

Задача (несвязанная динамическая задача термоупругости)

Рассматривается полубесконечный стержень с модулем Юнга E и плотностью ρ , для которого справедливо соотношение Дюамеля-Неймана. Объёмный источник в уравнении теплопроводности задан в виде

$$Q = J_0(H(t) - H(t - \tau))e^{-\gamma x},$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Пренебрегая теплопроводностью материала, получить термоупругий импульс на расстоянии, существенно превышающем глубину проникновения теплового источника.

Принять, что время действия теплового импульса τ много меньше времени пробега акустической волны до координаты, в которой производится регистрация сигнала.

Постановка задачи

По условию пренебрегаем теплопроводностью материала стержня (не учитываем распространение тепла вдоль стержня), поэтому уравнение теплопроводности можем записать в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = Q \Leftrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = J_0(H(t) - H(t - \tau))e^{-\gamma x} \quad (1)$$

Тогда распределение температуры по стержню (см. рис.1):

$$\theta = J_0(tH(t) - (t - \tau)H(t - \tau))e^{-\gamma x} \quad (2)$$

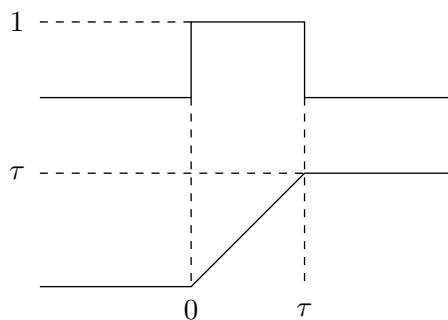


Рис. 1: Интегрирование ступенчатого импульса

Далее подключаем уравнение баланса импульса:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} = 0, \quad (3)$$

где $\sigma = E(\varepsilon - \alpha\theta)$ (соотношение Дюамеля-Неймана) и $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$.

После подстановки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (4)$$

где $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость звука в стержне.

Далее подставляем выражение для распределения температуры (2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -J_0 \cdot \alpha \cdot (tH(t) - (t - \tau)H(t - \tau)) \cdot \gamma e^{-\gamma x} \quad (5)$$

Левый торец стержня свободен:

$$\sigma|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha \cdot J_0 \cdot (tH(t) - (t - \tau)H(t - \tau)) \quad (6)$$

На бесконечности ставим условие излучения:

$$u|_{x \rightarrow \infty} < \infty \quad (7)$$

Ставим нулевые начальные условия:

$$u(0, x) = 0 \text{ и } \dot{u}(0, x) = 0 \quad (8)$$

Таким образом, получаем постановку задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -J_0 \cdot \alpha \cdot (tH(t) - (t - \tau)H(t - \tau)) \cdot \gamma e^{-\gamma x} \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha \cdot J_0 \cdot (tH(t) - (t - \tau)H(t - \tau)) \\ u|_{x \rightarrow \infty} < \infty \\ u(0, x) = 0 \\ \dot{u}(0, x) = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

Преобразование Лапласа

В пространстве Лапласа постановка задачи перепишется в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u^L}{dx^2} - \frac{p^2}{c_0^2} u^L = -J_0 \cdot \alpha \cdot \frac{1 - e^{-\tau p}}{p^2} \cdot \gamma e^{-\gamma x} \\ \left. \frac{du^L}{dx} \right|_{x=0} = \alpha \cdot J_0 \cdot \frac{1 - e^{-\tau p}}{p^2} \\ u^L|_{x \rightarrow \infty} < \infty \end{array} \right. \quad (10)$$

Решение в пространстве Лапласа

Общее решение полученного дифференциального уравнения:

$$u^L = C_1 e^{px/c} + C_2 e^{-px/c} + \frac{J_0 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot (1 - e^{-\tau p})}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2 \right)} e^{-\gamma x} \quad (11)$$

Из второго граничного условия:

$$u^L|_{x \rightarrow \infty} < \infty \Rightarrow C_1 = 0 \quad (12)$$

Из первого граничного условия:

$$-\frac{p}{c} C_2 - \frac{J_0 \cdot \alpha \cdot \gamma^2 (1 - e^{-\tau p})}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2 \right)} = \alpha \cdot J_0 \cdot \frac{1 - e^{-\tau p}}{p^2} \quad (13)$$

$$-\frac{p}{c} C_2 = \frac{\alpha \cdot J_0 (1 - e^{-\tau p})}{p^2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2} \right) \quad (14)$$

$$-\frac{p}{c} C_2 = \frac{p^2 \alpha \cdot J_0 (1 - e^{-\tau p})}{c^2 p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2 \right)} \quad (15)$$

$$C_2 = -\frac{p \alpha \cdot J_0 \cdot (1 - e^{-\tau p})}{c p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2 \right)} \quad (16)$$

Тогда

$$u^L = \frac{\alpha \cdot J_0 \cdot (1 - e^{-\tau p})}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2 \right)} \left(\gamma e^{-\gamma x} - \frac{p}{c} \cdot e^{-\frac{px}{c}} \right) \quad (17)$$

Переход из пространства Лапласа к оригиналу