

О курсе лекций.

Курс лекций «Волны в деформируемых средах» читается на магистерской программе «Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи» в Высшей Школе Теоретической Механики и Математической Физики в Санкт-Петербургском Политехническом университете Петра Великого.

Автор курса: Дмитрий Сергеевич Вавилов.

Видеозаписи лекций доступны по ссылке: [GO TO RECORDINGS](#).

Содержание

1 Лекция 08.02.2022.	4
1.1 Введение	4
1.2 Уравнение сплошной среды	7
1.3 Решение Д'Аламбера. Граничные условия	9
1.3.1 Пример	11
1.4 Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость	12
1.4.1 Примеры	15
2 Лекция 15.02.2022.	17
2.1 Использование преобразований Фурье и Лапласа. Введение	17
2.2 Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности	21
3 Лекция 22.02.2022.	27
3.1 Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия	27
3.2 Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость	33
3.3 Метод стационарной фазы	37
4 Лекция 01.03.2022.	40
4.1 Повторение. Преобразование Лапласа. Теорема о вычетах. Ряд Лорана. Лемма Жордана	40
4.2 Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа	46
5 Лекция 15.03.2022.	50
5.1 Применение преобразования Лапласа. Трудности	50
5.2 Несвязанная динамическая задача термоупругости	53
5.3 Дельта-функция Дирака	54
5.4 Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера	55
5.5 Движущийся источник звука	57
5.6 Влияние включений на волновой процесс. Смешанный спектр	58
6 Лекция 22.03.2022.	62
6.1 Небольшое замечание к задаче	62
6.2 О стационарных решениях	63
6.3 Метод предельного поглощения	65
6.3.1 Функция Грина статической задачи	65

6.3.2	Функция Грина динамической задачи	68
6.3.3	Применение метода предельного поглощения	71
7	Лекция 29.03.2022.	75
7.1	Повторение метода предельного поглощения	75
7.2	Примеры волн в различных средах	79
7.2.1	Термоупругие волны	79
7.2.2	Плазменные волны	81
7.2.3	Прямоугольный волновод	83
8	Лекция 05.04.2022.	86
8.1	Волны в акустических средах	86
8.2	Поверхностные гравитационные волны	94
9	Лекция 12.04.2022.	97
9.1	Краткое повторение материала о волнах в акустических средах	97
9.2	Поверхностные гравитационные волны на границе между водой и воздухом	98
10	Лекция 19.04.2022.	104
10.1	Продолжаем разговор о поверхностных волнах	104
10.2	Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей	105
10.3	Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей, которые движутся друг над другом	107
10.4	Волны на границу между водой и воздухом без учёта силы тяжести (решение Эйлера)	111
11	Лекция 26.04.2022.	113
11.1	Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле	113
11.2	Наклонное падение волны	117
12	Лекция 17.05.2022.	120
12.1	Повторение материала о волнах в сферической СК	120
12.2	Энергия звуковых волн	121

Волны в деформируемых средах

Конспект лекций

Вавилов Д.С.¹ Муравцев А.А.²

12 июня 2023 г.

Список вопросов по дисциплине «Волны в деформируемых средах», 2022

1. Уравнение сплошной среды. Решение Д'Аламбера. Граничные условия.
2. Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость.
3. Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности.
4. Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия. Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость.
5. Метод стационарной фазы
6. Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа.
7. Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера.
8. Влияние включения на волновой процесс. Смешанный спектр.
9. Стационарные решения. Метод предельного поглощения. Функция Грина.
10. Волны в различных средах.
11. Волны в акустических средах
12. Поверхностные гравитационные волны на границу между водой и воздухом.
13. Поверхностные гравитационные волны на границу двух жидкостей.
14. Поверхностные гравитационные волны на границу двух жидкостей, который движутся друг над другом.
15. Волны на границу между водой и воздухом без учета силы тяжести (Решение Эйлера).
16. Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле.
17. Наклонное падение волны.
18. Энергия звуковых волн.

¹лектор и составитель рукописного конспекта, Высшая школа теоретической механики, Санкт-Петербургский Политехнический университет. Дополнительные материалы к лекциям [доступны по ссылке](#).

²дополнил конспект и объединил файлы; email: almuravcev@yandex.ru

1 Лекция 08.02.2022.

1.1 Введение

Вавилов Дмитрий Сергеевич

помта: Londr@yandex.ru

Литература

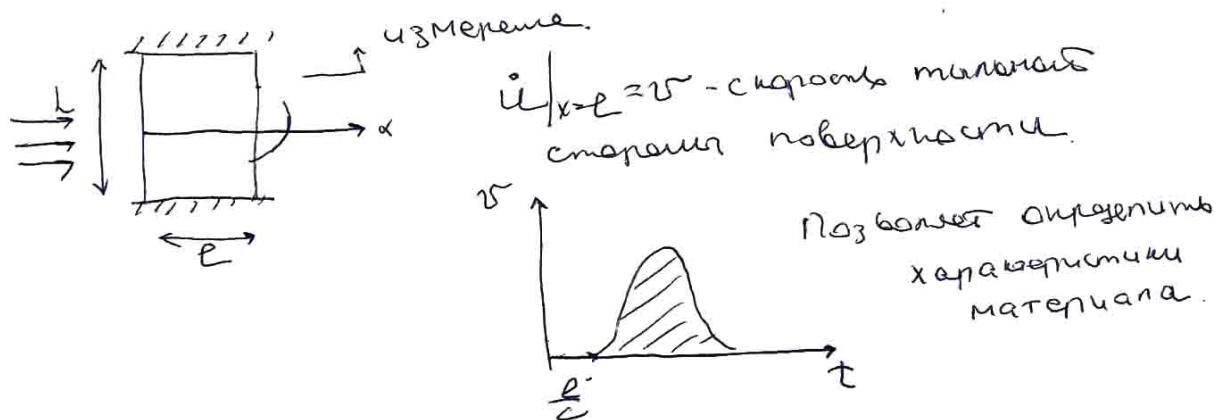
1. Н. В. Карлов, Н. А. Киряченко
Колебания. Волны. Струи и туманы
2. Ом. Чубар. Линейные и
нелинейные волны
3. М.И. Рабинович, Д.И. Трудесувич
Введение в теорию колебаний
и волн
4. Ф. М. Морс, Г. Фейнбах
Методы теоретической физики (2 том)
5. Г. Арджекея Математические
методы в физике



Волны в деформируемых средах

08.02. Введение. Одномерные волны в деформируемом теле.

Волна - это распространение колебаний в сплошных средах. Исследование динамического процесса, когда необходимо установить как передача возмущения от одной элементарной единицы к другой.



Предположим, что мы можем менять время взаимодействия. При этом у нас есть общее время характерное время

$$\frac{G}{M} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{G}} \quad \text{Материал имеет} \\ \text{однастороннюю характеристику времени.}$$

1. Макроуровень $T_1 = \frac{L}{c}$

c - скорость звука $c = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$

$$L = 1 \text{ см} \Rightarrow T_1 = \frac{10^{-2} \cdot c}{5 \cdot 10^3 \text{ м/с}} = 2 \text{ мкс}$$

$$f = \frac{1}{T_1} = 5 \cdot 10^5 \text{ Гц} \quad (1)$$

2. Зёрна $D \cdot (100 \div 200) \text{ мкм}$
 $\tau_2 = \frac{D}{C} = \frac{\omega^2 \cdot \omega^{-6}}{5 \cdot \omega^3} = 2 \cdot \omega^{-8} \text{ с}, f \sim \omega^7 \div \omega^8 \text{ Гц}$

3. Межатомные связи основана

$$\tau_3 = \tau \sim \sqrt{\frac{G}{m}} \sim 10^{12} \div 10^{15} \text{ с}$$

Если мы хотим получше вспомнить вспомним на сколько
 $\tau_{\text{шил}} \leq \tau_{1,2,3}$

1. $\frac{E}{L} \ll 1$ малыне пластин очень тонка
 Нем вспомним что же

2. Одноосное напротяжное сопротивление.

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \sigma_x - \text{главное напротивление}$$

Оценить время упругого удара + вспомним
 Тер, рассматривая столкновение
 стержня, налетающего торцом на
 неподвижную стекло.

Идеализации: упругий удар проиходит
 мгновенно $dP = \frac{F dt}{\Delta t = 0}$ или взаимодействие

бесконечно быстрое

$t=0$ момент соприкосновения стержня
 со стеклом

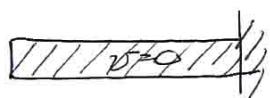


глина стекло застое
 стекло равен ct

(2)

1.2 Уравнение сплошной среды

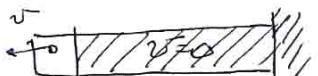
δ)



Весь стартинг окажется деформированым

Кинетическая энергия начального спирна членом превращается в потенциальную энергию упругой деформации

β)



Второй этап. стартинг возвращается в исходное

состоиние. Этот процесс называется уводческим торзом и наземено привыкаемое к прогрессу.

Энергия упругой деформации спирна членом переходит обратно в кинетическую энергию.

$$\gamma = \frac{2\ell}{c} - \text{гнительность естественная}$$

Базовое ур-я: баланс импульса,
баланс момента импульса, силы массы
баланс энергии (и нало термодинамики)

$$\text{Баланс импульса} \quad \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} = \rho \frac{d \bar{v}_x}{dt}$$

$$\frac{d \bar{v}_x}{dt} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{d \bar{v}_x}{dt} \approx \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}$$

Второй порядок падом

$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}$ - локальная производная

$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}$ - конвективная производная

(3)

Баланс массы: $\frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$

+ Определяющее ур-е (изотермический случай)

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = p \frac{du}{dt} \\ \frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \sigma = E \varepsilon \end{cases}$$

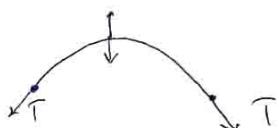
линейное уравнение
относительно равновесного
составления

$$p = p_0 + \tilde{p}, \quad u_x = 0 + u_x, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Уг. второго уравнение $\tilde{p} = -p_0 \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$
 $p = p_0(1 - \varepsilon)$ - знак изменение плотности

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - p_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ p = p_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad c^2 = \frac{E}{p_0} \text{ - скорость звука}$$



$$T \cdot u_{xx} - p_0 u_{tt} = 0$$

В этом случае

$$c^2 = \frac{T}{p_0}$$

Уравнение сложной среды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

(4)

1.3 Решение Д'Аламбера. Граничные условия

Решение Д'Аламбера

$\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ - преобразование Галилея

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} c + \frac{\partial u}{\partial \eta} c$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c^2 = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \\ &- \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f'(\eta)$$

$$\begin{aligned} u &= \int f'(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \\ &= f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c}) \end{aligned} \quad (5)$$

Как определить функции f_1 и f_2 ?

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = -c_0 f_1'(x) + c_0 f_2'(x) = \psi(x)$$

Итак: $f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$$

Система имеет решение (~~единственное~~)

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\alpha) d\alpha$$

Формула Данамсена

О роли граничных условий

Краевое условие на бесконечности

① Ограничность на ∞

② Условие излучения - удача волны

и u_x не возбуждение



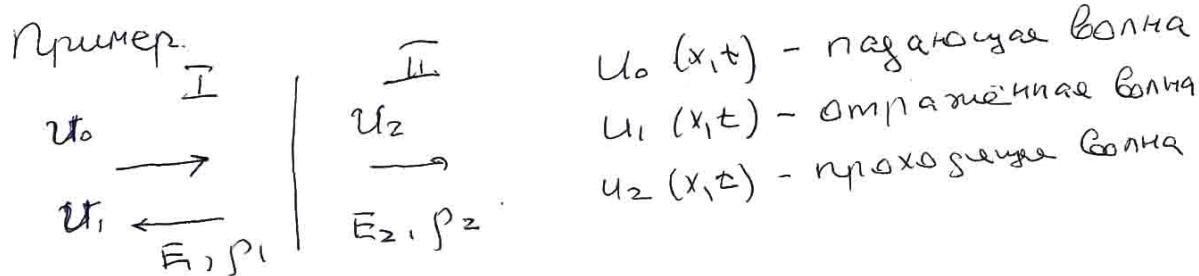
$$0 \leq x < \infty$$

$$u = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

③ Условие локализации $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx < \infty$

⑥

1.3.1 Пример



$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 + u_1 \Big|_{x=0} = u_2 \\ E_1 \partial \left[\frac{u_0 + u_1}{\partial x} \right] \Big|_{x=0} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \end{array} \right.$$

$$u_0(x,t) = \tilde{u}_0(t - \frac{x}{c_1})$$

$$u_1(x,t) = \tilde{u}_1(t + \frac{x}{c_1})$$

$$u_2(x,t) = \tilde{u}_2(t - \frac{x}{c_2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 + u_1 = u_2 \\ \frac{E_1}{G} \left(-u_0 + u_1' \right) = -\frac{E_2}{c_2} u_2' \end{array} \right. \quad (\text{после интегрирования})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 + u_1 = u_2 \\ \gamma(u_0 - u_1) = +u_2 \end{array} \right.$$

$$\gamma = \frac{E_1 c_2}{E_2 G} = \frac{c_1^2 \rho_1 c_2}{c_2^2 \rho_2 G} = \frac{G \rho_1}{G_2 \rho_2} \quad (\text{ср - баланс отражения})$$

$$\gamma(u_0 - u_1) = +u_2$$

$$-\gamma u_1 = +u_0 - \gamma u_0$$

$$-u_1(\gamma + 1) = u_0(1 - \gamma)$$

$$u_1 = -\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} u_0(t + \frac{x}{c_1})$$

$$u_2 = \frac{2\gamma}{1 + \gamma} u_0(t - \frac{x}{c_2})$$

$$R = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad D = \frac{2\gamma}{1 + \gamma}, \quad R + D = 1$$

(7)

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 - \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} u_0 = \\ &= u_0 \left(\frac{1 + \gamma - 1 + \gamma}{1 + \gamma} \right) = \\ &= \cancel{\frac{2\gamma}{1 + \gamma}} u_0 \end{aligned}$$

1.4 Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость

$$\bar{E}_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0, \quad \bar{E}_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_0$$

напряженность электрического поля
(аналогична с электродинамикой)

$$\frac{E_1}{E_2} = f \quad n - показатель преломления$$

$$\bar{E}_1 = -\frac{1-f}{1+f} E_0, \quad \bar{E}_2 = \frac{2f}{1+f} E_0$$

Сравнить с полученным результатом

Спектральные свойства оператора Д'Аламбера

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{не симм. о членах } x)$$

Спектр гармоник и волн свободных
представляется (составление генома и групп)

Ограничность на дисперсии

Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = A(x) e^{i\omega t} \Rightarrow A_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

$$A'' = \Delta A, \quad \lambda = -\frac{d}{dx^2}, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\omega = \pm d c$$

$$[\omega] = \frac{pc}{c}, \quad [d] = \frac{1}{M} \quad d - \text{вещественное число}$$

$$A(x) = a e^{-idx} + b e^{idx}$$

$$A(x)_{x \rightarrow \pm\infty} - \text{ ограничен}, \quad \text{т.о. } d - \text{ вещественное число}$$

(8)

ω - вещественное число
 w - полное вещественное число!
 непрерывный спектр.

Собственные моли (форма) колебаний

$$u_\omega(x, t, \omega) = a_\omega e^{i\omega t - i\omega x} + b_\omega e^{i\omega t + i\omega x} = \\ = a_\omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} + b_\omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})}$$

Замечание: для моли колебаний различных размеров
 спектр дисcrete. Например,



$$u_k = \frac{\sin \frac{u_k x}{l}}{l} e^{i\omega_k t}$$

$$\omega_k = \frac{u_k c}{l}$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{\sin \frac{u_k x}{l}}{l} e^{i\omega_k t}$$

В случае квазигравитационного спектра

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_\omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} b_\omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} d\omega \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_\omega e^{i\omega s} d\omega = f_1(s)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_\omega e^{i\omega y} d\omega = f_2(y)$$

$$f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c}) \quad (2)$$

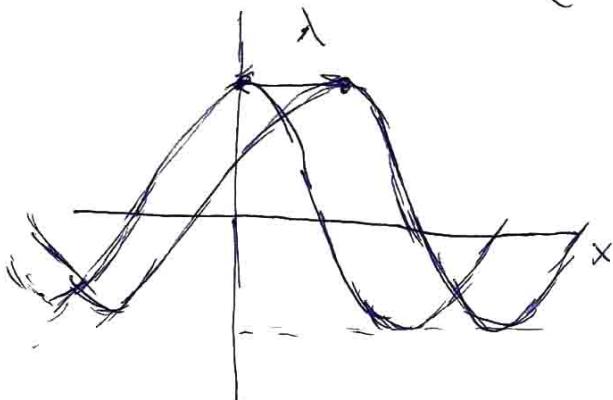
Решение Даламбера

(9)

$$e^{i\omega s} = e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \text{ - собственное колебание}$$

Возьмём вещественную часть:

$$\operatorname{Re} e^{i\omega s} = \cos(\omega(t-\frac{x}{c})) = \cos(\omega t - \alpha x)$$



$$\frac{\omega}{c} = d \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = d$$

волновое число

→
направление
распространения

Умножим собственное волне колебаний — это дифракция волны. С — характеризует скорость перемещение гармонических волн. Если скорость колебаний гармоники равна с, то и скорость всей волны также равна с.

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \omega e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} d\omega = f(t - \frac{x}{c})$$

Разовая скорость — скорость распространение гармонической волны

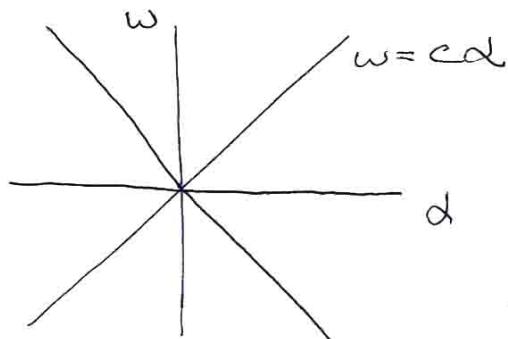
$$c_g = \frac{\omega}{d} \quad \text{В одн. един. } c_g = c_g(\omega)$$

Оператор Дирака: волна есть

суперсумма

(10)

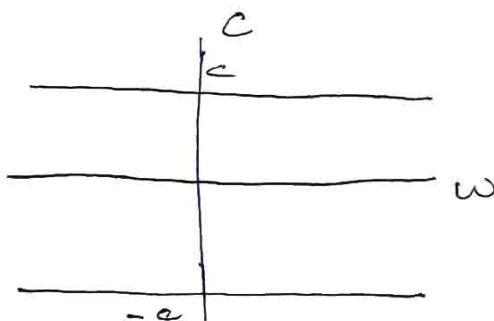
1.4.1 Примеры



Дисперсионные
причины

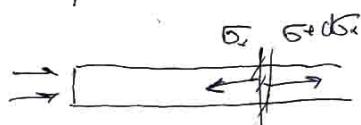
Однозначное соответствие
между ω и d

Две модели d можно
найти ω и наоборот



Зависимость
-speed of wave
from frequency

Пример



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} = 0 \\ \xi|_{x=0} = \xi_0(t) H(t-0) \\ \xi|_{x \rightarrow \infty} - \text{условие излучения} \end{array} \right.$$

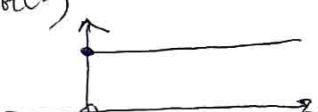
$$\xi_x = f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c})$$

$$\int a w e^{i \omega(t - \frac{x}{c})} d\omega$$

Решение Декандера

$$\xi_x = f(t - \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} a w e^{i \omega(t - \frac{x}{c})} d\omega$$

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$



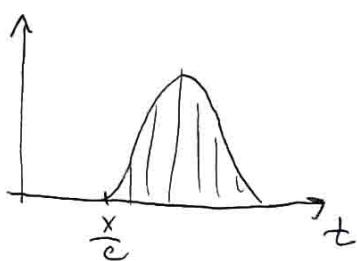
$$\xi|_{x=0} = \xi_0(t) H(t-0) \Rightarrow f(t - \frac{x}{c})|_{x=0} = \xi_0(t) H(t-0) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \xi_0(t) H(t-0)$$

$$\xi_x = f(t - \frac{x}{c}) = \xi_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$\tau_x = \frac{x}{c}$ - время задержки

11



Синус волна имеет вид
оси x δ ф фаза
 $\omega = \pm c\omega$

Дискретный спектр

$$\boxed{u(x,t) = A(x) e^{i\omega t}} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u(t=0) = 0 \\ u(t=0) = 0$$

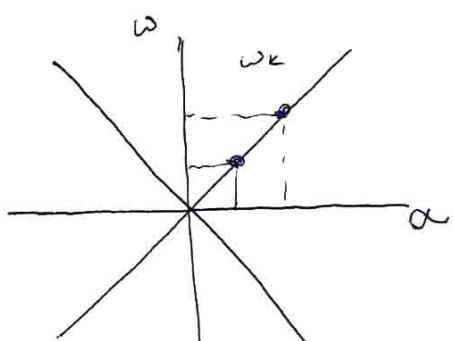
$$u(x,t) = A(x) e^{i\omega t} \Rightarrow A_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

$$A(x) = a e^{-i\omega x} + b e^{i\omega x}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a e^{-i\omega x} + b e^{i\omega x} = 0 \end{cases}$$

Система имеет неприводимое решение, если
ее определенное значение в ноль.

$$e^{i\omega x} - e^{-i\omega x} = 0 \Rightarrow \sin \omega x = 0 \\ \omega x = \pm \frac{\pi k c}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$$



$$A_k(x) = b \sin \frac{\omega_k x}{L}$$

$$u_k(t, x) = b \left(e^{i\omega_k (t + \frac{x}{c})} - e^{i\omega_k (t - \frac{x}{c})} \right)$$

$$u_k(t, x) = \tilde{b} e^{i\omega_k t} \sin \frac{\omega_k x}{L}$$

В спектре возможны только те же волны
затухающие (дисперсионные спектры). Существуют
также изохромные затухающие волны.

(12)

2 Лекция 15.02.2022.

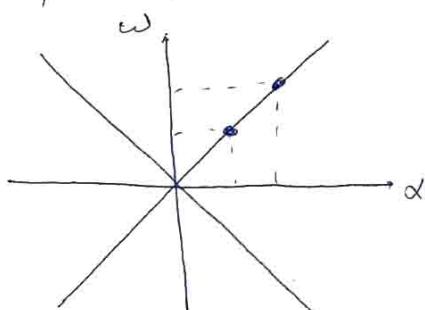
2.1 Использование преобразований Фурье и Лапласа. Введение

15.02 Лекция 2.

Почта. londr@yandex.ru.

Оператор Данаудеря. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

$c = \frac{\omega}{d} = \text{const}$ - скорость с которой распространяется гравитационное волна



$$\omega = \pm cd$$

Банка Бар

системы

$$f_1(t - \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} a \omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} d\omega$$

$$f_2(t + \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} b \omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} d\omega$$

$$e^{int} e^{idx} \Rightarrow e^{int} - \text{константа в системе}$$

e^{idx} - периодичность по пространственным переменным

d - бесконечное число (массе δ не непрерывно спектр)

$dk = \frac{\pi k}{L}$ - же бесконечно спектр

$$R(x) = \sin \frac{\pi k x}{L} - \text{надо!}$$

(1)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$e^{i\omega t}$ - получаем систему разнушей

Система разнушей, которую можно
записать никакой кеперiodической разнушей,
которая одна из ортогональных базисов
из разнушей, входящих в эту систему

$$\text{зам: } y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

Разложение в ряд. Рассея: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{i\omega_k t}$
периодическая разнуша (периодичность единица)

Верхнее разложение можно представить
интегрированием. Она представлена
разнушей $y(t)$ в виде суммы разнушей
кеперiodической частоты исследуется,
частоты которых кеперiodика разложением
интервал

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt \quad - \text{представление}\br/>Фурье$$

$$g(t) = y(t) H(t - \tau)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt$$

Как вычислить, если интервал различен?

(2)

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty y(t) e^{-xt} e^{-i\omega t} dt$$

Вследствие стягивающее действие множителя e^{-xt} при $t \rightarrow \infty$, интеграл выходит из всех ограниченных замкнутых

$$p = x + i\omega$$

$$Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \tilde{y}(t) dt \quad \text{интеграл Лапласа}$$

\sim
ограничен

изображение

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} Y(p) dp, \quad t > 0$$

Теорема обратимости.

Макетом образом
— это частный
Лапласа ($x=0$)

Для Книги:

Пурье преобразование —
свойство преобразование

1. Г. Дэр. Руководство к практическому
применению преобразование Лапласа
и Z-преобразование.

2. А. И. Пурье Операционное
исчисление

(3)

Пример

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \\ \xi|_{x=0} = \xi_0(t) H(t) \\ \xi|_{x \rightarrow \infty} - \text{члены чужие} \end{array} \right.$$

$$\xi(t) = \xi_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$$\begin{aligned} \xi^L(p, x) &= \int_0^\infty \xi_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^\infty \xi_0(\xi) H(\xi) e^{-p(\xi + \frac{x}{c})} d\xi = \\ &= e^{-\frac{px}{c}} \int_0^\infty \xi_0(\xi) e^{-p\xi} d\xi \\ &\quad \xi_0^L(p) \\ \xi(x, t) &= \xi_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) \doteq e^{-\frac{px}{c}} \xi_0^L(p) \end{aligned}$$

$$e^{-pa} u(p) \doteq \psi(t-a) H(t-a), a > 0$$

Теорема смещения

Дано рассмотрим тело конечных размеров, но перед этим нужно определить связь между ν и ξ
(Учредить можно ν , определить нужно ξ)

Как связана эти величины?

(4)

2.2 Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности

Важно не путать скорость распространение
воздуха v с начальной скоростью v_0

$v = \frac{\partial u}{\partial t}$ - начальная скорость звука

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\Rightarrow \epsilon = -\frac{v}{c} \quad \text{One ступень} \quad \sigma = E \epsilon = \rho c^2 (-\frac{v}{c})$$

$$\epsilon = -\rho c v$$

$$\boxed{\sigma = -\rho c v} \quad (\text{одинаковый ступень})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \\ \sigma|_{x=0} = \sigma_0(t) H(t-0) \end{array} \right.$$

$$\sigma|_{x=0} = 0 \quad \text{- следствие торец}$$

Начальное условие

$$\text{и, } \dot{\sigma}|_{t=0} = 0 \Rightarrow \dot{\sigma}|_{t=0} = 0$$

$$\hat{\sigma}^L = \int_0^\infty \sigma(x,t) e^{-pt} dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\sigma}^L}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} e^{-pt} dt = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial \sigma}{\partial t} e^{-pt} \Big|_0^\infty + P \int_0^\infty \frac{\partial \sigma}{\partial t} e^{-pt} dt =$$

$$= -\dot{\sigma}(0) + P \left[\sigma e^{-pt} \Big|_0^\infty + P \int_0^\infty \sigma e^{-pt} dt \right]$$

$$= -\dot{\sigma}(0) - P \sigma(0) + P^2 \hat{\sigma}^L$$

(5)

$$\dot{f}(t) \doteq p F(p) - f(0)$$

$$\ddot{f}(t) \doteq p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - p^{(n-2)} f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

В общем случае

$$\frac{d^2\sigma^L}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} \sigma^L = 0$$

$$\sigma^L = A e^{-\frac{px}{c}} + B e^{\frac{px}{c}} \quad - \text{находим } A \text{ и } B$$

операторы сдвига

$$\text{Зад: } \sigma^L = C \cosh \frac{px}{c} + D \sinh \frac{px}{c} \quad (\text{нужно})$$

$$\sigma^L|_{x=0} = \{ \sigma_0(t) \} h(t - 0) \stackrel{L}{=} \sigma_0^L, \quad \sigma^L|_{x=c} = 0$$

$$\begin{cases} A + B = \sigma_0^L \\ A e^{-\frac{pc}{c}} + B e^{\frac{pc}{c}} = 0 \end{cases} \quad \Delta = e^{\frac{pc}{c}} - e^{-\frac{pc}{c}}$$

$$A = \frac{\sigma_0^L e^{\frac{pc}{c}}}{\Delta}, \quad B = -\frac{\sigma_0^L e^{-\frac{pc}{c}}}{\Delta}$$

$$\sigma^L(p, x) = \frac{\sigma_0^L}{\Delta} \left(e^{\frac{pc}{c}} e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{pc}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right)$$

$$= \frac{\sigma_0^L}{e^{\frac{pc}{c}} - e^{-\frac{pc}{c}}} \left(e^{\frac{pc}{c}} e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{pc}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right)$$

$$= \frac{\sigma_0^L}{1 - e^{-\frac{2pc}{c}}} \left(e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{2pc}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right) \Theta$$

(6)

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\dots+q^n$$

$$\Leftrightarrow \sigma_0 \left(1 + e^{-\frac{xp}{c}} \right) \left(e^{-\frac{p}{c}} - e^{-\frac{xp}{c}} \right) =$$

$$= \sigma_0 e^{-\frac{p}{c}} - \sigma_0 e^{-\frac{xp}{c}} + \sigma_0 e^{-\frac{p}{c}} e^{+\dots}$$

\nearrow прямодревущая волна \nwarrow отраженная волна

Перейдём к оригиналу

$$\sigma(t, x) = \sigma_0 (t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) -$$

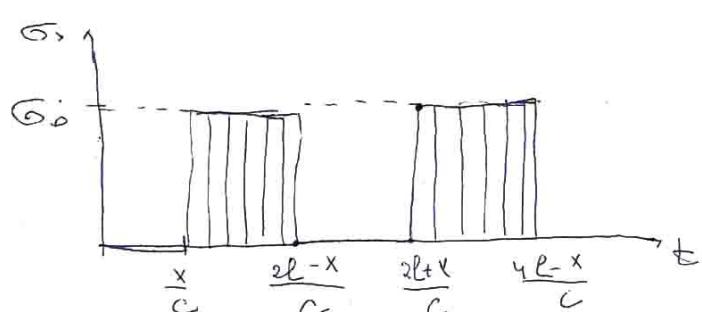
$$- \sigma_0 (t - \frac{2l-x}{c}) H(t - \frac{2l-x}{c}) + \dots$$

$$\frac{2l-x}{c} = \frac{l}{c} + \frac{l-x}{c} \quad \frac{x}{c} - \text{время задержки}$$

$\rightarrow \leftarrow$

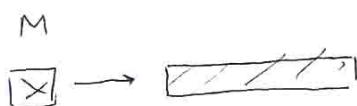
При отражении от свободной поверхности знак напряжения не меняется на противоположный, т.е. если пушила волна статика, то отражение волна расщепления

$\sigma_0(+)$ — отражение статики.



Знак напряжения!

Слово: знак не меняется
отражение происходит не дает

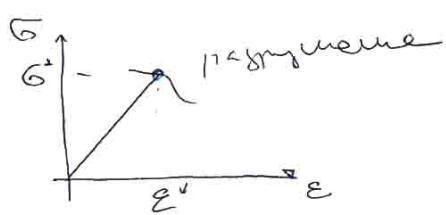


$$M \frac{d\varphi}{dt} = +\sigma$$

$$\sigma = -\rho c \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{M}{\rho c} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0$$

Как меняется напряжение - ?

Будут ли появляться напряжения противоположного знака



Найти сечение отсечки
 $x^* - ?$
(Расчетное значение)

$$\begin{aligned}\sigma^L &= -\frac{\sigma_0}{\rho c} \left[e^{-\frac{\rho x}{c}} + e^{\frac{\rho x - x}{c}} \right] = \\ &= -\frac{1}{\rho c} \left[\sigma_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \sigma_0 \left(t - \frac{2x - x}{c} \right) \right]\end{aligned}$$

$$v(t, x) = 2\sigma_0(t)$$

Скорость на единой поверхности в 2 раза больше. Это необходимо учитывать при расчете напряженного состояния.

(8)

Запишем волновое уравнение для
перемещений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\underline{E}_0(+) H(t-\sigma)}{E} \quad - \text{загоре Неймана} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

1. Находим собственное значение: $u = A(x) e^{i\omega t}$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0 \\ \frac{dA}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{dA}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad A(x) = a \cos \frac{\omega x}{c} + b \sin \frac{\omega x}{c}$$

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \Rightarrow \frac{\omega l}{c} = n\pi$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

$$A_n = \frac{\cos \frac{\omega_n x}{c}}{c}, \quad n = 0, 1, \dots, n$$

$$u = \sum g_n(t) \cos \frac{\omega_n x}{c} \quad \text{в этом случае}$$

мы не можем выполнить
граничную условие.

2. Метод Грина

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\omega_n x}{c} dx - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l u \cos \frac{\omega_n x}{c} dx = 0 \\ & \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\omega_n x}{c} dx = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \frac{\omega_n x}{c} \Big|_0^l + \frac{\omega_n}{c} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \sin \frac{\omega_n x}{c} dx = \\ & = - \frac{\underline{E}_0(+) H(t-\sigma)}{E} + \frac{\omega_n}{c} \left[u \sin \frac{\omega_n x}{c} \Big|_0^l - \frac{\omega_n}{c} \int_0^l u \cos \frac{\omega_n x}{c} dx \right] \\ & = - \frac{\underline{E}_0(+) H(t-\sigma)}{E} - \left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 q_n \frac{l}{2} \end{aligned}$$

(9)

$$-\frac{\sigma_0(+)}{E} H(+\infty) - \left(\frac{\bar{u}_n}{e}\right)^2 q_n \frac{e}{2} - \frac{1}{c^2} \ddot{q}_n \frac{e}{2} = 0$$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{2}{e} c^2 \frac{\sigma_0(+)}{E} H(+\infty), \quad \omega_n = \frac{\bar{u}_n e}{e}$$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = Q_m - \text{обобщённая сила} \quad q_m(\omega) = 0, \quad q_m(\omega) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$q_m \frac{d}{dt} (p^2 + \omega_n^2) = Q_m \Rightarrow q_n^L = \frac{Q_m}{p^2 + \omega_n^2}$$

$$\frac{1}{p^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$f_1(p) f_2(p) = \int_0^+ f_1(t) f_2(t) dt \quad \text{теорема о свёртке}$$

$$q_m(t) = -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e \omega_n} \int_0^+ \sin \omega_n t dt =$$

$$= -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t)$$

$$u(x,t) = -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \cos \frac{\bar{u}_n x}{e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\sigma_0 c^2}{E e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{\bar{u}_n}{e} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{\bar{u}_n x}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{e}}{n} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right), \quad 0 < x \leq e$$

(10)

3 Лекция 22.02.2022.

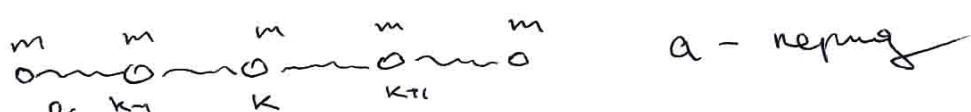
3.1 Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия

22.02. Лекция 3

О дискретном описании
кристаллического тела

Рассмотрим вопрос о совместных
моделях единичной ячейки дискретного
описания

Одномерные структурные решётки
(ячейка)



One коэффициент частички

$$\ddot{m}_{ik} = -g(u_k - u_{k-1}) + g(u_{k+1} - u_k)$$

учитываем взаимодействие между
соседними атомами!

Литература:

1. Р. И. Мандельштам. Лекции по
теории колебаний

2. Коевский Основы механики
кристаллической решётки

$$\ddot{m}_{ik} = g(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$$

(конечные разности)

①

$$u = A e^{i(\omega t - dx)} \quad - \text{девиация волны}$$

$$x_k = ka$$

$$\omega \rightarrow \omega \pm \frac{2\pi}{a} p \quad \text{результат не изменяется}$$

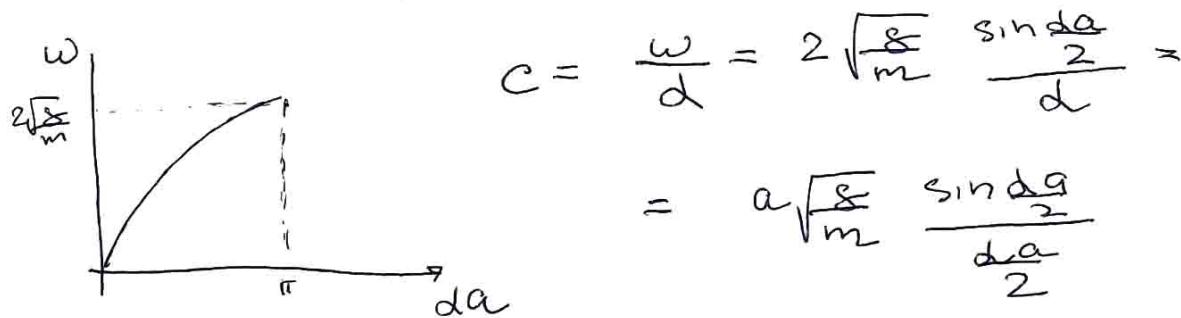
$$-\frac{\pi}{a} \leq \omega \leq \frac{\pi}{a} \quad - \text{зона Брильюэна}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \leq \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda \geq 2a \quad \text{ночес носеновки!}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{m} \left(2 - e^{ida} - e^{-ida} \right)$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{m} (1 - \cos da)$$

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{g}{m}} \frac{\sin da}{2}$$



Как называется данный результат
с помощью сплошной среды?

Однако волна приближается $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow c = a \sqrt{\frac{g}{m}}$$

(2)

$$c = a \sqrt{\frac{g}{m}} = a \sqrt{\frac{E}{\rho g a}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} !$$

$$g = \frac{E}{a} \quad \xrightarrow{\text{имо}} \quad \sigma = \frac{E \frac{s}{l}}{l} = \frac{F}{s}$$

$$\delta = \frac{E s}{l}$$

Можно ли получить оператор Динамике из дискретной модели?

$$m \ddot{u}_k = -g(u_k - u_{k-1}) + g(u_{k+1} - u_k)$$

$$u_{k-1} = u_k - u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2} + \dots$$

$$u_{k+1} = u_k + u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2}$$

$$m \ddot{u}_k = -g(u_k' a - \frac{u_k'' a^2}{2}) + g(u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2}) =$$

$$= g u_k'' a^2$$

Несложные производные складываются!

Консервативная система

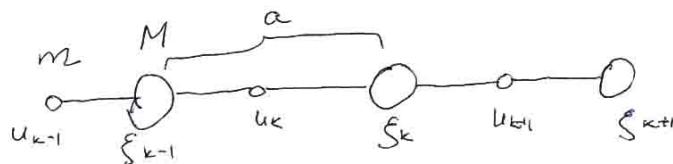
$$p \dot{u} = \frac{E}{a} u'' a^2$$

$$\boxed{u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0}$$

оператор Динамике.

сравнить с δg динамики.

(3)



$$\begin{cases} M \ddot{\xi}_k = g(u_k - 2\xi_k + u_{k+1}) \\ m \ddot{u}_k = g(\xi_{k-1} - 2u_k + \xi_k) \end{cases}$$

$$u_k = A e^{i(\omega t - 2ka)}$$

$$\xi_k = B e^{i(\omega t - 2ka)}$$

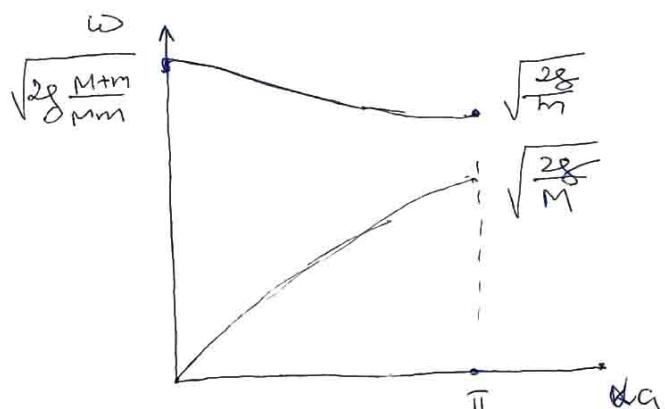
$$\begin{cases} (M\omega^2 - 2g)B + g(1 + e^{-i2a})A = 0 \\ g(1 + e^{i2a})B + (m\omega^2 - 2g)A = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow$$

$$Mm\omega^4 - 2g(M+m)\omega^2 + 2g^2(1 - \cos 2a) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{Mm} \left(M + m \pm \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm \cos 2a} \right)$$

Две бемби застом!



верхнее —
оптическая
бемби

нижнее —
— акустическая
бемби

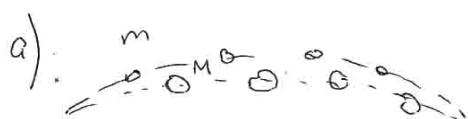
(4)

Масса ω (спиновая волна)
 ω_1 меняется линейно в зависимости от d .

$A = B$ Соседние массы находятся

в одинаковых полях.

Чепотка может быть аппроксимирована
 сплошной одномерной моделью.



$\omega_2 = \omega_2(d)$. При $d \rightarrow 0$ ω_2 не
 стремится к нулю

Соседние атомы находятся
 в противоположных полях.



В трехмерной кристаллической решетке
 существует 3S вибрации нормальных
 колебаний (3 атомов в ячейке):

3 виброн - акустические

3S-3 - оптические

(излучение основных состояний)

5

Вернёмся к дисперсионному возражению

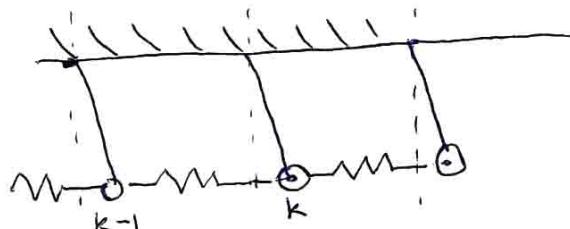
$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{m}} \sin \frac{d\alpha}{2}$$

Дисперсия Вендела назначена
составленной пространственного масштаба,
периодом решётки a

Если $d\alpha \ll 1$ или $a \ll \lambda$, то

дисперсия исчезает, и мы переходим
к сплошной среде.

Возможна ли такое симуляция, когда
дисперсия подразделяется на
пространственном, а временным масштабом?



$$\ddot{u}_k + \omega_0^2 u_k = -\frac{g}{m} (u_k - u_{k-1}) + \frac{g}{m} (u_{k+1} - u_k)$$

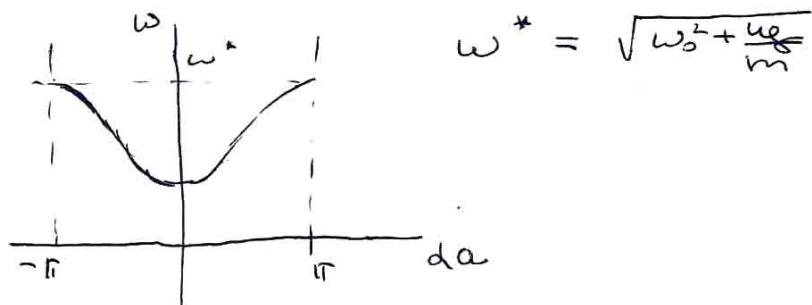
$$\ddot{u}_k + \omega_0^2 u_k = \frac{g}{m} (u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$$

$$u = A e^{-(\nu t - dx)}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4g}{m} \sin^2 \frac{d\alpha}{2}$$

(6)

3.2 Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость

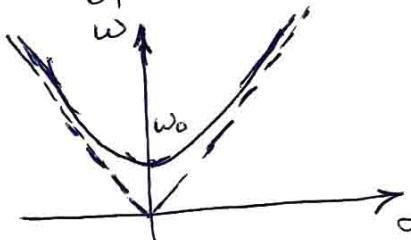


$$\begin{aligned}\psi_{k+1} &= \psi_k + \psi_k' a + \frac{1}{2} \psi_k'' a^2 + \dots \\ \psi_{k-1} &= \psi_k - \psi_k' a + \frac{1}{2} \psi_k'' a^2\end{aligned}$$

$$\psi_k + \omega_0^2 \psi_k = \frac{q}{m} \psi_k'' a^2$$

$$\boxed{\psi'' - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\psi} - \frac{\omega_0^2}{c_0^2} \psi = 0}$$

Уравнение Клейна-Гордона



ω_0 — частота
омески

При $\omega_0 \rightarrow 0$ гипербола исчезает и
сплющение прибаве переходит в шарнирное
пределе $\omega = \pm c_0 d$

Приимеры! Струна на упругом
основании



кодование плазмы, биологич.

P. Рейтман. "Лекции по физике" Т. 6
"Динамика"

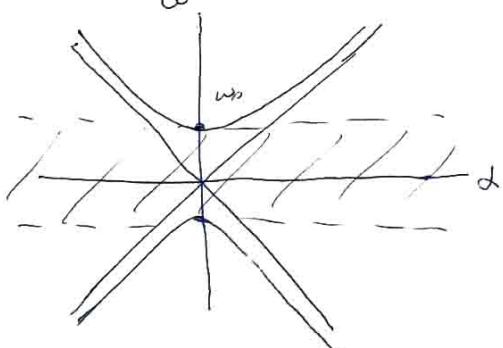
(7)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0$$

$$u \sim e^{i \omega t} e^{i k x}$$

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$$

if $\omega_0 = \omega \Rightarrow \omega = \pm ck$



$$0 < \omega < \omega_0$$

Спектр нулей
Нет решения в виде
затухающей волны

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - k u = 0$$

$$u = v_0(x) e^{i \omega t}$$

$$v_{0,xx} + j^2 v_0 = 0, \quad j = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$1. \quad j = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 \quad v_0 = A x + B$$

смещение как разбросано

$$2. \quad j > \text{без.} \quad \omega > \omega_0 \quad v_0 = A e^{i j x} e^{i \omega t} + B e^{-i j x} e^{i \omega t}$$

$$v_0 = A e^{i \omega(t + \frac{x}{c})} + B e^{i \omega(t - \frac{x}{c})}$$

$$C_0 = \frac{\omega}{j} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

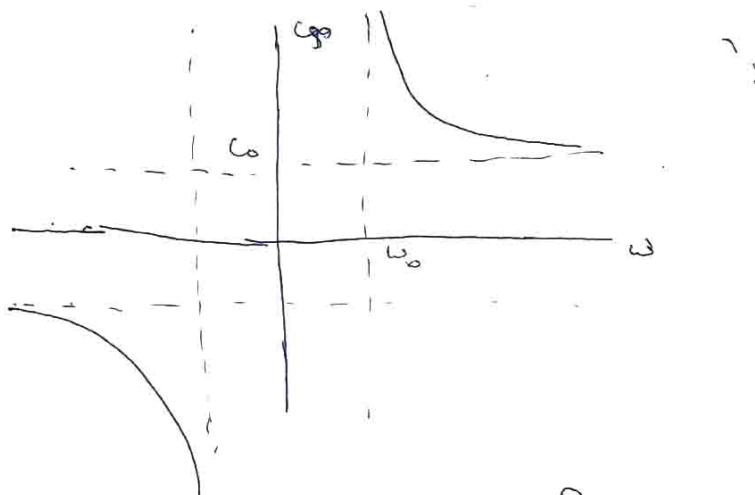
$$3. \quad \omega < \omega_0 \quad v_{0,xx} - j^2 v_0 = 0$$

$$v_0 = A e^{-j x} + B e^{j x}$$

Только приближенное решение

(8)

$$C_\phi = \pm \frac{C_0 \omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$



Что такое скорость сигнала?
 ω_1 и ω_2 где гармоники
 $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_{1,2}$

$$u(x, t) = u_0 \cos(\omega_1 t - d_1 x) + u_0 \cos(\omega_2 t - d_2 x) =$$

$$= 2u_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{d_2 - d_1}{2}x\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{d_1 + d_2}{2}x\right) =$$

$$= a(r, t) \cos(\omega_0 t - \phi_0 x)$$

нечуюе
драма
осцилляруюче
рівняння

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \phi_0 = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

$$a(r, t) = 2u_0 \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t - \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)x\right)$$

$C_\phi = \frac{\omega_0}{\phi_0}$ - не сущне рівняння.

$$C_{\phi m} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{d_2 - d_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta d}$$

В однієм спаде

$$C_{\phi m} = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta d} = \frac{d\omega}{dd}$$

(g)

Три скорости: c_p , c_g , v !

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\omega(\alpha)t - \alpha x)} d\alpha =$$

$$= e^{i(\omega_0 t - \alpha_0 x)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\omega'(\alpha)t - \alpha x)} d(\alpha) =$$

$$= e^{\underbrace{i(\omega_0 t - \alpha_0 x)}_{\text{стационарные}}} u(i(\omega'(\alpha)t - \alpha x))$$

стационарные
 $\therefore \text{одн. форма.}$

$$c_g = \frac{du}{d\alpha}$$

Как проследить за изменением
излучения?

Как возникли интегралы?

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{it(\omega(\alpha) - \frac{\alpha x}{t})} d\alpha$$

$$\Psi(\alpha) = \omega(\alpha) - \frac{\alpha x}{t}, \quad t \rightarrow \infty$$

$\frac{x}{t} - \text{постоянное значение}$

Метод стационарных фаз

1. Н. А. Остроградский, А. И. Романов

Введение в теорию мODULEРОВАННЫХ
функций

2. А. Наурд Введение в методы
воздушной

10

3.3 Метод стационарной фазы

$$I(t) = \int_a^b F(\alpha) e^{it\psi(\alpha)} \frac{d\alpha}{\psi'(\alpha)}, \quad t \rightarrow \infty$$

$$u = \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)}, \quad d\alpha = e^{it\psi(\alpha)} \psi'(\alpha) d\alpha$$

$$v = \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{it}$$

$$I(t) = \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{it} - \frac{1}{it} \int_a^b e^{it\psi(\alpha)} \left[\frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \right] \frac{d\alpha}{it}$$

$$= \frac{i}{t} \left[F(\alpha) \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{\psi'(\alpha)} - \frac{F(\alpha) e^{it\psi(\alpha)}}{\psi'(\alpha)} \right] + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$\psi' \neq 0$!

Основной слагаемый в выражении не зависит от времени t имеет окрестность

близи сингулярных точек $\alpha = \alpha_c$,

$$\text{в которой } \left. \frac{d\psi}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_c} = 0$$

$$\psi(\alpha) \approx \psi(\alpha_c) + \psi'(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c) + \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2.$$

$$F(\alpha) \approx F(\alpha_c) + F'(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)$$

$$u(x, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_c) \exp \left(i (\psi(\alpha_c) + \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2) t \right) d\alpha$$

$$= F(\alpha_c) e^{i [\omega(\alpha_c)t - \alpha_c x]} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(i \left[\frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2 \right] t \right) d\alpha$$

$$\frac{1}{2} \omega''(\alpha_c) t = s, \quad (\alpha - \alpha_c)^2 = z^2 \quad \omega''(\alpha_c) \neq 0!$$

(11)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{|s|}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4} \operatorname{sign}(s)\right)$$

В итоге:

$$u(x,t) \approx \frac{F(d_c)}{\sqrt{w'(d_c)t}} \exp\left\{i\left(\frac{w(d_c)}{d_c} t - d_c x - \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} w'(d_c)\right)\right\}$$

Если существует несингулярная

стационарная волна, то конец у
нижней гауссовой функции, и x него
представляется.

$$C_{sr} = \frac{dw}{dd} = \frac{d(c_p d)}{dd} = c_p + d \frac{dc_p}{dd}$$

$$C_{sr} = c_p + d \frac{dc_p}{dd}$$

формула Рана

$$C_{sr} = c_p, \text{ если } \frac{dc_p}{dd} = 0$$

Дисперсия излучения нормальная

если $C_{sr} < C_p$

и аномальная в противном случае

(12)

~~~



## 4 Лекция 01.03.2022.

### 4.1 Повторение. Преобразование Лапласа. Теорема о вычетах. Ряд Лорана. Лемма Жордана

01. 03. 22. Лекция 4

В прошлой раз мы рассматривали  
среды с дисперсией, введи понятие  
групповой спросности (скорости отклочения)

Сегодня мы поговорим о решении  
нестационарных задач и рассмотрим  
несколько примеров, где удаётся построить  
аналитическое решение с помощью  
преобразования Лапласа

$$Y(p) = \int_0^\infty y(t) e^{-pt} dt$$

уравнение

$$1. \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = g(t), \quad g(t) = F_0 \Theta(t - \tau)$$

введение приложенной нагрузки

$$y(t) = \underbrace{A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t}_{\text{общее решение}} + C$$

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

Сделаем преобразование Лапласа (лекция 2)

$$(p^2 + \omega_0^2) Y = \frac{F_0}{p} \Rightarrow Y = \frac{F_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$\frac{1}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sin \omega_0 t} \quad (\text{таблица})$$

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 t dt = \frac{F_0}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t)$$

(для  $t > \tau$ )

(1)

Теорема об изображении

Если  $f(p)$  является изображением

какого-либо гладкой функции  $f(t)$ ,

$|f(+)| < M e^{\sigma t}$ . Тогда

$$f(+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad \sigma > a$$

Как видеть интеграл берётся чистой оси.

Нулевая теорема о вычетах ( $\text{ТФКП}$ )

А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов

Теория вычетов комплексной переменной

Теорема. Если функция  $f(z)$  является

аналитической (изолированной) в любой

в замкнутой области за исключением

конечного числа особых точек (полюсов

или азимутальных точек)

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}(f(z, a_k))$$

(c) Чему равен вычет около точки?

Это назначается при  $(z-a)^{-1}$  в

разложении в ряд Пуассона

$\text{res}_a f(z)$  - обозначение

$$\text{полюс } m\text{-го порядка. } C_m = \lim_{m \rightarrow 1} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$$

$$m=1$$

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$$

②

Важный геометрический смысл.  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$  --  
 $\psi(a) \neq 0$ !  $\operatorname{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

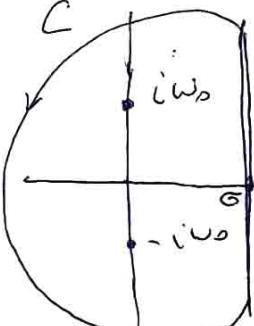
Вернемся к примеру с однократным полюсом.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega_0^2} dp = \\ (\#) \quad &= \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{p_k} f(z) \quad f(z) = \frac{e^{pz}}{z^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Одные полюсы:  $p_1 = -i\omega_0$ ,  $p_2 = i\omega_0$

$$\operatorname{res}_k = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2i\omega_0} - \frac{e^{i\omega_0 t}}{2i\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

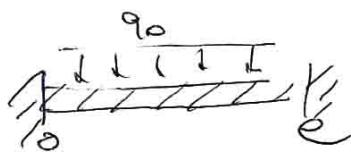
Возьмем к умножительную строку.

$$\begin{aligned} (\#) \quad &\int_C + \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \dots = 2\pi i \sum \operatorname{res}_k \\ &\int_C F(p) e^{pt} dp \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{az} 0 \end{aligned}$$


Лемма Коши:  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C F(z) e^{dt} dz \rightarrow 0$   
 если  $F(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $a > 0$ .

Рассмотрим  
однократный  
полюс.  
Используем  
здесь в бесконечном  
надлом  
также не меняется!

(3)



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{q_0}{E} H(t-\tau)$$

см. лекция 2

$$\frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} - \frac{P^2}{C_0^2} u^L = - \frac{q_0}{EP}$$

$$u^L = A \sin \frac{Px}{C_0} + B \cosh \frac{Px}{C_0} + \frac{q_0}{P^3} C_0^2$$

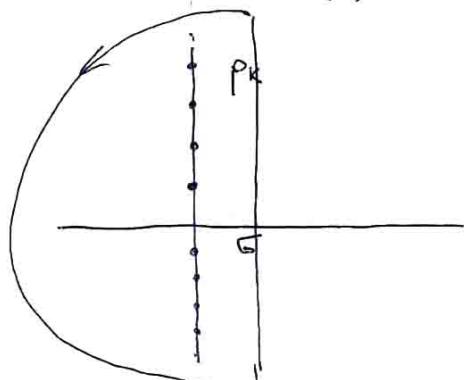
$$u(0, t) = 0, \quad u(e, t) = 0$$

$$u^L = \frac{q_0 C_0^2}{P^3} \left[ \sin \frac{Pe}{C_0} - \cosh \frac{Pe}{C_0} \sin \frac{Pe}{C_0} + (\cosh \frac{Pe}{C_0} - 1) \sinh \frac{Pe}{C_0} \right]$$

$$\text{Особое место (чертеж)} \quad \sinh \frac{Pe}{C_0} = 0 \Rightarrow P = i \omega_k \\ \omega_k = \frac{\pi k C_0}{e}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Сравнить с выражением из лекции.  
Соответствующее значение.

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}, \quad \operatorname{res}_a f^{(k)} = \frac{\psi(a)}{\varphi^{(k)}(a)}$$



$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G+i\infty}^{G-i\infty} F(p) e^{pt} dp \\ = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{res}_{ak} f^{(k)}$$

лемма скорогодас

Решение зайдет, самостоительно!  
Получим  $P(z)$ .

(4)

Теперь ограничимся к уравнению  
Клебе - Годуля

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0 \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = f(t) H(t-0)$$

$u \Big|_{x=\infty}$  - нач. условие.

$$\frac{d^2 u^L}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} u^L - \frac{\omega_0^2}{c^2} u^L = 0$$

$$\frac{d^2 u^L}{dx^2} - \frac{1}{c^2} (p^2 + \omega_0^2) u^L = 0$$

$$u^L = A e^{-\frac{1}{c} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} x}$$

$$\text{При } \text{дес: } -\frac{1}{c} A \sqrt{p^2 + \omega_0^2} A = f^L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\frac{c f^L}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

$$u^L = -\frac{c f^L e^{-\frac{1}{c} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} x}}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

Используемо 1-е определение звук  
не участв. Определимся к машине.

$$\frac{e^{-\frac{1}{c} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} x}}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}} = J_0(a \sqrt{t^2 - k^2}) H(t-k)$$

Окончательно звук может быть  
представлен в виде

$$u = -c \int_0^{+\infty} f(s) J_0(a \sqrt{(t-\frac{x}{c}-s)^2 - (\frac{x}{c})^2}) ds H(t-\frac{x}{c})$$

Получим машину звуковую ке мож  
пользовать.

(5)

Рассмотрим сначала  $x=0$ :

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}, \quad \text{так что } \omega_0 = 1.$$

Следующий шаг теоремы:

Если разложение в ряд разложено в ряд разложения ненулевых коэффициентов, то оно получается из разложения ненулевых коэффициентов, в результате которого получим

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2+1)^{1/2}} &= \frac{1}{p} (1+p^{-2})^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{p} \left( 1 + mp^{-2} + \frac{m(m-1)}{2!} p^{-4} + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-(n-1)) p^{-2n}}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{2} p^{-2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!} p^{-4} - \dots - \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 3 \dots (2n-1) p^{-2n}}{2^n n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{1}{s^{2n+1}} \end{aligned}$$

Также согласно теореме:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = J_0(t)$$

Видя эти формулы можно написать в книге.

М. А. Лаврентьев, С. В. Ильин

Методы теории функций комплексной переменной

(6)

## 4.2 Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа

Спомощи, которые могут возникнуть при использовании теоремы однозначности, мы рассмотрим на более простом примере гравитационности, но способы однозначности к упрощению схемы

Будем:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0 \quad \text{баланс массы}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \text{баланс импульса}$$

Однотипный метод

Баланс массы:  $\int \rho dV$  — закон гравитации  
известно, что есть гравитация

$$\dot{W} = \dot{P} + \dot{Q} \quad \begin{array}{l} \text{известно,} \\ \text{известен расход} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{нет океанических} \\ \text{источников} \end{array}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \rho (\frac{1}{2} v^2 + u) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho (v \dot{v} + \dot{u}) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial (h - v)}{\partial x} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial x} dx$$

$h$  — поток гравитации

$$\rho v \dot{v} + \rho \dot{u} - v \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sigma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$v(\rho \dot{v} - \frac{\partial \sigma}{\partial x}) + \rho \dot{u} + \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma \dot{e}, \quad \dot{e} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Баланс импульса

$$\boxed{\rho \dot{u} + \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma \dot{e}}$$

Введем новое значение температуры, так называемую физическую направляющую измеряемую вибрационную формулу

описывающую вибрационное движение волны:  $u = c_v \theta$

(7)

Закон Фурье:  $h = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$

Определение ур-е.  $\sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta)$

закон Дюалера-Кельвина помеха дифракция  
 $E_0 = \alpha \theta$  — это первоначальное, что мы не можем  
 определить в начальный момент времени.

После постановки:

$$\rho c v \dot{\theta} + \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = E \alpha \theta \dot{E}$$

помеха в начальном режиме

$\theta$  — изменение температуры

$\dot{E}$  — работающие (излучающие) температура

Ур-е теплопроводности, учитывающее  
 влияние поля дифракции (вспышка  
 излучения). Пока будем пренебрегать  
 взаимодействием с излучением ур-е.

$$\rho c v \dot{\theta} + \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

$\rho$  — плотность,  $c_v$  — удельная теплоемкость

$\lambda$  — коэффициент теплопроводности

$\lambda = \lambda_s + \lambda_e$  — это постоянное значение

$\lambda_e \gg \lambda_s$ , поэтому значение

хорошо приблизительно

$\lambda$  характеризует способ передачи  
 тепла между двумя соседними атомами

$\lambda$  и  $c_v$  зависят от температуры,

но это будет оставлено

в рамках пульсационной теории

Г.И. Енисеев. "Физика первого тепла"

(8)

$$\rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

$\theta \sim e^{i\omega t} e^{-\alpha x}$ . Решение называется

$$\rho c_v i\omega + \lambda \alpha^2 = 0 \quad (*)$$

ЧП - это гармоническое тока.

Первое значение по величине -

- недопустимо (получило значение

"Тема переходит от нуля к нулю" Чемнее значение

к конечному. Чемнее значение

по  $x$  означает, что процесс

обратимое симметричное.

ЧП (\*) означает, что  $\alpha$  - комплексное значение.

Что это означает?

$$\alpha = \alpha_R + i\alpha_I \quad \text{Всегда } \alpha^2 = \frac{\rho c_v}{\lambda} -$$

- но это значит температура

тока

$$\alpha^2 i\omega + \alpha_R^2 + 2i\alpha_R \alpha_I - \alpha_I^2 = 0$$

$$\alpha_R^2 = \alpha_I^2 \Rightarrow \alpha_I = \pm \alpha_R$$

$$\alpha^2 \omega + 2\alpha_R \alpha_I = 0 \Rightarrow \alpha^2 \omega = 2\alpha_I^2$$

$$\alpha_I^2 = \frac{\alpha^2 \omega}{2}$$

$$\boxed{\alpha_I = \sqrt{\frac{\omega}{2}}}$$

(9)

Тогда

$$\Theta \sim e^{i\alpha} e^{\text{int}} = e^{i(\Delta R + i\Delta I)X} e^{-i\omega t}$$

$$= \underbrace{e^{-\Delta I X}}_{1} \underbrace{e^{\text{int} - i\Delta R X}}_{\text{Болца в чисто пассивном зене}}$$

$\Delta I$  характеризует гидравлическое сопротивление течения, при этом  $\Delta I = \alpha \sqrt{\frac{\omega}{2}}$   
 гидравлическое сопротивление зависит от коэффициента теплоотдачи

$$\Delta R = - \frac{\rho C_p}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

$$C_p = \frac{\omega}{\Delta R} \sim \sqrt{\omega}$$

Чем выше  $\omega$ , тем величина  $C_p$  и расход воздуха, но при этом болца будет сильнее

затухать на некоторое расстояние  $x$

$$\Theta \sim e^{i\omega(t - \frac{x}{c_p})} e^{-\Delta I X}$$

Затухание начнется в силу искривления

$$\text{закона Пифагора } h = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Тепло уходит из области

(10)

## 5 Лекция 15.03.2022.

### 5.1 Применение преобразования Лапласа. Трудности

15.03.22. Лекция 5.

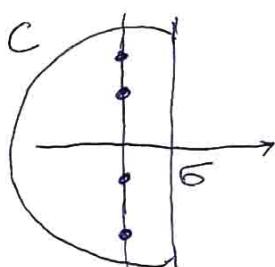
На прошлой лекции мы обсуждали применение преобразования Лапласа

$Y(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$  для решения нестационарных задач. Основное идея состоит в том, чтобы перейти в пространство изображений, где решить задачу проще. План: нужно

возвращаться в пространство оригиналов.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C-i\infty}^{C+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z, a_k)$$



$$\oint_C = \int_{C+i\infty}^{C-i\infty} + \int_C$$

$$\int_C F(p) e^{pt} dp \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0 \quad \begin{matrix} \text{лемма} \\ \text{скорогоды} \end{matrix}$$

Обсудим некоторые трудности, но т. при вычислении инт. могут возникнуть

$$a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \dot{\theta} = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda}{\rho C_v} - \text{изолированная температурная}$$

ур. yes: 
$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = J(t)$$

$\theta \xrightarrow{x \rightarrow \infty}$  опр.

$0 \leq x < \infty$

①

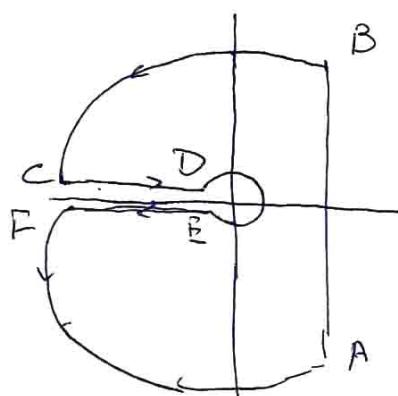
$$\alpha^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} - p\theta = 0$$

$$\theta = A e^{-\sqrt{p}\frac{x}{\alpha}}, \quad -\sqrt{p}A = -\frac{\gamma^2}{\lambda} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\gamma^2 \frac{\alpha}{\sqrt{p}}}{\lambda \sqrt{p}}$$

$$\theta = \frac{\gamma^2 \alpha}{\lambda \sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}\frac{x}{\alpha}}$$

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}}, \quad k = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad k > 0$$



$\omega = \sqrt{p}$  - много значное  
значение  
Нужно сделать разрез,  
чтобы запретить однозначность

$$\sqrt{p} = \sqrt{z} e^{\frac{i\varphi}{2}}$$

Внутри контура нет особых точек  $\Rightarrow$

$$\oint_C F(p) e^{pt} dp = 0$$

$$\int_{AB} + \int_{CD} + \int_{EF} = 0 \quad \left( \int_{BCUF} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0 \text{ (BCUF - лемма Коши)} \right)$$

$$\text{CD: } p = x e^{it} = -x, \quad \sqrt{p} = i\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-k i \sqrt{x}} e^{-xt} dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt} e^{-k i \sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

(2)

аналогично EF

$$EF: \sqrt{\rho} = -\sqrt{x}$$

$$\int_{EF} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-xt + k_i \sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int_{CD} + \int_{EF} = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-xt} \left[ \frac{e^{k_i \sqrt{x}} + e^{-k_i \sqrt{x}}}{2} \right] \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos k_i \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\sqrt{x} = u$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2 t} \cos k_i u du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 t} \sin k_i u du = 0 \quad (\text{как интеграл по нечетной функции})$$

$$\text{Тогда: } \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2 t} \cos k_i u du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 t} (\cos k_i u + i \sin k_i u) du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 t} e^{ik_i u} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(u - \frac{ik_i}{2t})^2 - \frac{k_i^2}{4t}} du$$

$$= \frac{e^{-\frac{k_i^2}{4t}}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tu^2} du = \frac{e^{-\frac{k_i^2}{4t}}}{\pi \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds$$

$$= \frac{e^{-\frac{k_i^2}{4t}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi}} = -\frac{k_i^2}{4t}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-ku\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

(3)

## 5.2 Несвязанная динамическая задача термоупругости

Несвязанное динамическое звено  
термоупругости

Последнем упр-е баланса импульса  
 $\frac{\partial \sigma}{\partial x} - p\ddot{u} = 0$ ,  $\sigma = E(\varepsilon - \alpha\theta)$ ,  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$

после подстановки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Преобразование Лапласа (термодинамические  
коэффициенты)

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{G^2} U'' = \alpha \frac{d\Theta}{dx}$$

Самостоятельно (расчетное звено)

Литература:

1. В.И. Даниловский. Об одной динамической задаче термоупругости. Прикл. мат. и мех. 1952г.
2. В. Новакий. Динамические задачи термоупругости. 1970г.
3. А.Д. Коваленко. Термоупругость, 1978г.

Перед тем как перейти к вопросу  
о роли вложений (сегментов),  
нам понадобится ввести понятие  
сегнето-суперимпульса.

(4)

### 5.3 Дельта-функция Дирака

Преобразование Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt - \text{спектральная плотность}$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{j(\omega - \omega_*)t}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - \omega_*)t} dt \quad \text{ищут погрешность?}$$

Былое понятие  $\delta$ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y) \delta(y - y_0) dy = h(y_0)$$

Сейчас вспектральное значение в т.  $y_0$  (Фурье-спектр)

Обобщенные функции

1. B. C. Владимиров. Ур-е математика

2. A. B. Олейник. Методы итоговом

преобразований в задачах математика

сущ.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega^*) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega^* t}$$

$F(\omega) = \delta(\omega - \omega^*)$  - спектральная плотность

Мне уже использую ее описание прототипа сопровождений массы или заряда

$$p = m \delta(x - a)$$

$$\int m \delta(x - a) dx = m$$

(5)

## 5.4 Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера

Вернёмся к примеру с одной степенью свободы,

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = P_0 \delta(t-0) \quad (P_0 = 0.1 - \text{запишите})$$

Нулевые начальные условия.

$$(\rho^2 + \omega_0^2) q^L = 1, \quad \int_0^\infty \delta(t-0) e^{-\rho t} dt = 1.$$

$$q^L = \frac{1}{\omega_0 \rho^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$G$  — реакция системы на  $\delta$ -удар

$$q^L = \int_0^t F^L(c) G(t-c) dc$$

последнее выражение

Реакция системы на прямое действие  
считается при нулевых начальных  
условиях

Данное решение основное сингулярное  
и где уравнение в исходном  
перепечатано

Найти функцию Грина для  
одномерного оператора Д'Аламбера  
в областях пр-ва  $(-\infty < x < \infty)$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(x-x')\delta(t-t')$$

Представление функции по методу:

⑥

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} e^{-idx} dx = \frac{\partial G}{\partial x} e^{-idx} + id \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} e^{-idx} dx =$$

$$= id \left[ G e^{-idx} + id \int_{-\infty}^{\infty} G e^{idx} \right]$$

$$\omega^2 G^F + \frac{1}{\omega^2} G_{tt}^F = e^{-idx} \delta(t-t')$$

$$G_{tt}^F + \omega^2 G^F = \omega^2 e^{-idx} \delta(t-t')$$

$$G^F = \frac{e^{-idx'} \sin(\omega d(t-t'))}{\omega d}$$

Однако приведенное выше

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-idx'} \sin(\omega d(t-t')) e^{idx} dd =$$

$$= \frac{1}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-idx'} \left( \frac{e^{i\omega d(t-t')}}{2id} - \frac{e^{-i\omega d(t-t')}}{-2id} \right) e^{idx} dd$$

$$= \frac{1}{4\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\omega((x-x')+\omega(t-t'))}{id}} - e^{\frac{i\omega((x-x')-\omega(t-t'))}{id}} dd$$

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{idx}{id}} dd$$

$$\textcircled{E} \quad \frac{1}{2\omega} \left[ H((x-x') + \omega(t-t')) - H((x-x') - \omega(t-t')) \right], \quad t > t'$$

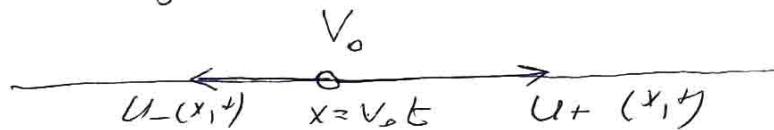
$$y = x - x', \quad \tau = t - t'$$

$$= \frac{1}{2\omega} \left[ H(y + \omega\tau) - H(y - \omega\tau) \right]$$

$$\textcircled{7}$$

## 5.5 Движущийся источник звука

Движущийся источник звука



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \varphi(t) \delta(x - V_0 t)$$

$$u(x, t) = \int_0^t dt' \varphi(t') \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x', t - t') \delta(x - V_0 t')$$

$$= \int_0^t G(x - V_0 t', t - t') \varphi(t') e^{i k t'} dt'$$

$$= \frac{1}{2 i \omega} \int_0^t \left\{ H(x + \omega t - (V_0 + \omega)t') - H(x - \omega t + (\omega - V_0)t') \right\} \varphi(t') dt'$$

Неравенства:

$$\begin{aligned} x + \omega t - (V_0 + \omega)t' &\geq 0 \\ x - \omega t + (\omega - V_0)t' &\leq 0 \end{aligned}$$

Получив где болю, распределение  
ом источника  $u_-$  и  $u_+$

Две периодические волны

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t)$$

принцип строения звука

Доплера (расчетное задание)

(8)

## 5.6 Влияние включений на волновой процесс. Смешанный спектр

О Роль включений и их влияния  
на волновой процесс

В случае поглощения прихода, включений  
(заготовок) в кристаллической решётке  
поглощают в стационарных зониках излучение.  
Начнем с более простого случая,  
когда излучение включено в кристалл  
на границе областей



$$0 \leq x < \infty$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$u = M \ddot{u}_0, \quad \text{и } \ddot{u} - \text{перемещение массы}$$

Условие начальное - ?  
Возьмём условие что начальная скорость волны  $u_0 = U_0 / x \rightarrow 0$   
Перемещение свободное  
Нормировка заготовки

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{M \ddot{u}_0}{E} \\ u \Big|_{x=0} = U_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \ddot{u}(0) = 0, \quad u(0,0) = 0 \\ u(0,x) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Начальное} \\ \text{условие.} \end{array}$$

$u(x,t)$  - решение уравнения.

$$u = U_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) H(t - \frac{x}{c})$$

$$\begin{aligned} \text{Достижимо} & \quad \text{но} \quad u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow - \frac{1}{c} u_0 = \frac{M \ddot{u}_0}{E} \quad \text{и} \\ \frac{M \ddot{u}_0}{E} + \frac{u_0}{c} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\ddot{v}_0 + \frac{p_0}{M} v_0 = 0 \quad p_0 - \text{антизатухающее сопротивление среды}$$

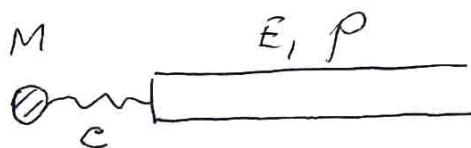
$-\frac{p_0}{M} t$

$$v_0(t) = V_0 e$$

$$u_0(t) = \frac{V_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}), \quad \beta = \frac{p_0}{M}$$

Почему возникает нелинейное пронизывающее в консервативной системе?

Энергия переходит от маcсы в стержень в виде бегущих волн.



$$E \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=0} = c(u - u_0)$$

перемещение не совпадает

рассмотрим самоизгибание  
(расчетное значение)

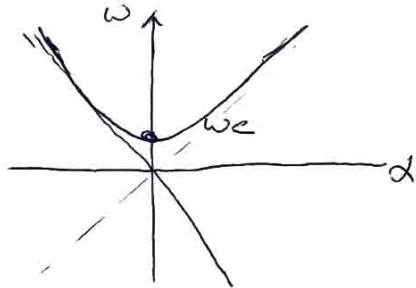
В задаче рассмотрим  
оператор Кельвеин - Гурдин.

(Стержень на чистом основании)

⑩

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - \frac{\omega_c^2}{c^2} u = 0$$

Дисперсионное уравнение:  $\omega = \sqrt{c^2 + \omega_c^2}$



Расмотрим

специальный случай  
при начальном значении

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{M \ddot{u}_0}{E}$$

$$\Rightarrow u = A(x) e^{i\omega t} \\ Ax_x + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) A = 0$$

Рассмотрим случай  $\omega < \omega_c$

$$Ax_x - \frac{1}{c^2} (\omega_c^2 - \omega^2) A = 0 \quad \text{или}$$

$$A_{xx} - \gamma^2 A = 0, \quad \gamma^2 = \frac{1}{c^2} (\omega_c^2 - \omega^2)$$

$$A = a e^{-\gamma x} + b e^{\gamma x} \cdot \begin{array}{l} \text{(затухающее} \\ \text{решение)} \end{array}$$

$$u(x,t) = u_0 e^{-\gamma x} e^{i\omega t}$$

Данное решение имеет затухающий  
характер

Если massa нет, то имеем нулевое  
решение

Узульское значение.

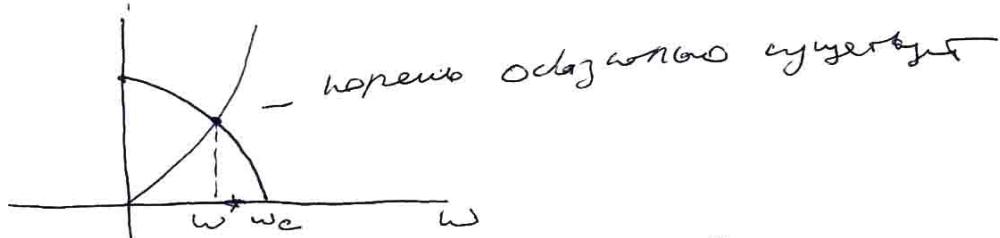
$$\frac{dA}{dx} = -\frac{M\omega^2 u_0}{E}$$

$$-\gamma u_0 + \frac{M\omega^2 u_0}{E} = 0$$

$$\left( -\gamma + \frac{M\omega^2}{E} \right) u_0 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{смеша может} \\ \text{стремиться к 0!} \end{array}$$

11

$$-\frac{1}{c} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} = \frac{M\omega^2}{E}$$



$\Rightarrow$  Наличие искаженного включения при близк. к существованию дисперсионной зоны  $\omega^* < \omega_c$ . На оси спектра наименее дисперсионная зона (стационарный спектр)

Состр. форма  $u(x, t, \omega^*) =$

$$= e^{i\omega^* t} e^{-\frac{x}{c} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

- ненаправленная  
форма в месте, где  
включение. Регулярное  
смещение. Конечные  
различия, если нет.

(12)

## 6 Лекция 22.03.2022.

### 6.1 Небольшое замечание к задаче

Замечание по задаче:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = F_0 \cos(\omega t - \phi)$$

$$q^L = \frac{F_0}{\rho^2 + \omega_0^2}, \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \psi'(z) \neq 0$$

$$\text{тогда } f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} \quad (\dagger)$$

$$\psi' = \rho^2 + \omega_0^2 + 2\rho^2 = 3\rho^2 + \omega_0^2$$

$$\text{Одна из } \rho = \pm i\omega_0, \quad \underline{\rho = 0}$$

$$q = \sum_{\rho} \text{Res}_{\rho} f(z) = \frac{F_0}{\omega_0^2} \cdot \frac{F_0}{2\omega_0^2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) =$$

$$= \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

$$\boxed{\ddot{q} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -q}$$

$$u^L = \frac{c^2 q}{\rho^3} \left[ \frac{(ch \frac{\rho t}{\omega_0} - 1) sh \frac{\rho t}{\omega_0} - ch \frac{\rho t}{\omega_0} sh \frac{\rho t}{\omega_0} + sh \frac{\rho t}{\omega_0}}{sh \frac{\rho t}{\omega_0}} \right]$$

$$\rho = i\omega_0, \quad \underline{\rho = 0}$$

$$\psi'(\rho) = 3\rho^2 sh \frac{\rho t}{\omega_0} + \rho^3 ch \frac{\rho t}{\omega_0} \frac{t}{\omega_0}$$

В т.  $\rho^2 > 0$ . Понижение порядка (у) ниже

и выше порядка приводит в ряд

недопустимое значение при  $\rho^{-1}$ .

## 6.2 О стационарных решениях

22. 03. 22 Лекция 6

### О стационарных решениях

Система с одиной степенью свободы

$$\ddot{q} + 2\eta \dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 e^{int}$$

$$q = A(\omega) e^{int} \quad \begin{aligned} & \text{- установившееся решение} \\ & \text{задано для начальных условий} \end{aligned}$$

аналогично:

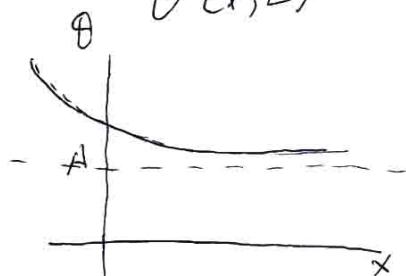
$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

$$\theta = f(x - vt) = f(\xi), \quad \xi = x - vt$$

$$-cvf' = kf'' \quad \text{однородное}$$

$$f(\xi) = A + Be^{-\frac{cv\xi}{k}} \quad -\frac{cv}{k}\xi$$

$$\theta(x, t) = A + Be^{-\frac{cv(x-vt)}{k}}$$



$A$  - температура среды на бесконечности, когда тепло еще не было  
Решение такого вида

описывается, например, прачечей Венделсона,  
но потому что со временем в расположенные  
внутри демонстрационные бензин, где  
реакции поддерживает постоянную  
температуру

$$f(x - vt) \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

(1)

Такое решение можно записать в виде  
 $\Theta(x,t) = \Theta_\infty + (\Theta_0 - \Theta_\infty) e^{-\frac{C_0}{L}(x-vt)}$

Еще один пример:tablодное движение  
груза по доске, лежащей на двух опорах



$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ky = P(x, t)$$

$$P = P_0 \delta(x - vt) = P_0 \delta(s)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta^2 y = \frac{P_0}{EI} \delta(s)$$

$$y = f(x - vt) = f(s)$$

$$f''''_+ + 2\alpha v^2 f''_+ + \beta^2 f_+ = 0 \quad s > 0$$

$$f''''_- + 2\alpha v^2 f''_- + \beta^2 f_- = 0 \quad s < 0$$

Пример: если  $f_+'''' = f_-''''$ ,  $f'_+ = f'_-$ ,  $f''_+ = f''_-$   
 $f'''_+ - f'''_- = \frac{P_0}{EI}$  (здесь  $c_0 = 0$ )

Расщемим задачу:

Дисперсионное соотношение для длины:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta^2 y = 0$$

-id x int

$$y \sim e^{e^{\frac{i\omega t}{2}}}$$

$$c_s = \frac{\omega}{2} - ?$$

(2)

### 6.3 Метод предельного поглощения

#### 6.3.1 Функция Грина статической задачи

После подстановки:

$$\lambda^4 - 2\alpha\omega^2 + \beta^2 = 0$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{\beta^2 + d^2}{2\alpha\lambda^2} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{\beta^2 + d^2}{2\alpha\lambda^2}}$$

$$\frac{d\lambda}{dd} = 0 \Rightarrow d^* = \sqrt{\beta}$$

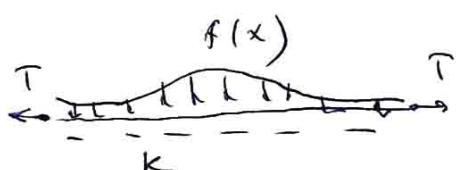
$$\lambda_{\text{крит.}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{K\beta}}{\rho}}$$

При выполнении предельного  
задания определим предельную  
нагрузку. Как она связана  
с критической? Сколько?

Метод предельного поглощения  
функции Грина

Рассмотрим статическую задачу  
о прооде струны не фиксированной  
основании!

$$T u_{xx} - k u = f(x)$$



$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty}$$

Сделаем аппроксимацию

преобразование

$$f^F = \int_{-\infty}^{\sigma} f e^{-i\sigma x} dx$$

Фурье на конечное:

(3)

$$\begin{aligned}
 & T \left[ u(x) e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} + i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\alpha x} \right] = \\
 & = T \left[ u(x) e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} + i\alpha u(x) e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} - \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\alpha x} dx \right] \xrightarrow{u^F} \\
 & (-T\alpha^2 - k) u^F = f^F \Rightarrow u^F = -\frac{f^F}{k + T\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Обратное преобразование Фурье:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

$$u^F = -\frac{i}{T} \frac{f^F}{\alpha^2 + k^2}, \quad \alpha^2 = \frac{k^2}{T}$$

$$\text{Если } \frac{1}{\alpha^2 + k^2} = \varphi(x), \text{ то}$$

$$f^F \varphi^F = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) \varphi(s) ds$$

единица

(Боломистое преобразование Нариса)

$$u^F = -\frac{1}{\alpha^2 + k^2} \frac{1}{T} - \text{преобразование Фурье}$$

или низкочастот

струнок под действием  $\delta$ -функции

$$u_{xx} - Ku = \frac{\delta(x)}{T}, \quad K = \frac{k}{T}$$

$$\text{Тогда: } u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) u^F(s) ds$$

Требуемое очищение  
реакции струнок на рельса - струнки

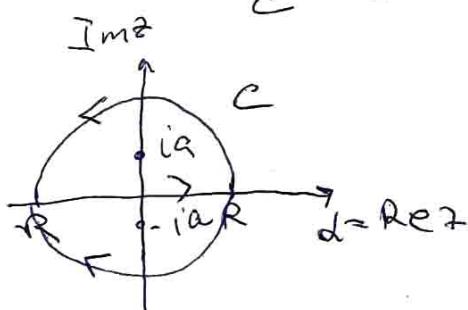
(4)

Её пришёл независимый выдающийся Григорий

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^F e^{ixz} dz = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izx}}{z^2 + a^2} dz$$

Для вычисления интеграла  
перейдём в комплексную плоскость.

$$\tilde{J} = \int_C \frac{e^{izx}}{z^2 + a^2} dz, \quad C - \text{замкнутый контур}$$



при  $x > 0$  венг. ось  
замыкает на  
верхнюю полуплоскость,  
а при  $x < 0$  - на нижнюю.

$$\tilde{J} = \int_{CR}^C F(z) dz + \int_{-R}^R F(z) dz \quad \text{при } x > 0$$

$$\tilde{J} = \int_{CR^-}^C F(z) dz + \int_R^R F(z) dz \quad \text{при } x < 0$$

Имеем при малом радиусе окружности  
на линии

$$\tilde{J} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=a} f(z) = 2\pi i \frac{e^{iax}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ax}$$

$$\tilde{J} = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{res}_{z=a} f(z) & x > 0 \\ -2\pi i \operatorname{res}_{z=a} f(z) & x < 0 \end{cases}$$

$\operatorname{res}_{z=a} f(z)$  - остаток контура включает сингулярность

$$\therefore \tilde{J} = \frac{\pi}{a} e^{-|ax|} \quad (5)$$

## 6.3.2 Функция Грина динамической задачи

Испр.:  $\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \psi(k) dk$   
 - функция Грина  
 (статика)

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-k) \psi(k) dk$$

Рассмотрим теперь динамическую задачу:

$$\Gamma u_{xx} - p(x) u_{tt} - k(x) u = 0$$

$p$  и  $k$  зависят от  $x$  и  $t$  !

Рассмотрим специальную задачу

$$u(x,t) = U_0(x) e^{int}$$

$$\text{Тогда: } U_0_{xx} + \frac{\omega^2}{\Gamma} p(x) U_0 - \hat{k}(x) U_0 = 0$$

$$U_0_{xx} + U_0 \left( \frac{\omega^2 p(x)}{\Gamma} - \hat{k}(x) \right) = 0$$

$$\boxed{p(x) = p_0 + \tilde{p}(x)}, \quad k(x) = k_0 + \tilde{k}(x)$$

$$U_0_{xx} + \frac{1}{\Gamma^2} [\omega^2 - \omega_c^2] U_0 = \frac{1}{\Gamma} [\tilde{k}(x) - p_0 \tilde{\omega}^2] U_0$$

$\uparrow$  несогласие

недавние ступни.

Могут ли сеи включе ить роль  
 источнике небольшой ?

(6)

Поставим в пребуду часть  $\frac{1}{\pi} \delta(x-\xi)$

$$\frac{1 \cdot \delta(x-\xi) e^{int}}{\int_0^\xi}$$

$\xi$  - тоже приложение  
квадратичи

$$U_{0xx} + \frac{1}{C_L} U_0 (\omega^2 - \omega_c^2) = \frac{1}{\pi} \delta(\omega - \xi)$$

Если мы знаем динамику  
руководства Грина, то решение исходной  
уравнения с неоднородностью в пребуду  
частии можно заменить в базе:

$$U_0(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, \omega) [k(\xi) - \omega^2 \rho(\xi)] U_0(\xi) d\xi$$

Интегральное уравнение Программа  
II рода с однозначным представлением

Интегральное уравнение Программа имеет вид,

$$y(t) = \lambda \int_a^b k(t, s) y(s) ds + g(t)$$

если  $g(t) = 0$ , то иное описание уравнения

Теорема: Либо однозначное уравнение

имеет однозначное решение для моды

руководства  $\delta$ , либо однозначное уравнение

имеет не единственное решение

неприводимое решение ( $\lambda_n$  - собств.

значение,  $y_n$  - единственное руководство) ⑦

Если  $K(x, \xi)$  - симметричное ядро, то избрано, что спектр содержит вещественные значения дисперсии и вещественных, а вещественное значение ортогонально.

Решение можно представить в виде разложения  $y = \sum g_k y_k$

$$\text{Вернемся к ур-ию: } U_{0xx} + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) = \frac{\delta(x-\xi)}{l}$$

Если  $\omega < \omega_c$ , то можно сказать,

в противном случае решение - это дзета-функция комплексной переменной

Поэтому будем брать моменты как вещественные, так и комплексные

$$\begin{aligned} &\text{Берём преобразование Фурье, } \int_{-\infty}^{\infty} U_{0xx} e^{-idx} dx = \\ &= U_{0x} e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + id \int_{-\infty}^{\infty} U_{0x} e^{-idx} dx = \\ &= U_{0x} e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + id U_0 e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - d^2 U_0^F \end{aligned}$$

Мы не можем приравнять нуль

второе члене слагаемое. У нас консервативное загоря, который не замуждан.

(8)

## 6.3.3 Применение метода предельного поглощения

Используем метод предельного поглощения:  
введем малое время:

$$\text{Базо: } G_{xx} - \frac{1}{\omega^2} G_{tt} - \hat{k} G_t = \frac{i}{T} \delta(x-\xi) e^{i\omega t}$$

$G$  - сумма Грина (консервативное поле)

$$\text{Генеры } G_{xx}^{(\varepsilon)} - \frac{1}{\omega^2} G_{tt}^{(\varepsilon)} - \varepsilon G_t - \hat{k} G = \frac{i}{T} \delta(x-\xi) e^{i\omega t}$$

Можно поставить условие:  $G_t^{(\varepsilon)} \Big|_{x \rightarrow \pm \infty} = 0$

$$G^{(\varepsilon)}(x, t) = G_0^{(\varepsilon)} e^{i\omega t}$$

$$G_{0xx}^{(\varepsilon)} + \int \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2) - i\omega \varepsilon / G_0^{(\varepsilon)} = \frac{i}{T} \delta(x-\xi)$$

Опять делаем другое преобразование:

$$-\alpha^2 G_0^{(F(\varepsilon))} - p^2 G_0^{(F(\varepsilon))} = \frac{i}{T} e^{-i\omega \xi}$$

$$p^2 = i\omega \varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\text{или } -(\alpha^2 + p^2) G_0^{(F(\varepsilon))} = \frac{i}{T} e^{-i\omega \xi}$$

$$\boxed{G_0^{(F(\varepsilon))} = -\frac{i}{T} \frac{e^{-i\omega \xi}}{\alpha^2 + p^2}}$$

(9)

$$G_0^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-s)}}{\omega^2 + p^2} d\omega$$

Для вычисление интеграла перейдём  
в комплексную плоскость:

$$z_{1,2} = \pm pi = \pm (A + iB)i$$

$$z_1 = -B + iA, \quad z_2 = B - iA$$

$$p^2 = A^2 - B^2 + 2iB = i\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

Приравнивая мнимые и реаль. части, имеем:

$$\begin{cases} A^2 - B^2 = -\frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2) = a, \quad a < 0 \text{ при } \omega > \omega_c \\ 2AB = \omega\varepsilon \Rightarrow B = \frac{\omega\varepsilon}{2A} \end{cases}$$

Получаем в первое ур-

$$A^2 - \frac{\omega^2\varepsilon^2}{4A^2} - a = 0 \Rightarrow A^4 - aA^2 - \frac{\varepsilon^2\omega^2}{4} \approx 0$$

$$A_{1,2}^2 = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \varepsilon^2\omega^2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}|a|\left(1 + \frac{\varepsilon^2\omega^2}{2a^2}\right)$$

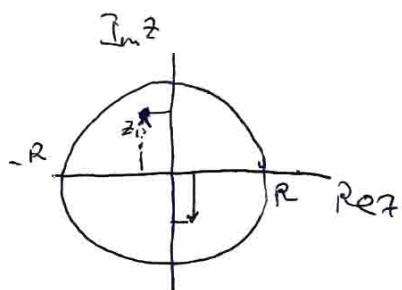
Рассмотрим случай  $\omega > \omega_c$ ,  $a < 0$

Тогда нас устроит только:

$$A^2 = -\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4a} \Rightarrow A = \frac{\varepsilon\omega}{2\sqrt{|a|}}, \quad B = \sqrt{|a|} = \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{\omega}$$

(10)

Изображим  $z_1$  и  $z_2$  на компл. плоскости



Если  $\xi = \infty$ , то полюс лежит на бесконечной оси их суммы отходит

Возможна 4 варианта:

- 1) Какой из этих
- 2) встречается ?
- 3) каспий ?
- 4)

Ближнее more время сбрасывает полюс с бесконечной оси. (Рисунок стоял: дядя дисциплина не подходит успевавшему рисунку)

При  $x > \xi$  бесконечную ось замыкаем на верхнюю полуокружность, а при

$x < \xi$  — на нижнюю. Используем

формулу  $\theta = \pi$ , получаем;

$$G_{10}^{(c)} = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \begin{array}{ll} 2\pi i \frac{e^{i(z_1(x-\xi))}}{2z_1}, & x > \xi \\ \theta_{2\pi i} e^{i(z_2(x-\xi))} & x < \xi \end{array} \right.$$

одног оголовок спрятан  
одног оголовок спрятан

11

Переход к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$   $z_1 = -B$ ,  $z_2 = B$

$$G_{\rho} = -\frac{i}{T} \begin{cases} \frac{ie^{-iB(x-\xi)}}{-2B}, & x > \xi \\ \frac{ie^{iB(x-\xi)}}{2B}, & x < \xi \end{cases} \quad (1)$$

$$B = \sqrt{|k|} = \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{c_0}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{ie^{-iB(x-\xi)}}{2B\Gamma}, & x > \xi \\ \frac{ie^{iB(x-\xi)}}{2B\Gamma}, & x < \xi \end{cases}$$

$$\text{Тогда } G_{\rho}(x, \xi, \omega) = \frac{i \chi_{\rho}}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \Gamma \rho c_0} e^{-i|x-\xi| \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} =$$

$$= \frac{i e^{-i|x-\xi| \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c_0}}}{2 \rho c_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

$$G(x, t, \omega) = \frac{e^{-i|x-\xi| \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c_0}}}{2 \rho c_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{i\omega t} =$$

$$= e^{i\omega(t - \frac{|x-\xi|}{c_0})} \frac{i}{2\rho c_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad - \text{моментное} \\ \text{рассеяние}$$

$$\zeta_{\rho} = \frac{\omega c_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad !$$

Следовательно  $\omega < \omega_c$  — самоиздательство!

(12)

## 7 Лекция 29.03.2022.

### 7.1 Повторение метода предельного поглощения

29.03.22. Лекция 7

Вспомним материал предыдущей лекции.

$$G_{xx}^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\omega^2} G_{yy} - \underline{\varepsilon} G_t - \tilde{k} G = \frac{i}{T} \delta(x-s) e^{i\omega t}$$

$$G_t^{(\varepsilon)}(x,t) = G_0^{(\varepsilon)} e^{i\omega t}$$

$$G_0^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{T} \frac{e^{-i\omega s}}{\omega^2 + p^2}, \quad p^2 = i\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\omega > \omega_c$$

$$G(x,t,\omega) = e^{i\omega(t - \frac{|x-s|}{c_0})} \frac{1}{2\rho_0 c_0 \sqrt{\omega - \omega_c^2}}$$

$c_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$  - зависимость групповой скорости от частоты  
и нелинейное - групповое

Перейдём к случаю  $\omega < \omega_c$

$$G(x,t,\omega) = -\frac{1}{2\rho_0 c_0 \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} e^{-i|x-s|\sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{c_0}}} e^{i\omega t}$$

- сигнум Грина (нелинейное решение)

Вернёмся к исходному ур-ию

с неоднородностями:

$$p(x) = p_0 + \tilde{p}(x), \quad K(x) = K_0 + \tilde{K}(x)$$

①

$$(L_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - k_0 u = \frac{1}{\rho c^2} (\tilde{k}(x)u + \tilde{\rho}(x)u_{tt}) \quad -\infty < x < \infty),$$

Существует ли дисперсионный спектр для  
затухающих отсечек?

Рассмотрим спектральную задачу

$$u(x,t) = U_0(x) e^{int} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{0xx} + \frac{1}{c^2} (w^2 - w_0^2) U_0 = \frac{1}{\rho c^2} (\tilde{k}(x) - \tilde{\rho}(x) w^2) U_0$$

Если извлечь из уравнения Гамильтона,  
нахождение  $U_0$  сводится к проследите:

$$U_0(x, w) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, \xi, w) \varphi(\xi, w) U_0(\xi, w) d\xi$$

Задача нахождения фундаментального  
решения с неоднородностью в правой  
стороне может решаться методом  
затухающих отсечек:

$$y(x, w) = w \int_a^x k(x, \xi) y(\xi, w) d\xi$$

Если это  
то ур-е  
бесконечной  
или всегда  
ортогонально

симметричное и бесконечное,

Фундаментальная  
функция всегда имеет  
затухающий спектр, а  
ее собственные  
значения гамильтониан

(2)

При  $\omega > \omega_c$

$$G_{\alpha}(x, \xi, \omega) = -\frac{i}{2\rho_0 c \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{-i \frac{|x-\xi| \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}}$$

- это минимум

Затемнение волн не зависит от источника и имеет экспоненциальный характер.

Do затмения отменяется  $\omega < \omega_c$

$$G_{\alpha}(x, \xi, \omega) = -\frac{1}{2\rho_0 c} e^{-i \frac{|x-\xi| \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c}} \frac{1}{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

самое большое

это затмение

?: бесконечные пределы, генераторы (поглощают энергию)

Проверим: если у нас имеется неоднородность в виде источника волны, то у нас нелинейное усиление:  $K(\omega) \omega$ ,  $\tilde{J}(\omega) = M \tilde{S}(\omega)$

$$\text{Тогда: } V_o(x, \omega) = -\omega^2 G_{\alpha}(x, 0, \omega) M \underbrace{U_o(0, \omega)}_{\text{противофаза}} \text{ по назначению}$$

Фильтрующее свойство генера-зумера:

$$\int_a^b f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

(3)

Условие чистого колебания  
массы со струнами:



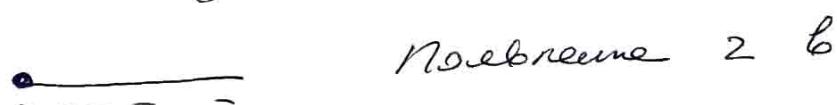
$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x, \omega) = U_0(\omega)$$

Положим в начальном решении  $x = 0$

$$U_0(0, \omega) [1 + \omega^2 G_0(0, 0, \omega) M] = 0$$

$$1 - \frac{\omega^2 M}{(2) \rho c_0 \sqrt{w_c^2 - \omega^2}} = 0$$

Аналогичный результат уже  
был полученearlier,  
но я мог рассмотреть  
помимо склону с массой  
на горе



Пояснение 2 б  
значительное сдвиги в том, что  
меньше рассмотриваемое  
деление промежутоке ( $-\infty < x < \infty$ )

(4)

## 7.2 Примеры волн в различных средах

### 7.2.1 Термоупругие волны

Примеры волн в различных средах

1. Термоупругие волны

Баланс импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho v^2 = 0, \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{или}$$

после дезрегулирования

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x^2} \\ K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho c_v \dot{\theta} = E \alpha \dot{\varepsilon} \end{array} \right. \quad \text{уравнение вибрации}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho c_v \dot{\theta} = E \alpha \dot{\varepsilon} \\ \text{согласно закону сохранения} \end{array} \right.$$

$$a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \dot{\theta} = \gamma \dot{\varepsilon} \quad \text{перенес вибрации}$$

После приведение к дезрегулированию

перемножим это на перемножить  $\tilde{\varepsilon}$   
получим малой величиной, и при  
рассмотрении звуков или звуков преодолевают  
(исключение - получившие изменения)

Если преодолеть вибрации, то  
температура определяется квадратично  
и далее находим волну дезрегулированной  
(распространение звука, преодолеть перенос  
а)

(5)

Что даёт чёткое значение переменной?

Какие физические ограничения

получим вторую производную от температуры в первом уравнении:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} (\eta \dot{\xi} + \dot{\theta})$$

Возьмём первое производное по времени:  
записание термоударного импульса.

Отметим, что в этом случае возможна только при наличии теплоизменности

Если пренебречь  $a^2$ , то второе

уравнение останется  
и уравнение для

сохранит свою форму  
при изменении

поправки на длину

Причина: чем больше

отношение

и одеяло

(6)

## 7.2.2 Плазменные волны

## 2. Плазменные волны

Для описание распространение волн малой амплитуды используется модель однородной плазмы, в рамках которой плазма представляет собой смесь электронов и ионов низкой концентрации, давление которой можно игнорировать ввиду малости.

$$\rho = n k_B T$$

Такое упрощение не означает, что электронное и ионное движение не взаимодействуют.

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i = - \nabla \left( \frac{n_i k_B T_i}{m_i} \right) - \frac{e}{m_i} \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla \vec{v}_e = - \nabla \left( \frac{n_e k_B T_e}{m_e} \right) + \frac{e}{m_e} \nabla \Phi$$

+ упр-е непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0$$

представляет  
протекание  
реакций  
и излучение

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0$$

$$+ \Delta \Phi = - \frac{e(n_i - n_e)}{m_e} - \text{уп-е навески.}$$

Рассмотрим одномерный случай.

Так как  $m_i \gg m_e$ , то будем считать, что ион. неподвижны и все взаимодействия в плазме

(7)

Две малых возмущения:

$$p_e = p_0 + p', \quad n_e = n_0 + n'$$

Изменение давления относительно нейтрального состояния.

$$p_e = p_0 + m_e n' \frac{\partial p_e}{\partial p_0} \quad (p_e = f(p_e))$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial p_0} = v_0^2$$

Тогда уравнение малых возмущений имеет

вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{v_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} n_e$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

представляется в виде уравнений

уравнение по  $x$ , а движение — по  $t$

с учётом вязкости уравнение:

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + w_p^2 n' = 0$$

$$w_p^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e \epsilon_0} - \text{называемая}$$

частота определена  $v_0$ , ищем уравнение

вспомогательное уравнение

$p \sim n^3$  (закон сохранения массы)

$p = n k_B T$  Для определения частоты  $f = 3$

(8)

## 7.2.3 Прямоугольный волновод

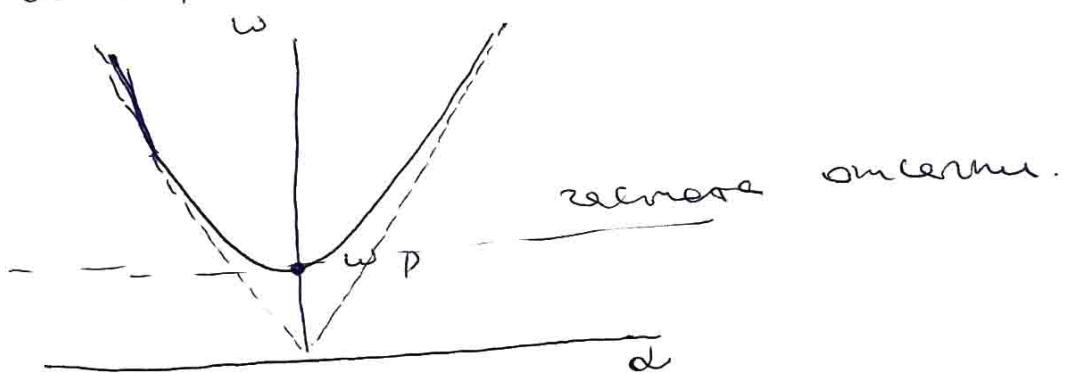
$$\text{Тогда } \frac{\partial \psi}{\partial p_0} = \frac{\partial \psi}{\partial (\lambda n)} = \frac{1}{n} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = j \frac{\psi}{n m_e}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial p_0} = \frac{3 k_B T_e}{m_e}$$

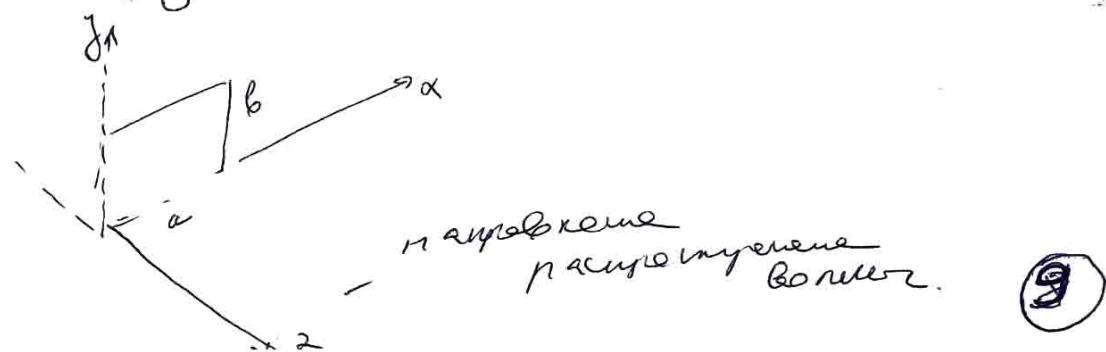
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \omega^2 \psi = 0$$

Оператор квадра-Гордана значит !  
оператор.

Дисперсионное уравнение:



3. Прямоугольный волновод  
Рассмотрим вопрос о прохождении  
электромагнитных волн через  
трубу прямоугольного сечения



Эн/м волну называют  
дл. воле периодом  $z$   
и она должна оставаться в океане  
стремя волна!



Тогда  $E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t - k_x z)}$   
 $\omega = \frac{u}{k_x}$  — простая гармоника.  
 $k_x a = n\pi \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a}$  — первые гармоники.  
 Наша длине волны должна быть равной  
 ближайшему значению:

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k_x^2 E_y \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -k_z^2 E_y$$

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0$$

$$\text{Отсюда } k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{u^2}{a^2}} \quad (\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k^2)$$

$$\omega_c = \frac{uc}{a}$$

( $\omega$ )

Если  $\omega < \omega_c$ , то

$$k_z = \pm i k^1, \quad k^1 = \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$E_y = E_0 \sin k^1 x e^{\pm k^1 z} e^{i \omega t}$$

При частотах ниже  $\omega_c = \frac{ac}{a}$

Более быстрое торможение  
распространяется

меньшее значение  $\Rightarrow$  замедление по времени

меньшее количество энергии  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  замедление по наружному.

(11)

## 8 Лекция 05.04.2022.

### 8.1 Волны в акустических средах

05.04.22. Лекция 8

#### Волны в акустических средах

Акустика в широком смысле слова -

- это наука о звуке, изучающая явления и волны в различных средах от сотовых телефонов до предметов и их взаимодействие с веществом.

Чтобы из собственного опыта понять явление изучения и волны в различных средах, воспользуемся гендерением языка  
(16F<sub>0</sub> ≈ 80 dB кГц)

Рассмотрим модель акустической среды  
Это сплошная среда, однородная и изотропная

Звуковая волна может распространяться и менять свойства среды

Если в некотором месте  
занимает среду возвратное же.  
возвращение, то генератор  
изменяется и приходит в  
этих областях сплошной и приходит в  
изменение. Второе упомянутое изменение  
занимает место генератора, возникающее  
изменение будет называться первое  
возвращение "соседом", и возвращение будет называться  
в среде



(1)

До этого мы рассматривали волны в  
твёрдых средах. Теперь поговорим о  
волнах в газе и жидкости.

При движении в жидкости, воду, газе  
возникает изменение напряжения (стяжки).

Если эти силы пропорциональны, т.е. если они  
могут быть выражены с помощью одного коэффициента,  
то искажение может  
изменяться линейно.

Стяжки (или уги) изменяются линейно, если  
в них не входит в составление членов, то  
и при движении отсутствующем изменение  
напряжения

$$\underline{I} = -pE \quad \text{- гидростатическое давление}$$

(изменение формы не распоряжается)

## ① Упр-е Генкиса

$v_c$  - скорость звука

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (v \underline{E}) = 0$$

где записанное автором

если бы записано правильно, то  $p = m z$

$$\text{и } \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p v) = 0 \quad \text{- записано автором}$$

Нам непонятных членов в правиль

записи ур-е.

②

(2) Ур-е динера

$$P \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla P \right) = - \nabla P + \bar{P} \bar{f} - \text{внешние силы на } e.g. \text{ массы}$$

поглощенные  
и выделяемые

потери

и, значит, более

Ур-е явление неподвижности:

консервативное симметрическое,  $\nabla(PU)$

В равновесии нет в системе диффузии поглощенных плотности и давления малотки (но давление с неизмененным состоянием). В этом случае амплитуда волн стационарных малотки, что их поглощение не влияет на явлении сфер.

Замечание:  $I = -\nabla P E$  звук тону

В газах также не подвижные неподвижные изменения. В твердом неподвижные неподвижные изменения зависят только от давления. При этом неподвижные неподвижные изменения не зависят от давления.

(3) Ур-е

$$P = P(P)$$

Барометрический прогресс

(3)

Таким образом, мы сформулировали  
две общие уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{- давление и масса.} \\ p = p(\rho) \quad \text{- уравнение состояния} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{давление массы + } \rho \vec{v} \end{array} \right.$$

(з акустических уравнений)

Неподвижные.  $p, \rho, \vec{v}$  — в окрестности неподвижных и в уравнения. Имеем замкнутую систему  
Задано акустиками, чтобы задать уравнение, наложим

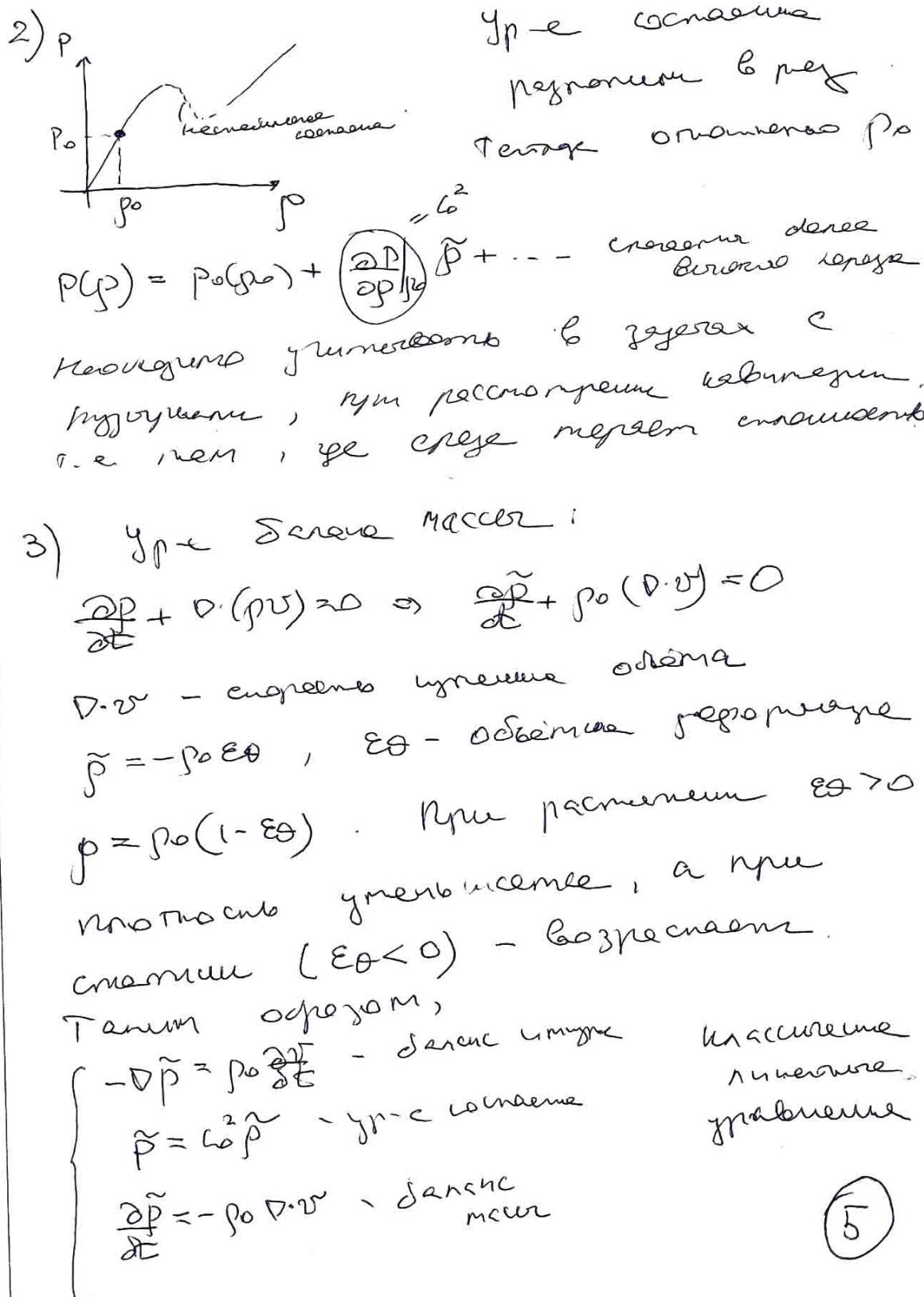
Если исходное равновесное состояние  $(p_0, \rho_0)$ . В этом состоянии среда покоятся  
 $-\nabla p_0 = 0$ . Уравнение баланса массы

выполняется монотонно.  
Предположим, что возмущение малое  
Возмущение  $\tilde{p} = p_0 + \tilde{p}$ ,  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ ,  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \tilde{v}$

$$1) \quad -\nabla(\tilde{p} + p_0) = (p_0 + \tilde{p}) \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{-\nabla \tilde{p} = p_0 \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

$$\cancel{\frac{d\vec{v}}{dt}} = \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

(4)



Два типа уравнения ур-й:  
 силовое (через действие) и кинематическое  
 Возьмём зависимость от левой и  
 правой части первого уравнения

$$\nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{v}) = \rho_0 \frac{d}{dt} \Phi \cdot \tilde{v}$$

с учётом третьего уравнения

$$\Delta \tilde{p} = \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Rightarrow \text{Более упр.-е}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \tilde{p} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = 0} \quad - \text{силовое упр.-е}$$

$$\tilde{p}|_r = \text{загадка Дирихле}$$

Кинематическое ур-е: Введем вместо  
 $v$  склонный потенциал, так что  $\tilde{v} = \nabla \Phi$

Теорема Гельмгольца:  $u = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi$

$\Phi$  - склонный потенциал,  $\Psi$  - векторный  
 потенциал, при этом  $\nabla \Phi$  однозначно  
 за поступательное движение: следим  
 за поступательное движение  $\square \rightarrow \boxed{\square}$ , а  
 $\nabla \times \Psi$  соответствует вращению: изогну-  
 ть изображение горизонта  $\overbrace{\square}^{\sim} \rightarrow \diamond$ .

(6)

В допустимых средах  $\nabla \cdot \vec{U}$  неизменяется, а  
 $\vec{U} = \nabla \Phi$  из баланса масс:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{U} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \Phi, \text{ и}$$

$$\text{с учётом уравнения } \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \Phi$$

$$\Delta \Phi + \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = 0$$

из первого уравнения (данное импульс)

$$-\tilde{p} = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

напоминающее уравнение

Оператор Данаудера

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

иначе  $\Delta = \nabla^2$  - форма в трёхмерном пространстве

$\underline{d} \cdot \underline{z} = dx \cdot x + dy \cdot y + dz \cdot z$ ,  $\underline{d}$  - единица

вектор,  $\underline{z}$  - радиус вектор точки.

$$\text{т.к. } \vec{U} = \nabla \Phi, \text{ то } U_n = \vec{U} \cdot \underline{n} = \nabla \Phi \cdot \underline{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

$U_{\underline{n}} = \nabla \Phi \cdot \underline{n}$  - касательное напряжение

скорости нас не интересует:  $\nabla \Phi = 0$

Сделайте краевое условие  $u/n \Rightarrow$

загоре Неймана.

(7)

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho p_0}} - \text{скорость звука}$$

Произведём разделяя векторы звука

по направлению  $\vec{v}^2$

Ур-е следование

$$PV\delta = \text{const}, \quad f = \frac{C_p}{C_v} - \text{отношение теплоемкостей}$$



$$P = \text{const} \cdot \rho \delta \Rightarrow \frac{P}{\rho \delta} = \frac{P_0}{\rho_0 \delta}$$

$$\frac{dP}{d\rho} \Big|_{P_0, \delta} = \delta \frac{P_0}{\rho_0}$$

Таким образом  $c = \sqrt{\delta \frac{P_0}{\rho_0}} =$

$$= \sqrt{\delta \frac{RT}{M}} \quad (\text{ур-е Менделеева - Клапейrona})$$

В выражении этим соотношением  
использовалась неправда.  
неизвестные

| Газ                          | $C_{sl, m/e}$ |
|------------------------------|---------------|
| Водород                      | 1265          |
| Гелий                        | 965           |
| Азот                         | 334           |
| Водяной пар                  | 331           |
| Кислород                     | 316           |
| Температура ( ${}^\circ C$ ) |               |

| Материал         | $c, m/s$ |
|------------------|----------|
| Водя (20 °C)     | 1490     |
| Этилен (20 °C)   | 1180     |
| Бензин (-262 °C) | 1127     |
| Азот (-156 °C)   | 867      |
| Гелий (-365 °C)  | 180      |

(8)

## 8.2 Поверхностные гравитационные волны

Поверхностные гравитационные волны

При изучении волн в туманости  
некоторые расстояния в гравитации  
зарегистрированы более высокими  
волнами.

Даже если учитывать основные неполные  
модели, что помимо притяжения имеются  
теории, согласно распространению которых  
различие значений где различия  
составляющих волны решим.)

Чтобы рассмотреть более интересные  
системы, в которых учитывается  
зависимость акселерации от  
его интенсивности.

Однако спрайт, который зависит  
от скорости изменения от земли волн и  
его интенсивности

Мы не будем учитывать различия  
зарегистрированных волн рассмотрим  
гравитационные волны, значение

(9)

которых определение ведомоственное  
и между интересов тюнисии и её  
стремлением вернуться к своему  
силы тюнисии в составе  
участников разделения  
Более ~~значительных~~ тюнисии, ~~наличие~~  
который в разделении состоящем  
изменяется с увеличением  
перегородки - это введение  
волновых - это введение  
разделяющих волн  
стремлений тюнисии ~~антидраг~~  
(они же)

Существование слоя в  
жидкости и гидроакустической среды разделения  
групп или участников разделения,  
наиболее менее среда  
находится выше более позади  
также плотность изменяется различными  
образом при переходе через поверхность  
разделения тунисии и т.д. Воздушное  
разделение разделения состоящем  
заполнено разделением в виде поверхности  
представляющее в виде поверхности  
разделяющих волн, которые

(10)

не могут распространяться зону от извержения: они удаляются не зоне, так как не расление огнем лучше.

Мы рассмотрим первоначальное разделение зон на зону граничное между водой и воздухом и дает преодолеть силами поверхности напряжение.

Картина раздела зону напряжения особенно необычна: зона воздуха разделена приступательно по определенным линиям, т.е. мы имеем зоны со смешанными и непрерывными зонами.

Литература:

1. Диссертация Лайхиль. Воды в эрозионных каналах. 1928 г.

2. Георг Ламб. Гидродинамика, 1932 г.

(11)

## 9 Лекция 12.04.2022.

### 9.1 Краткое повторение материала о волнах в акустических средах

12.04.22 Лекция 9

Вспомним материал предыдущей лекции.

На основе базисных уравнений:

$$-\nabla p = p \frac{dV}{dt} \quad -\text{закон импульса}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (pV) = 0 \quad -\text{закон massa}$$

$$+ \gamma p \cdot e \quad \text{сжатие}$$

$$P = P(p)$$

мы получим классическое линейное  
уравнение вибраций среды относительно  
исходного равновесного состояния  $P_0, \rho_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \tilde{p} = P_0 \frac{\partial V}{\partial t} \\ \tilde{p} = C^2 \tilde{V}, \quad C^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} / \rho_0 \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = -P_0 D \cdot \nabla \end{array} \right.$$

Далее это уравнение сведется к  $\tilde{V} \sim t^{1/10}$

однако это гипотеза:

$$\text{Следовательно: } \Delta \tilde{p} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0$$

Гр. упр.  $\tilde{p}|_{r=0} = \Phi(t)$  - звуковая динамика

Кинематическое

$$\Delta \tilde{V} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} = 0$$

$$V_r = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}|_{r=0} = \Phi'(t) - \text{звуковая кинематика}$$

из  $V \cdot \nabla V$  - изменение звука скорости



## 9.2 Поверхностные гравитационные волны на границе между водой и воздухом

при условии отсутствие сихревого  
движения в среде.

На основе этих урнчих же гипотез  
одинаково тих волн, а именно,  
поверхностные гравитационные волны  
на границе между водой и воздухом.  
Их движение определяется изменением  
взаимодействия между иерархиями  
и её стремлением вернуться  
к исходному состоянию течения в  
новом состоянии равновесия.  
составление устойчивого равновесия.

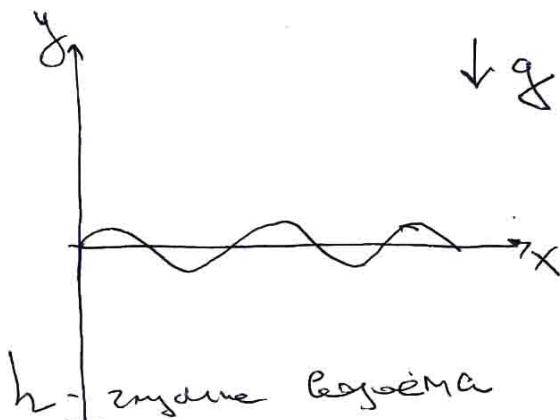
Если движение неизменное, то  
 $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ ,  $v = \nabla \varphi \Rightarrow$

$$\Delta \varphi = 0 \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$  - условие на неприводимость  
поверхности

Чтобы найти условие на  
свободной поверхности возьмем  
нашую координату на невозмущенном  
уровне и направим ось Oz  
вертикально вверх

(2)



запишем ур-е для  $\eta$  в проекции на вертикальную ось:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - g$$

После интегрирования с учётом начального условия  $\eta = \varphi$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{P}{\rho} - gy + C(t) \quad \text{- начальное изображение}$$

На поверхности:  $y = \eta$

$\eta$  - возмущение поверхности над точкой  $(x_0, 0)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{P}{\rho} - gy + \frac{P}{\rho} \cdot \text{Видор } C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \text{при } y = \eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

После дифференцирования 1 ур-е по времени имеем

(3)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

в амплитуде  
затухания (y=0) начальное условие  
составляется на небольшую амплитуду  
изменения

Так как для всех значений  $x$  уравнение  
условия ограничено, то оно  
нормировано

$$y = f(y) \cos(\omega t - dx)$$

$$y \text{ удовлетворяет } y'' - d^2 f = 0$$

$$\Rightarrow f'' - d^2 f = 0$$

Решение + граничные условия  
самостоятельно в конце  
уравнение

$$f = A e^{dy} + B e^{-dy}$$

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0 \Rightarrow$$

$$A e^{-dh} - B e^{dh} = 0$$

$$\boxed{A e^{-dh} - B e^{dh} = 0}$$

(4)

$$2. \quad \ddot{\varphi} + g \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}} \Big|_{y=0} = 0$$

$$-(A+B)\omega^2 + gd(A-B) = 0$$

$$\begin{cases} (gd - \omega^2)A - B(\omega^2 + gd) = 0 \\ e^{-\alpha h}A - Be^{\alpha h} = 0 \end{cases}$$

Получим дисперсионное уравнение  
самостоятельно в виде

$$\Delta = 0 \Rightarrow (gd - \omega^2)e^{\alpha h} = (\omega^2 + gd)e^{-\alpha h}$$

$$\omega^2(e^{\alpha h} + e^{-\alpha h}) = gd(e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{gd} \sqrt{tanh(2h)}$$

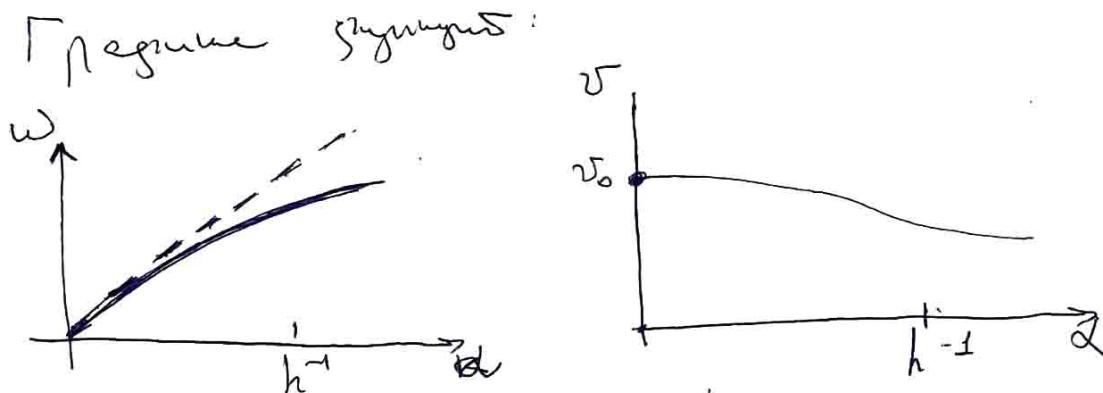
Если обозначить  $\sqrt{gh} = w_0$  — константа, то

$$\omega = w_0 d \left( \frac{tanh(2h)}{2h} \right)^{1/2}$$

$$v = \frac{\omega}{2} = w_0 \left( \frac{tanh(2h)}{2h} \right)^{1/2} -$$

— вязкое сопротивление

(5)



Если  $\omega h \ll 1$ , то  
 $\operatorname{th} \omega h \approx \omega h \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = v_0 \Delta$$

На первом этапе гипербола  
имеет вид симметричной

Другое время:  
 $\Delta h \gg 1$  второй этап волны

$$\omega = \sqrt{g\Delta}$$

$$\operatorname{th} \omega h \approx 1$$

Волна гипербола волна излучения  
имеет вид симметричной

⑥

Вернёмся к определению  $f$ :

Если подождем  $Ae^{-\alpha h} = Be^{\alpha h} = \frac{1}{2}C$ , то

$$\begin{aligned} f &= Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y} = \\ &= \frac{1}{2}C(e^{\alpha(h+y)} + e^{-\alpha(h+y)}) = C \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}C \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{g} C \omega \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \sin(\omega t - \alpha x) =$$

$$= a \sin(\omega t - \alpha x)$$

Выражение  $C$  разы а, имеем:

$$C = \frac{ag}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{ag}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

Можно найти синусоиду:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{ag \alpha}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \sin(\omega t - \alpha x)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{ag \alpha}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{sh}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

Эпликация

(7)

## 10 Лекция 19.04.2022.

### 10.1 Продолжаем разговор о поверхностных волнах

19.04.22. Лекция 10.

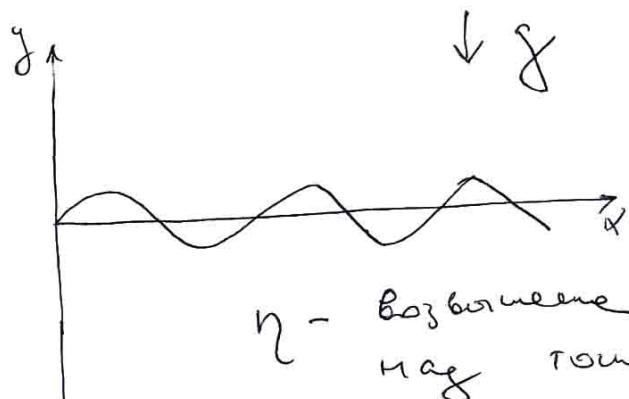
Продолжим разговор о поверхностных волнах на границе раздела  $\delta y$ .

Схема

Основное предположение

1. Несжимаемое тело
  2.  $\Delta \Sigma = \nabla \Psi$
- $\Delta \Psi = 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$



$\eta$  - возмущение поверхности  
наг тонк (x, 0)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$\Psi = C e^{i k y} e^{i(\omega t - a x)}$$

Глубина тишины неограничена

(1)

## 10.2 Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей

Рассмотрим колебание поверхности раздела двух расположенных друг за другом жидкостей.

Движение

$$\varphi = C e^{\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

$$\varphi' = C' e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

относится к верхней жидкости.

$$\eta = a e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Rightarrow i\omega a = \alpha C = -\alpha C'$$

Пр-е Эйлера после интегрирования по оси  $y$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - g y \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = -\frac{P'}{\rho'} - g y \end{cases}$$

На поверхности:

$$\begin{cases} P = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g \eta \\ P' = -\rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - g \eta \end{cases}$$

Приравниваем давление, получаем:

(2)

$$-\rho C i\omega - \rho g a = -\rho' C' i\omega - \rho' g a$$

$$\rho (C i\omega + g a) = \rho' (C' i\omega + g a)$$

$C$  учётом условия  $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow i\omega a = dC = -dC'$$

$$-\rho \frac{\omega^2 a}{2} + \rho g a = \rho' \frac{\omega^2 a}{2} + \rho' g a$$

$$\frac{\omega^2}{2} (\rho' + \rho) = g (\rho - \rho')$$

$$\omega^2 = \frac{g(\rho - \rho')}{\rho + \rho'}$$

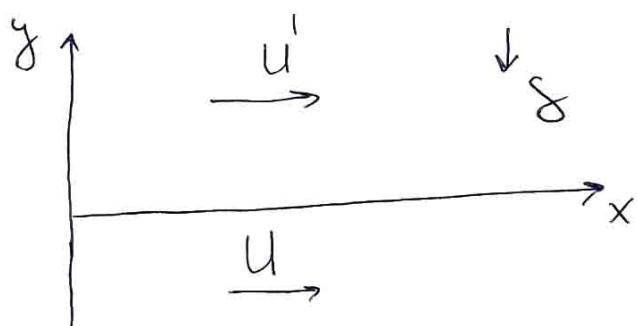
$$C_o^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} = \frac{g}{2} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$$

Таким образом, присутствие верхней эмульсии вызывает уменьшение скорости распространения волн.

(3)

### 10.3 Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей, которые движутся друг над другом

Предположим, что две турбулентные  
плотности  $\rho$  и  $\rho'$  движутся  
одна над другой со скоростями  $u$  и  $u'$   
параллельными оси  $x$



Нужно учесть конвективный производитель

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \begin{matrix} \text{условие} \\ \text{на непроницаемость} \end{matrix}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}$$

$$\varphi = ux + \varphi_1, \quad \varphi' = u'x + \varphi'_1$$

Упр-е динамика

$$\frac{P}{\rho} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - gy$$

аналогично для верхней турбулентности

(4)

Из непрерывности <sup>изменения</sup>  
изменения

$$\begin{aligned} \Rightarrow P \left[ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + g \eta \right] = \\ \Rightarrow P' \left[ \frac{\partial \Phi'_1}{\partial t} + U' \frac{\partial \Phi'_1}{\partial x} + g \eta \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 = C e^{i \omega t - i \alpha x} \\ \Phi'_1 = C' e^{-i \omega t} e^{i (U t - \alpha x)} \\ \eta = a e^{i (U t - \alpha x)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + U' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi'_1}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i \omega a - U i \alpha d = dC \\ i \omega a - U' i \alpha d = -dC' \end{cases}$$

$$\begin{cases} i \alpha (\omega - U) = dC \\ i \alpha (\omega - U') = -dC' \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Вернёмся к сильному уравнению

(5)

$$\rho [i(\omega - \alpha u) c + g a] = \rho' [i(\omega - \alpha u') c' + g a]$$

Последнее выражение где  $c \neq c'$

$$\rho [i(\omega - \alpha u) \frac{i\alpha(\omega - \alpha u)}{\alpha} + g a] =$$

$$= \rho' [-i(\omega - \alpha u') \frac{i\alpha(\omega - \alpha u')}{\alpha} + g a]$$

$$\rho \left[ -(\omega - \alpha u)^2 \frac{g}{\alpha} + g a \right] =$$

$$= \rho' [(\omega - \alpha u')^2 \frac{g}{\alpha} + g a]$$

$$g \alpha (\rho - \rho') = \rho (\omega - \alpha u)^2 + \rho' (\omega - \alpha u')^2$$

Можно приравнять к нулю  $\eta^2$ -е  
отношение  $\omega$  и  $\omega'$   
и спереди оно же  $\eta^2$  вспомогательное

$$(\rho' + \rho) \omega^2 - 2 \omega \alpha [\rho u + \rho' u'] + \alpha^2 (u'^2 + u^2) - g \alpha (\rho - \rho') = 0$$

(6)

$$C_0 = \frac{\omega}{d} = \frac{pu + p'u'}{p+p'} = \left\{ \frac{g}{d} \frac{p-p'}{p+p'} - \frac{pp'}{(p+p')^2} (u-u')^2 \right\}^{1/2}$$

$$C_0 = \bar{c} \pm d$$

$$C^2 = C_0^2 - \frac{pp'}{(p+p')^2} (u-u')^2$$

$C_0$  — скорость волн в отсутствии течения

Значение  $\omega$  ~~для~~ ~~всех~~ ~~многих~~,

$$\text{если } (u-u')^2 > \frac{g}{d} \frac{(p-p')(p+p')}{pp'} = \\ = \frac{g}{d} \frac{(p^2-p'^2)}{pp'}$$

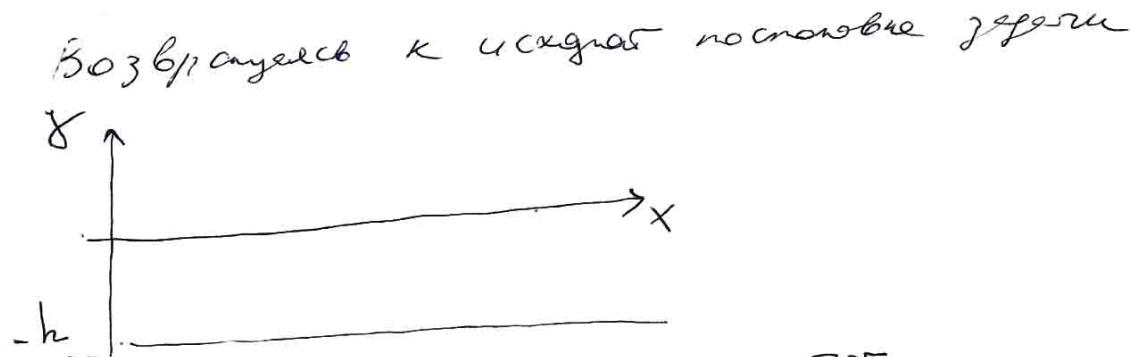
Согласно при достаточно больших  $d$  или при достаточно малых  $p$  и  $p'$  можно извлечь из уравнения

если  $p=p'$  то значение  $\omega$  для всех волн

настолько велико, что все они волн.



## 10.4 Волны на границу между водой и воздухом без учёта силы тяжести (решение Эйлера)



$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \varphi = \nabla \psi$$

Но задача учитывает силу тяжести.

$$\varphi = f(y) e^{i(\omega t - kx)}$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \text{уравнение Эйлера}$$

но не интегрируем:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad \text{На свободной поверхности } \rho = \rho_0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$1. \quad \text{На свободной поверхности: } \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow f \Big|_{y=0} = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0$$

$$f'' + \left( \frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 \right) f = 0 \quad \text{или}$$

$$f'' - j^2 f = 0, \quad j^2 = \frac{1}{c_0^2} (k^2 c_0^2 - \omega^2)$$

$$f = A \sin jy + B \cos jy$$

$$f \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

(8)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial j} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow \sin j h = 0$$

Если  $j$  - вещественное, то решений нет

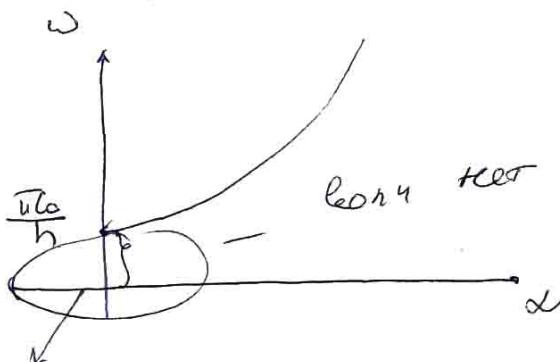
Следовательно

$$j = \frac{1}{C_0} \sqrt{d^2 - \omega^2}$$

$$j - \text{максимум} \quad \cos j h = 0 \Rightarrow j h = \frac{\pi}{2} (2n+1)$$

$$j^* = \frac{1}{C_0} \sqrt{\omega^2 - d^2}$$

$$\omega^2 = \left( \frac{\pi(2n+1) C_0}{h} \right)^2 + d^2$$

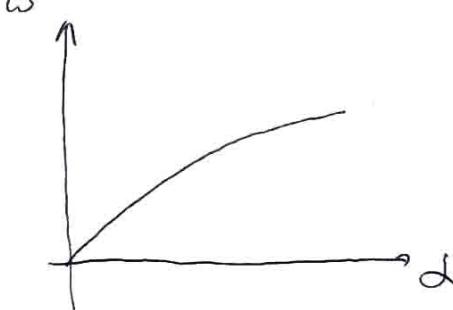


без учета статического вращения

с учетом

$$\omega = \sqrt{gd}$$

дисперсионное вращение



(9)

# 11 Лекция 26.04.2022.

## 11.1 Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле

26.04.22 Лекция 11

$\Delta$  вида уравнений

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad - \text{силовое ур-е}$$

$$P|_r = \varphi(t) \quad - \text{запасе Дирихле}$$

$$\underline{U} = \nabla \varphi \quad - \text{кинемат. ур-е}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad - \text{кинемат. ур-е}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}|_r = \dot{\varphi}(t) \quad - \text{запасе Неймана}$$

Перейдём в сферическую систему координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad - \text{оператор Планка}$$

Оставим зависимость только от  $r$

$$\text{Тогда } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}$$

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \varphi_1(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r} \varphi_2(t + \frac{r}{c})$$

Амплитуда убывает пропорционально расстоянию, чтоivo вогдано расширением поверхности фронта.

(1)

$$\varphi = \frac{1}{2} \varphi_1 (t - \frac{\xi}{c})$$

$$\rho = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\rho}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\rho}{c} \varphi_1'$$

$$\xi = t - \frac{\xi}{c}$$

$$v = \nabla \varphi = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi_1 =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\varphi_1'}{c} - \frac{1}{r^2} \varphi_1 =$$

$$= +\frac{1}{2} \frac{\rho \xi}{c \rho} + \frac{1}{2\rho} \int \rho dt =$$

$$= \frac{\rho}{2c} + \frac{1}{2\rho} \int_1^t \rho dt$$

занчее none

днчнее none

$$\sigma = -\rho c v - \text{дна сортухе дна}  
получен ранее$$

Червое слагаемое определяет скорость  
занчущ в занчече none, которое  
определяется за первое время.  
Второе слаг., удобствует с расщеплением  
как  $1/2^2$  заничущем близи источника  
и преобразуется так на дополн.  
расщеплениех

(2)

Пусть источник создаёт гармоническую волну

$$\varphi_F = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - dr)}$$

$$\rho = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\omega \rho \varphi$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{(1 + idz)}{z} \varphi$$

$$\frac{\rho}{v} = \frac{zi\omega\rho}{1 + idz} = \frac{zcd\rho i}{1 + idz}$$

Самоизменение волны в земной коре

$$\tilde{z} = \frac{i}{1 + idz} = \frac{i(1 - idz)}{1 + d^2 z^2} = \frac{dz + i}{1 + d^2 z^2}$$

$$|\tilde{z}| = \frac{\sqrt{d^2 z^2 + 1}}{dz^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2 z^2}}$$

$$\frac{\rho}{v} = \frac{zcd\rho e}{\sqrt{1 + d^2 z^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1}{dz} = \arctan \frac{1}{zcdz}$$

$dz \gg 1$  соотношение между

между  $\rho$  и  $v$  соответствует

плоской волне (затухание ноль)

Из-за этого неизбежна волна в зоне.

(3)

$z = pc -$  акустическое сопротивление  
среды (акустический импеданс)

$$z = pc \frac{d^2 z^2}{1 + d^2 z^2} + i \frac{pc}{1 + d^2 z^2}$$

В отличие от поглощения звука

импеданс имеет комплексный вид,  
что указывает на наличие фазового

угла между  $p$  и  $z$

Следуя по правилу между сопротивлением и  
скоростью одновременно имеется, что  
большее значение кроме волнов  
сжатия имеется также нормальное  
сжатие и вытеснение среды.

Нормальное сжатие в горизонте

реактивное сопротивление

$$x = \operatorname{Im} z = w m_s, \text{ где}$$

$$m_s = \frac{pc}{1 + (d\Gamma)^2}$$

масса на ед.  
площади 6 см.  
на верхности

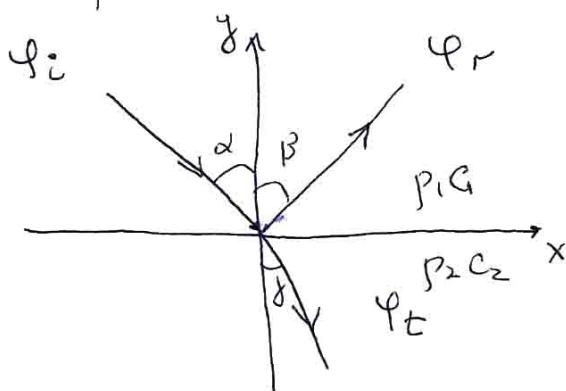
Нормальное сопротивление  
среды (присоединённая масса)

(4)

## 11.2 Наклонное падение волны

### Наклонное падение волн

Если акустическая волна встречает на пути распространения преломляющее, то часть зеркальной волны отражается, а часть проходит во вторую среду таким образом однажды падая на волны: падающие, отраженные и преломленные.



Прямое зеркальное падение на плоскую поверхность  $y=0$ . При этом однажды отражаются  $\Phi_r$  и преломляются  $\Phi_t$  волны.

$$\Phi = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\Phi_i = A_i e^{i(\omega t - k_1(x \sin \alpha - y \cos \alpha))}$$

$$\Phi_r = A_r e^{i(\omega t - k_1(x \sin \beta + y \cos \beta))}$$

$$\Phi_t = A_t e^{i(\omega t - k_2(x \sin \gamma + y \cos \gamma))}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\Sigma} = k_x x + k_y y = k (x n_x + y n_y)$$

$$\vec{k} = \frac{\omega \vec{n}}{c}$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

(5)

На плоскости  $y=0$  должны  
выполняться граничные условия

$$\rho_2 (\varphi_i + \varphi_r) \Big|_{y=0} = \rho_2 \varphi_t \Big|_{y=0} \quad \text{непрерывность}\newline \text{закономерности}$$

$$\frac{\partial (\varphi_i + \varphi_r)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Непрерывность нормальной комп. скорости

Поступательное движение поступательное  
и пронзющее движение и суперпозиция  
получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_2 A_i e^{-id_1 x \sin \alpha} + \rho_2 A_r e^{-id_1 x \sin \beta} = \rho_2 A_t e^{-id_2 x \sin \gamma} \\ d_1 \cos \alpha A_i e^{-id_1 x \sin \alpha} - d_1 \cos \beta A_r e^{-id_1 x \sin \beta} = d_2 \cos \gamma A_t e^{-id_2 x \sin \gamma} \end{array} \right.$$

Умножим эти равенства  
условием бордиста при локальных  
координатах при  $x$  соприка-  
савшись огнивами.

Равенство имеет место только при  
условии равенства коэффициентов

$$d_1 \sin \alpha = d_1 \sin \beta = d_2 \sin \gamma \Rightarrow$$

$$\boxed{d = \beta, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{c_1}{c_2}}$$

(6)

Известные в оптике зоны —  
отделение и преломление  
С учётом данных соотношений  
системе уп-я принципиально бы

$$\begin{cases} \rho_1 (A_i + A_r) = \rho_2 A_t \\ k \rho_1 (A_i - A_r) \cos \alpha = d_2 A_t \cos f \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r_\phi &= \frac{A_r}{A_i} = \frac{\rho_2 c_2 \cos \alpha - \rho_1 q \cos f}{\rho_2 c_2 \cos \alpha + \rho_1 q \cos f} \\ t_\phi &= \frac{A_t}{A_i} = \frac{2 \rho_2 c_2 \cos \alpha}{\rho_2 c_2 \cos \alpha + \rho_1 q \cos f} \end{aligned}$$

В случае нормального падения:

$$r_h = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = -\frac{1-q}{1+q}, \quad q = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$$

$$t_n = \frac{2 \rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{2q}{1+q}$$

Эти соотношения дают получение  
параллельных

(7)

## 12 Лекция 17.05.2022.

### 12.1 Повторение материала о волнах в сферической СК

17. 05. 22. Лекция 12

Сферическая система координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\partial}{r\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

- оператор Лапласа

Если  $\psi = \psi(r, t)$ , то  $\nabla^2 =$

Деноминатор имеет вид

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2}$$

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} \psi_1(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r} \psi_2(t + \frac{r}{c})$$

В сущности гармонический волне

$$\psi = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - dr)}$$

$$P = -P \frac{\partial \psi}{\partial r} = -i \omega P \psi$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\left(\frac{1+idr}{2}\right) \psi$$

$$\frac{P}{v} = \rho c \cos \varphi e^{i\varphi} = \rho c \frac{dr}{\sqrt{1+d^2r^2}} e^{i\varphi}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1}{dr}$$

$\omega_2 \gg \omega_1 \Rightarrow$  большее зоне

$P = \rho c v$  дальше соотношение  
составляется между волне

①

## 12.2 Энергия звуковых волн

Энергия звуковых волн

При распространении звуковой волны в упругой среде каждая единица объема среды обладает определенным количеством энергии. Покажем, что эта энергия равна сумме кинетической энергии колебательной волны и потенциальной энергии, обусловленной упругим деформированием среды.

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = - \nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

Выполним наложение

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho$$

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = - \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \quad (*)$$

Упростим выражение

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = - \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\text{Упр. с основ. } \rho = c^2 \rho_0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{v} = - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$$

Тогда упр. с (\*) применим к

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{P}^2}{2\rho_0 c^2} \right) = - \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v})$$

(2)

Чтобы упростить формулу второго спосаба, рассчитаем работу, затрачиваемую избыточным давлением  $\sigma/p$  при разогреве объема  $V_0$  на величину  $dV$ .

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{dV}{V_0} \Rightarrow dV = -V_0 \frac{dp}{p_0} = -\frac{V_0 dp}{6^2 p_0}$$

$$dA = p dV = -\frac{V_0}{6^2 p_0} p dp$$

$$A = - \int_0^P \frac{V_0}{6^2 p_0} p dp = -\frac{V_0}{26^2 p_0} P^2$$

Следовательно, второе спосабе есть  
измененное значение  $\sigma$ -работы.

Тогда  $W = p_0 \frac{\Delta V^2}{2} + \frac{P^2}{2 \rho g c_s^2}$  — площадь  
закрученной поверхности

Для этого вони  $p = p_0 \cos \varphi$  и

$$W = p_0 \varphi^2 = \frac{P^2}{\rho g c_s^2}$$

$$\int_V W dV = E - \text{нормальное значение в объеме } V$$

$p \Delta V = Q$  — величина потока энергии через единичную поверхность (площадь нормаль к направлению потока), наименьшее значение которой

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int_S Q_n dS$$

— величина потока  $Q$  через замкнутую поверхность

(3)

1) поток энергии звуковых волн означает  
с некоторыми начальными величинами, наше  
интенсивность

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T Q dt \quad \left( \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} \right)$$

One гармоническая волна

$$p = p_m \cos \omega t, \quad v = v_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$Q = p v = \frac{1}{2} p_m v_m \cos \varphi + \frac{1}{2} p_m v_m \cos(2\omega t - \varphi)$$

Начальное и конечное значение

$$J = \frac{1}{2} p_m v_m \cos \varphi$$

Интенсивность звука в начальный момент времени:  
( $\varphi=0, \frac{p_m}{v_m} = p_0 c$ )

$$J = \frac{1}{2} \frac{p_m}{p_0 c} = \frac{1}{2} p_0 c v_m^2$$

В спрятанной зоне:

$$p_m = \frac{w p_0 A}{r} = \frac{p_0 c d A}{r}$$

$$v_m = \frac{dA}{r \cos \varphi}$$

$$J = \frac{1}{2} p_0 c_o \frac{d^2 A}{r^2}$$

Однако пропорционально квадрату расстояния

$$J = \frac{1}{2} p_0 c o v_m^2 \cos^2 \varphi$$

Интенсивности можно и упростить  
величина сблизится при  $\cos \varphi \rightarrow 1$ ,  
т.е. в конической зоне.

(4)