

# Содержание

<b>1 Лекция 08.02.2022. Раздел 1. Механика многокомпонентных сред</b>	<b>4</b>
1.1 Материальная производная. Многокомпонентные среды. Баланс массы . . . . .	4
1.2 Эффективные плотность и скорость . . . . .	7
1.3 Материальное и пространственное описание . . . . .	8
1.4 Особенности при рассмотрении многокомпонентных сред . . . . .	10
<b>2 Лекция 15.02.2022.</b>	<b>11</b>
2.1 Осреденение скоростей и перемещений (геометрических и кинематических величин) . . . . .	11
2.2 Баланс количества движения для двухкомпонентной среды . . . . .	13
2.3 Переход к балансу количества движения на макроуровне . . . . .	15
<b>3 Лекция 22.02.2022.</b>	<b>16</b>
3.1 Балансы массы и количества движения двухкомпонентной среды с источниковоими членами . . . . .	16
3.2 Постановка задачи: жидкость с пропантом . . . . .	17
<b>4 Лекция 01.03.2022.</b>	<b>20</b>
4.1 Постановка задачи: жидкость с пропантом (продолжение) . . . . .	20
4.2 Баланс энергии в общем виде . . . . .	23
4.3 Баланс энергии для одной какой-либо фазы . . . . .	25
<b>5 Лекция 15.03.2022. Раздел 2. Среды с вращательными степенями свободы</b>	<b>26</b>
5.1 Баланс энергии для двухкомпонентной среды . . . . .	26
5.2 Различие между спинорным движением и вращением окрестности среды как твёрдого целого . . . . .	29
<b>6 Лекция 22.03.2022.</b>	<b>33</b>
6.1 Тензоры инерции твёрдого тела . . . . .	33
6.2 Движение неклассической частицы по инерции . . . . .	36
<b>7 Лекция 29.03.2022.</b>	<b>39</b>
7.1 Баланс массы, количества движения и кинетического момента для микрополярной среды . . . . .	39
7.2 Баланс энергии для микрополярной среды . . . . .	46
<b>8 Лекция 05.04.2022.</b>	<b>48</b>
8.1 Линейная теория микрополярной среды . . . . .	48
8.2 Инерционные и кинематические характеристики микрочастицы при пространственном описании . . . . .	53
<b>9 Лекция 12.04.2022.</b>	<b>57</b>
9.1 Размышления о способах составления определяющих соотношений в различных ситуациях (нагрев, давление, ориентационная поляризация) . . . . .	57

<b>10 Лекция 19.04.2022.</b>	<b>63</b>
10.1 Уравнения Максвелла . . . . .	63
10.2 Связь уравнений Максвелла с уравнениями механики . . . . .	73
<b>11 Лекция 26.04.2022. Раздел 3. Только трансляционные степени свободы (аналогично разделу 1), но откажемся от предположения аддитивности по массе</b>	<b>78</b>
11.1 Вывод волнового уравнения Максвелла . . . . .	78
11.2 Закон сохранения массы и баланс плотности распределения числа частиц для однокомпонентной среды . . . . .	78
11.3 Баланс энергии при введении плотности распределения числа частиц, как независимой переменной . . . . .	80
<b>12 Лекция 17.05.2022.</b>	<b>82</b>
12.1 Приведённое уравнение баланса энергии. Вариант 1 . . . . .	82
12.2 Приведённое уравнение баланса энергии. Вариант 2 . . . . .	86
<b>13 Лекция 24.05.2022.</b>	<b>89</b>
13.1 Приведённое уравнение баланса энергии. Вариант 3 . . . . .	89
13.2 Пример – ионизация газа . . . . .	89

# Рациональная механика сплошной среды

## Конспект лекций

Муравцев А.А.<sup>1</sup>      Вильчевская Е.Н.<sup>2</sup>

29 мая 2022 г.

---

<sup>1</sup>конспектирует; email: almuravcev@yandex.ru

<sup>2</sup>лектор, Высшая школа теоретической механики, Санкт-Петербургский Политехнический университет. Дополнительные материалы к лекциям [доступны по ссылке](#).

# 1 Лекция 08.02.2022. Раздел 1. Механика многокомпонентных сред

## 1.1 Материальная производная. Многокомпонентные среды. Баланс массы

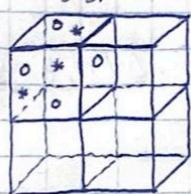
### (1) Мех-ка многокомпонентных сред

08.02.2022

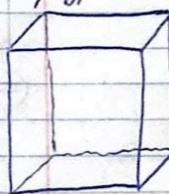
$$\rho = \frac{M}{V}$$



мезоурядец



макроурядец



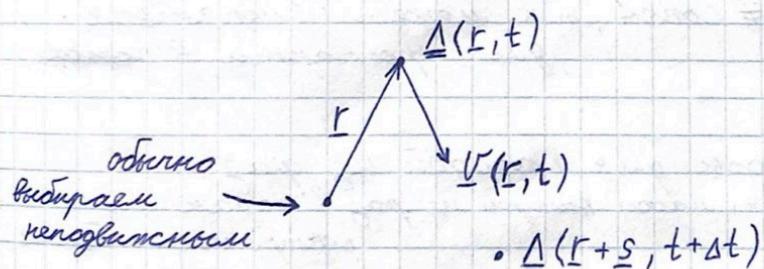
$V_*$  (масштаб, при котором средние  $x$ -ки не зависят от объема)

только после этого можно исп-ть континуальную теорию.

Пр-дя по пр-ву = изменение  $x$ -к при переходе от одного объема к другому

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}$$

Пр-дя по времени = изм-ие материальных св-в с течением времени



$$\frac{\delta \underline{\Delta}}{\delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{\Delta}(r + \Delta r, t + \Delta t) - \underline{\Delta}(r, t)}{\Delta t} \quad \text{⇒}$$

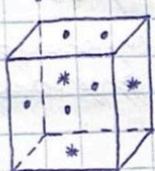
1

$\Delta(\underline{r} + \underline{s})$ 

$$\underline{\Delta}(\underline{r} + \underline{s}, t + \Delta t) = \underline{\Delta}(\underline{r}, t + \Delta t) + \underline{s} \cdot \nabla \underline{\Delta}(\underline{r}, t + \Delta t)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\underline{\Delta}(\underline{r}, t + \Delta t) - \underline{\Delta}(\underline{r}, t)}{\Delta t} + \underline{V} \cdot \nabla \underline{\Delta}(\underline{r}, t + \Delta t) \right] =$$

$$= \frac{d\underline{\Delta}}{dt} + \underline{V} \cdot \nabla \underline{\Delta}(\underline{r}, t)$$

*i-компонент.*

$$\rho_i = \frac{M_i}{V} = \left( \frac{M_i}{V_i} \right) \frac{V_i}{V}$$

 $\rho_i^*$  (истинная  $m-m$ )объемная (эфективная)  $m-m$ 

Важный момент! Часто при расчётах  $\rho$ -и  $V$ -и  $\rho$  и  $V$  с течением времени изменяются, т.е.  $\rho_i^* = \text{const}$ , но при этом

$\rho_i \neq \text{const}$ , т.к. масса изменяется  
даже при постоянстве  $V$  в ячейке

Баланс массы для каждой из ячеек:

(как изменяется масса каждой из ячеек в зависимости от времени)

контрольной обёма

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_V \rho_i dV}_{\substack{\text{масса ячеек} \\ i \in \text{объём } V}} = - \oint_{\partial V} \underline{n}_i \cdot \underline{V}_i \rho_i dS = - \int_V \nabla \cdot (\underline{V}_i \rho_i) dV$$

приток/отток массы

$$\int_V \left[ \frac{d\rho_i}{dt} + \nabla \cdot (\underline{V}_i \rho_i) \right] dV = 0$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \nabla \cdot (\underline{V}_i \rho_i) = 0$$

$$\frac{\delta_i \rho_i}{\delta t} = \frac{d\rho_i}{dt} + \underline{V}_i \cdot \nabla \rho_i$$

$$\frac{\delta_i \rho_i}{\delta t} + \rho_i (\nabla \cdot \underline{V}_i) = 0$$

Хорошее скажут, что  $\nabla \cdot \underline{V}_i = 0$ , если не-тв

*нестационарна, но НЕ  
 $\rho_i = \text{const}$  (зависит от времени в обёме,)  
 которая может изменяться  
 со временем)*

Просуммируем по фазам:

$$\sum_i \frac{d\rho_i}{dt} + \sum_i \nabla \cdot (\underline{V}_i \rho_i) = 0$$

*(потом изменить  
 порядок суммирования и дифференциро-  
 вания)*

$$\frac{d \left( \sum_i \rho_i \right)}{dt} + \nabla \cdot \left( \sum_i \underline{V}_i \rho_i \right) = 0$$

*(на макроуровне)  
 сложим  
 капиллярные (разы)*

*(баланс массы для всего обёма  
 на макроуровне)*

Как определить не-тв и ск-тв на макроуровне?

$\rho, \underline{V}$  - ? Данные баз-се ЗСМ:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\underline{V} \rho) = 0 \quad \text{(на макро-уровне)}$$

## 1.2 Эффективные плотность и скорость

Справиваясь на макро и макроуровнях, получаем:

$$\rho \underline{V} = \sum_i \rho_i \underline{V}_i , \text{ т.е.}$$

эффективная ск-ть на макроуровне:

$$\underline{V} = \frac{1}{\sum_i \rho_i} \sum_i \rho_i \underline{V}_i \quad \left( \begin{array}{l} = \text{бароцентрическая} \\ \text{ск-ть} \\ \text{ск-ть центра масс} \end{array} \right)$$

и эффективная м-ть на макроуровне:

$$\rho = \sum_i \rho_i$$

отступление

центр масс:

$$\underline{r}_c = \frac{1}{\sum_i M_i} \sum_{i(t)} M_i \underline{r}_i$$

(здесь  $i$  - это к-во частич, которые находятся в заданном объёме в данный момент времени. их к-во может изм-ся со временем)

Покажем на пальцах, что ск-ть яв-ия центра масс  $\neq$  бароцентрической ск-ти.

Показат пр-е характ-ен изменение ск-ти в данной точке наблюдения.

В материальном описание следят за одной конкретной точкой  $\Rightarrow$  материальная пр-а

### 1.3 Материальное и пространственное описание

согласует с нашей пр-ой.

В материальном описании:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \underline{V} \text{ (определение ск-ти)}$$

В пространственном описании:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta t} = \frac{d\Gamma}{dt} + \underline{V} \cdot \nabla \underline{r}$$

$\downarrow$   
0  
(радиус-вектор  
точки  
наблюдения  
неподвижен)

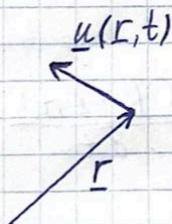
$$\frac{\delta \Gamma}{\delta t} = \underline{V} \quad (\text{это не определение, а  
просто тождество})$$

$$\nabla = \underline{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\underline{\Gamma} = \underline{e}_m \underline{x}_m \quad \delta_{km}$$

$$\nabla \underline{r} = \underline{e}_k \underline{e}_m \left( \frac{\partial x_m}{\partial x_k} \right) = \\ = \underline{e}_k \underline{e}_k = \underline{\underline{E}}$$

Далее хотим рассмотреть гео-ии; для этого необходимо ввести перемещение.



В материальном описании отсчетные радиус-векторы фиксированы, а в пр-ой описании в разных моментах времени в точке наблюдения оказываются разные частицы  $\Rightarrow \underline{R}(\underline{r}, t)$ , где  $\underline{r}$  - радиус-вектор точки наблюдения  
если заб-ть от времени

(т.к. у разных точек, которые бывают в данной  
точке в раз-е момента времени - разные  
отсчетные радиус-векторы) 5

Возимся определение

$$\frac{\delta u(r,t)}{\delta t} = v$$

Итогда:

$$\frac{\delta(u(r,t) + r)}{\delta t} = v$$

~~$$\frac{\delta r}{\delta t} + \frac{\delta u(r,t)}{\delta t} = v \Rightarrow \frac{\delta u(r,t)}{\delta t} = v$$~~

~~$$\frac{\delta u(r,t)}{\delta t} + \frac{\delta r}{\delta t} = v \Rightarrow \frac{\delta r}{\delta t} = 0$$~~

Итогда:

$$\frac{\delta(u(r,t) + R(r,t))}{\delta t} = v$$

$$\frac{\delta u(r,t)}{\delta t} + \frac{\delta R(r,t)}{\delta t} = v$$

$$v$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\delta R(r,t)}{\delta t} = 0$$

Рассмотрим, чтобы понять, получим нормальную или отрицательную рез-т:

## 1.4 Особенности при рассмотрении многокомпонентных сред

$$\frac{dR}{dt} \Big|_{\Gamma-\text{граница}} + \underline{V} \cdot \nabla R = 0$$

откуда норма моном  
нападает в 1) наци.

$\Gamma$

затем о том,  
какой дается  
форму, радиус-вектор  
стремится  
точки, которая в  
данной момент  
находится в 1) наци  $\Gamma$

Особенности, которые могут быть при рассмотрении многокомпонентных сред: переходы одних частичек в другие

Такие реакции или присоединение одних частичек к другим для двухкомп. сред:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 ; \quad \underline{V} = \frac{1}{\rho} (\rho_1 \underline{V}_1 + \rho_2 \underline{V}_2)$$

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla(\rho_1 \underline{V}_1) = 0$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla(\rho_2 \underline{V}_2) = 0$$

Но теперь хотим учесть, что частицы 1 могут превращаться в частицы 2 и наоборот, тогда

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_1 dV = - \int_V \underline{n} \cdot (\underline{V}_1 \rho_1) dV - \int_V \chi_{12} dV + \int_V \chi_{21} dV$$

## 2 Лекция 15.02.2022.

### 2.1 Осреднение скоростей и перемещений (геометрических и кинематических величин)

$\chi_{12}$  - ок-ть превращения частич 1 в частицы 2  
 $\left( \left[ \frac{kg}{m^3} \frac{1}{c} \right] \right)$

В локальной ф-ии получаем:

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla(\rho_1 \underline{v}_1) = \chi_{21} - \chi_{12}$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla(\rho_2 \underline{v}_2) = \chi_{12} - \chi_{21}$$

Но на макроуровне баланс массы не изм-ся:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla(\rho \underline{V}) = 0$$

15.02.2022

$$\frac{\partial_1 \underline{u}_1}{\partial t} = \underline{V}_1 \quad \frac{\partial_2 \underline{u}_2}{\partial t} = \underline{V}_2$$

$\rho$ :  $\rho_1 + \rho_2 = \rho$

(ищ. осреднен. кинемат.)  
 хар-ки (ок-ти)

$\underline{V}$ :  $\rho \underline{V} = \rho_1 \underline{V}_1 + \rho_2 \underline{V}_2$

Можно ли то же делать с геометрическими (перемещениями)?

$$\rho \underline{u} = \rho_1 \underline{u}_1 + \rho_2 \underline{u}_2$$

$$\rho_1 \frac{\partial_1 \underline{u}_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial_2 \underline{u}_2}{\partial t} = \rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$$

8  $\rho_1 \frac{d \underline{u}_1}{dt} + \rho_1 \underline{V}_1 \cdot \nabla \underline{u}_1 + \rho_2 \frac{d \underline{u}_2}{dt} + \rho_2 \underline{V}_2 \cdot \nabla \underline{u}_2 = \rho \frac{d \underline{u}}{dt} + \rho \underline{V} \cdot \nabla \underline{u}$

$$\frac{d}{dt} \left( \rho_1 \underline{u}_1 + \rho_2 \underline{u}_2 - \rho \underline{u} \right) - \underbrace{\frac{d\rho_1}{dt} \underline{u}_1}_{\text{волну}} - \underbrace{\frac{d\rho_2}{dt} \underline{u}_2}_{\text{волну}} + \underbrace{\frac{d\rho}{dt} \underline{u}}_{\text{волну}} =$$

$$= \nabla \cdot \left( \rho_1 \underline{V} \underline{u} - \rho_1 \underline{V}_1 \underline{u}_1 - \rho_2 \underline{V}_2 \underline{u}_2 \right) - \underbrace{\nabla \cdot (\rho \underline{V}) \underline{u}}_{\text{волну}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho_1 \underline{V}_1) \underline{u}_1}_{\text{волну}} +$$

$$+ \underbrace{\nabla \cdot (\rho_2 \underline{V}_2) \underline{u}_2}_{\text{волну}}$$

$\underline{u}_2$  ф.м. ср-не уходит

$$\frac{d}{dt} \left( \rho_1 \underline{u}_1 + \rho_2 \underline{u}_2 - \rho \underline{u} \right) = \nabla \cdot \left( \rho_1 \underline{V}_1 \underline{u} + \rho_2 \underline{V}_2 \underline{u} - \rho_1 \underline{V}_1 \underline{u}_1 - \rho_2 \underline{V}_2 \underline{u}_2 \right) =$$

$$= \nabla \cdot \left( \rho_1 \underline{V}_1 (\underline{u} - \underline{u}_1) + \rho_2 \underline{V}_2 (\underline{u} - \underline{u}_2) \right)$$

След-но, р-бо  $\rho \underline{u} = \rho_1 \underline{u}_1 + \rho_2 \underline{u}_2$  верно только, если  
 $\underline{u} = \underline{u}_1 = \underline{u}_2$ , т.е. для однородной среды, но для  
двуокладой - средней геометр. и кинемат. разные  
вещи.

## 2.2 Баланс количества движения для двухкомпонентной среды

Баланс кол-ва дв-ия (1-ый з-н динамики) / сила - это причиняющее изменение количества движения

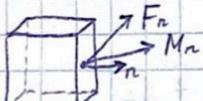
$$\frac{d}{dt} (m \underline{V}) = \underline{F} \quad (\text{для одной частицы})$$

мат-ая точки

Экспрессивное вел-ко (масса, объём, т.г.)  
Интенсивное вел-ко (тесн-ра)

$\underline{V}$  - кол-во дв-ия, приходящееся на ед. массы

$\rho \underline{V}$  - кол-во дв-ия, приходящееся на ед. объёма



(изменение в единице времени расхода)

$$\underline{F}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{E}}{\Delta V} - \text{удельная х-ка силы на ед. пов-ти}$$

[Па]

д-максимальный р-р пов-ти

( $\underline{F}_n$  - инерционное сила, к-ое действует на з-ву объёма)

Для пространственного объёма (сплошная среда; i-ый комп-нт):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_i \underline{V}_i dV = \int_V \rho_i f_i dV + \int \underline{F}_{ni} dS - \int \underline{n} \cdot \underline{F} \rho \underline{V} dS$$

$\uparrow dV$

объ-ах  
сила, приходящая на ед. массы

$\rho_i f_i$  - на ед. объёма

т.к. нормаль внешних

$\underline{\sigma} = n_i \cdot \underline{F}_{ni}$  - тензор напр-ий (показываем, как конкретный и-л реагирует на внешн.

нагрузку)

10

$$\underline{F}_{ni} = \underline{n}_i \cdot \underline{\sigma}$$

$$\int_V \left[ \underbrace{\frac{d\rho}{dt} \underline{V}}_{\rho \frac{d\underline{V}}{dt}} + \rho \frac{d\underline{V}}{dt} - \rho \underline{f} - \nabla \cdot \underline{\sigma} + \nabla \cdot (\rho \underline{V}) \underline{V} + \rho \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} \right] dV = 0$$

$\sim u_3$  3CM

$$\int_V \left[ \rho \frac{\delta \underline{V}}{\delta t} - \rho \underline{f} - \nabla \cdot \underline{\sigma} \right] = 0$$

$$\rho \frac{\delta \underline{V}}{\delta t} = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\sigma} \quad - \text{для однокомпонентной среды}$$

Для двухкомпонентной среды:

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{V}_1}{\delta t} = \rho_1 \underline{f}_1 + \nabla \cdot \underline{\sigma}_1 + \underline{f}_{12} + \rho_1 \tilde{\underline{f}}_{12} + \rho \underline{f}_{12}^* + \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \tilde{\underline{f}}_{12}$$

$$\underline{f}_{12} - \text{отрицательная сила} \quad \underline{f}_{12} = -\underline{f}_{21}$$

$$\tilde{\underline{f}}_{12} - \text{массовая сила} \quad \rho_1 \tilde{\underline{f}}_{12} = -\rho_2 \tilde{\underline{f}}_{21}$$

Для двух газов:

$$\frac{d \rho_1 \underline{V}_1}{dt} = -\nabla \cdot (\rho_1 \underline{U}_1 \underline{V}_1) + \rho_1 \underline{f}_1 + \rho \underline{f}_{12} + \nabla \cdot \underline{\sigma}_1$$

$$\frac{d \rho_2 \underline{V}_2}{dt} = -\nabla \cdot (\rho_2 \underline{U}_2 \underline{V}_2) + \rho_2 \underline{f}_2 - \rho \underline{f}_{12} + \nabla \cdot \underline{\sigma}_2$$

### 2.3 Переход к балансу количества движения на макроуровне

Внутренние силы не могут влиять на г-ие:

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\rho_1 \underline{U}_1 + \rho_2 \underline{U}_2}_{\rho \underline{U}} \right) = -\nabla \cdot (\rho_1 \underline{U}_1 \underline{U}_1 + \rho_2 \underline{U}_2 \underline{U}_2 - \rho \underline{U} \underline{U}) - \nabla \cdot (\rho \underline{U} \underline{U}) + \underbrace{\rho_1 f_1 + \rho_2 f_2}_{\rho f} + \nabla \cdot \underline{\sigma}_1 + \nabla \cdot \underline{\sigma}_2$$

(\*)

$$(*) \quad \rho_1 \underline{U}_1 \underline{U}_1 + \rho_2 \underline{U}_2 \underline{U}_2 - \rho_1 \underline{U}_1 \underline{U} - \rho_2 \underline{U}_2 \underline{U} =$$

$$= \rho_1 \underline{U}_1 (\underline{U}_1 - \underline{U}) + \rho_2 \underline{U}_2 (\underline{U}_2 - \underline{U}) =$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[ \rho_1 \underline{U}_1 (\rho_2 \underline{U}_1 + \rho_2 \underline{U}_2 - \rho_1 \underline{U}_1 - \rho_2 \underline{U}_2) + \right.$$

$$\left. + \rho_2 \underline{U}_2 (\rho_1 \underline{U}_2 + \rho_1 \underline{U}_1 - \rho_1 \underline{U}_1 - \rho_2 \underline{U}_2) \right] =$$

$$= \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)(\underline{U}_1 - \underline{U}_2) - \begin{array}{l} \text{здесь относительное} \\ \text{ст-во с привед.} \\ \text{массой} \end{array}$$

||

$$- \rho (\underline{U} - \underline{U}_1)(\underline{U} - \underline{U}_2) - \text{г-ие отр-ко однород-} \\ \text{ной среде}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2 + \underbrace{\rho (\underline{U} - \underline{U}_1)(\underline{U} - \underline{U}_2)}_{\text{дополнительное напр-ие, об-ве}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{тут нужно решить} \\ \text{для каждого из фаз} \end{array}$$

↑

показывает то,  
что нужно учитывать при  
переходе на макро-уровень (от двухфазного к однородному)

с относ. г-ии с  
важностью

### 3 Лекция 22.02.2022.

#### 3.1 Балансы массы и количества движения двухкомпонентной среды с источниками членами

Определение терминов и определение, что дает представление о том, как же ся среда как однородная макроподсистема (или определенные компоненты)

Баланс массы:

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{V}_1) = \chi_{21} - \chi_{12}$$

22.02.2022

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla \cdot (\rho_2 \underline{V}_2) = \chi_{12} - \chi_{21}$$

Баланс к-ва ф-ки:

(без учёта взаимодействий, получим на приведённой форме)  
Сейчас добавим взаимодействия

$$\underbrace{\frac{d\rho_1}{dt} \underline{V}_1 + \rho_1 \frac{d\underline{V}_1}{dt}}_{\text{--- --- --- --- ---}} = -\nabla \cdot (\rho_1 \underline{V}_1) \underline{V}_1 - \rho_1 \underline{V}_1 \cdot \nabla \underline{V}_1 + \rho_1 \underline{f}_1 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 +$$

$$+ \chi_{21} \underline{V}_2 - \chi_{12} \underline{V}_1 + \rho_1 \underline{f}_{21},$$

$$\rho_1 \frac{\partial \underline{V}_1}{\partial t} = \chi_{12} \underline{V}_1 - \chi_{21} \underline{V}_1 + \rho_1 \underline{f}_1 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 + \chi_{21} \underline{V}_2 - \chi_{12} \underline{V}_1 + \rho_1 \underline{f}_{21},$$

$$\rho_1 \frac{\partial \underline{V}_1}{\partial t} = \rho_1 \underline{f}_1 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 + \underbrace{\chi_{21} (\underline{V}_2 - \underline{V}_1)}_{\text{см-сб тяжка сист. ск-ть, н.к.}} + \rho_1 \underline{f}_{21}$$

рассмотриваем именно изли-ки ск-ти в данной ур-ии, а не изли-ки с-ва ф-ки

Почему умёр  $\chi_{12}$ ?

### 3.2 Постановка задачи: жидкость с пропантом

Две смешанные среды:

$$\rho_2 \frac{\partial_2 \underline{V}_2}{\partial t} = \rho_2 \underline{f}_2 + \nabla \cdot \underline{\sigma}_2 + \chi_{12} (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + \rho \underline{f}_{12}$$

Двухфазная среда: жидкость с пропантом

$$\begin{array}{c} \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} \\ \overset{\circ}{\circ} \overset{\circ}{\circ} \end{array} \quad \frac{d \underline{f}_1}{dt} + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{V}_1) = 0 \quad \frac{d \underline{f}_2}{dt} + \nabla \cdot (\rho_2 \underline{V}_2) = 0$$

$$\rho_1 \frac{\partial_1 \underline{V}_1}{\partial t} = \rho_1 \underline{f}_1 + \rho \underline{f}_{21} + \nabla \cdot \underline{\sigma}_1$$

$$\rho_2 \frac{\partial_2 \underline{V}_2}{\partial t} = \rho_2 \underline{f}_2 - \rho \underline{f}_{21} + \nabla \cdot \underline{\sigma}_2$$

Необходимые определяющие (закономерные) соотношения, которые определяют мат-л и характер сил взаимодействия (находят их обычно из эксперимента)

В системе не знаем:  $\rho_1, \underline{V}_1, \rho_2, \underline{V}_2$

Знаем  $\underline{f}_1, \underline{f}_2$  (сила тяжести; обобщенная)

$\underline{f}_1 = \underline{f}_2 = g$  (в этой задаче нельзя пренебречь гравитацией, т.к. есть оседание)

$\underline{f}_{21}$  и  $\underline{f}_{12}$  вычисляются вначале с помощью эксперимента — силы вз-ва (силы трения между фазами: эти силы уменьшают ск-ть)

Важное требование:  $\underline{f}_{21} = \gamma_{12} (\underline{V}_2 - \underline{V}_1)$  (для некоторого средового давления и концентрации ск-ти)

Сущее течение:  $f_{21} = \eta_{22}(\underline{u}_2 - \underline{u}_1)$ , то тогда получим для  
(Кулона)  $\frac{\partial u_1}{\partial t} = V_1; \frac{\partial u_2}{\partial t} = V_2$

Можно сказать турбуленту, создающую в ней разносить  
давления, запускать течение и-то без гасим,   
изменять ск-ти, а затем и-то с гасим

Нужно учесть, что ск-ти неодн-ми уб-ся из-за  
того, что они остаются наименее места из-за гасим  
(нагрещ, фильтр гравитации турбулентности)

Определение компоненты показывает как конкретный  
направление реагирует на внешние раздражители.



$\underline{\sigma}_f$  реакция и-ла на приложенный  
нагрузку (специфика и-ла)

Другими сл-ми,  
 $\underline{\sigma}_f$  определяет,  
каким образом  
данний и-л  
реагирует на  
приложенную  
нагрузку

Нормовская и-то;

$$\underline{\sigma}_f = -p \underline{E} + 2 \mu_f \underline{d}$$

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{U} + \underline{U} \nabla) - \text{градиент ск-ти}$$

$$\underline{d} = \operatorname{dev} \underline{D} = \underline{D} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \underline{D} \underline{E} = \underline{D} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \underline{U} \underline{E}$$

$\nabla \cdot \underline{U} = 0$  - ус-е нестаци-ми и-то (из ЗСМ)

$$\rho_1 = C \rho_1^* \leftarrow \text{исходная и-то}$$

$\rho_1^*$  - нестационарная  
 $\rho_1$  - стационарная

↑  
концентрация (доля и-ти в объеме)

энергетическая и-то, которая имеет из-за  
за счет из-за концентрации

Сл-ко, нагрещ, не может использовать ус-е  
нестационарности.

15.

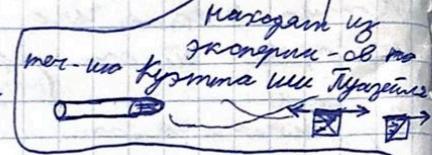
Генеромодельная ис-мб:

$$\underline{\sigma}_1 = -p \underline{E} + 2 \mu f \underline{d}^m$$

↑ когд-и вязкость  
(меньше сдвиговая  
вязкость)

Пок-и в м. зависят от типа ис-ми.

$\eta_{12}$  - трение между фазами



контактное

удлинение  
составление (уп-ие как при растяже-  
нии кон-ми)

н-напряжимость

(в тв-ой ф-ии)

Две пропорции опр. уп-ие статистич.

К в чистке, разрывные опр. не соотв-ие, которые  
годом не удается нормально воспроизвести,  
потому в пропорции часть неприменим.

$$\underline{\sigma} = \underline{C} : \underline{\varepsilon}$$

(физ-ки линейная теория)  
напряжение - это штаба ф-и деф-ии

Если  $\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \underline{u} \nabla)$  - геометрически линейная  
теория

Нар и ГУ: какие и сколько?

(деф-ии есть  
некая пр-ие  
от непре-  
рывности)

Физический линей-  
ный закон всегда  
вон-се для реаль-  
ной линейной теории

## 4 Лекция 01.03.2022.

### 4.1 Постановка задачи: жидкость с пропантом (продолжение)

$$\rho_1 \frac{\partial \underline{V}_1}{\partial t} = \rho_1 \underline{f}_1 + \nabla \cdot \underline{\sigma}_1 + \chi_{21} (\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + \rho \underline{f}_{21}$$

01.03.22

Почему член  $\chi_{12}$  не来了?

(а не потому  
что он один)

В это ур-ие входит член неизвестно ск-тии,  
помимо частных со ск-тии  $\underline{V}_1$  просто член (в другую  
сторону)

и понятно, что при этом ск-тии осн-ся  
части не изменилась (просто убрали часть  
со ск-тии  $\underline{V}_1$ ) перенесли в  
в другую строку.

Система ур-ий для двух-ой среды

$$\frac{d \rho_1}{dt} + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{V}_1) = 0$$

$$\frac{d \rho_2}{dt} + \nabla \cdot (\rho_2 \underline{V}_2) = 0$$

$$\rho_1 \frac{\partial \underline{V}_1}{\partial t} = \rho_1 \underline{f}_1 + \nabla \cdot \underline{\sigma}_1 + \rho \underline{f}_{21}$$

$$\rho_2 \frac{\partial \underline{V}_2}{\partial t} = \rho_2 \underline{f}_2 + \nabla \cdot \underline{\sigma}_2 - \rho \underline{f}_{21}$$

$$\frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} = \underline{V}_1 ; \quad \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} = \underline{V}_2$$

$$\frac{d \underline{U}_1}{dt} + \underline{V}_1 \cdot \nabla \underline{U}_1$$

Неизвестные:  $\rho_1, \rho_2, \underline{V}_1, \underline{V}_2$

$$\underline{f}_{12} = \eta_{12} (\underline{V}_2 - \underline{V}_1)$$

$$\underline{f}_{12} = \eta_{12} (\underline{U}_2 - \underline{U}_1) \leftarrow \begin{array}{l} \text{многие} \\ \text{разные} \\ \text{данные} \\ \text{использованы} \end{array}$$

$$\underline{f}_1 = \underline{f}_2 = \underline{g}$$

$$\underline{\sigma} = - p \underline{E} + \sqrt{d} \left[ \begin{array}{l} \text{различные} \\ \text{значения} \end{array} \right]$$

$$\underline{d} = \text{der } \underline{D} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{U}_1 + \underline{U}_1 \nabla) -$$

$$- \frac{1}{3} \nabla \cdot \underline{U} \underline{E}$$

17

Проверка отр-их ур-ий (группа I типа)

Нулевое ГУ и НУ:

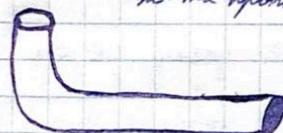
Сколько? Одно НУ

$$\rho_1(\underline{r}, 0) \quad \rho_2(\underline{r}, 0)$$

$$U_1(\underline{r}, 0) \quad U_2(\underline{r}, 0)$$

Могут быть  
неравнозначные  
но гр-цы, поэто-  
му  $\underline{r}$  однознач-  
но uniquely дост

Пример. Какое значение  
н.м. приложено.

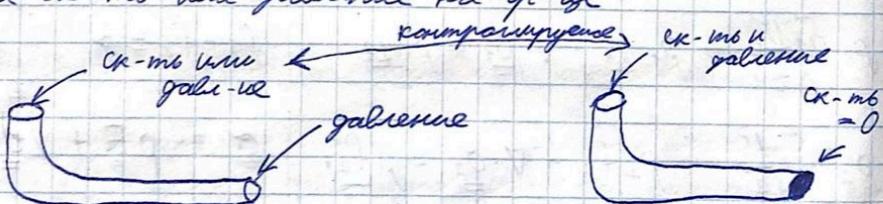


Упруго втянуте материи  
им, нормали сдавли-  
все  $\text{НУ} = 0$ .

Для ГУ на  $\underline{U}$  (м.к.  $\sigma \approx \nabla \underline{U}$ )

Мыслей загадывай как склоне тор и краине - не учи-иц  
(но не сразу висите; если только один  
на верх. гр-е; группировка  
гр-ий)

Задача ск-мб или давление на гр-це



На бердаи уравните где нс-ми: условие приложения  
(но очень берди),

конечное ск-мб на гр-це (которое на самом  
деле зависит от сил трения между нс-мом и поверх-тью)  
(но для к-т таких между нс-мом и поверх-тью)

сила первого  
если сила трения  $\downarrow$  больше, то ус-не проникание  
если меньше, то  
если сила больше, то контактное ср-во,  
наоборот.

Это с касанием контактной

С норм-ой контактн-ой ус-не проникание <sup>проникание</sup> исключено через  
горную породу. Например,  
грави Гарси.

На боковой границе для проникания:

Касан. к-и: то же, что и с ж-м (свобод-ое  
ус-не проникания)

Контактн-ое: ус-не непроницаемости, но есть  
разница между контактн-ой и боковой  
граничами (из-за силы тяжести)

Сверху задано давление смыкание  
горной породы  
Снизу нулевое ср-во

Касанием постепенно фиксируется задание

Причем ус-не управ-ие

И замен в заб-тии <sup>св-в</sup> и-ва и НУ, ГУ  
(опр. соотн.) (исключая) (реальная)  
полученную  
задачу. 19

## 4.2 Баланс энергии в общем виде

## Баланс энергии.

$$(E) = N_e + Q$$

изи-е  
нарой  
энергии  
системы

мощ-  
ность  
врем-  
яни  
вог-

СК-мб  
потреба  
знергии  
в систему

демонстрирует

$$E = K + U$$

↑      Внешняя  
 Кинетиче-      (пот. энергии,  
 ская      зависим от  
 (з-м от ск-ли)      взаимод-  
 яния  
 между  
 частицами)

Читумилю пояснил способ, но он не очень правильный.

Погиб? Погибший постп. Картина мира с погибшим  
дорогу. Проблема в том, что не погибло,  
того буд-то в кин. зеркало. Внушки тела есть мы-то  
разных ф-ий.

$$\frac{1}{2}mb^2 + \frac{1}{2}\underline{w} \cdot \underline{J} \cdot \underline{w}$$

Греческо-персидские войны не прекратились в море.

В ких звертаю погляд та сподіхи Соболєв, які вони умовляли про заслуги інших членів (бажаючи відповісти на вимоги македона)

Таким образом, есть остаток отправляемых в У (и в У-ную часть земель, которые остаются при вывозке К с учётом расч.-ых ср. об.)

Более короткое описание газов: кин-дис теория газов  
vs  
классическая термодинамика

Что отн.-ся к  $K$  и  $U$  зависит от взаимной массы

Хотим ур-ия для общей  $\Rightarrow$  нужно выделить по общей величине

$$k = \frac{K}{V} = \frac{1}{2} \rho V^2 - \text{аффинична по объему}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} V^2 - \text{аффинична по массе} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{удельное} \\ x-\text{хи} \end{array}$$

$U$  аффинична по объему? Принимаем за постулат

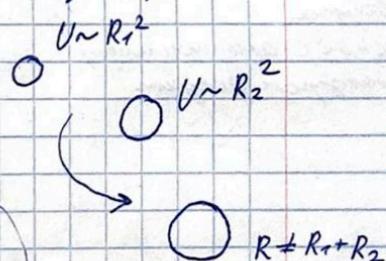
$$k = \frac{U}{V}$$

Принимаем также, что  $U$  аффинична по массе (постулат):

постулат  
аффинична  
по массе.

(массы суммируются  
по объему)

$$U = \int_V \rho u dV - \text{без срёзное ограничение} - \text{не всегда верно}$$



Продолжим говорить, что внутренняя энергия аффинична по числу частиц.

↗ в конце курса

масса не изм-ся  
а  $U$  изменилась

### 4.3 Баланс энергии для одной какой-либо фазы

Для какой-либо фазы:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho u \right) dV = \int_V \rho f \cdot \underline{V} dV + \int_{\partial V} \underline{n} \cdot \underline{V} dS +$$

измение полной энергии      мощность от обтекающих сил      мощность от подтекающих сил  
 подвод энергии в систему (обтекающий)  
 q - ск-ть подвода энергии в с-му  
 массы

поток работы из-за  
 подвод энергии через поверхность за счёт притока гасящий ветров обёма

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} \underline{V}^2 + \rho \frac{d\underline{V}}{dt} \cdot \underline{V} + \boxed{\frac{d\rho}{dt} u + \rho \frac{du}{dt}} = \boxed{\rho f \cdot \underline{V}} +$$

Обычно ск-ть с аэродинамикой  
меньшой удобен

$$+ (\nabla \cdot \underline{\sigma}) \cdot \underline{V} + \underline{\sigma} \cdot (\nabla \underline{V})^T +$$

$$+ \rho q - \nabla \cdot \underline{h} - \nabla \cdot (\underline{V} \rho) \left( \frac{1}{2} \underline{V}^2 \right) - \rho \underline{V} \cdot (\nabla \underline{V}) \cdot \underline{V} -$$

$$- \nabla \cdot (\underline{V} \rho) u + \rho \underline{V} \cdot \nabla u$$

## 5 Лекция 15.03.2022. Раздел 2. Среды с вращательными степенями свободы

### 5.1 Баланс энергии для двухкомпонентной среды

$$\rho \frac{\delta u}{\delta t} = \underline{\sigma} \cdot (\nabla \underline{U})^s + \rho g - \nabla \cdot \underline{h}$$

(на след. лекции  
для многокомпонентных  
сред)

15.03.22

Для многокомпонентных сред баланс энергии.

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho_1 \underline{U}_1^2 + \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) dV = \int_V (\rho_1 q_1 dV + \dots)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{1}{2} \rho_1 \underline{U}_1^2 + \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 \right) dV$$

м.к.сост  
помеща-  
ная энергия в з-не  
между частицами разных  
фаз

$$= \int_V \rho_1 q_1 dV + \int_V \rho_1 f_{11} \cdot \underline{U}_1 dV + \int_{\partial V} \underline{f}_{11} \cdot \underline{U}_1 dS - \int_{\partial V} \underline{n} \cdot \underline{h} dS -$$

$$- \int_{\partial V} \underline{n} \cdot \underline{U}_1 \rho_1 \left( \frac{1}{2} \underline{U}_1^2 + u_1 \right) dS + \int_V \rho_1 f_{12} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) dV +$$

забавление в  
двухфазной  
смеси

$$+ \int_V Q_{21} dV$$

также, ком. идёт от  
одной фазы к другой  
(от второй в первую)



$$\rho \bar{U}_{12} = k(\Delta x)^2$$

при сжимании двух фаз  
не должно уничтожаться, а  
должно получаться

23

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{21} = -\mathcal{H}_{12} \Delta T \quad \text{это не изотермоподобности одной фазы, а то,} \\ \qquad \qquad \qquad \text{как одна фаза} \\ \qquad \qquad \qquad \text{отдаёт тепло, а} \\ \qquad \qquad \qquad \text{другая его воспри-} \\ \qquad \qquad \qquad \text{нимает} \\ Q_{21} = -\mathcal{H}_{12} (T_1 - T_2) \end{array} \right.$$

Можно разделить энергию  $\bar{r}$  на поровую; а можно пропорционально массе каждой фазы:  $\rho_1 \bar{u}_{12}$  и  $\rho_2 \bar{u}_{21}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{При суммировании } Q \text{ вспомогательно сокращается, а} \\ \rho q - общий подвог тепла извне. \end{array} \right.$

Возрастание для зеррективной и тонк будем непростили; и для поправки к зеррективной тонк непростили

Введём понятие температуры и энтропии  
Возможный подвог.

Разложение температур-ий:  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_e + \underline{\sigma}_f$

$$\underline{\sigma} = -p \underline{E} + \underline{T}$$

не забу-  
дим ом  
ок-еи

исследовател-  
расце  
(зависим от ск-еи)

$$\underline{\sigma}_e \dots (\nabla V)^s = \frac{p}{\rho^2} \dot{p} + ( ) \dots \underline{i} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{температура-ие} \\ \text{связано с изи-еи} \\ \text{формы} \end{array}$$

$$\underline{\sigma}_f \dots (\nabla V)^s + \rho q - \nabla \cdot \underline{h} = \rho T \dot{i} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{указываем на} \\ \text{аддитивность} \\ \text{энтропии} \end{array}$$

24  $\left. \begin{array}{l} T - \text{температура} \\ q - \text{энтропия} \end{array} \right\} \text{мак вводим}$

Но как ввести эффективную темп-ру?

Если есть сиеста горячих и холодных частиц (раз)

Вопрос остается открытым; нет уставшегося  
комуници.

Де большинства задач баланс энергии не рассмотрено  
важно.

## 5.2 Различие между спинорным движением и вращением окрестности среды как твёрдого целого

(2) Среды с вращ.ыми степенями свободы.

Вспомним ДТТ и среды с микроструктурой.

15.03.22  
(продолжение)

Основная идея всего курса: в мех-ке есть несколько основных балансовых соотношений - массы, кин-ва движения, момента, энергии + опр-ие ур-ий, которые должны быть сформулированы для конкретного заданного м-ла и замкнуты системой ур-ий

Чтобы описывать более сл-ые процессы необходимо вводить дополнительные см. свободы: в 1-й части смотрим вз-ие фаз; во 2-й части разрешим часмуди вращаться дополнительно независимо.

Есть разные типы ур-ий:

1) трансляционное вращение (изм-е поз-и тела в пр-ве)

$$\nabla \cdot \underline{V} = (\nabla \cdot \underline{V})^S + (\nabla \cdot \underline{V})^A$$

х-т вращение окр-ти  
точки как единого целого  
вокруг него-то

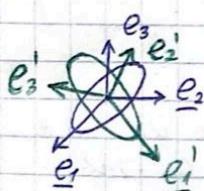
$$(\nabla \cdot \underline{V})^A = \frac{1}{2} (\nabla \cdot \underline{V} - \underline{V} \cdot \nabla) = \tilde{\underline{w}} \times \underline{E}$$

↑  
сопутствующий вектор  
антиシンхроничного магнита

$\tilde{\underline{w}}$  - угл-ая ск-ть, связана  
с перемещением

$(\nabla \cdot \underline{V})^A$

2) вращение вокруг собст оси (спинорное движ-ие, изм-е ориентации)



$$\underline{Q} = \underline{e}_k' \underline{e}_k \quad \underline{\alpha} = \alpha_m \underline{e}_m \quad \underline{Q} - \text{матрица}\ \text{поворот}$$

$$\underline{Q} \cdot \underline{\alpha} = \underline{e}_k' \underline{e}_k \cdot \alpha_m \underline{e}_m = \alpha_k \underline{e}_k'$$

$$\underline{Q} \cdot \underline{Q}^T = \underline{E} \quad ; \quad \det \underline{Q} = 1 \quad (\text{ортогональный магнит})$$

26

$\underline{Q}^T$  вектором в обратной  $\underline{\underline{Q}}$  направлении

Последовательно  $\underline{\underline{Q}}$  и  $\underline{Q}^T$  даёт отсутствие вектора.

Продиф-фи рав-ло  $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T = \underline{\underline{E}}$

$$\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{Q}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{Q}}^T = 0$$

левой тензор спина:  $\underline{\underline{S}} = \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{Q}^T$

$$\underline{\underline{S}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{Q}}^T \Rightarrow \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{S}}^T = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S}} - \text{антисимметрический}$$

$\Rightarrow 3$  компоненты  $\Rightarrow$  можно сопоставить 1 вектор

$$\left( \begin{array}{ccc} 0 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & -c \\ -\beta & c & 0 \end{array} \right)$$

$$\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{Q}^T = \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{w}} \times \underline{\underline{E}} \Rightarrow \dot{\underline{\underline{Q}}} = \underline{\underline{w}} \times \underline{\underline{Q}} - \text{ур-ие Пуассона}$$

$\underline{\underline{S}_r} = \underline{Q}^T \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}$  - правый тензор спина

$$\underline{\underline{S}_r} = \underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{L}}, \text{ где } \underline{\underline{L}} - \text{правое уг-ое ск-мб}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{\underline{Q}}} = \underline{\underline{Q}} \times \underline{\underline{L}}$$

$$\underline{\underline{S}} = \underbrace{\underline{\underline{Q}}}_{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{S}}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{E}}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{S}_{sr}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$$

Bez gok-ka:  $\underline{W} = \underline{\mathbb{Q}} \cdot \underline{I}$

$$\underline{S}_x = (\dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^\top)_x = (\underline{\omega} \times \underline{E})_x = (\underline{\omega} \times \underline{e}_k) \times \underline{e}_k =$$

$$= -\underline{e}_k \times (\underline{w} \times \underline{e}_k) = -\underline{w} \underline{e}_k \cdot \underline{e}_k + \underline{e}_k \cdot \underline{w} \underline{e}_k = \\ = -3\underline{w} + \underline{w} = -2\underline{w}$$

$$\underline{W} = -\frac{1}{2} \left( \underline{\mathbb{Q}} \cdot \underline{\mathbb{Q}}^\top \right)_x$$

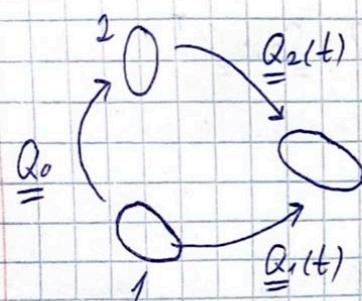
$$\underline{\underline{R}} = -\frac{1}{2} \left( \underline{\underline{Q}}^T \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}} \right)_x$$

$\underline{Q} = \underline{\ell}_K \underline{\ell}_K^T$ ,  $\underline{\ell}_K$  не заб-ум ом  $t \Rightarrow$  групп-ен марков

$$W = -\frac{1}{2} \left( \underline{\dot{e}_k}' \overbrace{\underline{\dot{e}_k} \cdot \underline{\dot{e}_m}}^{\delta_{km}} \underline{\dot{e}_m}' \right)_x = -\frac{1}{2} \underline{\dot{e}_k}' \times \underline{\dot{e}_m}'$$

$\underline{\dot{e}_k}$   
 $\underline{\dot{e}_m}$

$$\underline{J} = -\frac{1}{2} \left( \underline{e}_k \underline{e}_k' \cdot \underline{\dot{e}}_m' \underline{e}_m \right)_x = -\frac{1}{2} \left( \underline{e}_k' \cdot \underline{\dot{e}}_m' \right) \underline{\dot{e}_k \times e_m}$$



1 и 2 - относительное положение

$$\underline{\underline{Q}}_1 = \underline{\underline{Q}}_2 \cdot \underline{\underline{Q}}_0$$

$$\underline{w}_1 = -\frac{1}{2} \left( \dot{\underline{\underline{Q}}}_2 \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}_0^\top \cdot \underline{\underline{Q}}_2^\top}_{E} \right)_x = -\frac{1}{2} \left( \dot{\underline{\underline{Q}}}_2 \cdot \underline{\underline{Q}}_2^\top \right)_x = \underline{w}_2$$

$\underline{\underline{Q}}_0$  не зависит от  $t$  (это фикс. поворот)

Почему угл.-ая ок-ть  $\underline{w}$  наз-ся истинной?

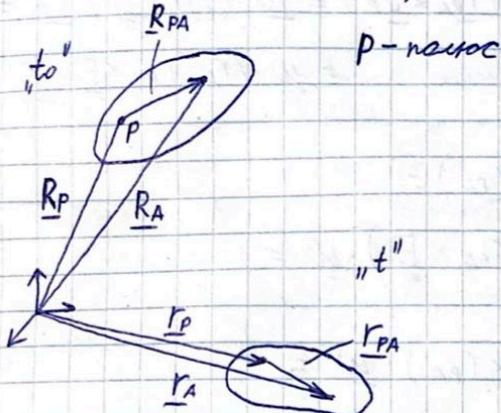
Потому что она не зависит от того, какое относительное положение выбрано.

А  $\underline{w}$  будет различна в разных относительных положениях.

## 6 Лекция 22.03.2022.

### 6.1 Тензоры инерции твёрдого тела

Будем получать тензор инерции для общ. вб. тела | 22.03.22



$$\underline{r}_{PA} = Q \cdot \underline{R}_{PA}$$

$$\underline{r}_A = \underline{r}_P + \underline{r}_{PA}$$

Сейчас рассмотрим обобщенное математическое описание

сж-мс подгото

$$\underline{V}_A = \underline{V}_P + \underline{Q} \cdot \underline{R}_{PA} = \underline{V}_P + \underbrace{\underline{w} \times \underline{Q} \cdot \underline{R}_{PA}}_{\underline{r}_{PA}}$$

$$\underline{V}_A = \underline{V}_P + \underline{w} \times \underline{r}_{PA}$$

Кинемат. энергия:

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho \underline{V}_A^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho (\underline{V}_P + \underline{w} \times \underline{r}_{PA}) \cdot (\underline{V}_P + \underline{w} \times \underline{r}_{PA}) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \rho \underline{V}_P \cdot \underline{V}_P dV + \underbrace{\int_V \rho \underline{V}_P \cdot (\underline{w} \times \underline{r}_{PA}) dV}_{①} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \rho (\underline{w} \times \underline{r}_{PA}) \cdot (\underline{w} \times \underline{r}_{PA}) dV}_{②} \quad \text{≡}$$

$$\textcircled{1}: \quad \underline{V_p} \cdot (\underline{w} \times \underline{r_{PA}}) = \underline{w} \cdot (\underline{r_{PA}} \times \underline{V_p}) = \underline{w} \cdot (\underline{r_{PA}} \times \underline{\underline{E}}) \cdot \underline{V_p} = \\ = \underline{w} \cdot (\underline{r_A} - \underline{r_p}) \times \underline{\underline{E}} \cdot \underline{V_p}$$

$$\begin{aligned}
 ②: & \cancel{\underline{w} \cdot (\underline{w} \times \underline{r}_{PA})} \cdot (\underline{w} \times \underline{r}_{PA}) = \\
 & = -\underline{w} \cdot (\underline{E} \times \underline{r}_{PA}) \cdot (\underline{r}_{PA} \times \underline{E}) \cdot \underline{w} = \\
 & = -\underline{w} \cdot (\underline{r}_{PA} \times \overbrace{\underline{E} \cdot \underline{E}}^{\underline{0}} \times \underline{r}_{PA}) \cdot \underline{w} = \\
 & = -\underline{w} \cdot (\underline{r}_{PA} \underline{r}_{PA} - (\underline{r}_{PA} \cdot \underline{r}_{PA}) \underline{E}) \cdot \underline{w}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} M V_p^2 + \underline{\omega} \cdot \left[ \int_V p r_A dV - \int_V \rho dV \cdot \underline{r}_p \right] \times \underline{E} \cdot \underline{V}_p +$$

$$+ \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \int_V \rho \left[ (\underline{r}_{PA} \cdot \underline{r}_{PA}) \underline{\underline{E}} - \underline{r}_{PA} \underline{r}_{PA} \right] dV \cdot \underline{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2} M V_p^2 + \underline{w} \cdot \left[ M(r_c - r_p) \right] \times \underline{E} \cdot \underline{V_p} +$$

" B "

$$+ \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underbrace{\int_V \rho [r_{PA} \cdot r_{PA} \underline{\underline{E}} - r_{PA} r_{PA}] dV}_{\text{"J"} \cdot \underline{\omega}}$$

$\underline{J}$  - момент инерции об. тела (показывает распределение массы по телу)

$\underline{B}$  - дополнительный момент инерции (антисимметрический) (возникает в тех случаях, когда центр масс не совпадает с центром масс)

(чтобы говоря, показывает доп. кин-ю энегрию, которая возникает от вращения массы, сосредоточенной в центре масс, относительно центра)

$$K = \underbrace{\frac{1}{2} M \underline{V_p}^2}_{\text{кин. эн-ия}} + \underbrace{\underline{V_p} \cdot \underline{B} \cdot \underline{W}}_{\text{плата за то, что центр масс не совпадает с ц.м.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{W} \cdot \underline{J} \cdot \underline{W}}_{\text{отвечают за вращение всего тела как единого целого}}$$

кин. эн-ия  
тела как  
цент-ии  
точки, когда  
все масса  
распределена  
в центр

плата за то, что  
центр масс не  
совпадает с ц.м.

отвечают за  
вращение всего  
тела как  
единого целого

Выяснили, что кин-ю энегрия  $K$  есть кв-ая форма ск-стей (теперь есть и трансляционное, и вращательное сопоставление ск-стей)

Теперь будем рассмотреть пр-ое тело, у которого

$$K = K(\underline{V}, \underline{W}) \text{ и это кв. форма:}$$

$$K = \frac{1}{2} \rho \underline{V}^2 + \underline{V} \cdot (\rho \underline{B}) \cdot \underline{W} + \frac{1}{2} \underline{W} \cdot (\rho \underline{J}) \cdot \underline{W}$$

Лицо тело  $\underline{B}$  просто когд-т КФ, т.е. он не содержит антисимметрической.

## 6.2 Движение неклассической частицы по инерции

Пример

Возмем  $\underline{B} = q \underline{E}$ ,  $\underline{J} = j \underline{E}$  - шаровые

$$\underline{K} = \frac{1}{2} m \underline{V}^2 + q \underline{V} \cdot \underline{W} + \frac{1}{2} j \underline{W}^2$$

(расс-ен тес-  
моку)

Ко-во гб-и = производная от  $K$  по  $\underline{V}$ .

$$\cancel{\underline{K}} \quad (1) \underline{K}_1 = \frac{d\underline{K}}{d\underline{V}} = m \underline{V} + q \underline{W} = m \underline{V}_0 + q \underline{W}_0 = \alpha \underline{e}$$

сохр-ие  
ко-ва  
гб-и

ори  
ко-ва  
гб-и

Момент ко-ва гб-и:

$$(2) \underline{K}_r^o = \underline{r} \times \underline{K}_1 + \underbrace{\frac{d\underline{K}}{d\underline{W}}}_{\text{дополнеч-} \atop \text{кий член}} = \underline{r} \times (m \underline{V} + q \underline{W}) + q \underline{V} + j \underline{W} =$$

(\*)

сохр-ие  
момента  
ко-ва  
гб-и

Теперь необходимо реш-ть начальную систему  
ур-ий и найти ск-ть и ун-ую ск-ть

*uz (2)*

Дифф-ен (\*):  $\underline{V} \times (m \underline{V} + q \underline{W}) + \underline{r} \times (m \underline{V} + q \underline{W})^o +$

$0$  (из-за отс-  
чи)

$+ q \dot{\underline{V}} + j \dot{\underline{W}} = 0$

сохр-ие  
ко-ва  
гб-и

$$q \underline{V} \times \underline{w} + q \dot{\underline{V}} + j \dot{\underline{w}} = 0 \quad (2*)$$

$$\text{Уз (1): } m \underline{V} + q \underline{w} = m \underline{V_0} + q \underline{w_0} = \alpha \underline{e}$$

$$\underline{V} = \frac{\alpha}{m} \underline{e} - \frac{q}{m} \underline{w} \quad ; \quad \dot{\underline{V}} = -\frac{q}{m} \dot{\underline{w}}$$

Подставляем  $\underline{V}$  и  $\dot{\underline{V}}$  в (2\*):

$$\frac{q\alpha}{m} \underline{e} \times \underline{w} - \frac{q^2}{m} \underline{w} \times \underline{w} = \frac{q^2}{m} \dot{\underline{w}} - j \dot{\underline{w}} = \frac{q^2 - jm}{m} \dot{\underline{w}}, \text{ м.е}$$

$$\dot{\underline{w}} = \omega \underline{e} \times \underline{w}, \text{ где } \omega = \frac{q\alpha}{q^2 - jm} \quad (3*)$$

Будем искать реш-не в виде:

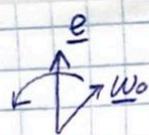
$$\underline{w} = Q(\varphi(t) \underline{e}) \cdot \underline{w_0} \quad (\text{м.к. } \dot{\underline{Q}}(\varphi(t) \underline{e}) =$$

$$\text{Итогда } \dot{\underline{w}} = \dot{\varphi}(t) \underline{e} \times \underline{Q} \cdot \underline{w_0} = \dot{\varphi}(t) \underline{e} \times Q(\varphi(t) \underline{e}) \quad (3**)$$

Итогда, приводим в (3\*) и (3\*\*), находим

$$\dot{\varphi} \underline{e} \times \underline{w} = \omega \underline{e} \times \underline{w} \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega t$$

М.к.,  $\underline{w} = Q(\omega t \underline{e}) \cdot \underline{w_0}$ , м.е. фи-е ск-мо вращается  
 вокруг оси час-ва  
 фи. ск-мо тела-точки  
 в час. момент времени



↙ ось вращения не изгиба  
называется при вращении

Вернёмся к схеме:

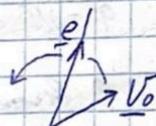
$$\underline{Q}(\alpha t + \underline{\epsilon}) \cdot \underline{e}$$

$$\underline{V} = \frac{\alpha}{m} \underline{e} - \frac{q}{m} \underline{w} = \frac{1}{m} \left( \alpha \underline{e}'' - q \underline{Q}(\alpha t + \underline{\epsilon}) \cdot \underline{w}_0 \right) =$$

$$= \frac{1}{m} \underline{Q}(\alpha t + \underline{\epsilon}) \cdot (\alpha \underline{e} - q \underline{w}_0) = \underline{Q}(\alpha t + \underline{\epsilon}) \cdot \underline{V}_0$$

$\underline{w}_0(1)$

Следовательно, для схемы верна также картина:



$$\underline{V}_0(1): \quad \underline{V} = \underbrace{\frac{\alpha}{m} \underline{e}}_{\substack{\text{постано-} \\ \text{влен-} \\ \text{ка состав-} \\ \text{ляющих}}} - \underbrace{\frac{q}{m} \underline{w}}_{\substack{\text{вращ-} \\ \text{ае компонента} \\ \text{ми}}} \underline{w}$$

$\underline{V}_0 \perp \underline{e} \Rightarrow$  гб-ве по окр-ни

$\underline{V}_0 \neq \perp \underline{e} \Rightarrow$  гб-ве по спиралам

$$\text{Причина } \underline{V}_0(1): \quad \underline{V} = \underline{V}_0 + \frac{q}{m} (\underline{w}_0 - \underline{w})$$

35

Например, по спиралам гб-се электрона  $\Rightarrow$  теория гаёт надежду учесть при описании более сложных (в частности, электромагнитных) явлений

## 7 Лекция 29.03.2022.

### 7.1 Баланс массы, количества движения и кинетического момента для микрополярной среды

Вернемся к сплошным средам; будем  $\neq$  такие среды, в которых частицы находятся и поступательно, и вращающиеся относительно свободы.

Как описать инерционные и кинематические характеристики такой системы?

Инерционные =  $\rho, m$  и массовая пр-ть тела — инерции.

Кинематические = угл-ые и трансляционные ск-тии.

Выбор способа описания (мат-ое или пр-ое) зависит от рассматриваемой среды.

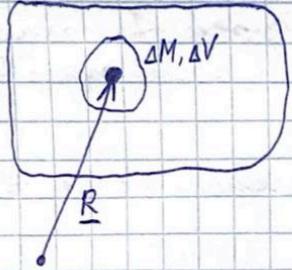
Материальное описание хорошо работает в тв. телах (т.е. когда соседние точки остаются соседними на протяжении всего времени дв-ия), когда исключается перемешивание, деление и слияние частиц.

В мат-ии описании можно переходить к частным производными; в отличие от пространственного, там все равно будут конвективные сл-ти.

$$\frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{d}{dt} \varphi \Big|_{\mathbf{R}} \quad \begin{array}{l} \text{в и-и описании} (\Rightarrow \text{богатое кал-во аналитических реш-ий в} \\ \text{теории упругости}) \end{array}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} + \underline{\mathbf{U}} \cdot \nabla \varphi \quad \begin{array}{l} \text{||} \leftarrow \text{в пр-ии описании} (\Rightarrow \text{небогатое кал-во аналитических реш-ий в} \\ \text{гидродинамике.}) \end{array}$$

Есть аналитика для течений Куттма и Лузейра — и это практически всё; всё остальное реш-ся численно)



$$\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

$$\rho = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{M}{V}$$

*d - характерный размер рассматриваемого объема*

$$\overline{\rho} = \frac{\Delta \overline{\rho}}{\Delta V}$$

$$\overline{\rho} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\overline{\rho}}{V}$$

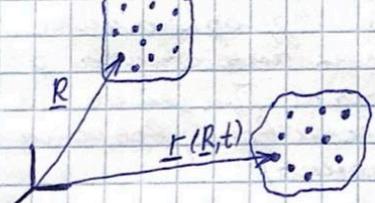
*но  $\Delta \overline{\rho} \sim r_{pa}^2$  (если  $r_{pa} \leq d$ )*, т.е.  $\frac{\Delta \overline{\rho}}{\Delta V} \xrightarrow[d \rightarrow 0]{} \infty$   
*характерный размер*

Таким образом, при математическом описании введение тензора инерции внутренне гомогенное, но закрывают на это глаза.

В теории микроподвижных сред в МО всегда тензор инерции вводится аналогично тензору массы.

29.03.22 Сегодня получим доказательство соотношения в рамках математического описания.

Все соотношения будут для математического объема



$$\frac{d \mathbf{C}(\mathbf{R}, t)}{dt} = \left. \frac{d \mathbf{c}}{dt} \right|_{\mathbf{R}}$$

37

Нам-ко обьём всегда состоит из одних и тех же молекул (сам обьём добр-се, газ-се, подогр-се)  
ночало упомянуло по обьёму величина

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varphi(r, t) dV \stackrel{\checkmark}{=} \text{просто так производную по времени} \\ \text{вместе не можем (т.к. обьём з-т от времени)}$$

давно сказали ск-ть ученика масс

$$\frac{d\varphi(r(R, t))}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \Big|_R + \underline{U} \cdot \nabla \varphi \quad \begin{array}{l} \text{исп-ли массы} \\ (\text{нр-ло добр-ие склонной}) \\ \text{из-ли} \end{array}$$

использовали транспортную теорему

$$\stackrel{\checkmark}{=} \int_{V(t)} \left[ \frac{d\varphi}{dt} \Big|_R + \nabla \cdot (\underline{U} \varphi) \right] dV = \quad \begin{array}{l} \text{действительно, в и-ии} \\ \text{описания поляризации} \\ \text{появляется гр-ые сомнаж-} \\ \text{ром} \end{array}$$

$$= \int_{V(t)} \left[ \underbrace{\frac{d\varphi}{dt} \Big|_R}_{\frac{d\varphi}{dt}} + \underline{U} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \underline{U} \right] dV$$

Сводка по транспортной теореме

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad \begin{array}{l} \text{(м.к. масса} \\ \text{не изм-ся)} \end{array} \stackrel{\checkmark}{\Rightarrow} \int_V \left[ \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \underline{U}) \right] dV = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \underline{U}) = 0 \quad ; \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{U} = 0$$

(Баланс массы)

Теперь попробуем получить ф-зу для величин, удельной по массе:

по транспортной теории

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \varphi dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{d(\rho \varphi)}{dt} + \nabla \cdot (\rho \varphi \underline{V}) \right] dV =$$

$$= \int_{V(t)} \left[ \underbrace{\frac{d\rho}{dt} \varphi + \rho \frac{d\varphi}{dt}}_{\text{баланс массы}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \underline{V}) \varphi + \rho \underline{V} \cdot \nabla \varphi}_{\text{баланс массы}} \right] dV =$$

$$= \int_{V(t)} \rho \frac{d\varphi}{dt} dV$$

Химическое выравнивание: произвольную можно преобразовать через закон изменения интеграла, если  $\varphi$ -это величина, удельная по массе. И при этом дифференцируется только  $\varphi$ .

Баланс хим-ла функции (будет рассматриваться обычно ч-зы, для ч-зы степень свободы, но без перекрестного с-ва с  $\underline{B}$ )

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dV = \int_V \rho f dV + \int_V \underline{f}_n \underline{ds} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma}$$

$\downarrow$  к-з х-ка по массе

$\downarrow$  наружносоставные силы

транспортной теории

$$\int_V \rho \frac{d\underline{V}}{dt} dV = \int_V \rho f dV + \int_V \nabla \cdot \underline{\sigma} dV$$

$$\int_V \left[ \rho \frac{dV}{dt} - \rho f - \nabla \cdot \underline{\sigma} \right] dV = 0$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho f + \nabla \cdot \underline{\sigma}$$

Баланс момента кол-ва гб-ки:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \left[ r \times \rho V + \rho \underline{J} \cdot \underline{w} \right] dV =$$

\underbrace{\hspace{10em}}\_{\substack{\text{состав-} \\ \text{ля-} \\ \text{ной} \\ \text{суммы}}}

↙ *yg-ae по общей*

↙ *yg-ae по часе*

$$\rho K = \frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{1}{2} \underline{w} \cdot \underline{\rho J} \cdot \underline{w}$$

$$\rho K_2 = \frac{d(\rho K)}{d\underline{w}} = \rho \underline{J} \cdot \underline{w}$$

(есть произв-  
ная от кин-ой  
энергии по  
усл-ой ск-ми)

$$= \int_V r \times \rho f dV + \int_V r \times f_n dS + \int_V \rho m dV + \int_V M_n dS$$

\underbrace{\hspace{2em}}\_{\substack{\text{момент от} \\ \text{общей ск-и} \\ (\text{внешней})}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}\_{\substack{\text{от ви-ей} \\ \text{пов-ой ск-и} \\ r \times (n \cdot \underline{\sigma}) = \\ = - n \cdot \underline{\sigma} \times r}}

\underbrace{\hspace{2em}}\_{\substack{\text{объемный} \\ \text{внешний} \\ \text{момент}}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}\_{\substack{\text{моменты (подра-} \\ \text{жения), комо-} \\ \text{рое действует} \\ \text{от подражен-} \\ \text{ной ск-и}}}

+  
- *две части*

*m - момент, дей-  
ствующий внутри  
на точки, состав-  
ляющие бранз-с*

$M_n = n \cdot \underline{M}$ , где  $\underline{M}$  - тензор моментов наружных  
(которые повернуты одну часть от и.  
другой, но есть замкнутое соединение-  
ние)

Пога, на пр-ой морене и морене Т-О:

$$\cancel{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \rho \mathbf{v}} + \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \frac{d(\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{w}})}{dt} =$$

$$= \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \times \mathbf{r}) + \rho \underline{\underline{m}} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}}$$

$$- (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \times \mathbf{r} - \underline{\underline{\sigma}} \times (\mathbf{r} \nabla) =$$

$$= \mathbf{I} \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\sigma}} \times \underline{\underline{E}}$$

Заметка на полях:

$$-\underline{\underline{\sigma}} \times (\mathbf{r} \nabla) = -\underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}} \times \cdot \underline{\underline{e}_k} \underline{\underline{e}_k} = -(\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{e}_k})(\underline{\underline{e}_k} \cdot \underline{\underline{a}}) = -\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{a}} =$$

$$= \underline{\underline{\sigma}} \times$$

$$\mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \frac{d(\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{w}})}{dt} = \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\sigma}} \times +$$

$$+ \rho \underline{\underline{m}} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}}$$

даван  
ко-ва-же-ие

дни-ки смы

$$\rho \frac{d(\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{w}})}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} \times + \rho \underline{\underline{m}} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}} \quad (*)$$

/ дружи  
сводки,  
даван  
ко-ва-же-ие  
дни-ки смы  
рого спина)

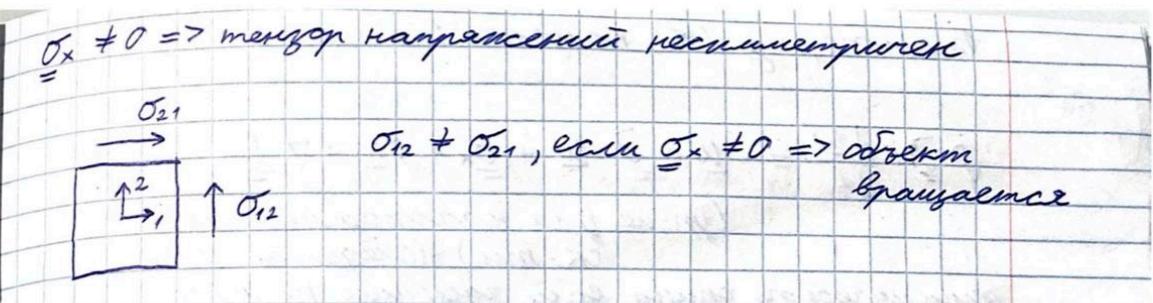


дни-ки смы менят изн-се по трём принципам:

$\rho \underline{\underline{m}}$  - подсг вспомога момента;  $\nabla \cdot \underline{\underline{M}}$  - воздей-

ствие окр-их момек;  
(сопротивление окр-их)

частич пологому давлени  
частичн)



$$\frac{d(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \frac{d\underline{\underline{\tau}}}{dt} \cdot \underline{\omega} + \underline{\underline{\tau}} \cdot \frac{d\underline{\omega}}{dt}$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}_0(R)$$

частота не может быть с.э.  
(только вращ.-с.)

(сейчас мы  
рассматриваем  
теорию микропод-  
рывов с.э./теорию  
Коссера)

$$\underline{\underline{\tau}}(r, t) = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\tau}}_0(R) \cdot \underline{\underline{Q}}^T$$

формально-логический  
эквивалентная т.в. между

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{\tau}}(r, t) = \frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} \cdot \underline{\underline{\tau}}_0(R) \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\tau}}_0(R) \cdot \left( \frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} \right)^T \odot$$

Помимо, что  $\frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}}$ ,  $\underline{\omega}$ - это ск-в. вектор

$$(\underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}})^T = -\underline{\underline{Q}}^T \times \underline{\omega}$$

$$\odot \underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\tau}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\tau}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T \times \underline{\omega} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}} \times \underline{\omega} \quad (**)$$

## 7.2 Баланс энергии для микрополярной среды

В итоге, из (\*) находим:

$$\rho \underline{\underline{J}} \cdot \frac{d \underline{\underline{w}}}{dt} = -\rho \underline{\underline{w}} \times \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{w}} + \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{m}} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}}$$

(ур-ие для нахождения угл-ой  
ск-ти) - (следствие из баланса  
динамического спина, если частицы не могут дифор-  
(тесн-тоси) ширяться)

Баланс энергии.

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[ \frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{1}{2} \underline{\underline{w}} \cdot \rho \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{w}} + \rho u \right] dV =$$

$$= \int_V [\rho f \cdot V + \rho m \cdot w] dV +$$

$$+ \int_{\partial V} \left[ f_n \cdot V + M_n \cdot w \right] dS + \int_V \rho q dV - \int_V \underline{n} \cdot \underline{h} dS$$

ок-тоя нейтр. энергия вег. массы  
через границу

$\sigma$  (ан. (\*\*))

$$\underbrace{\rho V \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} \underline{\underline{w}} \cdot \rho \frac{d \underline{\underline{J}}}{dt} \cdot \underline{\underline{w}}} + \rho \frac{d \underline{\underline{w}}}{dt} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{w}} + \rho \frac{d u}{dt} =$$

$$= \underbrace{\rho V \cdot f}_{\text{изменение объема}} + \rho \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{m}} + \underbrace{(\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \cdot V}_{\text{изменение давления}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{V}}) +$$

$$+ (\nabla \cdot \underline{\underline{M}}) \cdot \underline{\underline{w}} + \underline{\underline{M}} \cdot (\underline{\underline{w}} \cdot \nabla) + \rho q - \nabla \cdot \underline{\underline{h}}$$

Учитывая, получаем

$$\underline{w} \cdot \underline{\sigma_x} + \rho \underline{w} \cdot \underline{m} + (\nabla \cdot \underline{M}) \cdot \underline{w} + \rho \frac{du}{dt} =$$

$$= \rho \underline{w} \cdot \underline{m} + \underline{\sigma}^T \cdot (\nabla V) + (\nabla \cdot \underline{M}) \cdot \underline{w} + \underline{M}^T \cdot (\nabla \underline{w}) + \rho g - \nabla \cdot \underline{h}$$

Замечки на полях.

$$\begin{aligned} -\underline{w} \cdot \underline{\sigma_x} &= -\underline{w} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = -\underline{a} \cdot \underline{b} \times \underline{w} = -\underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{E}) \times \underline{w} = \\ &= -\underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{E} \times \underline{w} = -\underline{\sigma} \cdot (\underline{E} \times \underline{w}) = \underline{\sigma}^T \cdot (\underline{E} \times \underline{w}) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(тр-не дает} \\ \text{автоматиче-} \\ \text{ский метод)} \end{array}$$

Погодавшие в ур-ии.

$$\rho \frac{du}{dt} = \underline{\sigma}^T \cdot (\nabla V + \underline{E} \times \underline{w}) + \underline{M}^T \cdot (\nabla \underline{w}) + \rho g - \nabla \cdot \underline{h}$$

Получим баланс энергии.

мера добр-ии связана  
с исх-ми с вра-  
щательными ст-ями  
свободы (2)

Все возможные вероятные  
произведения связанны с дополн-  
ительными поворотами.

мера добр-ии, связана  
с траекториями, а также  
поворотами одних  
частей по отношению  
к другим (1)

## 8 Лекция 05.04.2022.

### 8.1 Линейная теория микрополярной среды

Упрощение постановки задачи: рассмотрим  
сдвиги малых изменений

$|\underline{u}| \ll 1; \|\nabla \underline{u}\| \ll 1; |\underline{\theta}| \ll 1; \|\nabla \underline{\theta}\| \ll 1$

$\Rightarrow \nabla = \text{const}$

$\underline{U} = \underline{u}; \underline{w} = \dot{\underline{\theta}}$

$\nabla \underline{U} + \underline{\underline{E}} \times \underline{w} = \nabla \underline{u} + \underline{\underline{E}} \times \dot{\underline{\theta}} = (\nabla \underline{u} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\theta})^*$

(см. (1) на  
пред-еи. стр.)

$\underline{\underline{E}} = (\nabla \underline{u})^s$

(в линейной  
теории упр.-ти)

$\underline{\underline{E}} = (\nabla \underline{u})^s + (\nabla \underline{u})^A + \underline{\underline{E}} \times \underline{\theta}$

$(\nabla \underline{u})^A = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} - \underline{u} \nabla) = \underline{\omega} \times \underline{\underline{E}}$

$\underline{\omega} = -\frac{1}{2} \nabla \times \underline{u}$

(связано с  
вращ-ем  
ж-ли как  
мб-но  
мех.)

$(\nabla \underline{u})^s$  - классический тензор  
дев-ши

$\underline{\underline{E}} \times \underline{\theta}$  - собственное вращение  
тела - токи

$\nabla \underline{w} = \nabla \dot{\underline{\theta}} = (\nabla \underline{\theta})^*$

(см. (2) на  
пред-еи. стр.)

je (wireless  
tensor)

(показывает изменение  
направления частичек по  
нр-ву)

45

Поставлен в ЗСГ (без учета термии):

$$\rho \ddot{u} = \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \underline{\underline{M}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \rho g - \nabla \cdot \underline{\underline{h}}$$

треугольная  
матрица  
 $\underline{\underline{\sigma}} \text{ и } \underline{\underline{M}}$  - это  
где первое  
доп. члн, композ  
наличных на  
кажд предыдущий  
стр.

$$\text{Тогда, имеем } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_e + \underline{\underline{\sigma}}_f ; \quad \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}_e + \underline{\underline{M}}_f$$

не з-м геометрическая  
относ  
ск-стн (зависим от  
ск-стн)

по определению

$$\underline{\underline{\sigma}}_f : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \underline{\underline{M}}_f : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \rho g - \nabla \cdot \underline{\underline{h}} = \rho T \dot{\eta}$$

В рез-ме:

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}}_e : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \frac{1}{\rho} \underline{\underline{M}}_e : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + T \dot{\eta}$$

Можно перейти к СВ-ой термии:  $f = u - T \eta$ , тогда

$$\dot{f} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}}_e : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \frac{1}{\rho} \underline{\underline{M}}_e : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \eta \dot{T} \Rightarrow f = f(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{M}}, T)$$

Наше быво рассмотрим изотермические процессы  
( $T = \text{const}$ ):

$$u = u(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{M}}) \quad \uparrow \\ \text{однородные} \\ \text{термии} \\ \text{доп.-чи}$$

$$\frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}}_e = \frac{du}{d\underline{\underline{\epsilon}}} ; \quad \frac{1}{\rho} \underline{\underline{M}}_e = \frac{du}{d\underline{\underline{M}}}$$

Наиболее общий вид упругой энергии деформаций:

$$\rho u e = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{de}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{de}} : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{de}}$$

$$[\underline{\underline{e}}] = [\nabla \underline{u} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{\theta}}] - \text{безразм.}$$

$$[\underline{\underline{de}}] = [\nabla \underline{\theta}] = \frac{1}{M}$$

$$[\underline{\underline{C}}] = \Pi_a, \quad [\underline{\underline{D}}] = \Pi_a \cdot M^2$$

$\underline{\underline{C}}$  - жёсткость на трансверзии;

$\underline{\underline{D}}$  - жёсткость на поворотах.

$$[\underbrace{(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1})^{1/2}}_{\parallel t}] = M \Rightarrow \text{возникает внутреннее}$$

↓  
разделение длины

возможность описывать  
новые явления  
(например, улучшив р-р в  
задаче Кирха)

Поларные теории позволяют описать поля в  
окрестности каких-либо неоднородностей  
(дырок, трещин и т.д.):



47

$$\sigma \sim a \exp\left(-b \frac{x}{l_t}\right) \quad \begin{array}{l} \text{(поправка в поле} \\ \text{напряжения от микро-} \\ \text{поларной теории)} \end{array}$$

Излож, начиная теория хорошо описывает наше в  
окрестности дзиректов + узкая пограничный модельюдиректов  
пограничные слои и поверхности дзиректов.

Если  $\mu = \kappa$  изотропной, то  $\underline{\underline{C}}$ ,  $\underline{\underline{B}}$  и  $\underline{\underline{D}}$  дают две близким  
изотропных

Кроме того, из ус-ия материальной симметрии

$$\underline{\underline{B}} = 0$$

Распишем:

$$\underline{\underline{C}} = \lambda \underline{\underline{E}} \underline{\underline{E}} + \mu \underline{\underline{e}_m} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{e}_m} + (\mu + \kappa) \underline{\underline{e}_m} \underline{\underline{e}_n} \underline{\underline{e}_m} \underline{\underline{e}_n}$$

$$\underline{\underline{D}} = \beta_1 \underline{\underline{E}} \underline{\underline{E}} + \beta_2 \underline{\underline{e}_m} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{e}_m} + \beta_3 \underline{\underline{e}_m} \underline{\underline{e}_n} \underline{\underline{e}_m} \underline{\underline{e}_n}$$

$$2P \leq = \lambda (\text{tr } \underline{\underline{E}})^2 + \mu \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}} + (\mu + \kappa) \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}}^T +$$

$\overset{||}{(\text{tr } \underline{\underline{E}})^2}$        $\overset{||}{\text{tr } (\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}})}$        $\overset{||}{\text{tr } (\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}}^T)}$   
(т.к. для  
антиси-  
мметрических  
тензоров равен  
нулю)

$$+ \beta_1 (\text{tr } \underline{\underline{E}})^2 + \beta_2 \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}} + \beta_3 \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}}^T$$

Запишем на нашем

$$\underline{\underline{e}_m} \underline{\underline{e}_n} \underline{\underline{e}_n} \underline{\underline{e}_m} : A_{ks} \underline{\underline{e}_k} \underline{\underline{e}_s} = \underline{\underline{e}_m} \underline{\underline{e}_n} A_{ks} (\underline{\underline{e}_m} : \underline{\underline{e}_k}) (\underline{\underline{e}_n} : \underline{\underline{e}_s}) =$$

$$= \underline{\underline{e}_m} \underline{\underline{e}_n} A_{mn} = \underline{\underline{A}}$$

48

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{E}} + \mu \underline{\underline{\varepsilon}}^T + (\mu + \kappa) \underline{\underline{\varepsilon}} = \lambda(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{E}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} +$$

(т.к. помимо, что  $\frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{d \underline{\underline{\sigma}}}{d \underline{\underline{\varepsilon}}}$ )  $+ \frac{\kappa \underline{\underline{\varepsilon}}}{\uparrow}$

отличает  
связь между  
вращениями Сп. в.  
и трансформациями  
напряжениями

$$\underline{\underline{M}} = \beta_1(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{E}} + \beta_2 \underline{\underline{\varepsilon}}^T + \beta_3 \underline{\underline{\varepsilon}}$$

(т.к. помимо, что  $\frac{1}{\rho} \underline{\underline{M}} = \frac{d \underline{\underline{M}}}{d \underline{\underline{\varepsilon}}}$ )



$$[\beta] = \Pi_a \cdot M^2$$

Разницу между классической и микропластичной теориями можно заметить, когда наявуются зав-ть от размера

Пример. Стержень начинки крутит; измерен модуль жёсткости на круговые

В классической теории р-ты не будут зависеть от длины стержня (жёсткость = = конст-т пропорциональности между крутильными моментами и углами поворота)

В пластичной теории будет зав-ть от длины, а параметр  $\beta$  отражает характерный размер (начинка, с какого диаметра стержни будет расхождение в упругих модулях с классической теорией)

Для малых стержней разница наблюдается при диаметрах стержней порядка 1 ММ

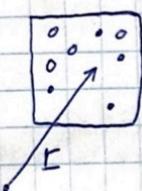
49 Для них разница проявляется рано (порядка 1 МКМ)

## 8.2 Инерционные и кинематические характеристики микрочастицы при пространственном описании

Обсудим вид ур-ий при математическом описании.

Далее.

Пространственное описание.



$N(r, t)$  - кол-во частиц в объёме, который в данный момент находятся в точке  $r$  в момент  $t$ .

У каждой частицы есть:  $\underline{j}_i^1, \underline{v}_i, \underline{w}_i, m_i$

Как задать эффективные (одиные) инерционные х-ки для пространственного объема?

$$\bar{m} = \frac{1}{N} \sum m_i - \text{средняя масса частицы}$$

$$\bar{\underline{j}} = \frac{1}{N} \sum_i \underline{j}_i^1 - \text{характеризует средний размер и форму частиц в объеме, а также ориентацию (тип анизотропии материала)}$$

(В мат-ии описания тензор инерции характеризует распределение массы по объему, а в кир-ии описания геометрические хар-ки)

$$\bar{n} = \frac{N}{V} - \text{нормированное расп-ие частиц}$$

$$\rho = \frac{Nm}{V} = nm$$

$$\bar{\underline{j}} = \frac{1}{Nm} \sum_i \underline{j}_i^1 - \text{геометрический тензор инерции (приходящийся на единицу массы)}$$

Тензор инерции на единицу массы:

$$n \hat{\underline{J}} = \rho \hat{\underline{J}}$$

↑                      ↓  
 средний              на единицу  
 тензор инерции,      массы  
 присоединяющийся к  
 одному частицам

Кол-во ф-ие:

$$\sum_i m_i \underline{V}_i = Nm \underline{V} \quad (\text{суммарное кол-во ф-ие всех}\br/>
\text{частич сопр-ет с эффектив-}\br/>
\text{ным кол-вом ф-ие})$$

$$\sum_i \rho_i \underline{V}_i = \rho \underline{V} \quad (\text{так введен определение ск-тии (exp-}\br/>
\text{для многодатных сред)})$$

Дин-ий спкт (собственні ким-ні маневи):

$$\sum_i \hat{\underline{J}}_i \cdot \underline{w}_i = N \hat{\underline{J}} \cdot \underline{w} \Rightarrow \underline{w} = \frac{1}{N} \hat{\underline{J}}^{-1} \cdot \sum_i \hat{\underline{J}}_i \cdot \underline{w}_i$$

\ Nm (суммарная масса  
частич)

Известно, что кол-во ф-ие есть производная  
кинематической энергии по ск-тии:

$$\underline{K} = \frac{\partial K}{\partial \underline{V}}$$

дик-ий спкт есть производная  
кинематической энергии по ун-ой ск-ти:

$$\frac{\partial K}{\partial \underline{w}}$$

Можно добиться вида - что энергия каждого в-ва:

$$\hat{K}_i = \frac{1}{2} m_i \underline{V}_i^2 + \frac{1}{2} \underline{W}_i \cdot \hat{\underline{J}}_i \cdot \underline{W}_i$$

$$K_i = \frac{1}{2} \rho_i \underline{V}_i^2 + \frac{1}{2} \underline{W}_i \cdot \underline{J}_i \cdot \underline{W}_i$$

Приложимо и ул-во ск-ти можно найти:

1) усреднение кол-ва дв-ия и ~~момента~~ момента кол-ва двин-ия (делали выше);

2) усреднение кол-ва тепла

1) и 2) будут давать разные ответы в общем случае  
(ответы будут одинаковы при мат-ом описании)

Мат-ое описание:  $\underline{\underline{J}}(\underline{r}, t) = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{R}) \cdot \underline{\underline{Q}}^T$   
↑ известный параметр

Пр-ое описание:  $\underline{\underline{J}}$  - поле внутренней переносимой (изменяется при попадании в рассчитываемый обём других частичек)  
↑ иерархии  
помок через границу

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{\underline{J}} dV = - \underbrace{\int_{\partial V} \underline{n} \times \underline{V} \rho \underline{\underline{J}} dS}_{\text{помок иер-}} + \underbrace{\int_V \rho \underline{\chi} dV}_{\text{источников лин,}} \quad \begin{array}{l} \text{изл-ие,} \\ \text{консамдация} \end{array}$$

и т.д.

$\chi$  - определяющий структурное изменение, происходящее в материнце

В лок-ой форме:  $\frac{d \underline{\underline{J}}}{dt} = - \underline{\underline{V}} \times \nabla \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{\chi}}$  - кинетичес-  
кое ур-ие

$\underline{\underline{\chi}}$  - новый исходящий член, для которого  
необходимо сформулировать определенное  
составление.

Кинетическое ур-ие получаем, как тензор  
изменяется в рассмотриваемой  
(-) кр-ва с течением времени.

$\underline{\underline{\chi}}$  зависит от (-) кр-ва и времени ( $t = ut$ )

Также  $\underline{\underline{\chi}}$  может зависеть от 1) температуры;  
2) давления (при изотермич-  
еских частях);  
3) температуры при фазовых  
переходах;  
4) электрического поля где  
5) .... дипольных

12.04.22

Напишем в пространственном описании тензор изменения  
в векторе, переходя на его представление в мат-ан  
описании:

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{Q}}(r, t) \cdot \underline{\underline{J}_0}(r, t) \cdot \underline{\underline{Q}}^T(r, t)$$

$$\dot{\underline{\underline{Q}}}(r, t) = \frac{d \underline{\underline{Q}}}{dt} + \underline{\underline{V}} \cdot \nabla \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{W}} \times \underline{\underline{Q}}$$

наст-ни из осн-ой  
системы  
ур-ия  
(баланс массы,  
квл-ва ф-ии,  
дик-ия сплош-  
этерии)

$$\dot{\underline{\underline{J}}} = \underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{J}_0} \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{W}} \times \underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}} \times \underline{\underline{W}}} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}_0} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T + \underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{J}_0} \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{\chi}} - \text{омн-ен за сим-ии  
изи-и в среде}}$$

## 9 Лекция 12.04.2022.

### 9.1 Размышления о способах составления определяющих соотношений в различных ситуациях (нагрев, давление, ориентационная поляризация)

В лок-ой форме:  $\frac{d \underline{\underline{J}}}{dt} = - \underline{\underline{V}} \times \nabla \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{\chi}}$  - кинетичес-  
кое ур-ие

$\underline{\underline{\chi}}$  - новый источниковый член, для которого  
необходимо сформулировать определяющее  
соотношение.

Кинетическое ур-ие показывает, как тензор  
инерции изменяется в рассматриваемой  
(.) пр-ва с течением времени.

$\underline{\underline{\chi}}$  зависит от (.) пр-ва и времени ( $t$  и  $t$ ).

Также  $\underline{\underline{\chi}}$  может зависеть от 1) температуры;  
2) давления (при изменении  
также частич);  
3) температуры при фазовых  
переходах;  
4) электрического поля (если  
5) ... диполей

12.04.22

Напишем в пространстве описание тензора инерции  
в виде, похожем на его представление в лок-ой  
описании:

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{Q}}(r, t) \cdot \underline{\underline{J}_0}(r, t) \cdot \underline{\underline{Q}}^T(r, t)$$

$$\dot{\underline{\underline{Q}}} = \frac{d \underline{\underline{Q}}}{dt} + \underline{\underline{V}} \cdot \nabla \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{W}} \times \underline{\underline{Q}}$$

нах-ии из осн-ой  
системы  
ур-ия

$$\dot{\underline{\underline{J}}} = \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{J}_0} \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}_0} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{J}_0} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$$

(баланс массы,  
каль-ка др-ия,  
дик-то спина,  
термик)

$$\underline{\underline{W}} \times \underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}} \times \underline{\underline{W}}$$

$\underline{\underline{\chi}}$  - отв-ен за суп-ве  
изи-и в среде

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

репрезентативный объект

(например, при изучении гранулов распределения)

$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}} E$  - инерцией тела и его массы.  
(эффективная средняя х-ка при изотропном распределении гранул в материале)

Св-во мат-ой обтекаемости: происходящие процессы не должны зависеть от системы отсчета, при-ого или мат-о описаний

Зарев:  $\underline{\underline{J}}(r, t) = \underline{\underline{J}_0}(r) \left(1 + \alpha(T(r, t) - T_0)\right)^2$  ( $\alpha$  - коэф-т линейного расширения)

$\underline{\underline{J}_0}$  (нем завис. от  $r$ ,  
н.к. & однородное распред-ие)

Вспоминаем:  $\dot{\underline{\underline{J}}} = \underline{\underline{w}} \times \underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}} \times \underline{\underline{w}} + \underline{\underline{\chi}}$

$\underline{\underline{J}} E \quad \underline{\underline{J}} E$

взаимоуничтожение  
( $\underline{\underline{w}} \times \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{w}}$ )

$\dot{\underline{\underline{J}}} = \frac{d\underline{\underline{J}}}{dt} E + \underline{\underline{U}}(r, t) \cdot (\nabla \underline{\underline{J}}(r, t)) E = \underline{\underline{\chi}} = \underline{\underline{\chi}} E$

$\rightarrow 0$  (нем прислед. вих ск-ли, только нагреваем)

$\underline{\underline{\chi}} = 2 \underline{\underline{J}_0} \left(1 + \alpha(T(r, t) - T_0)\right) \frac{dT(r, t)}{dt}$

54

(пост-ый член получим, исходя из представления о микроструктуре)

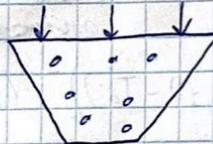
Если частицы = диски, то при их изменении в зоне они начнут вращаться

$$\nabla \frac{d\omega}{dt} = m$$



Давление на м-л.

А эксперимент: давл на м-л  $\Rightarrow$  частицы вращаются



степень сдавления частиц зависит от тензора напряжений

$$\underline{\sigma} = -p \underline{E} + 2 \mu(\underline{J}) \underline{d} \quad \leftarrow \text{девиатор градиента скорости}$$

$$\rho \underline{\dot{v}} = \rho \underline{g} + \nabla \cdot \underline{\sigma} \quad \leftarrow \text{существенно зав-т от радиуса частиц}$$

$$\underline{J} = \underline{J}_{\parallel} (принимаю не зависна) \Rightarrow \underline{\chi} = \underline{\chi}_{\parallel}$$

$J_* \neq 0$  - при минимальной разнице частиц, до которой м-л вращение



нужно придумать спр-е соотношение, чтобы реш-е имело такой вид

$$\underline{\chi} = \underline{\chi}_* + \underline{\chi}_0 e^{i\omega t}$$

$$J = J_* + (J_0 - J_*) e^{i\omega t}$$

Помимо, что  $\frac{dJ}{dt} = \chi$

$$\chi = \alpha (J - J_*)$$

Пусть  $\alpha = k \operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}}$   $k$ -жесткость частиц.

Пр-ка: чем больше давл-ие, тем больше  $\chi$  (быстрее измельчение)  
чем больше  $k$ , тем больше  $\chi$ -челюстно!  $\downarrow$  ясно

Пусть тогда  $\alpha = \frac{1}{k} (\operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}})$  } есть функция  $f(p, I_1)$

или

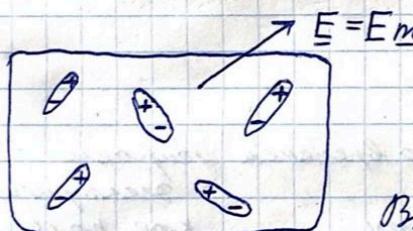
если  $q$ -из  $f(p, I_1, I_2)$

Например,  $\alpha = \frac{1}{k} (\alpha_1 \operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}} + \alpha_2 I_2)$ ;  $I_2 = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$

(изотропное  $q$ -из можно заб-ть только от инвариантов теплода)

Однотипническая нагрузка.

$I_1$  - частицы крупные, надо давить;  
 $I_2$  - частицы легкие разрушить трением.



М-и, состоящий из заряженных частиц.

Внешнее электрическое поле выравнивает диполи, а температурное поле стремится разрушить эту одноднородность

$$\underline{\underline{J}} = \frac{1}{N} \sum_i \underline{\underline{J}}_i$$

$$\underline{\underline{J}}^{\text{sh}} = \frac{1}{N} \sum_i \underline{\underline{J}}_i^{\text{sh}}$$

шаровая часть (хар-ем средний разнр. частиц и не связана с её 56 однотипней)

$$\underline{\underline{J}}^{\text{dev}} = \frac{1}{N} \sum_i \underline{\underline{J}}_i^{\text{dev}} - \text{гравиторная часть}$$

$$\underline{\underline{J}}^{\text{sh}} = \frac{1}{3} (\text{tr} \underline{\underline{J}}) \underline{\underline{E}}$$

Динамическое; неизменяется  
только ориентация, потому  
что массовая часть не за-  
висит от времени

$$\underline{\underline{J}} \sim \int_V [(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{r}}) \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{r}} \underline{\underline{r}}] dV \quad \text{tr} \underline{\underline{J}} \sim 2r^2$$

$$\underline{\underline{J}}_i(t) = \underline{\underline{Q}}_i \cdot \underline{\underline{J}}_i^0 \cdot \underline{\underline{Q}}_i^T; \quad \underline{\underline{Q}}_i^T \cdot \underline{\underline{Q}}_i = \underline{\underline{E}}$$

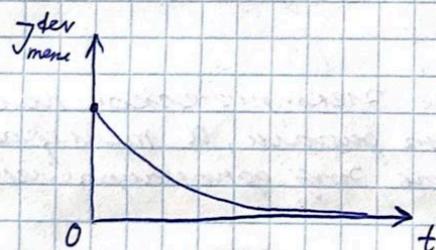
$$\text{tr} \underline{\underline{J}}_i = \text{tr} \underline{\underline{J}}_i^0$$

Следует не за-  
висит от времени

Гравиторная часть зависит от массы, как  
часть она ориентирована

В данном случае необходимо зори-ть кинематическое ур-ие только для гравитора.

Для меновского ур-ия:



$$\chi_{\text{мене}} = -\alpha J_{\text{мене}}$$

$$\left( \text{нашemu, зно } \frac{dJ}{dt} = \chi \right)$$

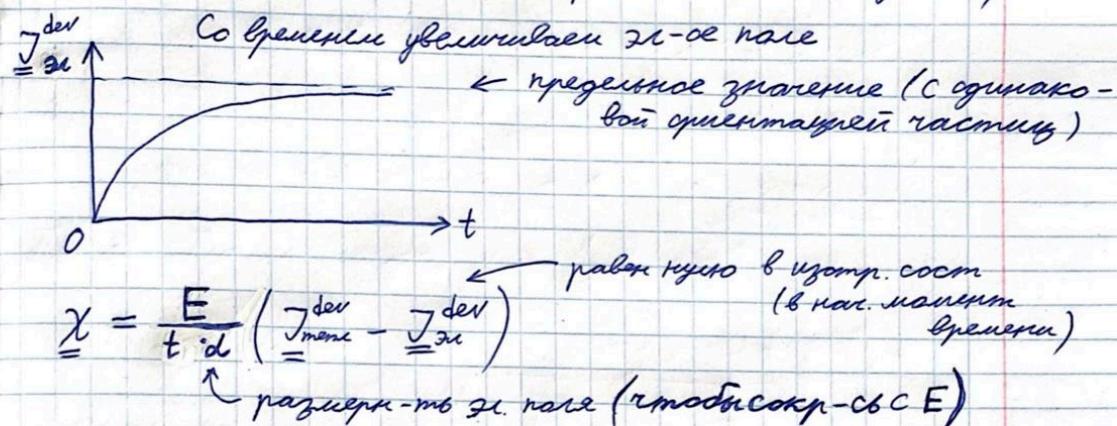
Со временем убывает  
электромагнитное поле

$$J_{\text{мене}}^{\text{dev}} \rightarrow 0$$

$$\underline{\underline{J}}_{\text{мене}}^{\text{dev}} = A e^{-\alpha t}$$

Пусть  $\alpha = \frac{1}{t_r}$  (реальное  $t_r$ , меньшее убывает  $\chi_{\text{макс}}$ )

$t_r$  - время релаксации  $t_r = t_r(T)$  - убывает с  $T$ -изменением (с ростом температуры время релаксации падает)



$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}}_1 (E - \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}}) + \underline{\underline{J}}_2 \underline{\underline{m}} \underline{\underline{m}} \quad (\text{после максимального притяжения же наше полужесткое трансверсально изотропное } \underline{\underline{m}} \text{-е})$$

Удобно определить  $t_r$ :

$$\frac{d \underline{\underline{J}}^{\text{dev}}}{dt} = \chi_{\text{макс}} + \chi_{\text{зп}}$$

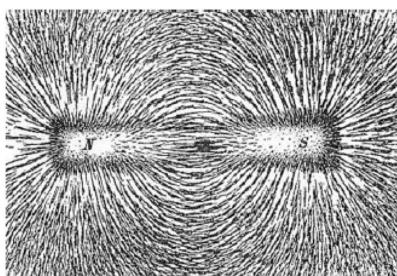
Демонстрационная формула  $\underline{\underline{J}}(t_r, t_1)$

Далее из эксперимента определяют  $t_r$  и находят  $t_1$ .

Параметры могут подбираться так, чтобы их можно было бы определить из экспериментов

## 10 Лекция 19.04.2022.

### 10.1 Уравнения Максвелла



$$\oint_{\partial V(t)} \underline{B}(\underline{z}, t) \cdot \underline{n}(\underline{z}, t) d\underline{s} = 0$$

$\underline{B}$  - вектор магнитного поля,  
(вектор магнитной индукции)

$$\int_V \nabla \cdot \underline{B} dV = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

Магнитный поток через поверхность

$$\underline{\Phi}(t) = \int_{S(t)} \underline{n}(\underline{z}, t) \cdot \underline{B}(\underline{z}, t) d\underline{s}$$

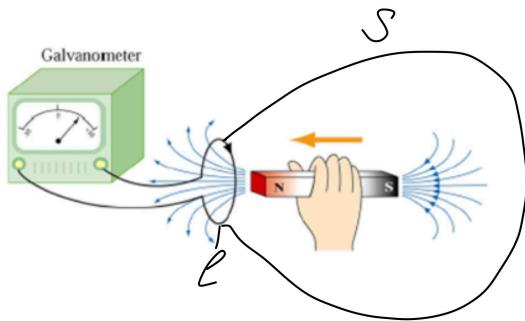
В своих работах Максвелл подробно не рассказал, как ему удалось получить уравнения. В то время ещё не была разработана теория Коссера (теория микрополярных сред, которую мы рассмотрели выше), поэтому Максвелл мог рассматривать вращение только как твёрдого целого, откуда нельзя получить уравнения Максвелла. Видимо, он их получил, основываясь на интуиции.

По мере развития науки поняли, что уравнения Максвелла выполняются далеко не всегда, например, не выполняются (вообще не работают) на микромасштабе.

Елена Александровна Иванова пыталась рассматривать телеграфное уравнение, которое описывает распространение токов в электроцепи. Оказалось, что телеграфные уравнения, описывающие проводимости в диэлектриках и проводниках, кардинально противоположны. Одно из них можно получить из уравнений Максвелла, а другое нельзя. Обратилась к физикам, они сказали, что все специалисты это знают, но никто не объясняет, почему это так.

Если рассматривать уравнения Максвелла как данность, то непонятно, что можно в них модифицировать.

На слайде представлен магнит с ориентированными в его магнитном поле опилками. Введён вектор магнитного поля  $\underline{B}$  (индукция магнитного поля), который характеризует ориентацию опилок. Рассмотрена любая замкнутая поверхность, содержащая магнит. Видим, что при любом расположении поверхности, суммарный поток через неё равен нулю. Данный факт трактуется как отсутствие магнитных зарядов.



$$\frac{d}{dt} \int_S \underline{\beta}(\underline{z}, t) \cdot \underline{n}(\underline{z}) d\underline{S} = - \oint_L \underline{E}(\underline{z}, t) \cdot \underline{\tau}(\underline{z}) d\underline{l}$$

$$\frac{d}{dt} \int_S \underline{\beta}(\underline{z}) \cdot \underline{n}(\underline{z}, t) d\underline{S} = - \oint_L \underline{v}(\underline{z}, t) \times \underline{\beta}(\underline{z}) \cdot \underline{\tau}(t) d\underline{l}$$

$$\frac{d}{dt} \int_S \underline{\beta}(\underline{z}, t) \cdot \underline{n}(\underline{z}, t) d\underline{S} = - \oint_L \underbrace{[\underline{E}(\underline{z}, t) + \underline{v}(\underline{z}, t) \times \underline{\beta}(\underline{z}, t)]}_{\text{механическая сила}} \cdot \underline{\tau}(\underline{z}, t) d\underline{l}$$

Следующий опыт (первое уравнение на слайде): изменяя поток магнитного поля через площадь, ограниченную контуром (изменяя за счёт движения магнита, кольцо находится в переменном магнитном поле). Такое изменение создаёт электричество в рассматриваемом контуре, характеризуемое вектором  $\underline{E}$  (напряжённость электрического поля).

Ещё один опыт (второе уравнение на слайде): изменяя поток магнитного поля через площадь, ограниченную контуром (изменяя за счёт движения самого контура - его нормали, изменения формы). Тоже будем наблюдать ток в проводке.

Объединяя, получаем третье уравнение на слайде: изменение магнитного потока через контур соответствует некой электродвижущей силе, возникающей в проводнике.

$$\frac{d}{dt} \oint_{S(t)} \underline{\beta}(z, t) \cdot \underline{n}(z, t) dS = 0 \Rightarrow$$

если замкнём контур на предыдущем слайде, то изменение потока со временем равно нулю

$$\oint_{S(t)} \underline{\beta}(z, t) \cdot \underline{n}(z, t) dS = \oint_{S(0)} \underline{\beta}(z, 0) \cdot \underline{n}(z, 0) dS$$

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \underline{\beta} \cdot \underline{n} dS = \int_{S(t)} \left( \frac{\partial \underline{\beta}}{\partial t} + \underline{v} \nabla \cdot \underline{\beta} \right) \cdot \underline{n} dS + \oint_{\Gamma} (\underline{\beta} \times \underline{v}) \cdot \underline{\hat{e}} d\ell$$

Транспортная теорема (чисто из математики, как пронести производную через интеграл):

Подставляя первое уравнение с предыдущего слайда в транспортную теорему:

$$\int_{S} \left( \frac{\partial \underline{\beta}}{\partial t} + \nabla \times \underline{E} \right) \cdot \underline{n} dS = 0 \Rightarrow \frac{\partial \underline{\beta}}{\partial t} + \nabla \times \underline{E} = 0$$

Используя при этом теорему Стокса (переход от интеграла по контуру к интегралу по поверхности)

*второе уравнение Максвелла*

Транспортная теорема = вносим производную под знак интеграла по определённым правилам.

В итоге, получили второе уравнение Максвелла. Важно: для полей  $\underline{B}$  и  $\underline{E}$  не нужна материя (они существуют вокруг всего). Рассматриваемые контуры воображаемы.

З-е сохранение электрического заряда.

Изменение заряда в объёме:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} q dV = \oint \left[ q (\underline{v}^s - \underline{v}) - j \right] \cdot \underline{n} dS$$

(скорость движения границ объема)      (скорость движения зарядов)

Подвод заряда через границу:

Неконвективные токи  
(аналог передачи тепла в уравнении баланса энергии):

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q \underline{v} + j) = 0 \Rightarrow \frac{\delta q}{\delta t} + q \nabla \cdot \underline{v} + \nabla \cdot j = 0$$

(в локальной форме через материальную производную)

$$\frac{d}{dt} \int_S D \cdot \underline{n} dS = \oint [H + D \times \underline{v}] \cdot \underline{E} dl + \int_S [q (\underline{v} - \underline{v}_f) - j] \cdot \underline{n} dS$$

(Общее решение верхнего уравнения)

$\underline{D}$  и  $\underline{H}$  – магнитные поля и имеют свою подвижность

$\underline{D}$  – вектор магнитной среды

Поля  $D$  и  $H$  связаны с массой

$\underline{H}$  – вектор начинавшего магнитного поля

Следующие уравнения (на слайде) связаны с электрическими зарядами.

Электрический заряд всегда связан с массой (он не может без неё существовать). Заряд не является аддитивным по массе (если добавляем массу, то не значит, что добавили заряд, т.к. добавляемая масса может быть, например, нейтрально заряженной).

$q$  (на слайде) – удельная величина заряда по объёму.

Делаем нужную нам поверхность

(интеграл по контуру в последнем выражении на предыдущем слайде обнуляется)

$$\oint_S \underline{D} \cdot \underline{n} dS = \oint_S [q(v^s - v) - j] \cdot \underline{n} dS = \int_V q dV$$

$$\text{з-4 Гаусса } \nabla \cdot \underline{D} = q$$



$$\int_S \left( \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + q \underline{v} \right) \cdot \underline{n} dS = \oint_{\ell} \underline{H} \cdot \underline{\epsilon} d\underline{l} - \int_S \underline{j} \cdot \underline{n} dS = \int_S (\nabla \times \underline{H} - \underline{j}) \cdot \underline{n} dS$$

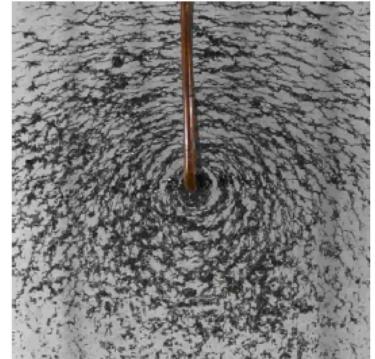
$$-\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \nabla \times \underline{H} = q \underline{v} + \underline{j}$$

$$\underline{D} = \lambda \underline{E}, \quad \underline{B} = \mu \underline{H} \quad (\text{Максвелл-Лоренца})$$

$$[E] = \frac{\text{сила}}{\text{заряд}}; \quad [D] = \frac{\text{заряд}}{\text{площадь}^2}$$

$$[B] = \frac{\text{сила}}{\text{заряд} \cdot \text{площадь} / \text{время}}$$

$$[H] = \frac{\text{заряд} / \text{время}}{\text{площадь}}$$



Преобразование второй части общего решения, полученного из закона сохранения заряда.  
Последнее уравнение Максвелла.

Есть две пары похожих характеристик:  $\underline{E}$  и  $\underline{B}$  вводили без наличия зарядов (просто электрические и магнитные поля без наличия материи);  $\underline{D}$  и  $\underline{H}$ , для которых необходимо существование материи. Есть гипотеза Максвелла-Лоренца линейной связи между этими парами характеристик.

Вектор диэлектрической проницаемости  $\underline{\epsilon}$  зернистого заряда  $e \delta(r)$

$$\underline{D} = D(r) \underline{\epsilon}_r = \frac{e}{4\pi r^2} \underline{\epsilon}_r$$

Вектор напряженности поля может быть записан  
заряда  $r$

$$\underline{H} = H(r) \underline{\epsilon}_\phi = \frac{1}{4\pi r} \underline{\epsilon}_\phi$$

$$\underline{F}_e = \alpha e' \underline{E} \quad ; \quad \frac{d\underline{F}_m}{dr} = \beta \underline{T}' \times \underline{B}$$

$$\underline{F}_e = \frac{\alpha}{4\pi r} \frac{ee'}{r^2} \underline{\epsilon}_r \quad ; \quad \frac{d\underline{F}_m}{dr} = -\frac{\beta \beta}{4\pi r} \frac{\underline{T} \underline{T}'}{r} \underline{\epsilon}_r$$

3-й Кулон

3-й Дюо-Савара

система ССС (самодиаграмм, градиент, скважина)  
 ej. заряда; 2 положения заряда  $I_{ESU}$  (electro-static unit)  
 расположенных на расстоянии  $r$  от фокусов  
 гр. на гр с единичной силой  $F_{esu} = \frac{1 \text{ кг-см}}{c^2}$ ,

$$F_e = \frac{ee'}{r^2} e_r \quad I_{ESU} = \frac{4\pi^{1/2} a r^{3/2}}{c}$$

система Хевисайда - коренса  $\frac{\alpha}{\beta} = 1$

Радиоизбыток тока  $q_v = \frac{4\pi^{1/2} a r^{5/2}}{c^2}$

$$\frac{dF_m}{dz} = -\frac{\beta B}{c} \frac{-TT'}{r} e_r \Rightarrow [B\beta] = \frac{c^2}{ar^2} \sim \frac{1}{v^2}$$

$$ccc \quad B\beta = \frac{4\pi}{c^2} ; \quad \text{Хевисайд} \quad B\beta = \frac{1}{c^2}$$

$$\text{Гаусс} \quad [E] = \frac{e^{1/2}}{c\omega^{1/2} c} \quad ; \quad [D] = \frac{e^{1/2}}{c\omega^{1/2} c}$$

$$[\underline{B}] = \frac{e^{1/2}}{c\omega^{3/2}} \quad ; \quad [\underline{H}] = \frac{e^{1/2} c\omega^{1/2}}{c^2}$$

Кельвинг - Лоренц

$$[\underline{B}^G] = c[\underline{B}] \quad ; \quad [\underline{H}^G] = \frac{1}{c}[\underline{H}]$$

$$\boxed{\begin{aligned} D &= E \\ H &= B \end{aligned}}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \nabla \times \underline{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = 4\pi g - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \nabla \times \underline{H} = \frac{4\pi}{c} (g - \underline{J})$$

система СС

Заряд  $q$  будет проходить через ток.  
1 Ампер - поступательный ток, который проходит при прохождении из 1 параллельных проводников бесконечной длины и имеющих малую погрешность, расположенных в вакууме на расстоянии 1 м. Воздействие на единицу участка прохождения тока имеет величину  $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$

$$|F| = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}$$

$\mu_0$  - магнитная постоянная вакуума

Кулон - величина заряда, прошедшая  
через сечение проводника при силе тока 1 А  
за 1 с

$$\left[ \frac{q}{A} \right] = \frac{A \mu^2}{A^2 C^2} \quad \frac{q}{A} = \mu_0 C^2 = \frac{1}{\epsilon_0}$$

$\epsilon_0$  - электрическая постоянная вакуума

$$(1) \quad \underline{\underline{D}} = \epsilon_0 \underline{\underline{E}}, \quad (2) \quad \underline{\underline{\beta}} = \mu_0 \underline{\underline{H}}, \quad (3) \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{C^2}$$

$$(4) \quad \nabla \cdot \underline{\underline{D}} = 0 \quad (5) \quad \nabla \times \underline{\underline{E}} = - \frac{\partial \underline{\underline{B}}}{\partial t}$$

$$(6) \quad \nabla \cdot \underline{\underline{E}} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (7) \quad \nabla \times \underline{\underline{\beta}} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 C^2} \underline{\underline{J}}$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{J}} = - \frac{\partial q}{\partial t} - 3-я \text{ сохранение заряда}$$

## 10.2 Связь уравнений Максвелла с уравнениями механики

Возвращаемся к полученным ранее механическим уравнениям для полярных сред.

Баланс количества движения:

$$\rho \frac{\delta \underline{v}}{\delta t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} \quad (1)$$

Баланс динамического спина

$$\rho \frac{\delta (\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega})}{\delta t} = \underline{\underline{\sigma}}_{\times} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}} + \rho \underline{m} \quad (2)$$

Баланс энергии:

$$\rho \frac{\delta u}{\delta t} = \underline{\underline{\sigma}} : (\nabla \underline{v} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\omega}) + \underline{\underline{M}} : \nabla \underline{\omega} + \rho q - \nabla \cdot \underline{h} \quad (3)$$

Две диаметрально противоположные точки зрения: дальнодействия (сила может передаваться просто абстрактно через пустоту) и близкодействия (всегда есть посредник, который передаёт воздействие от одного объекта к другому; этот посредник не имеет ничего общего с реально наблюдаемой материей).

Будем моделировать вакуум неким континуумом (для того, чтобы можно было пользоваться континуальными моделями мы должны стоять на теории близкодействия: есть некий агент, который передаёт влияние одного объекта на другой объект).

Максвелл и Герц тоже работали, основываясь на близкодействии (наличии некого эфира), но затем научный мир стал отказываться от этой точки зрения (так как не были развиты тео-

рии с вращательными степенями свободы, а, если строить теории близкодействия, основываясь только на трансляционных степенях свободы, то придём к противоречиям).

Сейчас, когда появились теория Коссера (микрополярных сред), возвращаются к концепции эфира, но процесс возвращения происходит медленно, так как многие по-прежнему считают, что концепция эфира и близкодействие – отсталые. Но даже вакуум (пустота) наделяется огромным количеством характеристик (у него есть магнитная постоянная, электрическая постоянная, скорость распространения света, скорость распространения гравитационных волн) - (но с другой стороны, это смешно считать, что у пустоты есть множество физических характеристик).

Итак, мы считаем, что есть эфир (некий континуум, который передаёт что-то из одной точки в другую).

Рассмотрим простую ситуацию – частицы эфира неподвижны и т.д.:

$$\underline{v} = 0; \quad \underline{\sigma} = 0; \quad \rho = \text{const}; \quad f = 0 \quad (4)$$

Таким образом, уравнение (1) будет удовлетворяться тождественно.

Плюс тогда

$$\frac{\delta}{\delta t} (.) = \frac{d}{dt} (.) + \overset{=0}{\underline{\hat{v}}} \cdot \nabla (.) = \frac{d}{dt} (.) \quad (5)$$

Примем следующее определяющее соотношение для тензора моментных напряжений (является антисимметричным):

$$\underline{\underline{M}} = \mu \underline{B} \times \underline{\underline{E}} \quad (6)$$

Размерности:

$$\left( [B] = \text{Тесла} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} \right) \text{ и } \left( [M] = \text{Па} \cdot \text{м} = \frac{\text{Н}}{\text{м}} \right) \Rightarrow [\mu] = \text{А} \quad (7)$$

Распишем дивергенцию  $\underline{\underline{M}}$ :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{M}} = \mu \nabla \cdot (\underline{\underline{E}} \times \underline{B}) = \mu \nabla \times \underline{B} \quad (8)$$

Далее принимаем тензор инерции шаровым:

$$\underline{\underline{J}} = J_0 \underline{\underline{E}} \quad (9)$$

Баланс динамического спина (2) принимает следующий вид:

$$\rho_0 \frac{d(J_0 \omega)}{dt} = \mu \nabla \times \underline{B} + \rho_0 \underline{m} \quad (10)$$

Выразим  $\nabla \times \underline{B}$ :

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} (\rho_0 J_0 \omega) - \frac{\rho_0}{\mu} \underline{m} \quad (11)$$

Получили уравнение, которое по структуре совпадает с **четвёртым уравнением Максвелла**:

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d \underline{E}}{dt} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \underline{j} \quad (12)$$

Сравнивая (11) и (12), получаем:

$$\underline{E} = \frac{\rho_0 J_0 c^2}{\mu} \underline{\omega} \text{ и } \underline{j} = -\frac{\varepsilon_0 c^2 \rho_0}{\mu} \underline{m} \quad (13)$$

Далее будем считать, что повороты малы (линейная микрополярная теория), тогда

$$\underline{\omega} = \frac{d\underline{\theta}}{dt} \quad (14)$$

и из (13):

$$\underline{E} = \frac{\rho_0 J_0 c^2}{\mu} \frac{d\underline{\theta}}{dt} \quad (15)$$

Далее начинаем работать с балансом энергии:

$$\underline{\underline{M}} : \nabla \underline{\omega} = \quad (16)$$

используя определяющее соотношение (6),

$$\begin{aligned} &= \mu (\underline{B} \times \underline{e}_k e_k) : (\nabla \underline{\omega}) = \mu (\underline{B} \times \underline{e}_k) \cdot \underbrace{\nabla (\underline{e}_k \cdot \underline{\omega})}_{\nabla \text{ только на } \omega} = \mu \underbrace{\nabla \cdot (\underline{B} \times \underline{e}_k)}_{\nabla \text{ действует только на } \omega} \underline{e}_k \cdot \underline{\omega} = \\ &= \mu \underbrace{\nabla \cdot (\underline{B} \times \underline{\omega})}_{\nabla \text{ только на } \omega} = \mu \underline{B} \cdot (\underline{\omega} \times \nabla) = -\mu \underline{B} \cdot (\nabla \times \underline{\omega}) \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляем в баланс энергии (3), принимая, что  $h = 0$  и  $q = 0$ :

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \mu \underline{B} \cdot \left( \nabla \times \frac{d\underline{\theta}}{dt} \right) \quad (18)$$

Так мы в линейной теории (малые повороты), то энергия

$$u = \frac{1}{2} \kappa (\nabla \times \underline{\theta})^2 \quad (19)$$

и равенство (18) перепишется в виде:

$$\rho_0 \kappa (\nabla \times \underline{\theta}) \cdot \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \underline{\theta}) = -\mu \underline{B} \cdot \frac{d}{dt} (\nabla \times \underline{\theta}) \quad (20)$$

Следовательно,

$$\underline{B} = -\frac{\rho_0 \kappa}{\mu} \nabla \times \underline{\theta} \quad (21)$$

Видим, что  $\underline{B}$  есть ротор какой-то векторной величины, поэтому дивергенция  $\underline{B}$  равна нулю:

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (22)$$

Получили **первое уравнение Максвелла**.

Дифференцируем равенство (21):

$$\frac{d\underline{B}}{dt} = -\rho_0 \frac{\kappa}{\mu} \nabla \times \frac{d\underline{\theta}}{dt} \quad (23)$$

Из (15):

$$\nabla \times \underline{E} = \frac{\rho_0 J_0 c^2}{\mu} \nabla \times \frac{d\underline{\theta}}{dt} \quad (24)$$

Таким образом, из (23) и (24):

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{J_0 c^2}{\kappa} \frac{d\underline{B}}{dt} \quad (25)$$

Получили **второе уравнение Максвелла** (должно выполняться равенство  $\kappa = J_0 c^2$ ).

Возьмём дивергенцию от обеих частей уравнения (12):

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \nabla \cdot \underline{E} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \nabla \cdot \underline{j} \quad (26)$$

Известно, что

$$\nabla \cdot \underline{j} = -\frac{dq}{dt} \quad (27)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{dq}{dt} \quad (28)$$

Получили **третье уравнение Максвелла**.

Таким образом, показали, что из механики (в самой простой среде) можем получить уравнения Максвелла. Смогли связать механические величины с электродинамическими величинами.

Большой плюс в том, что теперь знаем, каким образом можем модифицировать уравнения Максвелла, рассматривая более сложные среды с дополнительными слагаемыми и множителями (и тем самым обобщить уравнения Максвелла на более общие случаи).

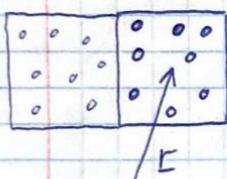


# 11 Лекция 26.04.2022. Раздел 3. Только трансляционные степени свободы (аналогично разделу 1), но откажемся от предположения аддитивности по массе

## 11.1 Вывод волнового уравнения Максвелла

## 11.2 Закон сохранения массы и баланс плотности распределения числа частиц для однокомпонентной среды

(3) Вернёмся к рассмотрению сред только с трансляционными степенями свободы, но откажемся от предположения аддитивности по массе



$$\rho = \frac{\sum m_i}{V}$$

(плотность массы)

$$n = \frac{N}{V}$$

(плотность распределения числа частиц)

$$\sum m_i = Nm_0$$

(пусть все частицы имеют массу  $m_0$ )

$$\rho = \frac{Nm_0}{V} = n m_0$$

(т.е при сохранении массы каждой частицы  $m_0$ , равной  $m_0$ ;  
при отсутствии зарождения новых частиц вводим новую переменную  $n$  бессмысленно)

Необходимо вводить  $n$ , если есть движение частиц (масса остаётся той же самой, а кол-во частиц изменяется) / внутренние структурные изменения.

Баланс для  $m$ -ти числа частиц:

$$\frac{d}{dt} \int_V n dV = - \int_V n \cdot \underline{v} n dS + \int_V \chi dV$$

хар-ем ск-ть зарождения (и исчезновения) частиц в данной (-) пр-ва

В лок-ой форме:

$$\frac{dn}{dt} + \nabla \cdot (\underline{V} n) = \chi$$

Вспомним баланс массы:

$$\frac{dp}{dt} + \nabla \cdot (\rho \underline{V}) = 0$$

$$\frac{\delta n}{\delta t} + n \nabla \cdot \underline{V} = \chi$$

$$\frac{\delta p}{\delta t} + \rho \nabla \cdot \underline{V} = 0$$

||

$$\nabla \cdot \underline{V} = \frac{1}{n} \chi - \frac{1}{n} \frac{\delta n}{\delta t} =$$

$$= \frac{1}{n} \chi - \frac{\delta}{\delta t} \left( \ln \frac{n}{n_0} \right)$$

||

$$\nabla \cdot \underline{V} = - \frac{\delta}{\delta t} \left( \ln \frac{p}{p_0} \right)$$

$n_0$ - начальная

Morgan

$$\frac{1}{n} \chi - \frac{\delta}{\delta t} \left( \ln \frac{n}{n_0} \right) = - \frac{\delta}{\delta t} \left( \ln \frac{p}{p_0} \right)$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \ln \frac{p_{n_0}}{p_0 n} = - \frac{1}{n} \chi$$

$$z = \ln \frac{p_{n_0}}{p_0 n} \quad (\chi - \text{ем независимость массы от кон-ва газа})$$

Баланс кон-ва газ-ов (4 танка транспортирующие  
см. сб-гда)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dV = \int_V \rho \underline{f} dV + \int_{\partial V} \underline{f}_n ds - \int_{\underline{n} \cdot \underline{\sigma}} \underline{n} \cdot (\underline{V} \rho \underline{V}) ds$$

(кон-в газ-ов чисто массовая х-ка, нормаль не  
必需но учить добавляем)

64

### 11.3 Баланс энергии при введении плотности распределения числа частиц, как независимой переменной

#### Баланс энергии

$$E = K + U$$

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho \underline{V} \cdot \underline{V} dV \quad (\text{ничего не произоходит (не теряется)} \\ \text{ничего не получается), т.к. кин. энергия \\ аддитивна по массе})$$

Для  $U$  раньше предполагали аддитивность по массе:

$$U = \int_V \rho n \underbrace{dV}_{\substack{\text{внутр. энергия на} \\ \text{единицу массы}}}$$

Но на самом деле внутр.-яя энергия не обладает быть аддитивной по массе; но аддитивна по числу частиц (парам частиц), тогда

$$U = \int_V n \underbrace{dV}_{\substack{\text{внутр. энергия на} \\ 1 \text{ частицу}}}$$

Тогда баланс энергии перенимается в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{1}{2} \rho \underline{V} \cdot \underline{V} + n u \right) dV = \int_V \rho f \cdot \underline{V} dV +$$

$$+ \int_{\partial V} \underline{f}_n \cdot \underline{V} dS + \int_V n g dV - \int_{\partial V} \underline{n} \cdot \underline{h} dS -$$

$\underline{n} \cdot \underline{o}$

$$- \int_{\partial V} \underline{n} \cdot \left( \rho \underline{V} \frac{1}{2} \underline{V} \cdot \underline{V} + \underline{V} n u \right) dS$$

65

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dt} \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{V}} + \rho \underline{\underline{V}} \cdot \frac{d\underline{\underline{V}}}{dt} + \frac{dn}{dt} \underline{n} + n \frac{d\underline{n}}{dt} = \\
 & = \rho f \underline{\underline{V}} + \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{V}}) + n g - \nabla \cdot \underline{\underline{h}} - \nabla \cdot (\rho \underline{\underline{V}}) \frac{1}{2} \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{V}} - \\
 & - \rho \underline{\underline{V}} \cdot (\nabla \underline{\underline{V}}) \cdot \underline{\underline{V}} - \underline{n} \nabla \cdot (\underline{\underline{V}} \underline{n}) - n \underline{\underline{V}} \cdot \nabla \underline{n}
 \end{aligned}$$

$\sim$  - баланс массы

$nnn$  - баланс плотности распределения  
числа частиц

$\curvearrowright$  - материальная кр-ть

$nnn$  - баланс кол-ва гб-ия

$$n \frac{d\underline{n}}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\nabla \underline{\underline{V}}) + n g - \nabla \cdot \underline{\underline{h}} - \chi \underline{n}$$

← Сл-е, связанные  
с троцкостью  
(исчезновением  
расщепл.)

Давление можно разл-ть:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_e}_{\text{упругое}} + \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_f}_{\text{жидкостное}}$$

$\underline{\underline{\sigma}}_e$

$\underline{\underline{\sigma}}_f$

сл-е (входит в изменение  
макр-ов и термопар,

а также, например,  
на хим-ые реакции

## 12 Лекция 17.05.2022.

### 12.1 Приведённое уравнение баланса энергии. Вариант 1

17.05.22

Будем считать, что  $\underline{\sigma}_e = -p \underline{E}$  (т.е. сопровождающие  
скорости, газы)

$$\underline{\sigma}_e \cdot (\nabla \underline{U}) = -p \underbrace{\underline{E} \cdot (\nabla \underline{U})}_{\text{сиг}} = -p \nabla \cdot \underline{U} = \frac{p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t}$$

↑ из баланса массы

Тогда баланс энергии перенимается в виде:

$$n \frac{\delta u}{\delta t} = \frac{p}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta t} + nq - \nabla \cdot \underline{h} + \underline{\sigma}_f \cdot (\nabla \underline{U})^s - \chi u$$

Заметки на полях:

$$\dot{f}(x, y) = \frac{df}{dx} \dot{x} + \frac{df}{dy} \dot{y}$$

Первый способ.

$$(1) \quad nq - \nabla \cdot \underline{h} + \underline{\sigma}_f \cdot (\nabla \underline{U})^s - \chi u \stackrel{\text{def}}{=} nT \frac{\delta \eta}{\delta t}$$

двойное производное по-ум

( $T$ -адс. темп-ра;  
 $\eta$ -энтропия)  
( $n$  относится к  
энтропии, т.к.  
температура не  
является аддитивной)

Можно ли ввести так:

$$\stackrel{\text{def}}{=} n\eta \frac{\delta T}{\delta t} ?$$

67 Да, но тогда не будет связь/однозначности с  
другими науками (например, с равновесной  
термодинамикой)

Итак,

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{p}{\rho n} \frac{\delta p}{\delta t} + T \frac{\delta n}{\delta t}$$

Тогда  $u = u(p, n)$ . И, вспомнив заменки на парах, получаем  
 (на предыдущ.  
 стр.)

$$\frac{\delta u}{\delta p} = \frac{1}{\rho n} \quad \text{и} \quad \frac{\delta u}{\delta n} = T$$

и.e.

$$p = \rho n \frac{\delta u}{\delta p} \quad \text{и} \quad T = \frac{\delta u}{\delta n} \quad (\text{научили отр.-ие соотношения})$$

В класс. ме-ке  
 см. сред:

определение темп-ии  
 в равновесной термо-  
 динамике

$$p = \rho^2 \frac{\delta u_*}{\delta p} \quad (\text{м.к. } u_* \text{ обозначает по- другому = внутренние  
 энергия на единицу массы})$$

Обычно не можем раб-ть с внутренней эн-ей, т.к.  
 она это гр-ей энтропии, которую измерить мы не  
 можем.

Можем же-ть, т.к. её можно измерить.

Вводим свободную энергию Гельмгольца:

$$f = u - Tn \quad (\text{преобразование к другим  
 параметрам})$$

к другие аргументам 68

$$\text{Далее } \dot{\psi} = \frac{\delta(\dots)}{\delta t}$$

$$\dot{f} = \dot{\psi} - T\dot{\eta} - T\dot{\eta}$$

Подставляем в исходное ур-ие:

$$\dot{f} + T\dot{\eta} + T\dot{\eta} = \frac{p}{\rho n} \dot{\rho} + T\dot{\eta}$$

$$\dot{f} = \frac{p}{\rho n} \dot{\rho} - T\dot{\eta} \Rightarrow f = f(\rho, T)$$

$$\text{Итога: } p = \rho n \frac{\partial f}{\partial \rho} \quad \text{и} \quad \eta = - \frac{\partial f}{\partial T} \quad \begin{array}{l} \text{(научные} \\ \text{определения} \\ \text{соотношения,} \end{array}$$

Определение удельной теплоёмкости при постоянном объёме:

$$C_V = \frac{\partial u(\eta(T))}{\partial T} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$$

(для тв. мат  
измерить сколько;  
для газов измерить  
проще)

Видяр между  $C_V$  и  $C_P$  зависит от того, в  
каких ус-ях проводят эксперимент.

для тв. мат однико  $C_P$ ; для газов  $C_V$   
(затем пересчёт в  
 $C_P$  по ф-ле Майера)

69

27

$$\eta = -\frac{\partial f(\rho, T)}{\partial T} \Rightarrow \eta = \eta(\rho, T)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \eta}{\partial T} \dot{T} = -\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \rho} \dot{\rho} - \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \dot{T} = \\ = -\frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \rho} \dot{\rho} + \frac{C_V}{T} \dot{T}$$

Подставляя в рав-во (1):

$$n c_r \dot{T} = n q - \nabla \cdot h + \underline{\sigma_f} \dots (\nabla U)^s + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial T} \dot{\rho} - \chi \kappa$$

Получим вин-ое з-к уравнение:  $\underline{h} = -\chi \nabla T - z\text{-к уравнение}$   
 (можем брать модифицированный з-к уравнение, но не будем усугублять)

$$n c_r \dot{T} = n q + \chi \nabla T + \underline{\sigma_f} \dots (\nabla U)^s + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial T} \dot{\rho} - \chi \kappa$$

ст-мо	внешн.	изменение	извращают
погода	теплос	объема	описывают
в единую	расщеп	↓	закон / исход
массу			расщеп

Получили квадратичное ур-ие теплопроводности.

Поглощаем ус-ство промежуточные хим. реакции.

## 12.2 Приведённое уравнение баланса энергии. Вариант 2

Второй способ.

$$n\dot{u} = \frac{p}{\rho} \dot{\rho} + nq - \underbrace{\nabla \cdot \underline{h}}_{nT\dot{\eta}} + \underbrace{\sigma_f \dots (\nabla U)^s}_{\text{...}} - \chi u \quad (*)$$

Получали ранее:

$$z = \ln \frac{p n_0}{p_0 n} \quad (\text{хар-ем массы на 1 газовый})$$

$$\dot{z} = -\frac{\chi}{n}$$

Подставляем в (\*):

$$n\dot{u} = \frac{p}{\rho} \dot{\rho} + nT\dot{\eta} + nu\dot{z}$$

$$\dot{u} = \frac{p}{n\rho} \dot{\rho} + T\dot{\eta} + u\dot{z}$$

Тогда  $u = u(p, z, \eta)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{p}{n\rho}; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = T; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u$$

$$p = \rho n \frac{\partial u}{\partial p}; \quad T = \frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad u = \frac{\partial u}{\partial z}$$

71

$$u = \frac{du}{dz} \Rightarrow u = A(\rho, T) e^z = A(\rho, T) \frac{\rho_{no}}{n \rho_0} = u_* \frac{\rho}{n}$$

↑  
на одну частицу

$$n u = \frac{N u}{V} \leftarrow \begin{array}{l} \text{на единицу} \\ \text{объема} \end{array}$$

$$u_* = A(\rho, T) \frac{n_0}{\rho_0}$$

$u_*$  - на единицу массы,  
тогда  $\rho u_*$  - на единицу  
объема

$\Downarrow$

$n u = \rho u_*$

здесь исключаем из рас-  
смотрения безмассовые  
частицы (не может считать  
трещины как ~~один~~ отдельные безмассовые  
частицы). Здесь эквивалентность  
аддитивности по массе и по объему.

Таким образом, логичный подход, но дополнительное ограничение.

При этом уравнение баланса энергии:

$$(**) \quad n \dot{u} = \frac{\rho}{\rho} \dot{\rho} + \rho T \dot{i} + n u \dot{z} \quad z = \ln \frac{\rho_{no}}{\rho_0 n}$$

$$\dot{z} = \frac{n \rho_0}{\rho_{no}} \frac{n_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho}{n} \right)^* = \frac{n}{\rho} \left( \frac{\rho}{n} \right)^* \quad n u = \rho u_*$$

$$\dot{u} = \left( \frac{\rho}{n} u_* \right)^* = \frac{\rho}{n} \dot{u}_* + u_* \left( \frac{\rho}{n} \right)^*$$

Подставляем в (\*\*):

72

$$\cancel{\rho \dot{u}_* + n u_* \left( \frac{\rho}{n} \right)} = \frac{\rho}{\rho} \dot{\rho} + \rho T \dot{\eta} + \cancel{\rho u_* \frac{n}{\rho} \left( \frac{\rho}{n} \right)}$$

$$\rho \dot{u}_* = \frac{\rho}{\rho} \dot{\rho} + \rho T \dot{\eta}$$

абсолютно классическое ур-ие  
(нет завис-ти от  
плотности распределения  
числа частиц)

Формально есть ур-ие:

$$\dot{n} + n \nabla \cdot \underline{V} = \chi$$

(да, можно рассчитать  
н-ть распред-ия числа  
частиц, но она нам в  
принципе не нужна)

Следовательно, второй способ (подход)  
автома не ищем, т.к. убивается изначаль-  
ная идея о н-ти распределения числа частиц  
что от неё что-то зависит.

Демонстрируя это, что есть базисной  
виду, как можно преобразовать, то все  
способы одинаково налезут.

## 13 Лекция 24.05.2022.

13.1 Приведённое уравнение баланса энергии. Вариант 3

13.2 Пример – ионизация газа