

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-Механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

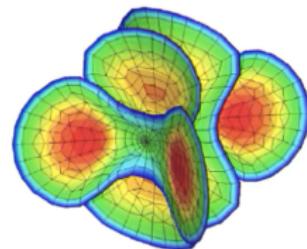
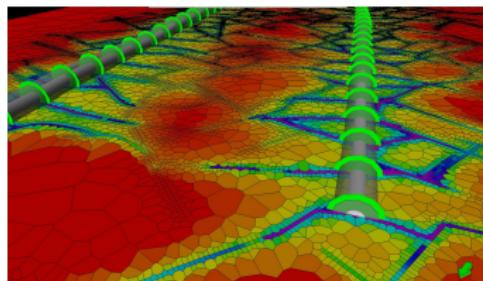
## Моделирование перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва пласта

Выполнил студент: А. А. Муравцев  
Научный руководитель: С. А. Калинин  
Консультант: И. Ш. Базыров

19 июня 2023 г.

# Проблематика и актуальность работы

- ▶ при эксплуатации месторождения во время перевода скважин с проведённым многостадийным гидроразрывом пласта в нагнетание (с целью поддержания пластового давления) практически невозможно избежать роста нескольких трещин автоГРП
- ▶ важно научиться моделировать одновременный рост нескольких трещин автоГРП и перераспределение потоков между ними, чтобы не допускать снижения эффективности эксплуатации месторождения вследствие прорыва трещин автоГРП к добывающим скважинам



# Цель и задачи работы

## Цель:

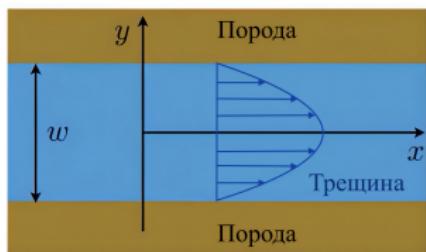
- ▶ построить модель совместного роста нескольких трещин автоГРП с учётом перераспределения потоков между ними

## Задачи:

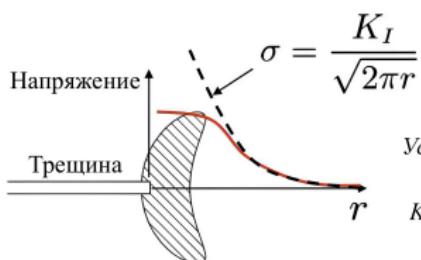
- ▶ провести обзор имеющихся моделей роста трещины гидроразрыва пласта и выбрать наиболее подходящую модель для роста трещины автоГРП
- ▶ построить физико-математическую модель роста нескольких трещин автоГРП
- ▶ реализовать численный алгоритм решения на Python
- ▶ построить графики зависимостей полудлины каждой из трещин автоГРП и расходов на каждой из трещин от времени
- ▶ построить график зависимости забойного давления от времени

# Основные компоненты полной модели трещины ГРП

- 1) закон сохранения жидкости (доминирование или отсутствие утечек);
- 2) уравнение течения жидкости в трещине (в зависимости от реологии жидкости);
- 3) уравнение упругости для горной породы;
- 4) условие распространения трещины;
- 5) транспорт проппанта



$$w = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \frac{K_I (1 - \nu^2)}{E} \sqrt{r}$$



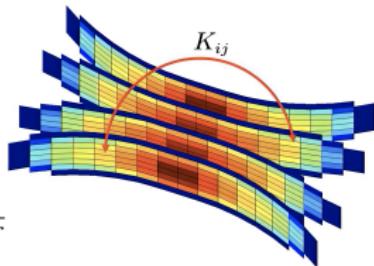
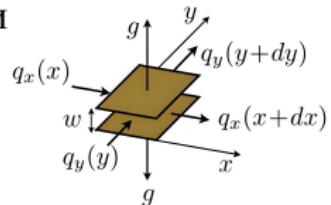
$K_I$  — коэффициент интенсивности напряжений (КИН)

Условие распространения:  $K_I = K_{Ic}$

$K_{Ic}$  — трещиностойкость породы

A.V. Valov, A.N. Baykin, E.V. Dontsov. Modeling geometry of planar hydraulic fractures using the Planar 3D ILSA approach

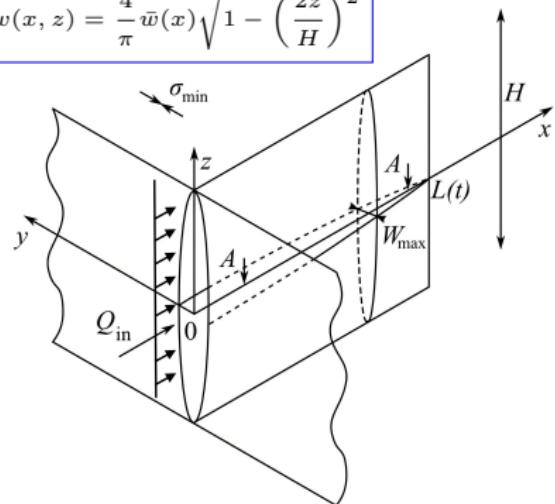
J.R. Rice. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. Fracture: an advanced treatise, vol. II, pp. 191-311, 1968



# Модель Перкинса-Керна-Нордгрена (модель PKN)

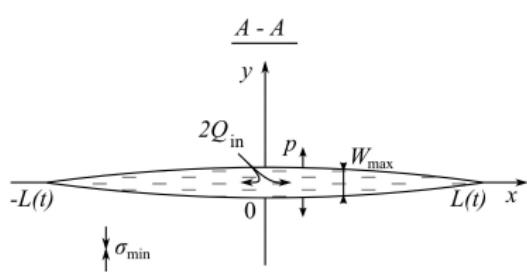
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \\ \bar{q}_x = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p_n}{\partial x}, \\ p_n(x, t) = \frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-L(t)}^{L(t)} \bar{w}(x', t) \frac{dG(2(x' - x)/H)}{dx'} dx', \\ \lim_{x \rightarrow L} \frac{w}{(L - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{array} \right.$$

$$w(x, z) = \frac{4}{\pi} \bar{w}(x) \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{H}\right)^2}$$



где  $C' = 2C_l$ ;  $\mu' = 12\mu$ ;  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ;  $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$ ;

$$G(s) = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{s} E\left(\frac{1}{1 + s^2}\right); E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$



# Формулы Кёнига

В случае одномерных утечек Картера	В случае двумерных радиальных утечек жидкости из трещины в пласт
$x_f = \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)}$	$x_f = 3 \exp\left(-\frac{2\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q\mu}\right) \sqrt{\kappa t}$

где  $\kappa = \frac{k_e}{\varphi_e \mu c_t}$  – пьезопроводность пласта;

$Q$  – расход нагнетаемой в рассматриваемую трещину жидкости;  
 $\mu$  – вязкость жидкости;  $t$  – время закачки;

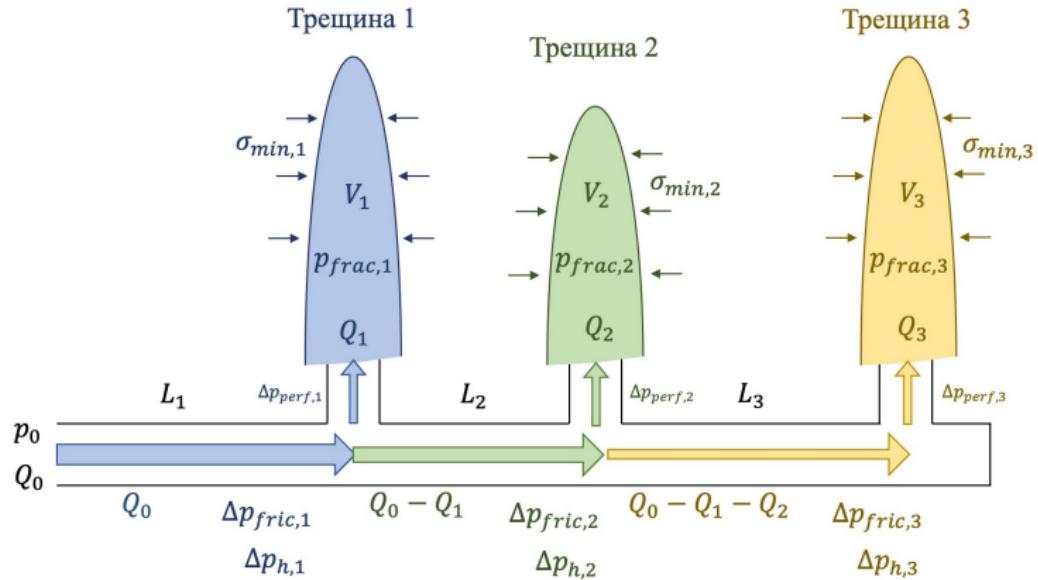
$k_e$  и  $\varphi_e$  – проницаемость и пористость пласта соответственно;

$c_t$  – общая сжимаемость;  $h$  – эффективная толщина (мощность) пласта;

$\Delta p = p_f - p_e$  – разница между средним давлением в трещине и пластовым давлением.

E.J.L. Koning. Fractured water-injection wells. Analytical modelling of fracture propagation. SPE 14684, 1985

# Схема перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва и правила Кирхгофа



$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i$$

$$p_0 = \underbrace{\sigma_{min,i} + p_{net,i}}_{p_{frac,i}} + \Delta p_{perf,i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{fric,j}$$

## Замыкающие соотношения

Чистое давление в распространяющихся трещинах PKN (условие роста трещин)	$p_{\text{net},i} = \sqrt{\frac{8K_{Ic,i}^2}{\pi h_{f,i}}}$
Падение давления на перфорациях	$\Delta p_{\text{perf},i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i  Q_i $
Падение давления на трение при ламинарном режиме течения	$\Delta p_{\text{fric},i} = \int_{x_i-1}^{x_i} \frac{8\mu \left( Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j \right)}{R_i^2(s) S_i(s)} ds$

$K_{Ic,i}$  – трещиностойкость породы вблизи кончика  $i$ -ой трещины;  $h_{f,i} = H$  – высота трещин (для PKN модели равна мощности пласта);

$\rho_s$  и  $\mu$  – плотность и вязкость закачиваемой жидкости соответственно;

$n_{p,i}$  и  $d_{p,i}$  – количество и диаметр перфораций соответственно;  $C_{d,i}$  – безразмерный коэффициент эрозии перфораций (при закачке воды равен 0.5);

$Q_0$  – расход закачиваемой жидкости на забое;  $Q_j$  – расход жидкости на  $j$ -ой трещине;

$R_i$  – радиус участка трубы к  $i$ -ой трещине;

$S_i = \pi R_i^2$  – площадь сечения участка трубы к  $i$ -ой трещине.

P.A. Kabanova, E.V. Shel. Modeling of Water-Induced Fracture Growth Pressure Using Poroelastic Approach. — ECMOR XVII – 17th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 2020

J.B. Crump, M.W. Conway. Effects of Perforation-Entry Friction on Bottomhole Treating Analysis. — Journal of Petroleum Technology, August 1988

## Замкнутая постановка задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i, \\ p_0 = \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j}, \\ p_{\text{net},i} = \sqrt{\frac{8K_{Ic,i}^2}{\pi h_{f,i}}}, \\ \Delta p_{\text{perf},i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|, \\ \Delta p_{\text{fric},j} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{8\mu \left( Q_0 - \sum_{k=1}^{j-1} Q_k \right)}{R_j^2(s) S_j(s)} ds, \\ \Delta p_{h,j} = 0. \end{array} \right.$$

Неизвестные:  
 $Q_1, Q_2, \dots, Q_N, p_0$ .

# Вектор невязок

Вектор неизвестных:

$$Q^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N, p_0]$$

Вектор невязок:

$$[F_1, F_2, \dots, F_N, F_{N+1}] ,$$

где

$$F_i = \begin{cases} \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{\text{fric},j} - p_0 \\ \quad (\text{при } i \leq N) \\ Q_0 - \sum_{j=1}^N Q_j \quad (\text{при } i = N+1) \end{cases}$$

# Итеративная процедура решения

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_1}{\partial p_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_N} & \frac{\partial F_{N+1}}{\partial p_0} \end{bmatrix}$$

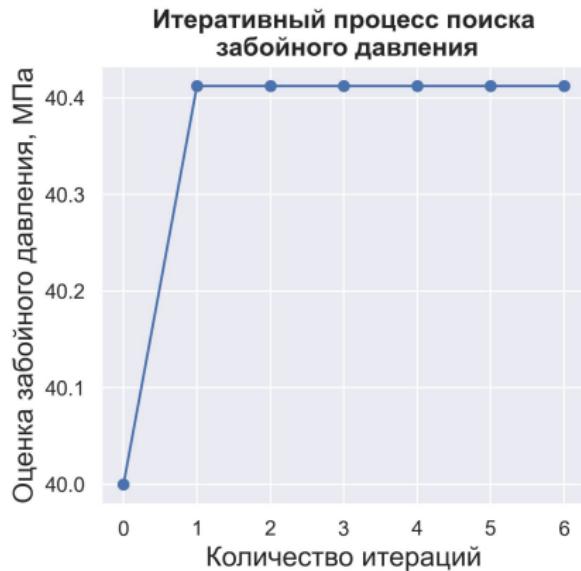
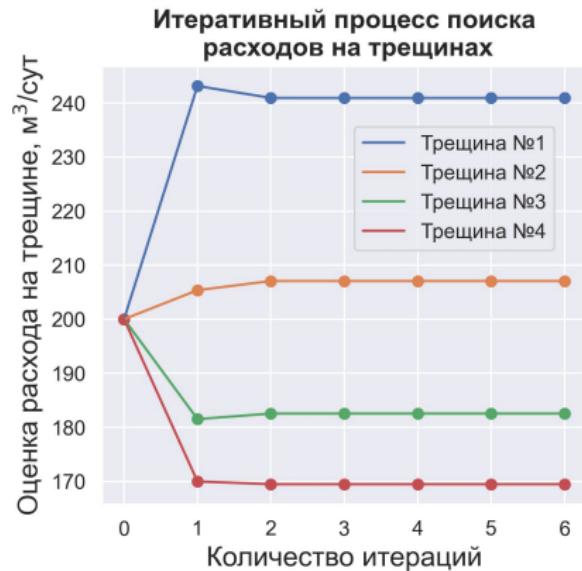
Выражение:

$$\overline{Q}^{k+1} = \overline{Q}^k - J^{-1} \overline{F}^k$$

Начальное приближение:  $Q_i = Q_0/N$  и  $p_0 = \sigma_i$  при  $i \in [1, N]$

Условие остановки:  $\left| \overline{Q}^{k+1} - \overline{Q}^k \right|^2 \leq 10^{-4}$

# Итеративный процесс поиска расходов на трещинах и забойного давления



# Распределение давления вдоль горизонтального участка скважины



# Полная производная полудлины трещины по времени

Общий вид полной производной полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial x_f}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial x_f}{\partial (p_f - p_e)} \frac{d(p_f - p_e)}{dt}$$

Полная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$  в случае одномерных утечек Картера:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{\mu}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \left( \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{\pi \kappa}{t}} + \sqrt{\pi \kappa t} \frac{dQ}{dt} - \frac{Q \sqrt{\pi \kappa t}}{(p_f - p_e)} \frac{d(p_f - p_e)}{dt} \right)$$

Полная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$  в случае двумерных радиальных утечек жидкости из трещины в пласт:

$$\begin{aligned} \frac{dx_f}{dt} &= \exp \left( -\frac{2\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q\mu} \right) \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{t}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q^2 \mu} \sqrt{\kappa t} \frac{dQ}{dt} - \frac{6\pi k_e h}{Q\mu} \sqrt{\kappa t} \frac{d(p_f - p_e)}{dt} \right) \end{aligned}$$

# Приращение полудлины трещин

Приращение полудлины трещины на каждом шаге по времени в общем виде:

$$dx_f = \frac{dx_f}{dt} dt$$

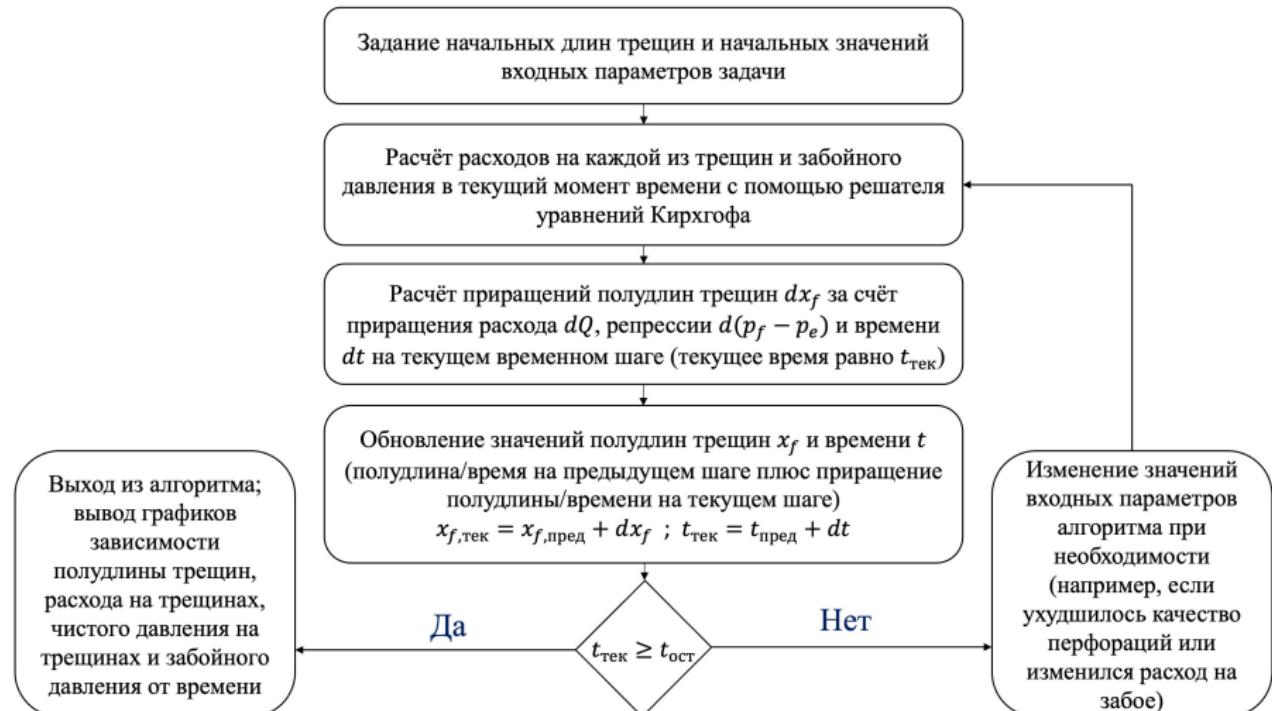
Приращение полудлины трещины на каждом шаге по времени в случае одномерных утечек Картера:

$$dx_f = \frac{\mu}{2\pi k_e h(p_f - p_e)} \left( \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} dt + \sqrt{\pi\kappa t} dQ - \frac{Q\sqrt{\pi\kappa t}}{(p_f - p_e)} d(p_f - p_e) \right)$$

Приращение полудлины трещины на каждом шаге по времени в случае двумерных радиальных утечек жидкости из трещины в пласт:

$$\begin{aligned} dx_f &= \exp\left(-\frac{2\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q\mu}\right) \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{t}} dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6\pi k_e h (p_f - p_e)}{Q^2 \mu} \sqrt{\kappa t} dQ - \frac{6\pi k_e h}{Q\mu} \sqrt{\kappa t} d(p_f - p_e) \right) \end{aligned}$$

# Алгоритм расчёта полудлин трещин в зависимости от времени

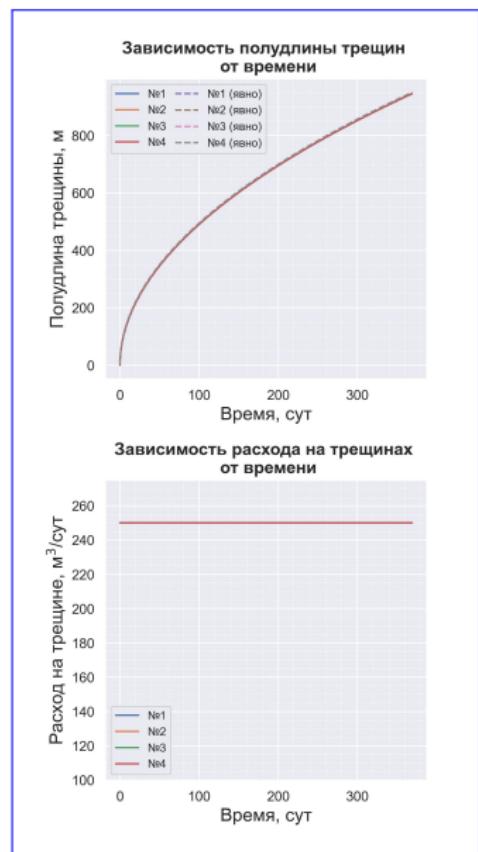
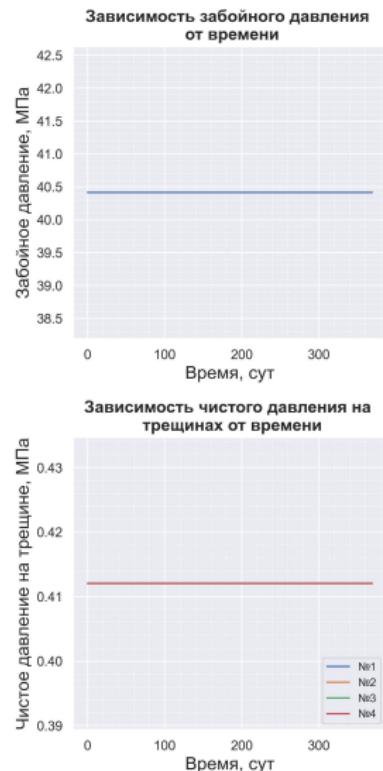
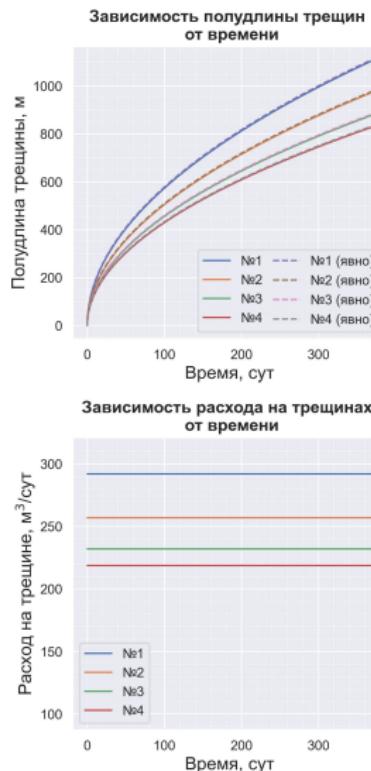


## Выбранные значения входных параметров

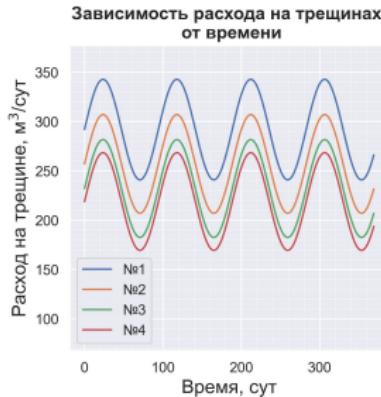
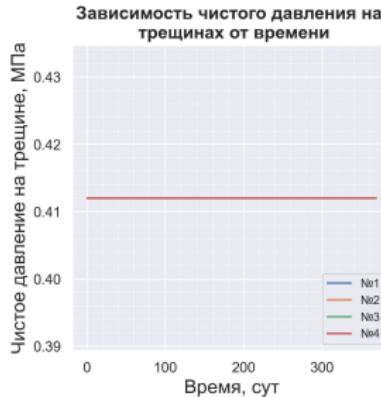
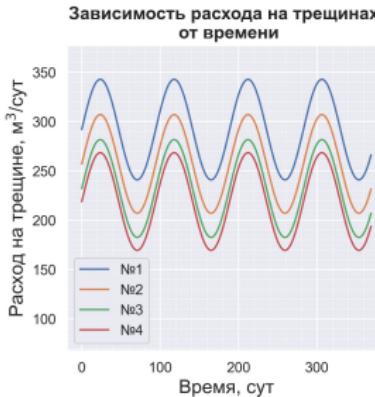
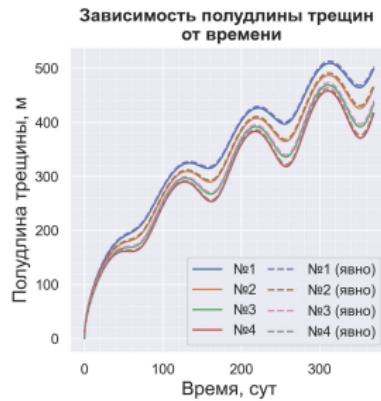
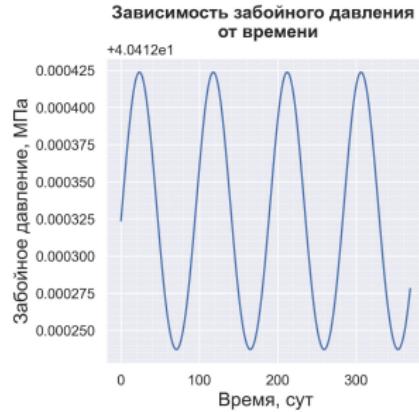
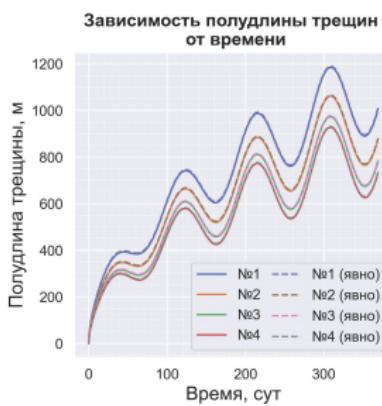
Расход на забое $Q_0$ , м <sup>3</sup> /сут	1000	Высота трещины*, равная мощности пласта, м	15
Количество трещин (портов)	4	Количество перфораций* $n_p$	32
Вязкость воды $\mu$ , Па·с	$10^{-3}$	Диаметр перфораций* $d_p$ , м	0.02
Плотность воды $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1000	Безразмерный коэффициент эрозии перфораций* $C_d$	0.5
Проницаемость пласта $k_e$ , мДарси	1	Радиус участков трубы* $R$ , м	0.08
Пористость пласта $\varphi_e$	0.2	Длина участков трубы* $L$ , м	100
Общая сжимаемость $c_t$ , Па <sup>-1</sup>	$2.2 \cdot 10^{-9}$	Давление смыкания* $\sigma_{\min}$ , МПа	40
Пластовое давление $p_e$ , МПа	25	Трещиностойкость породы* $K_{Ic}$ , Па·м <sup>1/2</sup>	$10^6$

\* – для всех трещин

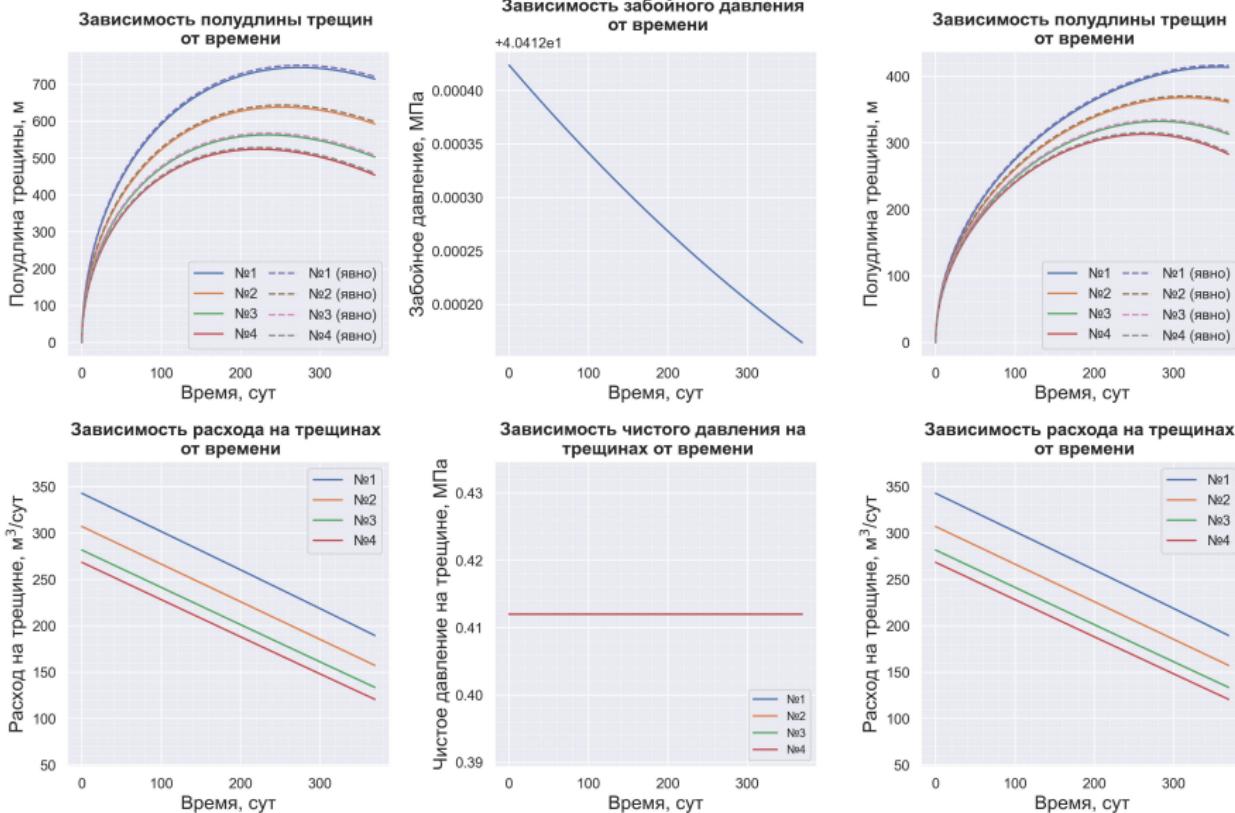
# Результат совместного использования формулы Кёнинга с решателем уравнений Кирхгофа



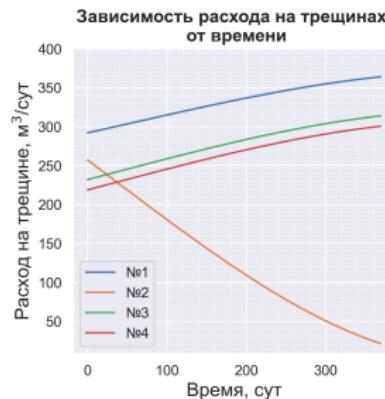
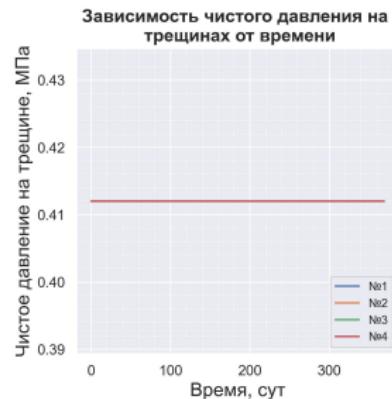
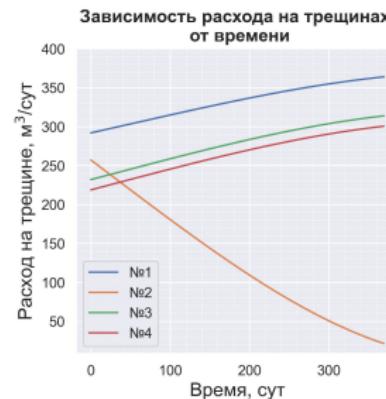
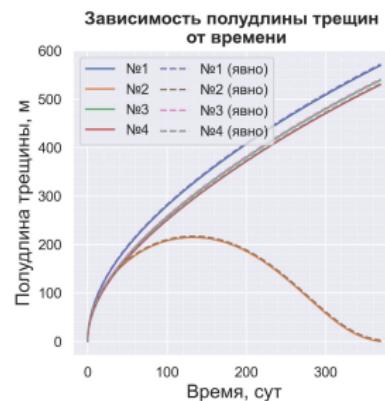
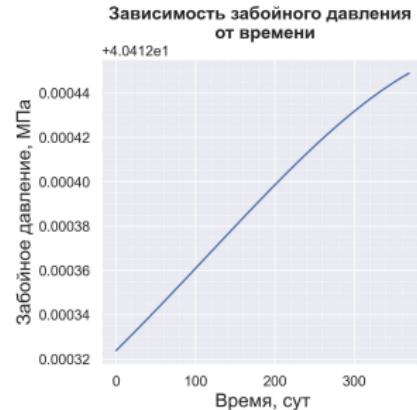
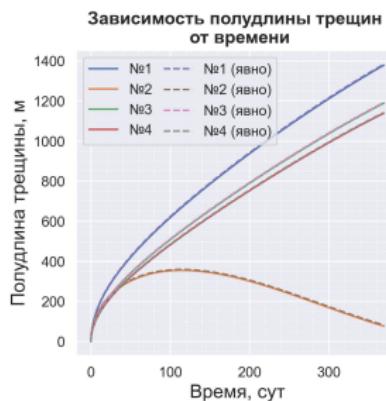
# Сравнение роста трещин при одномерных утечках Картера и при двумерных радиальных утечках жидкости



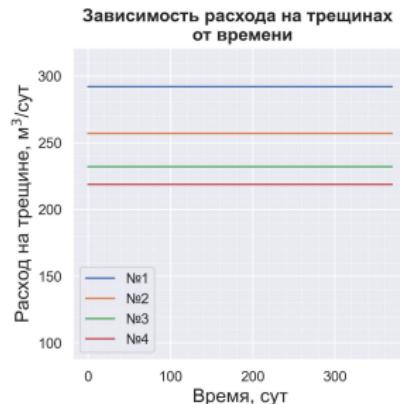
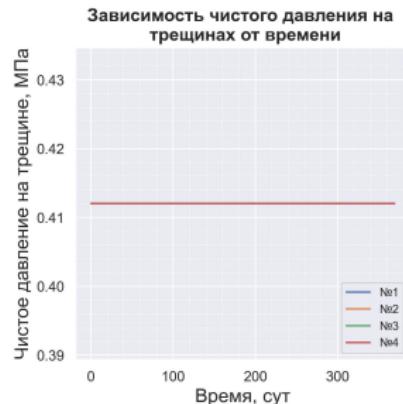
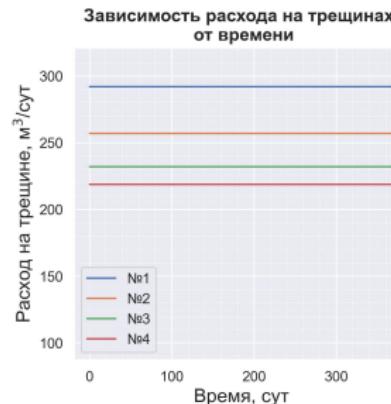
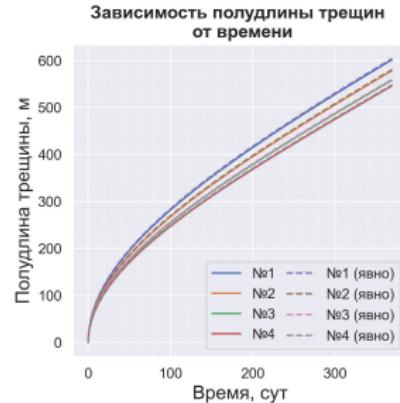
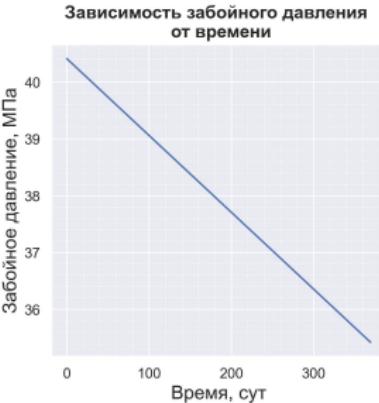
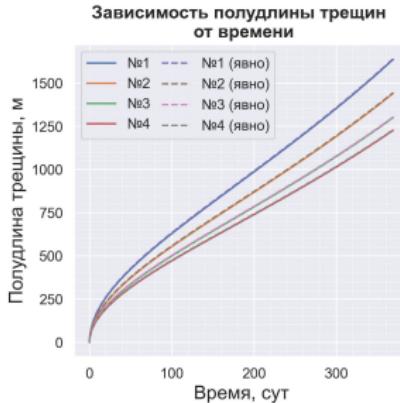
# Результаты при линейном уменьшении расхода жидкости на забое скважины



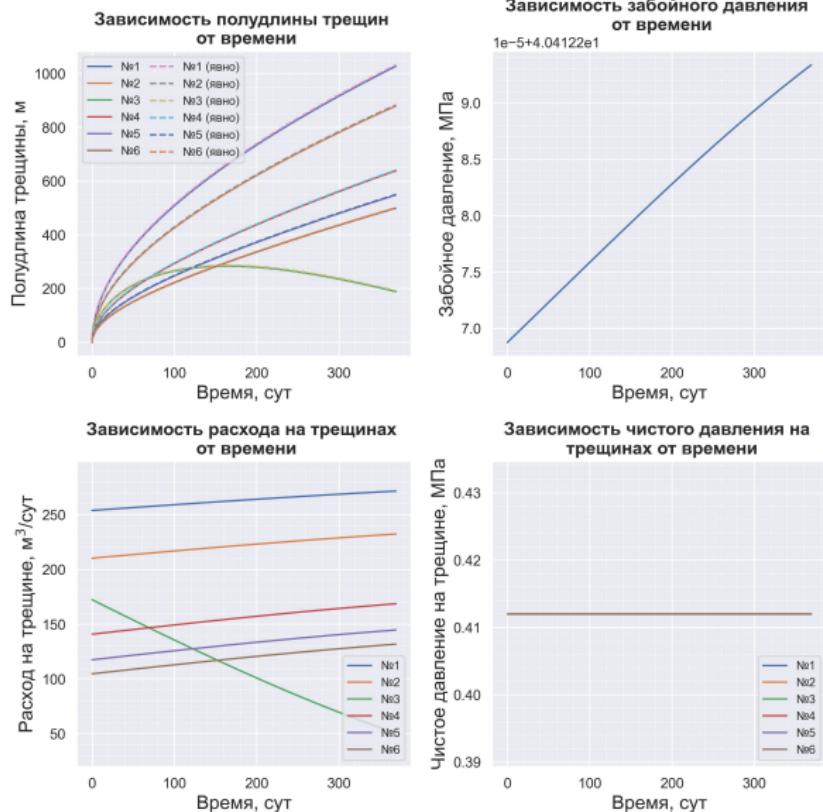
# Результаты при ухудшении качества перфораций на одной из трещин



# Результаты при уменьшении горизонтальных напряжений в пласте



# Результаты при одновременном росте шести трещин



# Выводы

- ▶ Реализован численный алгоритм расчёта потоков на каждой из трещин по правилам Кирхгофа (при любом количестве трещин)
- ▶ Реализован алгоритм расчёта приращения полудлин трещин на каждом шаге по времени с учётом изменяющихся расходов на трещинах (при любом количестве трещин)
- ▶ Проведён анализ результатов:
  - падение давления на трение в трубе приводит к существенной разнице расходов на нескольких трещинах автоГРП и, как следствие, трещина, расположенная близко к забою, растёт более интенсивно
  - уменьшение диаметра перфораций на одной из трещин приводит к постепенному закрытию этой трещины и одновременному более интенсивному росту соседних трещин;
  - уменьшение расхода на забое скважины приводит к уменьшению расходов на трещинах и может привести к сокращению их длины;
  - термоупругое уменьшение горизонтальных напряжений в пласте приводит к более интенсивному росту трещин автоГРП