

Содержание

1 Лекция 08.02.2022.	4
1.1 Введение	4
1.2 Уравнение сплошной среды	7
1.3 Решение Д'Аламбера. Граничные условия	9
1.3.1 Пример	11
1.4 Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость	12
1.4.1 Примеры	15
2 Лекция 15.02.2022.	17
2.1 Использование преобразований Фурье и Лапласа. Введение	17
2.2 Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности	21
3 Лекция 22.02.2022.	27
3.1 Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия	27
3.2 Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость	33
3.3 Метод стационарной фазы	37
4 Лекция 01.03.2022.	40
4.1 Повторение. Преобразование Лапласа. Теорема о вычетах. Ряд Лорана. Лемма Жордана	40
4.2 Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа	46
5 Лекция 15.03.2022.	50
5.1 Применение преобразования Лапласа. Трудности	50
5.2 Несвязанная динамическая задача термоупругости	53
5.3 Дельта-функция Дирака	54
5.4 Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера	55
5.5 Движущийся источник звука	57
5.6 Влияние включений на волновой процесс. Смешанный спектр	58
6 Лекция 22.03.2022.	62
6.1 Небольшое замечание к задаче	62
6.2 О стационарных решениях	63
6.3 Метод предельного поглощения	65
6.3.1 Функция Грина статической задачи	65
6.3.2 Функция Грина динамической задачи	68
6.3.3 Применение метода предельного поглощения	71
7 Лекция 29.03.2022.	75
7.1 Повторение метода предельного поглощения	75
7.2 Примеры волн в различных средах	79
7.2.1 Термоупругие волны	79
7.2.2 Плазменные волны	81
7.2.3 Прямоугольный волновод	83

8	Лекция 05.04.2022.	86
8.1	Волны в акустических средах	86
8.2	Поверхностные гравитационные волны	94
9	Лекция 12.04.2022.	97
9.1	Краткое повторение материала о волнах в акустических средах	97
9.2	Поверхностные гравитационные волны на границе между водой и воздухом	98
10	Лекция 19.04.2022.	104
10.1	Продолжаем разговор о поверхностных волнах	104
10.2	Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей	105
10.3	Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей, которые движутся друг над другом	107
10.4	Волны на границу между водой и воздухом без учёта силы тяжести (решение Эйлера)	111
11	Лекция 26.04.2022.	113
11.1	Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле	113
11.2	Наклонное падение волны	117
12	Лекция 17.05.2022.	120
12.1	Повторение материала о волнах в сферической СК	120
12.2	Энергия звуковых волн	121

Волны в деформируемых средах

Конспект лекций

Вавилов Д.С.¹ Муравцев А.А.²

6 июня 2022 г.

Список вопросов по дисциплине «Волны в деформируемых средах», 2022

1. Уравнение сплошной среды. Решение Д'Аламбера. Границные условия.
2. Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость.
3. Связь между ν и σ . Изменение ν и σ при отражении от свободной поверхности.
4. Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия.
Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость.
5. Метод стационарной фазы
6. Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа.
7. Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера.
8. Влияние включения на волновой процесс. Смешанный спектр.
9. Стационарные решения. Метод предельного поглощения.
Функция Грина.
10. Волны в различных средах.
11. Волны в акустических средах
12. Поверхностные гравитационные волны на границу между водой и воздухом.
13. Поверхностные гравитационные волны на границу двух жидкостей.
14. Поверхностные гравитационные волны на границу двух жидкостей, который движется друг над другом.
15. Волны на границу между водой и воздухом без учета силы тяжести (Решение Эйлера).
16. Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле.
17. Наклонное падение волны.
18. Энергия звуковых волн.

¹лектор и составитель рукописного конспекта, Высшая школа теоретической механики, Санкт-Петербургский Политехнический университет. Дополнительные материалы к лекциям [доступны по ссылке](#).

²дополнил конспект и объединил файлы; email: almuravcev@yandex.ru

1 Лекция 08.02.2022.

1.1 Введение

Бабилов Дмитрий Сергеевич
насма: londr@yandex.ru

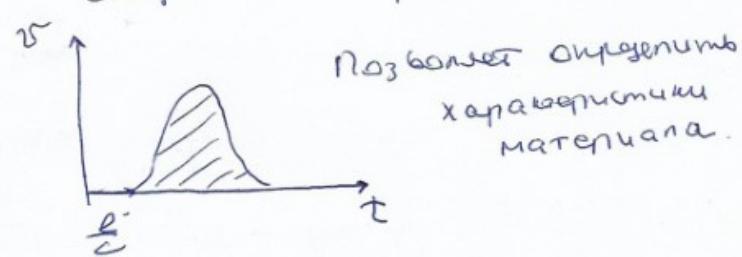
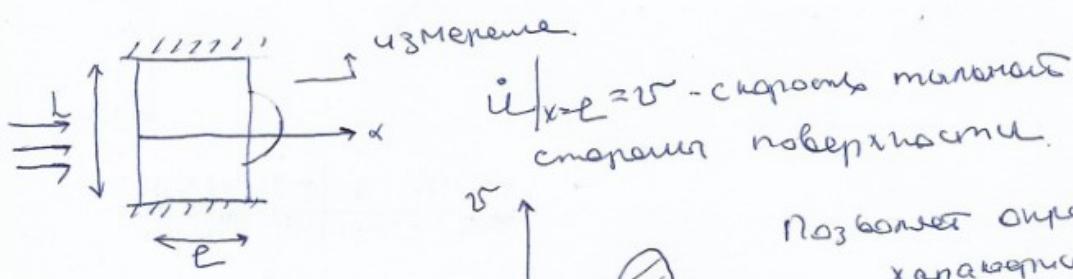
Литература

1. Н. В. Карлов, Н. А. Киряченко
Колебания. Волны. Струи и туманы
2. Фм. Узем. Линейные и
нелинейные волны
3. М.И. Радинович, Д.И. Трудесков
Введение в теорию колебаний
и волн
4. Ф. М. Морс, Г. Фейнбах
Методы теоретической физики (2 том)
5. Г. Ардженте. Математические
методы в физике

Волны в деформируемых средах

08.02. Введение. Одномерные волны в деформируемом теле.

Волна - это распространение колебаний в сплошных средах. Исследование динамического процесса, когда необходимо установить как передаче возмущение от одной элементарной области к другой.



Предположим, что мы можем менять время взаимодействия. При этом у нас есть общее время характеризующее время

$$\frac{G}{M} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{G}} \quad \text{Материал имеет}$$

одна из характеристик времени.

$$1. \text{ Макроуровень } \tau_1 = \frac{L}{c}$$

c - скорость звука $c = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$

$$] L = 1 \text{ см} \Rightarrow \tau_1 = \frac{10^{-2} \cdot c}{5 \cdot 10^3 \text{ м/с}} = 2 \text{ мкс}$$

$$f = \frac{1}{\tau_1} = 5 \cdot 10^5 \text{ Гц} \quad (1)$$

2. Зёрна $D \cdot (100 \div 200) \text{ мкм}$
 $\tau_2 = \frac{D}{C} = \frac{\omega^2 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ с}, f \sim \omega^2 \div 10^2 \text{ Гц}$

3. Межаморфные звезды основные

$$\tau_3 = T \sqrt{\frac{G}{m}} \approx 10^{12} \div 10^{15} \text{ с}$$

Если мы хотим получение вспышки на скане
 $\tau_{\text{всп}} \leq \tau_{1,2,3}$

1. $\frac{L}{\ell} \ll 1$ толщина пластины очень мала
 Тогда вспышка чрезвычайно быстрая

2. Однородное напряжённое состояние.

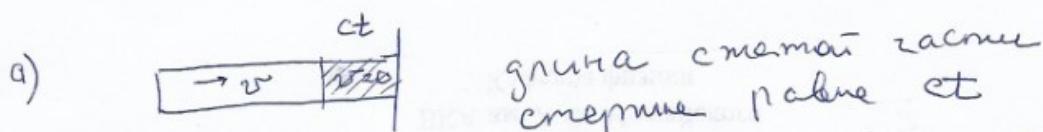
$$\Sigma = \begin{pmatrix} G_x E_{xy} C_{xz} & \\ E_{yx} G_y & E_{yz} \\ C_{zx} & E_{zy} G_z \end{pmatrix} \quad G_x - \text{главное напряжение}$$

Оценить время упругого удара гибкой
 Тер, рассматривая столкновение
 стекла, находящегося торцом на
 неподвижную стекну.

Используя упругий удар произошло
 мгновенно $dP = \frac{F dt}{\Delta t}$ или взаимодействие

Беспрерывно меняется

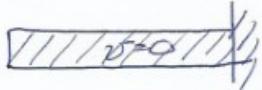
$t=0$ момент соприкосновения стекла
 со стеклом



②

1.2 Уравнение сплошной среды

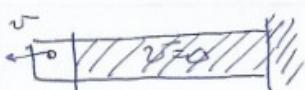
δ)



Весь стержень скжат
деформирован вином

Кинетическая энергия начального
стержня целиком превращается в
помензансную энергию упругой деформации

б)



Второй этап: стержень
возвращается в исходное

состоиние. Этому процессу назначается
у свободного торца и постепенно
приближается к нулю.

Энергия упругой деформации стержня
целиком переходит обратно в
кинетическую энергию.

$$\tau = \frac{2l}{c} - \text{гнительность движущения}$$

Базовые ур-я: баланс импульса,
баланс момента импульса, баланс массы,
баланс энергии (в первом термодинамике)

$$\text{Баланс импульса } \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \rho \frac{d\vec{v}_x}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_x}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t} + \vec{v}_x \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_x}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t}$$

Второй порядок погрешности

$\frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t}$ - локальное производное

$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$ - конвективное производное

(3)

Баланс массы: $\frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$

+ Определяющее ур-е (изотермический случай)

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = p \frac{du}{dt} \\ \frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \sigma = E \varepsilon \end{cases}$$

Линеаризуем уравнение относительно гравитационного сопротивления:

$$p = p_0 + \tilde{p}, \quad u_x = 0 + 2\tilde{u}, \quad \tilde{u}_x = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Уз первое уравнение $\tilde{p} = -j^0 \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$

$p = p_0(1 - \varepsilon)$ - закон изменения плотности

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - p_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ p = p_0(1 - \frac{\partial u}{\partial x}) \\ \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad C^2 = \frac{E}{p_0} \text{ - скорость звука}$$



$$T \cdot u_{xx} - p_0 u_{tt} = 0$$

В этом случае

$$C^2 = \frac{T}{p_0}$$

Уравнение стационарной среды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

(4)

1.3 Решение Д'Аламбера. Граничные условия

Решение Д'Аламбера

$\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ - преобразование Галилея

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} c + \frac{\partial u}{\partial \eta} c$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c^2 = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} -$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f^*(\eta)$$

$$\begin{aligned} u &= \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \\ &= f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c}) \end{aligned}$$

(5)

Как определять функции f_1 и f_2 - ?

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = -c_0 f_1'(x) + c_0 f_2'(x) = \psi(x)$$

Измак: $f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(d) dd + C$$

Система имеет решение (однозначное)

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\lambda) d\lambda$$

Формула Данаудеря

Определил граничных условий

Краевые условия на бесконечности

① Ограничность на ∞

② Условие излучение - удача волны

и u_x независимо



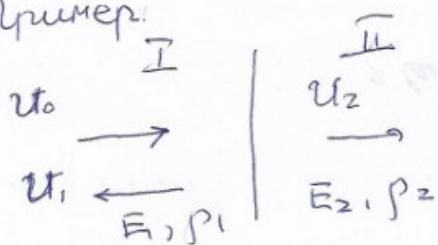
$$0 \leq x < \infty$$

$$u = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

③ Условие локализации $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx < \infty$

1.3.1 Пример

Пример:

 $u_0(x,t)$ - падающая волна $u_1(x,t)$ - отраженная волна $u_2(x,t)$ - проходящая волна

$$\begin{cases} u_0 + u_1 \Big|_{x=0} = u_2 \\ E_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_0 + u_1}{c_1} \right] \Big|_{x=0} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \end{cases}$$

$$u_0(x,t) = \tilde{u}_0(t - \frac{x}{c_1})$$

$$u_1(x,t) = \tilde{u}_1(t + \frac{x}{c_1})$$

$$u_2(x,t) = \tilde{u}_2(t - \frac{x}{c_2})$$

$$\begin{cases} u_0 + u_1 = u_2 \\ \frac{E_1}{G} \left(-u_0 + u_1 \right) = -\frac{E_2}{c_2} u_2 \end{cases} \quad (\text{после упрощения})$$

$$u_0 + u_1 = u_2$$

$$\gamma(u_0 - u_1) = +u_2$$

$$\gamma = \frac{E_1 c_2}{E_2 G} = \frac{G^2 P_1 C_2}{C_2^2 P_2 G} = \frac{G P_1}{G P_2} \quad (\text{cp - балльное сопротивление})$$

$$\gamma(u_0 - u_1) = +u_0 + u_1$$

$$-\gamma u_1 = +u_0 - \gamma u_1$$

$$-u_1(\gamma + 1) = u_0(1 - \gamma)$$

$$u_1 = -\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} u_0 (t + \frac{x}{c_1})$$

$$u_2 = \frac{2\gamma}{1 + \gamma} u_0 (t - \frac{x}{c_2})$$

$$R = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad D = \frac{2\gamma}{1 + \gamma}, \quad R + D = 1$$

(7)

1.4 Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость

$$\bar{E}_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0, \quad \bar{E}_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_0$$

напряженность электрического поля
(аналогична с электродинамикой)

$$\frac{r_4}{r_2} = f \quad r_2 - показатель преломления$$

$$\bar{E}_1 = -\frac{1-f}{1+f} E_0, \quad \bar{E}_2 = \frac{2f}{1+f} E_0$$

Сравнить с полученным результатом

Спектральные свойства оператора Д'Аламбера

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{не симм. о членах})$$

Спектр частот и форм свободных
покоющихся (свободных частот и гармоник)

Ограничность на дисперсии

Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = A(x) e^{i\omega t} \Rightarrow A_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

$$LA = \Delta A, \quad L = -\frac{d}{dx}, \quad \Delta = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\omega = \pm \Delta c$$

$$[\omega] = \frac{pc}{c}, \quad [\Delta] = \frac{1}{M} \quad \Delta - \text{вещественное}$$

$$A(x) = a e^{-i\Delta x} + b e^{i\Delta x}$$

$$A(x)_{x \rightarrow \pm\infty} - \text{существо}, \quad \text{т.е. } \Delta - \text{вещественное}$$

(8)

ω - вещественное число
 ω - наше вещественное число! \Rightarrow
 непрерывный спектр.

Соединенная волна (форма) колебаний

$$u_w(x, t, \omega) = a_w e^{i\omega t - i\omega x} + b_w e^{i\omega t + i\omega x} = \\ = a_w e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} + b_w e^{i\omega(t + \frac{x}{c})}$$

Занесем: где есть начальных размежъ
 спектр спектральный. Например,



$$u_k = \sin \frac{\bar{u}_k x}{c} e^{i\omega_k t}$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \frac{\bar{u}_k x}{c} e^{i\omega_k t} \quad \omega_k = \frac{\bar{u}_k c}{c}$$

В случае когерентного спектра

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_w e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} dw + \int_{-\infty}^{\infty} b_w e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} dw \quad (\exists)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_w e^{i\omega s} dw = f_1(s)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_w e^{i\omega \eta} dw = f_2(\eta)$$

$$\therefore f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c})$$

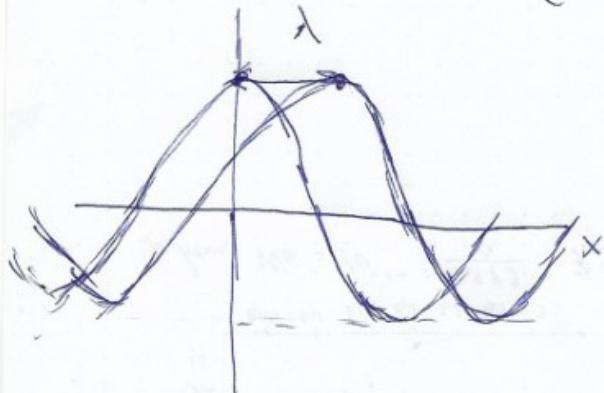
Решение Даламбера

(9)

$$e^{i\omega s} = e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \text{ - собственная волна}$$

Возьмём вещественную часть!

$$\operatorname{Re} e^{i\omega s} = \cos(\omega(t - \frac{x}{c})) = \cos(\omega t - dx)$$



$$\frac{\omega}{c} = d \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = d$$

Большое число

→
направление
распространения

Умножим собственное волнение на единицу — это
единичная волна. С — характеристика
скорости перемещения гармонических
волн. Если скорость кванта
гармоники равна с, то и скорость
всей волны также равна с.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} d\omega = f(t - \frac{x}{c})$$

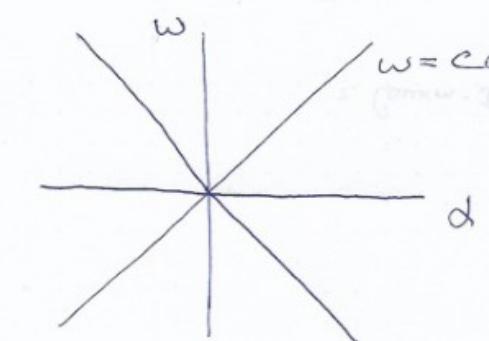
Разоблачение спектра — спектр
распространение гармонических волн

$$C_p = \frac{\omega}{d} \quad \text{В одн. выражении } C_p = C_p(\omega)$$

Оператор Дилендера: волна без
спектра

(10)

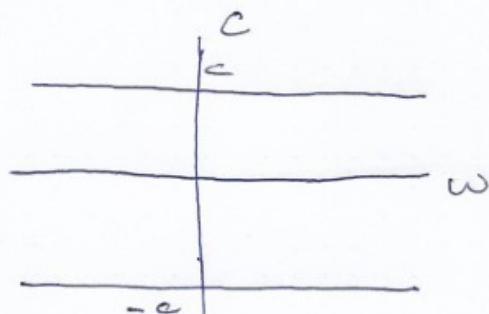
1.4.1 Примеры



Дисперсионные
причины

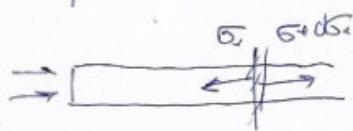
Однозначное соответствие
между w и d

One-to-one correspondence
between w and d



Зависимость
передовой скорости
от времени

Пример



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_x}{\partial t^2} = 0 \\ G_x|_{x=0} = G_0(t) H(t-0) \\ G_x|_{x \rightarrow \infty} = \text{устойчивое излучение} \end{array} \right.$$

Решение Даренберга

$$G_x = f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c})$$

$$\int a w e^{i w(t - \frac{x}{c})} dw$$

$$G_x = f(t - \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} a w e^{i w(t - \frac{x}{c})} dw$$

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$



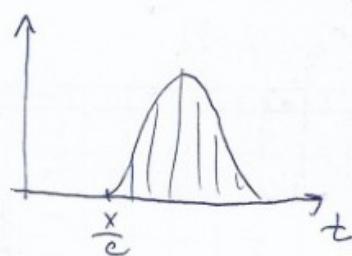
$$G_x|_{x=0} = G_0(t) H(t-0) \Rightarrow f(t - \frac{x}{c})|_{x=0} = G_0(t) H(t-0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = G_0(t) H(t-0)$$

$$G_x = f(t - \frac{x}{c}) = G_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$\tau_x = \frac{x}{c}$ - время задержки

11



Синусоиды дают сигналы на
осн. \times для дискретизации
 $w = \omega c d$

Дискретизация спектра

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = 0, \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, \infty) = 0$$

$$u(x, t) = A(x) e^{j\omega t} \Rightarrow A_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

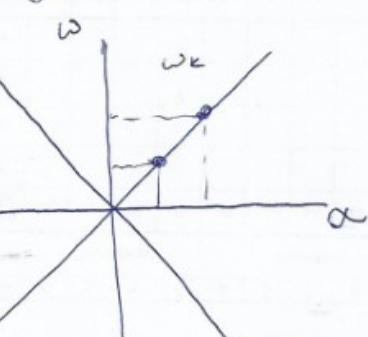
$$A(x) = a e^{-j\omega x} + b e^{j\omega x}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a e^{-j\omega x} + b e^{j\omega x} = 0 \end{cases}$$

Существует первое решение, если
это определенное значение в ноль.

$$e^{j\omega x} - e^{-j\omega x} = 0 \Rightarrow \sin \omega x = 0$$

$$\omega_k = \pm \frac{\pi k c}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$$



$$A_k(x) = b \sin \frac{\pi k x}{L}$$

$$u_k(t, x) = b \left(e^{j\omega_k (t + \frac{x}{c})} - e^{-j\omega_k (t + \frac{x}{c})} \right)$$

$$u_k(t, x) = \tilde{b} e^{j\omega_k t} \sin \frac{\pi k x}{L}$$

В спектре возможны только не всплески
времени (сингулярные спектры). Существуют
— непрерывные спектры.

(12)

2 Лекция 15.02.2022.

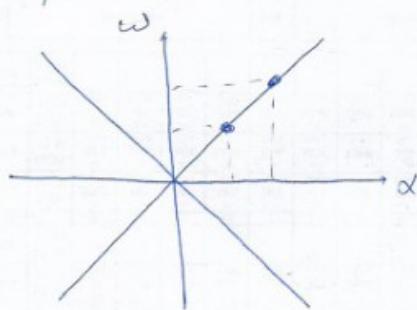
2.1 Использование преобразований Фурье и Лапласа. Введение

15.02 Лекция 2.

помага: londr@yandex.ru

Оператор Данаудера. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

$c = \frac{\omega}{d} = \text{const}$ — скорость с которой распространяется гармоническое колебание



$$\omega = \pm cd$$

волна движ

суперции

$$f_1(t - \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} a \omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} d\omega$$

$$f_2(t + \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} b \omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} d\omega$$

$e^{i\omega t} e^{i\omega x} \Rightarrow e^{i\omega t}$ — колебание во времени

$e^{i\omega x}$ — периодичность по пространственным переменным

d — вещественное число (модуль симметрического спектра)

$dk = \frac{\pi k}{L}$ — модуль спектра

$$A(x) = \sin \frac{\pi k x}{L} — \text{надол}$$

①

$$y(t) = \int_{-\infty}^t Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$e^{i\omega t}$ - полная система решений

Система решений, которую можно записать в виде
единичных членов непрерывных решений,
которые образуют ортонормированное базис
из решений, выраженных в виде интегралов

$$\text{зам: } y^{(x)} = \int_{-\infty}^x Y(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Разложение в ряд. Рассмотрим: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ikt}$
репрезентирует решение (расщепление решений)

Верхнее решение называется
интегрированным. Она представляет
решение $y^{(+)}$ в виде суммы решений
непрерывного множества конечностей,
заслоняющих некоторое замкнутое
интервал

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y^{(+)} e^{-i\omega t} dt \quad - \text{представление}\br/>Фурье$$

$$g(t) = y^{(+)} H(t - 0)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} y^{(+)} e^{-i\omega t} dt$$

Как доказать, если интеграл расходится?

(2)

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty y(t) e^{-xt} e^{-int} dt$$

Всегда симметричное уравнение множества
 e^{-xt} при $t \rightarrow \infty$, интеграл сходится для
 всех ограчненных сумм

$$p = x + i\omega$$

$$Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \tilde{y}(t) dt \quad \text{интеграл Лапласа}$$

()

\sim

оригинал

изображение

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} Y(p) dp, \quad t > 0$$

Теорема обратимости.

Макар офтади, Рурье преобразование
 - это частный случай преобразования
 Лапласа ($x=0$)

Библиография:

1. Г. Дэр. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.
2. А.И. Рурье. Операционное исчисление.

(3)

Пример

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \\ \xi|_{x=0} = \xi_0(t) H(t) \\ \xi|_{x=\infty} = \text{члены нуля} \end{array} \right.$$

$$\xi(t) = \xi_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$$\xi^L(p, x) = \int_0^\infty \xi_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty \xi_0(\xi) H(\xi) e^{-p(\xi + \frac{x}{c})} d\xi =$$

$$= e^{-\frac{px}{c}} \int_0^\infty \xi_0(\xi) e^{-p\xi} d\xi$$

$$\xi^L(p) = e^{-\frac{px}{c}} \xi_0^L(p)$$

$$e^{-pa} u(p) \doteq u(t-a) H(t-a), a > 0$$

Теорема смешения

Дано рассмотрим несколько
примеров, но для этого нужно
определить число между a и b
(изменять можно a , определять число b)

Как связаны эти величины?

(4)

2.2 Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности

Вам не нравится спросить распространение
воздуха с начальной скоростью v^0

$v = \frac{\partial u}{\partial t}$ - начальная скорость воздуха

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \xi = t - \frac{x}{c}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{v}{c} \quad \text{Две другие } \sigma = E\varepsilon = \rho c^2 (-\frac{v}{c}) \quad \epsilon = -\rho c v$$

$$\boxed{\sigma = -\rho c v} \quad (\text{изолированная среда})$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \right.$$

$$\left. \sigma|_{x=0} = \sigma_0(t) H(t-0) \right.$$

$$\left. \sigma|_{x \neq 0} = 0 \right. - \text{закон нуля}$$

Начальное условие

$$u, u|_{t=0} = 0 \Rightarrow \sigma|_{t=0} = 0 \\ \dot{\sigma}|_{t=0} = 0$$

$$\tilde{\sigma}^L = \int_0^\infty \sigma|_{x,t} e^{-pt} dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\sigma}^L}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} e^{-pt} dt = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}^L}{\partial t^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial \tilde{\sigma}^L}{\partial t} e^{-pt} \Big|_0^\infty + P \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{\sigma}^L}{\partial t} e^{-pt} dt =$$

$$= -\dot{\sigma}(0) + P \left[\tilde{\sigma}^L e^{-pt} \Big|_0^\infty + P \int_0^\infty \tilde{\sigma}^L e^{-pt} dt \right]$$

$$= -\dot{\sigma}(0) - P \tilde{\sigma}^L(0) + P^2 \tilde{\sigma}^L$$

(5)

$$\dot{f}(t) \doteq p F(p) - f(0)$$

$$\ddot{f}(t) \doteq p^2 F(p) - p f'(0) - f''(0)$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f'(0) - \dots - p^{(n-2)} f^{(n-2)}(0) - f^{(n)}(0)$$

В общем случае

$$\frac{d^2\sigma^L}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} \sigma^L = 0$$

$$\sigma^L = A e^{-\frac{px}{c}} + B e^{\frac{px}{c}} \quad - \text{наиболее}$$

однозначно обеих

$$\text{Зад. } \sigma^L = C \operatorname{ch} \frac{px}{c} + D \operatorname{sh} \frac{px}{c} \quad (\text{некоторо})$$

$$\sigma^L|_{x=0} = \left\{ \sigma_0(t) \right|_{t=0} = \sigma_0^L, \quad \sigma^L|_{x=e} = 0$$

$$\begin{cases} A + B = \sigma_0^L \\ A e^{-\frac{pe}{c}} + B e^{\frac{pe}{c}} = 0 \end{cases} \quad \Delta = e^{\frac{pe}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}}$$

$$A = \frac{\sigma_0^L e^{\frac{pe}{c}}}{\Delta}, \quad B = -\frac{\sigma_0^L e^{-\frac{pe}{c}}}{\Delta}$$

$$\sigma^L(p, x) = \frac{\sigma_0^L}{\Delta} \left(e^{\frac{pe}{c}} e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right)$$

$$= \frac{\sigma_0^L}{e^{\frac{pe}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}}} \left(e^{\frac{pe}{c}} e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right)$$

$$= \frac{\sigma_0^L}{1 - e^{-\frac{2pe}{c}}} \left(e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{3pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right) \quad (6)$$

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\dots q^n$$

$$\Leftrightarrow \sigma_0 \left(1 + e^{-\frac{2\ell c}{c}} + \dots \right) \left(e^{-\frac{\ell c}{c}} - e^{-\frac{2\ell c}{c}} e^{\frac{\ell c}{c}} \right) =$$

$$= \sigma_0 e^{-\frac{\ell c}{c}} - \sigma_0 e^{-\frac{2\ell c}{c}} e^{\frac{\ell c}{c}} + \sigma_0 e^{-\frac{2\ell c}{c}} e^{\frac{\ell c}{c}}$$

\nearrow прямодревущая волна \nwarrow отраженная волна

Перенесем к определению

$$\sigma(t, x) = \sigma_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) H\left(t - \frac{x}{c}\right) -$$

$$- \sigma_0 \left(t - \frac{2\ell - x}{c} \right) H\left(t - \frac{2\ell - x}{c}\right) + \dots$$

$$\frac{2\ell - x}{c} = \frac{e}{c} + \frac{e - x}{c} \quad \frac{x}{c} - \text{время запаздывания}$$

При отражении от свободной поверхности знак напряжения не меняется на противоположный, т.е. если прямая волна сжимала струну, то отражение волны расстягивает

$\square \sigma_0(t) = \sigma_0 H(t-0) - \text{стягивающее сжатие}$

Знак напряжения!

Слово: знак не меняется

отражение происходит не для

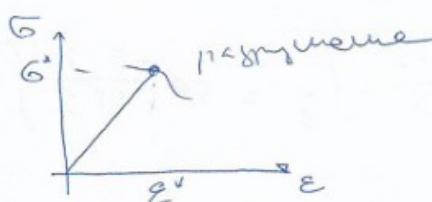
$$\boxed{M} \rightarrow \boxed{\text{---}}$$

$$M \frac{d\sigma}{dt} = + \sigma$$

$$\sigma = -\rho c v \Rightarrow \frac{M}{\rho c} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0$$

Как меняется напряжение - ?

Будут ли появляться напряжения противоположного знака



Найти сечение отсечки
 $x^* - ?$

(Расчетное значение)

$$\begin{aligned} \sigma^L &= -\frac{\sigma_0}{\rho c} \left[e^{-\frac{\rho x}{c}} + e^{\frac{\rho x - \rho t}{c}} \right] \doteq \\ &= -\frac{1}{\rho c} \left[\sigma_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \sigma_0 \left(t - \frac{2\rho x}{c} \right) \right] \end{aligned}$$

$$v(t, x) = 2\sigma_0(t)$$

Следим на обратной поверхности № 2

расстояние. Это необходимо

учитывать при расчете напряженного состояния.

(8)

Запишем базовое уравнение для
перемещений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{E_0(t)}{F} H(t-\sigma) \quad - 3 \text{ арге} \text{ Кеймана} \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

1. Нормальное колебание стержня: $u = A(x) e^{int}$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0 \\ \left. \frac{dA}{dx} \right|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{dA}{dx} \right|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad A(x) = a \cos \frac{\omega x}{c} + b \sin \frac{\omega x}{c}$$

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \Rightarrow \frac{\omega l}{c} = \bar{n}\pi$$

$$\omega_n = \frac{\bar{n}\pi c}{l}$$

$$A_n = \frac{\omega_n \cos \frac{\omega_n x}{c}}{c}, \quad n = 0, \pm \dots, \bar{n}$$

$$u = \sum q_n(t) \cos \frac{\bar{n}\pi x}{l}$$

по знакоу симметрии
но не может удовлетворить
записанную условие.

Метод Грина дерга

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\bar{n}\pi x}{l} dx - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l u \cos \frac{\bar{n}\pi x}{l} dx = 0 \\ & \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\bar{n}\pi x}{l} dx = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \cos \frac{\bar{n}\pi x}{l} \right|_0^l + \frac{\bar{n}\pi}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \sin \frac{\bar{n}\pi x}{l} dx = \\ & = - \frac{E_0(t)}{E} H(t-\sigma) + \frac{\bar{n}\pi}{l} \left[\left. u \sin \frac{\bar{n}\pi x}{l} \right|_0^l - \frac{\bar{n}\pi}{l} \int_0^l u \cos \frac{\bar{n}\pi x}{l} dx \right] \\ & = - \frac{E_0(t)}{E} H(t-\sigma) - \left(\frac{\bar{n}\pi}{l} \right)^2 q_n \frac{l}{2} \end{aligned}$$

(9)

$$-\frac{\sigma_0(+)}{E} H(+\infty) - \left(\frac{\bar{u}_n}{e}\right)^2 q_n \frac{e}{2} - \frac{1}{c^2} \ddot{q}_n \frac{e}{2} = 0$$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{2c^2}{e} \frac{\sigma_0(+)}{E} H(+\infty), \quad \omega_n = \frac{\bar{u}_n c}{e}$$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = Q_n - \text{однозначное сино. } q_m(\omega) = 0, \quad q_m(\omega) = 0$$

$$q_n \frac{L}{p^2 + \omega_n^2} (p^2 + \omega_n^2) = Q_n \Rightarrow q_n \frac{L}{p^2 + \omega_n^2} = \frac{Q_n}{p^2 + \omega_n^2}$$

$$\frac{1}{p^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$f_1(p) f_2(p) = \int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

теорема о свёртке

$$q_n(t) = -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e \omega_n} \int_0^t \sin \omega_n \tau d\tau =$$

$$= -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t)$$

$$u(x,t) = -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \cos \frac{\bar{u}_n x}{e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\sigma_0 c^2}{E e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{\bar{u}_n}{e} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{\bar{u}_n x}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{e}}{n} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right), \quad 0 < x \leq e$$

(10)

3 Лекция 22.02.2022.

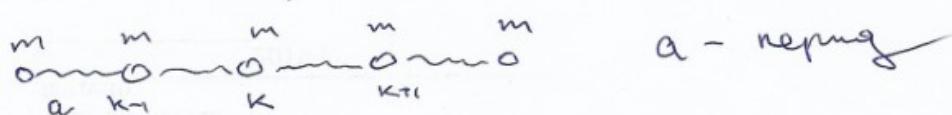
3.1 Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия

22.02. Лекция 3

О дискретном описании
кристаллического тела

Рассмотрим вопрос о совместной
модели единичной среды дискретному
описанию

Одномерные структурные решётки
(ячейка)



One knot - ячейка

$$\ddot{m}_k = -g(u_k - u_{k-1}) + g(u_{k+1} - u_k)$$

Учитывается взаимодействие между
соседними атомами!

Литература:

1. Р.И. Мандельштам. Лекции по
теории колебаний

2. Косявич Основы механики
кристаллической решётки

$$\ddot{m}_k = g(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$$

(коэффициент пружин)

①

$$u = A e^{i(\omega t - dx)} \quad - \text{дешуре волна}$$

$$\omega_k = ka$$

$\omega \rightarrow \omega \pm \frac{2\pi}{a} p$ Результат не изменяется

$$-\frac{\pi}{a} \leq \omega \leq \frac{\pi}{a} \quad - \text{зона бреттона}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \leq \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda \geq 2a \quad \text{ночные наводки!}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{m} \left(2 - e^{ida} - e^{-ida} \right)$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{m} \left(1 - \cos da \right)$$

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{g}{m}} \sin \frac{da}{2}$$

$$c = \frac{\omega}{d} = 2 \sqrt{\frac{g}{m}} \frac{\sin \frac{da}{2}}{\frac{da}{2}} = a \sqrt{\frac{g}{m}} \frac{\sin \frac{da}{2}}{\frac{da}{2}}$$

Как называется данный результат с помощью словесной форме?

Динамическое приближение $d \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow c = a \sqrt{\frac{g}{m}}$$

(2)

$$c = a \sqrt{\frac{F}{m}} = a \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot \alpha}} = \sqrt{\frac{F}{\rho}} !$$

$$g = \frac{F}{a} \quad \text{знач} \rightarrow \sigma = \frac{F \cdot \Delta l}{l^2} = \frac{F}{S}$$

$$\delta = \frac{E S}{l}$$

Можно ли получить оператор Деламбера из дискретной модели?

$$u_{k+1} = -g(u_k - u_{k-1}) + g(u_{k+1} - u_k)$$

$$u_{k-1} = u_k - u'_k a + \frac{u''_k a^2}{2} + \dots$$

$$u_{k+1} = u_k + u'_k a + \frac{u''_k a^2}{2}$$

$$u_{k+1} = -g(u'_k a - \frac{u''_k a^2}{2}) + g(u'_k a + \frac{u''_k a^2}{2}) =$$

$$= g u''_k a^2$$

Несложные производные скрываются!

Консервативная система

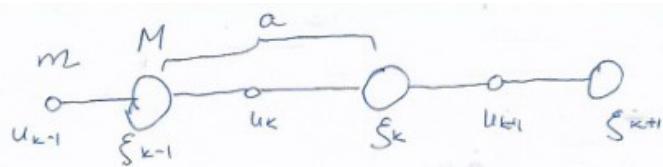
$$px'' = \frac{F}{a} u''_k a^2$$

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0$$

оператор Деламбера.

среда δ гл. дисперсии.

③



$$M \ddot{\xi}_k = g(u_k - 2\xi_k + u_{k+1})$$

$$m \ddot{u}_k = g(\xi_{k-1} - 2u_k + \xi_k)$$

$$u_k = A e^{i(\omega t - 2ka)}$$

$$\xi_k = B e^{i(\omega t - 2ka)}$$

$$(M\omega^2 - 2g)B + g(1 + e^{-i2ka})A = 0$$

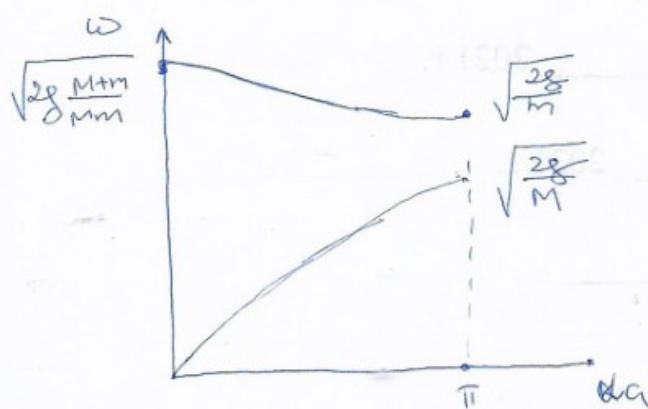
$$g(1 + e^{i2ka})B + (m\omega^2 - 2g)A = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow$$

$$Mm\omega^4 - 2g(M+m)\omega^2 + 2g^2(1 - \cos 2a) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{Mm} \left(M + m \pm \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm \cos 2a} \right)$$

Две бемби вакансии!



Верхнее — оптическая
бемби

Нижнее —
акустическая
бемби

(4)

Макро α (спинные волны)
 w_2 меняется линейно в зависимости от d

$A = B$ Соседние массы колеблются

в одинаковых фазах.

Число моментов сдвигов аппроксимировано
 сплошной одномерной моделью.

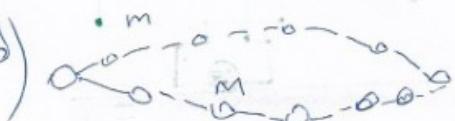
a)



$w_2 = w_2(d)$. При $d \rightarrow 0$ w_2 не
 стремится к нулю

Соседние атомы колеблются
 в противоположных фазах.

b)



В трехмерной кристаллической решетке
 азотеновым 3S берут нормальную
 колебание (с ампл. в ареике):

3 берлы - акустические

3S-3 - оптические

(излучающее одномерный спектр)

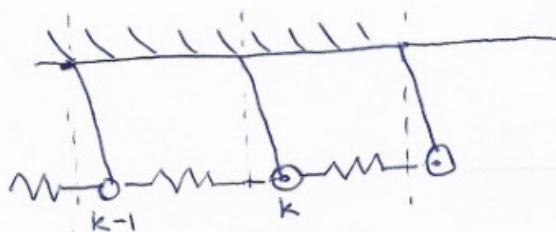
5

Вернемся к дисперсионному возмущению

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{m}} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Дисперсия без бана написана
собственным пространственным масштабом,
периодом решётки a
Если $\alpha \ll 1$ или $a \ll \lambda$, то
дисперсия исчезает, и мы переходим
к сплошной среде.

Возможна же иная ситуация, когда
дисперсия напоминает не
пространственном, а временным масштабом?



$$\ddot{u}_k + \omega_0^2 u_k = -\frac{g}{m} (u_k - u_{k-1}) + \frac{g}{m} (u_{k+1} - u_k)$$

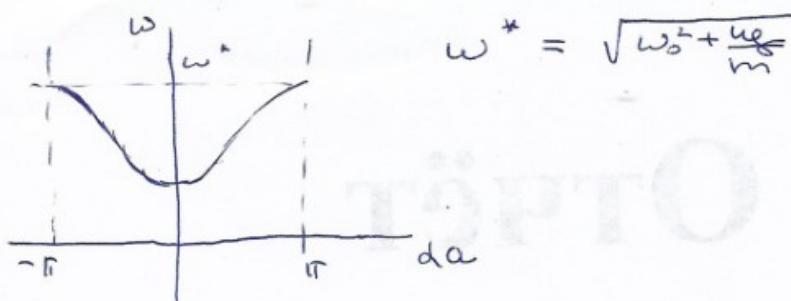
$$\ddot{u}_k + \omega_0^2 u_k = \frac{g}{m} (u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$$

$$u_k = A e^{i(\omega t - \delta x)}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4g}{m} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

(6)

3.2 Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость



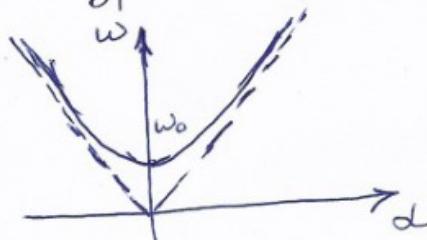
$$u_{k+1} = u_k + u_k' a + \frac{1}{2} u_k'' a^2 + \dots$$

$$u_{k-1} = u_k - u_k' a + \frac{1}{2} u_k'' a^2$$

$$u_k'' + \omega_0^2 u_k = \frac{g}{m} u_k'' a^2$$

$$\boxed{u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0}$$

Уравнение Клейна-Гордона



ω_0 — расстояние от оси

При $\omega_0 \rightarrow 0$ дисперсия исчезает и сплошное средство переходит в штурмовые приемы

$$\omega = \pm c_s d$$

Примеры: струна на упругом основании

Т колебание плаズмы, волноводы
P. Рейтман. "Лекции по физике" Т. 6

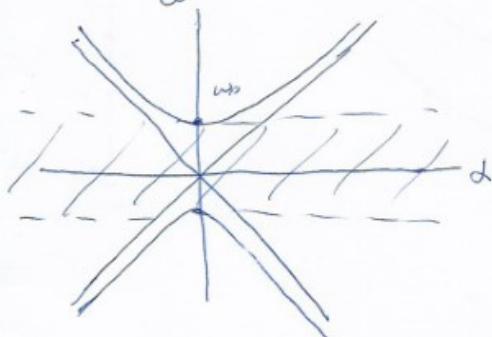
(7)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0$$

$$u \sim e^{i\alpha x} e^{i\omega t}$$

$$-d^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + c^2 d^2$$

$$\text{if } \omega_0 = 0 \Rightarrow \omega = \pm cd$$



$$0 < \omega < \omega_0$$

Спектр ньст

Нет решения в базе
заряж. частиц

$$U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} - k U = 0$$

$$U = V_0(x) e^{i\omega t}$$

$$V_{0xx} + j^2 V_0 = 0, \quad j = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$1. \quad j = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 \quad V_0 = Ax + B$$

согласно как решению

$$2. \quad j \rightarrow \text{баз.} \quad \omega > \omega_0$$

$$V_0 = Ae^{i\omega x} e^{i\omega t} + Be^{-i\omega x} e^{-i\omega t}$$

$$= Ae^{i\omega(t+\frac{x}{c})} + Be^{i\omega(t-\frac{x}{c})}$$

$$C_p = \frac{\omega}{j} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

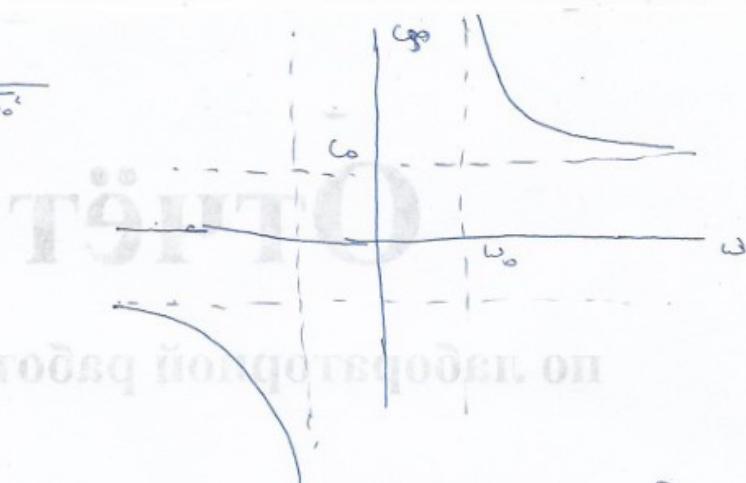
$$3. \quad \omega < \omega_0$$

$$V_{0xx} - j^2 V_0 = 0$$

$$V_0 = Ae^{-jx} + Be^{jx} \text{ оп.}$$

Таким образом решение ⑧

$$C_\phi = \pm \frac{C_0 \omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$



Что такое скорость сигнала?
 ω_1 и ω_2 где гармоники
 $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_{1,2}$

$$u(x, t) = u_0 \cos(\omega_1 t - d_1 x) + u_0 \cos(\omega_2 t - d_2 x) =$$

$$= 2u_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{d_2 - d_1}{2}x\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{d_1 + d_2}{2}x\right) =$$

$$= a(r, t) \cos(\omega_0 t - \phi_0 x)$$

несущее
动摇, осцилляционные
волны

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \phi_0 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

$$a(r, t) = 2u_0 \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t - \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)x\right)$$

$$C_\phi = \frac{\omega_0}{\phi_0} - \text{несущее время}$$

$$C_{\phi r} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta \phi}$$

В одинаковом случае

$$C_{\phi r} = \lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta \phi} = \frac{d\omega}{d\phi}$$

(9)

Три скорости: c_p , c_{gr} , w !

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\omega(\alpha)t - \alpha x)} d\alpha =$$

$$\omega(\alpha) = \omega_0 + \omega'(\alpha_0) \Delta \alpha$$

$$= e^{i(\omega_0 t - \alpha_0 x)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{\Delta \alpha (\omega'(\alpha_0)t - x)} d(\Delta \alpha) =$$

$$= e^{i(\omega_0 t - \alpha_0 x)} u(\omega'(\alpha_0)t - x)$$

: очевидно.
если ожидать уменьшения.

$$c_{gr} = \frac{dw}{d\alpha}$$

Как проследить за изменением волнового пакета?

Как волна сдвигается?

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{it(\omega(\alpha) - \frac{\alpha x}{t})} d\alpha$$

$$\psi(\alpha) = \omega(\alpha) - \frac{\alpha x}{t}, \quad t \rightarrow \infty$$

$\frac{x}{t}$ - начальная
координата

Метод стационарных фаз

1. Н. А. Остробродский, А. И. Романов

- Введение в теорию модулированных волн

2. А. Наугда Введение в методы
воздушных

(10)

3.3 Метод стационарной фазы

$$I(t) = \int_a^b F(\alpha) e^{it\psi(\alpha)} \frac{d\alpha}{\psi'(\alpha)}, \quad t \rightarrow \infty$$

$$u = \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)}, \quad d\alpha = e^{it\psi(\alpha)} \psi'(\alpha) d\alpha$$

$$\alpha = \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{it}$$

$$I(t) = \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{it} - \frac{1}{it} \int_a^b e^{it\psi(\alpha)} \left[\frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \right] d\alpha$$

$$= \frac{i}{t} \left[F(\alpha) \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{\psi'(\alpha)} - \frac{F(\alpha) e^{it\psi(\alpha)}}{\psi'(\alpha)} \right] + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$\psi' \neq 0$!

Основной слагаемый в выражении для общих
значений времени t зависит от величины
близи соответствующих морков $\alpha = \alpha_c$,

$$\text{вокруг которой } \left. \frac{d\psi}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_c} = 0$$

$$\psi(\alpha) \approx \psi(\alpha_c) + \psi'(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c) + \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2.$$

$$F(\alpha) \approx F(\alpha_c) + F'(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)$$

$$u(x, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_c) \exp\left(i(\psi(\alpha_c) + \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2)t\right) d\alpha$$

$$= F(\alpha_c) e^{i[\psi(\alpha_c)t - \psi'(\alpha_c)x]} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\left[\frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2\right]t\right) d\alpha$$

$$\frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)t = s, \quad (\alpha - \alpha_c)^2 = z^2 \quad \psi''(\alpha_c) \neq 0,$$

(11)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{|s|}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4} \operatorname{sign}(s)\right)$$

В итоге:

$$u(x,t) \approx \frac{F(d_e)}{\sqrt{w'(d_e)t}} \exp\left\{i\left(\omega(d_e)t - dx - \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} w'(d_e)\right)\right\}$$

Если существуют решения

стационарного волн, то кинетическая энергия, и упругая, и их разность

имеют одинаковую асимметрию.

$$C_{gr} = \frac{dw}{dd} = \frac{d(c_p)}{dd} = c_p + d \frac{dc_p}{dd}$$

$$C_{gr} = c_p + d \frac{dc_p}{dd}$$

запись на доске

$$C_{gr} = c_p, \text{ если } \frac{dc_p}{dd} = 0$$

Дисперсия излучения нормирована

если $c_{gr} < c_p$

и аномальна в прогибном случае

(12)

4 Лекция 01.03.2022.

4.1 Повторение. Преобразование Лапласа. Теорема о вычетах. Ряд Лорана. Лемма Жордана

01. 03. 22. Лекция 4

В прошлый раз мы рассматривали
среди с дисперсией, введя понятие
групповой спектрости (скорости отклика)

Сегодня мы поговорим о решении
нестационарного задачи и рассматриваем
несколько примеров, где удаётся изобрести
аналитическое решение с помощью
преобразования Лапласа

$$Y(p) = \int_0^\infty y(t) e^{-pt} dt$$

изобретение

1. $\ddot{y} + \omega_0^2 y = g(t)$, $g(t) = F_0 \Theta(t - \tau)$
введено приложение нагрузки

$$y(t) = \underbrace{A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t}_{\text{однородное реш.}} + C$$

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

Сделаем преобразование Лапласа: (лекция 2)

$$(p^2 + \omega_0^2) Y^L = \frac{F_0}{p} \Rightarrow Y^L = \frac{F_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$\frac{1}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sin \omega_0 t} \quad (\text{таблица})$$

$$Y^L = \frac{F_0}{\omega_0} \int_0^t \frac{\sin \omega_0 (t-\tau)}{\omega_0} d\tau = \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

(1)

Теорема отображения

Если $F(p)$ является изображением

кусочно-гладкой функции $f(t)$,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad \text{для } t \geq 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad \sigma > a$$

Как видим интеграл проходит мимо оси.

Нулевая теорема о ветвях (\tilde{T} кр.)

А.Г. Сванишвили, А.Н. Тихонов

Теория функций комплексной переменной

Теорема. Если функция $f(z)$ является
аналитической (изолированной) в любой
в замкнутой окрестности за исключением
конечного числа точек разрывов (нолью
или конеч. точек разрывов)

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k)$$

(c) Чему равен суммарный разрыв?

Это называется при $(z-a)^{-1}$ в
разложении в ряд Лорана

$\operatorname{res}_a f(z)$ - обозначение

$$\operatorname{res}_a f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$$

$$\text{если } m-\text{го порядка } C_a = \frac{1}{m-1} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$$

$$m=1$$

$$C_a = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$$

(2)

Банной зеркальный отображение. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

$$\psi(a) \neq 0!$$

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Вернемся к примеру с ^{с оной степенью} ^{степеней} ^{делающих}.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega_0^2} dp =$$

(*)

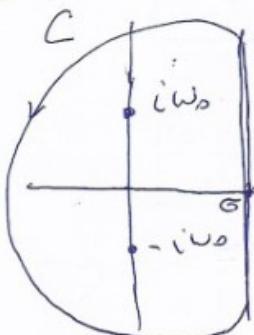
$$= \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{p_k} f(z) \quad f(z) = \frac{e^{pz}}{z^2 + \omega_0^2}$$

Одна из пары: $p_1 = -i\omega_0$, $p_2 = i\omega_0$

$$E_{ak} = \frac{e^{iz\omega_0 t}}{2i\omega_0} - \frac{e^{-iz\omega_0 t}}{2i\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Возбуждение к зеркальному отображению

(*)



$$\int_C + \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \dots = 2\pi i \sum \operatorname{res}_{p_k} f(z)$$

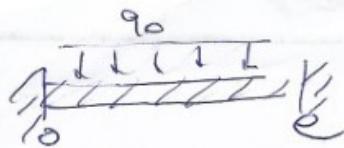
$$\int_C F(p) e^{pt} dp \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$$

Лемма Кошира: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C+R} F(z) e^{zt} dz \xrightarrow[z \rightarrow \infty]{} 0$.
если $F(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $a > 0$.

Рассмотрим зеркальное отображение наоборот мом не делает!

супермногим используем

③



см. лекция 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{q_0}{E} H(t^\infty)$$

$$\frac{d^2 u^L}{dx^2} - \frac{P^2}{L^2} u^L = - \frac{q_0}{EP}$$

$$u^L = A \sin \frac{Px}{C_0} + B \cosh \frac{Px}{C_0} + \frac{q_0}{P^3} C_0^2$$

$$u(0,+) = 0, \quad u(e,+) = 0$$

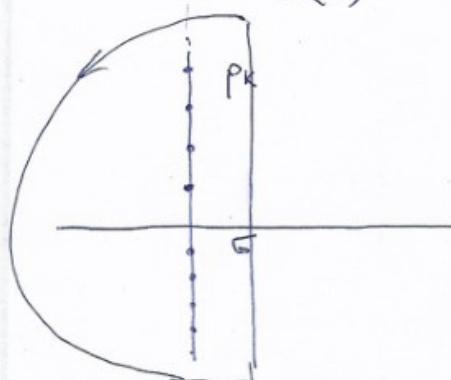
$$u^L = \frac{q_0 C_0^2}{P^3} \left[\frac{\sin \frac{Pe}{C_0} - \cosh \frac{Pe}{C_0} \sinh \frac{P(L-e)}{C_0} + (\cosh \frac{PL}{C_0} - 1) \sinh \frac{Pe}{C_0}}{\sinh \frac{Pe}{C_0}} \right]$$

Однако можно (чтобы) $\sinh \frac{Pe}{C_0} = 0 \Rightarrow P = i \omega_k$

$$\omega_k = \frac{\pi k C_0}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Сравним с выражением в 1 лекции.
Сокращение времени.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \text{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$



$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R}^{G+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$= 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \text{res}_{p_k} f(z)$$

лемма скончалась

Решение задачи, самостоенное!
Получим выраж.

(4)

Теперь оценимася к уравнению
Кирхгофа - Гурова

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0 \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = f(t) H(t) \rightarrow \overbrace{\text{занулено}}$$

$u|_{x \rightarrow \infty}$ - кон. изгижение.

$$\frac{d^2 u^L}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} u^L - \frac{\omega_0^2}{c^2} u^L = 0$$

$$\frac{d^2 u^L}{dx^2} - \frac{1}{c^2} (p^2 + \omega_0^2) u^L = 0$$

$$u^L = A e^{-\frac{1}{c} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} x}$$

$$\text{При кон.: } -\frac{1}{c} A \sqrt{p^2 + \omega_0^2} A = f^L \Rightarrow \\ \Rightarrow A = -\frac{c f^L}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

$$u^L = -\frac{c f^L e^{-\frac{1}{c} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} x}}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

Учтывая что f^L определяет зеркальное изгижение. Оценимася к методу:

$$\frac{e^{-k\sqrt{t^2-a^2}}}{\sqrt{p^2+a^2}} \stackrel{?}{=} J_0(a\sqrt{t^2-k^2}) H(t-k)$$

Окончательно образ может быть

представлен в виде сверти:

$$u = -c \int_0^{+\infty} f(s) J_0\left(a\sqrt{\left(t-\frac{x}{c}-s\right)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}\right) ds H(t-\frac{x}{c})$$

Получим методику для механики

(5)

Рассмотрим случай $x=0$:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}, \quad \text{так что } \omega_0 = 1.$$

Следующий шаг теоремы:

Если разложение

разложения в ряд

разложения в ряд

разложения в ряд

разложения в ряд

$$\text{то } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2+1)^{1/2}} &= \frac{1}{p} (1+p^{-2})^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 + mp^{-2} + \frac{m(m-1)}{2!} p^{-4} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!} p^{-2n} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{2} p^{-2} + \frac{1}{2^2 2!} p^{-4} - \dots - \frac{(-1)^{n/2} (2n-1)!!}{2^n n!} p^{-2n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{1}{p^{2n+1}} \end{aligned}$$

Также получим теорему:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = J_0(t)$$

Всякую функцию можно представить в виде

Более подробное изложение дано в книге

М. А. Лаврентьев, С. В. Шабат

Метод теории функций комплексной перемененной

(6)

4.2 Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа

Сложные, погорячие могут возникнуть при использовании теоремы отражения, но рассмотрим не более простом примере теплопроводности, но сначала обратимся к уравнению динамики

Баланс: $\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial (PV)}{\partial x} = 0$ баланс массы

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - P \frac{dV}{dt} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{баланс} \\ \text{импульса} \end{array}$$

Основанный метод

Баланс энергии: I закон термодинамики
составляющая натяжения

$$\dot{W} = P + Q \quad \begin{array}{l} \text{нет охлаждения} \\ \text{и нагревания} \end{array}$$

P и Q — мощность внешних сил

$$W = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} P \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} P(v \dot{v} + \dot{u}) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial (P \cdot v)}{\partial x} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial x} dx$$

h — натяжение

$$Pv \dot{v} + Pv = v \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sigma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$v(P \dot{v} - \frac{\partial \sigma}{\partial x}) + Pv + \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma \dot{v}, \quad \varepsilon = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Баланс импульса

$$\boxed{P \dot{v} + \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma \dot{v}}$$

Введем полезные температуре, как измерство физической параметра, описание которого будем иметь способы следующие: $u = c_v \theta$

(7)

Закон Фурье: $h = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$

Определение гр-е $\sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta)$

закон Дюране-Клемана ^{последнее}
 $E_\theta = \lambda \theta$ - то же самое, что мы же можем
 определить в рамках классической механики.

Последняя формула:

$$\rho c v \dot{\theta} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = E \alpha \theta \dot{e}$$

^{последнее уравнение}

θ - изменение температуры

\dot{e} - работающие (излучающие) температура

Ур-е гравитационной, учитывающей
 влияние поле гравитации (вспомогательное
 звено). Пока будем предполагать
 что звено включает зеркальную гр-е.

$$\rho c v \dot{\theta} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

ρ - масса, c_v - теплоемкость

λ - коэффициент теплопроводности

$\lambda = \lambda_s + \lambda_e$ - включают первое зеркало

$\lambda_e \gg \lambda_s$, поэтому можно

хорошо пренебречь тепло

λ характеризует способ передачи

кINETИЧеского энергии соседнему зеркалу

λ и c_v зависят от температуры,

но это будет оставаться

в рамках пусковой теории

Г.И. Енисеев. Физика первого рода

(8)

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

$\theta \sim e^{i\omega t} e^{i\alpha x}$ - Noche noсторонни

$$\rho c i \omega + \lambda \alpha^2 = 0 \quad (*)$$

Упр-е неподвижного тела:

рассее пропагирирует по времени - неоднотипность природы процесса
"Темп передачи от горячего тела
к холодному" Чемнее мыслью
но х означает, что процесс
обнаружив симметрическим.

Чт ($*$) смысъем, что α - константа
величина?

Что это означает?

$$\alpha = \alpha_R + i \alpha_I \quad \text{Видим } \alpha^2 = \frac{\rho c}{\lambda} -$$

- но это значит температуро проводимость

Также

$$\alpha^2 i \omega + \alpha_R^2 + 2i \alpha_R \alpha_I - \alpha_I^2 = 0$$

$$\alpha_R^2 = \alpha_I^2 \Rightarrow \alpha_I = \pm \alpha_R$$

$$\alpha^2 \omega + 2 \alpha_R \alpha_I = 0 \Rightarrow \alpha^2 \omega = 2 \alpha_R^2$$

$$\alpha_I^2 = \frac{\alpha^2 \omega}{2}$$

$$\boxed{\alpha_I = \alpha \sqrt{\frac{\omega}{2}}}$$

(9)

Тогда

$$\Theta \sim e^{i\alpha x} e^{int} = e^{i(\alpha x + i\beta t)} e^{int}$$

$$= \underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{Более быстрым}} \underbrace{e^{i\alpha x}}_{\text{Более медленным}}$$

βt характеризует быстрое преобразование течеия винта
материала, при этом $\beta t = \alpha \sqrt{\frac{\omega}{2}}$
быстрое преобразование существует
таким образом называемое Тенородским

$$\Delta R = - \frac{\rho A}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

$$C_D = \frac{\omega}{\Delta R} \sim \sqrt{\omega}$$

Чем выше ω , тем медленнее
и грубые спираль, но
при этом более сильное
затормаживание по направлению x

$$\Theta \sim e^{i\omega(t - \frac{x}{C_D})} e^{-\beta t}$$

Затормаживание в силу использования
закона Пире $\dot{\theta} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$
также уходит в область

(10)

5 Лекция 15.03.2022.

5.1 Применение преобразования Лапласа. Трудности

15.03.22. Лекция 5.

На прошлой лекции мы обсудили применение преобразования Лапласа

$$Y(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \text{ где решение}$$

ищется в пространстве зон. Основное здесь

состоит в том, чтобы перейти

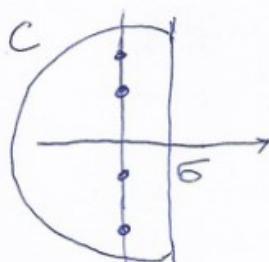
в пространство изображений, где решить

загороду проще. Решение: нужно

переводить из пространства оригиналов

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} f(z, a_k)$$



$$\oint_C = \int_{\sigma+i\infty}^{\sigma-i\infty} + \int_C$$

$$\int_C F(p) e^{pt} dp \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0 \quad \begin{matrix} \text{лемма} \\ \text{скобка} \end{matrix}$$

Обсудим некоторые трудности, но т.
могут возникнуть при вычислении инт.

$$a^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} - \dot{\theta} = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda}{pCr} \quad \begin{matrix} \text{изобр.} \\ \text{так перегружен} \end{matrix}$$

Ур. унг.:
$$-\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=\infty} = J(t) \quad 0 \leq t < \infty$$

$\theta \xrightarrow{x \rightarrow \infty}$ опр.

①

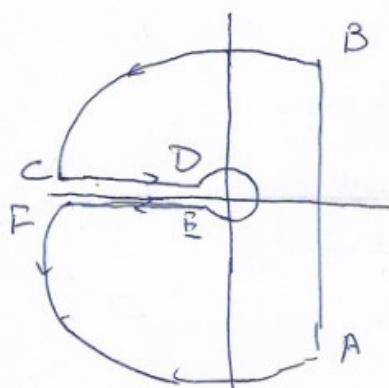
$$a^2 \frac{d^2\theta^L}{dx^2} - p\theta^L = 0$$

$$\theta^L = A e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}, \quad -\frac{\sqrt{p}}{a}A = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{\lambda \sqrt{p}} \frac{1}{x^2}$$

$$\theta^L = \frac{1}{\lambda \sqrt{p}} \frac{1}{x^2} e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}$$

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}}, \quad k = \frac{1}{a}, \quad k > 0$$



$\omega = \sqrt{p}$ - много значное
значение
Нужно сделать разрез,
затем замкнуть оба

$$\sqrt{p} = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Внешне изображе нет особых морей \Rightarrow

$$\oint_C F(p) e^{pt} dp = 0$$

$$\int_{AB} + \int_{CD} + \int_{EF} = 0 \quad \left(\int_{BCFA} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0 \text{ (внутри)} \right)$$

$$CD: p = x e^{it} = -x, \quad \sqrt{p} = i\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-k i \sqrt{x}} e^{-xt} dx = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt} e^{-k i \sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(2)

Анализ ЭФ

$$\text{ЭФ: } \sqrt{P} = -i\sqrt{x}$$

$$\int_{\text{EF}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt + k\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int_{\text{CD}} + \int_{\text{EF}} = \frac{2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \left[\frac{e^{k\sqrt{x}} + e^{-k\sqrt{x}}}{2} \right] \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \cos k\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\sqrt{x} = u$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-u^2 t} \cos ku du$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} \sin ku du = 0 \quad (\text{как интеграл от нечетной функции})$$

$$\text{Тогда: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos ku = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} (\cos ku + i \sin ku) du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} e^{iku} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-t(u - ik)^2 - \frac{k^2}{4t}} du$$

$$= \frac{e^{-\frac{k^2}{4t}}}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-tu^2} du = \frac{e^{-\frac{k^2}{4t}}}{\pi \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds$$

$$= \frac{e^{-\frac{k^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{P}} e^{-k\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

(3)

5.2 Несвязанная динамическая задача термоупругости

Несвязанное динамическое звено
термоупругости

Последнее ур-е баланса импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} = 0, \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

после подстановки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Преобразование Лапласа. (температура уче-
тана)

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{1}{c^2} U'' = \alpha \frac{d \Theta}{dx}$$

Самостоятельно (расчетное звено)

Литература:

1. В.И. Даниловский. Об одной динамической задаче термоупругости. Прикл. мат. и мех. 1952г.
2. В. Новакий. Динамические задачи термоупругости. 1970г.
3. А.Д. Кобленко. Термоупругость, 1978г.

Перев. тем как перейти к вопросу
о роли склонений (сегментов),
нам попадаются вспом. понятия
сегмента-сущности Дирака.

(4)

5.3 Дельта-функция Дирака

Преобразование Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt - \text{спектральная плотность}$$

$$\boxed{f(t) = e^{i\omega_0 t}}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

и что это называется?

Выводим значение δ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y) \delta(y - y_0) dy = h(y_0)$$

Следует в координатном изображении h в т. y_0 (Фурье-изображение)

Особенности δ -функции

1. B.C. Владимицов. Ур-е математика
2. A.B. Омельченко. Методы и технологии преодолевания в задачах математической физики.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega^*) e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega^* t}$$

$$F(\omega) = \delta(\omega - \omega^*) - \text{спектральная плотность}$$

Мне уже используется для описания плотности сосредоточенной массы или заряда

$$\rho = m \delta(x-a)$$

$$\int m \delta(x-a) dx = m$$

(5)

5.4 Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера

Вернёмся к примеру с одной степенью свободы:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = P_0 \delta(t-0) \quad (P_0 = 0.1 - \text{динамический импульс})$$

Нулевые начальные условия:

$$(j_0^2 + \omega_0^2) q^{(L)} = 1, \quad \int_0^\infty \delta(t-0) e^{-j_0 t} dt = 1.$$

$$q^{(L)} = \frac{1}{\omega_0 j_0^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t =$$

G — реальная система на δ -функции

$$q^{(L)} = \int_0^t F^{(L)}(\tau) G(t-\tau) d\tau$$

трансформация нейтральна

Реальная система на произвольный импульс при нулевых начальных условиях

Данное решение означает спредвентивное и где уравнение с начальными перенесениями

Найти дзумущую Грина для одномерного оператора Д'Аламбера в бесконечном пр-ве ($-\infty < x < \infty$)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = - \delta(x-x') \delta(t-t')$$

Представление функции по кардиоиде:

(6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x^2} e^{-ixx'} dx = \frac{\partial G}{\partial x} e^{-ixx'} + i \omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x} e^{-ixx'} dx =$$

$$= i \omega [G e^{-ixx'} + i \omega \int_{-\infty}^{\infty} G e^{ixx'} dx]$$

$$\omega^2 G^F + \frac{1}{\omega^2} G_{tt}^F = e^{-ixx'} \delta(t-t')$$

$$G_{tt}^F + \omega^2 G^F = \omega^2 e^{-ixx'} \delta(t-t')$$

$$G^F = \frac{e^{-ixx'} \sin(\omega d(t-t'))}{\omega d}$$

Однако имеем формулу:

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x'} \sin(\omega d(t-t')) e^{i\omega dd} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x'} \left(\frac{e^{i\omega d(t-t')}}{2id} - \frac{e^{-i\omega d(t-t')}}{2id} \right) e^{i\omega dd} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\omega((x-x')+\omega(t-t'))}{id}} - e^{\frac{i\omega((x-x')-\omega(t-t'))}{id}} dd =$$

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\omega x}{id}} dd$$

$$\textcircled{(1)} \quad \frac{1}{2\omega} \left[H((x-x') + \omega(t-t')) - H((x-x') - \omega(t-t')) \right], \quad t > t'$$

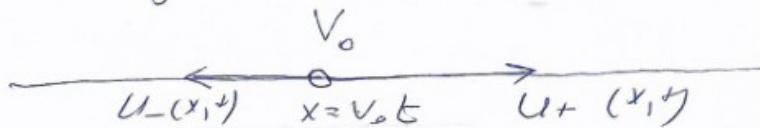
$$y = x - x', \quad c = t - t'$$

$$= \frac{1}{2\omega} \left[H(y + \omega c) - H(y - \omega c) \right]$$

(7)

5.5 Движущийся источник звука

Движущийся источник звука



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \varphi(t) \delta(x - v_0 t)$$

$$u(x, t) = \int_0^+ dt' \varphi(t') \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x', t - t') \delta(x - v_0 t') =$$

$$= \int_0^+ G(x - v_0 t', t - t') \varphi(t') dt' =$$

$$= \frac{1}{2c} \int_0^+ \{ H(x + c t - (v_0 + c)t') - H(x - c t + (c - v_0)t') \} \varphi(t') dt'$$

Неравенства:

$$\begin{aligned} x + c t - (v_0 + c)t' &\geq 0 \\ x - c t + (c - v_0)t' &\leq 0 \end{aligned}$$

Получим две волны, расходящиеся от источника u_- и u_+

Две периодические волны

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t)$$

пропиллюстрированы в задаче

Данная (расчетное задание)

(8)

5.6 Влияние включений на волновой процесс. Смешанный спектр

О Роль включений искажений на волновом процессе

В случае линии пропуск, включений (серебро) с кристаллической решеткой можно в сплошной форме заменить с более простой спиралью. Начнем с более простого случая, когда имеющееся включение расположено на границе области

$$M \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\sigma = M \ddot{u}_0, \text{ то перемещение массы}$$

Условие начальное?

Установлено начальное условие $u_0 = 4/x_{\max}$

Возьмем самое простое решение

перемещение зависит от

постановка задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{M \ddot{u}_0}{E} \quad u(0, t) = 0 \\ u \Big|_{t=0} = u_0 \quad u(0, x) = 0 \quad \text{нальное условие.} \end{array} \right.$$

$u(x, t)$ - решение.

$$u = u_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) H(t - \frac{x}{c})$$

Достаточно наложить условие

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow - \frac{1}{c} u_0 = \frac{M \ddot{u}_0}{E}$$

$$\frac{M \ddot{u}_0}{E} + \frac{u_0}{c} = 0 \quad (9)$$

$$\ddot{v}_0 + \frac{p_0}{M} v_0 = 0 \quad p_0 - \text{антизатухающее сопротивление среды}$$

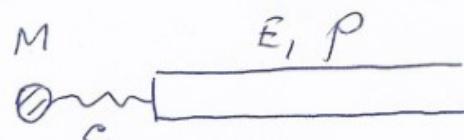
$-\frac{p_0}{M} t$

$$v_0(t) = V_0 e$$

$$v_0(t) = \frac{V_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}), \quad \beta = \frac{p_0}{M}$$

Почему возникает нелинейное
пронизывание в консервантной
системе?

Энергия переходит от массы
в спирт и в консервант
одинаково.



$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c(u - u_0)$$

перемещение и связь

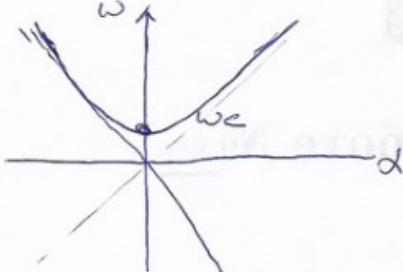
Рассмотрим самовозбуждение
(параметрическое здание)

В здании рассмотрим
оператор Края - Бордона.
(Спектр на широком основании)

10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - \frac{\omega_c^2}{c^2} u = 0$$

Дисперсионное уравнение: $\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_c^2}$



Распространение

специального звука
при наличии массы

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{M \ddot{u}_0}{E}$$

$$u = A(x) e^{i \omega t} \\ A_{xx} + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) A = 0$$

Распространение симметрии $\omega < \omega_c$

$$A_{xx} - \frac{1}{c^2} (\omega_c^2 - \omega^2) A = 0 \quad \text{или}$$

$$A_{xx} - \gamma^2 A = 0, \quad \gamma^2 = \frac{1}{c^2} (\omega_c^2 - \omega^2)$$

$$A = a e^{-\gamma x} + b e^{\gamma x} \cdot \begin{array}{l} \text{(запись)} \\ \text{чтобы упростить} \end{array}$$

$$u(x, t) = u_0 e^{-\gamma x} e^{i \omega t}$$

Данное решение имеет потерянный
характер

Если масса нет, то имеет чистое
решение

Угловые колебания.

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{M \omega^2 u_0}{E}$$

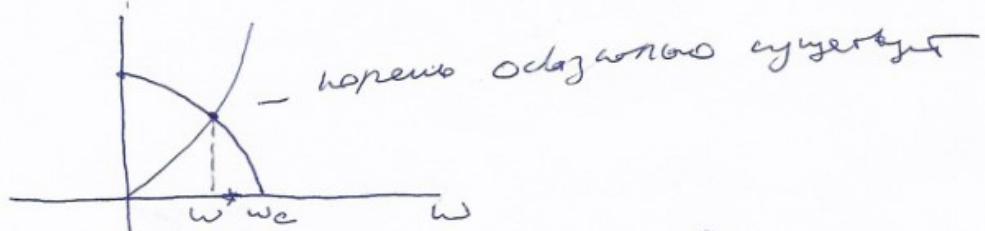
$$-\gamma u_0 + \frac{M \omega^2 u_0}{E} = 0$$

$$\left(-\gamma + \frac{M \omega^2}{E} \right) u_0 = 0$$

смочь может
отвечать в 0!

11

$$-\frac{1}{c} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} = \frac{M\omega^2}{E}$$



\Rightarrow Наличие штучного всплеска
результат к существованию дисперсии
запаса $w^* < w_c$. На оси спектра
наименее дисперсия зерна
(смещанный спектр)

Состр. форма $u(x, t, \omega^*) =$

$$= e^{i\omega^* t} e^{-\frac{x}{c} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

- концептуальная
форма в месте, где
одинаковая
распределена
несвободная
частица. Равномерное
распределение.
Конечно нет.

(12)

6 Лекция 22.03.2022.

6.1 Небольшое замечание к задаче

Замечание по задаче!

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = F_0 \cos(\varphi - \theta)$$

$$(p^2 + \omega_0^2) q^L = \frac{F_0}{p}, \quad f(\varphi) = \frac{\dot{q}(\varphi)}{\dot{\varphi}}, \quad \dot{\varphi}(\varphi) \neq 0$$

$$q^L = \frac{\dot{F}_0}{p(p^2 + \omega_0^2)}, \quad f(\varphi) = \frac{\dot{q}(\varphi)}{\dot{\varphi}(\varphi)}$$

$$\dot{\varphi}(\varphi) = p^2 + \omega_0^2 + 2p^2 = 3p^2 + \omega_0^2$$

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \pm i\omega_0, \quad p = 0$$

$$\text{Ось симметрии } \dot{\varphi} = \pm i\omega_0, \quad p = 0$$

$$q = \sum_{\text{расщепление}} f(\varphi) = \frac{F_0}{\omega_0^2} + \frac{F_0}{2\omega_0^2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) =$$

$$= \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{b} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -q}$$

$$u^L = \frac{c_0^2 q}{p^3} \left[\frac{(ch \frac{px}{c} - 1) sh \frac{px}{c} - ch \frac{px}{c} sh \frac{px}{c} + sh \frac{px}{c}}{sh \frac{px}{c}} \right]$$

$$p = i\omega_0, \quad p = 0$$

$$f'(p) = 3p^2 sh \frac{px}{c} + p^3 ch \frac{px}{c} \frac{e}{c}$$

В т. $p = 0$. Пользоваться формулой (4) нечестно

Лучше разложить функцию в ряд $\frac{1}{x}$
важно не сравнивать при $p = 0$.

6.2 О стационарных решениях

22. 03. 22 Лекция 6

О стационарных решениях

Система с одинаковой степенью свободы:

$$\ddot{q} + 2\eta \dot{q} + \omega_0^2 q = f_{\text{вн}}^{\text{int}}$$

$$q = A(\omega)e^{i(\omega t - \phi)}$$

- установившееся решение
загоря для начальных условий

аналогично:

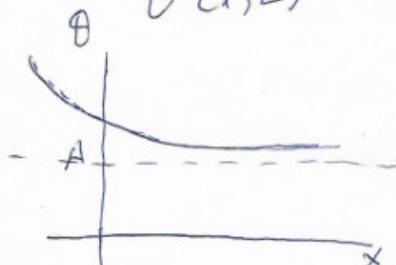
$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

$$\theta = f(x-vt) = f(\xi), \quad \xi = x-vt$$

$$-cvf' = kf'' \quad \text{однородное}$$

$$f(\xi) = A + Be^{-\frac{cv}{k}\xi}$$

$$\theta(x,t) = A + Be^{-\frac{cv}{k}(x-vt)}$$



A - температура среды на
дистанции, куда
тепло еще не дошло
Решение такого вида

описывается, например, прогрев бензина,
но погорячую со стороны в радиостраннике
брюхом гемодиализной перегородки, где
реакция поддерживается постоянной

$$f(x-vt)|_{x-vt=0} = 0$$

①

Такое решение можно записать в виде
 $\Theta(x,t) = \Theta_\infty + (\Theta_0 - \Theta_\infty) e^{-\frac{C_0}{k}(x-vt)}$

Еще один пример: Давление гибкого
 груза на дно, равномерно движущегося
 основания

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = P(x, t)$$

$$P = P_0 \delta(x - vt) = P_0 \delta(s)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 y = \frac{P_0}{EJ} \delta(s)$$

$$y = f(x - vt) = f(s)$$

$$f''''_+ + 2\alpha v^2 f''_+ + b^2 f_+ = 0 \quad s > 0$$

$$f''''_- + 2\alpha v^2 f''_- + b^2 f_- = 0 \quad s < 0$$

$$\text{Гр. укр: } so f_+ = f_-, \quad f'_+ = f'_-, \quad f''_+ = f''_-$$

$$f'''_+ - f'''_- = \frac{P_0}{EJ} \quad (\text{ген. корне})$$

Последнее выражение:

Дисперсионное соотношение для дна:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 y = 0$$

-id^x int

$$y \sim e^{-\frac{b}{2}x}$$

$$C_0 = \frac{b}{2} - ?$$

(2)

6.3 Метод предельного поглощения

6.3.1 Функция Грина статической задачи

После ножемановки:

$$\omega^2 - 2\alpha \omega^2 + b^2 = 0$$

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 = \frac{b^2 + d^2}{2\alpha d^2} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{b^2 + d^2}{2\alpha d^2}}$$

$$\frac{dc}{dd} = 0 \Rightarrow d^* = \sqrt{b}$$

$$c_{\text{крит.}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{K\beta}}{\rho}}$$

При выполнении расчета
значение определять приблизительно нагрузкой. Как он связана
с критической скорость?

Метод предельного поглощения
функция Грина

Рассмотрим статическую задачу
о проникновении струи не турбулентной
среды:

$$Tu_{xx} - Ku = f(x)$$



$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty}$$

Сделаем интегрирование

предварительное

Функция по изгибу:

$$F = \int_{-\infty}^{\sigma} f e^{-idx} dx$$

(3)

$$\begin{aligned}
 & T[u_x e^{-idx}] \Big|_{-\infty}^{\infty} + id \int_{-\infty}^{\infty} u_x e^{-idx} \Big] = \\
 & = T[u_x e^{-idx}] \Big|_{-\infty}^{\infty} + id \cancel{u e^{-idx}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - d^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u e^{-idx}}{u^F} d\zeta \\
 & (-Td^2 - k) u^F = f^F \Rightarrow u^F = -\frac{f^F}{k + Td^2}
 \end{aligned}$$

Одноточечное преобразование Фурье:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^F(\alpha) e^{idx} d\alpha$$

$$u^F = -\frac{1}{T} \frac{f^F}{d^2 + a^2}, \quad a^2 = \frac{k}{T}$$

$$\text{Если } \frac{1}{d^2 + a^2} = \varphi(x), \text{ то}$$

$$f^F \varphi^F = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) \varphi(s) ds$$

единица

(Боломичное преобразование Фурье)

$$u^F = -\frac{1}{d^2 + a^2} \frac{1}{T} - \text{преобразование Фурье}$$

или a^2 \rightarrow δ -функция

$$u_{xx} - Ku = \frac{\delta(x)}{T}, \quad K = \frac{k}{T}$$

$$\text{Тогда: } u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) u^F(s) ds$$

Таким образом получим
реакцию ступенчатой на релаксационной

(4)

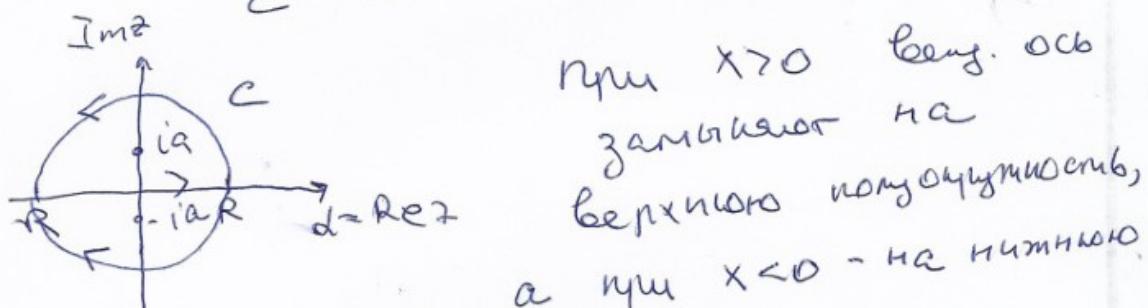
Если пришёл сигнал Грина

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^F e^{ix\omega} d\omega = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\omega^2 + a^2} d\omega$$

Для вычисления интеграла

перейдём в комплексную плоскость.

$$\tilde{J} = \int_C \frac{e^{izx}}{z^2 + a^2} dz, \quad C - \text{замкнутая путь}$$



$$\tilde{J} = \int_{CR^+} F(z) dz + \int_{-R}^R F(z) dz \quad \text{при } x > 0$$

$$\tilde{J} = \int_{CR^-} F(z) dz + \int_{-R}^R F(z) dz \quad \text{при } x < 0$$

Имеем при малом радиусе окружности
на линии $\int_{CR^+} F(z) dz \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0$

$$\tilde{J} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow a} F(z) = 2\pi i \frac{e^{ixa}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ax}$$

$x > 0$

$$\tilde{J} = -2\pi i \lim_{z \rightarrow a} F(z) = \frac{\pi}{a} e^{ax}$$

$x < 0$ \leftarrow остаток окружности не входит в предел

$$\sim \tilde{J} = \frac{\pi}{a} e^{-a|x|}$$

(5)

6.3.2 Функция Грина динамической задачи

Изв: $\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \psi(k) dk$ —
— функция Грина
(статика)

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-k) \psi(k) dk$$

Рассмотрим теперь динамическую задачу:

$$\Gamma u_{xx} - p(x) u_{tt} - k(x) u = 0$$

p и k зависят от x и времени!

Рассмотрим следующую задачу

$$u(x,t) = v_0(x) e^{i\omega t}$$

$$\text{Тогда: } v_{0xx} + \frac{\omega^2}{\Gamma} p(x) v_0 - \tilde{k}(x) v_0 = 0$$

$$v_{0xx} + v_0 \left(\frac{\omega^2 p(x)}{\Gamma} - \tilde{k}(x) \right) = 0$$

$$\boxed{p(x) = p_0 + \tilde{p}(x), \quad k(x) = k_0 + \tilde{k}(x)}$$

$$v_{0xx} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma} [\omega^2 - \omega_0^2]}_{\text{неравенство}} v_0 = \frac{1}{\Gamma} [\tilde{k}(x) - \tilde{p}(x)\omega^2] v_0$$

Недавно спущено.

Могут ли сеи включить через роль источника нонлиней?

⑥

Поставим в пребуд засіль $\frac{1}{\pi} \delta(x-\xi)$

ξ - точка приложенія
навантаження

$$\frac{1 \cdot \delta(x-\xi) e}{0 \quad \xi}$$

$$U_{0xx} + \frac{1}{C_0} U_0 (\omega^2 - \omega_c^2) = \frac{1}{\pi} \delta(x-\xi)$$

Если ми знаєм динаміческу

зумушка Грина, то розв'язання може
бути з подорожнім в пребуд
засіль можна замісити в буде:

$$U_e(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x, \xi, \omega) [k(\xi) - \omega^2 \rho(\xi)] U_0(\xi) d\xi$$

Інтегрування ур-е **предгольма**

II порядка з диференціальним предполаганням

Інтегрування ур-е **предполагання** має бути

$$y(t) = \lambda \int_a^b k(x, \xi) y(\xi) d\xi + g(x)$$

Задача $g(x) = 0$, то неємо диференціальне ур-е

Теорема: Якщо однорідне ур-е

має однозначне розв'язання та модуль

зумушки y , тоді однорідне ур-е

має на мінімальній мері оскільки

матриця виконує розв'язання (A_n -однорід.

зумушка, y_k - відповідні зумушки) (7)

Если $K(x, \xi)$ - симметричное ядро, то убеждено, что спектр содержит смешанные дисcrete и веnственныe, а неприведенные группы ортогональны. Решение можно представить в виде
разложения $y = \sum g_k y_k$

$$\text{Вернемся к ур-ию: } U_{ox} + \frac{1}{C^2} (\omega^2 - w_c^2) = \frac{\delta(x-\xi)}{l}$$

Если $\omega < w_c$, то боки края, в противном случае решение - это дзигуэ.
Союз U_0 - комплексное
постоянную группу Грина можно дать как
вещественный, так и комплексный

$$\begin{aligned} &\text{Берём представление } U_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-idx} dx = \\ &= U_{ox} e^{\int_{-\infty}^{+\infty} -idx} + i \int_{-\infty}^{\infty} U_{ox} e^{-idx} dx = \\ &= U_{ox} e^{\int_{-\infty}^{+\infty} -idx} + i \int_{-\infty}^{\infty} U_{ox} e^{-idx} dx - d^2 U_0^F \end{aligned}$$

Мы не можем приравнять сумму
вещественных слагаемых. У нас
комплексные загара, более не
замуткаем.

(8)

6.3.3 Применение метода предельного поглощения

Используем метод предельного поглощения:

Введём такое выражение:

$$\text{Будем } G_{xx} - \frac{1}{\omega^2} G_{tt} - kG = \frac{1}{T} \delta(x-\xi) e^{i\omega t}$$

G — сумма Грина (консервативное поле)

$$\text{Тогда } G_{xx}^{(E)} - \frac{1}{\omega^2} G_{tt}^{(E)} - \varepsilon G_t - kG = \frac{1}{T} \delta(x-\xi) e^{i\omega t}$$

Мыши несущий грави;
 $G^{(\varepsilon)}|_{x \rightarrow \pm \infty} = 0$

$$G^{(\varepsilon)}(x, t) = G_0^{(\varepsilon)} e^{i\omega t}$$

$$G_0^{(\varepsilon)} + \int \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega^2) - i\omega \varepsilon / G_0^{(\varepsilon)} = \frac{1}{T} \delta(x-\xi)$$

Опять же имеем Другое преобразование:

$$-d^2 G_0^{(F(\varepsilon))} - p^2 G_0^{(F(\varepsilon))} = \frac{1}{T} e^{-id\zeta}$$

$$p^2 = i\omega \varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\text{или } -(\omega^2 + p^2) G_0^{(F(\varepsilon))} = \frac{1}{T} e^{-id\zeta}$$

$$\boxed{G_0^{(F(\varepsilon))} = -\frac{1}{T} \frac{e^{-id\zeta}}{\omega^2 + p^2}}$$

6

$$G_0^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-s)}}{\omega^2 + p^2} d\omega$$

Две формулы для вычисления интеграла перейдём
в комплексную плоскость:

$$z_{1,2} = \pm pi = \pm (A + iB)i$$

$$z_1 = -B + iA, \quad z_2 = B - iA$$

$$p^2 = A^2 - B^2 + 2iB = i\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

Приравнивая мнимые и реальную части, имеем:

$$\begin{cases} A^2 - B^2 = -\frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2) = a, & a < 0 \text{ при } \omega > \omega_c \\ 2AB = \omega\varepsilon \Rightarrow B = \frac{\omega\varepsilon}{2A} \end{cases}$$

Подставляем в первое ур-е

$$A^2 - \frac{\omega^2\varepsilon^2}{4A^2} - a = 0 \Rightarrow A^4 - aA^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\omega^2 = 0$$

$$A_{1,2}^2 = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\omega^2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}|a|\left(1 + \frac{\varepsilon^2\omega^2}{2a^2}\right)$$

Рассмотрим случай $\omega > \omega_c$, $a < 0$

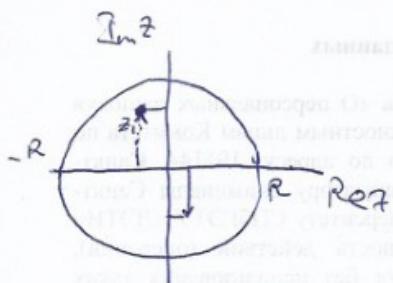
Тогда нас устроит только:

$$A^2 = -\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4a} \Rightarrow A = \frac{\varepsilon\omega}{2\sqrt{|a|}}, \quad B = \sqrt{|a|} =$$

$$= \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{\omega}$$

(10)

Изображим z_1 и z_2 на компл. плоскости



Если $\epsilon \rightarrow 0$, то полоса

лежит не бесконечной оси
их сумма отходит

Возможные варианты:

- 1)  Какой из этих
- 2)  Вероятно
вернем?
- 3)  Вернем?
- 4)  Вернем?

Бесконечное множество точек полосы
с бесконечной осью. (Рассмотрим симметричный
для двух полукружностей симметрический

При $x > \xi$ бесконечную ось замыкаем

на верхнюю полуокружность, а при

$x < \xi$ — на

нижнюю. Используя

равенство \max , получаем:

$\text{тогда } G_{10}^{(c)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{окр. } 0}$

$$G_{10}^{(c)} = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \begin{array}{ll} 2\pi i \frac{e^{i z_1(x-\xi)}}{2z_1}, & x > \xi \\ \theta_{2\pi i} e^{i z_2(x-\xi)} & x < \xi \end{array} \right.$$

одна из которых симметрична

11

Переход к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ $z_1 = -B$, $z_2 = B$

$$G_{10} = -\frac{1}{T} \begin{cases} \frac{ie^{-iB(x-\xi)}}{-2B}, & x > \xi \\ \frac{ie^{iB(x-\xi)}}{2B}, & x < \xi \end{cases} \quad (1)$$

$$B = \sqrt{|a|} = \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{C_0}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{ie^{-iB(x-\xi)}}{2BT}, & x > \xi \\ \frac{ie^{iB(x-\xi)}}{2BT}, & x < \xi \end{cases}$$

$$\text{Тогда } G_{10}(x, \xi, \omega) = \frac{i \propto}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \rho C_0} e^{-i|x-\xi| \frac{1}{C_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} =$$

$$= \frac{i e^{-i|x-\xi| \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{C_0}}}{2 \rho C_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

$$G_1(x, t, \omega) = \frac{e^{-i|x-\xi| \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{C_0}}}{2 \rho C_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{j\omega t} =$$

$$= e^{i\omega(t - \frac{|x-\xi|}{C_0})} \frac{i}{2 \rho C_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad - \text{модуляция}$$

$$G_0 = \frac{\omega C_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

Следовательно! $\omega < \omega_c$ — самовозбуждение.

(12)

7 Лекция 29.03.2022.

7.1 Повторение метода предельного поглощения

29.03.22. Лекция 7

Вспомним материал предыдущей лекции

$$G_{xx}^{(\varepsilon)} - \frac{1}{\omega^2} G_{yy} - \underline{\varepsilon} G_t - \tilde{K} G = \frac{i}{T} \delta(x-s) e^{i\omega t}$$

$$G_1^{(\varepsilon)}(x,t) = G_{10}^{(\varepsilon)} e^{i\omega t}$$

$$G_{10}^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{T} \frac{e^{-is\omega}}{\omega^2 + p^2}, \quad p^2 = i\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\omega > \omega_c$$

$$G(x,t,\omega) = e^{i\omega(t - \frac{|x-s|}{c_p})} \frac{i}{2\rho_0 c_p \sqrt{\omega - \omega_c^2}}$$

$$c_p = \frac{\omega c_p}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad - \quad \begin{array}{l} \text{зависимость} \\ \text{коэффициента} \\ \text{от скорости} \\ \text{и частоты} \end{array}$$

первое решение

Перейдём к случаю $\omega < \omega_c$

$$G(x,t,\omega) = -\frac{1}{2\rho_0 c_p \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} e^{-i|x-s|\sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{c_p}}} e^{i\omega t}$$

- второе решение (неконтрольное)

Вернёмся к исходному ур-ию

с неоднородностью:

$$f(x) = f_0 + \tilde{f}(x), \quad K(x) = K_0 + \tilde{K}(x)$$

①

$$u_{xx} - \frac{1}{b^2} u_{tt} - k_0 u = \frac{1}{\rho b^2} \left[\tilde{k}(x) u + \tilde{\rho}(x) u_{tt} \right] \quad -\infty < x < \infty$$

Существует ли дисперсионный спектр для
затухающих отсечек?

Рассмотрим спектральную задачу

$$u(x,t) = v_0(x) e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{0xx} + \frac{1}{b^2} (\omega^2 - \omega_0^2) v_0 = \frac{1}{\rho b^2} (\tilde{k}(x) - \tilde{\rho}(x) b^2) v_0$$

Если избрана правильная граница, то
нахождение v_0 сводится к простому:

$$v_0(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, \xi, \omega) \varphi(\xi, \omega) v_0(\xi, \omega) d\xi$$

Вместо исходной дифференциальной
уравнения с неизвестностью в приведён
видео мы можем решить интегральное
уравнение: $y(x, \omega) = \omega \int_a^b k(x, \xi) y(\xi, \omega) d\xi$

Если это уравнение
имеет симметрическую и вещественную
форму, то оно всегда имеет
вещественные собственные значения.

(2)

При $\omega > \omega_c$

$$G_o(x, \xi, \omega) = -\frac{i}{2\rho_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{-i \frac{|x-\xi|}{\rho_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

- это энтропия

Зеркальное отражение волн несет им
исключение и уносит энергию.

Для расчета отражения $\omega < \omega_c$

$$G_o(x, \xi, \omega) = -\frac{1}{2\rho_0} e^{-i \frac{|x-\xi|}{\rho_0} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

/ симметрия

это суперпозиция

?: бессрочное пребывание в зоне ω несет
изменение (поглощением энергии)

Проверим: если у нас имеется волна,
исходящая из зоны отражения
то у нас наше суперпозиция
закона: $K(\omega) = \tilde{F}(\omega) = M\delta(\omega)$

$$T_{\text{рф}}: \quad \tilde{F}(\omega) = -\omega^2 G_o(x, 0, \omega) M \underbrace{\tilde{F}(0, \omega)}_{\text{последний}}$$

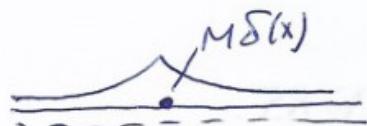
(последний член)

Фундаментальное свойство дельта-функции:

$$\int_a^b f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

(3)

Условие местного минимума
массы со спряткой:



$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x, \omega) = U_0(\omega)$$

Равновесие в начальном положении $x=0$

$$U_0(0, \omega) [1 + \omega^2 G_0(0, 0, \omega) M] = 0$$

$$1 - \frac{\omega^2 M}{2 \rho_0 \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} = 0$$

Аналогичный результат у нас
был полученearlier, но
тогда мы рассматривали
помеху со спряткой с массой
на горизонте



Положение 2 б

значение смещения в нем, это
меньше, рассматриваемое
смещение в положении $(-\infty < x < \infty)$.

(4)

7.2 Примеры волн в различных средах

7.2.1 Термоупругие волны

Примеры волн в различных средах

1. Термоупругие волны

Баланс импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} = 0, \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{или}$$

после выразив уравнение

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x} - \rho c v \dot{\theta} = E \alpha \dot{\varepsilon} \end{array} \right. \quad \text{где } \varepsilon \text{ в узких}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x} - \rho c v \dot{\theta} = E \alpha \dot{\varepsilon} \end{array} \right. \quad \text{связь с температурой}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \dot{\theta} = \gamma \varepsilon \quad \text{уравнение связности.}$$

После присоединения к дифференциальным уравнениям этого переходного $\dot{\theta}$ и при малых величинах, и при решении задачи им заложено пренебрежимо (исключение - полупериод переходного)

Если пренебречь связностью, то температура определяется классически и имеет вид, как деформации (расчетная зависимость, пренебречь переходом а)

(5)

Что такое время данной перемены?

Какое движение организовать

последовательно пропорционально
переменам времени и температуре

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} (\eta \dot{\xi} + \theta)$$

Возможные решения в времени:
Возможные решения пропорциональны времени.
затемнение термодинамика изменяется.

Отметим, что в этом организовано возможное
изменение температуры при наличии термодинамической

стремление к равновесию
и стремление к неизменению
состава с постоянной
помощью термодинамики.

Причина температурного
изменения

(6)

7.2.2 Плазменные волны

2. Плазменные волны

Для описание распространение волн малой амплитуды используются методы гидродинамических гармонических, в которых плазма представляется как смесь электронной и ионной подвижности давление которой компенсируется суммой волокнистых упругих сопротивлений.

$$\rho = n k_B T$$

Такие упругие элементы не имеют и электронная компонента имеет вид

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_j = - \nabla \left(\frac{n_i k_B T_i}{m_i n_i} \right) - \frac{e}{m_i} \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla \vec{v}_e = - \nabla \left(\frac{n_e k_B T_e}{m_e n_e} \right) + \frac{e}{m_e} \nabla \Phi$$

+ упругое неподвижное

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0$$

Неподвижное
изделие

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0$$

Неподвижные
и изодиодные

$$+ \Delta \Phi = - \frac{e(n_i - n_e)}{k_B} - \text{упругое поле.}$$

Рассмотрим одномерный случай.

Так как $m_i \gg m_e$, то для ионов можно пренебречь и учесть упругим вкладом

(7)

Две первых балансовых:

$$p_e = p_0 + p', \quad n_e = n_0 + n'$$

Число ноль относится к невозмущенному состоянию.

$$p_e = p_0 + m_e n' \frac{\partial p}{\partial p_0} \quad (p_e = f(p_e))$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial p_0} = v_0^2$$

Тогда уравнение первых балансовых имеет вид:

или:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{v_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = \frac{e n_e}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Но генерируемые волны не зависят от времени t и не зависят от x , а имеются в виду волны в x -координате.

С учетом этого уравнение:

$$\frac{\partial n'}{\partial t} - v_0^2 \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + w_p^2 n' = 0$$

$$w_p^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e \epsilon_0} - \text{магнитное сопротивление}$$

Число определяет v_0 , число упругости определяет w_p^2 (взаимодействие зарядов) соотношение $p \approx n_0 v_0^2$. Две оставшиеся переменные $f = 3$

$$p = n_0 v_0^2 T$$

(8)

7.2.3 Прямоугольный волновод

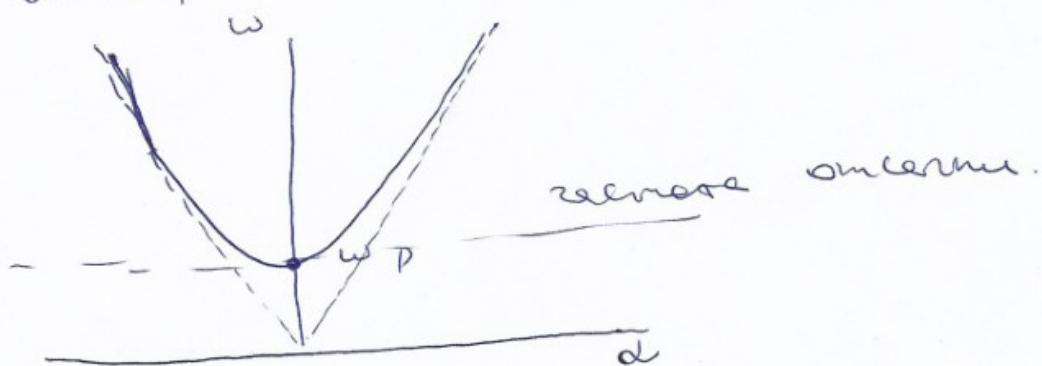
$$\text{Тогда } \frac{\partial \beta_e}{\partial \rho_0} = \frac{\partial \beta_e}{\partial (\epsilon_0 n_e)} = \frac{1}{n_e} \frac{\partial \beta_e}{\partial n} = j \frac{\beta_e}{n n_e}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \beta_e}{\partial \rho_0} = \frac{3 k_B T_e}{n e}$$

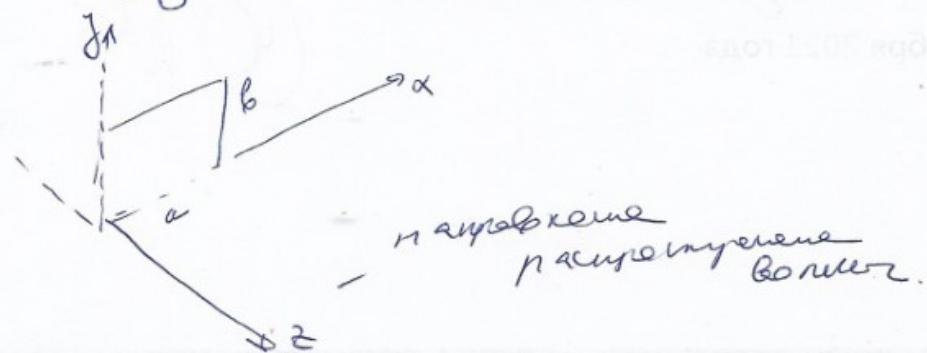
$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \omega_p^2 n' = 0$$

Оператор краев - Гармонический оператор.

Дисперсионные кривые:

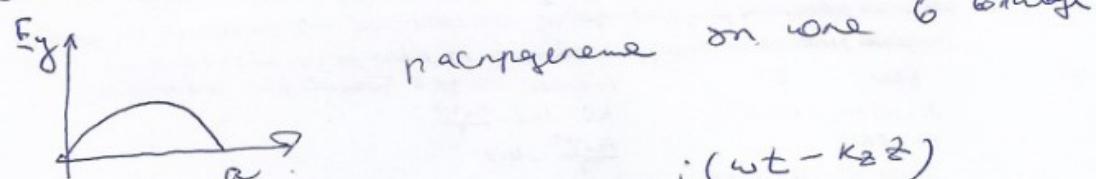


3. Прямоугольный волновод
Рассмотрим вопрос о прохождении
электромагнитных волн через
трубу прямоугольного сечения



9

$\frac{\partial u}{\partial t}$ более непрерывно =
 а. волна переносима в
 и она должна ограничиться в 0 на
 синусе борьбы а!



распространение волны в борьбе

$$:(\omega t - k_x^2)$$

Тогда $E_y = E_0 \sin k_x x e^{-i(\omega t - k_x^2)}$

$$\omega = \frac{w}{k_x} - \text{поглощаемая волна.}$$

$$k_x a = n\pi \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a} - \text{номер гармоники}$$

Наме а. волна должна поглощаться

близко к узлу:

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k_x^2 E_y \quad \underline{\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0}.$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -k_x^2 E_y$$

$$k_x^2 E_y + k_x^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0$$

Однако $k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{a^2}} \quad (\omega^2 = \omega_c^2 + \rho \omega^2)$$

$$\omega_c = \frac{\omega c}{a}$$

(10)

$E_{cm} \omega < \omega_c$, то

$$k_z = \pm i k' \quad , \quad k' = \sqrt{\frac{4}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$E_y = E_0 \sin kx e^{\pm k' z} e^{i \omega t}$$

При ~~заслонке~~ ~~ниже~~ $\omega_c = \frac{eC}{a}$

больш ~~больш~~ труда не
распространяется

меньше ~~заслонке~~ \Rightarrow замедление ^в
времени

меньше ~~больш~~ числа \Rightarrow

\Rightarrow замедление по наружному.

11

8 Лекция 05.04.2022.

8.1 Волны в акустических средах

05.04.22. Лекция 8

Волны в акустических средах

Акустика в широком смысле слова -

- это наука о звуке, изучение явлений и волн в различных средах от сотовых телефонов до предметов быта с весом 10¹⁷ г и их взаимодействие с веществом.

Чтобы из слов звуки понимают изучение явлений и волн в различных средах, воспринимаемых различными чувствами, (16F_g ≈ 80 кГц)

Рассмотрим модель акустической среды

Это стационарная среда, однородная и изотропная

Звуковые волны могут распространяться в ней и неизменять свойства

Если в некотором месте

звуковая волна возникнет и распространяется в

этом объеме стационарно и придет в

стационарное излучение. Внешнее излучение

излучения между частотами, близкими

излучению друг друга называемое перезвучанием

"сочетанием", и возникшее другое распространяющееся

в среде



(1)

До сих пор рассматривали волны в
трёхмерных пространствах. Теперь поговорим о
волнах в газе и жидкости.

При движении в пространстве, волны изобре-
тают изменение напряжения (воздуха)
Если они могут пропасть, т.е. если они
могут не соприкасаться с субстратом, то движущее напряже-
ние называется напряжением

Струнами (или волнистыми) называются колебания, если
они не соприкасаются с субстратом, то
и при движении отсутствующим колебание
напряжение

$I = -pE$ - закон напряжения неравенства
(движение горизонтальное не распространяется)

① Упрощённая

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u E) = 0$$

v_c - скорость звука в несжимаемом веществе

Если же звуковая генерация, то $p = m z$

и $\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p v) = 0$ - движение массы

Немногим отличается звук в превас-

тесном уп-де.

②

(2) Уп-е зерка

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\nabla p + \rho \bar{f} - \text{внешние силы на единицу массы}$$

нормированные

Потенциал

$n_1(n_2)$ более

Уп-е явление пенициллов

konkernische cravette, ♂ (pv)

В равнении же в основу леж

noname Борисовна Потапова

забывши манови (но забытое с
речами

небогородским востоком). В этом

енре ампирър боли симадре наенка

маноми, что их пытается не
заселить.

Влияет на общий курс
Задачи: $I = \Theta P E$ знать могут

Because he negative response
Because his negative response

изменение. В музыкальном
исполнении неизвестное звучание
использовано для создания новых
изменений звука. При этом некоторые
изменения не зависят от
исполнителя.

$$\textcircled{3} \quad y_{n-e}$$

$$P = P(\rho)$$

coincidence;

Барони місця

3

Таким образом, мы получим уравнение

для барометрического уравнения:

$$-\nabla p = \rho \frac{d\tilde{V}}{dt} - \text{давление избыточное.}$$

(з атмосферных уравнений)

$$p = p_0 + \rho g t - \text{атмосферное давление}$$

(и гравитация)

$$\frac{dp}{dt} + \nabla \cdot (\rho \tilde{v}) = 0 \quad \text{давление массы} + \text{гравитация}$$

Итак, имеем: p, p_0, \tilde{v} — 5 скалярных

известенных и 5 уравнений. Имеем

записанный систему

записанный, требующую уравнения,

записанный, требующий уравнения,

найдем.

Если исходить из общего состояния

(p_0, p_0) . В этом состоянии среда покояется

$-\nabla p_0 = 0$. Уравнение баланса массы

возвращается к исходному.

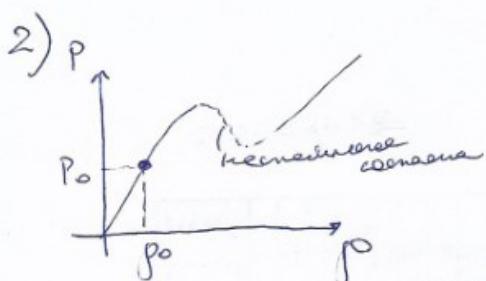
Предположим, что возможна малая

изменение $p = p_0 + \tilde{p}$, $\tilde{p} = p - p_0$, $\tilde{v} = v - \tilde{v}_0$

$$1) \quad -\nabla(\tilde{p} + p_0) = (\tilde{p} + \tilde{p}_0) \frac{d\tilde{V}}{dt} \Rightarrow \boxed{-\nabla \tilde{p} = p_0 \frac{d\tilde{V}}{dt}}$$

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + (v - \tilde{v}_0) \tilde{V} \Rightarrow \frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}$$

④



Ур-е соединяется
результатом в ряд
Также отмечено P_0

$$P(p) = P_0(\rho_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \tilde{\rho} + \dots$$

\approx

ненеоднозначные
значения
второе значение

Несколько упрощенно в задачах с
изотермами, при рассмотрении изотерм
т.е. нет, где сразу же можно спасти

3) Ур-е для массы:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + D \cdot (p v) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + p_0 (D \cdot v) = 0$$

$D \cdot v$ - единство ненеоднозначности

$\tilde{p} = -p_0 \varepsilon \theta$, $\varepsilon \theta$ - обобщенная деформация

$p = p_0(1 - \varepsilon \theta)$. При расширении $\varepsilon \theta > 0$

и наоборот уменьшается, а при
сжатии ($\varepsilon \theta < 0$) - возрастает.

Таким образом,

$\left\{ \begin{array}{l} -D \tilde{p} = p_0 \frac{\partial v}{\partial t} - \text{динамическое} \\ \tilde{p} = \varepsilon \theta \tilde{p} - \text{ур-е значение} \end{array} \right.$

$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -p_0 D \cdot v - \text{динамическая}$

динамическое
ненеоднозначное
уравнение

(5)

Для тела движущегося уп-ся
суммарное (весь объект) и кинематическое
Возможим гидравлическое от левак и
правак земли неравнодействующее

$$\nabla \cdot (-\tilde{p}) = p_0 \frac{\partial}{\partial t} 0 \cdot \tilde{v}$$

С учетом приведенных уравнений

$$\Delta \tilde{p} = p_0 \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Rightarrow \text{Баланс уп-я}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \tilde{p} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = 0} \quad - \text{суммарное уп-е}$$

$$\tilde{p}|_r = \text{заторможенное давление}$$

кинематическое уп-е: Введем времена
 τ - спешкальный параметр, так что $\tilde{v} = \nabla \Phi$

Теорема Генуардия: $u = \nabla \Phi + \nabla \times \underline{A}$
 Φ - спешкальный параметр, \underline{A} - векторный
параметр, при этом $\nabla \Phi$ является
за поступательное движение: следовательно
и изменение аксиома $\square \rightarrow \square$, а
 $\nabla \times \underline{A}$ соответствует вращению: вектор
+ изменение порядка $\square \rightarrow \square$.

(6)

В аэростатических предах $\nabla \times \Phi$ нет, т.
 $\Sigma = \nabla \Phi$ и Φ должна быть масштабом:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \Sigma \Rightarrow \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \Phi, \text{ и}$$

с учетом уравнения $\frac{1}{G^2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \Phi$

$$\Delta \Phi + \frac{1}{\rho_0 G^2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = 0$$

Из первого уравнения (данное из условия)

$$-\tilde{P} = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow \Delta \Phi - \frac{1}{G^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\Delta \Phi - \frac{1}{G^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0}$$

нинеинвариантное уравнение

Оператор Дарандепа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Σ имеет вид $\underline{\Sigma} = \underline{x} \alpha + \underline{y} \beta + \underline{z} \gamma$. Рассматриваем трехмерное уравнение

$$\underline{\Delta} \cdot \underline{\Sigma} = \Delta_x \cdot x + \Delta_y \cdot y + \Delta_z \cdot z, \quad \underline{\Delta} - \text{оператор}$$

Дельта, z - падающее базовое уравнение.

$$\text{т.к. } \Sigma = \nabla \Phi, \text{ то } \Sigma \cdot n = \Sigma \cdot \underline{n} = \nabla \Phi \cdot \underline{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

$\Sigma \cdot \underline{n} = \nabla \Phi \cdot \underline{n}$ - базовое уравнение

сопоставим масштабные коэффициенты: $\nabla \Phi = 0$

Сделаем краевое условие $\Sigma \cdot \underline{n} = 0$ \Rightarrow

Задача Кошиана.

(7)

$$c_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0 f_0}} - \text{скорость звука}$$

Произведен расчет скорости звука

где ρ_0 - плотность

f_0 - сила тяжести

Упр-е agreement

$$PVf = \text{const}, \quad f = \frac{C_p}{C_v} - \text{отношение теплоемкостей}$$



$$p = \text{const} \cdot p_0 f \Rightarrow \frac{p}{f} = \frac{p_0}{f_0}$$

$$\frac{dp}{p_0} = f \frac{p_0}{f_0}$$

$$\text{Таким образом } c = \sqrt{f \frac{p_0}{f_0}} =$$

$$= \sqrt{f \frac{RT}{\mu}} \quad (\text{где } f \text{ - } \begin{matrix} \text{параметр} \\ \text{- изменяющийся} \end{matrix})$$

В выражении с этим соотношением
использовано нечто.

Газ	$C_{sl, m/s}$
Водород	1265
Гелий	965
Азот	334
Водяной пар	331
Кислород	326
Температура $60^\circ C$	

Материал	$c, m/s$
Воздух ($20^\circ C$)	1490
Свинец ($20^\circ C$)	1180
Бензин ($-262^\circ C$)	1127
Азот ($-156^\circ C$)	867
Гелий ($-365^\circ C$)	180

(8)

8.2 Поверхностные гравитационные волны

Поверхностные гравитационные волны

При изучении волн в туманности неоднократно рассматривались гипотетические дренинги (короткие волны гравитационные в зависимости от звуковых волн).
Давно если упрощая описание гравитации, то можно применить метод теории, согласно распространению принципа размножения гравитации для разрешимого (существующих однородных решений.)
сингулярностей X

Изображающее расщепление гравитационные спектры, в которых учитывается зависимость времени смены от его интенсивности.

Однако спектр, который зависит от спектра смены от звуковых волн и от высоты

Мы не будем учитывать поглощение дренингов. В качестве примера гравитационных волн рассмотрим гравитационные волны, генерируемые

(9)

которых определяемое взаимодействие
между частицами и ее
стремлением вернуться в первоначальное
ситуацию тесно связано с состоянием
установившего равновесия
Возможность вернуться в первоначальное
ситуацию в равновесии зависит
от взаимодействия с участвующими
атомами - это взаимодействие
называемое волнистым взаимодействием
Спиратурные процессы (они же)
Спиралевское сопротивление

Спиралевское сопротивление в
атомах и молекулах (или группах атомов),
группах или участвующих в равновесии,
наиболее величина сопротивления
находится выше более плавкого
также показывает величину разрывного
напряжения при переходе через изогнутое
образование при переходе через изогнутое
изогнутое тела. Возможность
изогнутое равновесное состояние
данного равновесного состояния
предоставляется в виде поверхности
изогнутое в виде поверхности
изогнутое в виде поверхности

(10)

не могут распространяться без
от разрушения: они делают не
своё, чем не назначены для этого
бактерий.

Мы рассмотрим поверхности
улавливющие бактерии и тогда
увидим между собой и безраз^{личие}
и друг преодолевать существо
поверхности каменистые.

Камни камни земли покрыты
глобулами неподвижные: земля днём
поглощает присущенное им определение.
т.е. мы имеем землю со скользкими
протяжными и извилистыми бактериями.

Литература:

1. Дневник Лайхиль. Волчи б
тигромах. 1928 г.

2. Григорий Ламб. Гидробиология, 1932 г.

(ii)

9 Лекция 12.04.2022.

9.1 Краткое повторение материала о волнах в акустических средах

12.04.22 Лекция 9

Вспомним материал предыдущей лекции
На основе базисных уравнений:

$$-\nabla p = p \frac{dv}{dt} \quad -\text{длгое импульса}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (pv) = 0 \quad -\text{длгое massa}$$

$$+ \gamma p \cdot e \quad \text{свободное}$$

$$P = P(p)$$

мы получим классическое линейные
уравнение акустической среды относительно
исходных параметров состояния P_0, ρ_0

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \tilde{p} = P_0 \frac{\partial v}{\partial t} \\ \tilde{p} = C^2 \tilde{v}, \quad C^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{P=P_0} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -P_0 \nabla \cdot v \end{array} \right.$$

Длгое это уравнение к $\gamma = 10^{-10}$
однако оно не является точное:

Следует: $\Delta \tilde{p} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0$

Гр. ун $\tilde{p}|_r = \Phi^{(+)} - \text{затухание}$

Кинематическое $\Delta v - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$

$v_r = \frac{\partial v}{\partial r}|_r = \Phi^{(+)}$ - затухание

затухание $\Phi^{(+)}$ - показывает звука скорость



9.2 Поверхностные гравитационные волны на границе между водой и воздухом

12.04.22 Лекция 9

Вспомним материал предыдущей лекции.
На основе базисных уравнений:

$$-\nabla p = \rho \frac{dv}{dt} \quad - \text{давление импульса}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad - \text{давление массы}$$

+ уп-е сопротивления

$$P = P(p)$$

Мы получим классические линейные
уп-е сопротивления среды относительно
исходных параметров атмосферы P_0, ρ_0

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \tilde{p} = P_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \\ \tilde{p} = C^2 \tilde{v}, \quad C^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{P=P_0} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -P_0 \nabla \cdot \tilde{v} \end{array} \right.$$

Далее эти уп-е сопротивления к $\pm g r^{1/2}$
однако из физики мы знаем:

Следовательно: $\Delta \tilde{p} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} = 0$

Гр. упр. $\tilde{p}|_r = \Phi(r)$ — звуковые

Кинематическое

$$\Delta \Phi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} = 0$$

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_r = \Phi'(r) \quad \text{— звуковая}$$

и $\nabla \Phi$ — параметры звука





h - глубина ворёма

Запишем ур-е Эйлера в системе на вертикальную ось:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - g$$

Наше интегрирование с учётом равенства $\nabla = \nabla \varphi$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{P}{\rho} - gy + C(t) \quad \text{- начальное интегрирование}$$

На поверхности: $y = \eta$

η - возвышение поверхности над морем (x_0)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \cancel{\frac{P}{\rho}} - gy^2 + \cancel{\frac{P}{\rho}} - \text{видор } C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \text{при } y = \eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases}$$

Наше дифференцирование 1 ур-е по времени имеет

(3)

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$

в акустической
задаче (y -макс) начальное условие
составлено на невозмущеной
поверхности

Так как для всех значений x начальное
условие однозначно, то оно
нормально

$$y = f(y) \cos(\omega t - dx)$$

$$y \text{ подставляем в } \ddot{y} = 0: \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow f'' - d^2 f = 0$$

Решение + граничное условие
самосогласовано в краевом
уравнении

$$f = A e^{dy} + B e^{-dy}$$

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$A e^{-dh} - B e^{dh} = 0$$

$$\boxed{A e^{-dh} - B e^{dh} = 0}$$

(4)

$$2. \quad \ddot{\varphi} + g \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varphi}} \Big|_{\dot{\varphi}=0} = 0$$

$$-(A+B)\omega^2 + g\alpha(A-B) = 0$$

$$\begin{cases} (g\alpha - \omega^2)A - B(\omega^2 + g\alpha) = 0 \\ e^{-\alpha h}A - Be^{\alpha h} = 0 \end{cases}$$

Получаем систему зависимостей
самоизменения в исходе уравнение

$$\Delta = 0 \Rightarrow (g\alpha - \omega^2)e^{\alpha h} = (\omega^2 + g\alpha)e^{-\alpha h}$$

$$\omega^2(e^{\alpha h} + e^{-\alpha h}) = g\alpha(e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{g\alpha} \sqrt{\tanh(\alpha h)}$$

Если одновременно $\sqrt{g\alpha} = \omega_0$ - константа, то

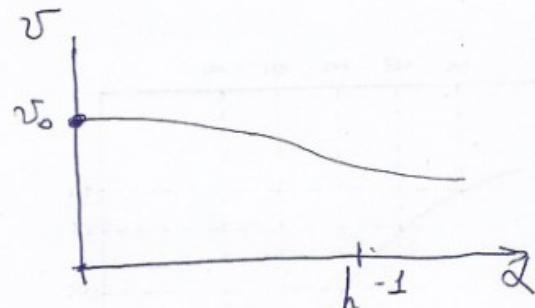
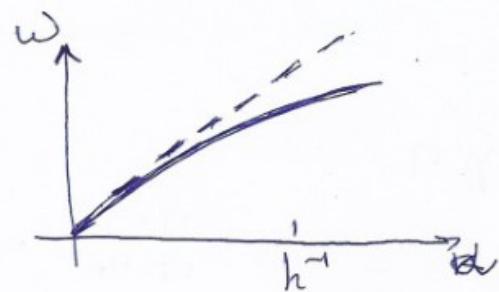
$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\tanh(\alpha h)}{\alpha h}}$$

$$v = \frac{\omega}{2} = \omega_0 \left(\frac{\tanh(\alpha h)}{\alpha h} \right)^{1/2}$$

- это барьерное состояние

(5)

Граничные условия:



Если угловое реза $\omega h < 1$, то
 $\omega h \approx dh \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 d$$

Но реза близок касательной
координатам

Dynes берут:

$2h \gg 1$ близок касательной

$$\omega = \sqrt{gd}$$

$$\omega dh \approx 1$$

В этом случае близок касательной
координатам.

(6)

Вернемся к определению f :

$$\text{Если однозначно } Ae^{-\alpha h} = Be^{\alpha h} = \frac{1}{2}C, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} f &= Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y} = \\ &= \frac{1}{2}C(e^{\alpha(h+y)} + e^{-\alpha(h+y)}) = C \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}C \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{g} C \omega \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \sin(\omega t - \alpha x) =$$

$$= a \sin(\omega t - \alpha x)$$

Вспомним C разд. а, имеем:

$$C = \frac{ag}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{ag}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

Максимальная амплитуда:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{ag \alpha}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \sin(\omega t - \alpha x)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{ag \alpha}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{sh}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

Запоминаем

(7)

10 Лекция 19.04.2022.

10.1 Продолжаем разговор о поверхностных волнах

19.04.22. Лекция 10.

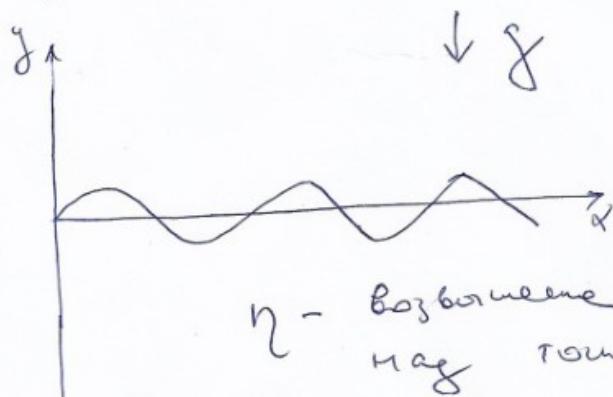
Продолжим разговор о поверхностных волнах на границе раздела δy .

Среды

Основные предположения

1. Несжимаемость
 2. $\Delta \varphi = 0$
- $\Delta \varphi = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$



η - возмущение поверхности
на гравитации $(x, 0)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\varphi = C e^{i k y} e^{i(kt - \alpha x)}$$

Глубина тихоокеана неограничена

①

10.2 Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей

Рассмотрим колебание поверхности раздела двух расположенных друг другом жидкостей

$$\varphi = C e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\varphi' = C' e^{-ikx} e^{i(\omega t - kx)}$$

штрихи относятся к верхней жидкости.

$$\eta = a e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow i\omega a = \partial C = -\partial C'$$

Ур-я Эйлера после интегрирования по оси y

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - g y \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = -\frac{P'}{\rho'} - g y \end{cases}$$

На поверхности:

$$\begin{cases} P = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g \eta \\ P' = -\rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - g \eta \end{cases}$$

Приравнив все саблички, получаем:

(2)

$$-\rho C i\omega - \rho g a = -\rho' C' i\omega - \rho' g a$$

$$\rho (C i\omega + g a) = \rho' (C' i\omega + g a)$$

С учётом условия $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow$
 $\Rightarrow i\omega a = dC = -dC'$

$$-\rho \frac{\omega^2 a}{2} + \rho g a = \rho' \frac{\omega^2 a}{2} + \rho' g a$$

$$\frac{\omega^2}{2} (\rho' + \rho) = g (\rho - \rho')$$

$$\omega^2 = \frac{g a (\rho - \rho')}{\rho + \rho'}$$

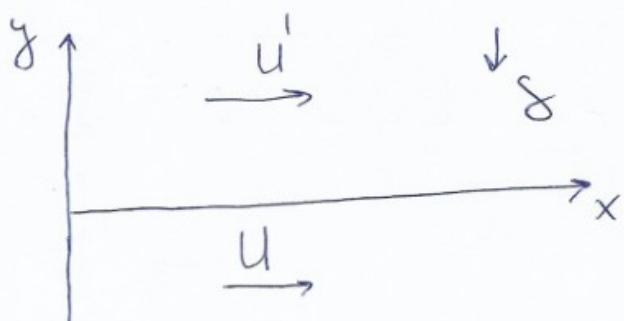
$$C_0^2 = \frac{\omega^2}{2^2} = \frac{g}{2} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$$

Таким образом, присутствие верхней границы выражается уменьшение скорости распространение волн.

(3)

10.3 Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей, которые движутся друг над другом

Предположим, что две турбулентности с плотостями ρ и ρ' движутся друг над другом со скоростями u и u' параллельными оси x



Нужно учесть конвективное проницание

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{условие неизменности}$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \eta'}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}$$

$$\varphi = ux + \varphi_1, \quad \varphi' = u'x + \varphi'_1$$

Уп-е давления

$$\frac{P}{\rho} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - g y$$

аналогично для верхней турбулентности

(4)

Из непрерывности сглаживания
поверхности.

$$\begin{aligned} & p \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + g \eta \right] = \\ & = p' \left[\frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + u' \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} + g \eta' \right] \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = C e^{d\gamma} e^{i(\omega t - dx)}$$

$$\varphi'_1 = C' e^{-d\gamma} e^{i(\omega t - dx)}$$

$$\eta = a e^{i(\omega t - dx)}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \eta'}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} iwa - u iad = dC \\ iwa - u' iad = -dC' \end{cases}$$

$$\begin{cases} ia(\omega - du) = dC \\ ia(\omega - du') = -dC' \end{cases}$$

Возвращение к начальной гипотезе

(5)

$$P[i(\omega - \alpha u)c + g a] = P'[i(\omega - \alpha u')c' + g a']$$

Рассмотрим выражение для $c + c'$

$$P[i(\omega - \alpha u) \frac{i a (\omega - \alpha u)}{\alpha} + g a] =$$

$$= P'[-i(\omega - \alpha u') \frac{i a (\omega - \alpha u')}{\alpha} + g a']$$

$$P[-(\omega - \alpha u)^2 \frac{g}{\alpha} + g a] =$$

$$= P'[(\omega - \alpha u')^2 \frac{g}{\alpha} + g a']$$

$$g \alpha (P - P') = P(\omega - \alpha u)^2 + P'(\omega - \alpha u')^2$$

Можно написать квадратное ур-е
относительно ω и находит
суперпозицию зависимостей

$$(P' + P)\omega^2 - 2\omega \alpha [Pu + P'u'] + \alpha^2 (u'^2 + u^2) - g \alpha (P - P') = 0$$

⑥

$$C_0 = \frac{\omega}{d} = \frac{pu + p'u'}{p+p'} + \left\{ \underbrace{\frac{g}{d} \frac{p-p'}{p+p'}}_{C_0^2} - \frac{pp'}{(p+p')^2} (u-u')^2 \right\}^{1/2}$$

$$C_0 = \bar{C} \pm \Delta$$

$$C^2 = C_0^2 - \frac{pp'}{(p+p')^2} (u-u')^2$$

C_0 — скорость волны в отсутствии течения

Значение ω достигло минимума,

$$\text{если } (u-u')^2 > \frac{g}{d} \frac{(p-p')(p+p')}{pp'} = \\ = \frac{g}{d} \frac{(p^2-p'^2)}{pp'}$$

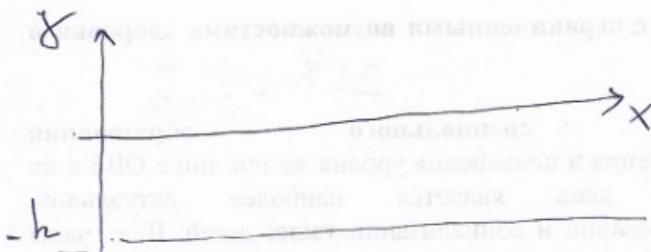
Согласованно при достаточно больших d или при движении неизменных границ волны удачно достигают наивысшего значения.

Если $p=p'$ то наше значение ω становится не вовсе константой.



10.4 Волны на границу между водой и воздухом без учёта силы тяжести (решение Эйлера)

Возбуждаются к исходной по сплошные зерни.



$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \varphi = \nabla U$$

Не дает учитывать силу тяжести.

$$\varphi = f(y) e^{i(kt - \omega x)}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y} - \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad \text{уравнение Эйлера}$$

но не очевидное:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{на свободной поверхности } \rho = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$1. \quad \text{на свободной поверхности: } \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow f \Big|_{y=0} = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0$$

$$f'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \omega^2 \right) f = 0 \quad \text{или}$$

$$f'' - \frac{\omega^2}{c^2} f = 0, \quad f'' = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega^2)$$

$$f = A \sin \omega y + B \cos \omega y$$

$$f \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

⑧

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_{y=h} = 0 \Rightarrow \operatorname{ch} j h = 0$$

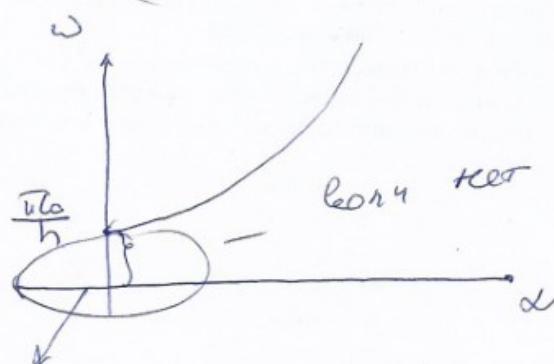
Если j - вещественное, то решение имеет
специальный вид

$$j = \frac{1}{l_0} \sqrt{d l_0^2 - \omega^2}$$

$$j - \text{максимум} \quad \cos j h = 0 \Rightarrow j h = \frac{\pi}{2} (2n+1)$$

$$j^* = \frac{1}{l_0} \sqrt{\omega^2 - d l_0^2}$$

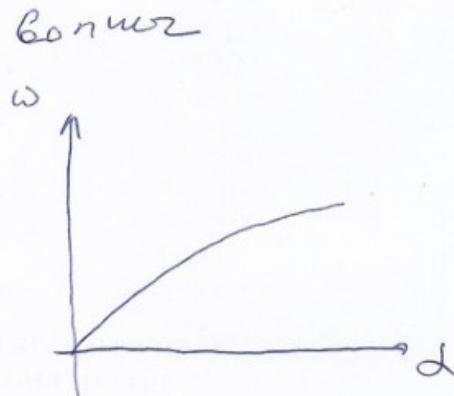
$$\omega^2 = \left(\frac{\pi (2n+1) l_0}{h} \right)^2 + d l_0^2$$



Небескостное ω_0/h ω близко

$$\omega = \sqrt{g d}$$

Динамическое баро-
воздушное поле



(9)

11 Лекция 26.04.2022.

11.1 Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле

26.04.22 Лекция 11

Δ вида уравнений

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad - \text{силовое ур-е}$$

$$P|_r = \varphi(t) \quad - \text{запись Дирихле}$$

$$\underline{U} = \nabla \varphi \quad - \text{кинемат. ур-е}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad - \text{кинемат. ур-е}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}|_r = \varphi(t) \quad - \text{запись Неймана}$$

Перейдём в сферическую систему координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad - \text{оператор Планка}$$

Оставим зависимость только от радиуса

$$\text{Тогда } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}$$

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \varphi_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \varphi_2 \left(t + \frac{r}{c} \right)$$

Амплитуда убывает пропорционально расстоянию, что вызвано расширением поверхности фронта.

(1)

$$\varphi = \frac{1}{2} \varphi_1 \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

$$P = -P \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{P}{2} \varphi_1'$$

$$s = t - \frac{z}{c}$$

$$U = \nabla \varphi = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial r} - \frac{1}{2^2} \varphi_1'' =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\varphi_1'}{c} - \frac{1}{2^2} \varphi_1'' =$$

$$= +\frac{1}{2} \frac{P}{c P} + \frac{1}{2 P} \int P dt =$$

$$= \frac{P}{2c} + \frac{1}{2 P} \int P dt$$

значение now

дополнение now

$$\sigma = -Pcv - \text{значение now}$$

получено ранее

Первое значение определяем следующим образом
значение в начальном now, которое
обеспечивается за первое значение.
Второе значение, убирая с расщеплением
как $1/2^2$ дополняем вдвиде исходные
и преобразуем на основе расщепления

(2)

Начиная с момента $t = 0$ источник издаёт гармонический звук

$$\varphi_F = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - dr)}$$

$$P = -P \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\omega p \varphi$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{(1 + idz)}{z}$$

$$\frac{P}{v^2} = \frac{2i\omega p}{1 + idz} = \frac{2cdp i}{1 + idz}$$

Самоизлучение является ячеее излучение

$$\tilde{z} = \frac{i}{1 + idz} = \frac{i(1 - idz)}{1 + d^2 z^2} = \frac{dz + i}{1 + d^2 z^2}$$

$$|\tilde{z}| = \sqrt{\frac{d^2 z^2 + 1}{d^2 z^2 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + d^2 z^2}}$$

$$\frac{P}{v^2} = \frac{2cdp e}{\sqrt{1 + d^2 z^2}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{1}{dz} = \arctg \frac{1}{2az}$$

$dz \gg 1$ излучение между

между P и v соответствует

максимуму (затухание нак)

- Излучение неизвестно в максимуме

(3)

$z = pc -$ текущее сопротивление
среды (текущий импеданс)

$$z = pc \frac{d^2 z^2}{1 + d^2 z^2} + i pc \frac{d^2}{1 + d^2 z^2}$$

В отличие от тласка волны
импеданс среды комплексный вид
что указывает на наличие фазового
угла между p и w

Следуя по разе между сопротивлением "u"
скоростью одновременно имеем, что
ближне источника кроме волнистой
движения имеется также поглощющее
движение волны среды.
Инерционное сопротивление в горизонте
реактивное сопротивление

$$x = \operatorname{Im} z = w m_s, \quad \text{здесь}$$

$$m_s = \frac{pc}{1 + (dt)^2} \quad \begin{array}{l} \text{масса на ед.} \\ \text{площади 6 см.} \\ \text{небольшости} \end{array}$$

Инерционное сопротивление
среды (присоединённая масса)

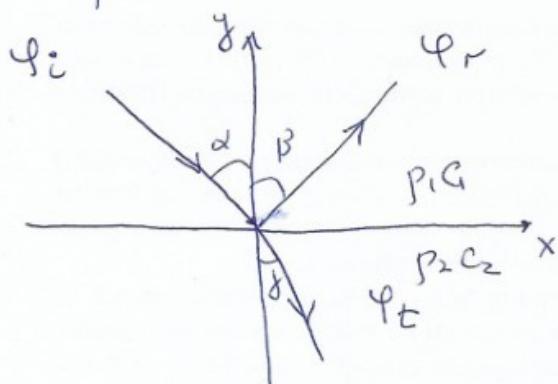
(4)

11.2 Наклонное падение волны

Наклонное падение волн

Если акустическая волна попадает на шумы распространения преломленная то есть зеркальная волна отраженная а зеркально проходит во вторую среду

Таким образом образуются три волны: падающие, отраженные и преломленные.



Процесс волны падает на плоскую поверхность $y=0$. При этом образуются отраженные отраженные φ_r и преломленные φ_t волны.

Множитель $i(wt - \vec{z}\vec{\Sigma})$

$$\varphi = A e^{i(wt - d_1(x \sin \alpha - y \cos \alpha))}$$

$$\varphi_i = A_i e^{i(wt - d_1(x \sin \beta + y \cos \beta))}$$

$$\varphi_r = A_r e^{i(wt - d_1(x \sin \gamma + y \cos \gamma))}$$

$$\varphi_t = A_t e^{i(wt - d_2(x \sin \delta - y \cos \delta))}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{\Sigma} = d_1 x + d_2 y = d (x n_x + y n_y)$$

$$\vec{z} = \frac{\omega \vec{n}}{c}$$

$$d_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad d_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

(5)

На плоскости $y=0$ должны выполняться граничные условия

$$p_1 (\varphi_i + \varphi_r) \Big|_{y=0} = p_2 \varphi_t \Big|_{y=\infty} \quad \text{непрерывность давления}$$

$$\frac{\partial (\varphi_i + \varphi_r)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} \Big|_{y=\infty} \quad \text{непрерывность нормальной комп. скорости}$$

Погрешное выражение получилось из пренебрежения гидравлическим сопротивлением, находим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 A_i e^{-id_1 x \sin \alpha} + p_1 A_r e^{-id_1 x \sin \beta} = p_2 A_r e^{-id_2 x \sin \gamma} \\ d_1 \cos \alpha A_i e^{-id_1 x \sin \alpha} - d_1 \cos \beta A_r e^{-id_1 x \sin \beta} = d_2 \cos \gamma A_r e^{-id_2 x \sin \gamma} \end{array} \right.$$

Умодр. форму набора
условий борьбы при листах заслонках
 x , когда изменяется при x сопротивление
двигателю.

Набором мы можем пользоваться
условии набора неравенств

$$d_1 \sin \alpha = d_1 \sin \beta = d_2 \sin \gamma \Rightarrow$$

$$\boxed{d = \beta, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{c_1}{c_2}}$$

(6)

Известные в оптике закон
отражение и преломление
с учётом данных коэффициентов
системы y^{n-a} принципе Буг

$$\begin{cases} \rho_1(A_i + Ar) = \rho_2 At \\ \rho_1(Ai - Ar) \cos \alpha = d_2 At \cos \beta \end{cases}$$

$$r_\phi = \frac{Ar}{Ai} = \frac{\rho_2 c_2 \cos \beta - \rho_1 c_1 \cos \alpha}{\rho_2 c_2 \cos \beta + \rho_1 c_1 \cos \alpha}$$

$$t_4 = \frac{At}{Ai} = \frac{2\rho_2 c_2 \cos \beta}{\rho_2 c_2 \cos \beta + \rho_1 c_1 \cos \alpha}$$

В случае нормального нажатия:

$$r_h = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = -\frac{1-q}{1+q}, \quad q = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$$

$$t_n = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{2q}{1+q}$$

Эти соотношения дают полное
решение.

(7)

12 Лекция 17.05.2022.

12.1 Повторение материала о волнах в сферической СК

17. 05. 22. Лекция 12

Сферическая система координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\partial}{r\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

- оператор Лапласа

$$\text{Если } \Psi = \Psi(r, \theta, \varphi), \text{ то } \Psi \in$$

Движение волны имеет вид

$$\frac{\partial^2(\Psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\Psi)}{\partial t^2}$$

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{r} \Psi_1(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r} \Psi_2(t + \frac{r}{c})$$

В сущности гармонический волну

$$\Psi = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - dr)}$$

$$P = -P \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -i \omega r \Psi$$

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\left(\frac{1+idr}{2}\right) \Psi$$

$$\frac{P}{v} = \rho c \cos \Psi e^{i\Psi} = \rho c \frac{dr}{\sqrt{1+d^2r^2}} e^{i\Psi}$$

$$\Psi = \arcsin \frac{1}{dr}$$

$d^2 \gg 1 \Rightarrow$ волновая зона

$$P = \rho c v \text{ - данное соотношение}$$

- соотношением называют волну

①

12.2 Энергия звуковых волн

Энергия звуковых волн

При распространении звуковой волны в упругой среде кинетическая энергия среды содержит определенным количеством энергии. Покажем, что эта энергия равна сумме кинетической энергии колебательной волны и потенциальной энергии, обусловленной упругой деформацией среды.

$$\rho_0 \Sigma \frac{\partial v}{\partial t} = -\Sigma \cdot \nabla p$$

Вспомним о работе

$$\nabla \cdot (\rho \Sigma) = \rho \Sigma \cdot \nabla + \Sigma \cdot \nabla p$$

$$\rho_0 \Sigma \frac{\partial v}{\partial t} - \rho_0 \Sigma = -\nabla \cdot (\rho \Sigma) \quad (*)$$

Ур-е баланс масс:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 \Sigma \cdot \nabla$$

$$\text{ур-е условие: } \rho = c^2 \rho_0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \Sigma = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Тогда ур-е (*) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{\Sigma^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c^2} \right) = -\nabla \cdot (\rho \Sigma)$$

(2)

Чтобы упростить задачу второго смысла, рассчитаем работу, затрачиваемую изолированной системой при разогреве объема V_0 на величину dV

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{dV}{V_0} \Rightarrow dV = -V_0 \frac{dp}{p_0} = -\frac{V_0 dp}{G^2 p_0}$$

$$dA = p dV = -\frac{V_0}{G^2 p_0} p dp$$

$$A = - \int_0^P \frac{V_0}{G^2 p_0} p dp = -\frac{V_0}{2G^2 p_0} P^2$$

Следовательно, первое значение энтропии изменяется в результате разогрева

$$\text{Тогда } W = p_0 \frac{\dot{v}^2}{2} + \frac{P^2}{2G^2 p_0} - \text{ потенциальная энергия звуковой волны}$$

Для этого волны $p = p_0 \cos \varphi$ и

$$W = p_0 \dot{v}^2 = \frac{P^2}{G^2 p_0^2}$$

$$\int_V W dV = E - \text{значение энтропии в объеме } V$$

$P \dot{v} = Q$ — величина потока энергии через единицу поверхности (плотность потока единичной величиной величиной тепла), называемой тепловым потоком.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int_S Q_n dS$$

— тепловой поток Q через замкнутую поверхность

(3)

Поток энергии звука в единица времени
в некотором месте величина, наз.
интенсивность

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T Q dt \quad \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right)$$

Две гармоничные волны

$$P = P_m \cos \omega t, \quad v = v_m \cos (\omega t - \varphi)$$

$$Q = p v = \frac{1}{2} P_m v_m \cos \varphi + \frac{1}{2} P_m v_m \cos (2\omega t - \varphi)$$

Нагревание и инерционное течение

$$J = \frac{1}{2} P_m v_m \cos \varphi$$

Интенсивность звука в месте волны:
($\varphi = 0, \frac{P_m}{v_m} = \rho_0 c$)

$$J = \frac{1}{2} \frac{P_m}{\rho_0 c} = \frac{1}{2} \rho_0 c v_m^2$$

В сферической волне:

$$P_m = \frac{\omega \rho_0 A}{r} = \frac{\rho_0 c d \pi r^2}{r}$$

$$v_m = \frac{dA}{r \cos \varphi}$$

$$J = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 \frac{d^2 A^2}{r^2}$$

Однако продолжение квадрата несложно

$$J = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 v_m^2 \cos^2 \varphi$$

Интенсивность имеет и сферическую
форму синусоиду при $\cos \varphi \rightarrow 1$,
волне сферической при $\cos \varphi \rightarrow 0$,
т.е. в конечной зоне.

④