Муравцев Александр 5040103/10401
Email: muravtsev.aa@edu.spbstu.ru

Задача (несвязанная динамическая задача термоупругости)

Рассматривается полубесконечный стержень с модулем Юнга E и плотностью ρ, для которого справедливо соотношение Дюамеля-Неймана. Объёмный источник в уравнении теплопроводности задан в виде

$$Q = J_0(H(t) - H(t-\tau))e^{-\gamma x},$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Пренебрегая теплопроводностью материала, получить термоупругий импульс на расстоянии, существенно превышающем глубину проникновения теплового источника.

Принять, что время действия теплового импульса τ много меньше времени пробега акустической волны до координаты, в которой производится регистрация сигнала.

Постановка задачи

По условию пренебрегаем теплопроводностью материала стержня (не учитываем распространение тепла вдоль стержня), поэтому уравнение теплопроводности можем записать в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = Q \Leftrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = J_0(H(t) - H(t-\tau))e^{-\gamma x} \tag{1}$$

Тогда распределение температуры по стержню (см. рис.1):

$$\theta = J_0\left(tH(t) - (t-\tau)H(t-\tau)\right)e^{-\gamma x} \tag{2}$$

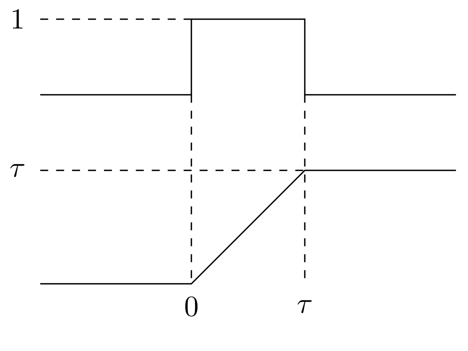


Рис. 1: Интегрирование ступенчатого импульса

Далее подключаем уравнение баланса импульса:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} = 0, \tag{3}$$

где $\sigma = E\left(\varepsilon - \alpha\theta\right)$ (соотношение Дюамеля-Неймана) и $\varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.
После подстановки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial \theta}{\partial x}, \tag{4}$$

где $c_0 = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ – скорость звука в стержне.

Далее подставляем выражение для распределения температуры (2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -J_0 \cdot \alpha \cdot (tH(t) - (t-\tau)H(t-\tau)) \cdot \gamma e^{-\gamma x} \tag{5}$$

Левый торец стержня свободен:

$$\sigma|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha \cdot J_0 \cdot (tH(t) - (t-\tau)H(t-\tau)) \tag{6}$$

На бесконечности ставим условие излучения:

$$u|_{x\to\infty} < \infty \tag{7}$$

Ставим нулевые начальные условия:

$$u(0,x) = 0 \text{ и } \dot{u}(0,x) = 0 \tag{8}$$

Таким образом, получаем постановку задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -J_0 \cdot \alpha \cdot (tH(t) - (t-\tau)H(t-\tau)) \cdot \gamma e^{-\gamma x} \\ \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha \cdot J_0 \cdot (tH(t) - (t-\tau)H(t-\tau)) \\ \\ u|_{x\to\infty} < \infty \\ \\ u(0,x) = 0 \\ \dot{u}(0,x) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Преобразование Лапласа

В пространстве Лапласа постановка задачи перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u^L}{dx^2} - \dfrac{p^2}{c_0^2}u^L = -J_0 \cdot \alpha \cdot \dfrac{1-e^{-\tau p}}{p^2} \cdot \gamma e^{-\gamma x} \\ \\ \left.\dfrac{du^L}{dx}\right|_{x=0} = \alpha \cdot J_0 \cdot \dfrac{1-e^{-\tau p}}{p^2} \\ \\ u^L|_{x\to\infty} < \infty \end{cases} \tag{10}$$

Решение в пространстве Лапласа

Общее решение полученного дифференциального уравнения:

$$u^L = C_1 e^{px/c} + C_2 e^{-px/c} + \frac{J_0 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \left(1 - e^{-\tau p}\right)}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)} e^{-\gamma x} \tag{11}$$

Из второго граничного условия:

$$u^L|_{x \to \infty} < \infty \Rightarrow C_1 = 0 \tag{12}$$

Из первого граничного условия:

$$-\frac{p}{c} C_2 - \frac{J_0 \cdot \alpha \cdot \gamma^2 \left(1 - e^{-\tau p}\right)}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)} = \alpha \cdot J_0 \cdot \frac{1 - e^{-\tau p}}{p^2} \tag{13}$$

$$-\frac{p}{c} C_2 = \frac{\alpha \cdot J_0 \left(1 - e^{-\tau p}\right)}{p^2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2}\right) \tag{14}$$

$$-\frac{p}{c} C_2 = \frac{p^2}{c^2} \frac{\alpha \cdot J_0 \left(1 - e^{-\tau p}\right)}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)} \tag{15}$$

$$C_2 = -\frac{p}{c} \frac{\alpha \cdot J_0 \cdot \left(1 - e^{-\tau p}\right)}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)} \tag{16}$$

Тогда

$$\boxed{u^L = \frac{\alpha \cdot J_0 \cdot \left(1 - e^{-\tau p}\right)}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)} \left(\gamma e^{-\gamma x} - \frac{p}{c} \cdot e^{-\frac{px}{c}}\right)} \tag{17}$$

Переход из пространства Лапласа к оригиналу

Раскроем скобки в (17):

$$u^L = J_0 \cdot \alpha \cdot \left(\underbrace{\frac{\gamma e^{-\gamma x}}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)}}_{u_1^L} \underbrace{- \frac{\frac{p}{c} \cdot e^{-\frac{px}{c}}}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)}}_{u_2^L} \underbrace{- \frac{\gamma e^{-\gamma x}}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)} \cdot e^{-\tau p}}_{u_3^L} + \underbrace{\frac{\frac{p}{c} \cdot e^{-\frac{px}{c}}}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)} \cdot e^{-\tau p}}_{u_4^L} \right) \tag{18}$$

Первое слагаемое:

$$u_1^L = \frac{\gamma e^{-\gamma x}}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)} = \frac{c^2 \gamma e^{-\gamma x}}{p^2 \left(p^2 - (\gamma c)^2\right)} = \tag{19}$$

Небольшое отступление от задачи (заметки на полях):

$$\frac{1}{p^2 \left(p^2 - a^2\right)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p^2 - a^2} = \frac{Ap^2 - Aa^2 + Bp^2}{p^2 \left(p^2 - a^2\right)} \Rightarrow A = -\frac{1}{a^2} \text{ и } B = \frac{1}{a^2} \tag{20}$$

Продолжаем расписывать первое слагаемое:

$$= \frac{c^2 \gamma e^{-\gamma x}}{\gamma^2 c^2} \left(\frac{1}{p^2 - (\gamma c)^2} - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{e^{-\gamma x}}{\gamma^2 c} \left(\frac{\gamma c}{p^2 - (\gamma c)^2} - \frac{\gamma c}{p^2} \right) \tag{21}$$

Тогда

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(u_1^L\right) = \frac{e^{-\gamma x}}{\gamma^2 c} (\operatorname{sh} \gamma c t - \gamma c t) \cdot H(t)} \tag{22}$$

Второе слагаемое:

$$u_2^L = -\frac{\frac{p}{c} \cdot e^{-\frac{px}{c}}}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2 \right)} = -\frac{c \cdot e^{-\frac{px}{c}}}{p \left(p^2 - (\gamma c)^2 \right)} = \tag{23}$$

Небольшое отступление от задачи (заметки на полях):

$$\frac{1}{p\left(p^2 - a^2\right)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp}{p^2 - a^2} = \frac{A\left(p^2 - a^2\right) + Bp^2}{p\left(p^2 - a^2\right)} \Rightarrow A = -\frac{1}{a^2} \text{ и } B = \frac{1}{a^2} \tag{24}$$

Продолжаем расписывать второе слагаемое:

$$= -\frac{1}{\gamma^2 c} \left(\frac{p}{p^2 - (\gamma c)^2} - \frac{1}{p} \right) e^{-\frac{px}{c}} \tag{25}$$

Тогда, используя теорему запаздывания,

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(u_2^L\right) = \frac{1}{\gamma^2 c} \left(1 - \operatorname{ch}\left(\gamma c \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \right) \cdot H\left(t - \frac{x}{c} \right)} \tag{26}$$

Аналогично по теореме запаздывания:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(u_3^L\right) = -\frac{e^{-\gamma x}}{\gamma^2 c} \left(\operatorname{sh}(\gamma c (t - \tau)) - \gamma c (t - \tau) \right) \cdot H(t - \tau)} \tag{27}$$

и

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(u_4^L\right) = \frac{1}{\gamma^2 c} \left(\operatorname{ch}\left(\gamma c \left(t - \tau - \frac{x}{c} \right) \right) - 1 \right) \cdot H\left(t - \tau - \frac{x}{c} \right)} \tag{28}$$

По линейности:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(u^L\right) = J_0 \cdot \alpha \cdot \left(\mathcal{L}^{-1}\left(u_1^L\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(u_2^L\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(u_3^L\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(u_4^L\right) \right) \tag{29}$$

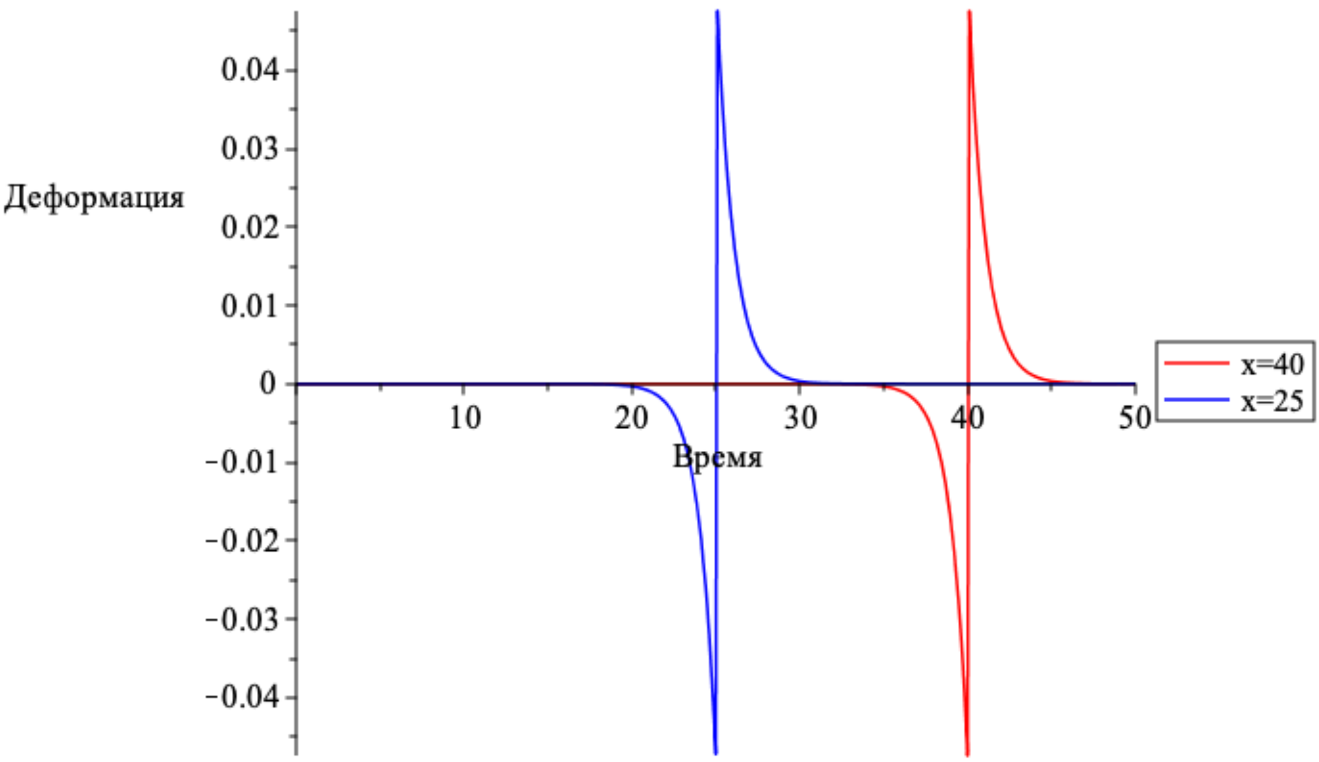
Подставляем:

$$u = \mathcal{L}^{-1}\left(u^L\right) = \begin{cases} \frac{J_0 \alpha}{\gamma^2 c} (\operatorname{sh} \gamma c t - \gamma c t)\, e^{-\gamma x}, \ \text{ если } 0 \leqslant t < \tau; \\ \frac{J_0 \alpha}{\gamma^2 c} (\operatorname{sh} \gamma c t - \operatorname{sh}(\gamma c (t - \tau)) - \gamma c \tau)\, e^{-\gamma x}, \ \text{ если } \tau \leqslant t < \frac{x}{c}; \\ \frac{J_0 \alpha}{\gamma^2 c} (\operatorname{sh} \gamma c t - \operatorname{sh}(\gamma c (t - \tau)) - \gamma c \tau)\, e^{-\gamma x} + \frac{J_0 \alpha}{\gamma^2 c} \left(1 - \operatorname{ch}\left(\gamma c \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \right), \ \text{ если } \frac{x}{c} \leqslant t < \frac{x}{c} + \tau; \\ \frac{J_0 \alpha}{\gamma^2 c} (\operatorname{sh} \gamma c t - \operatorname{sh}(\gamma c (t - \tau)) - \gamma c \tau)\, e^{-\gamma x} + \\ + \frac{J_0 \alpha}{\gamma^2 c} \left(\operatorname{ch}\left(\gamma c \left(t - \tau - \frac{x}{c} \right) \right) - \operatorname{ch}\left(\gamma c \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \right), \ \text{ если } \frac{x}{c} + \tau \leqslant t < \infty \end{cases} \tag{30}$$

Далее перейдём к деформации $\varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x}$:

$$\varepsilon = \begin{cases} -\dfrac{J_0\alpha}{\gamma c}\left(\operatorname{sh}\gamma ct - \gamma ct\right)e^{-\gamma x}, \text{ если } 0 \leqslant t < \tau; \\[2ex] -\dfrac{J_0\alpha}{\gamma c}\left(\operatorname{sh}\gamma ct - \operatorname{sh}\left(\gamma c\left(t-\tau\right)\right) - \gamma c\tau\right)e^{-\gamma x}, \text{ если } \tau \leqslant t < \dfrac{x}{c}; \\[2ex] -\dfrac{J_0\alpha}{\gamma c}\left(\operatorname{sh}\gamma ct - \operatorname{sh}\left(\gamma c\left(t-\tau\right)\right) - \gamma c\tau\right)e^{-\gamma x} + \dfrac{J_0\alpha}{\gamma c}\operatorname{sh}\left(\gamma c\left(t-\dfrac{x}{c}\right)\right), \text{ если } \dfrac{x}{c} \leqslant t < \dfrac{x}{c}+\tau; \\[2ex] -\dfrac{J_0\alpha}{\gamma c}\left(\operatorname{sh}\gamma ct - \operatorname{sh}\left(\gamma c\left(t-\tau\right)\right) - \gamma c\tau\right)e^{-\gamma x} + \\[2ex] +\dfrac{J_0\alpha}{\gamma c}\left(\operatorname{sh}\left(\gamma c\left(t-\dfrac{x}{c}\right)\right) - \operatorname{sh}\left(\gamma c\left(t-\tau-\dfrac{x}{c}\right)\right)\right), \text{ если } \dfrac{x}{c}+\tau \leqslant t < \infty \end{cases} \tag{31}$$

С помощью пакета Maple построим график зависимости деформаций от времени для двух точек на стержне с координатами $x = 25$ и $x = 40$:



Приложение. Построение графиков в пакете Maple.

$J_0 := 1;$
$gam := 1;$
$c := 1;$
$\alpha := 1;$
$\tau := 0.1;$
$x := 40;$

$$p1 := piecewise\Big(t > 0 \textbf{ and } t < \tau, -\frac{J_0 \cdot \alpha}{gam \cdot c} \cdot (\sinh(gam \cdot c \cdot t - gam \cdot c \cdot t)) \cdot \exp(-gam \cdot x),$$
$$t > \tau \textbf{ and } t < \frac{x}{c}, -\frac{J_0 \cdot \alpha}{gam \cdot c} \cdot \big(\sinh(gam \cdot c \cdot t) - \sinh\big(gam \cdot c \cdot (t - \tau)\big) - gam \cdot c \cdot \tau\big) \cdot \exp(-gam \cdot x),$$
$$t > \frac{x}{c} \textbf{ and } t < \frac{x}{c} + \tau, -\frac{J_0 \cdot \alpha}{gam \cdot c} \cdot \big(\sinh(gam \cdot c \cdot t) - \sinh\big(gam \cdot c \cdot (t - \tau)\big) - gam \cdot c \cdot \tau\big) \cdot \exp(-gam \cdot x) + \frac{1}{gam \cdot c} \cdot \sinh\Big(gam \cdot c \cdot \Big(t - \frac{x}{c}\Big)\Big),$$
$$t > \frac{x}{c} + \tau, -\frac{J_0 \cdot \alpha}{gam \cdot c} \cdot \big((\sinh(gam \cdot c \cdot t)) - \cosh\big(gam \cdot c \cdot (t - \tau)\big)\big) \cdot \exp(-gam \cdot x) + \frac{1}{gam \cdot c} \cdot \Big(\sinh\Big(gam \cdot c \cdot \Big(t - \frac{x}{c}\Big)\Big) - \sinh\Big(gam \cdot c \cdot \Big(t - \frac{x}{c} - tau\Big)\Big)\Big)\Big);$$

$x := 25;$

$$p2 := piecewise\Big(t > 0 \textbf{ and } t < \tau, -\frac{J_0 \cdot \alpha}{gam \cdot c} \cdot (\sinh(gam \cdot c \cdot t - gam \cdot c \cdot t)) \cdot \exp(-gam \cdot x),$$
$$t > \tau \textbf{ and } t < \frac{x}{c}, -\frac{J_0 \cdot \alpha}{gam \cdot c} \cdot \big(\sinh(gam \cdot c \cdot t) - \sinh\big(gam \cdot c \cdot (t - \tau)\big) - gam \cdot c \cdot \tau\big) \cdot \exp(-gam \cdot x),$$
$$t > \frac{x}{c} \textbf{ and } t < \frac{x}{c} + \tau, -\frac{J_0 \cdot \alpha}{gam \cdot c} \cdot \big(\sinh(gam \cdot c \cdot t) - \sinh\big(gam \cdot c \cdot (t - \tau)\big) - gam \cdot c \cdot \tau\big) \cdot \exp(-gam \cdot x) + \frac{1}{gam \cdot c} \cdot \sinh\Big(gam \cdot c \cdot \Big(t - \frac{x}{c}\Big)\Big),$$
$$t > \frac{x}{c} + \tau, -\frac{J_0 \cdot \alpha}{gam \cdot c} \cdot \big((\sinh(gam \cdot c \cdot t)) - \cosh\big(gam \cdot c \cdot (t - \tau)\big)\big) \cdot \exp(-gam \cdot x) + \frac{1}{gam \cdot c} \cdot \Big(\sinh\Big(gam \cdot c \cdot \Big(t - \frac{x}{c}\Big)\Big) - \sinh\Big(gam \cdot c \cdot \Big(t - \frac{x}{c} - tau\Big)\Big)\Big)\Big);$$

```
plots:-display(
plot(p1, t = 0..50, labels = ["Время","Деформация"], color = red, legend = "x=40"),
plot(p2, t = 0..50, labels = ["Время","Деформация"], color = blue, legend = "x=25"),
legendstyle = [location = right], size = [700, 400]);
```

$$J_0 := 1$$
$$gam := 1$$
$$c := 1$$
$$\alpha := 1$$
$$\tau := 0.1$$
$$x := 40$$
$$p1 := \begin{cases} 0 & 0 < t < 0.1 \\ -(\sinh(t) - \sinh(t - 0.1) - 0.1)\, e^{-40} & 0.1 < t < 40 \\ -(\sinh(t) - \sinh(t - 0.1) - 0.1)\, e^{-40} + \sinh(-40 + t) & 40 < t < 40.1 \\ -(\sinh(t) - \cosh(t - 0.1))\, e^{-40} + \sinh(-40 + t) - \sinh(t - 40.1) & 40.1 < t \end{cases}$$
$$x := 25$$
$$p2 := \begin{cases} 0 & 0 < t < 0.1 \\ -(\sinh(t) - \sinh(t - 0.1) - 0.1)\, e^{-25} & 0.1 < t < 25 \\ -(\sinh(t) - \sinh(t - 0.1) - 0.1)\, e^{-25} + \sinh(-25 + t) & 25 < t < 25.1 \\ -(\sinh(t) - \cosh(t - 0.1))\, e^{-25} + \sinh(-25 + t) - \sinh(t - 25.1) & 25.1 < t \end{cases}$$