

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-Механический институт

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ  
\_\_\_\_\_ А.М. Кривцов  
«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**  
**РАБОТА МАГИСТРА**  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ МЕЖДУ**  
**ТРЕЩИНАМИ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА**

по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование  
Направленность (профиль) 01.04.03\_04 Математическое моделирование  
процессов нефтегазодобычи

Выполнил

студент гр. 5040103/10401

А.А. Муравцев

Руководитель

доцент, к.т.н.

С.А. Калинин

Консультант

должность, степень

И.О. Фамилия

Консультант

по нормоконтролю

И.О. Фамилия

Санкт-Петербург  
2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО  
Физико-Механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ВШТМиМФ  
\_\_\_\_\_ А.М. Кривцов  
«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023г.

**ЗАДАНИЕ  
на выполнение выпускной квалификационной работы**

студенту Муравцеву Александру Алексеевичу, гр. 5040103/10401

1. Тема работы: Моделирование перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва пласта.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 26.05.2023.
3. Исходные данные по работе: справочная литература и актуальные публикации по теме исследования; физико-механические свойства пласта и закачиваемой в пласт жидкости; геометрические параметры скважины; характеристики перфораций.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): обзор математических моделей трещин гидроразрыва; создание модели роста нескольких трещин автоГРП; исследование влияния входных параметров на рост трещин; создание модели перераспределения потоков между трещинами.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: Базыров Ильдар Шамилевич, руководитель направления ГДМ «Газпромнефть-НТЦ», к.т.н.
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023.

Руководитель ВКР \_\_\_\_\_ С.А. Калинин, доцент ВШТМиМФ, ФизМех, к.т.н.

Задание принял к исполнению 27.02.2023

Студент \_\_\_\_\_ А.А. Муравцев

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
Глава 1. Постановка задачи о перераспределении потоков.....	6
Глава 2. Модели трещины гидроразрыва пласта и их основные компоненты	9
2.1    Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка .....	12
2.2    Модель радиальной трещины ГРП.....	14
2.3    Модель Перкинса-Керна-Нордгрена .....	15
Глава 3. Формула Кёнинга в задаче о перераспределении потоков .....	17
Глава 4. Численное решение задачи с учётом роста трещин автоГРП в длину .....	19
Заключение .....	22
Список использованных источников .....	23

## ВВЕДЕНИЕ

Важным фактором, влияющим на эффективность добычи углеводородов при разработке месторождения, является система заводнения, которая организуется с целью поддержания пластового давления и увеличения нефтеотдачи пласта. Часто для этого осуществляют перевод добывающих скважин, отработавших на истощение, в нагнетание. Однако на момент перевода в нагнетание большинство эксплуатационного фонда скважин было предварительно простимулировано многостадийным гидроразрывом пласта. Поскольку при нагнетании давление жидкости, как правило, превышает давление разрыва породы, возникает риск инициации самопроизвольного роста техногенных трещин. Данное явление называется эффектом автоГРП, а длина трещины автоГРП может варьироваться от десятков метров до километра и более.

Отрицательные последствия роста трещины автоГРП зависят от её длины, высоты и ориентации и заключаются в том, что развитие трещины может стать причиной обводнения добывающих скважин, а также причиной прорыва воды в верхние или нижние горизонты, что снижает эффективность эксплуатации месторождения.

Поскольку нагнетание жидкости производится с большим расходом, то практически невозможно избежать инициации нескольких трещин автоГРП в начале закачки [1]. Поэтому важно научиться моделировать одновременный рост нескольких трещин автоГРП в длину.

*Целью данной работы является моделирование перераспределения потоков между несколькими трещинами автоГРП.*

*Объектом исследования является горизонтальная нагнетательная скважина, на которой ранее (когда она работала в добывающем фонде) был проведён многостадийный гидроразрыв. Предметом исследования являются забойное давление на рассматриваемой скважине и расходы воды на каждой из трещин при заданном расходе воды на забое.*

Для достижения поставленной цели предполагается выполнение следующих задач:

- 1) обзор литературы по моделированию роста одной трещины автоГРП;
- 2) построение физико-математической модели задачи;
- 3) численная реализация алгоритма решения;

- 4) анализ зависимости полудлины каждой из трещин автоГРП от времени;
- 5) анализ зависимости забойного давления от времени;
- 6) анализ расходов на каждой из трещин в зависимости от времени;
- 7) анализ давления в каждой из трещин в зависимости от времени.

# ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТОКОВ

При моделировании перераспределения потоков между трещинами автоГРП важно учитывать падение давления на трение в скважине  $\Delta p_{fric}$  и падение давления на перфорациях  $\Delta p_{perf}$ .

На рис. 1.1 представлена схема перераспределения потоков между тремя трещинами автоГРП.

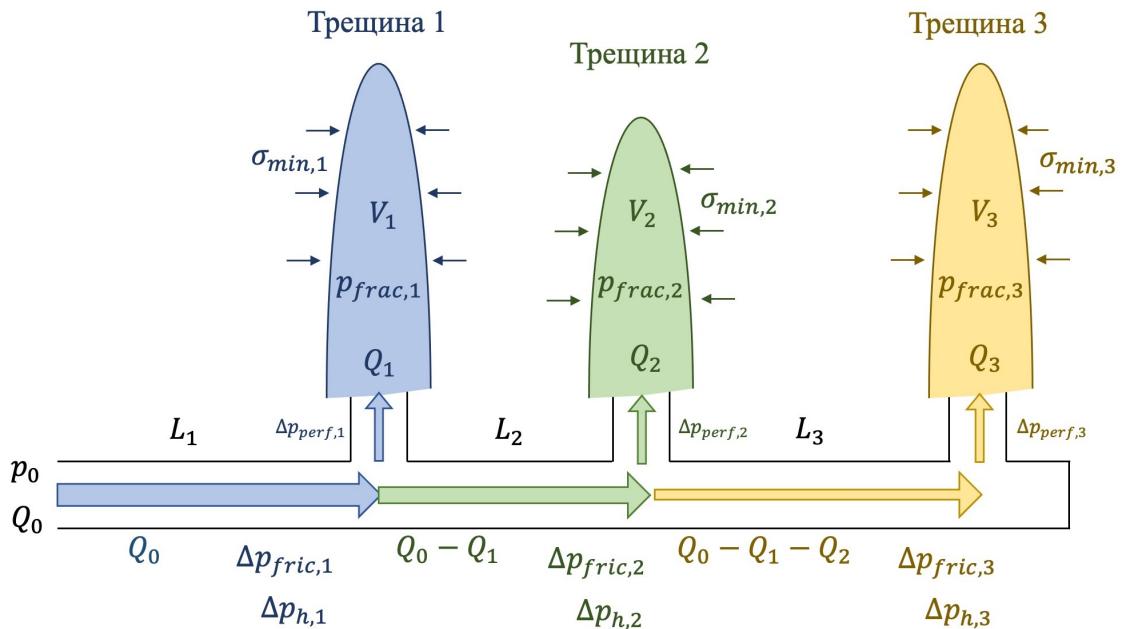


Рис.1.1. Схема перераспределения потоков между трещинами гидроразрыва

Из рисунка 1.1 видим, что весь расход, который закачиваем в скважину, перераспределяется между трещинами (первый закон Кирхгофа):

$$Q_0 = \sum_{i=1}^N Q_i, \quad (1.1)$$

где  $N$  – количество трещин.

Каждый из путей к каждой из трещин будем рассматривать независимо, т.е. будем считать гидродинамические сопротивления независимо (второй закон Кирхгофа):

$$p_0 = \sigma_{min,i} + p_{net,i} + \Delta p_{perf,i} - \sum_{j=1}^i \Delta p_{h,j} + \sum_{j=1}^i \Delta p_{fric,j}, \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{min,i}$  – давление закрытия (минимальное напряжение в пласте) на  $i$ -ой трещине;

$p_{\text{net},i} = p_{\text{frac},i} - \sigma_{\min,i}$  – чистое давление на  $i$ -ой трещине (из модели трещины);  
 $\Delta p_{\text{perf},i}$  – падение давления вдоль перфорации  $i$ -ой трещины;  
 $\Delta p_{\text{h},i}$  – падение гидростатического давления между  $i$ -ой и  $(i-1)$ -ой трещинами;  
 $\Delta p_{\text{fric},i}$  – падение давления на трение между  $i$ -ой и  $(i-1)$ -ой трещинами.

Для PKN модели трещины гидроразрыва известна формула для чистого давления в трещине (подробное описание модели PKN приведено в следующем разделе):

$$p_{\text{net},i}(Q_i) = a_i Q_i^{\frac{n}{2n+3}} V_i^{\frac{1}{2n+3}}, \quad (1.3)$$

где  $a_i = \left( \frac{(n+3)(2n+1)^n \cdot K \cdot (E'_i)^{2n+2}}{\pi 2^{2n} n^n \phi^n h_i^{3n+3}} \right)^{\frac{1}{2n+3}}$  – параметр жёсткости,

$Q_i$  и  $V_i$  – расход на  $i$ -ой трещине и объём  $i$ -ой трещины;

$K$  и  $n$  – реологические параметры степенной (неньютоновской) жидкости;

$E'_i$  – модуль плоской деформации  $i$ -ой трещины;

$h_i$  – мощность продуктивной зоны.

Эмпирическая формула для падения давления на перфорациях выглядит следующим образом:

$$\Delta p_{\text{perf},i} = \frac{8\rho_s}{\pi^2 C_{d,i}^2 n_{p,i}^2 d_{p,i}^4} Q_i |Q_i|, \quad (1.4)$$

где  $\rho_s$  – средняя плотность смеси;

$n_{p,i}$ ,  $d_{p,i}$  – количество и диаметр перфораций;

$C_{d,i} = \frac{\min(d_{jet})}{d_p}$  – безразмерный коэффициент эрозии (в случае отсутствия твёрдых частичек в потоке  $C_{d,i} \in [0.5, 0.6]$ , а с твёрдыми частичками в потоке  $C_{d,j} \in [0.6, 0.95]$  из-за эрозии перфорации).

Падение давления на трение на каждом интервале рассчитывается по следующей формуле:

$$\Delta p_{\text{fric},i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \frac{\rho u_{m,i}^2}{R_i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\rho(c(t,s)) \cdot f(Re) \cdot \left( Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j \right)^2}{R_i(s) S_i^2(s)} ds, \quad (1.5)$$

где  $f = \frac{\tau}{\rho u_{m,i}^2 / 2}$  – коэффициент трения Фаннинга;

$\rho(c(t,s))$  – плотность смеси, которая зависит от динамически меняющейся концентрации проппанта;

$$u_{m,i} = \frac{Q_0 - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j}{S_i} - \text{средняя скорость на рассматриваемом участке трубы};$$

$S_i$  – площадь сечения рассматриваемого участка трубы;

$R_i$  – радиус рассматриваемого участка трубы;

$Re$  – число Рейнольдса.

Подставляя выражения (1.3), (1.4) и (1.5), в законы Кирхгофа (1.1) и (1.2), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, которая может быть решена численно с помощью метода Ньютона.

В следующем разделе будут рассмотрены различные модели трещин гидроразрыва и их ограничения. Будет выбрана наиболее подходящая модель для описания роста трещин автоГРП.

## ГЛАВА 2. МОДЕЛИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА И ИХ ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ

В настоящее время в симуляторах для моделирования процесса ГРП нефтяные компании используют модели Pseudo3D, Planar3D и Full3D.

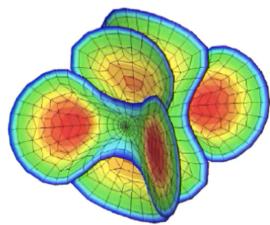
Наиболее общая модель Full3D позволяет моделировать сложные варианты развития трещины (учитывается возможность изменения направления распространения трещины и слоистость породы), решение проводится численно с применением метода конечных элементов (МКЭ), но эта модель используется редко, так как имеет низкую скорость расчёта.

В модели Planar3D предполагается, что направление минимальных горизонтальных напряжений в пласте не изменяется в зависимости от координаты, то есть трещина распространяется в одной плоскости. В то же время модель Planar3D учитывает слоистость породы и не использует приближение малости высоты в сравнении с длиной трещины, то есть учитывает двумерное течение жидкости.

Модель Pseudo3D использует предположение о том, что высота трещины много меньше её длины, то есть рассматривается случай одномерного течения жидкости.

Каждая из моделей Pseudo3D, Planar3D и Full3D плохо поддаётся аналитическому анализу. Однако при введении дополнительных предположений и допущений модель Planar3D преобразуется в хорошо известные модели (исторически были изучены раньше модели Planar3D), для которых можно провести аналитический анализ (найти раскрытие, давление в зависимости от координаты и времени). В табл.2.1 представлены основные модели трещины ГРП с их допущениями.

Таблица 2.1  
Допущения основных моделей трещины ГРП

Модель	Допущения	Схематичный рисунок
Full3D	Отсутствуют; учёт большого количества физических эффектов позволяет очень точно (часто излишне точно) описать распространение трещины	

Продолжение табл. 2.1

Модель	Допущения	Схематичный рисунок
Planar3D	Одна трещина, распространяющаяся в плоскости вдоль направления максимальных горизонтальных напряжений; среда однородна по $E$ и $\nu$ ; законы упругости рассматриваются в рамках линейно-упругой механики разрушения; ньютоновская жидкость с вязкостью $\mu$ , отсутствует fluid lag	
Pseudo3D	Одномерное течение жидкости	
Перкинса-Керна-Нордгрена (PKN)	Эллиптическое вертикальное сечение; плоская деформация в вертикальной плоскости	
Радиальная	Точечный перфорационный интервал	

Продолжение табл. 2.1

Модель	Допущения	Схематичный рисунок
Христиановича-Желтова-Гиртсма-деКлерка (KGD)	Прямоугольное вертикальное сечение; плоская деформация в горизонтальной плоскости	

Исторически первой С.А.Христиановичем и Ю.П.Желтовым (и независимо от них Гиртсма и деКлерком) в 1955 году была разработана модель KGD, которая хорошо описывает поведение трещины, распространяющейся из протяжённого перфорированного интервала, на ранних временах её распространения.

Также была разработана модель радиальной трещины ГРП, которая реализуется при гидроразрыве относительно мощных однородных пластов из ограниченных (точечных) перфорированных интервалов.

Позже в 1961 году исследователями Перкинсом и Керном была разработана более распространённая модель Перкинса-Керна, которая хорошо описывает поведение трещины, распространяющейся из протяжённого перфорированного интервала, на поздних временах её распространения. В дальнейшем Нордгреном к модели Перкинса-Керна были добавлены эффекты потери жидкости.

Любая модель трещины гидроразрыва пласта состоит из нескольких основных компонентов:

- 1) уравнения баланса жидкости с учётом утечек;
- 2) модели жидкости;
- 3) уравнения упругости;
- 4) условия распространения;
- 5) модели транспорта проппанта.

Далее будут представлены математические модели трещины KGD, радиальной и РКН.

## 2.1. Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-дeКлерка

В первой модели гидроразрыва пласта, разработанной С.А.Христиановичем и Ю.П.Желтовым, рассматривается трещина одной и той же ширины на любой вертикальной координате в пределах фиксированной толщины пласта  $h$ . Другими словами, используется допущение о плоской деформации в каждой горизонтальной плоскости (это допущение более приемлемо для коротких трещин, у которых  $2x_f < h$ , где  $x_f$  – полудлина трещины). В основе лежит физическая гипотеза, что поверхности трещины свободно скользят по кровле и подошве пласта.

В результате получается трещина прямоугольного вертикального сечения, а ширина трещины рассматривается как функция координаты  $x$ .

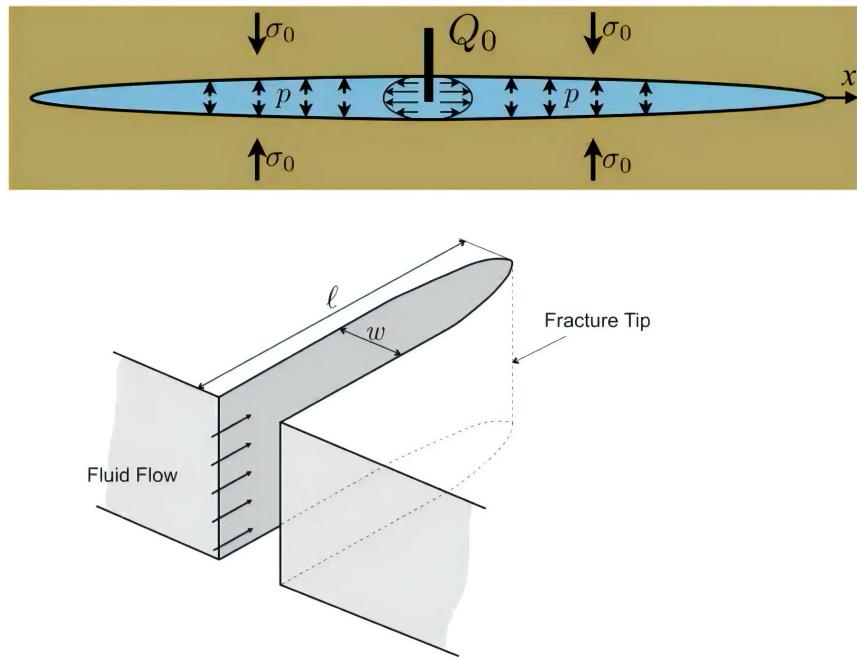


Рис.2.1. Геометрия трещины KGD

Для трещины KGD верно равенство, выражающее закон сохранения объёма жидкости в малом выделенном объёме:

$$w(t+dt)dx = w(t)dx + q_x(x)dt - q_x(x+dx)dt - 2gdxdt \quad (2.1)$$

Откуда получаем уравнение баланса жидкости:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + 2g = Q_0(t)\delta(x) \quad (2.2)$$

Из модели Картера скорость утечек:

$$g = \frac{C_l}{\sqrt{t - t_0(x)}} \quad (2.3)$$

Таким образом, уравнение баланса жидкости с учётом утечек для трещины KGD запишется в следующей форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \quad (2.4)$$

где  $C' = 2C_l$ .

В модели трещины KGD рассматривается одномерное течение жидкости вдоль трещины, то есть имеется только одна компонента вектора скорости, которая изменяется при движении:

$$v = v_x(y) \quad (2.5)$$

Из уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (2.6)$$

Для ньютоновской жидкости:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.7)$$

Дополнительно ставим условие неприлипания на границе:

$$v|_{y=\pm w/2} = 0 \quad (2.8)$$

Общее решение:

$$v = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + Ay + B \quad (2.9)$$

Решение после учёта граничных условий:

$$v = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{w^2 - 4y^2}{8\mu} \quad (2.10)$$

Суммарный поток (расход):

$$q = \int_{-w/2}^{w/2} v(y) dy = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.11)$$

Уравнение упругости для трещины KGD запишется в следующей форме:

$$p(x,t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s)ds}{(x-s)^2}, \quad (2.12)$$

где  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ .

Условие распространения трещины KGD можно представить в виде:

$$\lim_{x \rightarrow l} \frac{w}{(l - x)^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'}{E'}, & \text{если } v > 0 \\ \frac{K'_I}{E'}, & \text{если } v = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Таким образом, система уравнений модели трещины KGD запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0(t)\delta(x), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ p(x,t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s)ds}{(x - s)^2}, \\ \lim_{x \rightarrow l} \frac{w}{(l - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (2.14)$$

где  $C' = 2C_l$ ,  $\mu' = 12\mu$ ,  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ,  $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$ .

Приближённые решения для модели Христиановича-Желтова-Гиртсмаде Клерка представлены в работе [3].

## 2.2. Модель радиальной трещины ГРП

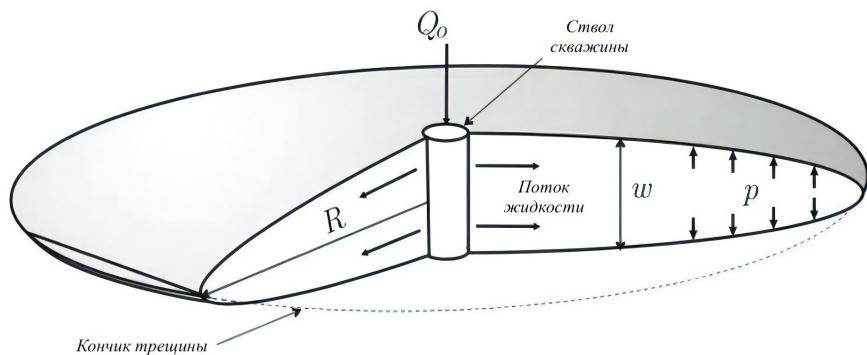


Рис.2.2. Геометрия радиальной трещины

Система уравнений модели радиальной трещины запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq) + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} = Q_0 \delta(r), \\ q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_n}{\partial r}, \\ p_n(r,t) = -\frac{E'}{2\pi R} \int_0^R M\left(\frac{r}{R}, \frac{r'}{R}\right) \frac{\partial w(r',t)}{\partial r'} dr', \\ \lim_{r \rightarrow R} \frac{w}{(R - r)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (2.15)$$

где  $C' = 2C_l$ ,  $\mu' = 12\mu$ ,  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ,  $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$ .

Приближённые решения для модели радиальной трещины представлены в работе [2]. Рассмотрены несколько случаев, а именно случай доминирования вязкости с доминированием утечек, случай доминирования вязкости с отсутствием утечек, случай доминирования трещиностойкости с доминированием утечек и случай доминирования трещиностойкости с отсутствием утечек.

### 2.3. Модель Перкинса-Керна-Нордгрена

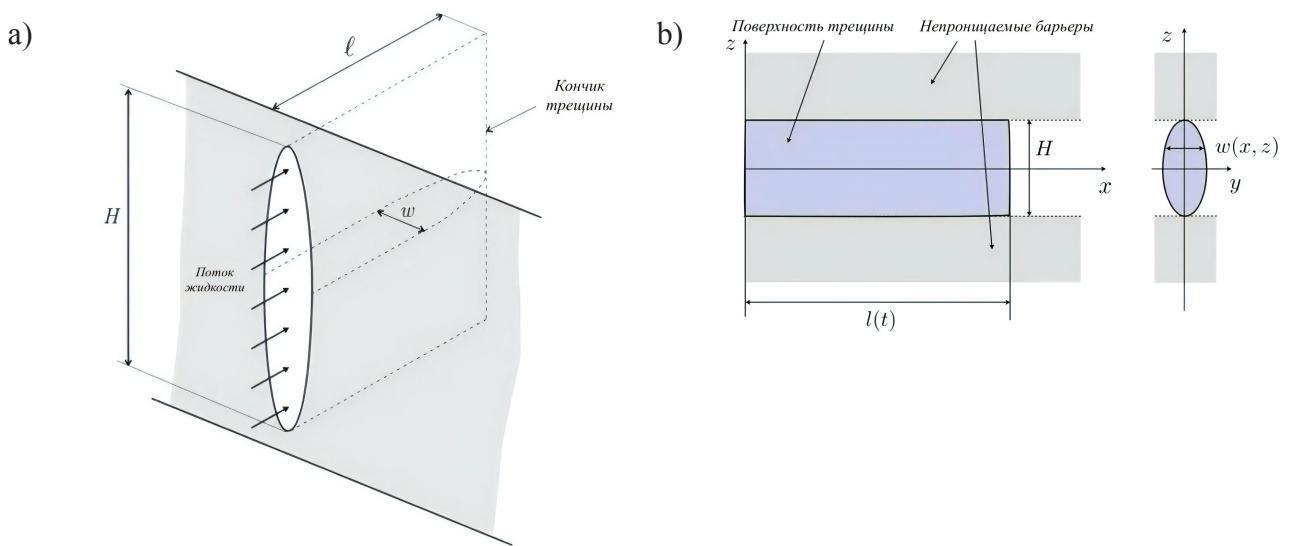


Рис.2.3. Геометрия трещины PKN: *a* — в 3D; *b* — проекции

В модели PKN принимается, что условие плоской деформации сохраняется в каждой вертикальной плоскости, нормальной к направлению распространения;

однако, в отличие от ситуации строгой плоской деформации, состояние напряжений и деформаций не точно одинаково в следующих одна за другой плоскостях. Иными словами, в этой модели используется допущение квази-плоской деформации, причём плоскость отсчёта вертикальна и нормальна к направлению распространения. В модели PKN пренебрегается изменениями давления вдоль вертикальной координаты, а чистое давление  $p_{net}$  в трещине рассматривается как функция латеральной координаты  $x$ .

Система уравнений модели PKN запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \\ \bar{q}_x = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ p(x) = -\frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-l(t)}^{l(t)} \bar{w}(x') \frac{dG(2(x' - x)/H)}{dx'} dx', \\ \lim_{x \rightarrow l} \frac{w}{(l - x)^{1/2}} = \frac{K'}{E'}, \end{cases} \quad (2.16)$$

где  $C' = 2C_l$ ,  $\mu' = 12\mu$ ,  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ ,  $K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$ .

Приближённые решения для модели трещины PKN представлены в работе [4]. Рассмотрены несколько случаев, а именно случай доминирования вязкости с доминированием утечек, случай доминирования вязкости с отсутствием утечек, случай доминирования трещиностойкости с доминированием утечек и случай доминирования трещиностойкости с отсутствием утечек.

В работах [6—8] показано, что наиболее точно рост трещин автоГРП описывает модель PKN в случае доминирования трещиностойкости и больших утечек жидкости в пласт.

## ГЛАВА 3. ФОРМУЛА КЁНИНГА В ЗАДАЧЕ О ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТОКОВ

На основе модели Картера [5] в работе [6] получена формула Кёнинга, которая представляет собой зависимость полудлины трещины автоГРП от расхода жидкости и фильтрационно-ёмкостных свойств пласта:

$$x_f = \frac{Q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)}, \quad (3.1)$$

где  $Q$  – расход нагнетаемой в рассматриваемую трещину жидкости;  
 $\mu$  – вязкость жидкости;  
 $\kappa = k_e / (\varphi_e \mu c_t)$  – коэффициент пьезопроводности пласта;  
 $t$  – время закачки;  
 $k_e$  – проницаемость пласта;  
 $\varphi_e$  – пористость пласта;  
 $c_t$  – общая сжимаемость;  
 $h$  – эффективная толщина (мощность) пласта;  
 $\Delta p = p_f - p_e$  – разница между средним давлением в трещине и пластовым давлением.

В данной работе рассматривается одновременный рост нескольких трещин автоГРП, поэтому расход жидкости на каждой из них динамично изменяется согласно законам Кирхгофа. Кроме того, давление в трещинах тоже изменяется согласно выражению (1.3) по мере увеличения объёма трещин и изменения расхода на них.

Таким образом, для корректного применения формулы Кёнинга приращение полудлины каждой из трещин необходимо найти как произведение полной производной формулы Кёнинга по времени на рассматриваемый шаг по времени.

Полная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{\partial x_f}{\partial t} + \frac{\partial x_f}{\partial Q} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial x_f}{\partial p_f} \frac{dp_f}{dt} \quad (3.2)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по времени  $t$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial t} = \frac{Q\mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi\kappa}{t}} \quad (3.3)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по расходу  $Q$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial Q} = \frac{\mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \quad (3.4)$$

Частная производная полудлины трещины  $x_f$  по давлению в трещине  $p_f$ :

$$\frac{\partial x_f}{\partial p_f} = -\frac{Q \mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} \quad (3.5)$$

Подставляя (3.3), (3.4) и (3.5) в выражение (3.2), получаем:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{Q \mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi \kappa}{t}} + \frac{\mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} \frac{dQ}{dt} - \frac{Q \mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} \frac{dp_f}{dt} \quad (3.6)$$

Итак, приращение полудлины трещины на каждом шаге по времени записывается в следующем виде:

$$dx_f = \frac{Q \mu}{4\pi k_e h (p_f - p_e)} \sqrt{\frac{\pi \kappa}{t}} dt + \frac{\mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)} dQ - \frac{Q \mu \sqrt{\pi \kappa t}}{2\pi k_e h (p_f - p_e)^2} dp_f \quad (3.7)$$

Совмещение формулы Кёнига с уравнениями Кирхгофа будет проведено следующим образом:

- 1) на текущем шаге по времени по имеющимся значениям полудлины трещин автоГРП предыдущего шага будут рассчитаны давления и расходы на каждой трещине;
- 2) на основе полученных значений приращения давления и расхода будет найдено приращение полудлины трещины  $dx_f$  на данном временном шаге по формуле (3.7);
- 3) по формуле  $x_f^{\text{current}} = x_f^{\text{last}} + dx_f$  будут найдены полудлины каждой из трещин на текущем временном шаге;
- 4) описанные действия будут проделаны до требуемого шага по времени (условия остановки).

## ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С УЧЁТОМ РОСТА ТРЕЩИН АВТОГРП В ДЛИНУ

С помощью метода Ньютона проведено решение поставленной в первом разделе задачи. Рассматривались 3 одинаковые трещины гидроразрыва. Результаты представлены на рис. 4.1.

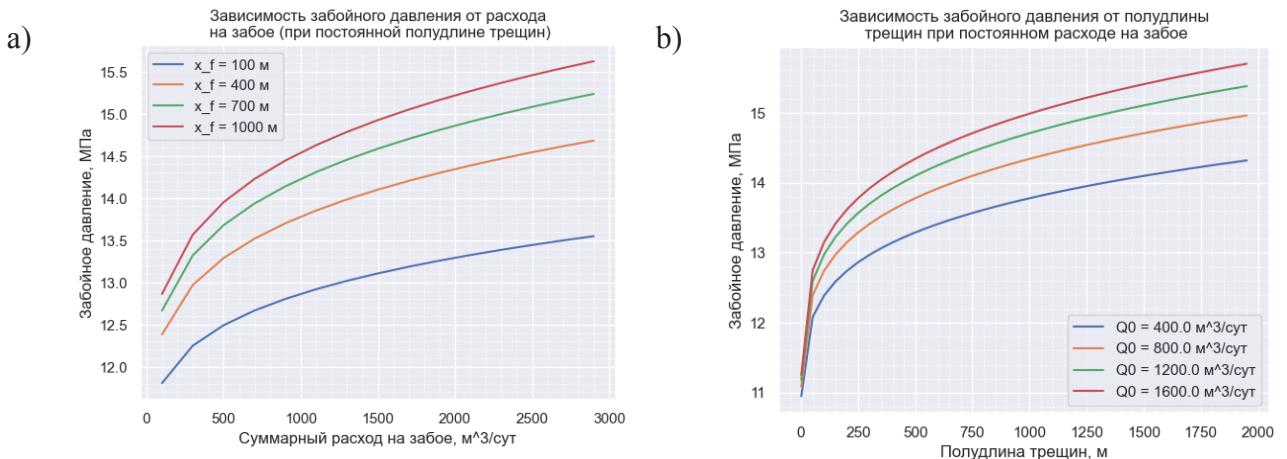


Рис.4.1. Зависимости забойного давления от основных параметров задачи: *a* — от суммарного расхода на забое; *b* — от полудлины трещин

Далее для учёта роста трещин автоГРП в длину было проведено совмещение уравнений законов Кирхгофа (1.1) и (1.2) с формулой Кёнинга [6]:

$$x_f = \frac{q\mu\sqrt{\pi\kappa t}}{2\pi kh\Delta p}, \quad (4.1)$$

где  $x_f$  — полудлина трещины автоГРП;

$q$  — расход закачиваемой жидкости на трещине;

$\mu$  — вязкость закачиваемой жидкости;

$\kappa$  — пьезопроводность пласта;

$k$  — проницаемость пласта;

$h$  — эффективная проницаемая толщина (мощность) пласта;

$\Delta p$  — средняя по времени разница между пластовым и забойным давлениями;

$t$  — время закачки.

Результаты моделирования представлены на рис. 4.2.

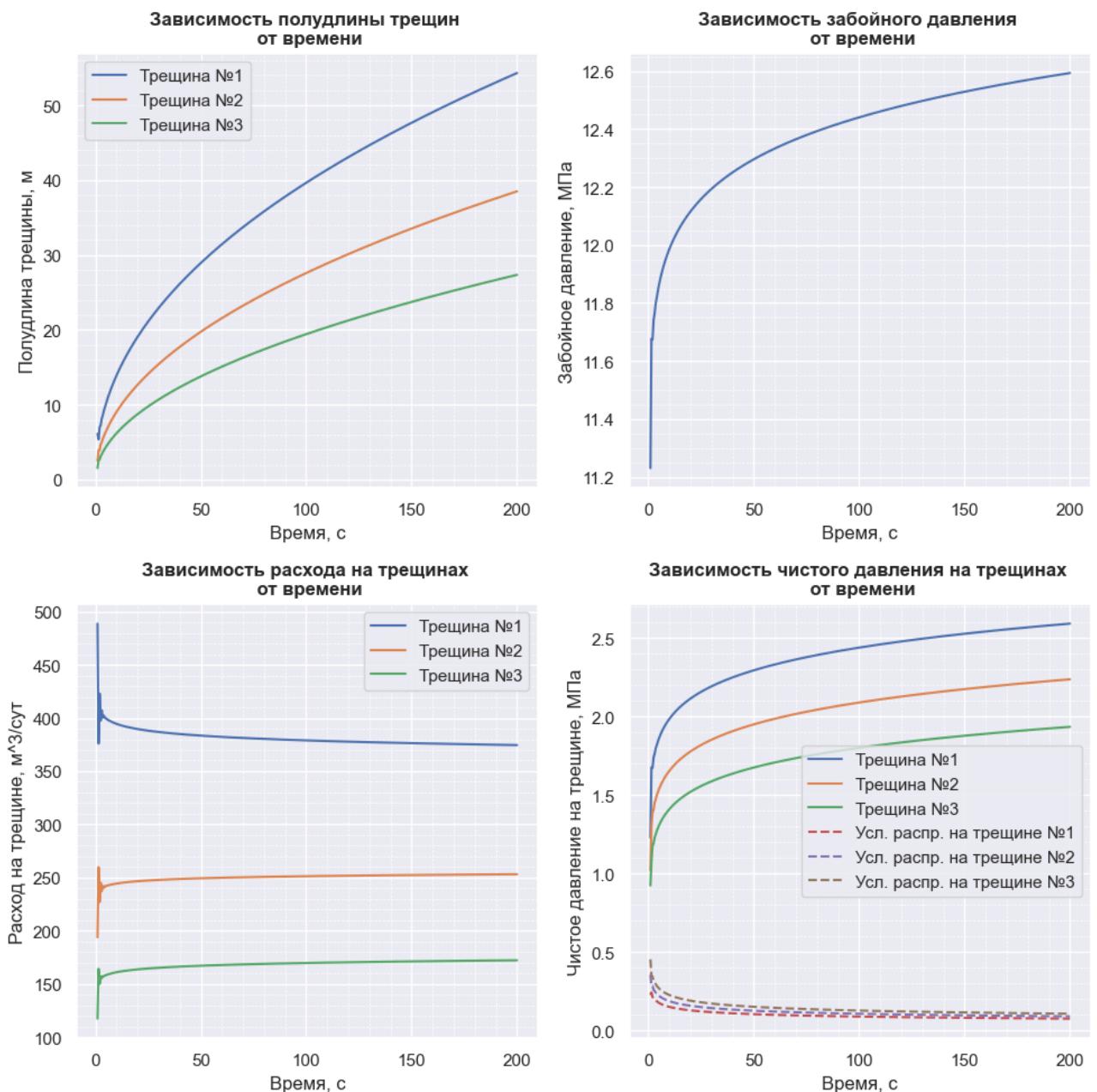


Рис.4.2. Результаты решения поставленной задачи

В проведённом численном эксперименте трещины отличаются друг от друга количеством и диаметром перфораций.

У трещины 1: количество перфораций 32, диаметр перфораций 0.02 м.

У трещины 2: количество перфораций 2, диаметр перфораций 0.01 м.

У трещины 3: количество перфораций 1, диаметр перфораций 0.01 м.

Код решения представлен по ссылке: [https://github.com/mualal/hydrofracturing/blob/master/notebooks/02\\_fractures\\_growth\\_with\\_Koning.ipynb](https://github.com/mualal/hydrofracturing/blob/master/notebooks/02_fractures_growth_with_Koning.ipynb)

Из графиков на рис. 4.2 видим, что большую часть потока забирает на себя трещина с лучшими перфорациями. Эта же трещина лидирует по скорости роста.

Также видим, что при росте трещин требуется всё большее забойное давление для того, чтобы поддерживать этот рост.

При выбранных входных параметрах построенной модели чистое давление в каждой из трещин существенно превышает давления критерия распространения, следовательно, при достаточно высоком забойном давлении все трещины будут расти одновременно.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были проанализированы известные модели роста трещин гидроразрыва, для каждой из трещин автоГРП выбрана модель РКН, после чего была построена модель одновременного роста нескольких трещин автоГРП и модель перераспределения потоков между трещинами автоГРП.

Проведённый анализ показал, что на скорость роста трещины автоГРП существенно влияет качество перфораций на этой трещине.

На языке Python написан код для моделирования перераспределения потоков между трещинами автоГРП и построены графики зависимости полудлины трещин автоГРП от времени, зависимости забойного давления от времени, расходов и чистого давления на каждой из трещин от времени.

Сделан вывод, что для поддержания роста трещин автоГРП требуется увеличение забойного давления, которое влечёт за собой увеличение чистого давления на каждой из трещин и дальнейшее увеличение длины каждой из трещин автоГРП.

В дальнейшем планируется учесть возможную остановку роста одной или нескольких трещин автоГРП из-за ухудшения фильтрационных свойств на ней

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Байков В. А., Давлетбаев А. Я., Асмандияров Р. Н. Специальные гидродинамические исследования для мониторинга за развитием трещин ГРП на нагнетательных скважинах. — Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело» №1, 2011. — С. 65-75.
2. Dontsov E. V. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. — R. Soc. open sci., 3:160737, 2016.
3. Dontsov E. V. An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. — Int. J. Fract., 205, 2017. — 221-237.
4. Dontsov E. V. Analysis of a constant height hydraulic fracture. — 2021. — arXiv: 2110.13088 [physics.geo-ph].
5. Karter R. D. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area. — Appendix of «Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension», by Howard G.C, Fast C.R., 1957. — 261-268 p.
6. Koning E. J. L. Fractured water-injection wells. Analytical modelling of fracture propagation. — Petroleum Development Oman LLC, 1985.
7. Nordgren R. P. Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture. — SPE 89, August 1972. — P. 306-314.
8. Perkins T., Kern L. Widths of hydraulic fractures. — SPE 89, September 1961. — P. 937 – 949.