

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Теоретическая механика»

РАСЧЁТНОЕ ЗАДАНИЕ

**Исследование напряжённо-деформированного состояния составной
толстостенной сферы, части которой выполнены из упругих материалов
по дисциплине «Теория упругости»**

Выполнил

А.А. Муравцев

Преподаватель

Р.А. Филиппов

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1	Постановка задачи	2
1.1	Концептуальная постановка задачи	2
1.2	Математическая постановка задачи	3
2	Решение поставленной задачи	4
2.1	Аналитическое решение	4
2.2	Решение в конечно-элементном пакете ANSYS	10
3	Выводы	16

1 Постановка задачи

1.1 Концептуальная постановка задачи

В рамках линейной теории упругости рассмотреть напряженно-деформированное состояние составной толстостенной сферы, внутренняя и внешняя части которой выполнены из упругих материалов.

Внутренняя поверхность ($R = a$) нагружается перемещением; на границе частей сферы ($R = b$) идеальный контакт слоёв; внешняя поверхность ($R = c$) свободна.

Построить графики зависимости перемещений и напряжений, возникающих при деформации, от координат.

Задачу решить аналитически и численно с помощью конечно-элементного пакета.

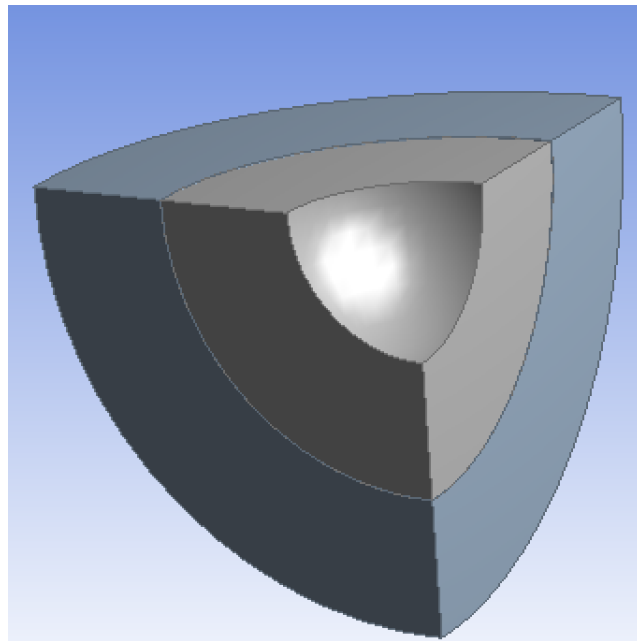


Рис. 1: Восьмая часть двухслойной поллой сферы.

1.2 Математическая постановка задачи

Обозначим

$u_1 = u_r(r, \theta, \varphi)$, $u_2 = u_\theta(r, \theta, \varphi)$, $u_3 = u_\varphi(r, \theta, \varphi)$ – компоненты вектора перемещений;

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{rr}$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{\varphi\varphi}$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{r\theta}$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{\theta\varphi}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{r\varphi}$ – компоненты тензора малых деформаций;

$\sigma_{11} = \sigma_{rr}$, $\sigma_{22} = \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{33} = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{r\theta}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{\theta\varphi}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{r\varphi}$ – компоненты тензора напряжений.

Граничные условия:

1) $u_1^i|_{r=a} = u_0$ – нагружение внутренней поверхности внезапно возникшим перемещением;

2) $\sigma_{11}^i|_{r=b} = \sigma_{11}^e|_{r=b}$ – первое условие идеального контакта слоёв (равенство нормальных составляющих напряжений);

3) $u_1^i|_{r=b} = u_1^e|_{r=b}$ – второе условие идеального контакта слоёв (равенство радиальных перемещений);

4) $\sigma_{11}^e|_{r=c} = 0$ – внешняя поверхность свободна.

При заданных параметрах (модуль Юнга и коэффициент Пуассона) упругих материалов внутренней и внешней частей сферы найти зависимость компонент вектора перемещений и тензора напряжений от r , θ , φ и построить соответствующие графики.

Решить задачу аналитически, воспользовавшись соотношениями линейной теории упругости, и численно методом конечных элементов.

2 Решение поставленной задачи

2.1 Аналитическое решение

Удобно применять сферические координаты. В силу центральной симметрии напряженного и деформированного состояний толстостенной сферы все её точки могут перемещаться только в радиальном направлении. Следовательно, ожидаемые деформированное и напряженное состояния не будут зависеть от переменных θ и φ .

Общие выражения для компонентов тензора малых деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{du(r)}{dr}, & \varepsilon_{22} &= \frac{u(r)}{r}, & \varepsilon_{33} &= \frac{u(r)}{r} \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} = 0, & \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{31} = 0, & \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{32} = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Относительное изменение объёма (объёмное расширение) имеет вид:

$$\Theta = \frac{du(r)}{dr} + \frac{2u(r)}{r}\tag{2}$$

Выражения напряжений из закона Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{11} = \lambda\left(\frac{du(r)}{dr} + \frac{2u(r)}{r}\right) + 2\mu\frac{du(r)}{dr}, \\ \sigma_{22} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{22} = \lambda\left(\frac{du(r)}{dr} + \frac{2u(r)}{r}\right) + 2\mu\frac{u(r)}{r}, \\ \sigma_{33} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{33} = \lambda\left(\frac{du(r)}{dr} + \frac{2u(r)}{r}\right) + 2\mu\frac{u(r)}{r},\end{aligned}\tag{3}$$

Дифференциальное уравнение равновесия без учёта массовых сил запишется в следующем виде:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma_{11}}{dr} + \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{r} = 0.\tag{4}$$

Подставляя выражения σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} из (3) в уравнение равновесия (4), получаем:

$$\lambda\left(\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2\left(\frac{du(r)}{dr}\right)}{r} - \frac{2u(r)}{r^2}\right) + 2\mu\left(\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2\left(\frac{du(r)}{dr}\right)}{r} - \frac{2u(r)}{r^2}\right) = 0.\tag{5}$$

Решения полученного дифференциального уравнения равновесия в перемещениях

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2\left(\frac{du(r)}{dr}\right)}{r} - \frac{2u(r)}{r^2} = 0\tag{6}$$

для внутренней и внешней частей составной сферы запишутся в виде:

$$u^i(r) = C_1r + \frac{C_2}{r^2}, \quad u^e(r) = C_3r + \frac{C_4}{r^2}.\tag{7}$$

Подставим найденные решения (7) в выражение для σ_{11} из (3):

$$\sigma_{11}^i = 3\lambda^i C_1 + 2\mu^i \left(C_1 - \frac{2C_2}{r^3} \right), \quad \sigma_{11}^e = 3\lambda^e C_3 + 2\mu^e \left(C_3 - \frac{2C_4}{r^3} \right). \quad (8)$$

Подставим полученные выражения (7) и (8) в граничные условия:

$$\begin{cases} u^i(a) = C_1 a + \frac{C_2}{a^2} = u_0, \\ \sigma_{11}^i(b) = \sigma_{11}^e(b) \Leftrightarrow 3\lambda^i C_1 + 2\mu^i \left(C_1 - \frac{2C_2}{b^3} \right) = 3\lambda^e C_3 + 2\mu^e \left(C_3 - \frac{2C_4}{b^3} \right), \\ u^i(b) = u^e(b) \Leftrightarrow C_1 b + \frac{C_2}{b^2} = C_3 b + \frac{C_4}{b^2}, \\ \sigma_{11}^e(c) = 3\lambda^e C_3 + 2\mu^e \left(C_3 - \frac{2C_4}{c^3} \right) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решая полученную систему четырёх алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными в системе символьных вычислений Maple, находим постоянные интегрирования:

```
> sol := simplify(solve({eqna, eqnb1, eqnb2, eqnc}, {C1, C2, C3, C4})); assign(sol);
sol := C1
= \frac{8 u_0 a^2 \left( (b^3 - c^3) \mu_e^2 + \left( 2 \mu_i + \frac{3 \lambda_e}{2} \right) b^3 + c^3 \left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) \right) \mu_e + \frac{3 c^3 \lambda_e \mu_i}{2}}{(-8 b^6 + (8 a^3 + 8 c^3) b^3 - 8 a^3 c^3) \mu_e^2 + \left( (8 \mu_i - 12 \lambda_e + 12 \lambda_i) b^6 + \left( (4 \mu_i + 12 \lambda_e + 6 \lambda_i) c^3 + 16 a^3 \left( \mu_i + \frac{3 \lambda_e}{4} \right) \right) b^3 + 8 \left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) c^3 a^3 \right) \mu_e + 12 \lambda_e c^3 \left( \left( \frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) b^3 + a^3 \mu_i \right)}, C2 =
- \frac{8 b^3 \left( (b^3 - c^3) \mu_e^2 + \left( -\mu_i + \frac{3 \lambda_e}{2} - \frac{3 \lambda_i}{2} \right) b^3 - \frac{c^3 \left( \mu_i + 3 \lambda_e + \frac{3 \lambda_i}{2} \right)}{2} \right) \mu_e - \frac{3 \left( \mu_i + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) \lambda_e c^3}{4} u_0 a^2}{(-8 b^6 + (8 a^3 + 8 c^3) b^3 - 8 a^3 c^3) \mu_e^2 + \left( (8 \mu_i - 12 \lambda_e + 12 \lambda_i) b^6 + \left( (4 \mu_i + 12 \lambda_e + 6 \lambda_i) c^3 + 16 a^3 \left( \mu_i + \frac{3 \lambda_e}{4} \right) \right) b^3 + 8 \left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) c^3 a^3 \right) \mu_e + 12 \lambda_e c^3 \left( \left( \frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) b^3 + a^3 \mu_i \right)}, C3
= \frac{24 b^3 u_0 \left( \frac{\lambda_i}{2} + \mu_i \right) a^2 \mu_e}{(-8 b^6 + (8 a^3 + 8 c^3) b^3 - 8 a^3 c^3) \mu_e^2 + \left( (8 \mu_i - 12 \lambda_e + 12 \lambda_i) b^6 + \left( (4 \mu_i + 12 \lambda_e + 6 \lambda_i) c^3 + 16 a^3 \left( \mu_i + \frac{3 \lambda_e}{4} \right) \right) b^3 + 8 \left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) c^3 a^3 \right) \mu_e + 12 \lambda_e c^3 \left( \left( \frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) b^3 + a^3 \mu_i \right)}, C4
= \frac{3 u_0 a^2 b^3 c^3 (\lambda_i + 2 \mu_i) (2 \mu_e + 3 \lambda_e)}{(-8 b^6 + (8 a^3 + 8 c^3) b^3 - 8 a^3 c^3) \mu_e^2 + \left( (8 \mu_i - 12 \lambda_e + 12 \lambda_i) b^6 + \left( (4 \mu_i + 12 \lambda_e + 6 \lambda_i) c^3 + 16 a^3 \left( \mu_i + \frac{3 \lambda_e}{4} \right) \right) b^3 + 8 \left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) c^3 a^3 \right) \mu_e + 12 \lambda_e c^3 \left( \left( \frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) b^3 + a^3 \mu_i \right)}
```

Рис. 2: Постоянные интегрирования.

Подставляя найденные константы в (8), находим σ_{11}^i и σ_{11}^e :

```
> sigma[i, r] := simplify(sigma[i, r]);
sigma[i, r] := \left( 4 \left( (b - c) (b^2 + b c + c^2) \left( b^3 \mu_i + \frac{\left( \mu_i + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) r^3}{2} \right) \mu_e^2 + \left( -\mu_i \left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) b^6 + \left( \left( -\frac{c^3}{2} + r^3 \right) \mu_i^2 + \left( -\frac{3 \lambda_e}{2} - \frac{3 \lambda_i}{4} \right) c^3 + \frac{3 r^3 (\lambda_e + 2 \lambda_i)}{4} \right) \mu_i + \frac{9 r^3 \lambda_e \lambda_i}{8} \right) b^3 \right. \right.
+ \left. \frac{\left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) \left( \mu_i + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) r^3 c^3}{2} \right) \mu_e - \frac{3 (b - r) \mu_i \left( \mu_i + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) (b^2 + b r + r^2) c^3 \lambda_e}{4} a^2 u_0 \right) / \left( r^3 \left( (-b^6 + (a^3 + c^3) b^3 - a^3 c^3) \mu_e^2 + \left( \left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) b^6 + \left( 2 a^3 + \frac{c^3}{2} \right) \mu_i \right. \right. \right.
+ \left. \left. \left( \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) c^3 + \frac{3 a^3 \lambda_e}{2} \right) b^3 + \left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) c^3 a^3 \right) \mu_e + \frac{3 \lambda_e c^3 \left( \left( \frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) b^3 + a^3 \mu_i \right)}{2} \right)
> sigma[e, r] := simplify(sigma[e, r]);
sigma[e, r] := - \frac{3 a^2 b^3 \mu_e u_0 (\lambda_i + 2 \mu_i) (3 c^3 \lambda_e + 2 c^3 \mu_e - 3 r^3 \lambda_e - 2 \mu_e r^3)}{2 r^3 \left( (-b^6 + (a^3 + c^3) b^3 - a^3 c^3) \mu_e^2 + \left( \left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) b^6 + \left( \left( \frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) c^3 + 2 a^3 \left( \mu_i + \frac{3 \lambda_e}{4} \right) \right) b^3 + \left( \mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) c^3 a^3 \right) \mu_e + \frac{3 \lambda_e c^3 \left( \left( \frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) b^3 + a^3 \mu_i \right)}{2} \right)}
```

Рис. 3: Компонента σ_{11} тензоров напряжений для внутренней и внешней частей сферы.

Аналогично находим оставшиеся диагональные компоненты тензоров напряжений и радиальные перемещения точек внутренней и внешней частей составной сферы:

```

> sigma[i, phi] := simplify(subs(sigma[i, phi]));
sigma[e, phi] := simplify(subs(sigma[e, phi]));
sigma[i, theta] := simplify(subs(sigma[i, theta]));
sigma[e, theta] := simplify(subs(sigma[e, theta]));

```

$$\begin{aligned}
\sigma_{i, \phi} &:= - \left(2 \left((b-c) (b^2 + b c + c^2) \left(b^3 \mu_i - \left(\mu_i + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) r^3 \right) \mu_e^2 + \left(-\mu_i \left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) b^6 + \left(\left(-\frac{c^3}{2} - 2 r^3 \right) \mu_i^2 + \left(\left(-\frac{3 \lambda_e}{2} - \frac{3 \lambda_i}{4} \right) c^3 - \frac{3 r^3 (\lambda_e + 2 \lambda_i)}{2} \right) \mu_i - \frac{9 r^3 \lambda_e \lambda_i}{4} \right) b^3 - \left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) \left(\mu_i + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) r^3 c^3 \right) \mu_e - \frac{3 \left(\mu_i + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) \mu_i c^3 (b^3 + 2 r^3) \lambda_e}{4} a^2 u_0 \right) \Bigg/ \left(r^3 \left((-b^6 + (a^3 + c^3) b^3 - a^3 c^3) \mu_e^2 + \left(\left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) b^6 + \left(\left(2 a^3 + \frac{c^3}{2} \right) \mu_i + \left(\frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) c^3 \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{3 a^3 \lambda_e}{2} \right) b^3 + \left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) c^3 a^3 \right) \mu_e + \frac{3 \lambda_e c^3 \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) b^3 + a^3 \mu_i \right)}{2} \right) \right) \\
\sigma_{e, \phi} &:= \frac{3 b^3 u_0 (\lambda_i + 2 \mu_i) a^2 \mu_e (c^3 + 2 r^3) (2 \mu_e + 3 \lambda_e)}{4 r^3 \left((-b^6 + (a^3 + c^3) b^3 - a^3 c^3) \mu_e^2 + \left(\left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) b^6 + \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) c^3 + 2 a^3 \left(\mu_i + \frac{3 \lambda_e}{4} \right) \right) b^3 + \left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) c^3 a^3 \right) \mu_e + \frac{3 \lambda_e c^3 \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) b^3 + a^3 \mu_i \right)}{2} \right)} \\
\sigma_{i, \theta} &:= - \left(2 \left((b-c) (b^2 + b c + c^2) \left(b^3 \mu_i - \left(\mu_i + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) r^3 \right) \mu_e^2 + \left(-\mu_i \left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) b^6 + \left(\left(-\frac{c^3}{2} - 2 r^3 \right) \mu_i^2 + \left(\left(-\frac{3 \lambda_e}{2} - \frac{3 \lambda_i}{4} \right) c^3 - \frac{3 r^3 (\lambda_e + 2 \lambda_i)}{2} \right) \mu_i - \frac{9 r^3 \lambda_e \lambda_i}{4} \right) b^3 - \left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) \left(\mu_i + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) r^3 c^3 \right) \mu_e - \frac{3 \left(\mu_i + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) \mu_i c^3 (b^3 + 2 r^3) \lambda_e}{4} a^2 u_0 \right) \Bigg/ \left(r^3 \left((-b^6 + (a^3 + c^3) b^3 - a^3 c^3) \mu_e^2 + \left(\left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) b^6 + \left(\left(2 a^3 + \frac{c^3}{2} \right) \mu_i + \left(\frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) c^3 \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{3 a^3 \lambda_e}{2} \right) b^3 + \left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) c^3 a^3 \right) \mu_e + \frac{3 \lambda_e c^3 \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) b^3 + a^3 \mu_i \right)}{2} \right) \right) \\
\sigma_{e, \theta} &:= \frac{3 b^3 u_0 (\lambda_i + 2 \mu_i) a^2 \mu_e (c^3 + 2 r^3) (2 \mu_e + 3 \lambda_e)}{4 r^3 \left((-b^6 + (a^3 + c^3) b^3 - a^3 c^3) \mu_e^2 + \left(\left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{2} \right) b^6 + \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_e}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) c^3 + 2 a^3 \left(\mu_i + \frac{3 \lambda_e}{4} \right) \right) b^3 + \left(\mu_i - \frac{3 \lambda_e}{2} \right) c^3 a^3 \right) \mu_e + \frac{3 \lambda_e c^3 \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \lambda_i}{4} \right) b^3 + a^3 \mu_i \right)}{2} \right)}
\end{aligned}$$

Рис. 4: Компоненты σ_{22} и σ_{33} тензоров напряжений для внутренней и внешней частей сферы.

```

> u[i] := unapply(u[i](r), r);
u_i := r

```

$$\begin{aligned}
&\mapsto \left(8 \cdot u_0 \cdot a^2 \cdot \left((b^3 - c^3) \cdot \mu_e^2 + \left(2 \cdot \mu_i + \frac{3 \cdot \lambda_e}{2} \right) \cdot b^3 + c^3 \cdot \left(\mu_i - \frac{3 \cdot \lambda_e}{2} \right) \cdot \mu_e + \frac{3 \cdot c^3 \cdot \lambda_e \cdot \mu_i}{2} \right) \cdot r \right) \Bigg/ \left((-8 \cdot b^6 + (8 \cdot a^3 + 8 \cdot c^3) \cdot b^3 - 8 \cdot a^3 \cdot c^3) \cdot \mu_e^2 + \left((8 \cdot \mu_i - 12 \cdot \lambda_e + 12 \cdot \lambda_i) \cdot b^6 + \left((4 \cdot \mu_i + 12 \cdot \lambda_e + 6 \cdot \lambda_i) \cdot c^3 + 16 \cdot a^3 \cdot \left(\mu_i + \frac{3 \cdot \lambda_e}{4} \right) \right) \cdot b^3 + 8 \cdot \left(\mu_i - \frac{3 \cdot \lambda_e}{2} \right) \cdot c^3 \cdot a^3 \right) \cdot \mu_e + 12 \cdot \lambda_e \cdot c^3 \cdot \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \cdot \lambda_i}{4} \right) \cdot b^3 + a^3 \cdot \mu_i \right) \right) - \left(8 \cdot b^3 \cdot \left((b^3 - c^3) \cdot \mu_e^2 + \left(-\mu_i + \frac{3 \cdot \lambda_e}{2} - \frac{3 \cdot \lambda_i}{2} \right) \cdot b^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{c^3 \cdot \left(\mu_i + 3 \cdot \lambda_e + \frac{3 \cdot \lambda_i}{2} \right)}{2} \right) \cdot \mu_e - \frac{3 \cdot \left(\mu_i + \frac{3 \cdot \lambda_i}{2} \right) \cdot \lambda_e \cdot c^3}{4} \right) \cdot u_0 \cdot a^2 \Bigg/ \left(\left((-8 \cdot b^6 + (8 \cdot a^3 + 8 \cdot c^3) \cdot b^3 - 8 \cdot a^3 \cdot c^3) \cdot \mu_e^2 + \left((8 \cdot \mu_i - 12 \cdot \lambda_e + 12 \cdot \lambda_i) \cdot b^6 + \left((4 \cdot \mu_i + 12 \cdot \lambda_e + 6 \cdot \lambda_i) \cdot c^3 + 16 \cdot a^3 \cdot \left(\mu_i + \frac{3 \cdot \lambda_e}{4} \right) \right) \cdot b^3 + 8 \cdot \left(\mu_i - \frac{3 \cdot \lambda_e}{2} \right) \cdot c^3 \cdot a^3 \right) \cdot \mu_e + 12 \cdot \lambda_e \cdot c^3 \cdot \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \cdot \lambda_i}{4} \right) \cdot b^3 + a^3 \cdot \mu_i \right) \right) \cdot r^2 \right) \\
&\mapsto \left(24 \cdot b^3 \cdot u_0 \cdot \left(\frac{\lambda_i}{2} + \mu_i \right) \cdot a^2 \cdot \mu_e \cdot r \right) \Bigg/ \left((-8 \cdot b^6 + (8 \cdot a^3 + 8 \cdot c^3) \cdot b^3 - 8 \cdot a^3 \cdot c^3) \cdot \mu_e^2 + \left((8 \cdot \mu_i - 12 \cdot \lambda_e + 12 \cdot \lambda_i) \cdot b^6 + \left((4 \cdot \mu_i + 12 \cdot \lambda_e + 6 \cdot \lambda_i) \cdot c^3 + 16 \cdot a^3 \cdot \left(\mu_i + \frac{3 \cdot \lambda_e}{4} \right) \right) \cdot b^3 + 8 \cdot \left(\mu_i - \frac{3 \cdot \lambda_e}{2} \right) \cdot c^3 \cdot a^3 \right) \cdot \mu_e + 12 \cdot \lambda_e \cdot c^3 \cdot \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \cdot \lambda_i}{4} \right) \cdot b^3 + a^3 \cdot \mu_i \right) \right) + \left(3 \cdot u_0 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot (\lambda_i + 2 \cdot \mu_i) \cdot (2 \cdot \mu_e + 3 \cdot \lambda_e) \right) \Bigg/ \left(\left((-8 \cdot b^6 + (8 \cdot a^3 + 8 \cdot c^3) \cdot b^3 - 8 \cdot a^3 \cdot c^3) \cdot \mu_e^2 + \left((8 \cdot \mu_i - 12 \cdot \lambda_e + 12 \cdot \lambda_i) \cdot b^6 + \left((4 \cdot \mu_i + 12 \cdot \lambda_e + 6 \cdot \lambda_i) \cdot c^3 + 16 \cdot a^3 \cdot \left(\mu_i + \frac{3 \cdot \lambda_e}{4} \right) \right) \cdot b^3 + 8 \cdot \left(\mu_i - \frac{3 \cdot \lambda_e}{2} \right) \cdot c^3 \cdot a^3 \right) \cdot \mu_e + 12 \cdot \lambda_e \cdot c^3 \cdot \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3 \cdot \lambda_i}{4} \right) \cdot b^3 + a^3 \cdot \mu_i \right) \right) \cdot r^2 \right)
\end{aligned}$$

Рис. 5: Радиальные перемещения точек внутренней и внешней частей сферы.

Зададим конкретные значения параметров задачи (Рис. 6). В аналитическом решении все численные значения задаём в СИ. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона внутренней части сферы, выполненной из стали, равны соответственно $E^i = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па и $\nu^i = 0.3$, а модуль Юнга и коэффициент Пуассона внешней части сферы, выполненной из меди, $E^e = 1.3 \cdot 10^{11}$ Па и $\nu^e = 0.34$.

```

> E[i] := 2.1e11 : nu[i] := 0.3 : a := 0.1 : b := 0.2 : c := 0.3 : mu[i] :=  $\frac{E[i]}{2 \cdot (1 + nu[i])}$  : lambda[i] :=  $\frac{2 \cdot mu[i] \cdot nu[i]}{1 - 2 \cdot nu[i]}$  :
> E[e] := 1.3e11 : nu[e] := 0.34 : mu[e] :=  $\frac{E[e]}{2 \cdot (1 + nu[e])}$  : lambda[e] :=  $\frac{2 \cdot mu[e] \cdot nu[e]}{1 - 2 \cdot nu[e]}$  : u[0] := 0.001 :
Напряжения и радиальное перемещение представляются в виде:
> evalf(sigma[i, r], 3); evalf(sigma[i, phi], 3); evalf(sigma[i, theta], 3); evalf(u[i](r), 3);

$$\frac{4.76 \cdot 10^{-24} (-2.98 \cdot 10^{29} - 2.40 \cdot 10^{30} r^3 - 4.44 \cdot 10^{31} (0.2 - 1 \cdot r) (r^2 + 0.2 r + 0.04))}{r^3}$$


$$- \frac{2.38 \cdot 10^{-24} (-6.54 \cdot 10^{29} - 8.38 \cdot 10^{31} r^3)}{r^3}$$


$$- \frac{2.38 \cdot 10^{-24} (-6.54 \cdot 10^{29} - 8.38 \cdot 10^{31} r^3)}{r^3}$$


$$0.000382 r + \frac{9.68 \cdot 10^{-6}}{r^2}$$

> evalf(sigma[e, r], 3); evalf(sigma[e, phi], 3); evalf(sigma[e, theta], 3); evalf(u[e](r), 3);

$$- \frac{0.000196 (-4.06 \cdot 10^{11} r^3 + 1.10 \cdot 10^{10})}{r^3}$$


$$\frac{4.00 \cdot 10^7 (2 \cdot r^3 + 0.027)}{r^3}$$


$$\frac{4.00 \cdot 10^7 (2 \cdot r^3 + 0.027)}{r^3}$$


$$0.000196 r + \frac{0.0000111}{r^2}$$


```

Рис. 6: Числовые значения параметров задачи.

Построим графики зависимости радиальных, тангенциальных напряжений и радиальных перемещений от r (Рис. 7, Рис. 8 и Рис. 9):

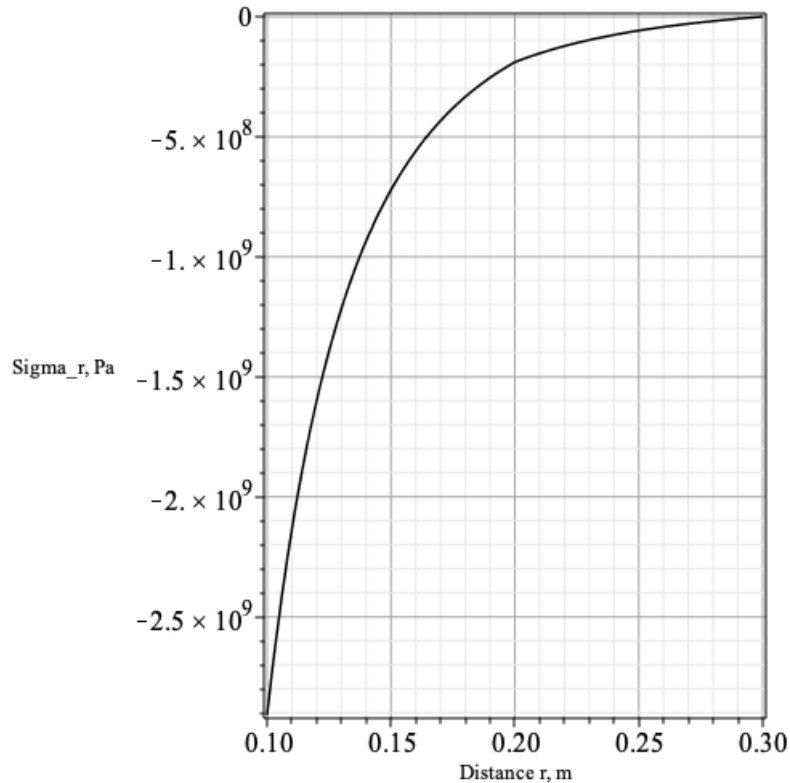


Рис. 7: График зависимости σ_{11} от r .

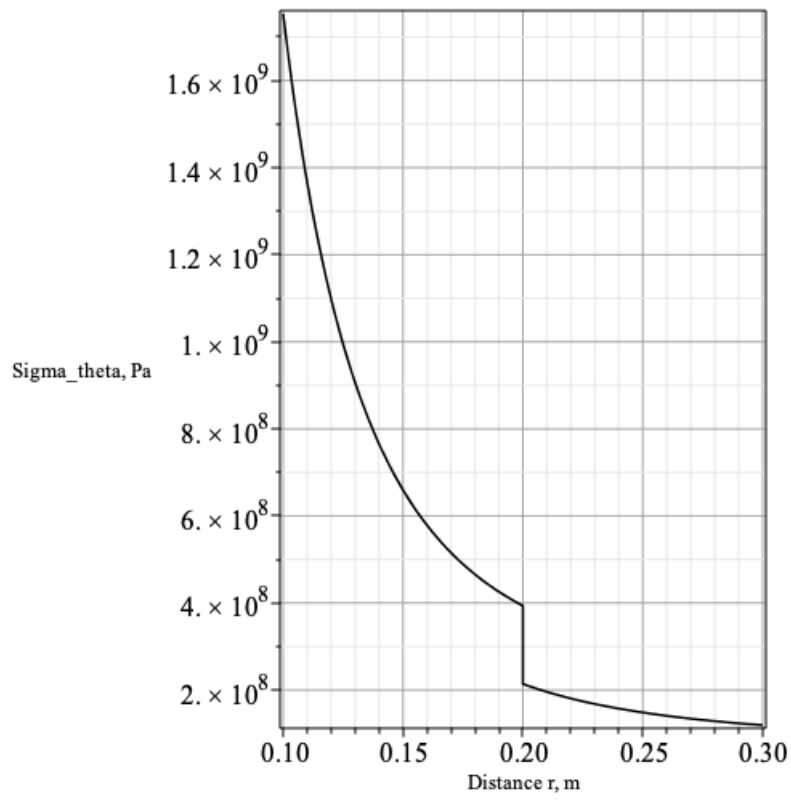


Рис. 8: График зависимости σ_{22} от r .

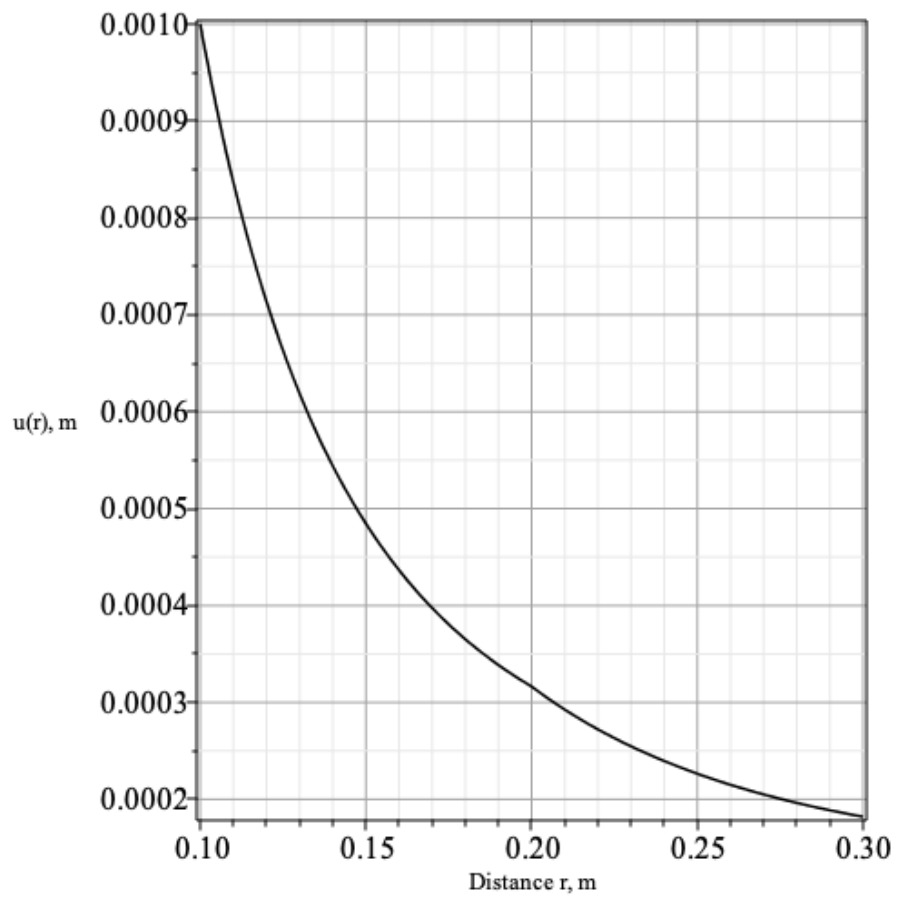


Рис. 9: График зависимости радиальных перемещений от r .

Видим, что графики зависимостей радиальных напряжений $\sigma_{11}(r)$ и радиальных перемещений $u(r)$ состыкуются на границе слоёв (условия идеального контакта слоёв выполнены), однако испытывают разрыв первой производной. Графики зависимостей тангенциальных напряжений $\sigma_{22}(r)$ и $\sigma_{33}(r)$ испытывают разрыв на границе слоёв, так как параметры (коэффициенты Ламе) внутреннего и внешнего материалов разные.

2.2 Решение в конечно-элементном пакете ANSYS

В КЭМ-пакете рассматривается одна восьмая составной полый сферы (Рис. 1). Расчёты производятся для одной восьмой части сферы, чтобы существенно сократить количество конечных элементов и время расчёта. Сетка представлена на Рис. 10.

Внутренний слой (модуль Юнга $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$) и внешний слой (модуль Юнга $E = 1.3 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$) составной сферы выполнены из упругих материалов.

Внутренняя поверхность нагружается перемещением 1 мм в радиальном направлении, т.е. по нормали к поверхности (Рис. 11).

Для того, чтобы перемещения были только по радиусу, для каждой из трёх граней одной восьмой части сферы задаётся нулевое перемещение вдоль оси, перпендикулярной к этой грани. В частности, для грани, лежащей в плоскости xOz , задали нулевое перемещение по оси Oy (Рис. 12).

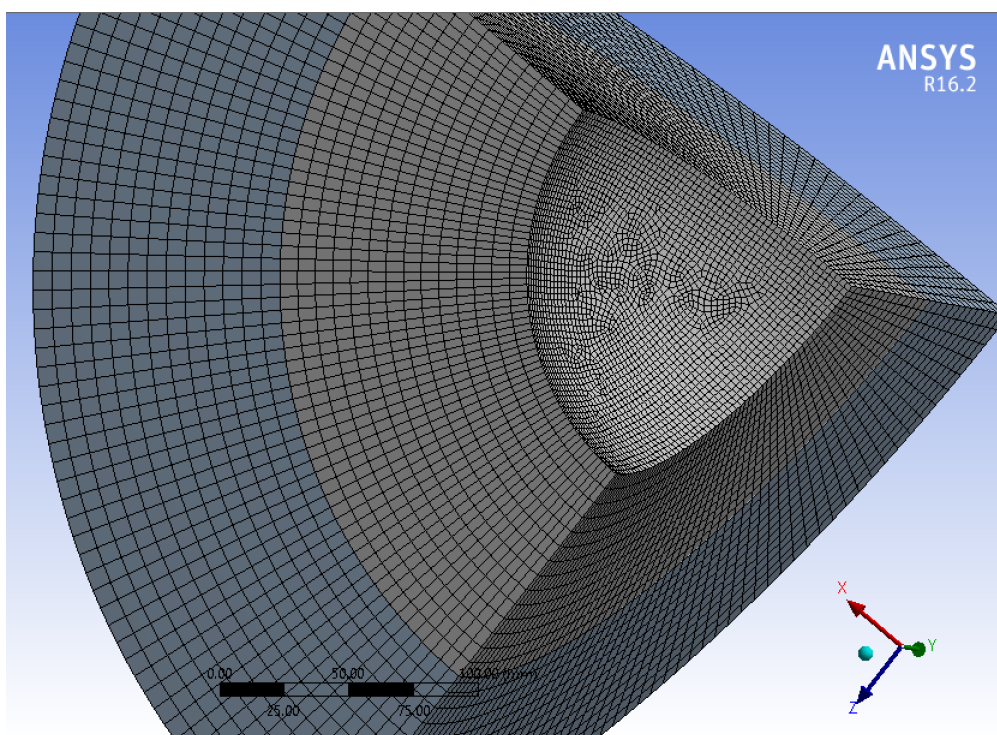


Рис. 10: Сетка.

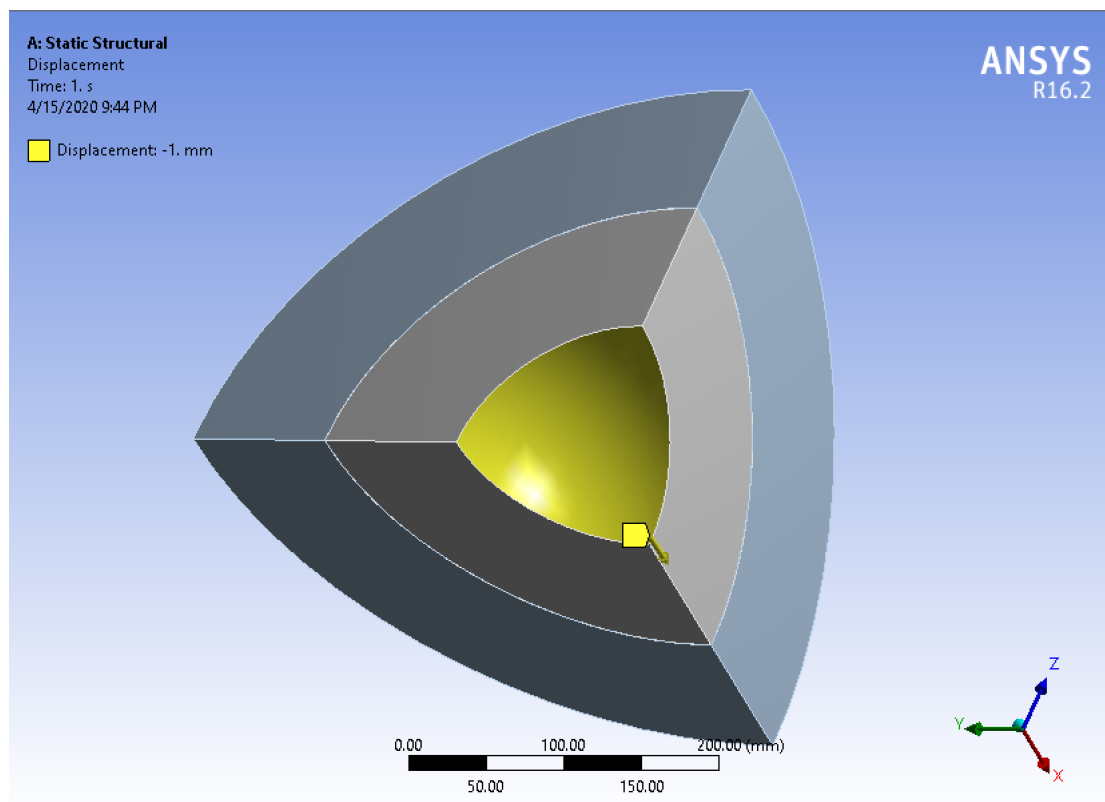


Рис. 11: Граничное условие на внутреннюю поверхность.

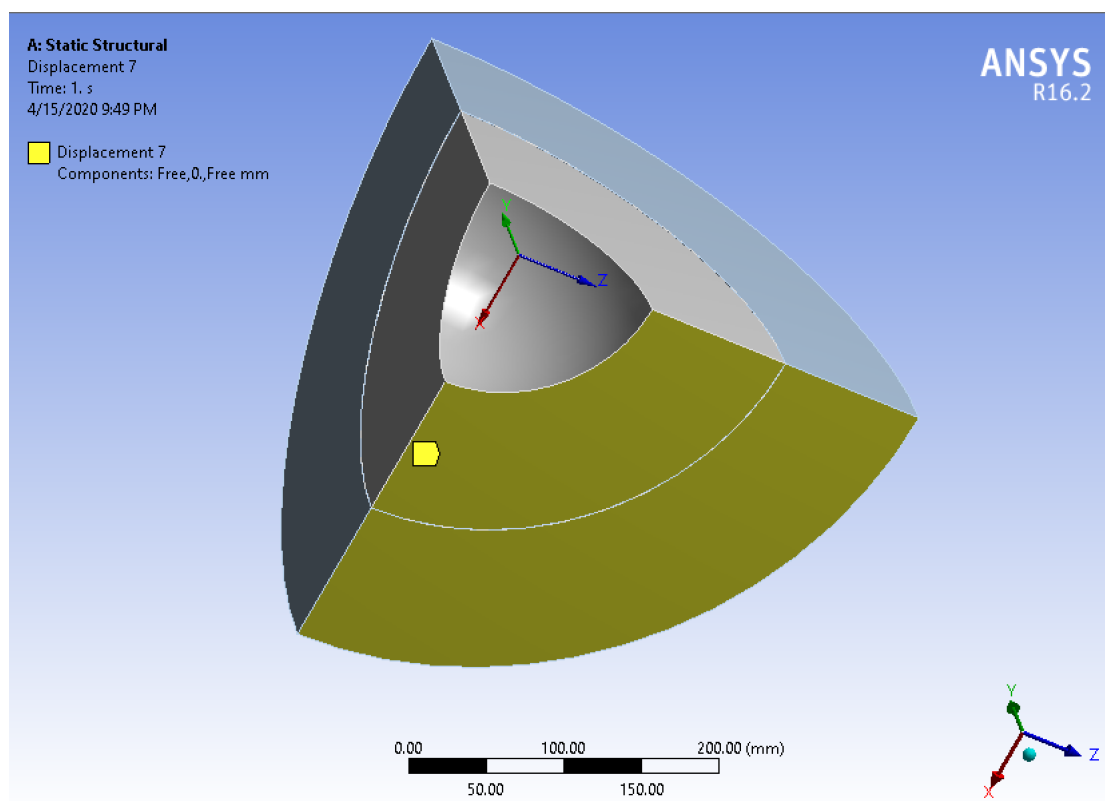


Рис. 12: Граничное условие на грань (две другие грани - аналогично).

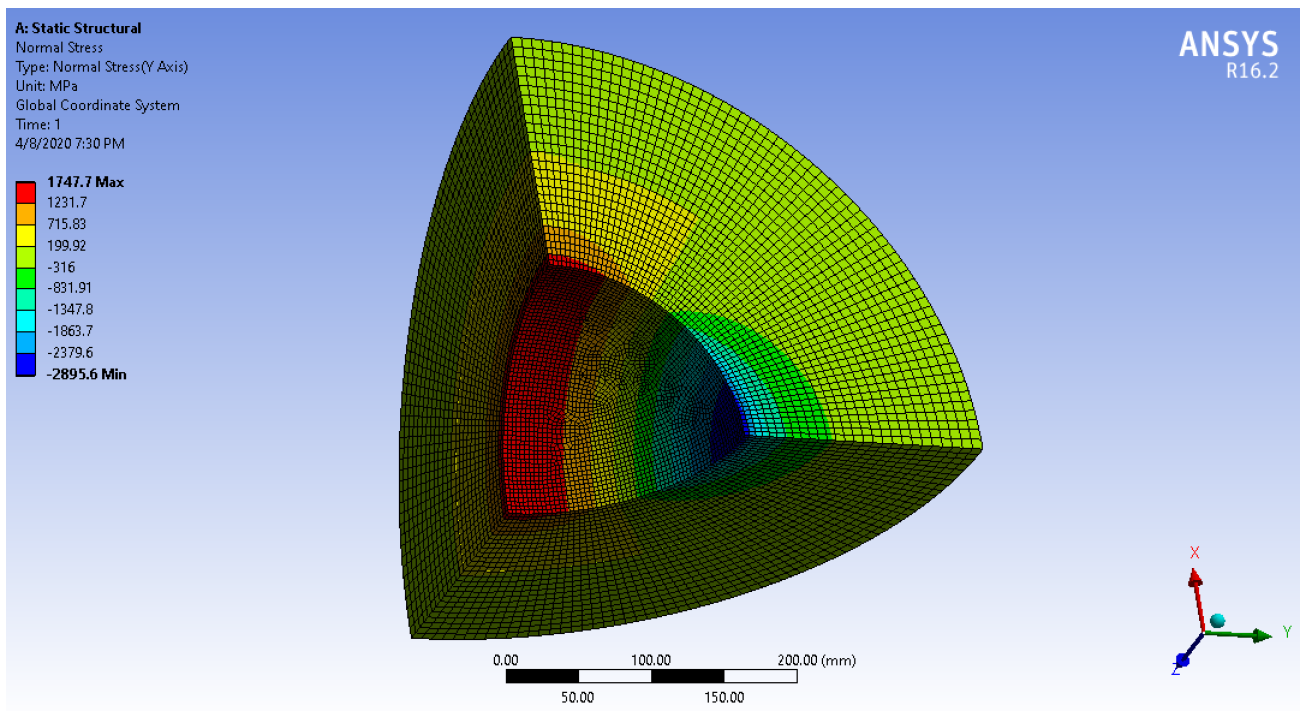


Рис. 13: Распределение напряжений, направленных вдоль оси Oy.

На Рис. 13 построено распределение напряжений, направленных вдоль оси Oy. Следовательно, значения вдоль радиуса по ребру, лежащему на оси Oy, представляют собой радиальные напряжения σ_{11} , а значения вдоль радиуса по ребру, лежащему на оси Ox, есть тангенциальные напряжения σ_{22} и σ_{33} . Соответственно, на Рис. 13 синим цветом обозначено максимальное (по модулю) радиальное напряжение, а красным цветом – максимальные (по модулю) тангенциальные напряжения. Значения этих напряжений из colorbar $\max(|\sigma_{11}(r)|) \approx 2.9 \cdot 10^9$ Па и $\max(|\sigma_{22}(r)|) = \max(|\sigma_{33}(r)|) \approx 1.75 \cdot 10^9$ Па совпадают (с относительной погрешностью, не превышающей 6%) со значениями, полученными аналитически (Рис. 7 и Рис. 8).

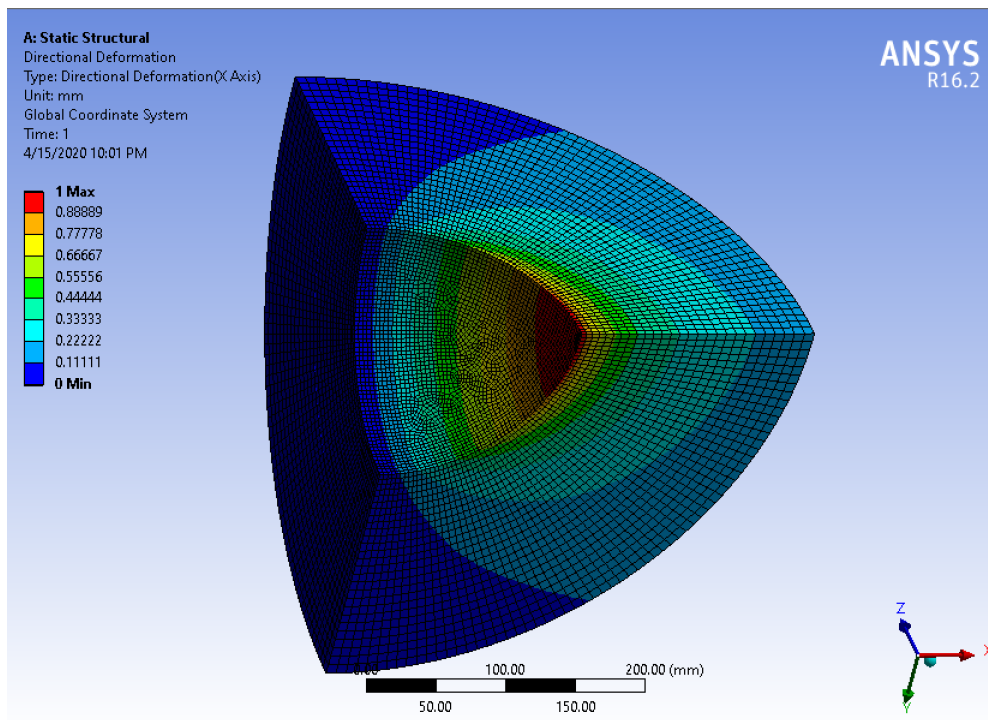


Рис. 14: Распределение деформаций, направленных вдоль оси Ox .

На Рис. 14 построено распределение перемещений, направленных вдоль оси Ox . Следовательно, значения вдоль радиуса по ребру, лежащему на оси Ox , представляют собой радиальные перемещения $u(r)$. Видим, что максимальное радиальное перемещение равно 1 мм (граничное условие выполнено). Также на Рис. 14 отображено отсутствие тангенциальных перемещений.

В MS Excel построим графики зависимостей $\sigma_{11}(r)$, $\sigma_{22}(r)$ и $u(r)$. Значения функций получены в ANSYS.

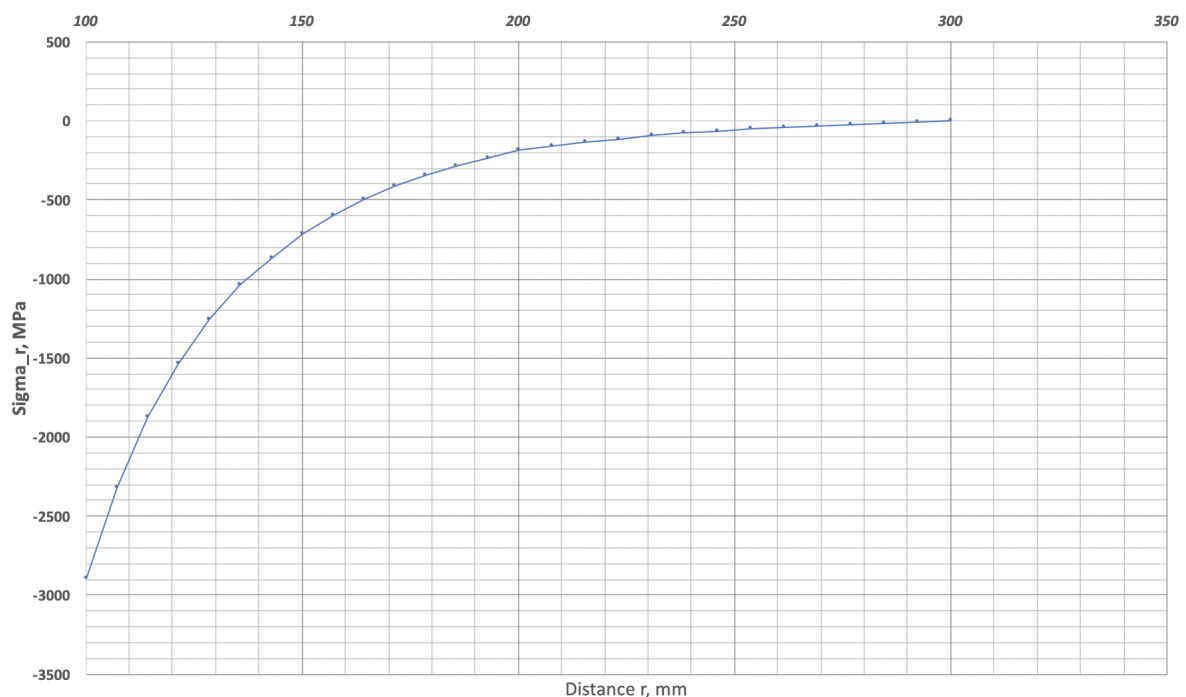


Рис. 15: Зависимость радиальных напряжений от радиуса.

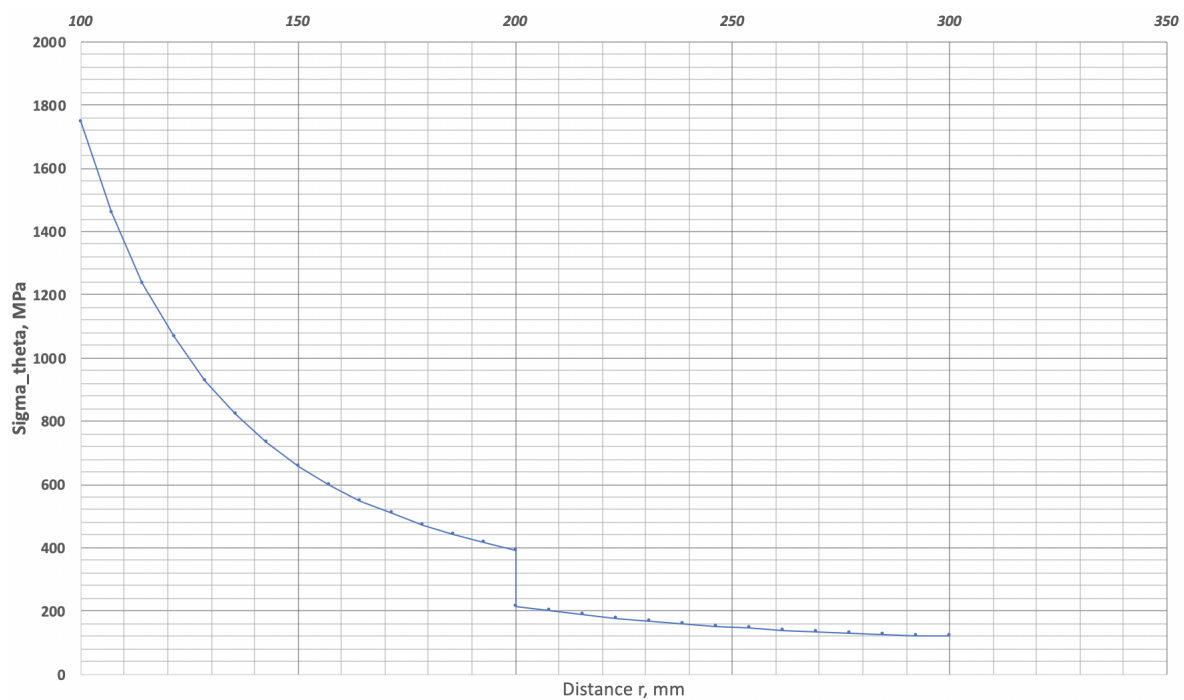


Рис. 16: Зависимость тангенциальных напряжений от радиуса.

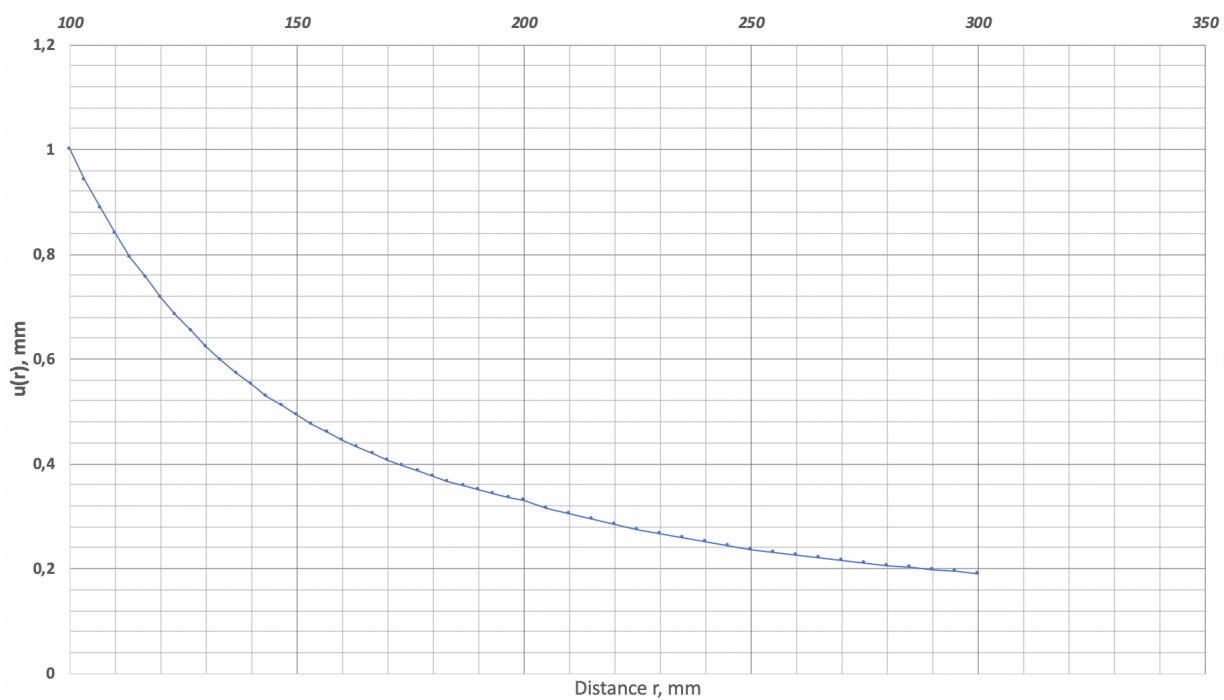


Рис. 17: Зависимость радиальных перемещений от радиуса.



Рис. 18: Зависимость относительной ошибки численного решения для σ_{11} и σ_{22} от r .

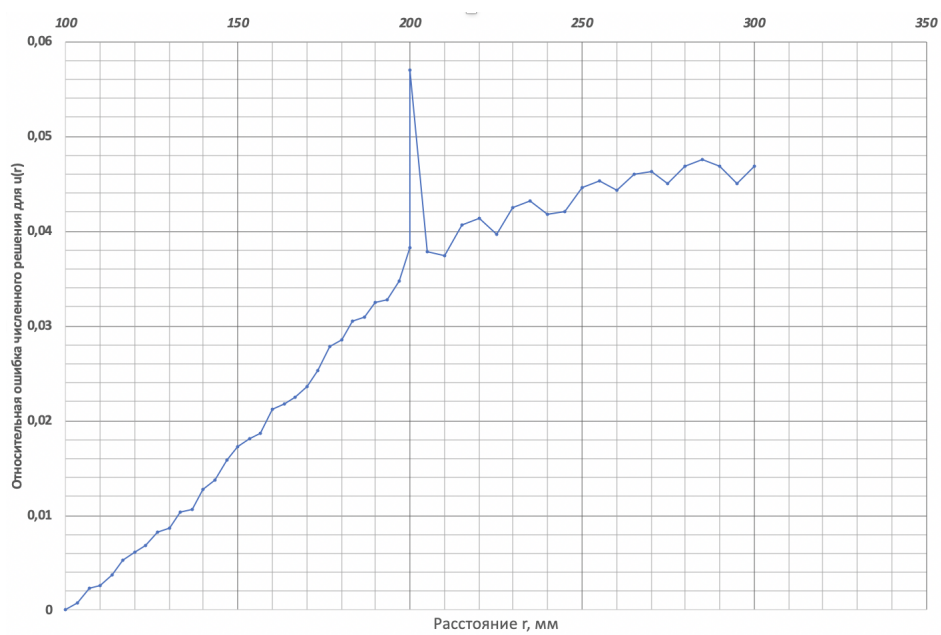


Рис. 19: Зависимость относительной ошибки численного решения u_1 от r .

3 Выводы

В рамках линейной теории упругости получено аналитическое решение для задачи о напряжённо-деформированном состоянии составной толстостенной сферы, внутренняя и внешняя части которой выполнены из двух разных упругих материалов. Построены графики напряжений и перемещений при заданных параметрах материалов внешней и внутренней частей сферы.

Средствами конечно-элементного пакета ANSYS построены распределения напряжений и перемещений по сфере. Аналитические результаты были подтверждены расчётами в КЭМ-пакете ANSYS. Относительная ошибка численных решений не превышает 6%.

Полученное в рамках линейной теории упругости максимальное растягивающее напряжение стального слоя возникает на внутренней поверхности сферы и примерно равно 1750 МПа, что больше предела текучести (240 МПа) и предела прочности (820 МПа) стали. Максимальное растягивающее напряжение медного слоя возникает на границе двух слоёв и примерно совпадает с пределом прочности меди (210 МПа). Следовательно, при заданных граничных условиях сфера разрушится.

Максимальная разница в аналитическом и КЭМ решениях для напряжений достигается при $r = 0$, так как в этой области производная аналитического решения максимальна, а дискретизация величины в области, где она меняется быстро, ведёт к большей ошибке, чем дискретизация в области, где величина меняется медленно. Максимальная разница в аналитическом и КЭМ решениях для перемещений достигается на границе слоёв, так как дискретизация области с резко меняющимися параметрами (модулем Юнга, коэффициентом Пуассона) ведёт к большей ошибке, и на внешней границе, так как она наиболее удалена от внутренней границы, на которую наложено условие на перемещение.