

Содержание

Приближённое решение для плоской трещины ГРП, учитывающее трещиностойкость, вязкость жидкости и утечки (Е.В. Донцов)	2
Приближённое решение для радиальной трещины ГРП, учитывающее трещиностойкость, вязкость жидкости и утечки (Е.В. Донцов)	3
Анализ трещины гидроразрыва пласта постоянной высоты (Е.В. Донцов)	4
1 Введение	4
2 Основные уравнения	6
3 Область кончика	8
4 Вершинные (асимптотические) решения	11
5 Полное решение	15
6 Примеры применения	15
7 Резюме	15
8 Список использованной литературы	15

Приближённое решение для плоской трещины ГРП, учитывающее трещиностойкость, вязкость жидкости и утечки
(Е.В. Донцов)

Приближённое решение для радиальной трещины ГРП, учитывающее трещиностойкость, вязкость жидкости и утечки
(Е.В. Донцов)

Анализ трещины гидроразрыва пласта постоянной высоты (Е.В. Донцов, 26 октября 2021)

Аннотация

В данной работе проводится анализ задачи о трещине гидроразрыва пласта постоянной высоты. Предполагается, что трещина распространяется при закачке ньютоновской жидкости, и в модель также включены эффекты трещиностойкости и утечки. В первую очередь представлен анализ области кончика для такой трещины. Исследуются предельные решения и их расположение в двумерном параметрическом пространстве. Кроме того, строится приближенное решение задачи и проверяется его точность во всем параметрическом пространстве. Затем представлен анализ конечной трещины. Получены аналитические выражения для предельных решений. Построено полное численное решение, а также разработана аппроксимация, основанная на решении для области кончика и на глобальном балансе объемов. Численное решение используется для проверки точности аппроксимации, а сама аппроксимация используется для исследования всего параметрического пространства задачи. Это, в свою очередь, позволяет определить зоны применимости предельных решений, которые в дальнейшем можно использовать для количественной оценки того, какие параметры задачи наиболее сильно влияют на динамику трещины.

1 - Введение

Трещины ГРП чаще всего создаются под землей с целью повышения нефтеотдачи и газоотдачи пластов [1]. В настоящее время для моделирования такого явления без особого труда используются сложные численные модели, которые могут учитывать распространение одной или нескольких трещин ГРП, взаимодействие между трещинами, перенос проппанта, тепловые эффекты, химические эффекты, эффекты многофазного потока и т. д. Тем не менее, понимания основных механизмов и поведения трещин гидроразрыва лучше достигать с помощью простых моделей, которые фокусируются на конкретном аспекте проблемы, игнорируя при этом остальные сложности. Это относится к данному исследованию относительно простой геометрии трещины гидроразрыва пласта постоянной высоты.

Существует множество «простых» моделей трещины гидроразрыва пласта. Слово «простой» здесь по существу означает, что математическая формулировка задачи является одномерной. В результате такого математического упрощения можно более детально исследовать задачу и лучше понять структуру решения. Первый пример — задача о полубесконечной трещине гидроразрыва, являющаяся моделью кончика конечной планарной трещины [2, 3, 4]. Предельные аналитические решения задачи были впервые получены в [5] и [6] для случая доминирования вязкости и утечек соответственно. Последнее предельное решение, соответствующее доминированию трещиностойкости, вытекает из классической Механики Линейно-Упругого Разрушения (LEFM) [7]. Общее решение задачи, учитывающее ньютоновскую жидкость, Картерову утечку и трещиностойкость, получено в [3]. Позднее в [8] было получено быстрое приближение для этого решения, которое затем было использовано в качестве условия распространения в планарной модели трещины гидроразрыва [9]. Также стоит упомянуть многочисленные расширения модели, которые учитывают степенные жидкости [10], жидкости Гершеля-Балкли [11], жидкости Карро [12], эффект отстаивания жидкости [13], эффект турбу-

лентного течения [14], эффект когезионной зоны [15], эффект проппанта [16] и эффект утечки, зависящей от давления [17]. Эта модель уже показывает, как можно понять множественные физические эффекты, рассматривая относительно простой сценарий.

Трещины в условиях плоской деформации и радиальные трещины гидроразрыва можно считать «простыми» геометриями, поскольку математическая формулировка для них также является одномерной. В отличие от полубесконечной трещины, для которой существует три предельных решения, конечная трещина имеет четыре предельных случая. Обратите внимание, что это относится только к модели, в которой учитываются эффекты трещиностойкости, вязкости и утечек Картера, т.е. игнорируются эффекты запаздывания жидкости, когезионной зоны, сложной реологии жидкости и т.д. Вышеупомянутые четыре случая определяются конкуренцией между трещиностойкостью трещины и вязкостью флюида, а также запасом флюида внутри трещины или внутри горной формации. Поэтому эти пределы определяются следующим образом: Storage-Toughness (доминирование трещиностойкости при малых утечках), Storage-Viscosity (доминирование вязкости при малых утечках), Leak-off-Toughness (доминирование трещиностойкости при больших утечках) и Leak-off-Viscosity (доминирование вязкости при больших утечках), см. к примеру обзорную статью [18]. Ранние исследования были сосредоточены преимущественно на поиске решений для этих предельных случаев [19, 20, 21, 22]. Первый анализ полной задачи дан в [23] для случая трещины в условиях плоской деформации и в [24] для случая радиальной геометрии. Альтернативный анализ для этих задач был представлен в [25, 26]. Быстрое приближенное решение глобальной задачи строится с использованием полубесконечного решения (или решения для кончика трещины) [8] и глобального баланса объема. Такое быстрое решение позволило просканировать всё параметрическое пространство и построить карту решений, определяющую области применимости предельных решений. Позже аналогичная концепция использовалась для анализа влияния анизотропии и степенной реологии на параметрическое пространство в [27], для исследования влияния когезионной зоны в [15] и для построения сверхбыстрого симулятора ГРП в [28].

Последней, но не менее важной, «простой» геометрией является трещина гидроразрыва постоянной высоты или трещина Перкинса-Керна-Нордгрена (РКН) [29, 30]. Технически в список «простых» случаев можно включить и псевдотрехмерную модель [31, 32, 33]. Но она заметно сложнее в том смысле, что её параметрическое пространство больше (шире), что делает анализ более сложным. Классическая модель РКН не учитывает влияние трещиностойкости, а учитывает только вязкость и утечку. Решения с преобладанием вязкости и утечек можно найти в [1]. Анализ области кончика, опять же при отсутствии трещиностойкости, выполнен в [34]. Лабораторные наблюдения, подтверждающие предсказанное поведение вблизи кончика, подытожены в [35]. Отметим, что для этой геометрии трещины также проводится анализ эффектов турбулентного течения [36, 37]. Во всех приведенных выше исследованиях не рассматривается влияние трещиностойкости на решение. Есть два подхода включения трещиностойкости в модель. Первый подход был предложен в [38], в нём граничное условие на давление на кончике берётся из условия для радиальной трещины с однородным давлением. Позднее это условие было пересмотрено в [39], где авторы предложили несколько изменить его, исходя из энергетических соображений. Второй подход заключается в замене соотношения локальной упругости, используемого в классической модели РКН, более точным нелокальным выражением, которое можно комбинировать со стандартным критерием распространения LEFM [40]. Хотя показано, что второй подход более точен [40], с его помощью сложнее проводить анализ. Поэтому в данном исследовании используется модель с локальной упругостью и граничным условием

конечного давления на кончике трещины.

Как видно из приведенного выше обзора литературы, параметрические пространства для всех «простых» моделей, кроме случая РКН, были тщательно проанализированы для случая, когда модель учитывает одновременное взаимодействие между трещиностойкостью, вязкостью и утечкой. Вероятно, это связано с тем, что процедура учета влияния трещиностойкости в модели РКН была введена сравнительно недавно. Чтобы заполнить пробел, эта работа направлена на исследование параметрического пространства для области кончика трещины РКН, т.е. расширение работы [34] на случай влияния трещиностойкости. Кроме того, более крупной задачей данной работы является тщательное исследование параметрического пространства для конечной трещины и определение всех предельных решений и зон их применимости в параметрическом пространстве. В частности, структура данной работы такова. Раздел 2 описывает основные уравнения для рассматриваемой задачи. Затем в разделе 3 анализируется задача о концевой области и строится параметрическая карта для этой задачи. После этого в разделе 4 представлены вершинные решения для конечной трещины РКН. Параметрическая карта для конечной трещины построена в разделе 5 с использованием быстрого приближенного решения, которое сравнивается с более точным численным решением. Наконец, в разделе 6 представлены примеры применения, а в разделе 7 подведены итоги.

2 - Основные уравнения

Рассмотрим задачу о трещине гидроразрыва постоянной высоты или просто трещине РКН, изображенной на рис. 1(а). Пусть трещина вертикальна и занимает плоскость (x, y) , причем y — вертикальная координата, а x — горизонтальная координата. Пусть H — высота трещины, l — полудлина. Высота H считается постоянной для всей трещины, а длина является функцией времени. Также предполагается, что $H \ll l$, что позволяет упростить основные уравнения до одномерных.

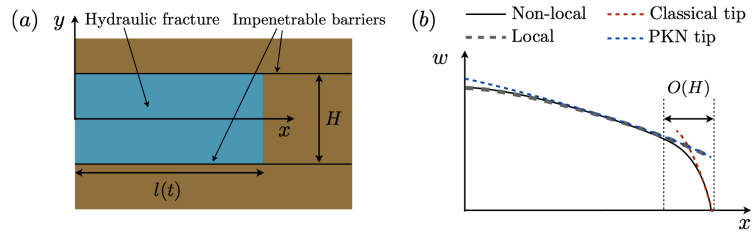


Рис. 1: (а) Схема трещины гидроразрыва постоянной высоты. (б) Зависимость ширины трещины w от координаты x для разных моделей

Различные решения задачи и их асимптоты схематично показаны на рис.1(б). Черная линия указывает на наиболее точное решение, использующее соотношение нелокальной упругости. Она имеет классическую концевую асимптотику, вытекающую из задачи о полубесконечной трещине с плоской деформацией (штриховая красная линия). Пунктирная серая линия указывает на решение, в котором используется локальная упругость вместе с граничным условием давления на конце, чтобы уловить эффект трещиностойкости. Это приводит к прерывистому поведению ширины трещины на кончике. Хотя это граничное условие и не является физическим, оно на самом деле означает поведение на некотором расстоянии от кончика $O(H)$.

Действительно, как показано в [40], решения с локальной и нелокальной упругостью сближаются друг с другом при удалении от кончика трещины, а различия сосредоточены в области $O(H)$ вблизи кончика. Общие характеристики трещины, такие как длина и ширина в стволе скважины, фиксируются точно, так как $H \ll l$. Кроме того, можно также рассмотреть асимптотику кончика для трещины PKN, которая схематично показана пунктирной синей линией. Она справедлива на расстояниях, соизмеримых с длиной трещины l , в отличие от классической асимптоты (штриховая красная линия), которая точна на расстояниях порядка высоты трещины H для рассматриваемой геометрии. Для упрощения анализа в данном исследовании рассматривается модель с локальной эластичностью.

Используя классические допущения модели PKN [29, 30], каждое поперечное сечение вертикальной трещины считается эллиптическим, а давление определяется на основе допущения выполнения условия локальной плоской деформации. Это означает, что

$$w(x, y) = \frac{4}{\pi} \bar{w}(x) \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{H}\right)^2}; \quad p(x) = \frac{2E' \bar{w}(x)}{\pi H}; \quad \bar{w}(x) = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} w(x, y) dy, \quad (1)$$

где $w(x, y)$ – раскрытие трещины, $\bar{w}(x)$ – эффективная ширина, $p(x)$ – давление жидкости, $E' = E/(1 - \nu^2)$ – модуль Юнга плоской деформации. В предположении $H \ll l$, усреднённые по вертикали уравнения для случая ньютоновской жидкости гидроразрыва, принимают вид:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x); \quad \bar{q}_x = -\frac{1}{12H\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-H/2}^{H/2} w^3 dy = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

где μ – вязкость жидкости, \bar{q}_x – средний горизонтальный поток, $C' = 2C_l$ – масштабированный коэффициент утечек Картера [41], $t_0(x)$ обозначает момент времени, в который фронт трещины находился в точке x . Уравнения (1) и (2) можно объединить, чтобы получить уравнение

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad (3)$$

которое является единственным управляющим уравнением модели PKN.

Для моделирования условия бокового распространения, учитывающего трещиностойкость, используется модель из [39], а именно

$$p(l) = \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}} m, \quad (4)$$

где K_{Ic} – трещиностойкость и l – полудлина трещины. Как показано в [40], это условие распространения способно адекватно отразить влияние трещиностойкости на рост поперечного трещины, даже если поведение вблизи кончика менее точное. Уравнение (4) можно переписать с использованием (1) в следующем виде:

$$\bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}. \quad (5)$$

Эта форма условия распространения используется в качестве граничного условия для (3), что

приводит к тому, что вся задача формулируется только в терминах $\bar{w}(x)$ и $l(t)$. Давление, с другой стороны, может быть получено из (1), если это необходимо.

Эволюция длины регулируется балансом объема на кончике, который требует, чтобы

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\bar{q}_x(l)}{\bar{w}(l)} = -\frac{2E'}{3\pi^3\mu H} \frac{\partial \bar{w}^3}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad (6)$$

которое связывает пространственную производную ширины со скоростью роста трещины.

Для полноты глобальный баланс объема может быть получен путем интегрирования (3) по времени и пространству как

$$\int_0^l \left[\bar{w}(x) + 2C' \sqrt{t - t_0(x)} \right] dx = \frac{Q_0 t}{2H}. \quad (7)$$

В приведенном выше выражении первый член означает объем трещины, второй член представляет собой общий объем утечки, а правая часть представляет собой объем закачки.

3 - Область кончика

Сначала рассматривается задача вблизи кончика, которая соответствует полубесконечной трещине PKN, стационарно распространяющейся со скоростью V . Чтобы вывести из (3) соответствующие определяющие уравнения для области кончика, используется стандартный подход, в соответствии с которым вводится новая движущаяся координата $\hat{x} = Vt - x$ (см., например, [3, 4]). В этом случае определяющее дифференциальное уравнение для области кончика принимает вид

$$\frac{E'}{2\pi^3\mu H} \frac{d\bar{w}^4}{d\hat{x}} = V\bar{w} + 2C'\sqrt{V\hat{x}}; \quad \bar{w}(0) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'} \quad (8)$$

Здесь второе уравнение – это просто граничное условие (5).

К сожалению, решить дифференциальное уравнение (8) аналитически не представляется возможным. В то же время можно получить предельные решения. В пределе большой трещиностойкости ширина просто равна граничному условию в (8). Чтобы получить решение для нулевой трещиностойкости и нулевой утечки (с преобладанием вязкости), и трещиностойкость, и утечка должны быть установлены равными нулю в (8). Это приводит к разрешимому дифференциальному уравнению. В пределе большой утечки и отсутствия трещиностойкости член « $V\bar{w}$ » и трещиностойкость должны быть удалены в (8), что снова приводит к разрешимому дифференциальному уравнению. Резюме всех трех предельных (или вершинных) решений:

$$\bar{w}_k = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}; \quad \bar{w}_m = \left(\frac{3\pi^3\mu H V}{2E'} \right)^{1/3} \hat{x}^{1/3}; \quad \bar{w}_{\tilde{m}} = \left(\frac{8\pi^3\mu H C' V^{1/2}}{3E'} \right)^{1/4} \hat{x}^{3/8}, \quad (9)$$

где первое — решение для трещиностойкости, второе — решение для вязкости, а третье — решение для утечек. Эти результаты согласуются с предыдущим анализом в [34, 39].

Также возможно вычислить решения km и $k\tilde{m}$. Действительно, для этих случаев можно

решить дифференциальное уравнение (8), чтобы получить

$$\bar{w}_{km} = (\bar{w}_k^3 + \bar{w}_m^3)^{1/3}; \quad \bar{w}_{k\tilde{m}} = (\bar{w}_k^4 + \bar{w}_{\tilde{m}}^4)^{1/4}. \quad (10)$$

На основании такой формы решения строится следующее приближённое решение:

$$\bar{w}_{m\tilde{m}k} = (\bar{w}_k^p + \bar{w}_m^p + \bar{w}_{\tilde{m}}^p)^{1/p}, \quad p = 3.4, \quad (11)$$

где степень p подобрана так, чтобы минимизировать максимальную ошибку по сравнению с численным решением. Это решение точно фиксирует случаи предельных вершин, а также аппроксимирует поведение в переходных областях. Также возможно построить более точное решение:

$$\bar{w}_{m\tilde{m}k} = \left[w_{km} (\bar{w}_{km}^4 + \bar{w}_{\tilde{m}}^4)^{1/4} + w_{k\tilde{m}} (\bar{w}_{k\tilde{m}}^3 + \bar{w}_m^3)^{1/3} \right] [w_{km} + w_{k\tilde{m}}]^{-1}, \quad (12)$$

что, кроме того, также учитывает краевые решения, описанные выше.

Для проверки правильности предлагаемых приближений и упрощения анализа удобно переформулировать задачу (8) в безразмерном виде, введя следующие параметры:

$$\Omega = \frac{\bar{w}}{\bar{w}_k} = \frac{E' \bar{w}}{(\pi H)^{1/2} K_{Ic}}; \quad \hat{\xi} = \frac{\pi^{3/2} \mu V E'^2 \hat{x}}{2 K_{Ic}^3 H^{1/2}}; \quad \chi = \left(\frac{8 C'^2 K_{Ic}}{\pi^{5/2} \mu H^{1/2} V^2} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

В этом случае уравнение (8) сводится к

$$\frac{d\Omega}{d\hat{\xi}} = \frac{1}{\Omega^2} + \frac{\chi \hat{\xi}^{1/2}}{\Omega^3}; \quad \Omega(0) = 1. \quad (14)$$

При этом асимптотические решения принимают вид

$$\Omega_k = 1; \quad \Omega_m = (3\hat{\xi})^{1/3}; \quad \Omega_{\tilde{m}} = \left(\frac{8\chi}{3} \right)^{1/4} \hat{\xi}^{3/8}, \quad (15)$$

который позволяет переформулировать 2 предложенных приближения к решению (11) и (12).

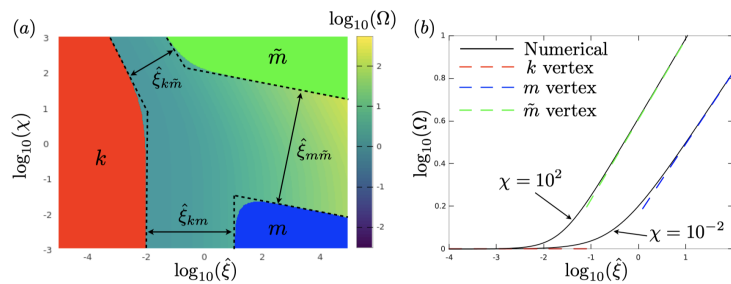


Рис. 2: (а) Параметрическое пространство для задачи моделирования кончика РКН трещины. Цветные области показывают зоны применимости предельных вершинных решений (15) и они также обведены пунктирными чёрными линиями определяемыми выражениями (16). (б) Численное решение зависимости безразмерного раскрытия от безразмерной координаты для двух значений утечки $\chi = 10^{-2}$ и $\chi = 10^2$ (сплошные черные линии). Вершинные решения (15) показаны пунктирными линиями.

На рис.2(а) показано численное решение уравнения (14) (вычисленное с использованием явного интегрирования уравнения (14) методом Рунге-Кутты 4-го порядка) в параметрическом пространстве $(\hat{\xi}, \chi)$. Области применимости асимптотических решений (15) выделены цветными областями. Эти области определяются как зоны, в которых относительная разница между глобальным решением и соответствующим предельным решением не превышает 1%. В частности, красная область соответствует применимости решения трещиностойкости или « k » решения, синяя область представляет область доминирования вязкости или « m » решение, а зеленая зона показывает зону применимости решения при доминировании утечек или « \tilde{m} » решение. Имеется три переходных области, а именно от k к m , от k к \tilde{m} и от m к \tilde{m} . Они оцениваются по следующим параметрам:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{km} &= \hat{\xi}, \quad \hat{\xi}_{km,1} \approx 0.010, \quad \hat{\xi}_{km,2} \approx 11; \\ \hat{\xi}_{k\tilde{m}} &= \hat{\xi}\chi^{2/3}, \quad \hat{\xi}_{k\tilde{m},1} \approx 0.062, \quad \hat{\xi}_{k\tilde{m},2} \approx 4.4; \\ \hat{\xi}_{m\tilde{m}} &= \hat{\xi}\chi^6, \quad \hat{\xi}_{m\tilde{m},1} \approx 1.85 \cdot 10^{-8}, \quad \hat{\xi}_{m\tilde{m},2} \approx 2.1 \cdot 10^{12}.\end{aligned}\tag{16}$$

Эти параметры вместе с соответствующими им минимальным и максимальным значениями количественно определяют границы применимости предельных вершинных решений и показаны штриховыми черными линиями на рис.2(а). Простейший способ определить эти переходные параметры состоит в том, чтобы в масштабе приравнять соответствующие вершинные решения, т.е. $\Omega_k \sim \Omega_{\tilde{m}}$ или $1 \sim \chi^{1/4}\hat{\xi}^{3/8}$, откуда следует, что $\xi_{k\tilde{m}} = \hat{\xi}\chi^{2/3}$.

На рис. 2(b) показаны линейные графики численного решения, рассчитанного для $\chi = 10^{-2}$ и $\chi = 10^2$ в зависимости от $\hat{\xi}$ (черные линии). Штриховыми линиями показаны вершинные решения (15). Наблюдаются постепенные переходы от решений трещиностойкости к решениям по утечкам или вязкости.

Характерным наблюдением является то, что решение начинается с вершины k , затем при некоторых значениях χ проходит через промежуточную асимптоту m , а \tilde{m} – решение в дальней зоне. Это отличается от классического решения для полубесконечной трещины в условиях плоской деформации, для которого дальней поле всегда является решением m , а \tilde{m} является промежуточным. Кроме того, учитывая относительно пологий наклон перехода $m\tilde{m}$ в параметрическом пространстве рис.2(а), на практике переход от m к \tilde{m} может быть затруднен.

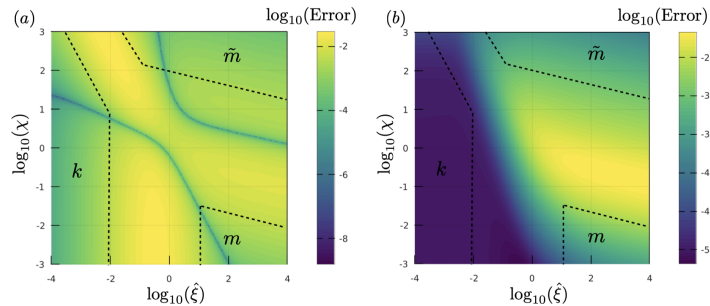


Рис. 3: (а) Относительная ошибка между численным решением и аппроксимациями (11) (рис. (а)) и (12) (рис. (b))

Для количественной оценки точности аппроксимаций (11) и (12) на рис.3 представлена от-

носительная ошибка между приближенным и численным решениями. Пространство (а) дает результат для простого решения (11), а пространство (б) соответствует более полному приближению (12). Максимальная ошибка на всём параметрическом пространстве для первого случая составляет 3%, а для второго, более точного случая, чуть меньше 0.7%. Распределение ошибки также отличается. Для более простого случая (11) ошибка распределяется примерно равномерно в пределах переходных областей и затухает к пределам вершин. Во втором случае (12) вершина k и переходы из этой вершины в m и \tilde{m} оказываются заметно точнее, а ошибка возникает в основном в переходе $m\tilde{m}$. Это неудивительно, поскольку для построения приближения (12) используются точные решения для переходов km и $k\tilde{m}$.

4 - Вершинные (асимптотические) решения

Аналогично задачам о трещинах при условии плоской деформации и радиальных трещинах для геометрии РКН существует четыре предельных решения. Они определяются конкуренцией между трещиностойкостью и вязкостью, а также накоплением жидкости в трещине и пористой среде. В частности, определим Storage-Viscosity или предел как случай, соответствующий преобладанию вязкости и отсутствию утечек, Storage-Toughness или предел K как случай доминирования трещиностойкости и отсутствия утечек, Leak-off-Viscosity или \tilde{M} предел в случае преобладания вязкости и высокой степени утечки, и, наконец, Leak-off-Toughness или предел \tilde{K} в случае преобладания вязкости и высокой степени утечки, см. к примеру обзорную статью [18].

Storage-Viscosity.

Для случая Storage-Viscosity основное уравнение (3), граничное условие (5) и баланс объёма (7) сводятся к

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} = \frac{Q_0}{H} \delta(x); \quad \int_0^l \bar{w}(x) dx = \frac{Q_0 t}{2H}; \quad \bar{w}(l) = 0. \quad (17)$$

Явным образом включив в глобальное решение поведение вблизи кончика с преобладанием вязкости (9) и ища решение в форме

$$\bar{w} = \left(\frac{3\pi^3 \mu H}{2E'} \right)^{1/3} (i)^{1/3} l^{1/3} (1 - \xi)^{1/3} f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{l(t)}, \quad (18)$$

баланс объёма в (17) сводится к

$$\left(\frac{3\pi^3 \mu H}{2E'} \right)^{1/3} (i)^{1/3} l^{4/3} \int_0^1 (1 - \xi)^{1/3} f(\xi) d\xi = \frac{Q_0 t}{2H}. \quad (19)$$

Уравновешивая степени t и другие размерные параметры в приведенном выше уравнении,

решение для длины можно записать как

$$l = c \left(\frac{5E'Q_0^3}{48\pi^3\mu H^4} \right)^{1/5} t^{4/5}, \quad (20)$$

где c – числовая константа, и уравнение баланса объёма принимает вид:

$$c^{5/3} \int_0^1 (1-\xi)^{1/3} f(\xi) d\xi = 1. \quad (21)$$

С приведенным выше определением ширины (18) и длины (20) уравнение Рейнольдса в (17) преобразуется в

$$\frac{1}{4} (1-\xi)^{1/3} f(\xi) - \xi \frac{d(1-\xi)^{1/3} f(\xi)}{d\xi} - \frac{3}{4} \frac{d^2(1-\xi)^{4/3} (f(\xi))^4}{d\xi^2} = 0 \quad (22)$$

с граничными условиями

$$-c^{5/3} \frac{3}{5} \frac{d(1-\xi)^{4/3} f^4}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 1, \quad f|_{\xi=1} = 1. \quad (23)$$

Вместо решения дифференциального уравнения (22) решение ищется в виде $f = 1 + a(1-\xi)$, т.е. разлагая его вблизи кончика. Подставляя этот результат в (22) и уравнивая степени $(1-\xi)$, предполагая, что последний является малым параметром, получается $a = -1/96$. Это показывает, что линейная поправка к решению на кончике (т.е. $f = 1$) составляет порядка 1% даже вблизи источника. Поэтому представляется достаточным рассмотреть только линейный член и записать приближенное решение для f в виде

$$f(\xi) \approx 1 - \frac{1-\xi}{96}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (21), числовой коэффициент c принимает вид

$$c = \left(\frac{224}{167} \right)^{3/5} \approx 1.193. \quad (25)$$

Подводя итог, приближенное вершинное решение M вычисляется с использованием (18), (20), (24) и (25) как

$$\begin{aligned} \bar{w}_M &= 1.76 \left(\frac{\mu Q_0^2}{E'H} \right)^{1/5} t^{1/5} (1-\xi)^{1/3} \left(1 - \frac{1-\xi}{96} \right), \\ p_M &= 1.12 \left(\frac{\mu E'^4 Q_0^2}{H^6} \right)^{1/5} t^{1/5} (1-\xi)^{1/3} \left(1 - \frac{1-\xi}{96} \right), \\ l_M &= 0.38 \left(\frac{E'Q_0^3}{\mu H^4} \right)^{1/5} t^{4/5}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь уравнение локальной упругости (1) используется для вычисления давления. Заметим, что это приближенное решение основано главным образом на поведении вблизи кончика, а условие на входе (23) не выполняется. Поэтому вблизи входа могут быть некоторые расхождения с «истинным» решением. Эти выражения совпадают с приведенными в [1] с точностью до нескольких процентов. Это приемлемое отличие, поскольку для вывода выражений, представленных в [1], также используются аппроксимации.

Leak-off-Viscosity.

Для случая Leak-off-Viscosity трещиностойкость и объем трещины пренебрежимо малы. В результате определяющее уравнение (3), граничное условие (5) и глобальный баланс объема (7) сводятся к

$$-\frac{E'}{2\pi^3\mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad 2C' \int_0^l \sqrt{t-t_0(x)} dx = \frac{Q_0 t}{2H}, \quad \bar{w}(l) = 0. \quad (27)$$

Приняв зависимость длины от времени как $l \propto t^\alpha$, время воздействия, необходимое для расчёта утечки становится равным $t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$. В этом случае глобальный баланс объема сводится к

$$2C' t^{1/2} l \int_0^1 \sqrt{1-\xi^{1/\alpha}} d\xi = \frac{Q_0 t}{2H}. \quad (28)$$

Уравновешивая степени t в приведенном выше выражении, получаем $\alpha = 1/2$, а длина равна

$$l = \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}. \quad (29)$$

Зная выражение для $t_0(x)$, уравнение Рейнольдса в (27) сводится к виду

$$-\frac{E'}{2\pi^3\mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t}\sqrt{1-(x/l)^2}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad \bar{w}(l) = 0, \quad (30)$$

которое можно решить и получить

$$\bar{w} = \left(\frac{2\pi\mu Q_0^2}{E'C'H} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi); \quad g(\xi) = \left[\xi \left(\sin^{-1}(\xi) - \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{1-\xi^2} \right]^{1/4}; \quad \xi = \frac{x}{l}. \quad (31)$$

Наконец решение для вершины \tilde{M} можно обобщить как

$$\begin{aligned} \bar{w}_{\tilde{M}} &= \left(\frac{2\pi\mu Q_0^2}{E'C'H} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi), \\ p_{\tilde{M}} &= \left(\frac{32\mu E'^3 Q_0^2}{\pi^3 C' H^5} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi), \\ l_{\tilde{M}} &= \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H} \end{aligned} \quad (32)$$

где функция $g(\xi)$ определена в (31). Это решение в точности совпадает с решением [1].

Отметим, что функция $g(\xi)$, определённая в (31), имеет следующую асимптотику:

$$g(\xi)|_{\xi \rightarrow 1} = \left(\frac{8}{9}\right)^{1/8} (1 - \xi)^{3/8}, \quad g(0) = 1. \quad (33)$$

Учитывая, что $(8/9)^{1/8} \approx 0.985$, т.е. близка к единице, функция g может быть аппроксимирована через её асимптотическое поведение как

$$g(\xi) \approx \left(\frac{8}{9}\right)^{1/8} (1 - \xi)^{3/8} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{9}{8}\right)^{1/8} \right) (1 - \xi) \right]. \quad (34)$$

Эта форма решения для ширины трещины очень похожа на решение Storage-Viscosity (26). Общим также является то, что множитель перед «поправочным членом» $(1 - \xi)$ относительно мал, порядка 1%.

Storage-Toughness.

В пределе отсутствия вязкости и отсутствия утечек весь закачиваемый объем остается внутри трещины и отсутствует градиент давления вдоль трещины. Вследствие постоянного давления и локальной упругости ширина трещины в этом пределе постоянна. Комбинация граничного условия (5) и баланса объемов (7) приводит к решению в виде

$$\begin{aligned} \bar{w}_K &= \frac{K_{Ic} \sqrt{\pi H}}{E'}, \\ p_K &= \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}}, \\ l_K &= \frac{E' Q_0 t}{\sqrt{4\pi} K_{Ic} H^{3/2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Leak-off-Toughness.

В пределе доминирования трещиностойкости ширина и давление постоянны вдоль трещины и определяются исключительно граничным условием на кончике (5), как и в предыдущем случае. Разница возникает из-за баланса объема, в котором нагнетаемая жидкость теперь уравнивается утечкой, а именно

$$\int_0^l 2C' \sqrt{t - t_0(x)} dx = \frac{Q_0 t}{2H}. \quad (36)$$

Аналогично случаю Leak-off-Viscosity, приняв зависимость длины от времени как $l \propto t^\alpha$, получим $t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$, и в этом случае приведенный выше интеграл сводится к

$$2C' t^{1/2} l \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^{1/\alpha}} d\xi = \frac{Q_0 t}{2H}. \quad (37)$$

Уравниваем степени t и становится ясно, что $\alpha = 1/2$. В результате приведенное

выше уравнение позволяет найти l , что в сочетании с выражениями для ширины и давления, вытекающими из граничного условия, дает следующий результат

$$\begin{aligned}\bar{w}_{\tilde{K}} &= \frac{K_{Ic}\sqrt{\pi H}}{E'}, \\ p_{\tilde{K}} &= \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}}, \\ l_{\tilde{K}} &= \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}.\end{aligned}\tag{38}$$

Интересно отметить, что разница этого результата с предыдущим решением Storage-Toughness заключается только в длине трещины, в то время как ширина и давление точно такие же. С другой стороны, длина такая же, как и для предела Leak-off-Viscosity.

5 - Полное решение

Этот раздел направлен на построение и анализ полного решения модели трещины PKN, которое включает эффекты трещиностойкости, вязкости и утечки. Построены два типа решений: полуаналитическое быстрое приближенное решение и полностью численное решение. Первое позволяет быстро вычислить решение и исследовать всё параметрическое пространство, а второе позволяет проверить точность аппроксимации.

6 - Примеры применения

7 - Резюме

8 - Список использованной литературы