Общая информация.

Видеолекции курса доступны по ссылке: GO TO HYDRAULIC FRACTURING.

Содержание

Гидроразрыв пласта
Конспект лекций и семинаров

Муравцев А.А.[1]

3 февраля 2023 г.

1 Лекция 16.02.2021.

План на сегодня: рассказать про основные компоненты моделирования ГРП (HF = hydraulic fracturing), про основные уравнения и основные геометрии.
В двух словах разница между conventional и unconventional:
1) conventional – то, что было, грубо говоря, до 2000-х годов – вертикальная скважина, пласт, рвём гидроразрывом пласта, обычно одна трещина
2) unconventional – когда сланцы, например, то бурится горизонтальная скважина, проводится многостадийный ГРП (за одну стадию можем сделать несколько трещин, затем поставить перегородку, сделать ещё несколько трещин и так далее); можем также сделать несколько скважин
Концептуально с точки зрения математики разницы между conventional и unconventional практически нет. У нас либо одна трещина (conventional) или множество трещин (unconventional), т.е. с точки зрения моделирования unconventional моделировать дольше, сложнее. Но повторюсь, что концептуально основная физика везде одинакова.

1.1 Из чего состоит любая модель ГРП? Основные компоненты

Основные компоненты любой модели гидроразрыва пласта:
1) закон сохранения жидкости; в 99% случаев предполагается, что жидкость несжимаема, тогда выполняется закон сохранения объёма; но бывают случаи сжимаемых жидкостей (например, когда ГРП делают газом или делают пенный ГРП), тогда выполняется закон сохранения массы, т.е. закачиваемый объём жидкости равен объёму жидкости в трещине плюс утечки (трещину ГРП делаем в пористом резервуаре, поэтому есть утечки из трещины в резервуар – в зависимости от пористости и других параметров утечки могут либо доминировать, либо нет);
2) уравнение течения жидкости в трещине;
3) равновесие (упругость) горной породы;
4) условие распространения трещины;
5) транспорт проппанта

[1] конспектирует; email: almuravcev@yandex.ru

1.2 Модель утечки по Картеру

2 Лекция 02.03.2021.

2.1 Уравнение упругости, ЗСМ. Задача для полубесконечной трещины

Давайте вспомним предыдущую лекцию.
В модели ГРП **есть несколько основных концепций**, несколько основных физических процессов, которые необходимо описать и которые любой симулятор ГРП описывает (не важны тип геометрии, количество трещин, способ решения явный/неявный – главное: учесть правильную физику/механику).
Первое: закон сохранения жидкости. Предполагается, что она несжимаемая: закачиваем некий объём жидкости в скважину, часть этого объёма генерирует трещину и плюс часть жидкости утекает в виде утечек
Второе: градиент давления внутри трещины, который образуется из-за вязкого течения жидкости.
Третье: уравнение упругости. Мы деформируем породу вокруг трещины; считаем породу линейно-упругим материалом; после деформаций должно выполняться условие равновесия.
Четвёртое: критерий распространения. Аналогия с шариком: уравнение упругости показывает соотношение давления в шарике с его объёмом, а критерий распространения – это условие при котором шарик лопнет. То же самое с трещиной: упругость даёт нам соотношение между давлением жидкости внутри и открытием трещины, а критерий распространения позволяет найти условие, при котором трещина будет распространяться.
Пятое: транспорт проппанта.

В прошлый раз мы подробно остановились на модели утечек Картера и на уравнениях течения жидкости в трещине.
Сейчас продолжим говорить про упругость и критерии распространения.
Упругость: порода вокруг трещины должна быть в равновесии в зависимости от того, какое у трещины открытие или сдвиговое смещение в каждом элементе трещины.
В чём сложность расчёта теории упругости? В том, что этот процесс очень нелокальный. Например, если у нас есть несколько трещин, несколько элементов (множество элементов в каждой трещине), то изменение открытия в каждом элементе влечёт за собой изменение поля напряжений во всём пространстве. Т.е. если мы немного изменим степень открытости одного из элементов, то у нас будет влияние на все элементы. С практической точки зрения коэффициент взаимодействия уменьшается довольно быстро с расстоянием ($\sim 1/r^3$ для трёхмерной геометрии). Т.е. с точки зрения практики можем задать некий радиус, после которого будем обрезать взаимодействия. Но тем не менее всё равно взаимодействие будет нелокальным. В этом сложность упругости.
Для плоской трещины у нас есть довольно простое выражение.
Если рассматриваем плоскую трещину и двухмерную задачу, то давление в трещине равно сжимающему напряжению на бесконечности и плюс дополнительный интеграл от открытия трещины (как функции координаты) с сингулярным ядром.
Т.е. открытие в любой точке трещины влияет на давление по всей трещине.

Для планарной трещины есть более сложное выражение, которое выводится абсолютно аналогично выражению для плоской трещины.

Далее выведем выражение для плоской трещины; для планарной – вывод такой же.

Я буду давать относительно простые примеры и относительно простые геометрии, но все рассматриваемые задачи решены и для сложных геометрий, и для полностью трёхмерных геометрий.

Вы можете найти все эти коэффициенты взаимодействия между элементами (интегральные ядра) для полностью трёхмерной задачи.

Всё, что я Вам покажу, верно для однородного по упругим свойствам материала. Но в реальности могут быть геологические слои и модули упругости Юнга и коэффициенты Пуассона могут меняться от слоя к слою.

Если Вам не страшна жёсткая математика и Вы хотите посчитать коэффициенты взаимодействия между элементами в слоистой среде, то можете посмотреть статью Pierce и Siebrits.

Но нам в рамках курса важна общая концепция: откуда берутся выражения и что описывают с точки зрения физики/механики.

Давайте выведем уравнение упругости. Что такое уравнение упругости? Это условие того, что порода вблизи трещины находится в равновесии. Мы рассматриваем плоскую трещину и вследствие симметрии рассматриваем половину задачи (только верхнюю часть трещины, например).

3 Лекция 09.03.2021.

3.1 Задача для полубесконечной трещины (продолжение), плоская трещина

4 Лекция 16.03.2021.

4.1 Модель радиальной трещины и модель PKN

5 Лекция 23.03.2021.

5.1 Модель EP3D

6 Лекция 02.04.2021.

6.1 Модель Planar3D ILSA: основные уравнения, классификация элементов

7 Лекция 08.04.2021.

7.1 Модель Planar3D ILSA: дискретизация, поиск фронта, алгоритм

8 Лекция 13.04.2021.

8.1 Модель Planar3D Biot: постановка задачи, перенос граничных условий

9 Лекция 20.04.2021.

9.1 Модель Planar3D Biot: слабая постановка, штраф, пороупругие эффекты

10 Лекция 27.04.2021.

10.1 Перенос проппанта: постановка задачи, обезразмеривание, оседание

11 Лекция 30.04.2021.

11.1 Перенос проппанта: осреднение, численный алгоритм, бриджинг

12 Лекция 11.05.2021.

12.1 Моделирование течения жидкости в скважине

Мы с вами движемся дальше. Сегодня у нас будут тема про моделирование скважин. Т.е. до этого мы рассматривали преимущественно именно процессы в самой трещине, процессы в окружающем пласте (такие как утечки или деформация породы), а закачка всегда предполагалась на забое скважины (расход задавался на входе в саму трещину). Но вообще говоря у нас с вами есть скважины и то давление на входе в трещину, которое мы получаем в расчётах, не совпадает с давлением, которое мы получаем при измерении какими-то приборами (как на поверхности, так и когда мы опускаем датчик давления вниз к забою).

Зачем нам необходимо моделировать скважину?
Во-первых, чтобы знать, какое давление на забое скважины и как оно соотносится с давлением на устье скважины. Почему это важно? С одной стороны, можно было бы сказать: давайте поставим датчик давления на забое и всё будет классно, но этот датчик давления будет стоять не на самой трещине (т.е. между датчиком и трещиной будет либо участок трубы, либо как минимум участок с перфораций вдоль которых возникает падение давления из-за трения; в итоге, измеряемое давление BHP будет немного выше, чем давление на входе в трещину). Датчик забойного давления BHP практически никогда не ставят, потому что это дорого; обычно мы знаем только давление на устье WHP.
Чтобы осуществить пересчёт BHP через известное WHP нам необходимо учесть падение давления за счёт трения жидкости при движении по трубе и гидростатическое давление. Т.е. получаем, что за счёт трения давление на забое снижается (относительно WHP), а за счёт гидростатики давление на забое увеличивается (относительно WHP).
Кроме того, скважину интересно моделировать, чтобы объяснить наблюдаемый hammer effect: при резком закрытии скважины наблюдаются колебательные движения жидкости между скважиной и трещиной, которые имеют форму затухающих колебаний. И по этим затухающим колебаниям пытаются проводить диагностику. Как минимум говорят, что если есть hammer effect, то связь между скважиной и трещиной достаточно хорошая (т.е. перфорацию сделали достаточно качественно). Дальше по hammer эффекту пытаются оценить размеры трещины (ширину, длину).
Ещё дальше пытаются понять, какой порт заработал (если есть несколько портов) – правда это уже немного другая технология, которая называется tube waves от компании Schlumberger.

Для чего ещё моделировать скважину?
Если мы запустили пульсы проппанта (с определённой концентрацией) наверху (на устье), то никто не говорит, что они в таком же виде дойдут до забоя. Вообще говоря, они могут размазаться. Сегодня мы размазывание не будем рассматривать, потому что для этого нужна двухскоростная модель, а сегодня мы рассмотрим только односкоростную модель. Но вообще говоря из-за того, что у нас есть профиль скорости, частички проппанта будут собираться (проваливаться) к центру.

Размазывание концентрации проппанта важно моделировать, чтобы понимать, какое значение концентрации будет на входе в трещину.
Замечание аудитории. Слышали, что при движении по круглой трубе частички проппанта будут собираться в кольцо на расстоянии 0.6 радиуса от центра. Говорят, что это связано с тем, что сами частички проппанта могут крутиться вокруг своей оси.
Сегодня рассмотрим модель попроще, чтобы вы поняли общую схему, а дальше уже можно придумывать более сложные модели (главное понять, какой эффект хочется описать).

Теперь давайте приступим к самой модели.
Основные предположения модели:
1) наклонная скважина переменного радиуса R (на рисунке я специально нарисовал 2 цилиндра, т.к. скважина вообще говоря может иметь переменное сечение, но в реальности оно обычно кусочно постоянное);
2) односкоростная модель $\vec{u}_p = \vec{u}_f = \vec{u}_m$ (жидкость и проппант движутся с одинаковой скоростью и эта скорость равна усреднённой скорости, формула для которой была в прошлый раз) – это оправдано, когда жидкость достаточно вязкая и частички проппанта как-бы заморожены в жидкость;
3) жидкость неньютоновская (т.е. жидкость со степенной реологией);
4) течение не расслаивается (не может быть такого , что проппант где-то внизу пошёл и течение расслоилось);
5) ламинарный, переходный, турбулентный режимы;
6) сжимаемостью пренебрегаем.

Что нам нужно, чтобы описать течение рассматриваемой жидкости?
1) Закон сохранения объёма проппанта:

$$\frac{\partial\left(cS(x)\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(cS(x)u_p\right)}{\partial x} = 0, \quad c_p \equiv c \tag{1}$$

2) Закон сохранения объёма жидкости:

$$\frac{\partial\left((1-c)S(x)\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left((1-c)S(x)u_f\right)}{\partial x} = 0, \quad c_f \equiv 1-c \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) уже усреднённые по сечению скважины, но они выводятся точно также, как и для течения проппанта в трещине (только сейчас вместо раскрытия трещины $w(x)$ используем площадь сечения $S(x)$ и сейчас нет утечек).
Далее используя предположение односкоростной модели $u_p = u_f = u_m$, где u_m – среднеобъёмная усреднённая скорость смеси по сечению $S(x)$, складываем уравнения (1) и (2):

$$\frac{\partial\left(S(x)u_m\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(Q(t,x)\right)}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

где $Q(t,x) = Su_m = const(t) = Q_{inlet}(t), \quad S = \pi R^2$.
Полученное уравнение говорит нам о том, что расход через любое поперечное сечение скважи-

ны одинаков и зависит от расхода, закачиваемого в скважину сверху. Если изменяется сечение скважины, то соответственно изменяется скорость течения так, чтобы расход оставался прежним.
3) Граничное условие (на концентрацию проппанта) на устье скважины:

$$c|_{x=0} = c_{inlet}(t) \tag{4}$$

Если проводить аналогию с течением проппанта в трещине, то уравнение (3) аналогично эллиптическому уравнению, в котором необходимо было искать давление.
В итоге: мы знаем расход $Q_{inlet}(t)$; знаем площадь $S(x)$; можем найти скорость $u_m(x,t)$; как только знаем скорость, мы можем подставить её в уравнение (1), решить это уравнение и с учётом граничного условия (4) найти концентрацию проппанта.

При решении данной задачи можно использовать тот же алгоритм, что и для переноса проппанта в трещине, т.е. взять одномерную разностную схему (например, Лакса-Вендроффа с лимитерами), но я хотел бы ещё показать другой численный алгоритм. В данном случае, когда рассматриваем односкоростную модель, этот алгоритм проще, намного быстрее и точнее.

Можно показать, что в случае односкоростной модели уравнение (1) для переноса проппанта можно переписать в более простом виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_m \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

(уравнение (1) – это закон сохранения в дивергентной форме; а уравнение (5) – это классическое уравнение переноса, которое всем известно с урматов).
Физический смысл уравнения (5): концентрация c неизменно переносится векторным полем $\vec{u}$ (в данном случае со скоростью u_m вдоль скважины).
Разобьём суммарное время закачки на $k-1$ временных интервалов:

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad t_0 = 0 \tag{6}$$

Обозначение: F_k – это значение величины F в момент времени t_k.
В лагранжевых координатах (t, X) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ имеем решение вида:

$$c(t, X(t)) = c(t, X|_{t=t_k}), \quad X(t) = X|_{t=t_k} + \int\limits_0^t u_m(X(s))ds \tag{7}$$

Грубо говоря, мы в начале трубы выпускаем некоторую лагранжеву частицу со скоростью u_m, и формула (7) говорит нам, что эта частица через время t дойдёт до положения с координатой X.
Соответственно мы можем рассматривать весь этот процесс в виде набора фронтов концентрации. За каждый новый шаг по времени мы выпускаем новый фронт, далее он движется по трубе и мы фиксируем кусочно постоянный уровень концентрации проппанта на каком-то участке

скважины.
Чтобы перейти в эйлерову сетку в точке x, мы просто смотрим между какими фронтами эта точка x лежит и говорим, что концентрация равна этому значению.

Нам нужна не только концентрация, а прежде всего нам нужно знать давление. Если на забое будет слишком большое давление, то жидкость может просто порвать трубу. Как будем считать давление? Для этого берём уравнение Навье-Стокса. Выводим аналогично выводу транспорта проппанта для трещины. Но здесь в роли малого параметра будет

$$\varepsilon = \frac{2R}{L},$$

где $2R$ – диаметр скважины; L – длина скважины.
Вдоль оси Ox:

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\tau_{rx}\right) + \rho g \sin\theta \tag{8}$$

$$\tau_{ij} = 2\mu_s D_{ij}, \quad D = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right), \quad \tau_{rx} = \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \tag{9}$$

Есть зависимость вязкости смеси от концентрации проппанта. Формула Нолти:

$$\mu_s(c) = \mu_f \left(1 - \frac{c}{c_{max}}\right)^{-2.5 n_{clean}}, \tag{10}$$

где $c_{max} = 0.65$ – максимальная концентрация упаковки, μ_f – вязкость чистой жидкости (гель без проппанта), n_{clean} – индекс течения чистой жидкости (без проппанта).
По сути сейчас докажем формулу Пуазейля с учётом силы тяжести:

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) + \rho g \sin\theta \tag{11}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r}\right) = \left(\frac{dp(x)}{dx} - \rho g \sin\theta\right) r \tag{12}$$

С учётом $\tau_{rx}|_{r=0} = 0$ (условие регулярности):

$$\mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} = \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\theta\right)\frac{r}{2} \tag{13}$$

Интегрируем:

$$u_x(r) = \frac{1}{4\mu_s}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\theta\right) r^2 + C \tag{14}$$

Используем граничное условие $u_x|_{r=R} = 0$:

$$u_x(r) = \underbrace{-\frac{R^2}{4\mu_s}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\theta\right)}_{u_{max}}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = u_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{15}$$

Нашли максимальную скорость u_{max}, а уравнение переноса записано в терминах средней скорости, поэтому необходимо найти соотношение между средней скоростью и максимальной скоростью.

Возьмём и усредним найденный профиль скорости по сечению:

$$u_m = \frac{1}{|S|}\int\limits_S u_x dS = \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R u_{max} r\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) dr d\varphi =$$

$$= u_{max}\frac{2\pi}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{r}{R}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) d\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{u_{max}}{2} \quad (16)$$

Таким образом, получаем среднюю скорость ламинарного течения. В целом отсюда можно найти давление для ламинарного течения!

В тех же самых предположениях можем вывести профиль скорости для степенной жидкости:

$$\tau_{ij} = K_s \dot{\gamma}^{n-1} D_{ij}, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}^2} \quad (17)$$

Профиль скорости:

$$u_x = u_{max}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^{(n+1)/n}\right) \quad (18)$$

Сейчас выведем формулу для давления немного по-другому. Опять стартуем с уравнения Навье-Стокса и сразу усредняем:

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau_{rx}) + \rho g\sin\theta \;\Bigg|\; \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_S (\cdot) dS \quad (19)$$

Получаем:

$$\frac{d\overline{p}}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} + \overline{\rho} g\sin\theta, \quad (20)$$

где $\tau_w = -\tau_{rx}|_{r=R}$ – напряжение сдвига (трения) на стенке трубы. Его можно измерить и в случае турбулентного течения (например, для известного перепада давления найти τ_w из (20)), поэтому этот вывод формулы для давления более общий (в предыдущем выводе не понятно, что такое профиль скорости в случае турбулентного течения).

Видим, что для определения давления профиль скорости нам и не нужен.

Обычно экспериментаторы работают с безразмерными величинами для того, чтобы можно было масштабировать результаты (измерить на одной трубе, а распространить результаты на трубы произвольного диаметра), поэтому вводят коэффициент трения Фаннинга:

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2/2} \quad (21)$$

Тогда уравнение (20) примет вид:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\rho u_m^2}{R} f_s + \rho g \sin\theta \tag{22}$$

Какой физический смысл у полученного уравнения? Это баланс сил: есть сила давления, кроме того проталкивать жидкость нам помогает сила тяжести, а препятствует трение жидкости о стенки трубы.

Давайте посчитаем коэффициент Фаннинга для ламинарного течения.
Профиль скорости:

$$u_x = 2u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \tag{23}$$

Подставляем профиль скорости в выражение для τ_w:

$$\tau_w = -\mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{4\mu_s u_m}{R} \tag{24}$$

Подставляем τ_w в выражение для коэффициента Фаннинга:

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2/2} = \frac{4\mu_s u_m}{R\rho u_m^2/2} = \frac{8 \cdot 2}{\rho u_m (2R)/\mu_s} = \frac{16}{Re}, \tag{25}$$

где

$$Re = \frac{\rho u_m (2R)}{\mu_s}$$

Для степенной жидкости можно показать, что

$$f_s = \frac{16}{Re'}, \tag{26}$$

где

$$Re' = \frac{\rho u_m^{2-n} (2R)^n}{K_s \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n 8^{n-1}} \text{ — обобщённое число Рейнольдса}$$

Для турбулентного течения явной формулы для коэффициента Фаннинга нет, но есть экспериментальные корреляции.

13 Лекция 18.05.2021.

13.1 Модели инициации трещины гидроразрыва