Моделирование перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва пласта

Выполнил студент: А. А. Муравцев
Научный руководитель: С. А. Калинин
Консультант: И. Ш. Базыров

15 мая 2023 г.

Проблематика и актуальность работы

- при эксплуатации месторождения во время перевода скважин с проведённым многостадийным гидроразрывом пласта в нагнетание (с целью поддержания пластового давления) практически невозможно избежать роста нескольких трещин автоГРП
- важно научиться моделировать одновременный рост нескольких трещин автоГРП и перераспределение потоков между ними, чтобы не допускать снижение эффективности эксплуатации месторождения вследствие прорыва трещин автоГРП к добывающим скважинам

Цель и задачи работы

Цель:

- построить модель совместного роста нескольких трещин автоГРП с учётом перераспределения потоков между ними

Задачи:

- провести обзор имеющихся моделей роста трещины гидроразрыва пласта и выбрать наиболее подходящую модель для роста трещины автоГРП
- построить физико-математическую модель роста нескольких трещин автоГРП
- реализовать численный алгоритм решения на Python
- построить графики зависимостей полудлины каждой из трещин автоГРП и расходов на каждой из трещин от времени
- построить график зависимости забойного давления от времени

Основные компоненты любой модели трещины ГРП

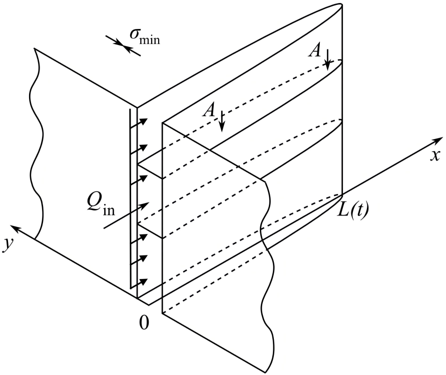
1) закон сохранения жидкости (доминирование или отсутствие утечек);
2) уравнение течения жидкости в трещине (в зависимости от реологии жидкости);
3) уравнение упругости для горной породы;
4) условие распространения трещины;
5) транспорт проппанта

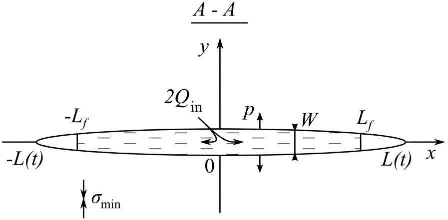
Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка (модель плоской трещины)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \\[2ex]
q = -\dfrac{w^3}{\mu'}\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\[2ex]
p(x,t) = \sigma_0 - \dfrac{E'}{4\pi} \displaystyle\int\limits_{-L(t)}^{L(t)} \dfrac{w(s)ds}{(x-s)^2}, \\[2ex]
\lim\limits_{x \to L} \dfrac{w}{(L-x)^{1/2}} = \dfrac{K'}{E'},
\end{cases}
$$

где $C' = 2C_l$; $\mu' = 12\mu$; $E' = \dfrac{E}{1-\nu^2}$;

$K' = \dfrac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$.

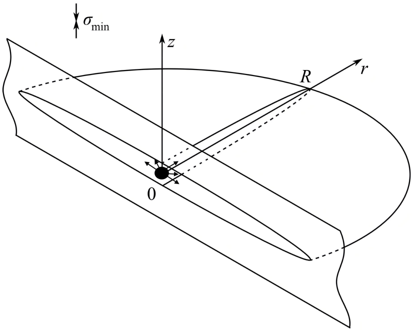




E.V. Dontsov. An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *Int. J. Fract.*, 205:221-237, 2017

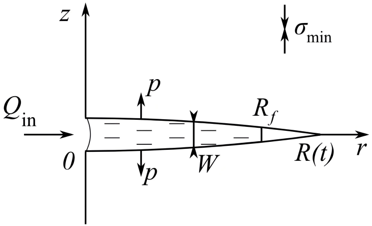
Модель радиальной трещины

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rq) + \dfrac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} = Q_0\delta(r), \\[2ex]
q = -\dfrac{w^3}{\mu'}\dfrac{\partial p_n}{\partial r}, \\[2ex]
p_n(r,t) = -\dfrac{E'}{2\pi R}\displaystyle\int_0^{R(t)} M\left(\dfrac{r}{R}, \dfrac{r'}{R}\right)\dfrac{\partial w(r',t)}{\partial r'}dr', \\[2ex]
\lim\limits_{r\to R}\dfrac{w}{(R-r)^{1/2}} = \dfrac{K'}{E'},
\end{cases}
$$



где $C' = 2C_l$; $\mu' = 12\mu$; $E' = \dfrac{E}{1-\nu^2}$; $K' = \dfrac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$;

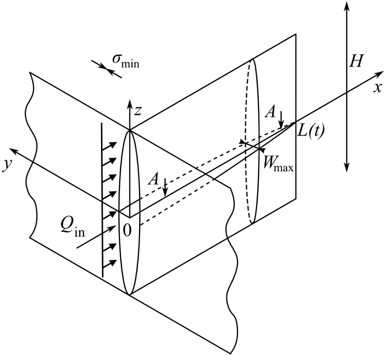
$$
M(\rho, s) = \begin{cases}
\dfrac{1}{\rho}K\left(\dfrac{s^2}{\rho^2}\right) + \dfrac{\rho}{s^2-\rho^2}E\left(\dfrac{s^2}{\rho^2}\right) \\[2ex]
\dfrac{s}{s^2-\rho^2}E\left(\dfrac{\rho^2}{s^2}\right)
\end{cases}
$$



E.V. Dontsov. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *R. Soc. Open Sci.*, 3:160737, 2016

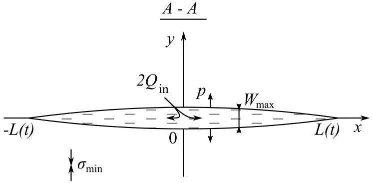
Модель Перкинса-Керна-Нордгрена (модель PKN)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \dfrac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \dfrac{Q_0}{H}\delta(x), \\[2ex]
\bar{q}_x = -\dfrac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \dfrac{\partial p_n}{\partial x}, \\[2ex]
p_n(x,t) = \dfrac{2E'}{\pi^2 H} \displaystyle\int_{-L(t)}^{L(t)} \bar{w}(x',t) \dfrac{dG(2(x'-x)/H)}{dx'} dx', \\[2ex]
\lim\limits_{x \to L} \dfrac{w}{(L-x)^{1/2}} = \dfrac{K'}{E'},
\end{cases}
$$



где $C' = 2C_l$; $\mu' = 12\mu$; $E' = \dfrac{E}{1-\nu^2}$; $K' = \dfrac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$;

$$
G(s) = \frac{\sqrt{1+s^2}}{s} E\left(\frac{1}{1+s^2}\right)
$$

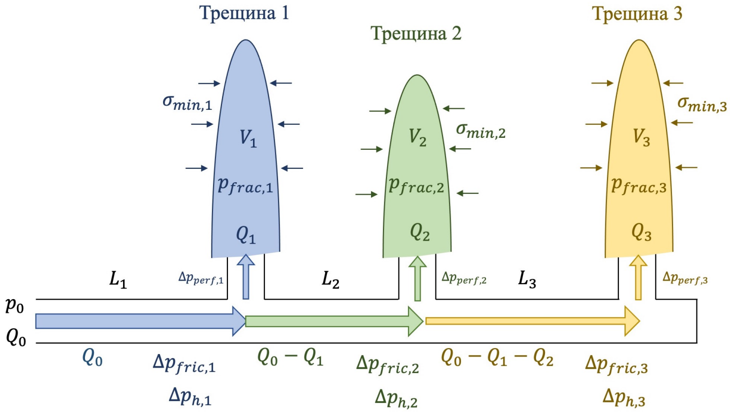


E.V. Dontsov. Analysis of a constant height hydraulic fracture, arXiv:2110.13088v1 [physics.geo-ph], 25 Oct 2021

Асимптотические решения модели PKN

Модель трещины автоГРП = модель PKN в случае доминирования утечек

Схема перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва и законы Кирхгофа



$$\boxed{Q_0 = \sum_{i=1}^{N} Q_i}$$

$$\boxed{p_0 = \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum_{j=1}^{i} \Delta p_{h,\,j} + \sum_{j=1}^{i} \Delta p_{\text{fric},\,j}}$$

Чистое давление в трещинах PKN

Падение давления на перфорациях

Падение давления на трение

Запись законов Кирхгофа в векторной форме

Вектор неизвестных:

$$Q^T = [Q_1, Q_2, ..., Q_N, p_0]$$

Вектор невязок:

$$[F_1, F_2, ..., F_N, F_{N+1}],$$

где

$$F_i = \begin{cases} \sigma_{\min,i} + p_{\text{net},i} + \Delta p_{\text{perf},i} - \sum\limits_{j=1}^{i} \Delta p_{h,j} + \sum\limits_{j=1}^{i} \Delta p_{\text{fric},j} - p_0 \\ \qquad \text{(при } i \leqslant N) \\ \\ Q_0 - \sum\limits_{j=1}^{N} Q_j \text{ (при } i = N+1) \end{cases}$$

Итеративная процедура решения

Матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial Q_N} & \dfrac{\partial F_1}{\partial p_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{N+1}}{\partial Q_N} & \dfrac{\partial F_{N+1}}{\partial p_0} \end{bmatrix}$$

Выражение:

$$\overline{Q}^{k+1} = \overline{Q}^{k} - J^{-1}\overline{F}^{k}$$

Начальное приближение: $Q_i = Q_0/N$ и $p_0 = \sigma_i$ при $i \in [1, N]$

Условие остановки: $\left|\overline{Q}^{k+1} - \overline{Q}^{k}\right|^2 \leqslant 10^{-4}$

Пример результатов решателя уравнений Кирхгофа

Формула Кёнинга

Зависимость полудлины трещины автоГРП от расхода жидкости, репрессии на пласт и фильтрационно-ёмкостных свойств пласта:

$$x_f = \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h\left(p_f - p_e\right)},$$

где $\kappa = \dfrac{k_e}{\varphi_e \mu c_t}$ – пьезопроводность пласта;

E.J.L. Koning. Fractured water-injection wells. Analytical modelling of fracture propagation. SPE 14684, 1985

Приращение полудлины трещины

Полная производная полудлины трещины x_f по времени t:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial x_f}{\partial Q}\frac{dQ}{dt} + \frac{\partial x_f}{\partial p_f}\frac{dp_f}{dt},$$

где

$$\frac{\partial x_f}{\partial t} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h\left(p_f - p_e\right)}\sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} \quad ; \quad \frac{\partial x_f}{\partial Q} = \frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h\left(p_f - p_e\right)};$$

$$\frac{\partial x_f}{\partial p_f} = -\frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h\left(p_f - p_e\right)^2}$$

Приращение полудлины трещины

Полная производная полудлины трещины x_f по времени t:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h\left(p_f - p_e\right)}\sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} + \frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h\left(p_f - p_e\right)}\frac{dQ}{dt} - \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h\left(p_f - p_e\right)^2}\frac{dp_f}{dt}$$

Приращение полудлины трещины на каждом шаге по времени:

$$dx_f = \frac{dx_f}{dt}dt$$

$$dx_f = \underbrace{\frac{Q\mu}{4\pi k_e h\left(p_f - p_e\right)}\sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}}dt}_{\text{за счёт изменения времени}} + \underbrace{\frac{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h\left(p_f - p_e\right)}dQ}_{\substack{\text{за счёт изменения расхода}\\ \text{на трещине}}} - \underbrace{\frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h\left(p_f - p_e\right)^2}dp_f}_{\substack{\text{за счёт изменения давления}\\ \text{в трещине}}}$$

Результат совместного использования формулы Кёнинга с решателем уравнений Кирхгофа

Влияние резкого ухудшения качества перфораций на рост трещин

Выводы