысле этой задачи по инициации). Можно задать перфорацию произвольной формы, можно добавить обсадную колонну; здесь же разные варианты могут быть: открытый ствол (когда у нас просто есть скважина, в которую начали качать жидкость – как порвалась порода, так и порвалась), второй вариант – взять обсадную колонну и проделать в ней перфорацию (тогда на итог будет влиять и обсадная колонна, и перфорация), третий вариант – зона перфорирования изолируется так называемым пакером (тогда есть давление после пакера и давление перед пакером). Т.е. задачи разные, но все они похожие и в принципе каждую из них можно решать (в частности с помощью метода граничных элементов).

Мы пошли по другому пути: студент второго курса нашей программы уехал на 1.5 года во Францию и занимается задачами инициации, но с точки зрения конечных элементов. Рассказал вам общую информацию про численный метод; давайте пойдём дальше.

### 13.1.5 Приближённые решения (2D)

#### Приближенные решения (2D)

##### Задача Кирша

Одностороннее растяжение пластины с круговым вырезом

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a) = \sigma - 2\sigma \cos(2\theta)$$

Растяжение с 2x сторон:

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a) = \sigma_x^\infty - 2\sigma_x^\infty \cos(2\theta)$$

$$+ \sigma_y^\infty - 2\sigma_y^\infty \cos(2\theta - \pi) =$$

$$(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) - 2(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) \cos(2\theta)$$

$$+$$

Тимошенко, Гудиер Теория упругости //Гл.4, стр.107

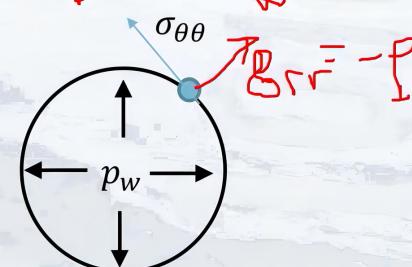
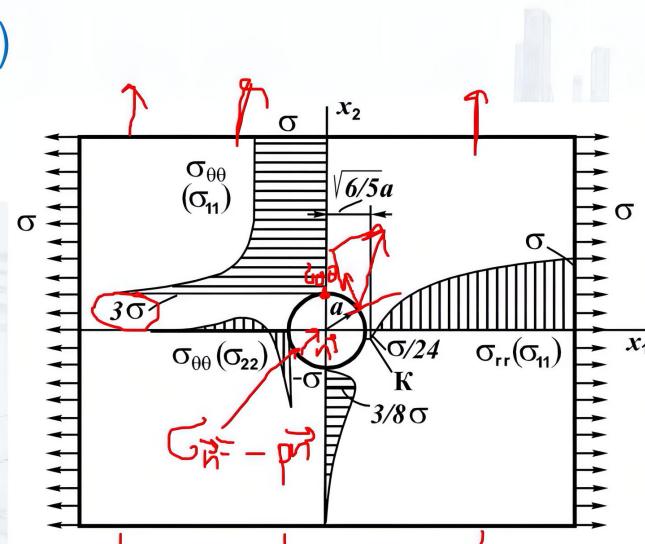
#### Упр. Растяжение внутренним давлением

Одностороннее растяжение пластины с круговым вырезом

6  
5/15/2020

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2}{r^2} p_w$$

$$u_r = u_r(r)$$



Нулевые напряжения на бесконечности

Чтобы вы понимали (хотя бы на пальцах), как в простых ситуациях это всё (НДС вблизи скважины) работает, мы сейчас рассмотрим с вами аналитические решения.

С одной стороны, чтобы сформировать некоторое понимание, а с другой стороны, чтобы уже получить какие-то конечные формулы, мы рассмотрим вспомогательную задачу, а именно задачу Кирша. Это двумерная задача в условиях плоской деформации пластины. В центре пластины есть отверстие радиуса  $a$ , которое изначально не нагружено. Мы начинаем тянуть (растягивать) пластину справа и слева по горизонтали с напряжением  $\sigma$ , а сверху и снизу напряжений не прикладываем.

Тогда можно показать, что решение задачи (напряжение на границе отверстия) задаётся в следующем виде:

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a) = \sigma - 2\sigma \cos(2\theta) \quad (13.1)$$

В книге Тимошенко, Гудиер это получено с помощью функции напряжений. Видим, что есть зависимость  $\sigma_{\theta\theta}$  от угла  $\theta$ . Максимальное напряжение на границе отверстия достигается при  $\theta = \pm\pi/2$  и равно  $3\sigma$ .

Давайте усложним задачу, а именно дополнительно приложим растягивающие напряжения  $\sigma_y^\infty$

сверху и снизу по вертикали; напряжения  $\sigma_x^\infty$  по горизонтали оставим неизменными. В силу линейности рассматриваемых уравнений упругости решение задачи (напряжение на границе отверстия) в этом случае запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(r = a) &= \sigma_x^\infty - 2\sigma_x^\infty \cos(2\theta) + \sigma_y^\infty - 2\sigma_y^\infty \cos(2\theta - \pi) = \\ &= (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) - 2(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) \cos(2\theta)\end{aligned}\quad (13.2)$$

Далее снимем растягивающие напряжения (нулевые напряжения на бесконечности), но начнём в скважину закачивать жидкость с давлением  $p_w$ . Тогда получим

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2}{r^2} p_w \quad (13.3)$$

При  $r = a$  напряжение  $\sigma_{\theta\theta} = p_w$ . Это означает, что когда вы действуете давлением, то с одной стороны у вас возникает напряжение  $\sigma_{rr} = -p_w$ , перпендикулярное границе отверстия, а с другой стороны дополнительно появляется окружное напряжение  $\sigma_{\theta\theta} = p_w$ . И именно за счёт этого окружного напряжения порода будет рваться.

Используя линейность рассматриваемых уравнений упругости, по принципу суперпозиции можем получить решение комбинированной задачи, когда в главных осях заданы напряжения на бесконечности и задано давление жидкости в скважине. Получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(r = a) &= \sigma_x^\infty - 2\sigma_x^\infty \cos(2\theta) + \sigma_y^\infty - 2\sigma_y^\infty \cos(2\theta - \pi) + p_w = \\ &= (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) - 2(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) \cos(2\theta) + p_w\end{aligned}\quad (13.4)$$

Вам я предлагаю вывести формулу (13.3) самостоятельно. Небольшое указание: если будете искать решение в виде  $u_r = u_r(r)$ , то быстро придёте к результату.

## Приближенные решения (2D)

### Полное решение

Вводя переобозначения

$$\sigma_x^\infty = -\sigma_{min}$$

$$\sigma_y^\infty = -\sigma_{max}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a) = p_w - (\sigma_{max} + \sigma_{min}) - 2(\sigma_{max} - \sigma_{min})\cos(2\theta) \rightarrow \max$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}(\theta) = 0$$

### Давление инициации

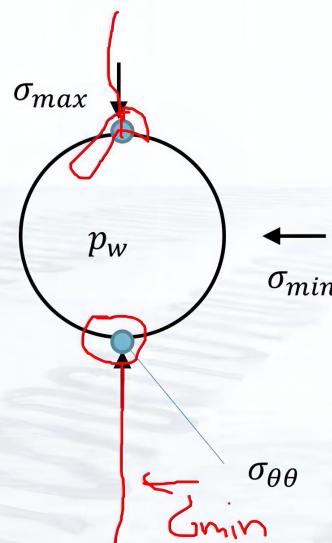
Растягивающие напряжения

$$\sigma_{\theta\theta} = -3\sigma_{min} + \sigma_{max} + p_w$$

Условие разрушения

$$\max\{\sigma_{\theta\theta}\} = \sigma_t$$

7  
5/15/2020



### Необходимое давление в скважине

$$p_w = 3\sigma_{min} - \sigma_{max} + \sigma_t$$

Посмотрим на решение, которое только что мы с вами получили.

Так как в породе действуют сжимающие напряжения, то мы поменяем знак напряжений на бесконечности  $\sigma_x^\infty = -\sigma_{min}$  и  $\sigma_y^\infty = -\sigma_{max}$  и подставим их в формулу (13.4):

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a) = p_w - (\sigma_{max} + \sigma_{min}) - 2(\sigma_{max} - \sigma_{min})\cos(2\theta) \quad (13.5)$$

Теперь наша задача понять, в каком месте инициируется трещина.

Самой простой критерий звучит так: как только в какой-то точке скважины растягивающее напряжение достигает некоторого критического значения  $\sigma_t$ , тогда возникает разрушение.

Соответственно необходимо решить задачу максимизации функции  $\sigma_{\theta\theta}$ . Для этого (ясное дело) можно посчитать производную. Но в нашем случае всё просто: максимум достигается при  $\cos(2\theta) = -1$ , т.е. разрушение будет возникать при  $\theta = \pm\pi/2$ .

Это соответствует нашим ожиданиям (представлениям о процессе), потому что трещина действительно пойдёт перпендикулярно минимальным сжимающим напряжениям.

Давление инициации:

$$p_w = 3\sigma_{min} - \sigma_{max} + \sigma_t \quad (13.6)$$

Здесь стоит заметить, что часто  $\sigma_t$  пренебрегают (говорят, что она мала по сравнению с  $\sigma_{min}$  и  $\sigma_{max}$  – напряжение  $\sigma_t$  порядка каких-то мегапаскалей, а напряжения  $\sigma_{min}$  и  $\sigma_{max}$  порядка нескольких десятков мегапаскалей).

### 13.1.6 Приближённые решения (3D)

#### Приближенные решения (3D)

##### Полное решение

$$\sigma_{rr} = -p$$

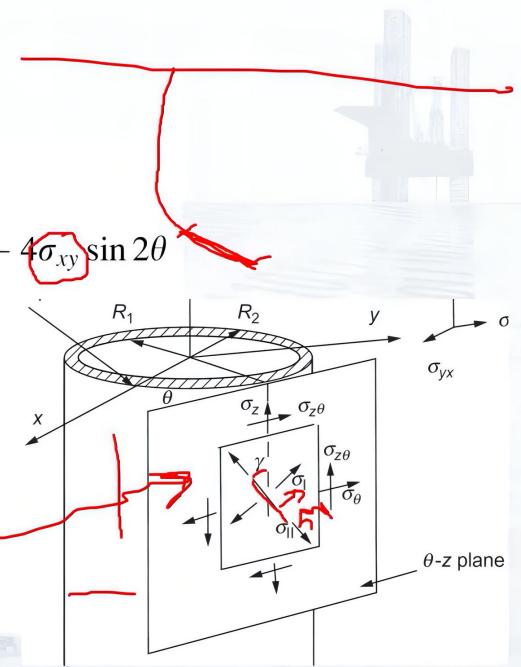
$$\sigma_{\theta\theta} = p + \underline{\sigma_{xx}}(1 - 2 \cos 2\theta) + \underline{\sigma_{yy}}(1 + 2 \cos 2\theta) - 4\underline{\sigma_{xy}} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{zz} = \underline{\sigma_{zz}^\infty} - v[2(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta + 4\sigma_{xy} \sin 2\theta]$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_{rz} = 0$$

$$\sigma_{\theta z} = -\underline{\sigma_{xz}} \sin \theta + 2\underline{\sigma_{yz}} \cos \theta$$



Удовлетворяют условиям совместности  
(Уравнения Бельтрами-Митчела)!

\*  $\sigma_{zz}^\infty - \sigma_{zz}$  вдали (для ясности)  
γ – угол между трещиной и осью z

$$\sigma_{\max}(\theta) = \frac{\sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta}}{2}\right)^2 + \sigma_{\theta z}^2}$$

При  $\underline{\sigma_{\theta z}} = 0$   
 $\sigma_{\max} = \max(\underline{\sigma_{\theta\theta}}, \underline{\sigma_{zz}})$

Ching H. Yew, Xiaowei Weng **Mechanics of Hydraulic Fracturing 2nd Edition**

Дальше будем усложнять задачу: во-первых, скважина может быть наклонена и тогда мы не будем находиться в главных осях (в тензоре напряжений могут возникнуть внедиагональные элементы); во-вторых, действуют напряжения  $\sigma_{zz}^\infty$  сверху.

## Пример (3D)

### Вертикальная скважина

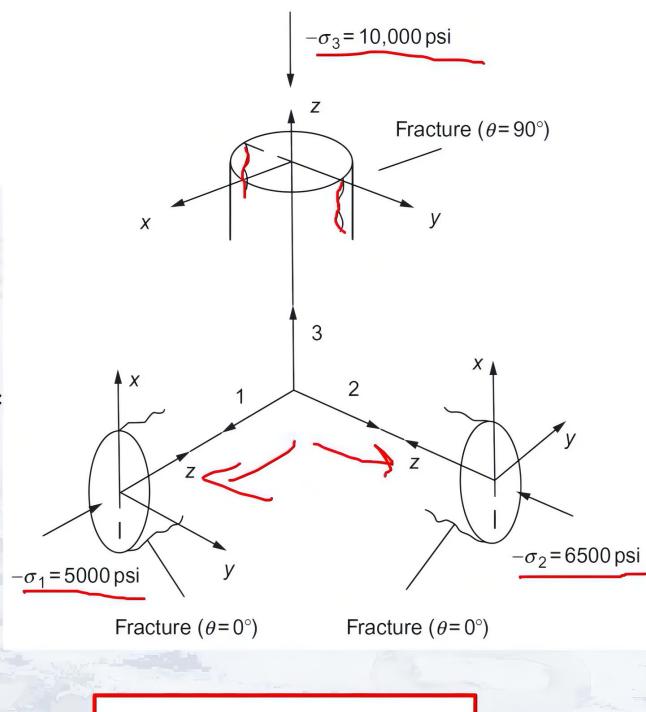
$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} - p_w &= (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) - 2(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty)\cos(2\theta) = \\ &= -(5000 + 6500) + 2(5000 - 6500)\cos(2\theta) = \\ &= -11500 - 3000\cos(2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\max(\sigma_{\theta\theta}) &= -11500 - 3000 * (-1) = \\ &= -8500 + p_w \\ \theta &= \pm\pi/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= -3\sigma_{min} + \sigma_{max} + p_w = \\ &= -15000 + 6500 + p_w = -8500 + p_w\end{aligned}$$

### Горизонтальная скважина (упр.)

9  
5/15/2020



$$\gamma = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\sigma_{\theta z}}{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}} \right)$$

Давайте рассмотрим конкретный пример, как эти формулы уже можно применить. Представьте, что у вас есть вертикальная скважина: по вертикали действует напряжение  $\sigma_3 = -10000$  psi, минимальное горизонтальное напряжение  $\sigma_1 = -5000$  psi, максимальное горизонтальное напряжение  $\sigma_2 = -6500$  psi.

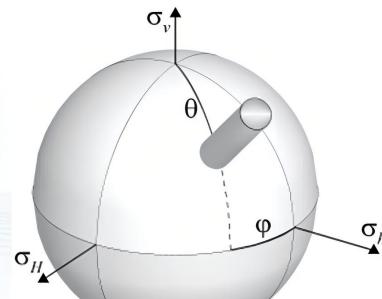
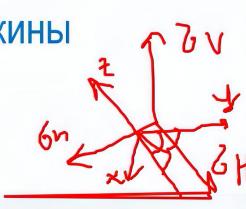
Упражнение: посчитать давление инициации и угол для горизонтальной скважины. Здесь есть два варианта: скважина расположена вдоль первого направления (минимальных горизонтальных напряжений) или вдоль второго направления (максимальных горизонтальных напряжений).

### 13.1.7 НДС для перфорированной скважины

#### НДС для перфорированной скважины

1. Напряжения в СК, связанной со скважиной

$$\sigma_H, \sigma_h, \sigma_v \rightarrow \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \dots$$



2. Напряжения в цилиндрической СК

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \rightarrow \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \dots$$

3. Добавка давления в скважине

$$\sigma_{rr} + p_w$$

4. Плоская задача для перфорации

$$\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \dots \rightarrow \sigma_{xx}^p, \sigma_{yy}^p, \sigma_{xy}^p$$

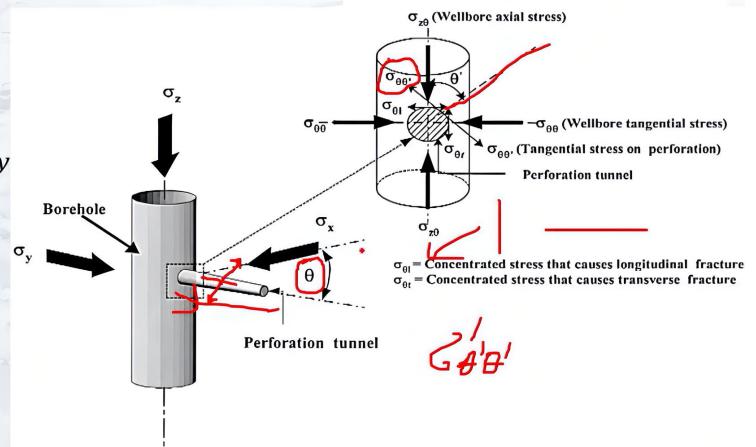
5. Напряжения на границе

перфорации в цилиндрической СК

$$\sigma_{xx}^p, \sigma_{yy}^p, \sigma_{xy}^p \rightarrow \sigma_{\theta\theta}^p, \sigma_{rr}^p, \sigma_{r\theta}^p$$

6. Давление инициации для перфорации

$$\sigma_{\theta\theta}^p, \sigma_{rr}^p, \sigma_{r\theta}^p \rightarrow p_{init}$$



$\theta$  – угол ориентации перфорации!

$\theta'$  - окружной угол в сечении перфорации, отсчит. от  $\sigma_{zz}$

10  
5/15/2020

M.M. Hossain, M.K. Rahman, S.S. Rahman **Hydraulic fracture initiation and propagation: roles of wellbore trajectory, perforation and stress regimes** // Journal of Petroleum Science and Engineering 27 2000 129–149 (Сжимающие напряжения – пропицательство в этой статье! Поэтому напряжения с толщоты по зонам!)

Дальше будем усложнять задачу, а именно добавим перфорацию.

### 13.1.8 Примеры для перфорированной скважины

#### Примеры для перфорированной скважины

##### Вертикальная скважина

$$\underline{\sigma_z = \sigma_v} \quad \underline{\sigma_x = \sigma_H} \quad \underline{\sigma_y = \sigma_h}$$

$\theta = 0$  – ориентация  
вдоль макс. горизонт.  
напряжения

$$\theta' = 0$$

$$\underline{\sigma_{\theta 1} = 9\sigma_h - 3\sigma_H - \sigma_{z\theta} - 4P_w} \sim \cancel{6+}$$

$$\underline{\sigma_{z\theta} = \sigma_v - 2\nu(\sigma_H - \sigma_h)} \quad \text{С минусом, т.к. сжимающие стрессы положительны}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta'} &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_{z\theta}) + 2(\sigma_x + \sigma_y - \sigma_{z\theta})\cos 2\theta' \\ &\quad - 2(\sigma_x - \sigma_y)(\cos 2\theta + 2\cos 2\theta \cos 2\theta') \\ &\quad - 4\tau_{xy}(1 + 2\cos 2\theta)\sin 2\theta - 4\tau_{z\theta}\sin 2\theta' \\ &\quad - P_w(2\cos 2\theta' + 2) \end{aligned} \quad (29)$$

##### Поперечная трещина $\theta' = \pi/2$

$$\sigma_H \geq \sigma_h + \frac{\sigma_v}{2\nu}$$

##### Горизонтальная скважина $\theta = 0$ и $\theta = 90$

$$P_{w0} = \frac{1}{4} \{ 9\sigma_H - \sigma_h - 3\sigma_v + 2\nu(\sigma_v - \sigma_H) \}$$

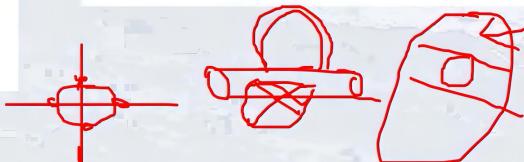
$$P_{w90} = \frac{1}{4} \{ 9\sigma_v - \sigma_h - 3\sigma_H + 2\nu(\sigma_v - \sigma_H) \}$$

© 10/2020

##### Поперечная трещина

$$\theta' = \pi/2$$

$$\sigma_{\theta 1} = 3\sigma_h - (\sigma_v - \sigma_H)(2 - 6\nu) - \sigma_v - \sigma_H$$



### 13.1.9 Дополнительные эффекты

#### Дополнительные эффекты

##### Пористость

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \alpha \delta_{ij} p$$

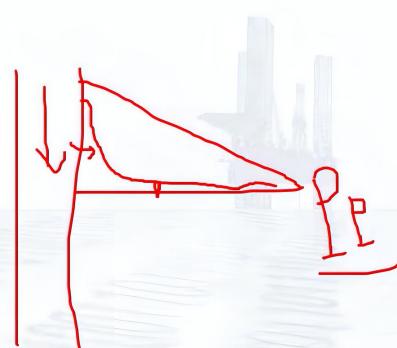
закон Гука

$$P_{wf} = 3\sigma_h - \sigma_H - P_p + \sigma_t$$

Верхняя оценка

$$P_{wf, lower} = \frac{3\sigma_h - \sigma_H - 2P_p + \sigma_t}{2(1-v)}$$

Нижняя оценка



Valko Economides **Hydraulic fracture mechanics**, 1995

##### Температура

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta(3\lambda + 2\mu)(T - T_0)\delta_{ij}$$

закон Гука

##### Обсаженная колонна

... 3. Добавка давления в скважине

$$\sigma_{rr} + C p_w$$

$C \sim 0.2 \div 0.5$

12  
5/15/2020

Что ещё может влиять на инициацию трещины?

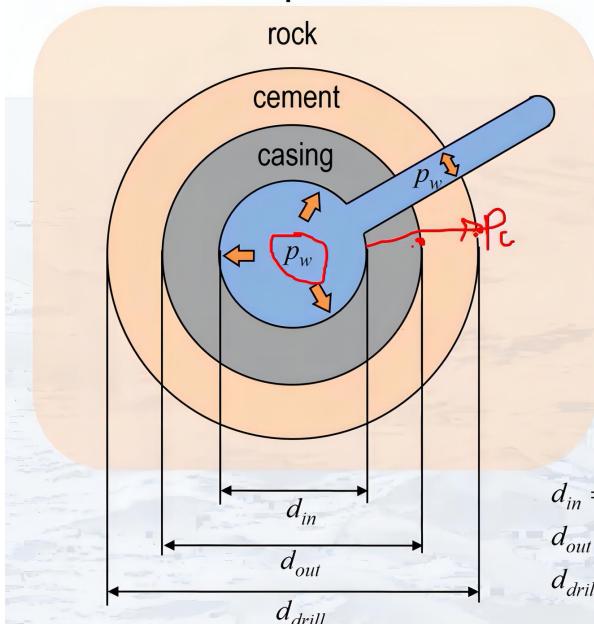
Во-первых, это поровое давление, т.е. когда мы начинаем качать жидкость в открытый ствол, то часть жидкости начинает фильтроваться в породу (динамическое воздействие). Вообще говоря, у нас даже изначально есть некоторый уровень порового давления и это давление уменьшает давление инициации трещины. По сути оно помогает инициировать трещину.

Во-вторых, температура.

В-третьих, обсадная колонна.

## Обсаженная колонна

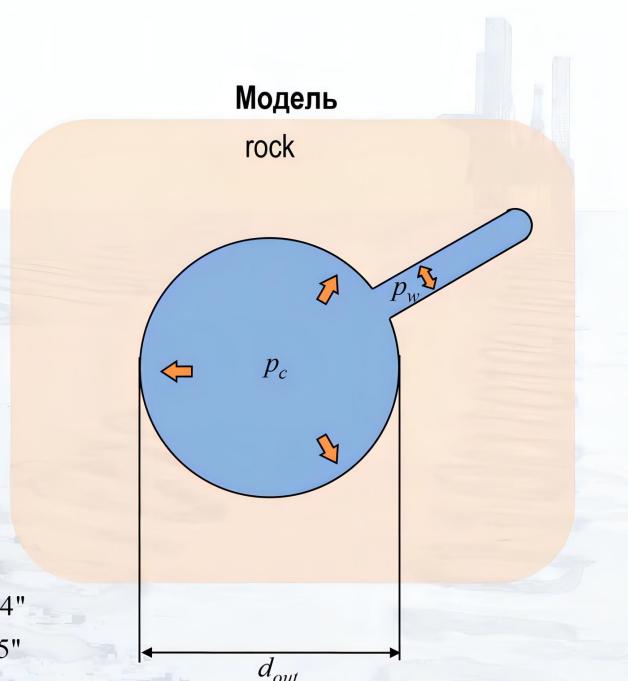
### Эксперимент



$$p_c = p_0 + k \cdot (p_w - p_0)$$

Условие непрерывности смещений и напряжений

### Модель



$p_w$  – давление жидкости в скважине

$p_c$  – давление, ослабленное casing

$p_0$  – давление цементирования

5/15/2020

$k$  – коэффициент ослабления давления за счет обсадной колонны

### 13.1.10 Серийные численные расчёты

#### Серийные численные расчеты

Вспомогательные задачи

$$1. \underline{\sigma_{xx} = 1}, \sigma_{xy} = 0, \sigma_{yy} = 0, \dots \quad p_w = 1$$

$$2. \sigma_{xx} = 0, \sigma_{xy} = 1, \sigma_{yy} = 0, \dots$$

...

$$6. \sigma_{xx} = 0, \sigma_{xy} = 0, \dots, \sigma_{zz} = 1,$$

$$7. \underline{\sigma = 0, p_w = 1}$$

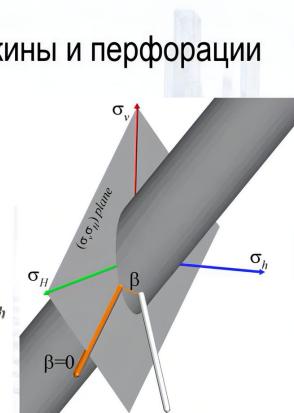
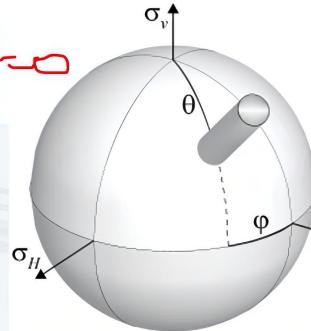
Решая находим  $\sigma_3^k(x)$  для каждой задачи  $k=1\dots 7$

Для каждой ориентации

1. Находим  $\sigma_k = \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy} \dots$  в СК скважины

$$2. \underline{\sigma_3(x) = \sum_k \sigma_3^k(x) \rho_k}$$

Ориентация скважины и перфорации



$\sigma$  – тензор напряжений на бесконечности

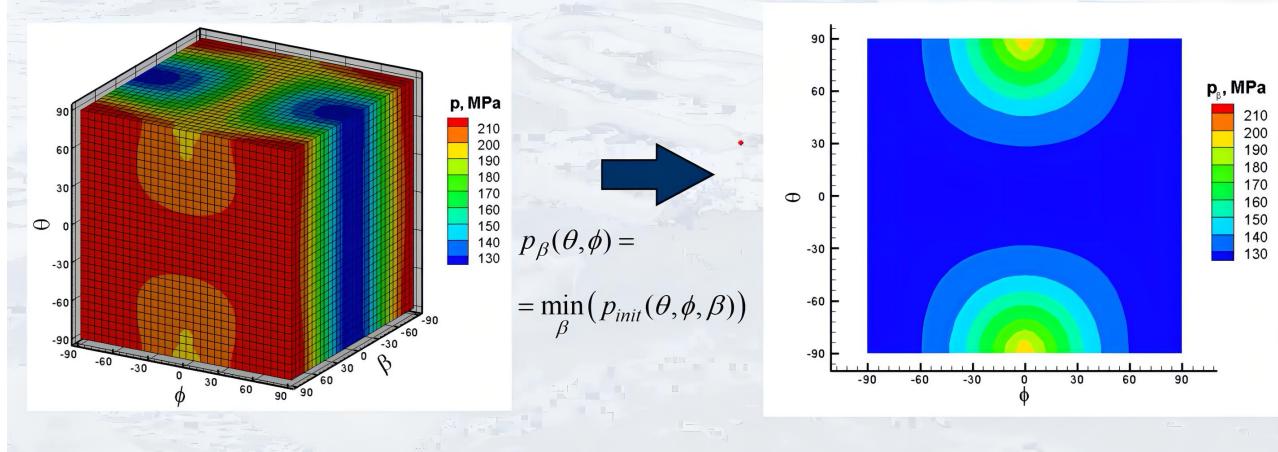
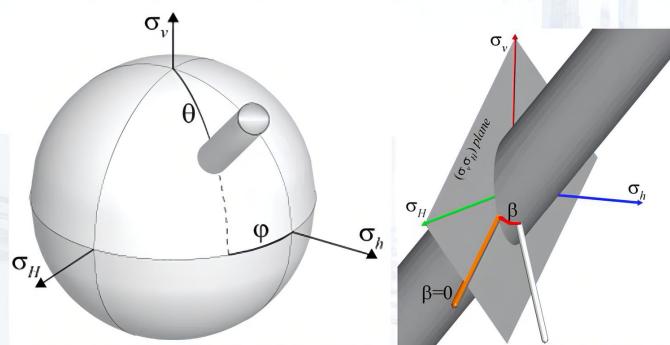


## Серийные численные расчеты

Для каждой ориентации получаем давление инициации  $p_{init}(\theta, \phi, \beta)$

Как анализировать три параметра?

Ориентация скважины и перфорации



Влияние ориентации скважины и перфорации на давление инициации

Месторождение Амин (Оман)

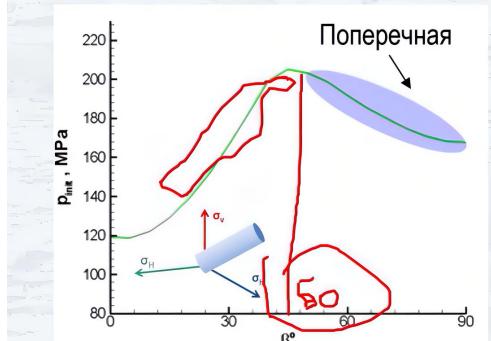
$$E = 50 \text{ GPa} \quad \sigma_H = 116 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.13 \quad \sigma_h = 96 \text{ MPa}$$

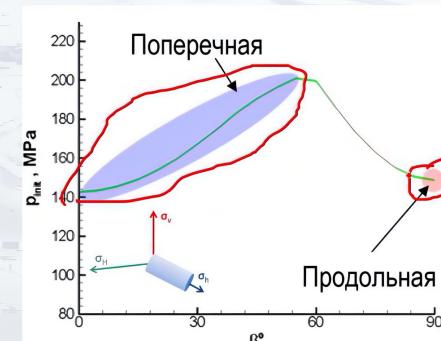
$$\sigma_t = 20 \text{ MPa} \quad \sigma_v = 118 \text{ MPa}$$



Зависимость давления от ориентации перфорации



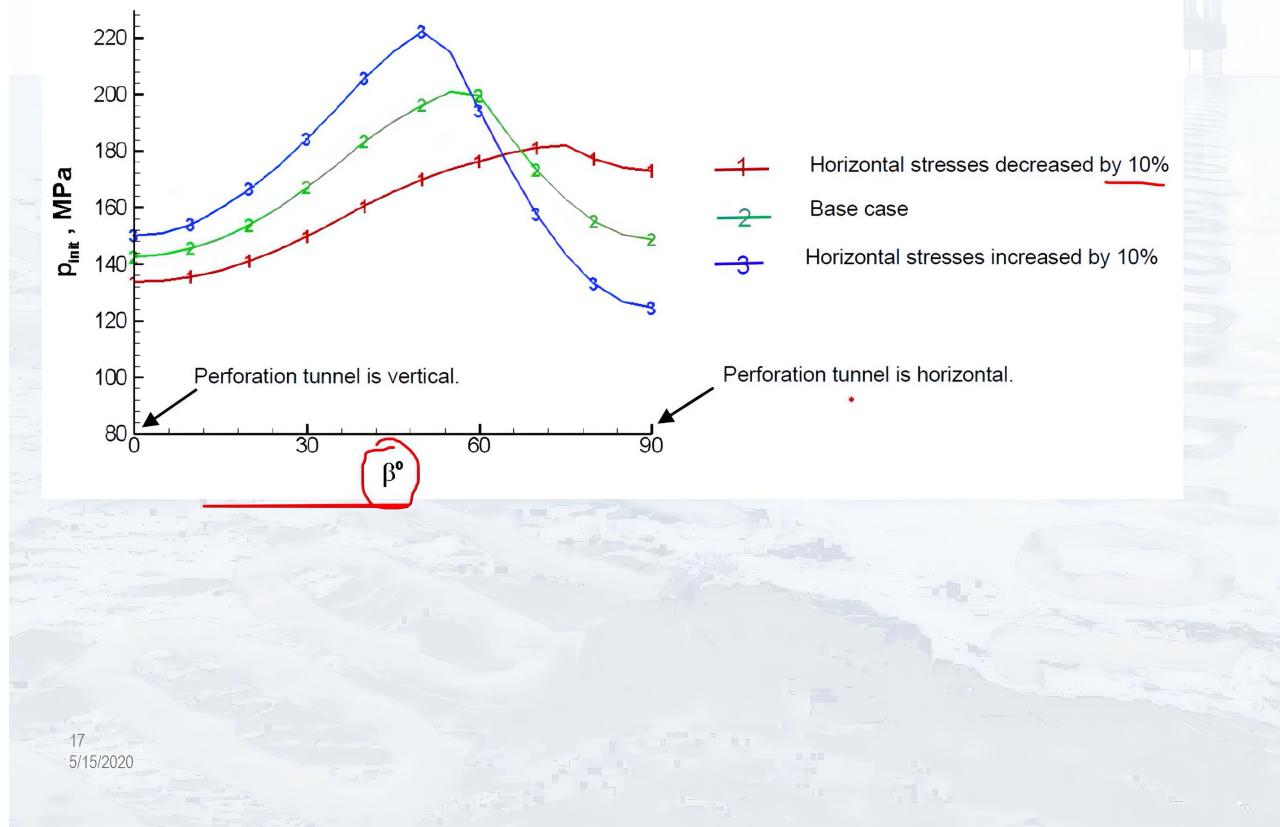
Наклонная скважина



Горизонтальная скважина

Другие варианты см. в

С.Г. Черный В.Н. Лапин. Д.В. Есипов Д.С. Куранаков. Методы моделирования зарождения и распространения трещин, 2016

Влияние точности определения средних напряжений  $\sigma_H$ 

### 13.1.11 Критерии инициации трещины

#### Критерии инициации трещины

$$F_s(x, u, \varepsilon, \sigma, \dots) \geq F_m(\sigma_t, K_{Ic}, \dots)$$

$F_s(x, u, \varepsilon, \sigma, \dots)$  – зависит от НДС

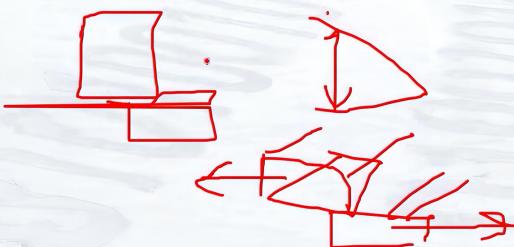
$F_m(\sigma_t, K_{Ic}, \dots)$  – определяется материалом и геометрией задачи

#### Классические критерии

##### Растягивающих напряжений

$$\sigma_3 \geq \sigma_t,$$

$\sigma_3 = \max \sigma_k$ ,  $\sigma_k$  - собственные числа  $\sigma$



Разрушится ли материал, если напряжения только сжимающие ?

## Критерии для сжимающих напряжений

### Треска

$$\tau(\sigma) \geq \tau_c$$

$\tau(\sigma)$  – максимальные сдвиговые напряжения

$\tau_c$  - параметр материала



$$F_s = f \cdot N$$

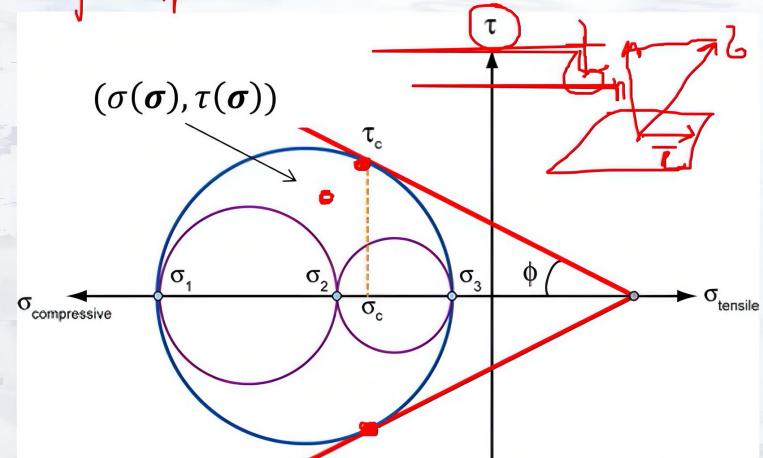
### Мора-Кулонна

$$\tau(\sigma) \geq \sigma(\sigma) \tan \phi + c$$

$c$  – сцепление

$\phi$  – угол внутреннего трения

Разрушение возникает, если прямая касается внешнего Круга Мора



[https://ru.qwe.wiki/wiki/Mohr%20Coulomb\\_theory](https://ru.qwe.wiki/wiki/Mohr%20Coulomb_theory)

<https://www.youtube.com/watch?v=TcHXLJCPx68>

### 13.1.12 Учёт эффекта размера

#### Учет эффекта размера

#### Эффект размера

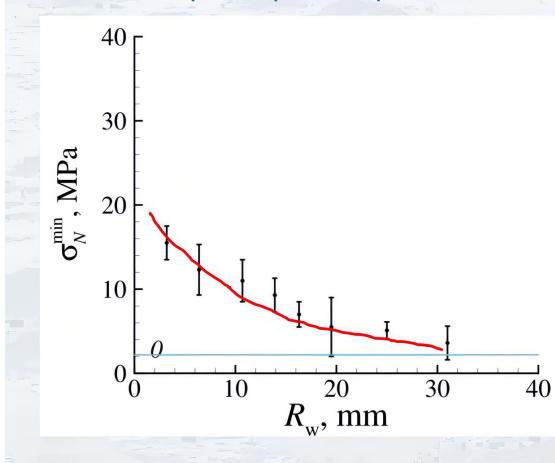
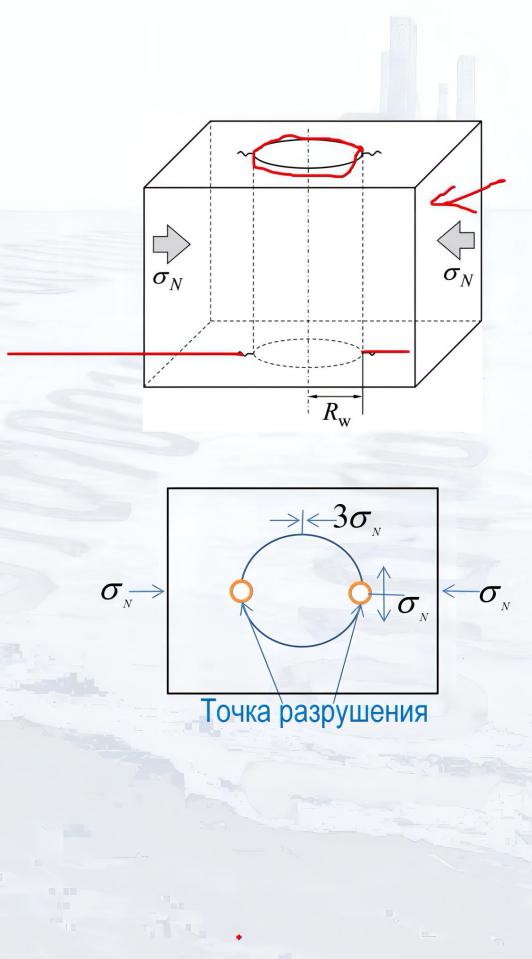
Эксперимент о сжатии куба с отверстием

Точка разрушения известна

Напряжения в точках разрушения  $\sigma_3 = \sigma_N$

Разрушение наступит при  $\sigma_3 = \sigma_N = \sigma_t$

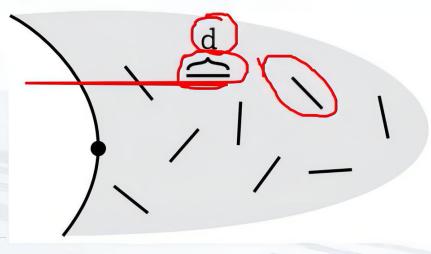
Зависимость давления разрушения  
от размера отверстия



## Учет трещин в материале

$$K_I(\sigma) \geq K_{Ic}$$

$K_{Ic}$  - трещиностойкость материала

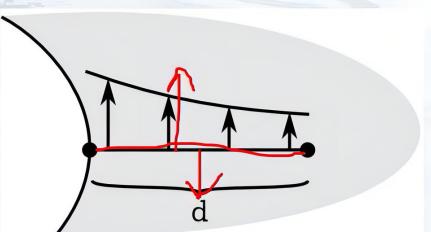


### Осреднение

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y dx \geq \sigma_t$$



$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{\theta\theta} dV \geq \sigma_t$$



$S = \sigma : \epsilon$  - плотность энергии деформации

$$S_c = \frac{\sigma_t^2}{2E}$$

$d, V$  - размер области осреднения параметры материала

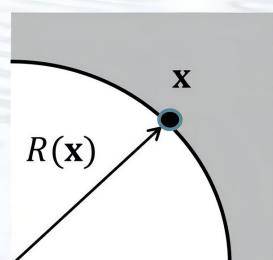
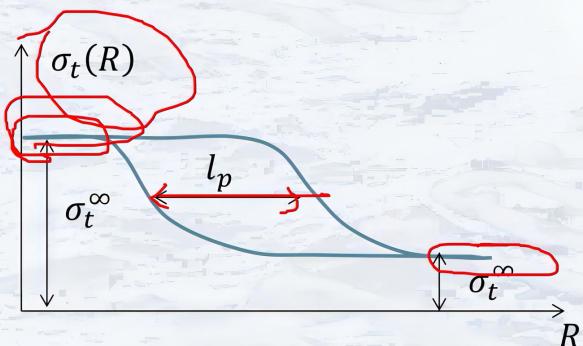
21  
5/15/2020

## Кривизна поверхности

$$\sigma_3 \geq \sigma_t(R)$$

$$\sigma_t(R) = \frac{\sigma_t^0 + R_l(R)\sigma_t^\infty}{1 + R_l(R)}, \quad R_l(R) = \frac{R}{l_p}$$

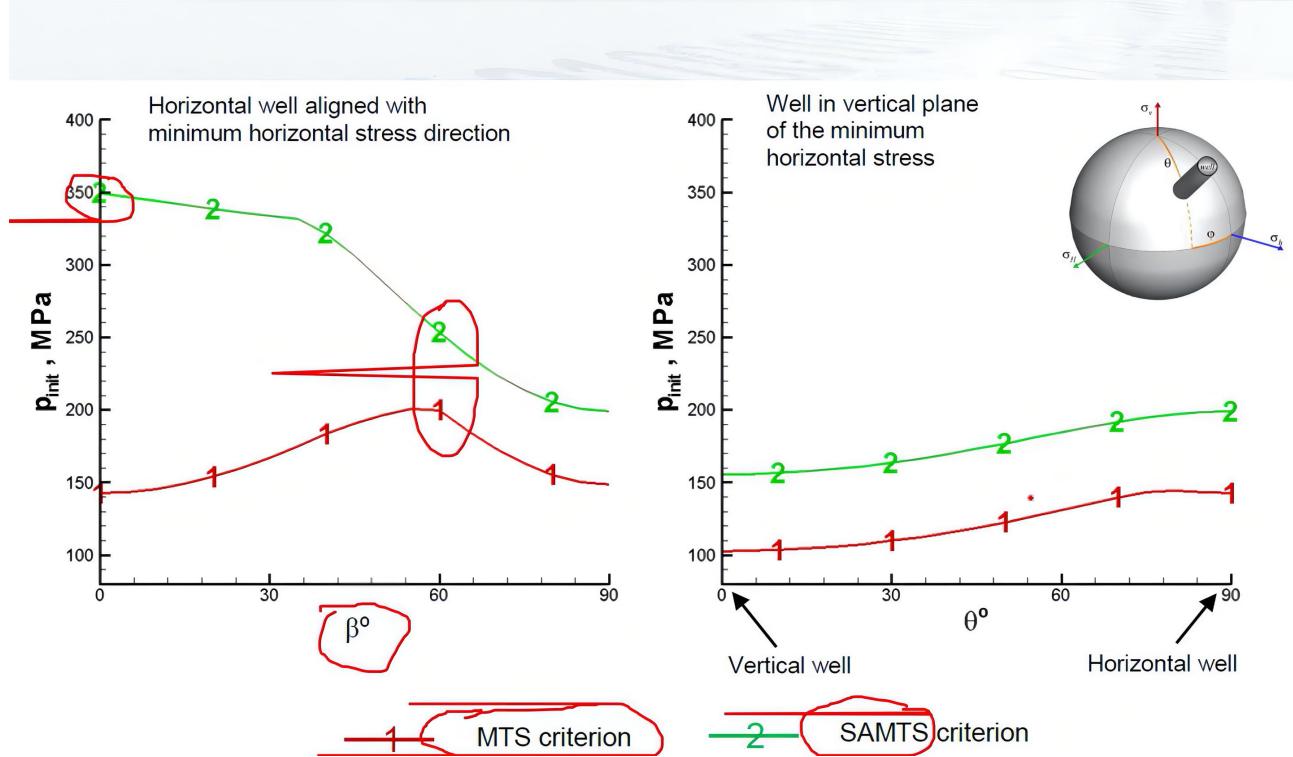
$l_p, \sigma_t^0, \sigma_t^\infty$  - параметры материала



22  
5/15/2020

Bazant Z. P., Planas J. Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials. Boca Raton, Florida: CRC Press LLC, 1998. 640 p.

## Влияние эффекта размера на давление инициации



## 14 Условие задачи

### 14.1 Законы Кирхгофа для перераспределения потоков между трещинами

Весь расход, который закачиваем в скважину, перераспределяется между трещинами (первый закон Кирхгофа):

$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i \quad (14.1)$$

Можно независимо рассматривать каждый из путей (к каждой из трещин) и считать гидродинамические сопротивления независимо (второй закон Кирхгофа):

$$p_0 = \sigma_{min,i} + p_{net,i} + \Delta p_{perf,i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{fric,j}, \quad (14.2)$$

где

$\sigma_{min,i}$  – давление закрытия (минимальное напряжение в пласте) на  $i$ -ой трещине;

$p_{net,i} = p_{frac,i} - \sigma_{min,i}$  – давление на  $i$ -ой трещине (из модели трещины);

$\Delta p_{perf,i}$  – падение давления вдоль перфорации  $i$ -ой трещины;

$\Delta p_{h,i}$  – падение гидростатического давления между  $i$ -ой и  $(i-1)$ -ой трещинами;

$\Delta p_{fric,i}$  – падение давления на трение между  $i$ -ой и  $(i-1)$ -ой трещинами.

В итоге, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i \\ p_0 = \sigma_{min,i} + p_{net,i}(Q_i) + \Delta p_{perf,i}(Q_i) - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{fric,j}(Q_i) \end{cases} \quad (14.3)$$

относительно неизвестных расходов  $Q_i$  и забойного давления  $p_0$ .

### 14.2 Формула для давления $p_{net,i}$ на $i$ -ой трещине

Аналитический подход (с использованием РКН модели):

$$p_{net,i}(Q_i) = a_i Q_i^{\frac{n}{2n+3}} V_i^{\frac{1}{2n+3}}, \quad (14.4)$$

где  $a_i = \left( \frac{(n+3)(2n+1)^n \cdot K \cdot (E'_i)^{2n+2}}{\pi 2^{2n} n^n \phi^n h_i^{3n+3}} \right)^{\frac{1}{2n+3}}$  – параметр жёсткости,

$Q_i$  и  $V_i$  – расход на  $i$ -ой трещине и объём  $i$ -ой трещины;

$K$  и  $n$  – реологические параметры степенной (неньютоновской) жидкости;

$E'_i$  – модуль плоской деформации  $i$ -ой трещины;

$h_i$  – мощность продуктивной зоны.

### 14.3 Формула для падения давления $\Delta p_{perf,i}$ на перфорациях

Эмпирическая формула для падения давления на перфорациях:

$$\Delta p_{perf,i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|, \quad (14.5)$$

где  $\rho_s$  – средняя плотность смеси;

$n_{p,i}, d_{p,i}$  – количество и диаметр перфораций;

$C_{d,i} = \frac{\min(d_{jet})}{d_p}$  – безразмерный коэффициент эрозии (в случае отсутствия твёрдых частичек в потоке  $C_{d,i} \in [0.5, 0.6]$ , а с твёрдыми частичками в потоке  $C_{d,j} \in [0.6, 0.95]$  из-за эрозии перфорации).

### 14.4 Формула для гидростатического давления $\Delta p_{h,i}$

Гидростатическое давление на каждом интервале рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta p_{h,i}(t, x) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(c(t, s)) \cdot g \cdot \sin(\theta(s)) ds, \quad (14.6)$$

где  $x_i$  – измеренная глубина (MD)  $i$ -ой трещины;

$\rho(c(t, s))$  – плотность смеси, которая зависит от динамически меняющейся концентрации пропанта;

$g$  – ускорение свободного падения;

$\theta(s)$  – угол между скважиной и поверхностью Земли в данной точке.

### 14.5 Формула для падения давления $\Delta p_{fric,i}$ на трение

Падение давления на трение на каждом интервале рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta p_{fric,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \frac{\rho u_{m,i}^2}{R_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\rho(c(t, s)) \cdot f(Re) \cdot \left(Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j\right)^2}{R_i(s) S_i^2(s)} ds, \quad (14.7)$$

где  $f = \frac{\tau}{\rho u_{m,i}^2 / 2}$  – коэффициент трения Фаннинга;

$\rho(c(t, s))$  – плотность смеси, которая зависит от динамически меняющейся концентрации пропанта;

$Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j$   
 $u_{m,i} = \frac{S_i}{S_i}$  – средняя скорость на рассматриваемом участке трубы;

$S_i$  – площадь сечения рассматриваемого участка трубы;

$R_i$  – радиус рассматриваемого участка трубы;

$Re$  – число Рейнольдса.

## 14.6 Итеративная процедура решения с помощью метода Ньютона

Equations (26)-(27) generate  $(n+1) \times (n+1)$  system of nonlinear equations in  $(n+1)$  unknowns, which can be expressed in vector form

$$\boxed{Q^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N, p_0]} \quad (36)$$

and residual vector

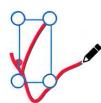
$$F^T = [F_1, F_2, \dots, F_N, F_{N+1}], \quad \min \quad (37)$$

where

$$F_i = \begin{cases} \sigma_{min,i} + p_{net,i} + \Delta p_{perf,i} - \\ \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{fric,j} - p_0, & \text{for } i \leq N \\ Q_0 - \sum_{i=1}^N Q_i, & \text{for } i = N+1 \end{cases}$$

### Iterative procedure

then Jacobian matrix can be defined as



$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_1}{\partial p_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial p_0} \end{bmatrix} \quad (38)$$

so the iterative procedure for estimating the vector  $\bar{Q}$  is that via

$$\bar{Q}^{k+1} = \bar{Q}^k - J^{-1} \bar{F}^k, \quad (39)$$

the convergence condition  $|\bar{Q}^{k+1} - \bar{Q}^k|^2 \leq \tau \sim 10^{-4}$  can be checked. If no, the next iteration in (39) goes until this scheme converges.