

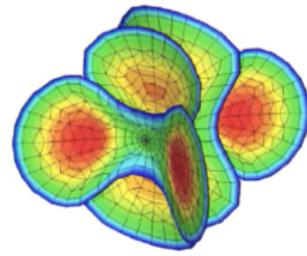
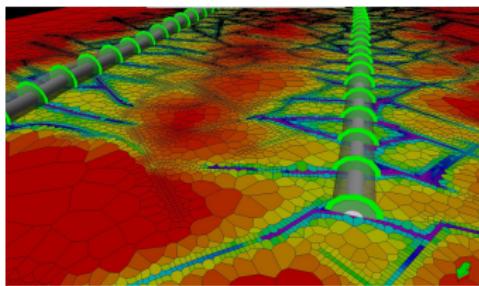
# Моделирование перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва пласта

Выполнил студент: А. А. Муравцев  
Научный руководитель: С. А. Калинин  
Консультант: И. Ш. Базыров

18 мая 2023 г.

# Проблематика и актуальность работы

- ▶ при эксплуатации месторождения во время перевода скважин с проведённым многостадийным гидроразрывом пласта в нагнетание (с целью поддержания пластового давления) практически невозможно избежать роста нескольких трещин автоГРП
- ▶ важно научиться моделировать одновременный рост нескольких трещин автоГРП и перераспределение потоков между ними, чтобы не допускать снижение эффективности эксплуатации месторождения вследствие прорыва трещин автоГРП к добывающим скважинам



# Цель и задачи работы

## Цель:

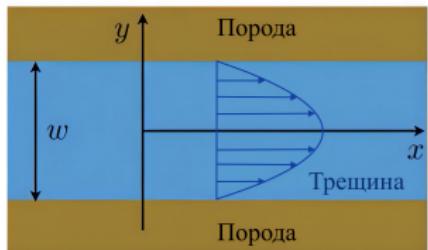
- ▶ построить модель совместного роста нескольких трещин автоГРП с учётом перераспределения потоков между ними

## Задачи:

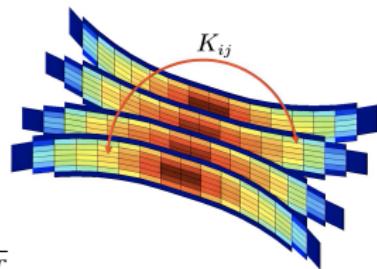
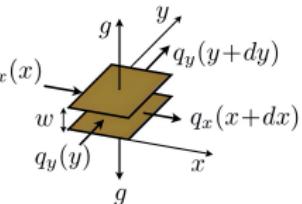
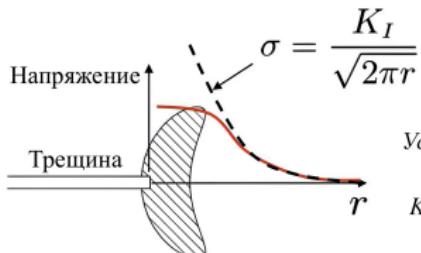
- ▶ провести обзор имеющихся моделей роста трещины гидроразрыва пласта и выбрать наиболее подходящую модель для роста трещины автоГРП
- ▶ построить физико-математическую модель роста нескольких трещин автоГРП
- ▶ реализовать численный алгоритм решения на Python
- ▶ построить графики зависимостей полудлины каждой из трещин автоГРП и расходов на каждой из трещин от времени
- ▶ построить график зависимости забойного давления от времени

# Основные компоненты полной модели трещины ГРП

- 1) закон сохранения жидкости (доминирование или отсутствие утечек);
- 2) уравнение течения жидкости в трещине (в зависимости от реологии жидкости);
- 3) уравнение упругости для горной породы;
- 4) условие распространения трещины;
- 5) транспорт проппанта



$$w = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \frac{K_I (1 - \nu^2)}{E} \sqrt{r}$$



$K_I$  — коэффициент интенсивности напряжений (КИН)

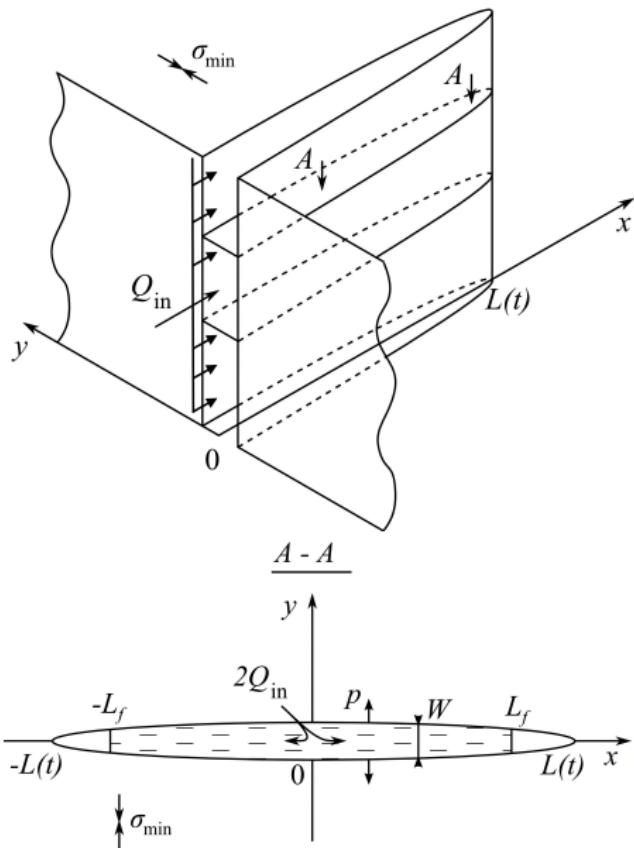
Условие распространения:  $K_I = K_{lc}$   
 $K_{lc}$  — трещиностойкость породы

## Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-дeКлерка (модель плоской трещины)

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ p(x, t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-L(t)}^{L(t)} \frac{w(s)ds}{(x - s)^2}, \\ \lim_{x \rightarrow L} \frac{w}{(L - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases}$$

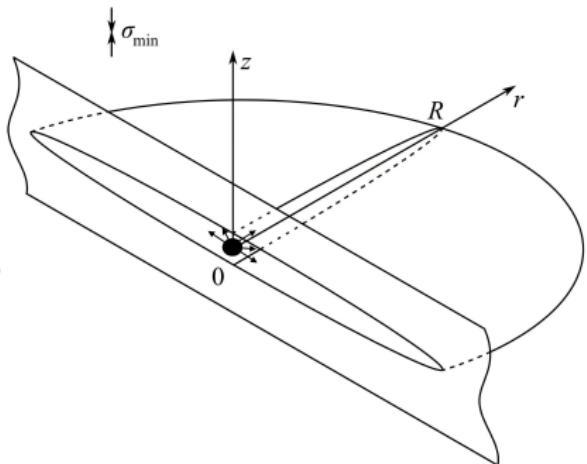
где  $C' = 2C_l$ ;  $\mu' = 12\mu$ ;  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ;

$$K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}.$$



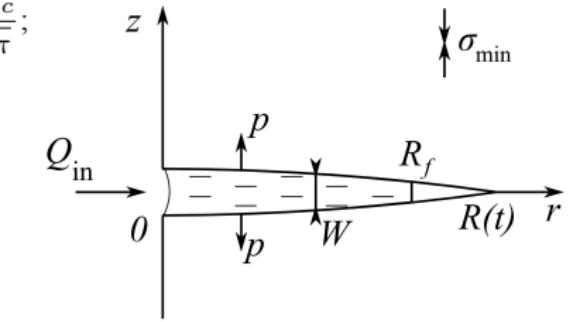
## Модель радиальной трещины

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq) + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} = Q_0 \delta(r), \\ q = - \frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_n}{\partial r}, \\ p_n(r, t) = - \frac{E'}{2\pi R} \int_0^{R(t)} M\left(\frac{r}{R}, \frac{r'}{R}\right) \frac{\partial w(r', t)}{\partial r'} dr', \\ \lim_{r \rightarrow R} \frac{w}{(R - r)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{array} \right. \quad (1)$$



$$\text{где } C' = 2C_l; \quad \mu' = 12\mu; \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}};$$

$$M(\rho, s) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} K\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right) + \frac{\rho}{s^2 - \rho^2} E\left(\frac{s^2}{\rho^2}\right) \\ \frac{s}{s^2 - \rho^2} E\left(\frac{\rho^2}{s^2}\right) \end{cases}$$



E.V. Dontsov. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *R. Soc. Open Sci.*, 3:160737, 2016

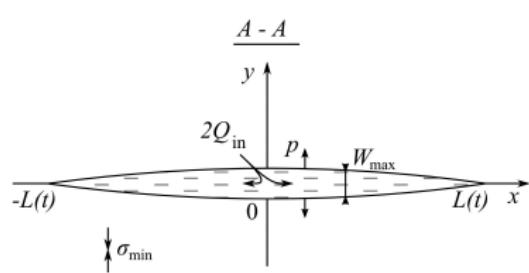
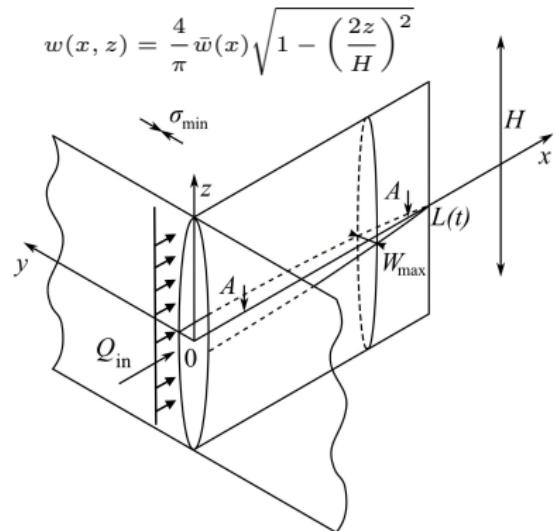
# Модель Перкинса-Керна-Нордгрена (модель PKN)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \\ \bar{q}_x = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p_n}{\partial x}, \\ p_n(x, t) = \frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-L(t)}^{L(t)} \bar{w}(x', t) \frac{dG(2(x' - x)/H)}{dx'}, \\ \lim_{x \rightarrow L} \frac{w}{(L - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{array} \right.$$

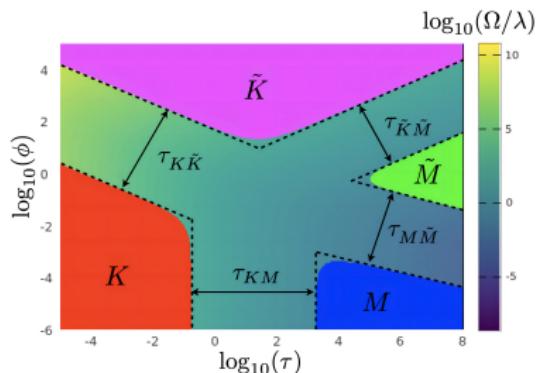
где  $C' = 2C_l$ ;  $\mu' = 12\mu$ ;  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ;  $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$ ;

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} w(x, z) dz$$

$$G(s) = \frac{\sqrt{1+s^2}}{s} E\left(\frac{1}{1+s^2}\right)$$



# Параметрическая карта решения модели PKN



В данной работе предполагается, что трещины автоГРП распространяются в режиме больших утечек и доминирования трещиностойкости (пренебрегаем вязкостью). В этом режиме решение для среднего раскрытия:

$$\bar{w}_{\tilde{K}} = \frac{K_{Ic}\sqrt{\pi H}}{E'}$$

$$\Omega = \frac{\bar{w}}{w_*} \quad ; \quad \lambda = \frac{l}{l_*} \quad ; \quad \tau = \frac{t}{t_*} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{l(t)}$$

$$w_* = \frac{(\pi H)^{1/2} K_{Ic}}{E'} \quad ; \quad l_* = \frac{H^2 K_{Ic}^4}{2\pi E'^3 \mu Q_0}$$

$$t_* = \frac{H^{7/2} K_{Ic}^5}{2\pi^{1/2} E'^4 \mu Q_0^2} \quad ; \quad \phi = \left( \frac{H^5 K_{Ic}^6 C'^4}{4\pi^3 E'^4 \mu^2 Q_0^4} \right)^{1/4}$$

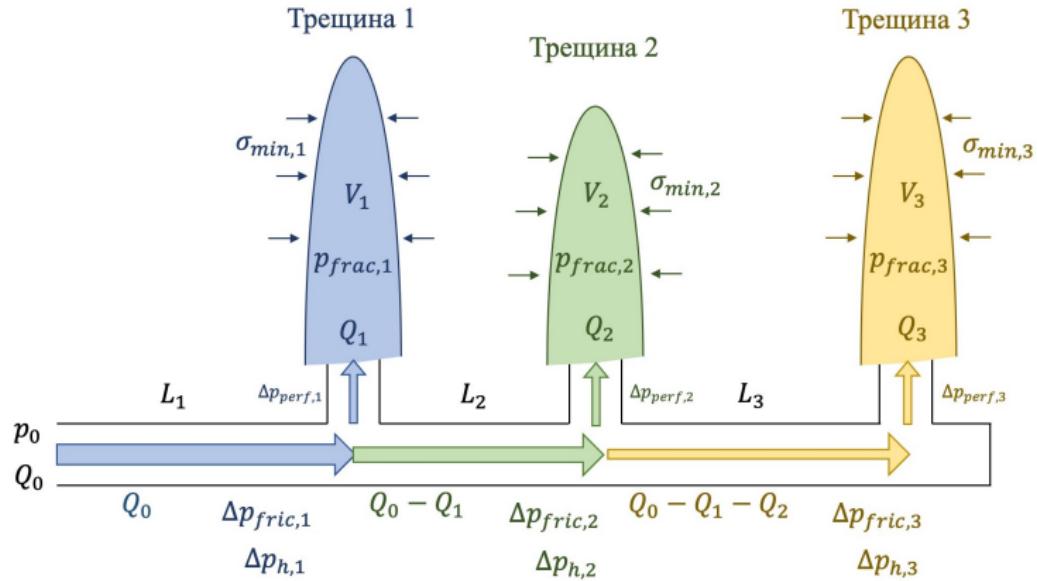
**$K$ -режим** = доминирование трещиностойкости и отсутствие утечек (пренебрегаем вязкостью)

**$\tilde{K}$ -режим** = доминирование трещиностойкости и большие утечки (пренебрегаем вязкостью)

**$M$ -режим** = доминирование вязкости и отсутствие утечек (пренебрегаем трещиностойкостью)

**$\tilde{M}$ -режим** = доминирование вязкости и большие утечки (пренебрегаем трещиностойкостью)

## Схема перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва и правила Кирхгофа



$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i$$

$$p_0 = \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j}$$

# Чистое давление в трещинах РКН

$$p_{\text{net},i}(Q_i) = a_i Q_i^{\frac{n}{2n+3}} V_i^{\frac{1}{2n+3}},$$

где  $a_i = \left( \frac{(n+3)(2n+1)^n \cdot K \cdot (E'_i)^{2n+2}}{\pi 2^{2n} n^n \phi^n h_i^{3n+3}} \right)^{\frac{1}{2n+3}}$  – параметр жёсткости,

$Q_i$  и  $V_i$  – расход на  $i$ -ой трещине и объём  $i$ -ой трещины;

$K$  и  $n$  – реологические параметры степенной жидкости;

$E'_i$  – модуль плоской деформации породы вблизи  $i$ -ой трещины;

$h_i = H$  – мощность продуктивной зоны.

Объём  $i$ -ой трещины:

$$V_i = 2x_{f,i}(t) \cdot H \cdot \bar{w}_{\tilde{K}} = \frac{2x_{f,i}(t) \cdot \sqrt{\pi} K_{Ic} \cdot H^{3/2}}{E'_i},$$

где  $x_{f,i}$  – полудлина  $i$ -ой трещины

# Падение давления на перфорациях

$$\Delta p_{\text{perf},i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|$$

где  $\rho_s$  – средняя плотность смеси;

$n_{p,i}$ ,  $d_{p,i}$  – количество и диаметр перфораций;

$C_{d,i} = \frac{\min(d_{jet})}{d_p}$  – безразмерный коэффициент эрозии (в случае отсутствия твёрдых частичек в потоке  $C_{d,i} \in [0.5, 0.6]$ , а с твёрдыми частичками в потоке  $C_{d,j} \in [0.6, 0.95]$  из-за эрозии перфорации).

## Падение давления на трение

$$\Delta p_{\text{fric},i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \frac{\rho u_{m,i}^2}{R_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\rho(c(t,s)) \cdot f(Re) \cdot \left(Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j\right)^2}{R_i(s) S_i^2(s)} ds$$

где  $f = \frac{\tau}{\rho u_{m,i}^2 / 2}$  – коэффициент трения Фаннинга;

$\rho(c(t,s))$  – плотность смеси, которая зависит от динамически меняющейся концентрации проппанта (в рассматриваемой задаче постоянна, так как нет проппанта);

$$u_{m,i} = \frac{Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j}{S_i} \quad \text{– средняя скорость на рассматриваемом участке трубы;}$$

$S_i$  – площадь сечения рассматриваемого участка трубы;

$R_i$  – радиус рассматриваемого участка трубы;

$Re$  – число Рейнольдса.

# Запись правил Кирхгофа в векторной форме

Вектор неизвестных:

$$Q^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N, p_0]$$

Вектор невязок:

$$[F_1, F_2, \dots, F_N, F_{N+1}] ,$$

где

$$F_i = \begin{cases} \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j} - p_0 \\ \quad (\text{при } i \leq N) \\ Q_0 - \sum_{j=1}^N Q_j \quad (\text{при } i = N+1) \end{cases}$$

# Итеративная процедура решения

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_1}{\partial p_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial p_0} \end{bmatrix}$$

Выражение:

$$\overline{Q}^{k+1} = \overline{Q}^k - J^{-1} \overline{F}^k$$

Начальное приближение:  $Q_i = Q_0/N$  и  $p_0 = \sigma_i$  при  $i \in [1, N]$

Условие остановки:  $\left| \overline{Q}^{k+1} - \overline{Q}^k \right|^2 \leq 10^{-4}$

# Формула Кёнинга

Зависимость полудлины трещины автоГРП от расхода жидкости, репрессии на пласт и фильтрационно-ёмкостных свойств пласта:

$$x_f = \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)},$$

где  $\kappa = \frac{k_e}{\varphi_e \mu c_t}$  – пьезопроводность пласта;

$Q$  – расход нагнетаемой в рассматриваемую трещину жидкости;  
 $\mu$  – вязкость жидкости;  
 $t$  – время закачки;  $k_e$  и  $\varphi_e$  – проницаемость и пористость пласта соответственно;  $c_t$  – общая сжимаемость;  $h$  – эффективная толщина (мощность) пласта;  $\Delta p = p_f - p_e$  – разница между средним давлением в трещине и пластовым давлением.

# Приращение полудлины трещины

Полная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial x_f}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial x_f}{\partial p_f} \frac{dp_f}{dt},$$

где

$$\frac{\partial x_f}{\partial t} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} \quad ; \quad \frac{\partial x_f}{\partial Q} = \frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)};$$

$$\frac{\partial x_f}{\partial p_f} = -\frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2}$$

# Приращение полудлины трещины

Полная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} + \frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \frac{dQ}{dt} - \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} \frac{dp_f}{dt}$$

Приращение полудлины трещины на каждом шаге по времени:

$$dx_f = \frac{dx_f}{dt} dt$$

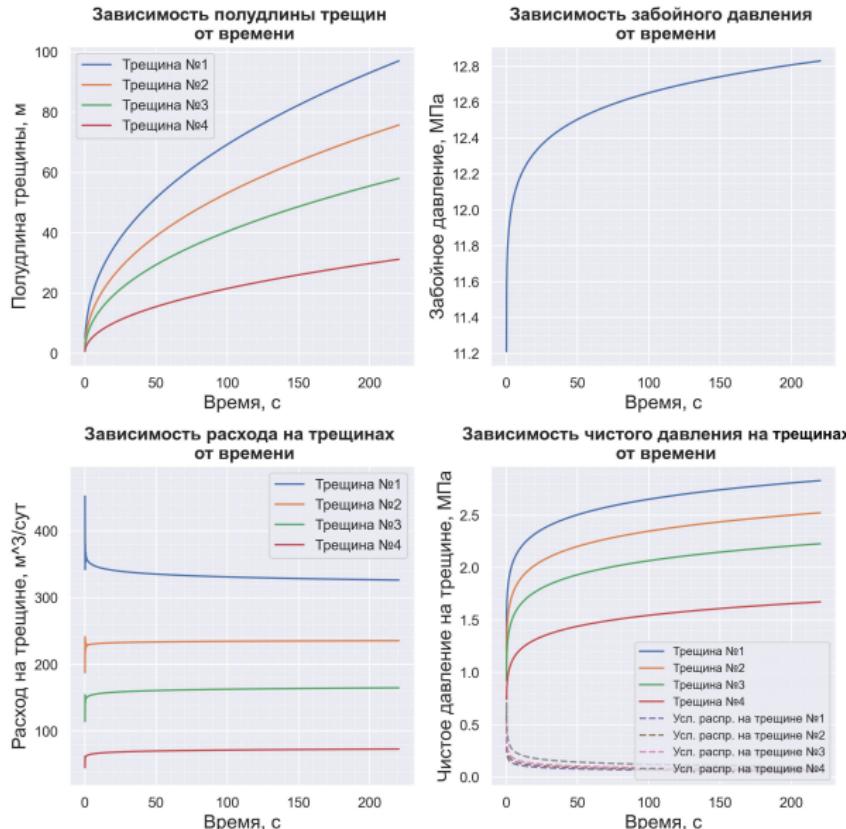
$$dx_f = \underbrace{\frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} dt}_{\text{за счёт изменения времени}} + \underbrace{\frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} dQ}_{\text{за счёт изменения расхода на трещине}} - \underbrace{\frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} dp_f}_{\text{за счёт изменения давления в трещине}}$$

## Выбранные значения входных параметров

Расход на забое $Q_0$ , м <sup>3</sup> /сут	800	Мощность пласта*, м	2
Вязкость воды $\mu$ , Па·с	$10^{-3}$	Количество перфораций* $n_p$	32
Геометрический параметр трещины $\phi$	0.3	Диаметр перфораций* $d_p$ , м	0.02
Плотность воды $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1000	Безразмерный коэффициент эрозии* $C_d$	0.7
Проницаемость пласта $k_e$ , мДарси	1	Радиус участков трубы* $R$ , м	0.08
Пористость пласта $\varphi_e$	0.2	Длина участков трубы* $L$ , м	100
Общая сжимаемость $c_t$ , Па <sup>-1</sup>	$2.2 \cdot 10^{-9}$	Давление смыкания* $\sigma_{\min}$ , МПа	10
Пластовое давление $p_e$ , МПа	9	Трещиностойкость породы* $K_{Ic}$ , Па·м <sup>1/2</sup>	$10^6$
Модуль плоской деформации породы* $E'$ , МПа	$10^4$	Количество трещин	4

\* – для всех трещин

# Результат совместного использования формулы Кёнинга с решателем уравнений Кирхгофа



Трещина 1 рассчитана с выбранными значениями входных параметров задачи.

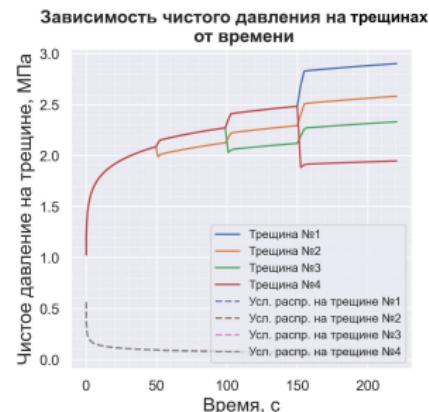
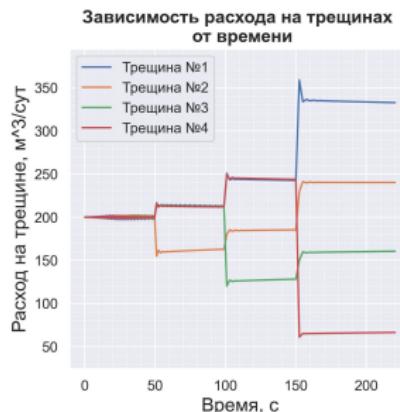
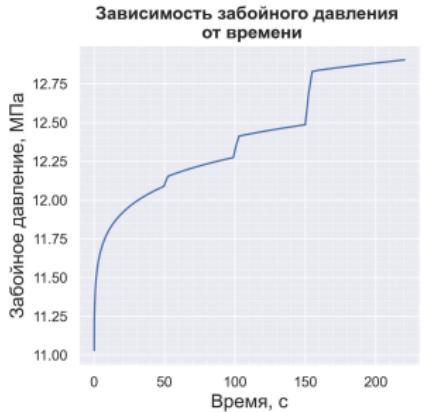
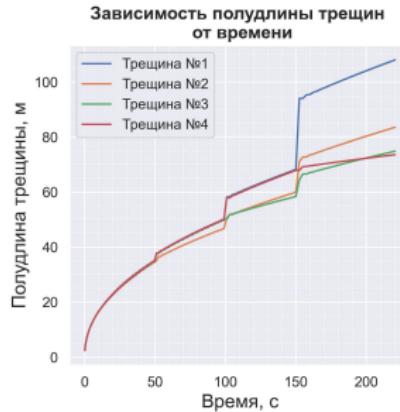
На остальных трещинах ухудшены параметры перфораций.

$$n_{p,2} = 2; \quad d_{p,2} = 0.01 \text{ м}$$

$$n_{p,3} = 1; \quad d_{p,3} = 0.01 \text{ м}$$

$$n_{p,4} = 32; \quad d_{p,4} = 0.001 \text{ м}$$

# Влияние резкого ухудшения качества перфораций на рост трещин



Первые 50 секунд расчёт всех трещин проводился с выбранными значениями параметров задачи.

При  $t = 50$  с ухудшено качество перфораций на второй трещине:

$$n_{p,2} = 2; \quad d_{p,2} = 0.01 \text{ м.}$$

При  $t = 100$  с ухудшено качество перфораций на третьей трещине:

$$n_{p,3} = 1; \quad d_{p,3} = 0.01 \text{ м.}$$

При  $t = 150$  с ухудшено качество перфораций на четвёртой трещине:

$$n_{p,4} = 32; \quad d_{p,4} = 0.001 \text{ м.}$$

# Выводы

- ▶ Проведён обзор моделей трещины гидроразрыва пласта
- ▶ Реализован численный алгоритм расчёта потоков на каждой из трещин по правилам Кирхгофа (при любом количестве трещин)
- ▶ Реализован алгоритм расчёта приращения полудлины трещины на каждом шаге по времени с учётом изменяющихся расходов и давления в трещинах (при любом количестве трещин)
- ▶ Сделан вывод, что внезапное ухудшение качества перфораций на одной из трещин может привести к неконтролируемому росту соседних трещин при фиксированном расходе на забое

В дальнейшем необходимо дополнить построенную модель: учесть эффекты пороупругости, когда большие утечки из трещин влияют на упругое состояние породы и тем самым влияют на соседние трещины. В этом случае может происходить эффект закрытия трещин автоГРП.