

М. Маскет

# Течение однородных жидкостей в пористой среде

Перевод М. А. Геймана



*PXD*

Москва • Ижевск

2004

The Flow  
of Homogeneous Fluids  
Through Porous Media

BY M. MUSKAT, PH. D.

*Chief of Physics Division, Gulf Research and Development Company*

WITH AN INTRODUCTORY CHAPTER BY

R. D. WYCKOFF, B. S. in E. E.

*Formerly Chief of Physics Division, now  
Staff Geophysicist (Houston, Texas), Gulf  
Research and Development Company*

FIRST EDITION

Second Printing

I. W. EDWARDS, INC. ANN ARBOR, MICHIGAN  
1946

**Маскат М.** Течение однородных жидкостей в пористой среде. —  
МоскваИжевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004,  
628 стр.

В книге рассматривается теория фильтрации и ее приложения к технологиям гидротехники, гидрогеологии, мелиорации и ирригации почв, а также добычи нефти, газа и эксплуатации источников водоснабжения.

Книга рассчитана на широкий круг читателей — гидротехников, мелиораторов, специалистов в области инженерной гидрогеологии, гидрогеологов, гидродинамиков, физиков и инженеровнефтяников.

Репринтное издание (оригинальное издание: М.Л.: Гостоптехиздат, 1949 г.).

**ISBN 593972????**

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004

## ПРЕДИСЛОВИЕ

### *От переводчика*

В 1937 г. в США была издана книга американского физика Морриса Маскета „Течение однородных жидкостей в пористой среде“.

В 1946 г. эта книга вышла вторым стереотипным изданием.

В работе Маскета, перевод которой ныне предлагается советскому читателю, при широком использовании математического аппарата подвергнуты были глубокому анализу следующие вопросы: гидромеханическое обоснование основных законов фильтрации, методы определения физических констант горных пород (проницаемость, пористость); вывод дифференциальных уравнений движения однородных жидкостей: воды, нефти и газа; радиальное и нерадиальное плоское движение жидкостей к стокам (скважинам); фильтрация под плотинами, трехразмерный поток жидкости в пористой среде, теория совершенных и несовершенных скважин, движение жидкости в условиях гравитационного потока (с учетом „свободной поверхности“), теория движения жидкости в среде с неоднородной проницаемостью, теория одновременного движения в пласте двух жидкостей, анализ движения водонефтяного контакта и явления конусообразования, теория интерференции скважин, теория водной репрессии (флюдинга) при различной сетке размещения инжекционных и эксплоатационных скважин, неустановившееся движение жидкости в пористой среде, движение сжимаемой жидкости или проблема упругого режима, движение газа в пористой среде — двухразмерное, трехразмерное, установившееся и неустановившееся, теория газонефтяного фактора и т. д.

Многие разделы книги Маскета представляют собой компиляцию и критику работ европейских ученых, работавших в области теории фильтрации, но из большой плеяды советских ученых, посвятивших свои работы указанной области, Маскет ссылается только на Ведерникова и Б. Девисона. Между тем, начиная с работ Н. Е. Жуковского в 1889 г. по „Теоретическому исследованию о движении подпочвенных вод“ и Н. Н. Павловского по электродинамическим аналогиям и продолжая классическими работами акад. Л. С. Лейбензона и акад. С. А. Христиановича, русская наука создала очень много ценного в области подземной гидрогазодинамики. Исследования акад. Л. С. Лейбензона послужили основой для ряда работ советских ученых: Д. С. Вилькера, П. Я. Коциной, Б. Б. Лапука, М. Д. Миллионщикова, И. П. Москалькова, И. А. Чарного, В. Н. Щелкачева и др. В результате этих работ, явившихся ценнейшим вкладом в советскую и мировую науку, был создан новый раздел технической гидромеханики, посвященный теории движения газа и газированной жидкости в пористой среде, какими являются нефтяные и газовые коллекторы.

Особенно большие работы по фильтрации были проведены русскими гидротехниками и гидрогеологами: Саваренским, Замарином, Каменским, Нельсон-Скорняковым и т. д.

В связи с этим в книге помещена статья проф. В. Н. Щелкачева „Краткая история развития подземной гидравлики в СССР“, а в конце книги список русских работ, проведенных в той же области, что и работа Маскета, для того, чтобы советский читатель мог найти по трактуемым вопросам отечественную литературу, базирующуюся на эксперименте и анализе, созданном в нашей стране, и мог лучше понять отечественную науку и ее лучших представителей.

С рядом положений Маскета нельзя согласиться.

Так, Маскет принимает, что поскольку скорость потока пропорциональна градиенту давления и справедлив закон Дарси, проницаемость пористой среды является свойством последней, не зависящей от характеристики жидкости, которая была применена для определения проницаемости горной породы. Работами ИГИ АН СССР (М. А. Гейман), ныне Института нефти АН СССР, было показано, что это положение справедливо только для высокопроницаемых пород с простой структурой (по Авдусину). Для пород же со сложной структурой и обладающих низкой проницаемостью величина последней при определении газопроницаемости зависит также от природы газов и газокинетического диаметра молекул, а при определении проницаемости жидкостями — от адсорбционных и электрокинетических явлений. Маскет в разделе, посвященном фильтрации под плотинами, поддерживает старую теорию Бляя. Эта теория базируется на изучении существующих гидротехнических сооружений и в настоящее время на основании работ Павловского отвергнута. Г. Н. Каменский по поводу теории Бляя пишет, что „представление о фильтрационном потоке под сооружением, принятое Бляем за основу, является слишком упрощенным и слишком далеким от действительности, и отказ Бляя от рассмотрения всего фильтрационного потока в толще грунта под сооружением естественно не мог содействовать развитию более правильного понимания явлений фильтрации под гидротехническими сооружениями и уточнению приемов расчета сооружений“.

Рассматривая выпирание плотины вследствие общего движения грунтовой массы под влиянием гидродинамического давления фильтрующей воды, Маскет совершенно не касается выноса мелких частиц и внутреннего размыва, т. е. явления, известного под общим названием супфозии, понятие о которой впервые ввел покойный акад. А. П. Павлов.

В разделе о системах гравитационного потока Маскет приходит к заключению, что в подавляющем большинстве случаев, имеющих значение для практики, аналитические решения краевых задач по движению грунтовых вод со свободной поверхностью довести до числовых результатов пока еще не представляется возможным, почему приходится прибегать к электродинамическому моделированию.

Советский ученый Нельсон-Скорняков показал, что большинство весьма трудных и важных для практики задач по фильтрации, которые не поддавались до сего времени решению, оказалось возможным решить в замкнутом случае, применив метод исследования предельных случаев.

Этот метод исследования предельных случаев, разработанный Нельсон-Скорняковым, оказался весьма эффективным и позволил получить новые качественные результаты.

В разделе, посвященном генезису и перемещению грунтовых и вместе с ними и погребенных вод, Маскет придерживается позиций Фольгера, Цункера и Верслю. Работы последних, как показал покойный А. Ф. Лебедев, „являются чисто умозрительными и недостаточными, а нередко дают и неверные результаты“. Акад. В. И. Вернадский пишет о работах А. Ф. Лебедева, который установил впервые понятие о проницаемости горных пород еще в 1914 г. „Они (т. е. работы) дают возможность выявить структуру всех подземных, глубинных вод. В сущности он (А. Ф. Лебедев) выявил основное динамическое равновесие: природная вода — твердое тело и связанную с этим структуру природных подземных вод“.

Рассматривая теорию водоупрого режима вообще и применительно к месторождению Восточный Техас, Маскет пришел к следующему выводу. „Если в какой-либо точке пласта изменяется пластовое давление, то возмущенное состояние, вызванное изменением давления, быстро распространяется по пласту через насыщающую его жидкость. Скорость распространения этих упругих волн достигает порядка 1 км/сек, т. е. порядка скорости звука в соответствующей жидкости“.

Проф. В. Н. Щелкачев, более полно и тщательно исследовавший проблему водоупрого режима, который был впервые выдвинут для объяснения явлений, имеющих место в подземных резервуарах, проф. Московского нефтяного института И. Н. Стрижовым, пишет по этому вопросу: „Порядок приведенных величин... показывает, что скорость распространения упругих волн давления через жидкость, насыщающую пласт, несравнима со скоростью распространения упругих волн через жидкость вне пористой среды (в свободном резервуаре)... Наряду с этим явление упругости горных пород, что также влияет на поведение гидравлической системы (нефтяной пласт), не было учтено в работе Маскета.

При всех своих достоинствах, делающих книгу Маскета интересной для изучения и познания с физико-математической стороны явлений, имеющих место при движении однородной жидкости в пористой среде, в частности, нефти, воды и газа в нефтяных коллекторах, им совершенно не учитываются вопросы морфологии нефтяного коллектора, а также капиллярные и поверхностно-молекулярные явления, имеющие место в капиллярах и субкапиллярах последнего.

Между тем проведенные за последние 10—15 лет в СССР в лаборатории физики нефтяного пласта ИГИ АН СССР, под руководством чл.-корр. АН СССР М. А. Капелюшникова, работы П. П. Авдусина по структуре порового пространства нефтяных коллекторов, М. М. Кусакова по поверхностным явлениям в нефтяном пласте, С. Л. Закса по термодинамической характеристике последнего сильно увеличили наши знания в области изучения механизма нефтеотдачи из нефтяных коллекторов.

Несмотря на ряд указанных недостатков, книга Маскета представляет собой ценность не только для каждого исследователя-нефтяника, но и для любого другого ученого, работающего в области фильтрации жидкостей через пористую среду.

*M. A. Гейман*

B. N. Щелкачев

## КРАТКАЯ ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРАВЛИКИ В СССР

В конце второго десятилетия нынешнего века начал свои исследования в области теории фильтрации акад. Н. Н. Павловский. В опубликованной в 1922 г. замечательной монографии (докторской диссертации) акад. Н. Н. Павловский разработал ясную гидромеханическую модель явления фильтрации, позволившую выполнить строгий вывод дифференциальных уравнений движения жидкости в пористой среде. Впервые многие задачи фильтрации жидкости под плотинами были сформулированы Павловским как краевые задачи математической физики; решение этих задач в таком аспекте открыло новую эпоху в гидротехнике. Впервые в мировой литературе Павловский предложил использовать параметр Рейнольдса как критерий существования закона фильтрации Дарси. До акад. Павловского Крёбер (в 1884 г.) и Мазони (в 1895 г.) провели ряд исследований, имевших целью установить пределы применимости закона фильтрации Дарси, но их выводы были принципиально неверны, ибо Крёбер связывал предел применимости основного закона фильтрации только с величиной диаметра зерна грунта, Мазони — только с пьезометрическим уклоном; другие исследователи пытались установить критическую скорость фильтрации, при которой якобы (при всех условиях) закон Дарси нарушается. Акад. Павловский не только ввел в подземную гидравлику параметр Рейнольдса и подсчитал, базируясь на правильно обработанных прежних экспериментальных данных, критическое значение параметра Рейнольдса, но и избежал тех ошибок, которые допустили позднейшие американские авторы, не знавшие его работы. Именно в позднейших работах американских авторов параметр Рейнольдса был чисто механически перенесен из трубной гидравлики в подземную без всякого к тому обоснования. Наоборот, Павловский, основываясь на теории Слихтера, дал вывод формулы, определяющей параметр Рейнольдса.

Заинтересовавшись работой акад. Н. Н. Павловского, проф. Н. Е. Жуковский вторично, незадолго до своей кончины, вернулся к исследованиям в области теории фильтрации.

Жуковский разработал иной метод (чем у Павловского) решения задачи о фильтрации воды под плотинами при наличии напорной поверхности и о фильтрации воды со свободной поверхностью.

Эти идеи Павловского и Жуковского были в последующем развиты в трудах обширной советской школы исследователей Аравина, Биндемана,

Замарина, Веденникова, Веригина, Галина, Гиринского, Девисона, Козлова, Мелещенко, Нельсон-Скорнякова, Ненько, Нумерова, Полубариновой-Кочиной, Ризенкампфа, Угинчуса, Фальковича и др. Содержание работ этой школы исследователей мы здесь описывать не будем<sup>1</sup>, ибо большинство из них связано только с проблемами фильтрации воды под плотинами, через тело земляных плотин, с проблемами притока воды к ирригационным и дренажным сооружениям и т. д.

С 1921 г. в Баку начались теоретические и экспериментальные исследования акад. Л. С. Лейбензона — основателя советской школы ученых, работающих в области подземной гидравлики именно в связи с проблемами добычи нефти и газа. Лейбензоном впервые выведены дифференциальные уравнения движения газа и газированной жидкости в пористой среде, выяснены особенности работы газовых скважин, подвергнуты математическому исследованию кривые производительности и режимы работы нефтяных скважин и пластов, методы подсчета запасов нефти и газа в пластах, проблема вытеснения нефти и газа водой и т. д.

В 1927—1928 гг. Лейбензон организовал проведение крупных исследований по подземной гидравлике в Государственном исследовательском нефтяном институте (ГИНИ) и в Московском государственном университете (ценные экспериментальные исследования в ГИНИ и МГУ были выполнены Д. С. Вилькером и И. П. Москальковым); в 1934 г. была опубликована капитальная монография акад. Л. С. Лейбензона — „Подземная гидравлика воды, нефти и газа“. В этой монографии впервые в мировой литературе систематично изложены основы общей теории фильтрации, а также все важнейшие исследования в области собственно подземной нефтяной гидравлики. Подчеркнем, что и в теоретическом и экспериментальном решении новых проблем и в опубликовании сводной монографии Лейбензон опередил зарубежную научную мысль — аналогичная сводная монография была опубликована Маскетом в США на 3 года позже, т. е. только в 1937 г.

Следующей сводной монографией, изданной в СССР в 1935 г. и посвященной теории движения подземных вод в водоносных пластах, была книга проф. Г. Н. Каменского „Основы динамики подземных вод“. Работы Каменского и его школы имели большое значение для популяризации основных идей подземной гидравлики среди гидрогеологов и позволили нефтяникам перенять опыт гидрогеологов в области исследования скважин и многих других вопросов.

Для понимания последующей истории развития подземной гидромеханики необходимо отметить те новые идеи, которые были заложены в трудах главным образом грозненских нефтяников, опубликованных в двадцатых — начале тридцатых годов нынешнего века: Н. Т. Линдтропа, М. М. Чарыгина, С. Н. Шаньгина, М. Г. Танасевича, В. М. Николаева, Н. М. Карпенко и др. В связи с изучением поведения некоторых нефтеносных пластов Старо-Грозненского и Ново-

<sup>1</sup> Работы этой школы исследователей прореферираны в обзорно-исторической статье П. Я. Полубариновой-Кочиной и С. В. Фальковича „Теория фильтрации жидкостей в пористых средах“. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 6, 1947 г.

Грозненского месторождений упомянутые геологи (главой этой школы был Н. Т. Линдтроп) пришли к весьма важному и по тому времени совершенно новому выводу о том, что главной силой, двигавшей нефть к забоям скважин в наиболее продуктивных пластах упомянутых месторождений, была сила напора краевых вод; в пластовых условиях газ был полностью растворен в нефти и никакой активной роли в продвижении нефти по пласту играть не мог.

Этим существенно изменилось общепринятое в то время мнение — господствовавшая с 1865 г. американская теория Бриггса; следуя Бриггу, считали, что единственной силой, продвигавшей нефть в пласте к забоям скважин, могла быть сила упругости газа. Кроме того, тогда считали, что влияние работы каждой скважины может распространяться в пласте не далее строго определенного расстояния; например, во всех гидромеханических расчетах Слихтера принималось, что радиус влияния скважин равнялся 183 м (600 футам). Если скважины оказывались удаленными друг от друга на расстояние двойного радиуса влияния, то они якобы совершенно не должны были влиять друг на друга.

Н. Т. Линдтроп и другие перечисленные геологи привели факты взаимодействия скважин на очень больших расстояниях друг от друга, факты влияния разработки нефтяного месторождения на пластовые давления в удаленных залежных водяных скважинах и даже на дебиты естественных минеральных источников, выходы которых были расположены на расстоянии почти 20 км от эксплуатировавшихся нефтяных скважин; далее же геологи открыли зависимость изменения пластового давления в нефтяной залежи от повышения зеркала краевых вод (водонефтяного контакта), зависимость пластовых давлений в скважинах от гипсометрии их забоев и положения забоев по отношению к зеркалу подошвенных или краевых вод и т. п. Таким образом, еще до появления работы Герольда, которого принято было считать первым автором теории режимов нефтеносных месторождений, грозненские геологи разработали теорию водонапорного режима<sup>1</sup>.

На основании этой теории развились представления о балансе пластовых водонапорных систем и о необходимости учитывать гидравлическую связь области разработки пласта с областью напора и областью питания. Вполне понятно, что именно эти, в то время передовые, идеи геологов следовало положить в основу гидромеханического анализа особенностей работы нефтяных скважин и нефте-водо-газоносных пластов.

Поэтому в начатых с 1935 г. в ГрозНИИ исследовательских работах упомянутые идеи грозненских геологов были обобщены, была разработана гидравлическая теория пластовых водонапорных систем, были подвергнуты критике прежние теории взаимодействия скважин Слихтера-Форхгеймера, связанные с дефектным представлением о существовании постоянного, ограниченного радиуса влияния скважин, были исследованы особенности работы скважин при различных формах и

---

<sup>1</sup> Очень жаль, что долгое время оставались незамеченными и не подвергались гидродинамической обработке высказанные в то время передовые идеи проф. И. Н. Стрижова по поводу „Упруго-грузового режима“ нефтяных месторождений.

размерах контура области питания. В ГрозНИИ была разработана новая теория взаимодействия скважин, изучены свойства различных систем расстановки скважин; итоги этих исследований были опубликованы в 1936—1939 гг.

В начале тридцатых годов В. П. Яковлев провел обширные исследования нефтяных скважин, на базе которых сделал ряд ценных предложений по поводу методики исследования скважин и пластов и выяснил особенности движения уровня жидкости в скважинах непосредственно после их пуска или остановки при различных простейших законах фильтрации жидкости в пласте. Яковлев указывал на необходимость учитывать сжимаемость жидкости в пластовых условиях. Работы Яковleva особенно ценны тем, что способствовали пробуждению внимания инженерно-технических работников нефтяной промышленности не только к исследованию скважин, но и к изучению законов фильтрации жидкости в нефтеносных пластах.

В те же годы в ГрозНИИ инженеры А. А. Болтышев и Т. Л. Михайлов сконструировали „опытный пласт“ — цилиндрический резервуар, заполнявшийся песком. На этом пласте были изучены законы одноразмерного движения мертвый и газированной жидкости, были установлены интересные зависимости дебитов газированной жидкости от перепадов давления и газовых факторов и т. д.

В середине тридцатых годов В. М. Барышев сконструировал в АзНИИ опытный куполовидный „пласт“, на который было проведено 108 скважин; на „опытном пласте“ и на специальных „дренажных элементах“ В. М. Барышев и А. Н. Снарский провели интересные эксперименты по взаимодействию скважин при различных системах их расстановки, по анализу свойств коэффициентов продуктивности скважин, по движению газированной жидкости в пористой среде, по образованию „газовой шапки“ в пласте и ее влиянию на дебит скважин и т. д. Результаты экспериментов Барышева оказались в очень хорошем согласии с упомянутыми выше гидродинамическими исследованиями ГрозНИИ.

Ценные экспериментальные исследования по движению газированной жидкости в пористой среде были проведены в 1940 г. в АзНИИ А. М. Пирвердяном и М. К. Мамедовым. Авторы сопоставили дебиты газированной и „мертвой“ жидкости при всех прочих одинаковых условиях их движения, исследовали зависимость между газовым фактором и перепадом давления и, кроме того, основываясь на теории обтекания и законах подобия, исследовали явления отклонения закона фильтрации от закона Дарси.

В Азербайджанском филиале Академии наук СССР Л. А. Сергеев, пользуясь методом электро-гидродинамических аналогий, провел на электромоделях нефтяных пластов ряд исследований, имевших целью установить рациональные схемы расстановки скважин, распределения давления вокруг них и т. д.

С 1938—1939 гг. были начаты в ГрозНИИ и продолжены в Днепропетровском университете дальнейшие исследования проблемы расстановки скважин; было подвергнуто критике и существенно уточнено решение проблемы вытеснения нефти водой, данное ранее Маскетом. Был подробно разработан метод исследования законов движения вдоль

различных линий тока и стягивания контура нефтеносности к одной и к различным группам скважин, были сопоставлены дебиты батарей скважин с дебитами „галерей“, были установлены простейшие гидродинамически рациональные варианты расстановки скважин в условиях купольной, брахиантклинальной и моноклинальной структур, к которым приурочены залежи нефти. Эти вопросы были освещены в докторской диссертации В. Н. Щелкачева в 1941 г. В те же годы Г. Б. Пыхачевым были решены некоторые задачи о взаимодействии скважин и о работе отдельных скважин в условиях неоднородно проницаемых пластов.

В 1940 г. акад. Л. С. Лейбензон возглавил организованную проф. Б. Б. Лапуком группу, в которую входили ученые и инженеры различных специальностей. Эта группа поставила своей целью выработку научно обоснованной методики проектирования рациональной системы разработки нефтяных месторождений.

При выборе рациональной системы разработки месторождений считалось необходимым: 1) учесть геологические особенности каждого месторождения; 2) установить гидродинамически рациональные варианты расстановки скважин применительно к выясненным геологическим особенностям; 3) провести подсчеты, связанные с выбором методов эксплоатации скважин; 4) провести заключительную экономическую оценку. Как видно, совершенно правильно предполагалось, что решить проблему рациональной разработки нефтяных месторождений можно лишь на базе комплексного геологического — гидродинамического — технического — экономического анализа.

После начала войны группа была реорганизована в Проектно-исследовательское бюро (ПИБ) при Московском нефтяном институте. Бюро возглавил доцент А. П. Крылов, осуществивший не только общее руководство, но и проведший ряд исследований, облегчивших применение новейших результатов подземной гидравлики к технологии нефтедобычи. В бюро были проведены большие работы по проектированию разработки многих нефтяных и газовых месторождений; попутно решались новые проблемы подземной гидравлики. В итоге этих работ коллектив из пяти авторов — А. П. Крылов, М. М. Глотовский, М. Ф. Мирчинк, Н. М. Николаевский и И. А. Чарный — подготовил к изданию капитальную монографию: „Научные основы разработки нефтяных месторождений“. И эта работа намного опережает последние достижения зарубежной науки.

Следует отметить, что очень существенную помощь в работе Проектно-исследовательского бюро оказывает сконструированный проф. Л. И. Гутенмехером электроинтегратор. Использование этого прибора основано на существовании электро-гидродинамической аналогии. В том случае, когда геологические условия разрабатываемого месторождения сложны, — пласт неоднороден по проницаемости, пористости, мощности, имеет контуры нефтеносности и контуры области питания неправильной геометрической формы — решать задачу подземной гидравлики строгими математическими методами было бы трудно и нецелесообразно; наоборот, на электроинтеграторе сравнительно легко учесть всю сложность известных геологических условий нефтегазоносного пласта и довести решение задачи до получения необходимых числовых результатов. Мето-

дику решения задач подземной гидравлики на электроинтеграторе значительно усовершенствовал и углубил научный сотрудник Проектно-исследовательского бюро кандидат технических наук П. М. Белаш; пользуясь методикой Белаш, на электроинтеграторе были изучены многие особенности установившегося и неустановившегося притока жидкости и газа к скважинам.

К описанию других работ, выполненных в Проектно-исследовательском бюро, вернемся несколько позже.

В 1940—1941 гг. акад. С. А. Христианович провел весьма интересные исследования сложной проблемы движения грунтовых вод, не следующих закону Дарси, а также развел теорию движения газированной жидкости, базирующуюся на экспериментах Викова—Ботсета. Новые ценные выводы, вытекающие из исследований Христиановича по вопросам движения газированной жидкости, были в 1941 г. получены проф. Б. Б. Лапуком.

Во время войны были опубликованы новые работы акад. Л. С. Лейбензона, в которых была значительно усовершенствована прежняя теория автора о движении газированной жидкости и были исследованы вопросы турбулентной фильтрации газов.

Член-корр. Акад. наук СССР П. Я. Полубаринова-Кочина в 1942—1945 гг. решила ряд сложных задач подземной нефтяной гидравлики: о притоке жидкости к скважинам в неоднородной среде, об определении размеров пластовой водонапорной системы и проницаемости пласта на основании известных дебитов скважин (решение так называемых обратных задач подземной гидравлики), о перемещении контура нефтеносности.

Последняя проблема была также подвергнута глубокому математическому исследованию М. Н. Тиховым в ГрозНИИ.

В те же годы проф. И. А. Чарный улучшил методику решения задач о притоке нефти к скважинам в месторождениях различных форм, решил очень важный вопрос о наивыгоднейшей расстановке ряда скважин в пластах с водонапорным режимом. В 1946 г. Чарный предложил весьма остроумный приближенный метод решения задачи о взаимодействии гидродинамически несовершенных скважин. Точное математическое решение этой проблемы вызвало большие математические трудности. Сравнение найденного Б. И. Сегалом точного решения с приближенным решением Чарного показало прекрасное их согласие, и потому простой метод Чарного может быть с успехом использован при практических расчетах.

В 1941—1944 гг. ГрозНИИ удалось провести на промыслах Грознефти весьма тщательные исследования скважин и поведения пластов после массовой остановки и пуска скважин<sup>1</sup>.

Это дало возможность уточнить гидродинамический анализ различных методов исследования скважин, улучшить методику их исследования, выяснить особенности неустановившихся процессов перераспределения

---

<sup>1</sup> Начатые В. Н. Щелкачевым в Октябрьском (бывшем Ново-Грозненском) районе исследования скважин продолжил в 1944—1948 гг. инж. К. М. Донцов, который систематизировал богатейший материал по исследованиям скважин и интерпретировал его с точки зрения новейших идей подземной гидравлики.

пластового давления, дало твердые доказательства большого влияния объемной упругости жидкостей и горной породы на поведение скважин и режим пласта.

В те же годы в ГрозНИИ был заново исследован вопрос о критерии существования закона фильтрации Дарси, была преобразована формула акад. Павловского для параметра Рейнольдса — в нее вместо эффективного диаметра введен коэффициент проницаемости пласта. Затем было установлено, что закон фильтрации Дарси не может одновременно нарушаться во всем пласте, было введено понятие об области кризиса закона Дарси и о движении жидкости к скважине при одновременном существовании двух режимов фильтрации в пласте. Несколько позже были выведены дифференциальные уравнения движения упругой жидкости в упругом пласте и продолжено гидродинамическое исследование теории упругого режима.

В докторской диссертации М. Д. Миллионщикова впервые (в 1945 г.) доказано, что и в подземной гидравлике для движения жидкости в пористой среде можно построить диаграмму, аналогичную диаграмме Никурадзе в трубной гидравлике. Проф. М. Д. Миллионщиков выполнил гидродинамическое исследование проблемы образования конуса обводнения и метода бесконусной эксплоатации скважин при наличии подшвленной воды в призабойной зоне и выяснил многие особенности эксплуатации скважин в пластах с подгазовой нефтью.

Доц. Г. Б. Пыхачев, основываясь на гидродинамических исследованиях акад. Христиановича — проф. Лапука и на экспериментах по движению газированной нефти, установил (в 1947 г.), что в пластах с режимом „растворенного газа“ производительность скважин существенно зависит не только от перепада давления, но и от абсолютной величины пластового давления. В 1948 г. Пыхачевым дано упрощенное решение задачи о вытеснении из пласта нефти газом, нагнетаемым в пласт через нагнетательные скважины. В. Ф. Дудиным исследовано вытеснение нефти водой из пласта в том случае, когда движение жидкости не подчиняется закону фильтрации Дарси.

В 1947 г. была опубликована статья А. Н. Мятнева, в которой автор значительно обобщил обычную постановку задач подземной гидравлики, учтя при эксплоатации скважин приток воды в напорный пласт через его кровлю и ложе; в целом ряде конкретных случаев А. Н. Мятнев продемонстрировал очень хорошее согласие теоретических расчетов с фактическими данными.

В заключение необходимо вновь вернуться к описанию тех исследований по подземной гидравлике, которые за последние годы проводились в Проектно-исследовательском бюро Московского нефтяного института, помимо решения основной задачи о рациональной разработке нефтяных месторождений. Кроме уже упомянутых выше работ Полубариновой-Кочиной и Чарного, выполненных в Бюро, следует упомянуть еще о дальнейших исследованиях Чарного по теории упругого режима, в которых выяснено значение факта сжимаемости контурной воды и сделана попытка определения параметров пласта на основании результатов специальных исследований скважин.

Канд. техн. наук М. М. Глотовским подвергнуты критике решения Форхгеймера, Козени, Маскета проблемы работы гидродинамически не-

совершенных скважин и предложено собственное, более строгое решение этой проблемы. С помощью построенных Глогоуским графиков легко судить о влиянии глубины вскрытия пласта на производительность скважин. Канд. техн. наук Б. Э. Казарновской выполнены ценные исследования движения жидкости к скважинам в негоризонтальных пластах, решены задачи об особенностях перемещения водонефтяного контакта, стягивающегося в слабо наклоненном пласте к прямолинейной батарее скважин, выяснены целесообразные пределы эксплоатации обводнившейся батареи скважин. Теоретические и экспериментальные исследования канд. техн. наук В. И. Щурова значительно продвинули решение вопроса о влиянии размеров и числа круглых перфорационных отверстий на производительность скважин.

В работах канд. матем. наук М. Д. Розенберга осуществлено дальнейшее развитие идей Чарного о наивыгоднейшей расстановке рядов скважин в нефтяных пластах с водонапорным режимом.

Кандидаты техн. наук К. А. Царевич и В. А. Архангельский получили ряд новых ценных результатов по вопросам движения газированной жидкости в пористой среде, причем Царевич дал теоретическое объяснение многим явлениям, наблюдавшимся в процессе разработки пластов с режимом растворенного газа; свои дальнейшие исследования авторы проводят во ВНИИ.

Проф. Б. Б. Лапук доказал, что в условиях установившегося и неустановившегося радиального движения газа к скважинам средневзвешенное по объему пластовое давление может быть с высокой степенью точности приравнено контурному давлению. Тот же факт им был доказан, и для некоторых иных случаев притока к скважинам газированной нефти, капельно-сжимаемой жидкости (в условиях упругого режима), притока жидкости со свободной поверхностью в условиях гравитационного режима. Основанный на этом факте приближенный метод позволил Лапуку весьма просто и с высокой степенью точности решить как многие из тех задач, которые раньше решались сложно и с большими математическими трудностями, так и ряд совершенно новых задач. Именно Лапуком решены некоторые проблемы работы скважин в условиях гравитационного режима, режима растворенного газа и упругого режима, но особенно широко упомянутый прием использован Лапуком для исследования проблемы разработки газовых месторождений. В зарубежной литературе до сих пор не было сколько-нибудь теоретически обоснованных решений проблемы расстановки газовых скважин. Мы же теперь имеем развивающуюся, гидродинамически обоснованную теорию разработки газовых месторождений; на базе этой теории уже сделаны многие важные для практики выводы.

В последних работах Проектно-исследовательского бюро, посвященных гидродинамической теории упругого режима, были объяснены закономерности в изменении пластового давления и удельной добычи жидкости из пласта в процессе его разработки, выяснены особенности неустановившегося эффекта взаимодействия скважин и законы изменения радиусов влияния скважин.

В нашем обзоре мы не упоминали о ценных работах П. П. Авдусина, М. А. Геймана, А. И. Губанова, Б. В. Дерягина, С. Л. Закса, Ф. И. Котякова, М. М. Кусакова, П. А. Ребиндера, Ф. А. Требина

и др., которые в большей степени связаны с физикой и физико-химией пласта, чем с подземной гидравликой.

В заключение заметим, что все большее и большее число инженеров и геологов используют сведения из области подземной гидравлики для решения важнейших конкретных проблем технологии нефтедобычи и промысловой геологии. Достаточно, например, указать на опубликованные работы профессоров Г. Н. Газиева, М. А. Жданова, Н. Т. Линдтропа, М. Ф. Мирчинка, доц. И. И. Муравьева, инженеров и геологов И. И. Карганова, М. И. Максимова, Г. К. Максимовича, В. М. Николаева, И. Т. Пронякова, Э. Б. Чекалюка и многих других; в этих работах сведения из области подземной гидравлики используются для анализа режима пластов и поведения скважин, для анализа эффекта солянокислотной обработки скважин, вторичных методов эксплоатации и т. д.

Однако современное внедрение новейших достижений подземной гидравлики в нефтепромысловую практику все же нельзя признать достаточно широким. Происходит это вовсе не из-за того, что интересующие практиков вопросы якобы не подверглись теоретическому исследованию; наоборот, как следует из приведенного выше исторического обзора, охваченный теоретическими исследованиями круг вопросов весьма велик.

Мы считаем, что имеются иные причины, тормозящие использование достижений подземной гидравлики в нефтепромысловой практике. Именно, во-первых, необходимо отметить новизну вопросов и слабую популяризацию новейших достижений подземной гидравлики. В самом деле, обязательный курс подземной гидравлики начал читаться в нефтяных институтах лишь с 1941 г., так что лишь 4—5 последних выпусков инженеров-нефтяников и геологов с ним знакомы; до сих пор не было издано ни одного широко доступного, достаточно полного и систематического курса подземной гидравлики.

Во-вторых, провести гидромеханические расчеты и использовать формулы подземной гидравлики можно лишь тогда, когда известны основные параметры пласта. Необходимые для этого тщательные исследования скважин и пластов начали проводится у нас лишь за последние годы в связи с освоением регистрирующих глубинных манометров, глубинных пробоотборников и прочей аппаратуры. Никакое знание законов подземной гидравлики не может помочь технологу нефтедобычи, если разрабатываемый пласт не подвергается должным наблюдениям и исследованиям.

Наконец, третья причина, тормозящая развитие самой подземной гидравлики и ее внедрение в нефтепромысловую практику, состоит в отставании экспериментальных работ от теоретических исследований. Необходимо как можно скорее и шире развернуть эксперименты по движению газированной нефти в пористой среде и по вопросам физики пласта, тесно связанным с задачами подземной гидравлики.

Проведенный исторический обзор показывает, что с тех пор, как начало решению перечисленных проблем было положено в трудах акад. Лейбензона, отечественная школа подземной гидравлики занимает в этой области науки ведущее место в мире.

# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

## ОСНОВЫ

---

---

### *Глава первая*

#### В В Е Д Е Н И Е

**1. Предмет изучения.** Предмет настоящего исследования — движение однородных жидкостей в пористой среде ограничен нами с качественной стороны понятиями „однородная жидкость“ и „пористая среда“. Он захватывает весьма большую область знаний и находит себе применение во многих прикладных науках. Приложение рассматриваемой нами дисциплины к таким отраслям, как гидрология грунтовых вод, сохранение, обеспечение и поддержание водоснабжения, ирригация и проблема осушения, нефтепромысловая механика, включающая проблемы извлечения нефти и газа из подземных резервуаров имеет большую теоретическую и промышленную значимость. В равной степени важно приложение этой дисциплины к специфическим проблемам гражданских сооружений, агротехники и других областей. Так, диффузия и движение жидкостей через керамические изделия, например, кирпич и глиняную посуду, издавна являлись проблемой керамической промышленности, а движение газов через формовочный песок — проблемой литьевой промышленности.

Сооружение ложа для муниципальных водоочистных фильтров, а также просачивание вод через плотины и стенки земляных резервуаров являлись весьма важными вопросами в развитии техники гражданских сооружений, вполне удовлетворительные решения которых были найдены только за последние несколько лет. В настоящее время можно рассматривать научное разрешение проблем ирригации, эрозии почв, дренажа гончарными трубами как уже твердо определившуюся область общей теории движения жидкостей через пористую среду, в то же время открытую для дальнейшей научной разработки. Дренирование артезианских бассейнов глубокими скважинами, а также питание из рек и каналов примыкающих колодцев является проблемой движения жидкостей через пористые горные породы или пески и представляет собой основной объект изучения в гидрологии почвенных вод. Само собой разумеется, что физическая сущность проблемы добычи нефти и газа из подземных резервуаров есть не что иное, как движение жидкости в пористой среде. Таковы рамки настоящей работы. Количество специфических проблем, которые можно предложить к рассмотрению и которые относятся к настоящей области, почти не ограничено. Обсуждение всех этих проблем потребовало бы многотомных трудов и ничем не оправданных повторений. Поэтому нами был произведен специальный

подбор тематики и в настоящую работу были включены только типичные проблемы, которые представляют собой практический интерес и могут служить в качестве иллюстрации к различным аналитическим методам, применяемым при математической обработке рассматриваемого вопроса. Можно выразить надежду, что эти методы дают по крайней мере приблизительное решение большинства относящихся к той области проблем, которые могут встретиться читателю на практике. Раньше, чем углубиться в рассмотрение фундаментальных основ, на которых базируются все дальнейшие рассуждения, приводимые в настоящей работе, необходимо точно установить те ограничения, которые имеют влияние на объект исследования. Как уже отмечалось выше, эти ограничения могут быть подразделены на относящиеся к характеристике жидкости, проходящей через пористую среду, и те, что относятся непосредственно к природе самой поистине чистой среды.

**2. Однородные жидкости.** Под понятием „однородная жидкость“ разумеется по существу однофазная жидкость. Это может быть или газ или жидкость. Смесь этих двух компонентов, дающих в результате раздел на границе двух фаз „жидкость—газ“, что характеризуется диспергированием газовых пузырьков в жидкости, должна быть исключена из этого понятия. Конечно, жидкость может содержать в себе растворенный газ. Тогда предпосылки, на которых основывается тот или иной расчет, будут вполне справедливыми при условии, что давление, под которым находится жидкость, не будет падать ниже давления насыщения и освобождать газ из раствора (системы). Газированная жидкость может представлять или может содержать конденсируемые пары и в то же самое время попасть в объект исследования настоящей работы при условии, что область пористой среды, где пар находится в состоянии равновесия со сконденсированной фазой при температуре системы, будет исключена из рассмотрения. Вполне очевидно, что систему жидкостей, состоящую из несмешивающихся компонентов, например, воду и нефть, нельзя рассматривать как однородную жидкость, если даже компоненты представлены диспергированной смесью. Действительно, как это станет очевидным из дальнейшего, условие однородности, принятое в этих строках, может быть создано только такой смесью жидкостей, которые полностью смешиваются друг с другом и остаются таковыми на протяжении всей системы. Хотя движение неоднородных жидкостей, в частности, газо-жидкостных смесей, имеет первостепенное значение для ясного понимания многих моментов в добыче нефти из подземных резервуаров, интерес к таким системам неоднородных жидкостей в значительной степени ограничен областью науки о разработке и эксплуатации нефтяных месторождений.

Фундаментальные основы и определенные закономерности, относящиеся к поведению неоднородных систем, являются в настоящее время эмпирически окончательно установленными<sup>1</sup>. Аналитические же решения для определенных случаев, исполненные на основе этих формулировок<sup>2</sup>, графический и вычислительный труд, необходимый для осуще-

<sup>1</sup> Wyckoff R. D. and Botset H. G., Physics, 7, 325, 1936.

<sup>2</sup> Muskat M. and Meres M. W., Physics, 7, 346, 1936.

ствления таких решений, являются настолько длительными, что необходимо затратить очень много времени для накопления достаточного количества частных результатов, чтобы можно было дать в настоящее время практические обобщения и детальный анализ. В действительности же пока не будет накоплен более широкий комплекс выводов от количественного изучения систем неоднородных жидкостей, является весьма разумным оставить в стороне их обсуждение.

Однако из этого не следует делать заключения, что возможность приложения выводов из настоящей работы к проблеме нефтедобычи сводится, таким образом, совершенно к нулю. Наоборот, большую часть трактовок, приводимых ниже, сущность которых соответствует системам движения жидкостей того типа, который мы имеем при нефтедобыче, например, выводы, полученные в главе V, VII и X, можно при тщательной и осмотрительной интерпретации приложить с достаточной уверенностью и качественной обоснованностью к решению практических проблем нефтедобычи. Что же касается таких разделов, как глава II, в которой приведена в общих чертах экспериментальная методика определения важнейших констант пористой среды, ясно, что в то время как пористость и проницаемость для однородной жидкости не дают полной оценки песчаного коллектора как носителя неоднородной жидкости<sup>1</sup>, определение этих констант явится по крайней мере необходимым мероприятием для установления любых иных параметров, которых может потребовать комплексное исследование неоднородных систем. Рассмотрение проблемы производительности несовершенных скважин, т. е. вскрытых частично пласт (глава V), показывает с очевидностью, что абсолютные величины дебита жидкости из песчаного коллектора, насыщенного газированной жидкостью могут значительно отличаться от приведенных в гл. V, п. 4. Изменение этих величин с глубиной вскрытия пласта забоем скважины тесно увязывается с приведенными в последнем разделе конечными выводами.

Проблемы нормального продвижения водяного контура, а также нагнетаемой воды при методе заводнения во вторичной эксплоатации, в результате тесного перемешивания воды с нефтью в пористом коллекторе, являются задачами движения неоднородных жидкостей. Первичные особенности таких систем соответственно разъясняются представленной в настоящей работе теорией.

Из того, что нам известно в настоящее время относительно поведения смесей, вполне вероятно, что правильное решение для многих систем с неоднородными жидкостями будет всегда требовать такого большого вычислительного труда, что упрощения, разработанные нами и основанные на допущении однородности жидкостей, могут обеспечить в действительности единое, практически достижимое решение этих проблем.

Следует также отметить, что многие проблемы, рассматриваемые в последующих разделах, имеют непосредственное отношение к явлениям, возникающим при добыче нефти или газа. Вместе с тем основной наш интерес сосредоточен больше на характерных особенностях потока в нефтяном или газовом коллекторе, чем на инженерно-эксплоатационной стороне вопроса.

---

<sup>1</sup> Wyckoff, and Botset, and Muskat and Meres, loc. cit.

В частности, мы полагаем, что рассматриваемые нами явления возникают только на обнаженном фронте забоя скважины. Влияние последней, а также ее подземного оборудования являются предметом рассмотрения в наших исследованиях постольку, поскольку они изменяют условия давления или течения на фронте забоя.

Работа нефтяной скважины в процессе фонтанирования или помпирования, а также техника перемещения жидкости при вторичных методах эксплоатации, например, при газовой или водяной репрессии, полностью освещены в большом количестве специальных инженерных трудов, к которым читателю и следует обратиться для ознакомления с чисто инженерным взглядом на движение жидкостей в пористой среде.

Соответственно этому проблемы просачивания воды через плотины или под плотинами будут строго ограничены только рассмотрением динамики движения жидкости. Напряжения и усилия в самих пористых структурах не будут рассматриваться в настоящей работе. Конечно, мы сознаем, что динамические реакции, которые испытывает пористая среда таких систем, несущая в себе жидкость, имеет во многих случаях значительно большее практическое значение, чем движение самих жидкостей.

Накопленные на сегодня данные по механике грунтов можно рассматривать как весьма важную отрасль науки. Отсюда представляется более правильным опустить в настоящей работе всякие рассуждения по этому предмету, чем давать краткую и отрывочную трактовку последнего, которая ни по объему, ни по тщательности изложения не сумеет оправдать того внимания, которого заслуживает данный предмет<sup>1</sup>.

**3. Пористая среда.** Следующее ограничение, определяющее рамки применения настоящей работы, заключается в установлении содержания понятия „пористой среды“, как носителя жидкостей. Идеальную пористую среду, вполне удовлетворяющую требуемому определению, можно вполне ясно представить себе, рассматривая образец несцепментированного песка. В такой среде имеется бесчисленное количество пустот различной величины и формы, образующих „поровое пространство“, или промежутки между отдельными твердыми частицами песка. Каждая пора соединена узким каналом с другими, образуя в целом полностью сообщающуюся между собой сквозными каналами сложную систему отверстий-ячеек. По этим ячейкам может перемещаться заключенная в среде жидкость. Идеальная „пористая среда“, принятая в настоящей работе, характеризуется многочисленными, полностью соединяющимися между собой мельчайшими отверстиями и определяет собой различие между трактуемым предметом и обычной гидродинамикой и гидравликой. Проблемы в гидравлике относятся к открытым каналам, ограниченным непроницаемыми стенками. Здесь же мы имеем дело с проводящими каналами, сложенными множеством мельчайших соединяющихся пор, ограниченных пространственно непроницаемыми перемычками или же геометрией проводящей системы. В этом и заключается фундаментальная особенность пористой проводящей среды. Следует помнить, что обычная труба или капилляр, рассматриваемый в гидравлике, являются эквива-

<sup>1</sup> Читатель, который заинтересуется этой областью науки, может найти полное исследование этого предмета в работе «Erdbaumechanik», К. Терцаги (1925).

лентом ряда соединяющихся пор. Однако канал, слагаемый пористым веществом, включает не один ряд соединяющихся пор, но очень большое количество таких элементов с многочисленными поперечными соединениями. В капиллярной трубке или трубе, в которой происходит движение жидкости при ламинарном режиме, скорость по сечению трубы не одинакова и распределяется по параболе. Максимальная скорость соответствует осевой линии канала. В линейной системе, состоящей из пористой среды, распределение скорости по отверстию единичной поры будет иметь аналогичную характеристику. Если же рассматривать макроскопическую скорость по сечению всей среды, то она будет постоянной. Таким образом течение жидкости, происходящее в линейном коллекторе указанного типа, равномерно по всему сечению, в то время как при движении жидкости по трубе скорость в центре потока имеет максимальное значение, а к стенкам трубы становится беспрепятственно малой. Пористые вещества, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, представлены относительно тонкозернистыми почвами, несцементированными песками, сцепленными песками, т. е. это обычные песчаники, известняки и остальные пористые горные породы. Такая классификация может создать серьезные ограничения к применимости полученных аналитических выводов, так как дебит жидкости многих насыщенных жидкостью пород в значительной степени получается из трещин. Так как эти трещины достаточно многочисленны и распределены беспорядочно, то, рассматривая проблему в целом, можно допустить, очевидно, что бесчисленные внутренние пересечения этих трещин делают их похожими на пористую среду, характеристика которой дана выше.

**4. Общие положения аналитической теории.** Аналитическая работа, заключенная в настоящем исследовании, базируется, как это было уже показано, на определенных необходимых допущениях и ограничениях, относящихся к типу жидкости и природе пористой среды. Вполне очевидно, что при рассмотрении проблем, связанных с естественными осадочными образованиями или горными породами, можно встретиться с неопределенностью, возникающей от непостоянства и незнания параметров, характеризующих структуру таких пористых разностей. Поэтому первое впечатление может привести к ошибочному заключению, что принятые ограничения настолько серьезны, а допущения настолько идеальны, что могут воспрепятствовать приложению аналитических выводов к проблемам, представляющим практический интерес. Только этим обстоятельством можно объяснить то сопротивление, которое имело место до сравнительно недавнего времени со стороны гидрологов и инженеров при решении практических задач в отношении применения закона Дарси, аналитических формулировок Форгеймера или Слихтера. Неопределенность некоторых условий, имеющих место при рассмотрении практических проблем движения жидкости через пористую среду, не допускает приложения точных математических решений. Однако весьма ценно подвергнуть анализу эти проблемы как идеальные системы, так как это единственный путь, каким можно определить основные свойства пористых сред и установить их поведение при благоприятных условиях. То обстоятельство, что реальная система не является идеальной по отно-

шению к условиям, имеющимся в пористой среде, не может с полу-  
количествоенной точки зрения свести к нулю все аналитические вы-  
воды.

В качестве иллюстрации можно рассмотреть сравнительно простую проблему многоскважинных систем, о которой идет речь в главе IX. Муниципальное водоснабжение обеспечивается глубокими артезианскими скважинами. Желательно запланировать будущее расширение фронта бурения дополнительных скважин. Удвоение уплотнения последних не удвоит их производительность вследствие явления интерференции сква-  
жин. Действительный прирост производительности зависит от расстояния между последними и геометрическим размещением сложной системы. С помощью аналитических методов, приведенных в главе IX, можно с достоверностью определить это влияние интерференции. Кроме того, если даже нельзя точно предсказать дебит отдельной скважины, то статистически относительные дебиты различных скважин по сетке разме-  
щения могут быть указаны довольно точно и можно установить наибо-  
лее экономичный план развития буровых работ. Более сложный пример заключается в проблеме заводнения при вторичных методах добычи нефти, которая рассматривается с идеализированной точки зрения в гл. IX, пп. 16 и 33. В этом случае фактические промысловые условия, при которых нагнетаемая вода должна двигаться через пески, содержащие нефть и газ, резко отличаются от тех допущений, которые были приняты для математического удобства. Кроме того, физические факторы, опре-  
деляющие эту неустойчивость, настолько сложны, что препятствуют всякой надежде установить точный количественный эффект. Тем не ме-  
нее анализ обеспечивает получение вполне надежных выводов в отно-  
шении сравнительной отдачи различными комбинациями скважин, а так-  
же эффект от благоприятного их размещения. До сего времени на эти вопросы давались ответы, основанные только на интуиции.

Наконец, следует отметить, что предмет этой книги не учитывает тех изменений в пористой среде, которые могут получить свое развитие после длительного прохождения жидкости через последнюю. В математических построениях заранее делается допущение, что в порах среды не происходит отложений вследствие изменений среды, а также от посторонних веществ, принесенных жидкостью и накапливающихся там с течением времени. Таким образом, следует заранее допустить, что явления разбухания, гидратации и даже непосредственной закупорки среды достигли своего максимального значения к моменту анализа. Поэтому следует заранее ввести соответствующие поправки в коэффициент отдачи жидкости средой. Если заранее известна причина развития отложений или закон их образования, то можно принять во внимание эффект от уменьшения пор. Однако практическое отсутствие такой информа-  
ции делает практически во всех проблемах физической значимости бо-  
льше разумным, в виде общего правила, их полное исключение. Все же, если можно получить необходимые данные по этому вопросу, не пред-  
ставляет никаких трудностей изменить соответствующим образом формулы, выведенные здесь, и учесть изменения структуры среды. Рас-  
смотрение вопроса о применимости математического анализа к решению практиче-  
ских задач ставит своей целью привлечь внимание читателя к необходимости тщательного изучения и подбора теоретических выводов

раньше, чем использовать их для решения какой-либо проблемы. Необходимо помнить, что на одном этапе решения проблемы можно получить ответ с чисто качественными показателями, в то время как на другом этапе того же решения можно получить очень близкое приближение к действительным явлениям.

**5. Природа пористой среды.** Дадим краткое напоминание общих свойств пористой среды, с которой мы будем встречаться в дальнейшем. Важнейшими параметрами, которые будут нами детально рассмотрены ниже, являются:

1) пористость, определяющая собой величину пор и, отсюда, насыщенность среды жидкостью, и

2) проницаемость, являющаяся мерилом подачи жидкости через пористую среду под влиянием проталкивающего давления.

Эти свойства будут рассмотрены нами здесь с точки зрения структуры самой среды, оставляя прочие частности для главы II, где будет освещена техника определений этих параметров.

Ранние работы по движению жидкости в пористой среде были ограничены в значительной степени несцементированными разностями: например, песком и гравием. Трудность измерений пористости и проницаемости таких материалов в природных условиях, а также воспроизведение естественной укладки частиц при лабораторных измерениях привели естественно к изучению геометрии подобных систем. Так как метод определения размеров зерен и их относительного распределения с помощью ситового анализа является сравнительно простым, были сделаны попытки подсчитать пористость и проницаемость на основании этих данных.

Вполне очевидно, что любой расчет такого порядка должен покояться на размерах идеальных частиц. Поэтому были подвергнуты тщательному изучению различные случаи укладки шаров постоянного радиуса. Весьма глубокое исследование было проведено Слихтером<sup>1</sup>, за которым последовали и другие<sup>2</sup>. Из числа последних наиболее объемлющая работа была проделана Грэтоном и Фрэзером<sup>3</sup>.

В настоящей работе будет совершенно невозможным рассмотреть этот вопрос так детально, как это было сделано упомянутыми исследователями. Наиболее характерные особенности, представленные здесь, приводятся с единственной целью дать ясное представление о структуре такого комплекса и его роли в идеализации обломочных отложений, которые составляют большую часть рассматриваемой пористой среды.

**6. Систематическая укладка шаров.** Допуская в целях облегчения анализа, что твердые частицы, из которых состоит образец несцементированного песка, представлены шарами постоянного радиуса, можно

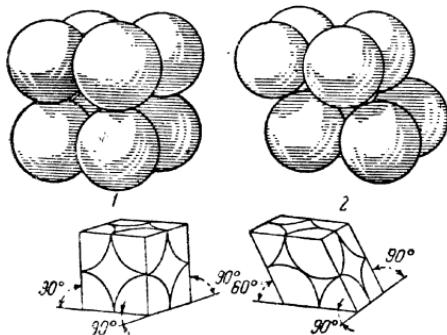
<sup>1</sup> Slichter C. S., Geol. U. S., Survey 19th. Ann. Report, Part. II, 295, 1897—98.

<sup>2</sup> Smith W. O., Foote P. D., and Busang P. F., Physical Rev., 34, 1271, 1929.

<sup>3</sup> Graton L. C. and Fraser H. J., Journ. Geol. 43, 785, 1935.

получить два крайних случая<sup>1</sup> их систематической укладки, дающих максимальный и минимальный возможный объем порового пространства. Единичный объем с такой укладкой приведен на фиг. 1. Изменения в угле наклона рядов могут дать бесконечные варианты промежуточных укладок. На фиг. 2 показана единичная пора для рядов куба и ромбоэдра. Каждая пора соответствует наиболее „свободной“ и наиболее „плотной“ набивке, возможной при систематической укладке шаров постоянного радиуса. Из геометрии обоих этих вариантов можно получить данные, приведенные в табл. 1, из которой видны пористости для предельных случаев укладки шаров.

Всякие другие укладки шаров дадут величину пористости, лежащей между этими пределами.



Фиг. 1. Единичные клетки с кубической (1) и ромбоэдрической набивкой (2) (по Грэтону и Фрэзеру).



Фиг. 2. Поры единичных клеток при кубической (1) или ромбоэдрической набивке (2) (по Грэтону и Фрэзеру).

Пористость есть отношение объема единичной поры к единичному объему образца. Поэтому она не зависит от радиуса  $R$  шаров, составляющих последний. Проницаемость образца зависит от фактических размеров поровых отверстий и пропорциональна  $R^2$ <sup>2\*</sup>. Таким образом, одна пористость агрегата не может дать точных указаний на его проницаемость. Отсутствие строгой пропорциональности между пористостью и проницаемостью даже в идеальном случае само по себе достаточно, чтобы устраниТЬ всякую возможность получения данных о проницаемости из замеров пористости<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Грэтон и Фрэзер приводят в своей классификации шесть случаев. Их первый и третий случаи соответствуют приведенным на фиг. 1. Их второй случай представляет фигуру, где четыре стороны — квадраты со сторонами  $2R$  и две стороны — ромбы со сторонами  $2R$  и острым углом  $60^\circ$  (пористость 39,54%), случай четвертый идентичен второму случаю, но только с отличной пространственной ориентировкой фигуры; пятый случай является тетрагонально-сфеноидальной укладкой; шестой случай аналогичен пятому, но тоже с отличной пространственной ориентировкой. Классификация эта была применена авторами вследствие той специальной значимости, которую они придавали вопросу устойчивости укладки шаров и ее влиянию на проницаемость.

\* По Слихтеру.

<sup>2</sup> Довольно странно, что до последнего времени термины пористость и проницаемость являлись у многих инженеров почти синонимами. Это имело место, возможно, и потому, что пористые разности, с которыми они имели дело, показывали в общем один и тот же характер изменения пористости и проницаемости.

Таблица 1  
Пористость при укладке одинаковых шаров

Укладка	Кубическая	Ромбоэдрическая
Объем единичного образца . . . . .	$8,00R^3$	$5,66R^3$
Объем единичной поры . . . . .	$3,81R^3$	$1,47R^3$
Пористость, % . . . . .	47,64	25,95

Так как между граничными случаями систематической укладки существует бесконечное количество промежуточных типов, возникает вопрос о типе укладки зерен в естественных образцах, а отсюда и о величине их пористости. Изучение фиг. 1 ясно показывает, что наиболее устойчивая форма укладки ромбоэдрическая. При этой геометрии шары имеют достаточно точек соприкосновения, чтобы обеспечить поддержку их со всех сторон, в то время как кубическая форма укладки устойчива только по отношению к нормальным силам. Поэтому она обладает вместе со всеми промежуточными формами укладки весьма малой устойчивостью.

Следует считать, что шары, которым дана возможность занять при легком сотрясении естественное положение, могут принять наиболее устойчивую форму и пористость всего агрегата будет наименьшей. Однако при размещении большого количества шаров потребуется высокое совершенство укладки отдельных единиц, чего нельзя получить в естественных условиях. Скорее всего следует ожидать, что требуемое совершенство укладки будет ограничено определенным количеством частиц и вне этого предела начнется нарушение формы укладки. Когда это нарушение формы достигнет значительной величины, укладка станет принимать хаотический вид, и хотя бы внешние стенки систематической укладки и соответствовали близко геометрической форме образца, полного однообразия его получить невозможно. В естественных образцах, даже подвергая их сотрясению, чтобы получить более плотную набивку, следует ожидать образования групп шаров (зерен), уложенных правильными рядами и отделенных слоями, в которых размещение шаров беспорядочно и где пористость может иметь большую величину, чем при кубической укладке. Такие зоны могут существовать вследствие скообразования отдельных групп зерен под меньшим давлением, чем раздавливающее усилие, воспринимаемое этими частицами. Опыты с единичным слоем шаров подтверждают правильность этих условий.

Экспериментальным путем было найдено, что образцы, составленные из шаров или даже зерен песка, имеют среднюю пористость около 40%, несмотря на тщательную их укладку и даже преобладающую ромбоэдрическую форму, при теоретической пористости, не превышающей 26%.

Теоретически реальный размер шаров не оказывает влияния на пористость, но в естественных образцах это положение не является справедливым. Фактические определения<sup>1</sup> показывают следующие значения

<sup>1</sup> Ellis A. J. and Lee C. H., Geology and Ground Waters of the Western part of San Diego Co, Cal, U. S. Geol. Surv. Water Supply, Pap. 446, 121—123, 1919.

пористости: крупнозернистые пески 39—41%, среднезернистые пески 41—48%, тонкозернистые пески 44—49%, тонкозернистые глинистые пески 50—54%. Для весьма малых частиц пористость может колебаться от 50% для частиц выше 0,02 мм до 95% при песках размерами меньше 0,002 мм\*.

**7. Укладка естественных материалов.** Естественные породы имеют частицы, которые могут значительно отличаться от шарообразной формы, а также иметь различные размеры. Благодаря этому мелкие частицы могут заполнять поровое пространство между крупными частицами, создавая при этом заметное уменьшение пористости.

Действительно, благодаря отсутствию сортировки ледниковые наносы хотя и содержат обломки горных пород и гальку, тем не менее обладают более низкой пористостью и проницаемостью, чем относительно тонкозернистый, но лучше отсортированный песок. С другой стороны, угловатость зерен создает благоприятные условия „сводообразования“, что в свою очередь способствует беспорядочной их укладке и повышению пористости. Пористость береговых песков в естественном состоянии колеблется от 40 до 56%, хорошо согласуясь с лабораторными экспериментами<sup>1</sup>. У свежеотложившихся глин и глинистых илов пористость часто превосходит 85%, хотя те же материалы после сушки и уплотнения имеют пористость от 40 до 50% и даже менее. Широкий диапазон в величине пористости свежеотложившихся осадков с различными размерами зерен ведет в дальнейшем к весьма важным последствиям уже после того, как осадки будут погребены. Благодаря весу вышележащих пород осадочные образования подвергаются соответствующим давлениям, которые уменьшают их объем, создавая более тесную набивку, измельчение и деформацию зерен, а при крайне высоких давлениях — фактическую перекристаллизацию частиц. Повидимому, величина уплотнения будет зависеть от строения частиц, а также от первоначальной пористости образования.

**8. Сжимаемость песка и гравия.** С уменьшением размеров частиц галька и зерна песка отлагаются в состоянии, более приближающемся к устойчивому. Это видно из замеров пористости, произведенных над свежеотложившимися песками, и сравнения с глинами и глинистыми илами, а также из лабораторных экспериментов над искусственно отложившимися частицами, имеющими резкое отличие в размерах зерна. Действительно, отложение среднезернистого песка в естественных условиях создает образование, очень близкое к минимуму пористости, которое только можно получить при любой форме укладки. Дальнейшая встряска или сжатие зерен дают почти незаметное уменьшение в величине пористости, хотя бы приложенное усилие было достаточно, чтобы раздавить зерна и более или менее полностью устраниТЬ „сводообразование“ и скученность зерен над отдельными пустотами. Так, пористость слегка сцепленных песков, полученных из керна, взятого с глубины 1200 м, оказалась выше, чем пористость аналогичных песков, но

\* Terzaghi K., Eng. News Record, 95, 914, 1925.

<sup>1</sup> Fraser H. J. Journ. Geol., 43, 910, 1935.

взятых с меньших глубин. Эксперименты<sup>1</sup> подтверждают также весьма малое влияние сжатия песков на пористость после их отложения. В большинстве случаев уменьшение пористости в период после отложения таких материалов следует отнести за счет цементации последних каким-либо минеральным веществом.

**9. Сжимаемость глин.** Ненормально высокая пористость, которая получается в свежеотложившихся глинах и илах, указывает на крайнюю восприимчивость таких материалов к уплотнению. Поэтому не удивительно, что фактические определения пористости мергеля на одних и тех же глубинах в любом из рассматриваемых месторождений дают почти близкие показания. Отсюда величина пористости может служить мерилом уплотнения, которому подверглась глина. Эзи<sup>2</sup> нашел, что изменения пористости глинистого сланца по отношению к толще налегающих пород определяются следующей формулой:

$$f = f_0 e^{-bz},$$

где  $f$  — пористость;  $f_0$  — средняя пористость поверхностных глин;  $b$  — константа;  $z$  — глубина залегания пласта.

Тот же самый автор установил, что в то время как средняя пористость поверхностных глин (не из свежих отложений) составляет 45—50%, на глубине 1800 м эта же пористость составляет приблизительно 5%. Отсюда видно, что уплотнение глин более чем на 20% произошло, когда породы подверглись сжатию от поверхности залегающей толщи мощностью 300 м, на 35% при толще в 600 м и на 40% при толще в 900 м. Весьма затруднительно установить, зависит ли это уменьшение пористости от физического перераспределения зерен материала или же от фактической перекристаллизации. Если глины были подвергнуты достаточно сильному уплотнению, то большое разнообразие в размере частичек глин или илов, размер зерен которых достигает коллоидных величин, дает ненормально низкую пористость. Нетрудно заметить, что подобные материалы, подвергнутые высоким давлениям, вследствие неоднородности формы, размеров отдельных частиц и их распределению имеют тенденцию к очень сильному уплотнению. С другой стороны, возможно, заслуживает также внимания перекристаллизация некоторой части материала. Таким образом, в противоположность песчаникам и аналогичным им породам уплотнение глин весьма значительно и возрастает с давлением до пределов, еще окончательно не установленных. Превращение мергелей в глинистые сланцы или филит является, очевидно, процессом вторичной кристаллизации, где пористость практически уже отсутствует. Эта высокая восприимчивость глин и получающихся из них сланцев к уплотняющим силам и то обстоятельство, что при достаточно высоких давлениях пористость может практически исчезнуть, является, как это будет вкратце освещено при дальнейшем изложении, фактором важной геологической значимости.

<sup>1</sup> Boiset H. G. and Reed D. W., Amer. Assoc. Petrol. Geol. Bull., 19, 1053, 1935.

<sup>2</sup> Athy L. F., Amer. Assoc. Petrol. Geolog. Bull. 14, 8, 1930.

**10. Влияние уплотнения и деформации отложений на проницаемость.** Мы подчеркнули тот факт, что не существует и не следует ожидать общей закономерности между пористостью и проницаемостью. Отсюда вполне очевидно, что любая деформация данного материала, которая создает уменьшение пористости, влечет за собой в результате и уменьшение проницаемости. Уменьшение пористости данного вещества заключается в уменьшении размеров пор, а отсюда в значительно большей степени уменьшается и проницаемость. Поэтому любая деформация, имеющая место для обломочных материалов, в последующий за отложением период, будет ли это уплотнение или цементация, даст в результате значительное снижение величины проницаемости. Так как уплотнение песков практически невелико, то большие изменения в их пористости следует отнести за счет цементации, а соответственные изменения в проницаемости следует отнести за счет того же процесса. С другой стороны, глины и сланцы, которые на ранних этапах отложения можно рассматривать как практически непроницаемые породы, после уплотнения становятся совершенно непроницаемыми. Эта характеристика глин и сланцев, так же как и остальных непроницаемых пород, имеет важное геологическое значение при установлении распределения и накопления подземных жидкостей.

**11. Классификация пород и их свойства по накоплению жидкостей.** Рассмотрение пористой среды до сих пор было ограничено важнейшими обломочными типами, причем пористость определялась геометрией распределения частиц с кратким упоминанием об изменениях, которые могут иметь место после процесса первоначального их отложения. Рассмотрим вкратце происхождение и форму залегания этих пород, а также некоторых других, которые могут встретиться при исследовании подземных условий. Породы, слагающие земную кору, подразделяются в зависимости от их происхождения на:

- 1) изверженные породы, которые образовались вследствие охлаждения и затвердения расплавленной магмы;
- 2) осадочные породы, которые образовались вследствие отложения материалов от эрозии любых первозданных пород, из остатков растительной или животной жизни, или выделились из водных растворов;
- 3) метаморфические породы, которые образовались вследствие длительной деформации предыдущих пород, в основном под влиянием температуры и высоких давлений.

Породы, которые вскрывает бурением глубокая скважина в районе с нормальным геологическим разрезом, чередуются в следующей последовательности:

- a) несцементированные отложения, состоящие попеременно из глин, песков и гравия,
- б) сцементированные отложения, как мергели, песчаники, известняки и конгломераты, и
- в) метаморфические и изверженные породы.

Изверженные породы в зависимости от своего состава и происхождения широко различаются между собой как по типу, так и по строению

нию. Расплавленные минералы, которые оставались в больших массах глубоко погребенными, затвердевали весьма медленно, образуя кристаллическое строение, типичное для интрузивных гранитов. Расплавленные породы, выдавленные на дневную поверхность или в небольшие интрузии, быстро застывают, образуя стекловидное строение. В случае потоков лавы последние могут быть пористыми благодаря выделению газов и пересекаться большой сетью трещин, образовавшихся вследствие усадки от быстрого охлаждения. В целом интрузивные изверженные породы, за исключением трещиноватых или подвергшихся тяжелой эрозии, настолько непроницаемы и малопористы, что представляют собой небольшой интерес для рассматриваемого нами исследования. Однако экструзивные изверженные породы (потоки лавы) могут иметь высокую проницаемость, например, базальты, которые покрывают значительную часть северо-запада США и почти всю площадь Гавайских островов и которые являются весьма важными подземными водными резервуарами.

Представляет интерес отметить здесь состав изверженных пород, так как они являются основным источником всех неорганических осадочных образований. Основные минералы, которые можно встретить в изверженных породах: кварц (кристаллический кремний), полевой шпат (силикаты алюминия с калием, натрием, кальцием и барием), слюда (силикаты алюминия и щелочноземельные металлы или железо), роговая обманка (силикаты кальция, магния, алюминия и т. д. с изменяющимся составом), пироксены (в основном силикат кальция или магния) и олифир (силикат магния и железа). Благодаря своей твердости и химической стабильности кварц поддается с трудом разрушению или износу и не распадается, когда остальная часть горной породы подвергается эрозии. Кроме того, кварц нелегко растворяется или выщелачивается циркулирующими в земной коре водами. Таким образом, когда остальные минералы, входящие в состав гранита, подверглись разрушению и образовали глины или другие тонкозернистые породы, зерна кварца остались целыми. В основном эти частицы слагают залежи песков и песчаников. Если слюду подвергнуть тщательному разрушению, можно получить остаточную глину. Но слюда в природе распадается очень медленно, и вследствие этого неразрушенные остатки ее можно встретить во многих отложениях глин и песков. Настоящая глина представляет собой силикат алюминия, образовавшийся при распаде более сложных силикатов, которые можно встретить в изверженных или метаморфических породах. Она состоит из частиц настолько малых размеров, что ее можно рассматривать как коллоидное вещество. Большинство залежей глин представляет собой механические смеси с более грубозернистым составом, где пористость составляет 50—60%, но проницаемость их в целом чрезвычайно низка. Метаморфические породы представлены такими обычными **разностями**, как кварцит, кристаллический сланец, мрамор, шифер и гнейс. Так как они широко распространены и их можно встретить в областях с осадочными образованиями, опишем вкратце образование и характеристику наиболее часто встречающихся типов этих горных пород. Кварцит обычно является результатом полной цементации кварцитовых песчаников проникшим в поры последних кремнием. Он является самым твердым

и износостойчивым из всех обычных горных пород. Обычно кварцит имеет трещины или нарушения, но в остальном он непроницаем.

Глинистые сланцы образовались из мергелей и тому подобных глинистых материалов под высоким давлением и температурой. Глинистый сланец тверже мергеля и меньше подвергается эрозии, но благодаря характерному явлению и склонности к трещинообразованию может быть проницаем для жидкостей и газа.

Мрамор образовался из известняков в процессе длительного затвердевания и кристаллизации. Это плотная черная порода, которая, подобно известняку, может медленно растворяться в циркулирующей через трещины и другие нарушения воде.

Кристаллический сланец или шифер образовался под интенсивным давлением вследствие глубокой деформации мергелей, глинистых сланцев или иных горных пород. Он имеет неправильную листоватую структуру, которая в основном обязана развитию чешуек слюды параллельно плоскости деформации пород.

Гнейс является слоистой зернистой горной породой, большая часть которой образовалась из гранита и которая переходит в гранит или иные кристаллические изверженные горные породы, но может образоваться и из осадочных горных пород. Хотя метаморфические горные породы и находятся у дневной поверхности или в залеганиях, где вследствие эрозии может иметь место разрушение и образование трещин, вполне очевидно, что в целом они слишком непроницаемы, чтобы представлять интерес в качестве пород — коллекторов жидкости.

Осадочные породы разделяются согласно своему происхождению на: 1) обломочные, 2) органические и 3) химические отложения. Как уже отмечалось выше, обломочные осадки состоят из обломков, получившихся от эрозии более древних горных пород, и включают гравий, песок, ил, глину и продукты цементации этих материалов. Органические осадки состоят главным образом из известковистых или кремнистых остатков животных, например, раковин, кораллов и т. д. и обуглившихся остатков растений. Известковистые материалы образуют известняки, мел, мрамор и тому подобные горные породы, в то время как обуглившиеся материалы образуют торф, уголь и остальные родственные им вещества. Химические осадки состоят из минералов, выделившихся из водных растворов, и включают в себя такие отложения силиция, как кремний, халцедон, роговик, жильный кварц, железосодержащие отложения в виде железных руд; известковистые отложения, как, например, оруденевые золотоносные известняки, гипс, каменная соль и прочие растворимые щелочные и щелочноземельные металлы и соли. Эти химические осадки являются весьма важными, так как они представляют источник вторичной цементации обломочного материала.

Обломочные типы осадочных материалов были уже рассмотрены в некоторых деталях выше, а именно в отношении их пористости и проницаемости. Так как осадочные образования органического происхождения являются довольно часто важными источниками подземных жидкостей, но отличаются от остальных типов отложений восприимчивостью к деформациям в период после первоначального отложения, рассмотрим вкратце их свойства как коллекторов жидкостей.

Ни одна горная порода так резко не отличается своими способностями к вмещению жидкостей, как известняки и родственные им разности. Некоторые известняки являются прекрасными коллекторами жидкостей, в то время как другие совершенно непродуктивны вследствие недостатка пористости и проницаемости. Это явление только частично можно отнести за счет первоначального строения породы. В основном это обстоятельство является результатом разницы в степени воздействия на породу растворяющей деятельности циркулирующей в недрах воды. Таким образом, если для обломочных осадков изменения в период после первоначального отложения вследствие явлений цементации, консолидации и метаморфизма приводят к уменьшению пористости и проницаемости, исключительно высокая пористость и проницаемость некоторых известняков явились результатом их растворения циркулирующими водами в некоторый отрезок времени их геологической жизни. Это развитие и возрастание пористости после первоначального отложения и уплотнения вполне определяются термином „вторичная пористость“.

Свежеотложившиеся известняки могут быть весьма пористы и проницаемы. Однако вследствие той легкости, с которой известковистые материалы подвергаются уплотнению, а также растворению и вновь выпадению из раствора, первоначальное их поровое пространство имеет тенденцию к закупорке или заполнению материалом при вторичных отложениях. По этой причине, а также вследствие метаморфических изменений, имеющих место в глубинных залежах, известняки более раннего возраста имеют в общем низкую пористость и почти непроницаемы. Однако эти породы могут быть подняты горообразовательными процессами и благодаря эрозии перекрывающих пород оказаться близко к поверхности. Наличие плоскостей напластования или трещин, образовавшихся в процессе интенсивного складкообразования, обеспечивает свободное поступление циркулирующим грунтовым водам. Так как воды содержат обычно двуокись углерода, то вдоль этих путей будет иметь место относительно быстрое растворение известковистого материала. Таким образом, создаются те кавернозные отверстия, которые свойственны известнякам, являющимся особенно богатыми коллекторами жидкостей. В некоторых случаях эти кавернозные отверстия могут являться действительно кавернами больших размеров. Однако термин „кавернозный известняк“ относится также и к таким, которые содержат относительно небольшие поры, величиной от доли миллиметра до нескольких миллиметров в сечении. Такие отверстия, образуя соединяющиеся каналы, увеличенные в своем размере трещинами, составляют большую часть подземных карбонатных резервуаров с необычной продуктивностью.

Двуокись углерода в циркулирующих водах является растворяющим агентом и находится обычно в изобилии только в поверхностных водах. Поэтому известковые образования, которые залегают на значительных глубинах, должны иметь низкую пористость и проницаемость. Дело в том, что на больших глубинах вода имеет малое содержание двуокиси углерода и относительно медленную циркуляцию. Тогда, очевидно, наиболее благоприятные условия, которые могут способствовать образованию известняков с большой пористостью, заключаются в под-

нятии залежи от своего нормального положения в зону циркуляции грунтовых вод (где велико растворяющее действие последних) с последующим погружением на глубину и покрытием другими осадочными образованиями. Если получившаяся при этом вторичная пористость не подверглась последующему отложению или выпадению осадков из раствора, которые частично или полностью заполнят поровое пространство, то залежь сохранит свою благоприятную пористость даже на больших глубинах залегания, так как уплотненная горная порода в состоянии противостоять сжимающим усилиям, возникающим от тяжести вышележащих пород.

Восприимчивость известняков к выщелачиванию, которое в свою очередь зависит от геологической истории залежи, определяет радикальные изменения пористости и проницаемости, которые, как уже было упомянуто, являются характерными для известняков и иных родственных им пород. Является очевидным, что те же самые факторы влияют на фаунильные изменения этих параметров в пределах одного и того же стратиграфического горизонта, а также и различных горизонтов, которые первоначально могли иметь один и тот же состав и строение. Отсюда является вполне обычным, что наиболее пористые участки известковой залежи приурочены к гребню купола или антиклинальной складки, который в известный период своей геологической жизни находился над или в зоне грунтовых вод.

Этого вполне достаточно, чтобы показать природу вторичной пористости, характеризующей некоторые известняки. Принимая во внимание также восприимчивость известняков к трещинообразованию во время упомянутого выше складкообразования, ясно, что подобные залежи могут показать заметное отклонение от идеальной пористой среды, принятой в настоящем исследовании. Так как соответствующие характеристики породы не могут быть установлены изучением небольших образцов, взятых из залежи (даже в большом количестве), как это обычно делается для решения практических проблем, отклонение от идеальной пористой среды в данном случае не имеет серьезного значения. Даже при соединяющейся сети многочисленных трещин аналогия будет постоянно сохранена. Только в том случае, когда относительно непроницаемая порода будет пересечена несколькими, далеко простирающимися трещинами, будет существовать серьезное отклонение от идеальной среды<sup>1</sup>. Нами было обращено специальное внимание на вторичную пористость, так как именно за ее счет следует отнести обычно встречающую высокую проницаемость. Вместе с тем многие карбонатные породы могут иметь значительную пористость и проницаемость в своем, не подвергшемся изменению первоначальном состоянии. Такие известняки, состоящие из склеритированных карбонатных обломочных частиц, совершенно сопоставимы с песчаниками как в отношении их структуры, так и порового пространства. Иные породы могут быть пористы вследствие наличия в них остатков от скелетов мельчайших организмов, даже в больших структурах, какими отличаются коралловые образования.

---

<sup>1</sup> В главе VII,пп. 4 и 8 будут подвергнуты математической обработке проблемы, включающие в себя такие условия.

**12. Связь структуры горных пород и подземных жидкостей.** В то время как объем жидкости, заключенный в горной породе, определяется строением или пористостью последней, а подвижность его в породе зависит от ее проницаемости, распределение жидкостей в горной породе и ее миграционная характеристика в пределах стратиграфического объекта зависят от строения коллектора и от распределения в нем пропускного сечения.

Земная кора состоит из слоев или отдельных стратиграфических горизонтов различных горных пород, а также массивов или сланцеватых образований, которые подстилают или пересекают эти стратиграфические слои. Осадочные породы вследствие самой своей формы образования обычно слоисты. Изверженные и метаморфические породы могут образовать слои, но обычно они представлены массивными интрузиями. Под покровом из осадочных слоев и интрузий лежат изверженные породы, которые были первоначальным источником всех осадочных образований. Это так называемый изверженный фундамент или „базисный комплекс“, на котором заканчивается наша заинтересованность. Мощность образований осадочных пород может колебаться от нескольких метров до сотен — занимать площадь от нескольких квадратных километров до нескольких тысяч, и они могут быть представлены или на дневной поверхности, или же быть глубоко погребенными под другими образованиями. Большинство осадочных образований состоит из слоев, мощность которых весьма незначительна по сравнению с площадью, которую они занимают. Так, например, песчаник Св. Петра, мощность которого в среднем не превышает 30 м, занимает площадь в северо-центральной части США около 300 000 кв. миль.

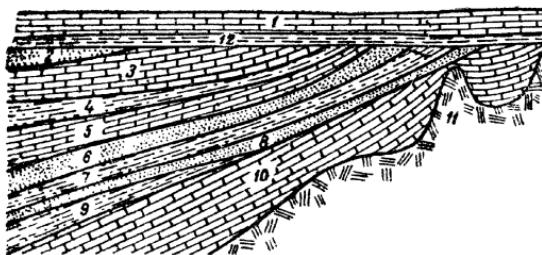
Такое постоянство единичного образования с однородностью строения, характерной для того песчаника, является необычной, так как это требовало однообразия условий отложения, обычно в природе не встречающихся. В то время как многие осадочные породы, отложившиеся одновременно, можно рассматривать как часть одного и того же образования, характеристика их может широко колебаться на сравнительно небольших расстояниях, завися от специфических условий, существовавших на данной определенной площади в момент осадкообразования. Более того, любое образование, например песчаник, может оказаться неплотным и ненарушенным песчаным телом значительной мощности, и при вскрытии его долотом в процессе бурения покажет чередующиеся слои песка, глин, известковистого песка и прослоек мергеля с относительно меняющейся мощностью. Эти отдельные слои могут быть представлены линзами мергелей в пласте, во всем остальном представляющим однородный песок, или пески могут образовать линзы в более или менее однородном пласте глины. С другой стороны, непрерывно простирающийся песчаный пласт может быть пересечен сравнительно тонким прослойем мергеля, который тянется на большое расстояние. Следует отметить эти отдельные свойства и понять их причинную связь, наблюдая за типами осадков и структурой их отложений в районах недавней или современной активной седиментации. Так, поток, стремящийся с высоких гор, обычно откладывает валуны и гальку близ последних и уносит с собой ил и глину далеко на рав-

нику. В некоторых местах вдоль морского берега имеются пляжи, состоящие из чистого гравия. Движение волн и водяных потоков дает достаточно энергии, чтобы унести тонкозернистый материал, который вымывается водой или подвергается эрозии из материала береговой зоны. В других местах сила волн и течений меньше и там отлагается песок и ил. Удаляясь от берега в море, мы наблюдаем постепенное изменение осадков, начиная от мощных скоплений грубозернистых разностей до все более и более тонкозернистых отложений. Там же, где вода глубока и чиста, могут образоваться известняки. В свете сортирования отложений вполне очевидно, что постепенное наступление моря „в результате оседания суши“ приведет в конечном итоге к постепенному распространению каждого типа отложений в направлении наступления моря. Так, грубозернистые обломки на берегу постепенно покроются песками, затем илом, глинами и, наконец, даже известняками, если оседание суши будет достаточно велико. В то же самое время каждый вид образования распространится с большим или меньшим однообразием в направлении наступления моря. В результате этого может быть достигнута очередность образования слоев известняка, глин и песчаника, имеющих значительную протяженность и однообразие. Тем не менее можно ожидать местных изменений в строении и составе осадков, выражающихся в появлении линз глины в песках или наоборот.

Не представляется возможным углубляться здесь далее в физиографические и геологические факторы, влияющие на установление типа и распределение различных осадков, но приведенные в последующем основные положения должны быть вполне очевидны. Все стратиграфические слои являются следствием изменений в физических условиях, при которых имело место осадкообразование. Резкая разница в последовательности образований большого масштаба обязана своей причиной региональным изменениям, меньшие отклонения в пределах единичного слоя обязаны местным или времененным изменениям. В качестве примера можно указать, что глинистые частицы среди соответствующих прослоек известняка могут быть отнесены за счет штормов исключительной силы, которые создавали значительные вихри в обычно чистых водах. Неисчислимая слоистость некоторых глин могла явиться следствием обычных или циклических изменений бурной погоды.

Механизм отложения осадков предполагает необходимость отложения в первоначальном состоянии горизонтальных слоев. В областях с неактивной геологической деятельностью образовавшиеся осадки могут сохранить свое первоначальное залегание и существовать в настоящее время в виде горизонтальных или слегка наклонных формаций. С другой стороны, такая неактивность в течение длительной геологической эпохи в обычных условиях не встречается. Региональные поднятия и опускания, эффективность которых распространяется на большие расстояния, являются непременным условием накопления мощных осадочных образований. При этом местная активность, принимающая участие в диастрофизме в период, последующий за первоначальным отложением осадков, почти неизбежна. В результате этого происходят местные нарушения горизонтальных слоев, образующие

складки, купола, моноклинали, которые могут получить весьма крутое падение. Если горообразовательные процессы протекают замедленно, то пластичность большинства пород дает возможность отложившимся слоям постепенно изогнуться и сместиться, без серьезных нарушений залегания, в сравнительно покойную антиклинальную и синклинальную систему. Однако быстрое воздействие тех же геологических процессов или очень резкое складкообразование обычно приводят к образованию трещин и большинства сбросов в формациях. Повидимому, спокойное складко- или куполообразование без больших трещин не может серьезно нарушить непрерывность слоев, поскольку мы рассматриваем этот вопрос в свете перемещения жидкостей. С другой стороны, большие сбросы могут создать достаточную величину перемещения слоев, чтобы вызвать вертикальное смещение данного объекта на



Фиг. 3. Типовой геологический разрез несогласного залегания пород;

1 — известковистая глина; 2 — песок; 3 — известняк с прослойками глины; 4 — песчанистая глина; 5 — известняк с прослойками глины; 6 — песчаник; 7 — глинистый песчаник; 8 — песчаник; 9 — глинистый песок; 10 — известняк; 11 — гранит; 12 — глинистый сланец.

большую высоту, чем его мощность. В этом случае непрерывность формаций может быть прервана на сбросе, и проницаемый слой может войти в соприкосновение с непроницаемой породой. С другой стороны, область сброса может заполниться непроницаемым обломочным материалом, который получился от вышеупомянутых местных давлений и деформаций. Соответственно этому в некоторых районах непрерывность проницаемых слоев может нарушиться непроницаемыми интрузивными дейками иногда весьма малых размеров.

Если в продолжение своей геологической жизни какая-нибудь область, состоящая из мощных складчатых осадкообразований, подверглась эрозии, то антиклинали могут частично или полностью снивелироваться. В результате такого оголения наклонные слои будут заканчиваться выходами на дневной поверхности. Последующая седиментация на этой площади в результате регионального оседания покроет первоначальную поверхность новыми образованиями отличного геологического возраста, которые лягут несогласно поверх более ранних горных пород. Повидимому, такой разрыв непрерывности в геологическом разрезе, именуемый несогласным напластованием (фиг. 3), может образовать замкнутые границы для некоторых погребенных слоев и так же, как сбросы, ограничить их сообщаемость.

Эти несогласия являются весьма обычными и распространенными структурными факторами и представляют собой покровы над ископаемыми слоями с уже отмеченной неправильностью, которой характеризуются эрозионные явления на дневной поверхности. Эти несогласия, очевидно, будут иметь серьезное влияние на скопление и региональную миграцию подземных жидкостей.

**13. Подземные жидкости, их залегание и миграция.** Под алювиальным покровом поверхностных почв породы, составляющие земную кору, представлены несцементированным гравием, песками, глинами, которые в результате уплотнения этих материалов цементацией и давлением с глубиной переходят постепенно в песчаники и мергели. Эти горизонты могут содержать также прослойки известняков, если в течение всей своей геологической жизни рассматриваемая область была покрыта достаточно глубоким водным бассейном с развитой органической жизнью. Мощность зоны несцементированных или полусцементированных пород обычно колеблется от нескольких метров до сотен метров, а мощность зоны сцементированных уплотненных осадочных пород, подстилаемых метаморфическими породами, может достигать нескольких тысяч метров. В основе этого комплекса лежит кристаллический фундамент. Из предыдущего рассмотрения следует вспомнить, что все эти породы обладают известным поровым пространством или пористостью, которая может колебаться, начиная от 85% ко всему объему отложившегося на поверхности ила и глины, и 40% для недавних отложений хорошо отсортированных песков, до практически ничтожной пористости у очень глубоких метаморфизованных осадочных образований и изверженных пород. Даже на глубинах свыше 300 м можно встретить горные породы, обладающие эффективной пористостью в 5—10% и даже выше, а на промежуточных глубинах песчаники с пористостью 20—25% не представляют редкого явления.

Большая часть этих осадочных образований отложилась под действием воды или непосредственно из морских бассейнов. Даже если эти осадки отложились в пустынных областях под действием ветров или иных рабочих агентов или же в случае формирования залежей любого вида, они были приподняты и подвергнуты поверхностью эрозии, то на конечном этапе погружения они оказались насыщенными грунтовыми водами. Таким образом, следует ожидать, что все горные породы, залегающие под земной поверхностью и обладающие поровым пространством, должны быть насыщены жидкостью, что и подтверждается в действительности. Обычно в глубоко залегающих морских отложениях последние содержат погребенную или сингенетическую воду. Возможно также, что эта вода проникла под давлением в отложения из смежных коллекторов или мигрировала с далеких расстояний через пористые сообщающиеся каналы. В нефтяных и газовых залежах сингенетическая вода, поступив туда после отложения осадочных образований, может явиться частью общего содержания жидкостей в породе.

Так как поровое пространство или трещины залегающих под землею горных пород заполнены жидкостями, уместно рассмотреть давления,

присущие последним. Существуют два вида или источника давления, которым подвержены жидкости в подземных резервуарах. С одной стороны, как мы уже видели, все горные породы испытывают в различной степени обжатие после первоначального осадкообразования. Так как сжатие является результатом тяжести залегающих над данным объектом пород в комплексе с возможными дополнительными усилиями от земного диастрофизма, можно допустить, что эти же нагрузки приложены и к жидкостям, заключенным в рассматриваемом глубоко залегающем коллекторе. Величина этих нагрузок зависит от тяжести налагающих пород и составляет около  $230 \text{ кг}/\text{см}^2$  на глубине 1000 м. С другой стороны, известно, что жидкости свободно мигрируют на далекие расстояния по пластам к их поверхностным выходам или же через перекрывающие их полупроницаемые слои и микротрещины, прорезывающие непроницаемые породы, по которым возможно достичь по вертикали дневной поверхности. Отсюда конечное давление жидкости, существующее в данном пласте, не может быть больше гидростатического давления, соответствующего глубине залегания или выхода проницаемого коллектора. Интересно отметить, что давления в девственных пластах, вскрываемых при бурении, очень близки к напору гидростатического столба, соответствующего залеганию последних, что составляет около 100 ат на 1000 м глубины<sup>1</sup>.

В некоторых случаях можно встретить и повышенные давления, особенно в артезианских источниках, где продуктивный пласт имеет „активный“ выход на поверхность, через который может беспрерывно поступать в пласт значительное количество воды.

В свете этого обстоятельства интересно установить объем жидкостей, которые залегают под дневной поверхностью в природном подземном резервуаре. Возьмем в качестве примера песчаный пласт с пористостью 20% и мощностью 1 м. Каждый квадратный километр такой формации будет заключать в себе 200 000 м<sup>3</sup> порового пространства, а отсюда соответственный объем жидкости. Более того, если данный пласт содержит в себе газ, который, как уже было отмечено, будет находиться под давлением, соответствующим гидростатическому напору столба жидкости, равному глубине залегания пласта, то на сравнительно небольшой площади будет заключено много миллионов кубометров газа. Так как мощность единичного пористого горизонта этого типа может составлять десятки и сотни метров, то осадочные породы, даже залегающие на больших глубинах, могут заключать в себе, очевидно, огромные количества воды, нефти и газа. Рассматривая скопления нефти и газа как специфические случаи, мы можем разбить все подземные воды на два больших класса:

- а) грунтовые или атмосферные воды, источники которых и сами они находятся относительно близко к поверхности почвы;
- б) погребенные воды, — обычно встречаются в более глубоко залегающих образованиях и представляют собой жидкость, связанную

<sup>1</sup> В нефтяных месторождениях побережья Мексиканского залива, Луизианы и Техаса недавними исследованиями точных замеров пластовых давлений было установлено полное совпадение этих данных с фактическими материалами, полученными со скважин, вскрывших впервые новые горизонты.

с осадкообразованием, заключенную в них в процессе отложения или же мигрировавшую в эти формации спустя некоторое время после отложения осадков.

**14. Залегание грунтовых вод.** Из атмосферных осадков, выпадающих на землю, одна часть их немедленно проникает через почву в дренажные каналы, другая часть испаряется в атмосферу, а остаток влаги просачивается глубоко в почву. Это просачивание грунтовых вод находит постепенно свой путь медленной подпочвенной миграцией в топографически пониженные, дренирующие поверхности русла. Часть этой влаги возвращается к дневной поверхности капиллярными силами, а часть растительным покровом, откуда она медленно испаряется в засушливые периоды. Грунтовые воды можно, таким образом, рассматривать залегающими в двух зонах: одна из них ненасыщенная, или так называемая капиллярная, зона<sup>1</sup>, содержащая в себе почти исключительно поверхностный слой неуплотненной почвы и залегающая над поверхностью насыщения, и вторая зона, залегающая ниже поверхности насыщения, т. е. ниже действительного уровня грунтовых вод.

Более точное разграничение этих двух зон может быть сделано по давлению воды. В действительной капиллярной зоне давление будет меньше атмосферного, а в зоне грунтовых вод давление будет выше атмосферного. Тогда фактический уровень грунтовых вод определяется поверхностью, где давление жидкости равно атмосферному давлению.

Следует также упомянуть, что зона грунтовых вод включает в себя две области, которые характеризуются различием в стратиграфических границах, влияющих на миграционный режим воды. Это означает, что существует поверхностная зона движения, которую в принципе можно рассматривать как распространяющуюся от уровня водяного зеркала до первого эффективно непроницаемого слоя больших территориальных размеров, до которого грунтовая вода доходит при своем нисходящем просачивании, и вторая зона, состоящая из более глубоких участков движения, которые лежат под первым водонепроницаемым слоем. Первая зона характеризуется свободной неограниченной верхней водной поверхностью (зеркало воды) и эффективно непроницаемой нижней и обладает миграционным режимом, подчиняющимся в значительной степени местной топографии или поверхностной дренажной системе. Регулируется

<sup>1</sup> Этот термин здесь расширен и включает в себя так называемую вадозную (аэрированную) зону и фактически капиллярную зону, так как весьма затруднительно установить отличительную грань между ними. Повидимому, вода будет подниматься поверх нормального уровня грунтовых вод действием капиллярных сил, подобно тому как это имеет место в капиллярной трубке. Высота подъема воды определяется обычными факторами. Но в дополнение к этому в аэрированной зоне, как это имеет место в почвах, капли или даже массы воды, заполняющие многие поры, могут благодаря силам, удерживающим глобулу воды в пределах пор, оставаться взвешенными поверх действительной капиллярной зоны. Продолжительный период испарения, очевидно, освободит эту взвешенную воду, и над водяным зеркалом грунтовых вод останется только фактическая капиллярная зона. Испарение с поверхности этой зоны нарушит тогда равенство давления, в результате чего будет иметь место движение воды через эту зону по вертикали. Строго говоря, только такое движение может быть названо капиллярным движением.

она так называемой гравитационной характеристикой течения<sup>1</sup>. Глубокие зоны, заключающие слои, ограниченные в кровле и подошве водонепроницаемыми перемычками, не имеют поверхностей со свободным или нулевым давлением, почему и движение вод в них совершается по более простой закономерности. Различие между этими зонами выражается часто в величине просачивания через дневную поверхность и артезианского истечения. Первая учитывается в основном местной топографией, а вторая — региональными особенностями строения недр.

**15. Содержание воды в несцементированных поверхностных отложениях.** Поровое пространство различных пористых сред было уже достаточно детально рассмотрено, чтобы иметь представление о величине ее для различных пород. Вследствие возможных широких изменений в типе материала, размере зерен и распределении их пористость даже несвязанных отложений может колебаться в довольно широких пределах. Так, Кинг<sup>2</sup> указывает, что насыщенный песок содержит от 20 до 22% воды от своего сухого веса, в то время как содержание воды в почвах и глинах колеблется, начиная от этих величин, до 40 и даже 50% от своего сухого веса. Так как кубический метр песка весит от 1615 до 1762 кг, а почв, глин и гравия от 1267 до 1762 кг, видно, какое огромное количество воды заключено в подземных резервуарах. Фактические замеры, проведенные Кингом, показали, что емкость почв эквивалентна в круглых цифрах слою воды толщиной 2 м на каждые 5 м почвы, лежащей под уровнем насыщения.

Там, где почва не залегает под плоскостью раздела насыщения, она обычно содержит в поверхностном слое мощностью от 0,3 до 1,5 м, за исключением засушливых периодов, 75% воды от объема полного насыщения последнего. Таким образом, количество воды, собирающейся в этой зоне, колеблется от 4% по весу сухой грубозернистой смеси песков до 32% в глинах с тончайшим строением.

**16. Движение жидкости в капиллярной зоне.** Так называемые капиллярные движения грунтовых вод ограничены обычно поверхностью зоной над уровнем последних. Не может существовать подлинного капиллярного движения воды в осадочных образованиях или породах ниже водного зеркала, где поровое пространство уже заполнено водой. Однако перемещение жидкости по капиллярам может иметь все же место из области с повышенным насыщением в пониженную. Такие капиллярные движения могут происходить вверх, вниз и в широтном направлении в зависимости от условий насыщения, существующих в данное время. Дождь, выпавший на сухую землю, так насыщает верхний слой почвы, что действие капиллярных сил стремится направить нисходящее гравитационное дренирование или просачивание в области низкого насыщения. В течение засушливых периодов капиллярное движение имеет обратное направление, так как испарение с поверхности беспрерывно лишает воды верхнюю часть капиллярной зоны, и для поддержания равновесия происходит замещение ее из нижней насыщенной зоны. Обыч-

<sup>1</sup> Этот тип течения рассматривается в главе VI, где показана с очевидностью необычайно трудная с аналитической стороны его характеристика.

<sup>2</sup> King F. H., U. S. Geol. Survey. 19th. App. Rept. Part. II, 1897—98.

ная почва в условиях равновесия является сравнительно сухой у поверхности. Содержание влаги постепенно увеличивается по мере возрастания глубины, пока не будет достигнута зона насыщения или действительный уровень грунтовых вод. В однородной среде, повидимому, нет резкого перехода между этими двумя зонами. Тем не менее истинный уровень грунтовых вод вполне точно определяется стоянием водного зеркала в открытых канавах или колодцах, проведенных ниже зоны насыщения. В открытой канаве, вскрывшей только капиллярную зону, не будет содержаться свободной воды. Единственным движением последней будет испарение через стенки канавы. Эти закономерности (о чем уже упоминалось при установлении понятия об этих зонах), непосредственно вытекающие из рассмотрения условий давления, а также из определения уровня грунтовых вод как поверхности, где давление воды равно атмосферному, характеризуются свободной водной поверхностью в открытой канаве или колодце. Что же касается источника энергии, создающего капиллярное движение описываемого здесь вида, то вполне ясно, что его следует отнести за счет сил, вызывающих испарение воды. В дополнение к капиллярному движению этого типа, что в конечном итоге можно проследить, наблюдая процесс испарения, вода может проникать через эту зону под действием давления жидкости. Дождевая вода, собираясь на поверхности, при достижении условий насыщения может проникнуть в капиллярную зону под действием силы тяжести, а оттуда к водному зеркалу. Однако, этот, повидимому, простой процесс осложняется наличием воздуха в ненасыщенной зоне. Пузырьки воздуха, удерживаясь в почве, уменьшают поперечное сечение пор для движения воды, хотя и участвуют вместе с водой в процессе просачивания. В результате этого изменение скорости просачивания воды через капиллярную зону от величины насыщения представляет собой сложную зависимость.

Следующей причиной вторичного, или неустановившегося, движения воды в капиллярной зоне являются нормальные колебания атмосферного давления. Такие колебания по необходимости создают изменения в давлении почвенной жидкости и при нарушении условий равновесия вызывают движение грунтовых вод. Эти колебания барометрического давления имеют относительно небольшую величину. Изменение показаний барометра на 1 см рт. столба указывает, что атмосферное давление изменилось на 1,2—1,6%. Так как эти изменения давления воздействуют на большие массы воздуха, заключенного в капиллярной зоне, то соответственно этому изменяется и объем последнего. Короче говоря, это дыхание абсорбированного воздуха будет способствовать неустановившемуся движению небольшой амплитуды в капиллярной зоне. В результате этого уровень водного зеркала будет колебаться соответственно изменениям барометрического давления. Кинг приводит некоторые интересные наблюдения относительно величины наблюдавшегося движения грунтовых вод под влиянием изменений барометрического давления. Им даны примеры, в которых показана непосредственная связь изменения скорости истечения воды в источнике с изменением барометрического давления. При этом наблюдались почти одинаковые колебания в уровне артезианской скважины, расположенной на расстоянии 800 м от источника. Кинг указывает, что влияние барометрических изменений

достаточно велико, чтобы снизить дебит источника на 8%, в то время как дебит артезианской скважины глубиной 275 м изменился по крайней мере на 10%. В случае дренирования гончарными трубами, расположеннымими очень близко к поверхности, эти наблюдаемые изменения в дебите возрастают до 15%. Основная причина этих поразительно высоких изменений, создаваемых колебаниями барометрического давления, может быть прослежена на одной интересной особенности капиллярной зоны. Кинг приводит экспериментальные данные, показывающие, что добавления небольших количеств воды в капиллярную зону достаточно, чтобы создать относительно высокие изменения в высоте стояния водного зеркала. Наблюдение это является менее поразительным для того, кто знаком с высокой степенью насыщения, имеющей место в этой зоне, непосредственно над водным зеркалом. Таким образом, повышение атмосферного давления благодаря уменьшению объема аккумулированного в почве воздуха создает нисходящее движение воды в капиллярной зоне. В результате этого неравномерного повышения высоты стояния водного зеркала для данного объема воды, добавленного в капиллярную зону вблизи уровня насыщения, к системе прикладывается относительно повышенное гидростатическое давление, в результате чего источник или артезианская скважина повышают свой дебит. Основной интерес этого явления заключается в том, что оно наглядно подтверждает факт воздействия относительно небольших изменений объема воздуха, заключенного в капиллярной зоне, который может создать неустойчивые возмущения значительной амплитуды в нормальных условиях равновесия этой зоны. Изменения температуры могут создать неустановившееся движение в пределах этой области подобным же образом.

Мы не будем дальше разбирать детальным образом движение воды в капиллярной зоне. Но следует отметить, что эти процессы имеют большое экономическое значение. Так, в течение засушливых периодов поддержание соответствующего обеспечения влагой растений, корни которых не достигают водного зеркала, зависит от капиллярного эффекта. Более того, скорость испарения, а отсюда понижение водного зеркала, в большой степени зависит от строения поверхности почвы. Дыхание почвы, которое получается в результате нисходящего просачивания поверхностных вод, изменений барометрического давления и температуры, обеспечивает глубокое проникновение в почву воздуха, необходимого для поддержания в ней органической жизни. Эти же явления оказывают существенную помощь для нормального процесса диффузии рассеянных и постепенно удаляющихся из почвы газообразных продуктов органических реакций. Без этого обстоятельства медленный процесс одной нормальной диффузии может привести в результате этого к условиям равновесия газового содержания почвы, совершенно отличного от фактически существующего, что даст резкое отличие в изобилии и видах органической жизни в почве.

Проблемы, которые включают движение жидкости в поверхностной капиллярной зоне, имеют большую ценность для сельского хозяйства и образуют важный этап исследовательской работы в этом направлении. Капиллярная зона представляет интерес для гидролога в той части, что поверхностные воды, достигая зоны насыщения, должны проходить

по необходимости через капиллярную область, так как вода может достичь истинного водного зеркала, только превзойдя равновесное состояние насыщения. Тем не менее, за исключением тех указаний, которые нами уже сделаны по отношению к проблемам движения вод в капиллярной зоне, мы не будем больше концентрировать своего внимания на них, так как основные наши интересы связаны с областью насыщения, начиная от истинного уровня грунтовых вод или водного зеркала и ниже.

**17. Движение жидкости ниже водного зеркала. Поверхностная зона.** Как уже было указано, движение воды в пределах капиллярной зоны регулируется характером насыщения, а также другими факторами, которые выносят этот вопрос за рамки настоящей работы. На уровне водного зеркала или грунтовых вод, а также под ним можно допустить состояние полного насыщения. Поэтому зона, где давления имеют положительную величину и где движение вод определяется только градиентами давления, представляет интерес, по вполне понятной причине, для аналитического исследования. Отсюда все наши рассуждения в дальнейшем будут ограничены этой областью.

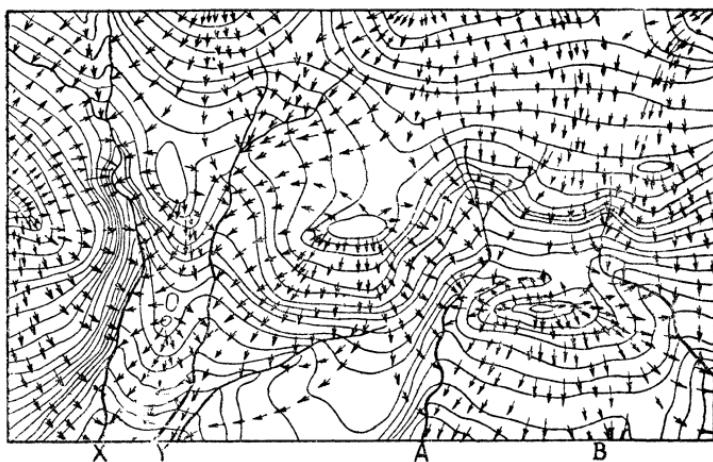
Выше уже было замечено (гл. I, п. 14), что зона грунтовых вод состоит из: 1) поверхности зоны движения последних, где миграция вод подчиняется гравитационному фактору, и 2) глубоких зон, где пористую среду можно рассматривать как имеющую верхнюю и нижнюю перемычки, а сами системы определяются течением через пространственно ограниченные пористые коллекторы. В большинстве исследований, относящихся к рассматриваемому вопросу, изучается второй тип зон, так как он относится не только к глубоким зонам грунтовых вод, но в равной степени приложим и к еще более глубоким зонам с погребенной водой. Рассмотреть детально все бесчисленные типы проблем, относящихся к поверхности зоне движения вод, не представляется возможным, но дать краткий обзор общих характеристик будет весьма полезно. Это послужит не только введением к практическим положениям, непосредственно вытекающим из дальнейших аналитических рассуждений, относящихся к этой специфической проблеме, но работу поверхностных вод можно будет подвергнуть в значительной мере непосредственному рассмотрению. Такие непосредственные наблюдения за их работой представляют промышленный интерес и дают неоценимый метод познания практических сторон движения вод через пористую среду.

Представителем поверхности зоны движения грунтовых вод является речная долина<sup>1</sup>. Скорость и направление движения подземных вод в поверхности зоне приурочены в основном к склонам поверхности рельефа. Основной характерной чертой течения в поверхности зоне является тот факт, что течение следует направлению поверхности дренажа. Направление, по которому движутся поверхностные воды к ручьям и дренажным каналам, в общем сохраняется тем же, что имеют просачивающиеся воды в верхней зоне. Фактические замеры показывают, что водное зеркало обычно имеет уклон, по су-

<sup>1</sup> Последующее содержание представляет собой свободное извлечение из работы „The Motions of Underground Waters“, C. S. Slichter. U. S. Geol. Survey Publ., 1902.

ству не отличающийся от рельефа поверхности почвы, но только менее крутой. Поверхностный водораздел обычно совпадает с линией подпочвенного водораздела, и движение подпочвенного просачивания в ручьи и реки происходит по тем же направлениям, по которым происходит поверхностное дренирование к тем же водосборным объектам.

Низкий урез дренирования долины известен под техническим термином — тальвег. На топографической карте тальвег определяется линией естественного водоспуска. Ниже тальвега обычно существует аналогичный дренажный путь для подпочвенного водостока, который в целом совпадает с направлением тальвега. Для остальных частей долины



Фиг. 4. Топографическая карта, показывающая положение водяного зеркала (непрерывные тонкие линии), предположительное направление движения грунтовых вод (стрелками), а также тальвеги и линии дренажа (толстые линии) (по Ч. Слихтеру).

фактические направления движения подпочвенных вод представлены сетью кривых, которые пересекают контуры водяного зеркала под прямыми углами. Таким образом, линии тока соответствуют направлению градиента давления и в общем следуют уклонам поверхностного рельефа, как это показано на фиг. 4. Нельзя принимать в буквальном смысле полную аналогию между поверхностной топографией и подпочвенными тальвегами. Совпадение поверхностных и подпочвенных тальвегов и водоразделов является обычным явлением, но не геологической необходимостью. Поверхностный рельеф является одним из элементов, регулирующих подпочвенное движение вод, но довольно часто не самым важным. Горизонтальное распределение и перемещение грунтовых вод зависит раньше всего от формы поверхности первого действительного водонепроницаемого слоя, залегающего под водяным зеркалом. В известной степени на него оказывает влияние изменение высоты дневной поверхности или площади накопления вод, характер и строение проницаемых пластов, высота и расстояние до ближайшего тальвега

или дренажного канала и, наконец, количество выпадающих осадков. Комбинация этих факторов определяет собой глубину водяного зеркала в каждом заданном месте, а также направление и скорость перемещения подпочвенных водяных потоков. Они образуют сложную систему, и в каждом отдельном случае не представляется возможным сказать точно, какой из этих элементов играет ту или иную роль. Тонкозернистый состав коллекторов и большое количество дождевых осадков образуют тенденцию к высокому уровню стояния зеркала грунтовых вод на холмах и повышенных частях дневной поверхности и создают крутые градиенты водного зеркала. Наоборот, грубозернистый состав коллекторов и слабые атмосферные осадки дают в результате низкие уровни грунтовых вод и малые градиенты. С этой точки зрения вполне очевидно, что форма водонепроницаемого горизонта влияет на уровень грунтовых вод во влажном климате в меньшей степени, чем в сухом или полусухом. Как уже было показано, движение подпочвенных вод под влиянием силы тяжести направлено в общем в сторону ближайших речных потоков и озер. Тем не менее это движение может быть изменено вследствие различных причин, которые часто создают весьма сложные комбинации. Так, хотя обратный поток грунтовых вод к водоизборам осуществляется, как правило, путем диффузии и почти неприметного просачивания, геологические условия на данной площади могут быть таковы, что поверхностные выходы водонепроницаемого пропластика могут вывестись, например, уровень грунтовых вод на дневную поверхность и сконцентрировать весь поток в единый мощный источник. В этом случае мы можем получить естественный водяной фонтан. Такая бросающаяся в глаза картина движения грунтовых вод отвлекает внимание неспециалиста от более важного, но менее заметного диффузионного просачивания.

Грунтовая вода, начав свое движение в сторону речной долины, может и не найти сразу своего пути в дренажный канал. Очень часто она направляется вниз по тальвегу и дальше в сторону моря, через пористую среду, в которой она заключена. Это движение может быть настолько сильным, что создает мощные подпочвенные потоки глубиной в несколько десятков метров и шириной в километры. Такой движущийся слой воды под ложем и берегами ручья носит название подруслового потока. Вполне очевидно, что подрусловый поток значительной величины невозможен в тонкозернистой среде, которая иногда заполняет речные долины. Среда эта может служить весьма хорошим подземным водяным резервуаром, но она не может играть основную роль при региональном дренировании той или иной площади. Совершенно иные условия могут возникнуть там, где пески и гравий под ложем потока представляют грубозернистые разности, что, например, часто встречается у истоков реки. Откладываясь здесь материалы состоят из крупнозернистых песков, гравия и булыжника, который сносится вниз горными потоками. Тонкозернистый материал уносится вниз до тех пор, пока ложе реки не достигнет плавного изгиба и поток воды потеряет свою высокую скорость. Таким образом, особенно вблизи истоков реки, под ложем последней существует большой объем воды, перемещающейся сквозь крупнозернистые разности. Иногда поток устремляется через узкую долину

или ущелье, где близко сходятся скалистые берега или же скалистое ложе его под обломочными породами подходит близко к дневной поверхности. В любом случае результатом этого будет заметное увеличение количества воды в реке, благодаря тому что воды подземного потока вытеснены на поверхность.

В устье каньона долина расширяется, и скалистое ложе реки погружается более глубоко от поверхности, в то время как поток осаждает все большую часть взвешенного в воде материала. Подрусловый поток может также расширяться и углубляться, чтобы заполнить увеличившийся по своим размерам пористый канал. Тонкозернистые разности и уменьшившийся уклон понижают скорость, с которой поток двигался вниз по долине. Долина может иметь такие размеры, что если количество выпадающих дождевых осадков достаточно, то просачивание с поверхности повышенных частей ее будет беспрерывно повышать объем воды подруслового потока, создавая подъем уровня нормальному количеству воды в самой реке и повышая дебит ее на всем пути последней к морю. С другой стороны, если ручей или поток попадет из горного каньона в засушливую область, поверхностный поток может постепенно исчезнуть, и его вода просочится в разности, заполняющие ложе долины. Путь потока будет отмечен только сухим старым руслом вдоль долины, которое только временами будет затопляться горными потоками.

Таким образом, расширение долины в том случае, когда поток выходит из горного каньона, будет иметь совершенно различный эффект в зависимости от того, является ли климат долины влажным или сухим. В одном случае расширение долины будет способствовать постоянному росту количества воды в реке, а в другом случае — постоянному уменьшению объема воды в последней, по мере того как река теряет запас воды в подрусловый поток, где она растекается по очень широкой полосе и где она претерпевает более интенсивные потери от испарения.

Взаимоотношения подруслового потока и вод в русле реки представляют много интересных явлений и вариаций. В некоторых случаях отложения сilta (ила) могут сделать ложе речного русла настолько водонепроницаемым, что на значительное расстояние между речными водами и водами подруслового потока не произойдет никакого смешения или замещения. В результате этого оба типа вод могут явиться совершенно независимыми и иметь совершенно различный химический состав. Повидимому, в таких случаях взаимосвязь между подрусловым потоком и речным руслом, которая рассматривалась выше, не может больше считаться справедливой. Хотя влагоемкость пористого материала, заполняющего долину, может быть очень велика, суммарный объем воды, уносимый ежесуточно подрусловым потоком, может быть относительно невелик. Скорость вод, просачивающихся через грубозернистые разности при крутом уклоне водяного зеркала, составляет около 3 м за сутки или несколько более. В то же самое время в менее проницаемых породах и при малых градиентах скорость просачивания воды может быть крайне мала. Вследствие больших изменений, возможных в каждом отдельном случае, это явление представляет собой совершенно самостоятельную проблему, дальнейшее рассмотрение которого в деталях считаем нецелесообразным.

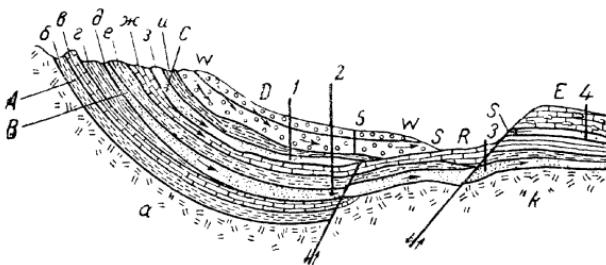
**18. Движение жидкости под уровнем грунтовых вод. Глубокие зоны.** Грунтовые воды могут проникнуть в более глубокие зоны путем просачивания в открытые на дневную поверхность выходы проницаемых слоев или косвенным путем — просачиванием воды из ручьев или рек, долины которых пересекают эти выходы. Вода покидает глубокую зону при более низком уровне по сравнению со своим поступлением в последнюю. Отсюда выходы глубокой зоны следует искать в пониженных обнажениях горных пород, где река, возможно, промыла себе русло сквозь них или же где верхние водонепроницаемые горизонты были совершенно смыты. В дополнение к таким характерным выходам стратиграфические горизонты могут пересекаться сбросами и трещинами, через которые вода может уйти в вышележащие слои. С другой стороны, приток воды по пути медленного просачивания через перекрывающие породы в данную формацию может рассеяться по этим породам и достичь поверхности по вертикали.

Следует помнить, что термин водонепроницаемость по отношению к горным породам весьма условен. Перекрывающий слой глины или скалы, которая служит транспортирующей средой, занимает площадь чрезвычайно больших размеров по отношению к своей мощности по вертикали. Перекрывающая непроницаемая горная порода, теряя в своей проницаемости, уравновешивается огромной площадью, через которую имеет место просачивание. Таким образом, просачивание в вертикальном направлении может создать движение воды в пористом горизонте, если даже и отсутствует выход водопроводящей среды на дневную поверхность. Местное, направленное вверх просачивание воды может объяснить поэтому некоторые, повидимому аномальные, колебания давления грунтовых вод в артезианских бассейнах. Существование выходов, а отсюда точно установленное место инфильтрации грунтовых вод в проницаемую породу, дает все основания ожидать одинаковый статический напор по всей площади распространения указанного горизонта в отсутствии какого-нибудь определенного выхода источника воды. Однако потери от вертикального просачивания через вышелегающие слои, увеличенные потерями через сбросы и трещины, приводят в результате к общей региональной миграции воды из проводящих пластов с соответствующей потерей гидростатического напора. Аналогичное явление имеет место в глубоко залегающих пластах зоны погребенных вод, где давление жидкости в горизонтах, не имеющих выхода на поверхность, близко соответствует, как это отмечалось уже выше (гл. I, п. 13), гидростатическому напору, равному глубине залежей.

Вполне очевидно, что отнесение горизонтов глубоких зон движения вод с целью удобства, к закрытой пористой водопроводящей системе является условным. Такие горизонты следует рассматривать как псевдоизолированные коллекторы, работа которых приближается к идеальной в зависимости от отношения проницаемости пласта по всей его протяженности к таковой же в его кровле. Если давление в данном горизонте выше, чем гидростатический напор, соответствующий глубине залежи, то просачивание в вертикальном направлении (вверх) не только возможно, но и неизбежно по крайней мере для известной части перекрывающих пород.

Эти соображения достаточно хорошо разъясняют причину широких

колебаний производительности, которую можно ожидать от водяных пластов артезианского типа. Если пласт с высокой проницаемостью имеет обильное питание водой на своих приподнятых выходах или же иных участках водопоглощения, а проницаемость перекрывающих пород относительно мала, и если к тому же пласт не имеет эффективного выхода для воды в своей погруженной граничной части, то артезианский напор будет соответственно равномерен по всей площади залегания пласта. С другой стороны, низкий дебит воды, поступающей в приподнятые выходы пластов, низкая проницаемость последних, относительно высокое количество просачивающейся вверх воды, а также



Фиг. 5. Поперечный разрез через гипотетический артезианский бассейн, показывающий поверхностную и глубокую зоны движения грунтовых вод (вертикальный масштаб преувеличен):

*A* — выход водонепроницаемого песчаника и известняка; *B* — выход проницаемого песчаника, который питается от реки *B*, представляет собой глубокий непрерывный артезианский водный коллектор; *C* — проницаемый песчаник, который питается через выходы в долине атмосферными осадками, представлен неглубоким артезианским коллектором, теряющим воду в зоне сброса в вышележащие слои с соответствующей потерей напора; *D* — молодые отложения несцепментированных пород с водяным зеркалом *WW* являются подземным источником питания для реки *R*, неглубоких скважин *5* ключей *S*; *E* — карбонатный известняк — источник высокодебитных скважин и фильтрации в залегающие ниже пласти песчаника. Последний питает источники на выходах и артезианские скважины на восточной стороне плато; *1, 2, 3, 4* — глубокие скважины, артезианский напор которых показан высотой, начертанной сплошной линией; *5* — неглубокая скважина ниже водяного зеркала в зоне поверхностного движения грунтовых вод.

Во всех случаях потеря напора связана с миграцией, как это показано стрелками. Заметная потеря напора у скважины *3* связана с относительно низкой проницаемостью через зоны сброса. *a* — шиферные сланцы, граниты и т. д.; *b* — кембрийский песчаник; *в* — известняк; *г* — глинистый сланец; *д* — песчаник; *е* — глины и глинистый песчаник; *ж* — известняк; *з* — песчаник; *и* — глины; *к* — гранит.

большая площадь выхода последней из пласта приведут в результате порознь или в целом к крутым градиентам давления внутри пласта и к быстрому падению артезианского напора в направлении миграции воды.

На фиг. 5 приведен разрез через условный артезианский бассейн, где в принципе показаны некоторые из основных особенностей, о которых шла речь в отношении поверхностных и глубинных зон движения грунтовых вод. Мы бы рекомендовали читателю дальнейшее подробное изучение этого вопроса по многочисленным гидрологическим статьям и работам, чтобы расширить знакомство с этим наглядным подтверждением существования подпочвенного потока, так как рассматриваемый предмет в комплексе с фактическими полевыми наблюдениями представляет собой весьма большой научный и практический интерес.

**19. Залегание погребенных вод.** Является вполне очевидным, что любые морские осадки, которые после процесса отложения не были подняты над уровнем зеркала грунтовых вод и не были промыты атмосферными осадками вследствие просачивания грунтовых вод, должны содержать в себе воду, которая является, возможно, идентичной с той или происходит непосредственно от тех вод, что содержались в древних морях. Удержание воды пористыми разностями на протяжении геологических эпох становится еще более очевидным, если вспомнить, что пористость имеет свой максимум непосредственно вслед за отложением осадков, а по мере уменьшения пористости вследствие обжатия и цементации осадочных образований наблюдается явление вытеснения жидкости из пор последних. За исключением некоторых определенных случаев, когда грунтовая вода имеет непосредственное проникновение в глубоко залегающие пласти и в них возможно смешение или даже полное замещение находящейся там воды на грунтовую, а также при наличии открытых выходов пластов на дневную поверхность — первоначальная или погребенная вода (говоря более строго — часть ее) остается в залежи после ее образования, как в ловушке. Однако следует подчеркнуть, что погребенная вода, представленная в данном горизонте, не обязательно должна иметь местный характер и принадлежать к данной области или горизонту. Вследствие сложного процесса миграции, возможного в подземных горных породах, состав присутствующей в пласте воды может характеризовать погребенную воду, как проникшую в последний из смежных источников или же путем миграции по проницаемым разностям с относительно далеких расстояний. Совершенно не следует ожидать, что вода из скважин, вскрывших определенные глубокие горизонты, будет по своему химическому составу соответствовать воде древних морей. Изменения в составе воды должны были произойти в течение геологической эпохи, прошедшей с момента отложения ныне глубоко залегающих формаций до настоящего времени. Химическая активность в течение этого периода имела место в форме растворения породообразующих минералов, реакций обмена солей, а также осаждения минералов, что подтверждается цементацией песков и иных пористых разностей во многих стратиграфических горизонтах.

Глубокие изменения химического состава некоторых горных пород радикальным образом изменили их свойства, а такие изменения могли произойти только за счет работы миграционных вод.

Представляет собой интерес исследование некоторых минерализованных вод или рассолов, взятых из глубоких скважин, а также из относительно неглубоких пластов, где они не смешались с атмосферными осадками. Типичные образцы приведены в табл. 2. Характерной особенностью этих рассолов является их большая соленость по сравнению с морской водой. Нельзя себе представить, что соленость воды в современном океане ниже, чем соленость океанской воды миллионы лет тому назад. Многие осадочные образования, ныне вскрытые бурением, без сомнения, отложились во внутренних морях, где вследствие повышенного испарения имелись весьма большие концентрации растворенных минералов. Громадные залежи почти чистой поваренной соли, образующие часть стратиграфического разреза во многих областях, дают вполне точное подтверждение существования засушливых условий,

господствовавших в указанных районах во время отложения осадочной соли. С другой стороны, повышение солености можно всецело отнести за счет физических и химических процессов, имевших место после отложения осадков и их глубокого погребения. Колебания в других химических компонентах являются результатом изменений, обусловленных длительным контактом с породами подземного резервуара и смешением вод в процессе миграции. Так, особенностью вод, показанных в табл. 2, является весьма низкое содержание сульфатов, характерное для буровых вод нефтяных месторождений<sup>1</sup>. Полагают, что это явление обязано восстановительному действию нефти<sup>2</sup>. Равным образом поражает значи-

Таблица 2  
Анализы погребенных вод (в мг./л.)

Источники	Глубина, м	Хлориды	Сульфаты	Карбонаты	Бикарбо-наты	Натрий	Калий	Кальций	Магний	Силиций	Железо и алюминий
1 Океан-ская вода	19 410	2700	—	70	10 710	390	420	1300	—	—	—
2 420	77 340	730	—	—	31 950	650	13 260	1940	—	—	—
3 1272,6	108 990	455	—	43	54 363	—	10 560	2390	—	—	—
4 —	152 100	319	—	—	73 620	—	17 700	2541	30	300	300
5 403	90 540	140	—	—	40 100	140	12 210	2140	—	—	70
6 351	82 350	—	—	—	36 300	260	11 400	1950	10	150	150
7 1890	196 000	60	—	—	78 200	6250	30 500	3000	—	—	190
8 450	3 273	11	48	3684	3 350	47	28	24	127	4	4
9 930	23 553	18	—	626	13 213	—	1 089	685	65	11	11
10 735	16 640	1310	—	587	9 318	—	1 350	377	—	—	42
11 —	2 670	Следы	696	5120	4 125	—	16	—	—	—	—
12 —	153	—	—	2866	1 148	—	10	10	—	—	—

1. Средний анализ из 77 проб океанской воды (экспедиция Чалленджер)
2. Брадфордский песчаник, Брадфорд, Пенсильвания.
3. Сент-Луисский песчаник, Сент-Луис, Оклахома.
4. Песчаник Лейтон, месторождение Гарбер, Оклахома.
5. Песчаник Бетлер, местечко Оклэнд, Пенсильвания.
6. Песчаник Бетлер, местечко Центр, Пенсильвания.
7. Песчаник Орискэни, Вашингтон, Пенсильвания.
8. Некоррозийная вода из месторождения Консет Мидвей, Калифорния.
9. Коррозийная вода из месторождения Консет Мидвей, Калифорния.
10. Месторождение Эльдорадо, Канзас.
11. Первый песчаник Уолл-Крик, восточная часть месторождения Солт-Крик, Уайоминг.
12. Первый песчаник Уолл-Крик, западная часть месторождения Солт-Крик, Уайоминг.

<sup>1</sup> Анализы, приведенные в табл. 2, являются типичными для образцов вод, взятых в нефтяных месторождениях и в примыкающих к ним районах.

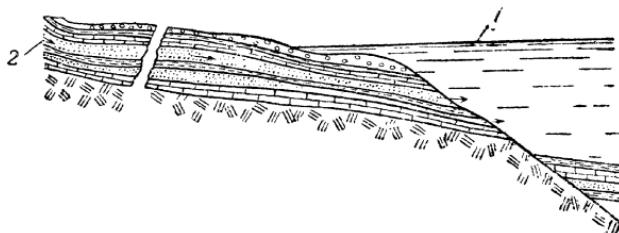
<sup>2</sup> Rogers C. S. U. S. Geol., Survey Prof. Paper, 117, Part. 2, 1—103, 1919; E. S. Bastin, Amer. Assoc. Petrol. Geolog. Bull. 10, 1290, 1935.

тельный рост содержания кальция в этих водах. Остальные рассолы содержат необычные количества брома, иода и других элементов и являются экономически выгодными источниками получения различных химикалий.

Когда стратиграфические формы и обнажения на выходах обеспечивают проникновение грунтовых вод в более глубоко залегающие участки пласта, такие сильно минерализованные воды служат объектом для смешивания их с миграционными грунтовыми водами и понижения концентрации солей. Например, в табл. 2 образцы вод 11 и 12 взяты из одного и того же песчаника, но так как последний выходит на поверхность около 24 км к западу (в горы) от нефтяного месторождения, то атмосферные осадки частично затопили песчаник и понизили концентрацию погребенной воды (интересно отметить, что наибольшее понижение концентрации рассола имело место в направлении против движения потока, что указывает на защитное влияние структуры, где скопились нефть и газ, которые принудили миграционную воду циркулировать вокруг нефтяной залежи). Можно привести и другой пример. Так, в одном пласте песчаника в Калифорнии на глубине 1800 м была встречена пресная вода. Выходы этого пласта в горах обеспечили свободный доступ грунтовой воде, которая благодаря крутыму падению пласти и, повидимому, свободному, выходу из последнего обеспечила относительно быструю миграцию и эффективное замещение погребенной минерализованной воды. Выходы песчаника Вудбайн в северной части центрального Техаса тянутся длинной грядой, проходящей через окрестности г. Даллас, где они получают обильное питание грунтовыми водами. Последние заместили погребенную воду в пласте, вплоть до зоны сброса Мексика. В этом песчанике к западу от зоны сброса по мере достижения области нарушения пресная вода постепенно становится минерализованной. К востоку от сброса и далее на протяжении всего остального бассейна в песчанике встречается типичная погребенная вода. Эти общие соображения служат для того, чтобы показать различие между погребенной и атмосферной водой. Становится ясным, что термин „погребенная вода“ полагает содержание воды в горной породе, непосредственно связанное с самой породой, но такая буквальная интерпретация этого термина нами не имеется в виду. Так как структура горных пород в зонах погребенных вод аналогична зонам грунтовых вод, следует ожидать в горных породах комплексную миграцию жидкостей, распространяющуюся на далекие расстояния. Действительно, те немногие цитированные нами примеры, где произошло понижение концентрации погребенных вод грунтовыми, дают нам полное подтверждение подобного рода миграции. При такой широкой интерпретации термина „погребенная вода“ исключается всякая путаница в представлении о том, что она находилась в каком-либо осадочном образовании с момента отложения осадков, с которыми она связана в настоящее время в застойном состоянии.

**20. Миграция погребенных вод.** Если существуют места поступления воды в топографически высоко расположенные выходы пласта и выход ее через дренажные каналы на нижней погруженной поверхности последнего, легко представить себе процесс миграции в глубоких зонах

грунтовых вод. Высокодебитные источники из пластов, которые погребены глубоко под примыкающей к данной площади гористой местностью, являются вполне определенным и обстоятельным подтверждением механизма миграции вод. Следует ожидать также региональную миграцию, созданную проникновением грунтовых вод в приподнятые выходы пластов на дневной поверхности, которые имеют постепенное погружение в сторону выходов, залегающих глубоко под уровнем океана (фиг. 6). В свете таких простых фактов нет основания подвергать дальнейшему рассмотрению миграцию погребенной воды, вызванную непосредственным проталкиванием ее по пласту наступающей сверху грунтовой водой. С другой стороны, при наличии закрытых бассейнов или же там, где крупное несогласное залегание, повидимому, исключает эффективные выходы пластов (фиг. 3), некоторые из них могут и не иметь вполне



Фиг. 6. Типовой разрез наклонно падающих слоев, которые выходят ниже уровня моря;

7 — уровень моря; 2 — песчаник.

определенных зон приема и стока, где могла бы возникнуть циркуляция подземных вод. Механизм миграции вод для этих условий не так ясен, хотя наглядность его существования за длительный геологический период подтверждается различными фактами. Упомянем только один из них. Осаджение силициевого или кальциевого цементирующего вещества в порах песчаного пласта, занимающее в некоторых случаях до 30% или более всего объема пласта, не может явиться, повидимому, результатом действия стоячих вод. Заключенная в пласте вода физически не может иметь в растворе столь большого количества твердых веществ в непосредственной к себе близости, чтобы создать такие мощные отложения. Повидимому, следует предположить более осложненную механику миграции погребенных вод, чем та, которую мы рассматривали для объяснения этих явлений.

**21. Влияние уплотнения осадков на миграцию жидкостей.** Уплотнение осадков мы рассматривали вкратце в главе I, пп. 7—9. Теперь вполне уместно осветить всю важность этого явления, так как оно благодаря своей связи с миграцией погребенных вод затрагивает крупные геологические процессы. Мы уже видели, что вследствие уплотнения от веса перекрывающих осадочных пород глины, имевшие пористость от 45 до 50% и содержащие вследствие этого эквивалентное количество остаточной воды, теряют постепенно свою пористость с увеличением глубины погребения залежи. На глубине 1500—1800 м остаточ-

ная пористость и водонасыщенность составляют не свыше 5%. Повидимому, процесс образования сланцев из первичного глинистого или илестого материала требует вытеснения огромных количеств воды, первоначально заключенных в осадочных образованиях. Уплотнение песков имеет меньшую значимость, так как их суммарное уплотнение под весьма большими нагрузками достигает всего лишь нескольких процентов. Тем не менее цементация песков, которая уменьшает их пористость с первоначальной величины 40% до значений, колеблющихся в пределах от 30 до 5%, требует, повидимому, вытеснения соответствующего количества воды из этих осадков. Однако для песков этот процесс следует рассматривать скорее как вторичный эффект, чем как первопричину, так как осаждение цементирующего вещества было бы невозможно, если бы не циркуляция огромных количеств воды под действием иных агентов.

Эти явления разъясняют не только необходимость циркуляции исключительно больших объемов погребенной воды через проницаемые отложения, с которыми она связана, но и механизм процесса миграции в течение геологического периода, истекшего с момента отложения и глубокого погребения залежи. Допущение процесса вытеснения воды требует некоторых умозрительных заключений. Не только величина уплотнения, необходимая для образования сланцев из глин и илистых отложений, показывает на эти осадочные образования как на первичный источник погребенных вод, но и преобладание сланцев в какой-нибудь области с широко развитыми осадочными породами является дальнейшим подтверждением их ведущей роли в вышеуказанном процессе. Поэтому в последующем кратком изложении мы будем касаться только сланцев, полагая, что остальные осадки аналогичны по своему действию, но имеют меньшую значимость.

В процессе первоначального формирования сланцеобразующие осадки постепенно погружаются под последовательно утолщающимися слоями добавочных отложений. Благодаря весьма большой восприимчивости к уплотнению в процессе формирования и относительно высокой проницаемости по вертикали перекрывающих разностей, безусловно, большая часть воды, выжатой из глин и ила, будет вытесняться в вертикальном направлении через налегающий массив. Этот медленный процесс может сопровождаться постепенным выпадением цементирующего вещества в песчаных и аналогичных отложениях, причем значительная часть его будет поступать из растворов минералов, входящих в состав глин и илов. Однако, по мере того как глубина залежи становится большей, а проницаемость сланцев становится все меньшей и меньшей, значительная часть выжатой воды будет вытесняться в примыкающие песчаные слои, где благодаря относительно более высокой проницаемости такой среды будет иметь место скорее широтная, чем вертикальная, миграция воды. В результате этих преобразовательных процессов сланцы становятся все более и более водонепроницаемыми и являются собой уже граничные перемычки, которые стремятся удержать вытесненную воду в смежных песчаных горизонтах. В этих горизонтах вода находит себе более легкий путь в области с пониженным давлением и покидает пористый резервуар, даже если процесс миграции происходит на далекие расстояния. Следует помнить, как

уже отмечалось выше (гл. I, п. 18), что в этом процессе должно происходить вертикальное просачивание по направлению к дневной поверхности, через породы, дизъюнктивные трещины и плоскости сбросов в покрывающих образованиях. Вполне установленным фактом, доказанным наблюдениями, является то обстоятельство, что в целом давление жидкости в таких формациях довольно близко соответствует гидростатическому напору, равному глубине залежи, хотя в отдельных случаях, особенно на больших глубинах, можно столкнуться с повышенным и давлениями. Процесс вертикального просачивания, идущий совместно с процессом широтной миграции воды через проницаемые слои, является вполне обоснованным явлением, если представить себе грандиозный размах времени действия его и высокие давления, которые могут получиться, если вытеснение воды происходит с большой трудностью. Исключительно низкая проницаемость по сечению пород компенсируется, как уже отмечалось, до некоторой степени огромной площадью, принимающей участие в процессе вытеснения воды. В свете этого обстоятельства огромные количества воды, вытесняемые из глин, требуют лишь бесконечно малых средних скоростей потока в вертикальном направлении. Рассматривая типичный осадочный бассейн, где в центральной части его могут залегать от 3000 до 6000 тыс. м осадочных образований мы видим, что постепенное уплотнение сланцев, составляющих значительную часть отложений, приводит в результате к вытеснению воды в примыкающие проницаемые слои. Последние в свою очередь служат водопроводниками, где вода, двигаясь по пути наименьшего сопротивления, выжимается в конечном итоге через перекрывающие горные породы. Зоны сбросов, микротрещины, спайность в местах складкообразования являются вполне установленными участками для выхода воды на поверхность в дополнение к весьма медленному просачиванию ее на огромных пространствах через собственно горные породы. Вполне ясно, что в такой системе общее направление миграции будет ити от центра главного источника водных ресурсов в сторону бортов бассейна. Общее направление потока может быть очень сильно осложнено геологическими факторами, которые нарушают непрерывность системы. Этот процесс нельзя рассматривать в любом случае как чисто широтную миграцию, т. е. как будто весь поток должен постепенно найти себе выход у бортов бассейна. Как уже было подчеркнуто, общий поток в радиальном направлении сопровождается вертикальным просачиванием, которое совершается постепенно по всей площади. Наши обобщения далеки от достаточного, чтобы создать полную и удовлетворительную картину всего процесса. Подробное разъяснение некоторых особенностей последнего будет по необходимости весьма умозрительным, так как совершенно невозможно развить такое неуязвимое детальное объяснение, в котором были бы учтены миллионы лет действия процесса. Чтобы ответить на многие вопросы, возникающие при более близком рассмотрении этого явления, наши знания физических и химических процессов, учитывающих фактор времени такой величины, совершенно недостаточны. В свете существующих очевидных и известных фактов в отношении основы физического поведения таких систем представляется, что нарисованная здесь картина должна соответствовать действительной обстановке. Дополнительные подробности, которые

можно добавить для полноты к сказанному выше, могут сделать более ясным представленный механизм процесса, но не изменить его глубоко.

**22. Залегание газа и нефти.** Погребенные воды сами по себе вряд ли подверглись рассмотрению в настоящем исследовании, даже оставляя в стороне их непосредственную значимость при геологических процессах, а в отдельных случаях — вследствие необычных химических компонентов, обеспечивающих их промышленную эксплоатацию. Однако, как это хорошо известно, богатейшие залежи газа и нефти разведывают и эксплуатируют с помощью буровых скважин, которые проводятся на большую глубину от поверхности. Такие залежи не только тесно связаны с сопровождающей их погребенной водой, но скопления нефти и газа на определенных площадях в таких количествах, что делает экономически выгодной их разработку, могут быть связаны непосредственно с миграционными процессами этих вод. В процессе добычи нефти и газа из пород подземного резервуара вода участвует в работе последнего в различной степени. Роль буровой воды будет рассмотрена в подробном аналитическом исследовании, представленном в последующих главах. Теперь же мы ограничим свое внимание достаточно беглым обзором происхождения и формирования газа и нефти.

**23. Происхождение газа и нефти.** Возможно, что не существует еще таких залежей минералов промышленной ценности, происхождение, формирование и генезис которых подвергались бы такой дискуссии, как в отношении горючих ископаемых — газа и нефти. Газ, встречающийся совместно с углем и иными к нему тяготеющими ископаемыми, произошел исключительно из растительного вещества в процессе его преобразования в уголь. Почвенные газы, состоящие в основном из азота, углекислоты и метана, являются продуктами распада органических остатков, хотя в их формировании важным этапом было действие бактерий. Эти газы обычно настолько тщательно диспергированы, что их присутствие в почве можно обнаружить весьма тонким анализом. Во многих районах, например, в некоторой части долины реки Миссисипи, мощность болотистых отложений настолько велика, что в результате получились скопища значительного количества „болотного газа“. Тщательный анализ такого газа показывает, что горючая или углеводородная часть его представлена метаном, с содержанием этана не более 0,001 %, при полном отсутствии более высокомолекулярных углеводородов. Встречающийся в природе нефтяной газ хотя сильно меняется по своему составу, но в основном состоит из смеси углеводородов, от метана до гексана. Метан может составлять до 95% всего газа, но в некоторых случаях пропан и бутан имеют количественное преобладание. Это создает резкий контраст по отношению к обычным продуктам распада органической жизни, которые можно встретить в относительно неглубоких месторождениях, где, как уже было сказано, имеется только метан с небольшими следами этана. Вследствие этого до сравнительно недавнего времени исследователи считали, что генезис нефтяного газа следует отнести в основном к неорганическому происхождению. В настоящее время эта концепция почти совершенно заброшена, и действительным источником

происхождения газа признается органическое вещество. Однако объяснение процесса формирования нефтяных газов остается в существенной своей части чисто умозрительным.

Еще менее удовлетворительным является наше знание о процессах, имеющих место при формировании весьма сложных смесей жидкых углеводородов, которые входят в состав нефти. Однако различные косвенные доказательства показывают окончательно, что, несмотря на неуверенность в процессе формирования, первичное генетическое вещество нефти является органическим.

По вопросу генезиса уместно отметить тот факт, что газ и нефть в породах подземного резервуара всегда тесно связаны. Хотя большие залежи газа и встречаются иногда с небольшими признаками нефти и, обратно, некоторые нефтяные месторождения содержат только небольшое количество газа, но эти явления могут быть отнесены за счет других условий, отличных от проблемы генезиса. Возможно, что газовые месторождения, почти совершенно лишенные нефтесодержания, существуют как таковые вследствие случайных условий, благоприятных для формирования только газа или его скоплений. С другой стороны, не встречается нефтяных месторождений, совершенно лишенных газа, за исключением тех случаев, где геологические условия благоприятствуют непосредственному рассеиванию газа вследствие утечки его из подземного резервуара. Поэтому можно допустить, что нефть и газ имеют общий генезис и произошли от органических реакций, подробности которых неизвестны.

В свете этого принятого органического происхождения нефти можно допустить, естественно, близкую генетическую связь между углем и нефтью. Однако большие углеразрабатываемые свиты обычно не являются нефтяными эксплоатационными горизонтами, хотя нефтяные горизонты в некоторых районах и связаны с богатыми слоями лигнита. Наиболее богатые нефтяные пласти встречаются обычно отдельно от залежей лигнита, и можно вполне утвердительно доказать, что нефтяные месторождения, приуроченные к залежам лигнита, составляют весьма небольшую часть известных нефтяных залежей, т. е. между углем и нефтью отсутствует внутренняя генетическая связь. При рассмотрении этой проблемы было отмечено, что для объяснения происхождения нефти и газа необходимо найти в обычных осадочных образованиях известняков, песков и сланцев первичное нефтепроизводящее вещество. Так как нефтепроизводящие свиты могут располагаться в образованиях, о которых известно, что они отложились в кислой среде, приуроченной или находящейся в пределах достижения миграционных жилокстей,—это должны быть осадочные отложения морского происхождения. Таким образом, следует допустить, что любая проницаемая горная порода или осадочное образование может быть соответствующим нефтяным коллектором. Однако наиболее важные нефтепроизводящие свиты ограничены морскими отложениями и особенно теми, которые отлагались в сравнительно неглубоких водах, где органическая жизнь была особенно обильна. Эта гипотеза является в настоящее время общепринятой, так как нам неизвестны отрицающие это общее положение доказательства.

Подводя итоги научно-исследовательским работам, обнимающим изучение органического содержимого современных осадков, проделанных во всем мире, Траск пишет:

1. Органическое содержимое осадков зависит в сильной степени от конфигурации морского дна. Отложения в депрессиях и закрытых бассейнах содержат больше органического вещества, чем те, которые расположены на прилежащих хребтах или склонах, имеющих более крутой падение по сравнению со смежными областями.

2. Органическое содержимое осадков увеличивается с тонкозернистостью текстуры. Глины содержат приблизительно в два раза больше органического вещества, чем илы, а последние содержат в два раза больше органического вещества, чем тонкозернистые пески.

3. Органическое содержание тонкозернистых осадков может значительно колебаться на расстоянии нескольких километров, без заметного макроскопического изменения в строении осадков.

4. Органическое содержание характерных морских отложений резко меняется в зависимости от обилия планктона в поверхностных водах, но в отложениях, встречающихся в неглубоких бухтах, лиманах и устьях рек, может зависеть больше от находящейся там растительности, чем от планктона.

5. Прибрежные отложения содержат больше органического вещества, чем океанские.

6. Органическое содержание осадков в областях земной поверхности, затопленных глубокими водами, достигает значительной величины. Полагают, что это затопление возникает вследствие прибрежного движения поверхностных вод в береговых районах с характерным подводным рельефом<sup>1</sup>.

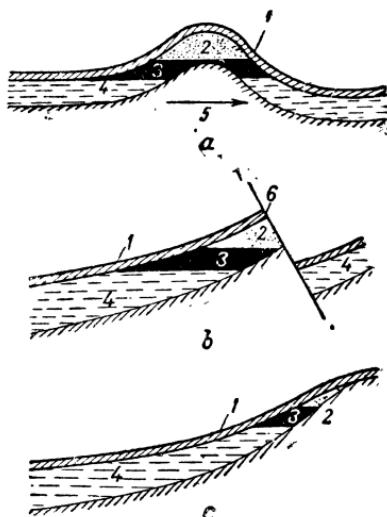
На основе работы Траска мы можем допустить, что глины и илы являются первичными источниками органического вещества не только вследствие их относительного богатства последним, но и вследствие обильного содержания глин в любом осадочном образовании значительной мощности. Пренебрегая также генетическими процессами, которые при этом имеют место, мы можем допустить с некоторой осторожностью, что в этих глинах, спустя значительное время после погребения залежи, образуются нефтяной газ и нефть.

**24. Миграция и скопление газа и нефти.** Влияние уплотнения на миграцию воды, содержащейся в глинах, было рассмотрено выше (гл. I, п. 21) достаточно подробно. Непосредственно показано, что газ и нефть, заключенные в глинах, будут постепенно вытеснены из них аналогично воде. При проникновении газа и нефти в примыкающие слои, например, в песчаники, имеющие достаточно высокую проницаемость и позволяющие широтную миграцию, нефть и газ примут участие в процессе миграции совместно с погребенной водой. В целом эта миграция будет направлена, как уже отмечалось, в сторону от площади с максимальным уплотнением, т. е. от наиболее мощной части разреза осадочных образований по пути к областям с наиболее свободным выходом. Здесь мы снова встречаемся с трудностью представить себе точный путь, каким образом свободный газ и нефть, которые не

<sup>1</sup> Trask P. D., Origin and Environment of Source Sediments of Petroleum, 1932 (API, Research Program, Project 4). В этой работе Траск показал, что недавно отложившиеся осадки не содержат нефтепроизводящего материала.

смешиваются с водой, могут пересечь пористую среду. Простые эксперименты показывают, что небольшие глобулы нефти или пузырьки газа, сравнимые по величине с размерами пор коллектора, будут в значительной степени подвергаться закупорке в порах<sup>1</sup>. Если бы это явление имело место в природе, то нефть и газ были бы настолько широко рассеяны, что нельзя было найти рентабельных залежей нефти. Однако вследствие огромного интервала времени, на протяжении которого шел процесс, обеспечивший накопление больших количеств газа и нефти по сравнению с размерами порового пространства, влияние поверхностного натяжения, благодаря которому происходит закупорка пор малыми глобулами нефти, будет исключено, поскольку в процессе участвует огромный объем жидкости. Отсюда можно представить себе картину, как под влиянием приложенных градиентов давления нефть и газ мигрируют с водой в виде тонких пленок относительно широких размеров, плавающих ввиду их малой плотности на воде в самой верхней части проницаемого слоя. Вполне очевидно, что неправильности в форме кровли такого пласта коллектора, например, карманы или входящие куполообразные поверхности, должны способствовать улавливанию легких жидкостей вследствие их пловучести. Действительно, при отсутствии растворимости, которая могла бы разрушить такие скопления, более легкие жидкости остаются в граничных нарушениях, как в ловушке, хотя бы градиент давления в зоне водяного потока был бы достаточен, чтобы превзойти пловучесть нефти и газа и вымыть эти скопления из ловушки. На фиг. 7, а показан схематически идеальный разрез антиклинальной складки, где в результате гравитационного отделения происходит накопление жидкостей с низкой плотностью, приносимых водой. Аналогично этому возможное накопление нефти у сброса, как это показано на фиг. 7, б, или в стратиграфической ловушке в проницаемом слое (фиг. 7, с), являются типовые залежи, встречающиеся на практике.

Необходимо заметить, что нефтяные и газовые коллекторы не всегда приурочены к антиклинальным складкам или тому подобным хорошим ловушкам, как это показано на фиг. 7. По всей вероятности, «замкнутость» подземного резервуара обязана резкому изменению в пористости коллектора, относительно большой величине залежи или линзовидности песчаных образований, которые могут встретиться среди



Фиг. 7. Типы ловушек, которые могут образовывать нефтяные или газовые резервуары:

1 — водонепроницаемая перекрыша;  
2 — газ; 3 — нефть; 4 — вода; 5 — направление общей миграции; 6 — сбросовая зона.

высоконепроницаемых слоев глинистых сланцев. В таких ловушках могут аккумулироваться нефть и газ. Тем не менее какова бы ни была природа подземного резервуара, промысловая практика вполне определенно указывает, что за редким исключением нефть, присутствующая в залежи, не может быть жидкостью, образовавшейся на месте, но должна была мигрировать в ловушку из других источников. Миграция вод на расстояние нескольких километров является вполне установленной очевидностью. Поэтому мы не видим причины устанавливать какой-либо предел расстоянию, на которое может распространяться миграция, за исключением разрыва непрерывности проницаемых слоев, а также наличия промежуточных зон выхода, ограничивающих широтную циркуляцию погребенных вод. Представляет собою интерес остановиться на последствиях миграции с далеких расстояний, так как пловучесть газа на воде значительно выше, чем нефти. Газ в свою очередь будет вытеснять нефть из подземного резервуара, если его накопилось достаточное количество, чтобы заполнить ловушку. Отсюда можно предположить, что если вдоль направления миграции существует серия таких ловушек, то избыток газа будет занимать подземные коллекторы предпочтительно ближе к нефтепроизводящим свитам. Однако данных, подтверждающих этот вывод, не имеется. Что же касается соотношения между количеством нефти и газа, которое можно встретить в таких коллекторах, было установлено, что не существует и не следует ожидать количественной связи между ними.

Практически все скопления нефти содержат достаточное количество газа, чтобы насытить нефть при давлении, существующем в подземном резервуаре. Кроме того, в последнем обычно существует избыточное количество свободного газа. Другие подземные коллекторы содержат только газ или очень малые количества нефти. На основании этих наблюдений можно притти к заключению, что большая часть органического первичного вещества превратилась в газ. То небольшое число случаев, когда нефть встречается в недонасыщенном состоянии, легко объясняется утечками в процессе накапливания или же после него. Следует напомнить, что механизм процесса миграции в большинстве осадочных бассейнов, как было здесь уже установлено, предусматривает постоянную утечку жидкостей в вертикальном направлении через перекрывающие свиты. Естественно возникает вопрос о величине суммарных потерь нефти и газа из первоначального резервуара. В одном случае, где имеются зоны сбросов, такие потери наглядны. В другом случае наблюдаемая недонасыщенность нефти или необычно малые объемы свободного газа дают предположительное доказательство того, что газ рассеялся, хотя перекрывающие пласти показывают нормальную степень непроницаемости. Поэтому можно сделать допущение, что пока в залежи существует ненормально высокое давление газа, его скопления будут медленно вытесняться через перекрывающие породы. Эта утечка прекратится, когда в резервуаре установится давление в равновесии с окружающими породами. Условие полного равновесия от поверхности вглубь требует, чтобы давление жидкости на любой глубине было равно гидростатическому напору столба воды этой длины, — условие, которое фактически наблюдается в большинстве случаев. Повидимому, отклонения от этой закономерности будут иметь место, если перекры-

вающая порода является действительно непроницаемой. Соответственно этому, если на подземный резервуар действует резкое оседание или подъем пластов и выравнивание давления недостаточно быстро реагирует на то чтобы сохранить равновесие, в резервуаре будет преобладать ненормально высокое или низкое давление. В этом явлении кроется еще одна причина резких колебаний соотношения нефти и газа при их скоплениях. Оставляя в стороне возможную изменчивость этого соотношения при формировании нефти и газа из органических осадков, мы заключаем, что случайные изменения в геологических и стратиграфических условиях воздействуют по необходимости на накопление нефти и газа в пределах подземных резервуаров. Насчитываются многочисленные подтверждения просачивания газа из, повидимому, запечатанных коллекторов. Наиболее интересной проблемой является то обстоятельство, что уходящий газ уносит с собой значительное количество водяного пара из погребенных вод. Если объем потерянного этим путем газа достаточно велик, концентрация твердых веществ в растворе погребенных вод будет по необходимости возрастать. Таким образом, эта причина вполне объясняет один из наиболее удивительных вопросов высокой минерализации погребенных вод. Фактически эта гипотеза получила очень малое подтверждение при изучении содержания солей в песках Брадфордского месторождения и анализе присутствующих там погребенных вод<sup>1</sup>. Не существует подсчетов относительно возможного объема газа, теряемого при вертикальном просачивании. Отсюда участие газа в процессе утечек воды является чисто спекулятивным рассуждением. Возможно даже, что действительный объем его намного превосходит всякое воображение. Траск<sup>2</sup> нашел, что для сравнительно молодых органических производящих осадков среднее количество газа, получаемого путем дестилляции, достигает 15 м<sup>3</sup> на тонну породы. Если только часть этого количества могла освободиться в течение природных процессов нефти и газообразования, вполне резонно допустить, что действительный объем газа, ушедший из таких отложений со временем их образования, действительно грандиозен.

Дальнейшее рассмотрение многочисленных интересных подробностей относительно скоплений нефти и газа в настоящей работе не приводится. Те явления, которые были показаны, имеют своей целью обеспечить прочное обоснование для общей гипотезы, что в зоне погребенных вод миграция последних совершается под действием сил, отличных от продвижения атмосферных осадков (вод). В действительности уплотнение сланцев может создать огромный источник движущей силы. При этом нефть и газ, образовавшиеся в этих отложениях, богатых органическим веществом, вытесняются из этих нефтепроизводящих свит, чтобы принять участие в общем процессе региональной миграции. Таким путем можно себе представить картину формирования скоплений этих жидкостей, которая дает соответствующее освещение аналитическим исследованиям работы этих жидкостей, когда их извлекают из скважин, вскрывших породы подземных резервуаров.

<sup>1</sup> Newly J. B., Torrey P. D., Fettke C. R., Ranyiti, L. C. Structure of Typical American Oil Fields, Am. Ass. Petr. Geol., 2, 432, 1929.

<sup>2</sup> Loc. cit.

---

## *Глава вторая*

### **ЗАКОН ДАРСИ И ИЗМЕРЕНИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ**

**1. Закон Дарси.** Для получения количественного представления о режиме работы жидкостей, движущихся в пористой среде, необходимо вначале установить физические основы, определяющие этот режим. Как более детально будет разъяснено в главе III, эти основы являются принципиально теми же, что и управляющие движением вязких жидкостей в обычных свободных сосудах, и выражаются уравнением классической гидродинамики Стокса-Навье [ур-ние (1), гл. III, п. 2].

Это уравнение налагает требование динамического равновесия при распределении скорости в каждой системе потока между силами инерции и силами внутреннего трения, а также внешними усилиями и распределением давлений внутри жидкости. Несмотря на вполне допустимое упрощение, т. е. пренебрежение инерционными усилиями, вследствие низких скоростей, обычно характеризующих течение в пористой среде, математические трудности применения этих уравнений к пористой среде совершенно непреодолимы для практических целей. Когда Дарси<sup>1</sup> в 1856 г. заинтересовался характеристикой течения через песчаные фильтры, он обратился к экспериментальному изучению проблемы и отсюда пришел к реальному обоснованию количественной теории движения однородных жидкостей в пористой среде. Его классические эксперименты дали весьма простой вывод, в настоящее время обычно называемый законом Дарси, а именно:debit  $Q$  воды через слой фильтра прямо пропорционален площади  $A$  песка и разности  $\Delta h$  между давлениями жидкости при входе и выходе из слоя и обратно пропорционален толщине  $L$  слоя. Выражая эту зависимость аналитически, имеем:

$$Q = \frac{cA\Delta h}{L}, \quad (1)^2$$

где  $c$  — константа, характеризующая песок. Ввиду фундаментальности характера этого вывода вполне естественно, что изучение его справед-

<sup>1</sup> Darcy H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, 1856.

<sup>2</sup> Этот вывод может быть непосредственно получен из классической гидродинамики по аналогии с законом Пуазейля. Однако приложение уравнений Стокса-Навье, дающих более близкое приближение к аналитическому подтверждению правильности равенства (1), возможно только в крайне идеализированном случае медленного движения (пренебрегаем величинами инерции) вязкой жидкости в сети параллельных круговых трубок (O. E m e r s i e b e n, *Phys. Zeits.*, 26, 601, 1925).

ливости должно было явиться предметом многочисленных исследований. По существу эти исследования проводились в двух направлениях:

1) с объектом, который должен подтвердить уравнение (1) или установить соответствующее видоизменение последнего;

2) исследования, относящиеся к природе константы  $c$ , определяемой свойствами песка или пористой среды.

В следующем разделе мы подвергнем критическому рассмотрению выводы, которые могут быть получены от исследований первого типа.

**2. Степень обоснованности закона Дарси.** Чтобы понять более ясно общую природу „закона течения“, на основании которого представлены данные экспериментов по движению жидкостей, например, проделанные Дарси, было бы полезно вначале подвергнуть рассмотрению те требования, которые налагаются при этом теорией размерностей<sup>1</sup>. Прикладывая хорошо известные правила этой теории<sup>2</sup>, можно легко установить, что падение давления  $\Delta p$  через колонку песка длиной  $\Delta s$ , обусловливающее движение жидкости с плотностью  $\gamma$ , вязкостью  $\mu$  и средней скоростью  $v$ , должно быть связано с этими переменными уравнением вида:

$$\Delta p = \text{const} \frac{\mu^2}{\gamma d^2} F\left(\frac{dv \gamma}{\mu}\right) \varphi\left(\frac{\Delta s}{d}\right), \quad (1)$$

где неизвестные функции  $F$  и  $\varphi$  определяются из экспериментов, а  $d$  является мерой длины, характеризующей размер открытых пор или размер зерен песка. С физической стороны ясно, что функция  $\varphi$  должна находиться в линейной зависимости от своего аргумента и, действительно, это положение является единственным элементом всего анализа, на котором сходятся все многочисленные исследователи закона Дарси. Это наблюдение приводит уравнение (1) к виду:

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \text{const} \frac{\mu^2}{\gamma d^2} F\left(\frac{dv \gamma}{\mu}\right), \quad (2)$$

где левая часть равенства представляет собой градиент давления в линейной системе<sup>3</sup>. Аргумент  $\frac{dv \gamma}{\mu} = R$  функции  $F$  является хорошо известным числом при обычных гидродинамических расчетах в прикладной гидравлике, а именно при рассмотрении движения жидкостей через свободные от песка трубы<sup>4</sup>. При  $d$  диаметре трубы член  $\frac{dv \gamma}{\mu}$  известен под названием числа Рейнольдса.

<sup>1</sup> Muskat M. and Botset H. G. Physics, 1, 27, 1931.

<sup>2</sup> Например, работа Bridgman P. W. „Dimensional Analysis“, главы VI и VII, 1931.

<sup>3</sup> Благодаря постоянству  $\gamma v$  по длине линейной системы в условиях установленного движения ясно, что градиент давления  $\frac{\Delta p}{\Delta s}$  в случае движения жидкости будет постоянным вдоль всей системы, несмотря на природу функции  $F$ . Отсюда будет постоянным характер течения, а также член  $\gamma \frac{\Delta p}{\Delta s}$  в случае, если жидкость является газом.

<sup>4</sup> Совсем недавно оно было приложено также к интерпретации проблем аэродинамики.

Уравнение (2) показывает, что его возможно приложить также к течению через сосуды, свободные от песка, ибо оно является не чем иным, как пространственным уравнением, определяющим характер течения. В частном случае при малых скоростях и плотностях жидкости или диаметрах трубы найдено, что функция  $F$  равна своему аргументу так, что

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \text{const} \frac{\mu v}{d^2}. \quad (3)$$

Этот вывод является аналогичным тому, что приводится в классической гидродинамике для вязких жидкостей, где он известен под названием закона Пуазейля и где постоянный коэффициент имеет величину 32, а  $v$  представляет собой среднюю скорость по сечению трубы<sup>1</sup>. Уравнение (3) обычно указывает наличие градиентов давления в линейном „ламинарном потоке“.

Для более высоких значений  $d, v, \gamma$  или  $1/\mu$ , особенно когда число Рейнольдса возрастает так, что оно превосходит свою критическую величину порядка 2000, характер потока в трубах, свободных от песка, внезапно меняется от плавного струйного движения к неправильному и неустойчивому распределению вихреобразований. Тогда движение принимает характер турбулентного, где переход в направлении повышения или понижения скорости (наиболее удобный параметр при непрерывных изменениях процесса) достаточно резок, хотя цикл повышения и понижения скоростей в переходной области обычно показывает некоторый гистерезис. Этот тип потока характеризуется динамически тем, что функция  $F$  становится пропорциональной второй степени<sup>6</sup> своего аргу-

<sup>1</sup> В этом можно снова заметить основную разницу между ламинарным движением в трубе, свободной от песка, и уже подчеркнутым здесь нами ламинарным движением, подчиняющимся закону Дарси, через трубу, заполненную пористой средой. В первом случае распределение скоростей представлено в основном параболой для данного отрезка трубы (особенно точно в случае круглой трубы), уменьшаясь от максимума в центре последней до нуля у стенок. Макроскопическая же скорость в линейной пористой среде постоянна по всему поперечному сечению. Таким образом, если при пуазейлевском потоке суммарный расход пропорционален квадрату площади поперечного сечения, то в линейной пористой среде он пропорционален только первой степени площади. Эта разница, повидимому, заключается в огромнейших поверхностях, развитых в пористой среде, и обязана их равномерному распространению внутри ее. При этом может создаться грубое представление об аналогии с большим количеством параллельных капилляров, средняя скорость жидкости в сумме которых остается той же самой. Без сомнения, в каждом из капилляров распределение микроскопических скоростей по сечению аналогично скоростям в свободных от песка капиллярах.

<sup>1</sup> Это строго соответствует истине только для труб с шероховатой поверхностью. Для гладких труб показатель степени у скорости в числе Рейнольдса обычно близок к 1,75. Принято выделять коэффициент в уравнении (4) и рассматривать остающийся корректирующий множитель как „коэффициент трения“, который в дальнейшем подвергается изучению путем построения его соотношения с числом Рейнольдса. Полный обзор экспериментальных данных по турбулентному потоку в трубах приведен в работе E. Kemler, A. S. M. E. Trans., 55, 7, 1933, а также в работе J. R. S. Pigott, Mech. Eng., 55, 497, 1933.

Исчерпывающее теоретическое исследование проблемы турбулентности можно найти в 3-й части работы H. Bateman „Hydrodynamics“ National Research Council, 1932.

мента, в частности, скорости. При этом уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \text{const} \frac{\gamma v^2}{d}. \quad (4)$$

Градиент давления здесь независим от вязкости жидкости, в то время как в ламинарном движении он прямо пропорционален вязкости. По аналогии с этими хорошо известными выводами из прикладной гидравлики вполне естественно воссоздать схожее представление результатов движения жидкости через песчаную колонку. Благодаря извилистым и неправильным каналам пористой среды следует, однако, ожидать, что переход от струйного к турбулентному типу течения будет не так резок, как при движении жидкости через сосуды, свободные от песка. Это обстоятельство приводит к представлению о градиенте  $\frac{\Delta p}{\Delta s}$  как некоторой сумме величин скорости с различными показателями степени (макроскопическая скорость измеряется расходом на единицу площади среды). Действительно, попытки в этом направлении привели некоторых исследователей к выражению закона течения уравнением следующего вида:

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = av + bv^n. \quad (5)^1$$

Предлагалось даже ввести в это выражение скорость в третьей степени<sup>2</sup>. Остальные же исследователи предложили соотношение следующего вида:

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = av^n, \quad (6)^3$$

где  $n$  лежит в пределах 1—2.

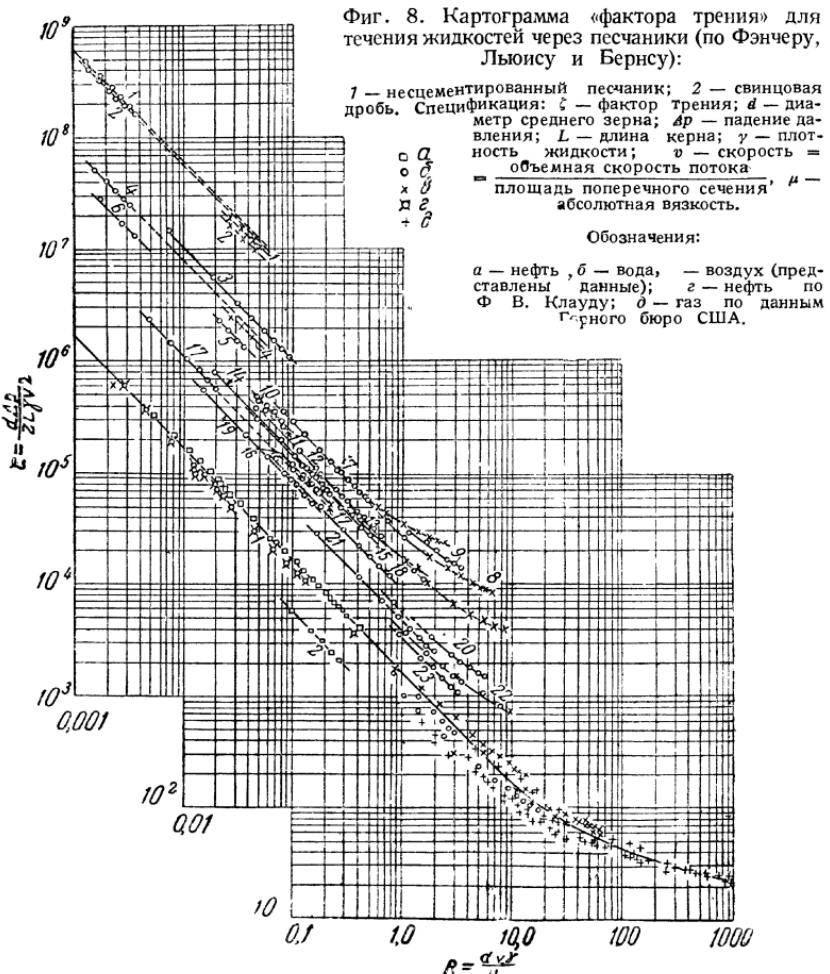
Мы не будем пытаться объяснить возможные причины несоответствия между выводами различных исследователей. Остановимся просто на том, что является правильным отражением результатов, полученных при наиболее тщательном исследовании проблемы, а именно:

<sup>1</sup> Forchheimer Ph., Zeits. v. Deutsh. Ing., 45, 1782, 1901. Здесь  $n$  принято равным 2.

<sup>2</sup> Forchheimer Ph., Hydraulik, 3d edition, p. 54, 1930.

<sup>3</sup> Следует отметить, что уравнения (5) и (6) являются принципиально согласными с требованиями размерности, выраженными уравнением (2), при условии, что константы  $a$  и  $b$  подобраны так, чтобы поглотить влияние множителя  $\mu^2/\gamma d^3$  и степенных выражений  $\frac{dy}{\mu}$ , которые остаются при выделении скорости  $v$  из числа Рейнольдса. Действительно, поскольку к этому вопросу имеет отношение теория размерностей,  $F$  может быть представлено любой функциональной формой, включая даже такую, которая имеет бесконечный ряд показателей степени. С другой стороны, рассматривая вопрос с физической точки зрения, следует помнить, что выбор  $F$  влечет за собой осложнение вследствие изменения  $\Delta p/\Delta s$  с изменением остальных переменных  $d$ ,  $\gamma$  и  $\mu$ .

Так, в частности, при рассмотрении уравнения (6) значения  $n$ , превышающие 2, будут согласно уравнению (2) указывать, что  $\Delta p/\Delta s$  будет уменьшаться с повышением вязкости, а это физически совершенно невозможно.

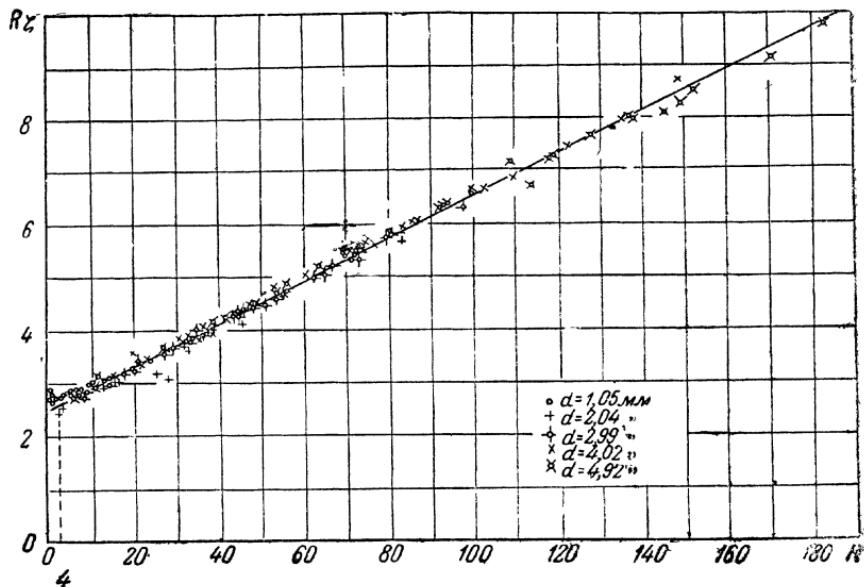


Образец	Песчаник	Пористость, %	Образец	Песчаник	Пористость, %
	С ц е м е н т и р о в а н н ы й				
1	Брэдфорд	12,5	15	3-й Венанго	21,4
2	"	12,3	16	Робинсон	20,6
3	3-й Венанго	16,9	17	Керамика С	33,2
4	Керамика А	37,0	18	3-й Венанго	21,9
5	Робинсон	20,3	19	Вудбайн	23,8
6	Керамика В	37,8	20	"	26,9
7	Вудбайн	19,7	21	"	27,7
8	Вилькоукс	15,9	22	"	22,1
9	3-й Венанго	11,9	23	"	28,8
10	Робинсон	19,5			
11	"	18,4			
12	3-й Венанго	22,3	24	Н е с ц е м е н т и -	
13	Вилькоукс	16,3	25	р о в а н н ы й	
14	Уоррен	19,2	26	Флинт	38,5
			27	Оттава	30,9
				Оттава 20—30 меш	34,5
				Свинцовая дробь	34,6

1) при низких скоростях и малых числах Рейнольдса градиент давления изменяется строго линейно с изменением скорости  $v$  или

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \text{const } v, \quad (7)$$

как это было установлено первоначально законом Дарси в противоположность уравнению (6); по аналогии с описанием, принятым в обычной гидродинамике, течение, подчиняющееся уравнению (7), будет называться „ламинарным“;



Фиг. 9. График зависимости произведения числа Рейнольдса и фактора трения ( $R\xi$ ) от числа Рейнольдса для движения воды через дробь одинакового размера (по Линдквисту).

$d$  — диаметр дробинки.

2) по мере увеличения числа Рейнольдса градиент  $\frac{\Delta p}{\Delta s}$  начинает возрастать быстрее, чем скорость  $v$ , и вызывает изменения, которые лучше всего отражены в уравнении (5). Соответственное графическое подтверждение этого вывода, основанное на экспериментах с движением жидкостей, приведено на фиг. 8 и 9.

На фиг. 8, опубликованной Фэнчером, Льюисом и Бэрнсом<sup>1</sup>, приведены данные о течении для некоторого количества сцементированных и несцементированных песков, представленные в виде „графика

<sup>1</sup> Fancher G. H., Lewis J. A. and Barnes K. B., Min. Ind. Exp. Sta., Penn. State College Bull., 12, 1933. Единицы и обозначения, принятые этими авторами, были нами изменены так, чтобы соответствовать единицам, принятым в настоящей работе.

фактора трения". Здесь за ординату принята величина  $\zeta = d \Delta p / 2L \gamma v^2$ , которая по своей размерности соответствует „коэффициенту трения“ и которая широко применяется при изучении движения жидкости по трубам. Абсциссой же является число Рейнольдса  $\frac{dv}{\mu}$ , где  $d$ , так же как и в величине  $\zeta$ , служит „средним диаметром зерна“<sup>1</sup>, определяемым из уравнения

$$d = \sqrt[3]{\frac{\sum n_s d_s^3}{\sum n_s}}, \quad (8)$$

В последнем уравнении  $d_s$  является среднеарифметической величиной отверстий в двух последующих ситах Тейлора и  $n_s$  — число зерен диаметра  $d_s$ , найденного ситовым анализом. Оставляя в стороне физическую значимость определения  $d$ , фиг. 8 дает очень важное указание, что, пока величина числа Рейнольдса не достигает значения единицы, зависимость полученных данных строго подчиняется соотношению:

$$\ln \zeta = a - \ln R, \quad (9)$$

из которого сейчас же следует, что

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \text{const } v, \quad (10)$$

т. е. полностью согласуется с законом Дарси.

Закон Дарси постепенно теряет свою справедливость, если течение становится частично или полностью турбулентным<sup>2</sup>. С ростом числа

<sup>1</sup> Физически величина  $d$  должна представлять размер средней поры, чем диаметр зерна. Однако пора может быть измерена непосредственно только путем микроскопического исследования поперечного сечения самой пористой среды. Все попытки установить или применить значение  $d$  для введения его в число Рейнольдса относились до сих пор к средним величинам фактических диаметров зерен.

<sup>2</sup> Следует заметить, что Линдквист и Немени приписывают отклонение от условий ламинарного течения с возрастанием скорости, по степени важности, скорее инерционным силам в сравнении с силами внутреннего трения и скорее даже, чем реальному вихреобразованию. Однако эта точка зрения остается открытой для дискуссии, так как в линейном канале отсутствует накопление кинетической энергии в чистом виде, и перепад давления употребляется только на возмещение потерь трения. Как было установлено Фенчером, Льюисом и Бэрнесом, турбулентный характер течения может быть свободно продемонстрирован нагнетанием струи раствора флюоросцеина в главный поток жидкости, движущейся через колонку дроби. При низких скоростях потока краска проходит через дробинки струйками с небольшой диффузией. Когда же будет превзойдена определенная скорость, струйки начинают хаотически отталкиваться от одной дробинки к другой и полностью диффундировать в жидкости. Наконец, как уже заметил Немени, тот факт, что числа Рейнольдса, при которых появляются отклонения от ламинарного режима течения, значительно ниже тех, при которых наступает вихреобразование в сосудах, свободных от песка, сам по себе не удивителен, если принять в расчет то обстоятельство, что фактические скорости в порах пористой среды выше в 4–8 раз макроскопических скоростей  $v$ . Поток фактически имеет место в каналах с резко меняющимся поперечным сечением, т. е. соблюдено условие, которое, как это хорошо известно, способствует раннему появлению вихреобразования. Поэтому вполне правдоподобно, что отклонения от закона Дарси, появляющиеся при низких числах Рейнольдса — порядка 1–10 (фиг. 8 и 9), являются свидетельством реального вихреобразования, распространенного на всю систему потока.

Рейнольдса или скорости, повидимому, не существует характерного видоизменения течения, которое бы допускало зависимость между  $\frac{\Delta p}{ds}$  и  $v$  при высоких значениях последней, с возрастанием числа Рейнольдса или скорости. Все, что было окончательно установлено в этом отношении, показывает, что эмпирические данные могут быть во всех случаях выражены уравнением типа (5), где  $p$  имеет значение, близкое к 2. Возможно, что наиболее поразительный пример рассматриваемого типа течения, где  $p$  равняется точно 2, был опубликован Линдквистом<sup>1</sup>, чьи выводы по движению воды через колонку дроби одинакового размера показаны на кривой фиг. 9. В этом графике ординатой  $R\zeta$  является произведение числа Рейнольдса на „фактор трения“ и потому она обратно пропорциональна скорости. Данные для  $R > 4$  хорошо определяются линейной зависимостью:

$$R\zeta = a + bR, \quad (11)$$

которая, очевидно, эквивалентна выражению:

$$\frac{\Delta p}{ds} = a'v + b'v^2. \quad (12)$$

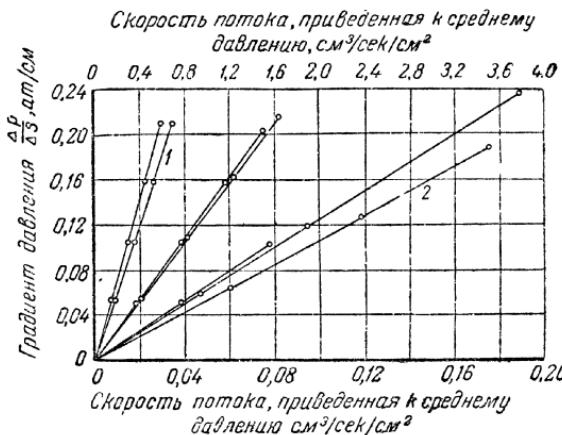
Число Рейнольдса, при котором имеет место перелом, показанный на фиг. 9, очевидно, едва дает указание на порядок величины зоны перехода между струйным течением, подчиняющимся закону Дарси ( $R\zeta = \text{const}$ ), и тем, которое подчиняется уравнению (12). Благодаря неправильной и капиллярной природе токопроводящих каналов в пористой среде отклонение от струйного типа течения, согласно уравнению (10), будет развиваться постепенно и не проявится внезапно, как в случае течения в сосудах, свободных от песка<sup>1</sup>. Без сомнения,

<sup>1</sup> Lindquist E., Premier Congres des Grands Barrages. Communication, Stockholm, 1933.

Эта фигура была использована Р. Немепуй в журн. Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 29, 157, 1934. Аналогичные результаты были получены в опытах с движением воды через отсортированный гравий, как об этом сообщают F. Schaffernack und R. Dachler, Die Wasserwirtschaft, 1, 145, 1934, которые также установили переходную область, имеющую место при числах Рейнольдса от 3 до 6.

<sup>2</sup> Является вполне правдоподобным то обстоятельство, что переход между строго ламинарным и полностью турбулентным течением в пористой среде состоит в основном из постепенного распространения вихреобразования на все поры среды. Таким образом, первые отклонения от закона Дарси будут соответствовать началу заметных вихревых потерь в больших порах. По мере того как возрастает скорость, локальные зоны вихреобразования распространяются и на более мелкие поры, пока, наконец, вихреобразование не охватит весь объем среды. Сохранение линейной величины  $a'v$  при таких условиях полного вихреобразования, согласно уравнению (12), в противоположность трубам, свободным от песка, где турбулентное состояние характеризуется единой квадратичной величиной  $b'v^2$ , следует отнести, возможно, к огромным поверхностям стенок, открытых для жидкости в пористой среде. Течение в трубах дает более резкий толчок силам трения, тормозящим поток, по сравнению со свободным поровым пространством, где вихревое движение может дать повышение потерь на трение. Так, если в свободном капилляре радиусом 1 см отношение поверхности стенок к свободному объему составляет  $2 \text{ см}^{-1}$ , отношение поверхности стенок к объему пор в песке с пористостью 20% и состоящему из одинаковых сферических зерен радиусом 0,1 мм составляет  $1,200 \text{ см}^{-1}$ .

отсутствие столь резкого перехода явилось причиной, почему было предложено некоторыми исследователями уравнение (5), характеризующее течение в пористой среде даже при очень малых скоростях. В действительности ясно, что уравнение (5) должно существенным образом приблизиться к линейной зависимости по мере уменьшения  $v$  (в случае кривой Линдквиста  $\frac{b}{a} \sim 1/10$ ) При этом данные взяты были со значительной точностью и для достаточно низких скоростей. Все же существование фактической области струйного течения, подчиняющегося уравнению (10), может быть легко пропущено.

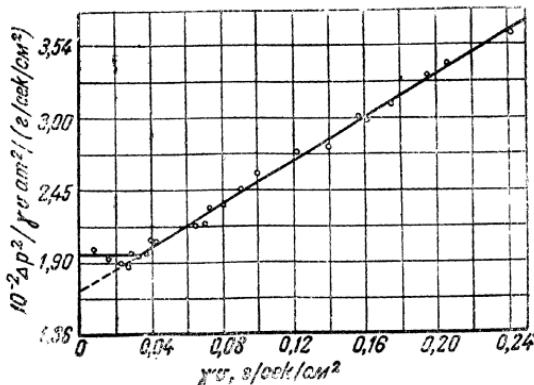


Фиг. 10. Кривые потока для воздуха через сгементированные песчаники (по Фенчеру, Льюису и Бэрнесу):

1 — читай верхнюю шкалу; 2 — читай нижнюю шкалу.

Весьма важно заметить, что поскольку число Рейнольдса принимается как основной параметр при установлении режима течения в пористой среде и используются основные представления, приведенные в уравнении (2), справедливость „закона течения“ должна быть одной и той же для жидкостей и газов, в тех же самых пределах чисел Рейнольдса. Изменение плотности вдоль потока по колонке песка при движении газа может быть свободно принято в расчет, беря  $\gamma \frac{dp}{ds}$  или его эквивалент  $\frac{dp^2}{ds}$ , при изотермическом движении газа ( $\gamma = \gamma_0 p$ ) — для зависимой переменной и скорость массы  $\gamma v$  — для независимой переменной. Можно взять также фактор трения  $s$  как зависимую переменную, нанесенную на график, по отношению к числу Рейнольдса или же, наконец, градиент давления  $\Delta p/\Delta s$ , построенный графически, как функция выделяющегося объема газа, приведенного к среднему давлению в колонке с потоком. На фиг. 8, где приведены вторые зависимости, т. е. график „фактор трения“ — число Рейнольдса, можно наблюдать, к как это указано условными обозначениями, и закономерности движения газов. Фиг. 8 показывает, что в пределах чисел

Рейнольдса [где  $d$  определено по уравнению (8)], для которых уравнение (9), а отсюда закон Дарси справедливы для жидкостей, — тому же самому уравнению подчиняется и движение газа. Для интервала струйного движения плотность формально выпадает из уравнения и получается вид его, одинаковый с уравнением (10). Еще более поразительное подтверждение правильности закона Дарси для движения газа приведено на фиг. 10. Построение этого графика сделано авторами на основании иных данных. На нем представлено последнее из только что приведенных положений. Наконец, переходя к отклонениям от закона Дарси при более высоких скоростях, мы получаем условия,



Фиг. 11. Поток воздуха через стеклянные бусы со средним диаметром 0,063 см:

$\Delta p^2$  — разность квадратов давления (по длине 92 см);  $\gamma v$  — скорость массы. Разрыв кривой соответствует  $R \sim 12$ .

схожие с теми, которые мы рассматривали для движения жидкостей. Например, в качестве сопоставления к выводам Линдквиста на фиг. 11 приведены некоторые данные, полученные Маскетом и Ботсетом<sup>1</sup> при движении воздуха через стеклянную дробь. Линейность кривой для  $\gamma v > 0,03$ , очевидно, подразумевает для данного диапазона условие:

$$\frac{\Delta p^2}{\Delta s} = a(\gamma v) + b(\gamma v)^2. \quad (13)$$

С другой стороны, Челмерс, Телайфера и Роулинс<sup>2</sup> нашли, что их опытные данные могут быть выражены лучше всего уравнением вида:

$$\frac{\Delta p^2}{\Delta s} = a(\gamma v) + b(\gamma v)^n, \quad (14)$$

где значение  $n$  для различных взятых ими пористых сред лежит в пределах 1,753 и 2,018. Так как эти авторы обрабатывали свои данные на логарифмической бумаге, полученные ими кривые недостаточно чувстви-

<sup>1</sup> Muskat M. and Botset H. G., Physics, 1, 27, 1931.

<sup>2</sup> Chalmers J., Taliaferro D. B. and Rawlins F. L., Petr. Developm. Techn. A. I. M. E., 375, 1932.

тельны к истинному режиму при очень низких скоростях<sup>1</sup>. Поэтому вполне возможно, что более тщательное изучение полученных ими данных путем построения кривых в прямоугольной декартовой системе координат подтвердит справедливость закона Дарси для низких скоростей. Действительно, рассмотрение численных подстановок в уравнении (14) показывает, что из 16 образцов пористой среды, которые эти авторы подвергли изучению, ни в одном случае величина второго слагаемого в уравнении (14) не превосходила 1%, хотя скорость достигала 0,09 см/сек.

Высказанные рассуждения привели к заключению, что закон Дарси, утверждая наличие пропорциональности между макроскопической скоростью и градиентом давления, дает очень хорошее представление о „законе течения“ для малых скоростей. Однако весьма затруднительно дать точные границы его применения. Основная трудность заключается в том, что определение величины  $d$ , входящей в число Рейнольдса, связано с присущей ей двойственностью, между тем как число Рейнольдса является независимой переменной, определяющей характер течения.

Так, принимая  $d$  диаметром одинаковых дробинок в опытах Линдквиста, приходим, как это уже было показано на фиг. 9, к ограничению области применения закона Дарси  $R = 4$ , в то время как кривая фиг. 11, полученная из опытов над стеклянными шариками, ограничивает область для  $R$  приблизительно 12<sup>2</sup>. Определение  $d$  по уравнению (8) для неоднородной и сцементированной пористой среды приводит к числу Рейнольдса порядка единицы, при котором начинают появляться отклонения от закона Дарси. Пониженное значение числа Рейнольдса, без сомнения, обязано частично большим колебаниям размера пор в сцементированной среде или неоднородных песках. Все же сомнительно, чтобы формальное определение  $d$  по уравнению (8), которое не учитывает угловатости зерен или степени их сцементированности, в случае уплотненных песков могло иметь точное физическое значение. Для настоящих целей, когда в основном мы заинтересованы скорее в установлении области применимости закона Дарси, чем в тщательном ограничении зоны отклонений, является достаточным принять за безопасный нижний предел, при котором отклонения от закона Дарси станут заметными, число Рейнольдса, равное единице, где  $d$  выбрано по любому обоснованному среднему диаметру песчинки. Тогда остается вопрос, какие же значения числа Рейнольдса, включая сюда и единицу, можно принимать в реальных системах потока, представляющих практический интерес. Очень высокие расходы в отдельных случаях реальных систем потока будут, несомненно, соответствовать числам Рейнольдса, значительно превосходящим единицу. Однако не похоже, чтобы макроскопи-

<sup>1</sup> Благодаря весьма малой вязкости газов обычно происходят заметные отклонения от закона Дарси при более низких скоростях массы по сравнению с движением жидкостей.

<sup>2</sup> Следует упомянуть об экспериментах П. Эренбергера (*Zeitschrift Osterr. Ing. Arch. Ver.*, p. 71, 1928) над движением воды через неоднородные пески с диаметром зерен 3,0 мм, при которых было найдено, что закон Дарси остался справедливым при скоростях жидкости до 0,3 см/сек, что соответствовало числу Рейнольдса порядка 5.

ческие скорости в действительных системах потока, несущих жидкость, превосходили бы нормальную величину ее, при которой число Рейнольдса составляет единицу.

Так, скорость на обнаженном песчаном забое в скважине диаметром 6" с дебитом 158  $m^3/\text{сутки}$  из трехметрового песчаника составляет приблизительно 0,126  $cm/\text{сек}^*$ . Принимая для плотности и вязкости жидкости величины 1  $g/cm^3$  и 0,01 пуаза, т. е. параметры воды (принимать параметры нефти значило бы еще более уменьшить число Рейнольдса), а для  $d$  величину 0,05 см, что является верхним пределом для сцепментированных песков, будем иметь число Рейнольдса для указанного случая равным 0,063.

Аналогично этому газовая скважина того же диаметра, работающая при 20°С из песчаного пласта того же самого типа, с дебитом 2850  $m^3/\text{сутки}^1$  и дающая газ уд. веса 0,7 от уд. веса воздуха, имеет скорость массы на обнаженном фронте забоя  $18,9 \cdot 10^{-4} g/cm^2/\text{сек}$ . Если вязкость газа при этом равна вязкости метана, то соответствующее число Рейнольдса будет 0,79, т. е. опять ниже верхнего предела единицы, на котором мы остановились выше при установлении области применения закона Дарси.

Благодаря геометрической сходимости у скважины радиального течения (гл. IV, п. 2) вышеприведенные скорости и числа Рейнольдса уменьшаются до 1/10 их величины, существующей на обнаженном фронте пласта, если отойти на расстояние 0,75 м от центра скважины, при радиусе последней 0,075 м. Тогда можно сделать вполне безопасный вывод, что в значительном числе типов течения, представляющих физический интерес, движение жидкости будет строго подчиняться закону Дарси, за исключением, может быть, весьма локализованных участков пористой среды достаточно ограниченных размеров.

Наконец, заметим, что мы сделали здесь попытку дать строгое обоснование приложения закона Дарси при количественном рассмотрении проблем течения на базе фундаментальных экспериментов, рассчитанных на проверку этого закона. Можно добавить к этому в качестве веского аргумента широкий охват явлений последними по сравнению с различными иными видоизменениями, которые были предложены для полного диапазона скоростей жидкости или же для области с повышенными числами Рейнольдса. Как это будет видно из последующих разделов, простота аналитических формулировок закона Дарси и непосредственно вытекающих из него заключений, например, уравнения Лапласа для распределения установившегося давления внутри пористой среды, делает возможным использовать его с количественной стороны для весьма различающихся между собой специфических проблем течения,

\*Обычное движение воды в артезианских бассейнах еще более медленно; средняя скорость колеблется от 1,6 до 4,8  $km/\text{год}$  или от 0,005 до 0,015  $cm/\text{сек}$  (см. работу C. S. Slichter, p. 26, The Motion of Underground Waters, U. S. Geol. Surv., Water-Supply Paper, 140, 1902).

<sup>1</sup> Газовые скважины с суточным дебитом до миллиона кубометров не являются чем-то необычным. Однако фактическая суточная добыча большинства газовых скважин обычно ограничивается величиной порядка 3000  $m^3/\text{сутки}$ . Кроме того, скважины, имеющие ненормально высокие дебиты, работают с пластов, мощность которых составляет более 3 м.

представляющих важную практическую ценность. Однако даже наиболее простые видоизменения этого закона, например, уравнения (5) и (6), непосредственно ведут к дифференциальным уравнениям для распределения давления в пористой среде, которые легко разрешаются только в наиболее простых случаях. В настоящее время не представляется возможным обобщить и распространить опытные результаты основных экспериментов с линейными каналами на системы потока с отличной геометрией. Поэтому необходимо возвращаться к экспериментированию и изучать детально опытным путем каждую специфическую проблему течения отдельно для всей области геометрических измерений и приложенных перепадов давления.

Никому нельзя извинить применения ошибочных основных законов только потому, что они аналитически просты. Однако автор считает, что именно практические соображения служат оправданием применения для решения проблем течения методов, которые приводятся в последующих разделах, где числа Рейнольдса могут несколько превзойти установленный предел — 1 и где вопрос о строгой справедливости закона Дарси остается открытым. Следует, конечно, предпочесть рассмотрение любой проблемы простыми методами, которые могут быть количественно и не точны, потому что основные допущения, положенные в их основу, только приблизительно правильны, — строгоому следованию основным законам, которые настолько сложны, если их выразить точно, что становится невозможным делать дальнейшие выводы или обобщения.

**3. Постоянная в законе Дарси. Проницаемость пористой среды.** Общая аналитическая формулировка закона Дарси относится к главе III. Однако мы подвергнем рассмотрению здесь природу постоянной пропорциональности между градиентами давления и скоростью течения в линейном канале и дадим обзор второму типу исследований, упомянутых в заключении к гл. II, п. 1. Обозначая градиент давления в линейном канале через  $\frac{dp}{dx}$  и макроскопическую скорость через  $v$ , можно выразить наиболее удобным образом эту постоянную следующим отношением:

$$v = \text{const} \frac{dp}{dx}. \quad (1)$$

Возвращаясь к размерным представлениям последнего раздела, замечаем, что преобразованием уравнения (4), гл. II, п. 2 постоянная из уравнения (1) может быть определена, как это показано в уравнении:

$$v = \text{const} \frac{d^2}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (2)$$

где  $d$  является эффективным диаметром песчинки или открытой поры<sup>1</sup>,  $\mu$  — вязкость жидкости, а остающаяся постоянная должна быть безразмерной величиной. Таким образом, физические элементы всей системы (пористая среда и жидкость), обладающие размерностью, выражены здесь через квадрат  $d$  для первой и через вязкость для второй. Плот-

<sup>1</sup> См. сноску 1 на стр. 64.

ность жидкости в уравнении отсутствует, так что множитель  $\frac{dp}{dx}$  будет отличаться для различных жидкостей, а также для газов и жидкостей по разнице в их вязкости<sup>1</sup>.

Остающаяся безразмерная постоянная должна содержать безразмерные параметры течения, которые могут включать только геометрические свойства пористой среды, например, пористость, форму зерен среды, степень цементации. Преполагается на один момент, что распределение зерен среды по их размерам включено в определение.

Отсюда, в принципе подробное знание природы пористой среды и вязкости жидкости должно позволить заранее предугадать численное значение постоянной в уравнении (1). Определение зависимости, с помощью которой можно получить эффективное познание последней, было предметом многочисленных исследований. Однако, к несчастью, единственной общей чертой всех этих выводов является то, что константа должна изменяться соответственно квадрату некоего среднего диаметра зерна пористой среды, т. е. условие, требуемое уравнением (2)<sup>2</sup>. Эти исследования проводились в очень широких размерах, начиная от классического анализа Слихтера<sup>3</sup>, где поток подсчитывался через индивидуальные поры укладки одинаковых по размеру шаров на основе закона Пуазейля, измененного так, чтобы принять в расчет отдельную форму и длину пор, до обширных экспериментов Фэнчер, Льюиса и Бэрнеса<sup>4</sup>. Последними была сделана попытка классифицировать различные пески по их расположению на линии, дающей изменения коэффициента трения по отношению к числу Рейнольдса среди аналогичных линий на графике единичных „коэффициентов трения“ (фиг. 8).

В свете полной невозможности достичь при проведенных исследованиях какого-то положительного результата, который обладал хотя бы небольшой областью справедливости и обобщенности, представляется наиболее обоснованной точкой зрения на эту проблему следующее:

<sup>1</sup> См. главу III, п. 3, где приведено объяснение причины этого отсутствия плотности в уравнении.

<sup>2</sup> Фактически вязкость  $\mu$  не была представлена точно в большинстве аналитических выражений для постоянной уравнения (1). Это допущение является, возможно, причиной того, что большинство исследователей в своих опытах применяет одну какую-либо жидкость и  $\mu$  просто поглощалось их числовыми постоянными. Первое точное выделение величины  $\mu$ , определившее исключительно влияние жидкости (или газа) на постоянную в уравнении (1), и отнесение остаточной постоянной к динамическим свойствам пористой среды принадлежат по всей видимости следующим авторам: Wyckoff, Botset, Muskat and Reed, Rev. Sci. Instr., 4, 394, 1933; Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geol., 18, 161, 1934.

<sup>3</sup> Критический обзор работ, так же как и обширное рассмотрение с качественной стороны природы порового пространства при укладке шаров и его влияние на проницаемость, можно найти в трудах C. S. Slichter, U. S. Geol. Surv., 19th Ann. Rept., 1897—1898, pt. II, p. 295; Graton H. and Fraser H. J., Journ. Geol., 43, 785, 1935; а также Fraser H. J., Journ. Geol., 43, 910, 1935.

<sup>4</sup> В этой работе можно встретить большое количество ссылок на подобные же исследования, а также общий обзор литературы по вопросу проницаемости с исторической точки зрения. Другие ссылки можно найти в книге P. Nemepu „Wasserbauliche Strömungslehre“, pt. V, 1933, и книге Ph. Forchheimer „Hydraulik“, Chap. III, 3d edit, 1930 (есть русский перевод), а также в недавно подготовленной библиографии (C. U. Fischel, U. S. Geol. Survey, February, 1935).

необходимо объединить вместе постоянную и величину  $d^2$  из уравнения (2) в единый параметр, не имеющий себе подобных и характеризующий пористую среду полностью по отношению к движению жидкости в ней. Общая постоянная, которая определяет собой в динамической форме полностью пористую среду как носитель однородной жидкости при ламинарном движении, обозначается символом  $k$  и выражает собой проницаемость. Обычно она применяется с множителем  $1/\mu$  или без такового и известна под названием „коэффициент проницаемости“ или „коэффициент передачи“ — по-немецки, „пропускная способность“ или „гидрогеологическая константа“, и уравнение (2) в конечном итоге принимает вид:

$$v = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3)^1$$

На этом основании проницаемость пористой среды равна объему жидкости с вязкостью, равной единице, проходящей через поперечное сечение пористой среды, равное единице, в единицу времени под действием перепада давления, также равного единице. Эта постоянная определяется, несомненно, только структурой среды и совершенно не зависит от природы жидкости.

Размерность проницаемости, как это видно из сравнения уравнений (2) и (3), является размерностью поверхности, или

$$k = [L^2]. \quad (4)$$

Следует заметить, что размерность  $[L^2]$  для  $k$  непосредственно вытекает из отделения  $\mu$  от  $k$  и выражения вытесняющего источника энергии через перепад давления.

Хотя анализ необходимо сделать достаточно обобщенным для включения в него всех типов однородных жидкостей и всех видов вытесняющих источников энергии, например, гравитационного напора, репрессии или же их комбинаций, с практической точки зрения можно упростить его, чтобы специализировать определение  $k$  производством работ исключительно с ограниченным количеством жидкостей и рабочих агентов. Так, в области инженерных сооружений, которая имеет дело с просачиванием воды через плотины, в технике мелиорации с просачиванием воды через каналы и рвы, или же в любой другой области движения однородной жидкости через пористую среду, где сила тяжести является преобладающим рабочим агентом, градиент давления в законе Дарси может быть вполне обоснованно выражен через гидравлический градиент. Так как вода является исключительно интересующей нас в этом случае жидкостью, вязкость ее, учитывая температурные колебания, может быть также включена в проницаемость. Тогда закон Дарси может быть написан в такой форме:

$$v = \frac{kdp}{\mu dx} = \frac{k \cdot \gamma g}{\mu} \cdot \frac{dh}{dx} = \bar{k} \frac{dh}{dx}, \quad (5)$$

<sup>1</sup> Алгебраический знак  $v$  является произвольным. В аналитических выводах последующих глав он будет выбран так, чтобы знак минус предшествовал правой стороне уравнения (3) при условии, что  $v$  будет положительно, если жидкость движется по направлению возрастающих значений координат, а обратное направление дает отрицательные значения для величины  $v$  (см. сноску 2 на стр. 113).

где  $\bar{h}$  — напор жидкости и  $d\bar{h}/dx$  — гидравлический градиент. Коэффициент  $\bar{k}$  соответствует константе  $c$  в первоначальной формуле Дарси [уравнение (1), гл. II, п. 1] и определяет собой „эффективную“ проницаемость сложной системы: пористая среда и жидкость. В действительности будет установлено, что  $\bar{k} = kyg/\mu$  естественно выделяется во всех проблемах со строго гравитационным течением, например, рассматриваемых в главе VI, где он совершенно точно представлен символом  $\bar{k}$ . Так как гидравлический градиент представляет собой безразмерную величину, разность  $\bar{k}$  будет такой же, как  $v$ , т. е. сантиметр в секунду, а по величине единица  $\bar{k}$ , как это показано в табл. 4, будет эквивалентна 1,040 дарси.

Возвращаясь теперь к вопросу непосредственной зависимости проницаемости от структурных особенностей пористой среды, например, пористости, распределения размеров зерен, формы зерен и степени сцепленности, видим, что с практической точки зрения любая частная формула будет относительно справедливой только для весьма ограниченной области типов песка. Так, например, заранее становится ясным, что пористость не будет решающим фактором при установлении величины  $k$ . Если принять во внимание, что пористая среда может иметь высокий процент порового пространства и быть почти непроницаемой вследствие отсутствия внутренних соединений между порами, то пористость войдет в величину проницаемости весьма сложным образом. С другой стороны, проницаемость песка, состоящего из сферических зерен одинакового размера, при данном способе укладки может изменяться пропорционально квадрату диаметра зерна, даже если пористость среды остается постоянной<sup>1</sup>. Структура среды не может быть просто принята в расчет путем усреднения распределения размеров зерен, как, например, в уравнении (9), гл. 2, п. 2, чтобы получить „эффективный“  $d$ .

Это доказано на том факте, что некоторые образцы, исследованные Фенчером, Льюисом и Бэрнесом, у которых значения  $d$  отличаются только на 2%, имеют значения  $k$ , различающиеся между собой в 45 раз. Можно легко обнаружить и другие схожие наблюдения среди остальных данных, собранных этими авторами. Наконец, степень сцепленности, которая естественно является весьма трудно устанавливаемым фактором, чтобы можно было его учесть, также отрицательно влияет на проницаемость уплотненных песков. Это достаточно ясно показано на табл. 3, заимствованной у Хоу и Хедсона<sup>2</sup>, которые изучали влияние искусственно менявшегося состава глинистой связки на некоторые пористые плитки, состоявшие из глиноземных абразивных зерен.

<sup>1</sup> Поразительный пример ошибки, которая встречается в теоретических и даже полуэмпирических формулах, дающих приближенно правильные значения  $k$ , можно встретить в работе Козени (Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 22, 86, 1927), где приводится сравнение замеренных и подсчитанных значений  $k$ . Так, формула Хазена показывает несоответствие, колеблющееся в пределах  $-36 \div 180\%$ , формула Крюгера  $-50 \div 84\%$  и Козени  $-68,7 \div 85,7\%$ .

<sup>2</sup> Howe W. L. and Hudson C. J., Journ. Amer. Ceramic Soc., 10, 443, 1927.

Таблица 3

Содержание связки, %	Пористость, %	Проницаемость, дарси
5,6	46,2	375
10,5	40,8	317
15,0	35,2	243
19,0	32,7	200
22,7	27,4	134

Средний размер зерна в каждой из этих плиток был 0,787 мм. Можно себе представить, что в конце концов будет найдено соотношение между проницаемостью пористой среды и пористостью ее, размером зерен, их расположением и влиянием формы зерен. Но в настоящее время, конечно, гораздо проще и более правильно сделать непосредственный замер проницаемости путем эксперимента, чем заниматься трудоемким ситовым анализом, определением пористости, а затем уже производить расчет проницаемости на основе какого-то соотношения, которое в лучшем случае обладает приблизительной справедливостью. Как это будет видно из дальнейшего, непосредственное измерение  $k$  может быть сделано настолько несложным путем, поскольку техника его уже установлена, что с чисто практической стороны кажется трудным оправдать продолжительные и косвенные процедуры, заключающиеся в ситовом и зерновом анализе.

**4. Единицы проницаемости и номенклатура.** Проницаемость пористой среды, как это было показано в предыдущем разделе имеет ту же размерность, что и площадь, т. е.  $L^2$ . Однако формальное определение ее приводит к выражению  $k$  через объем  $\times$  (площадь<sup>1</sup>) и деленное на время  $\times$  (градиент давления). Выбор единиц, которые характеризуют элементы этого выражения, в основном является совершенно произвольным. Спят показывает, что наиболее подходящим комплексом будет, возможно: время в секундах; длина в сантиметрах; объем в  $cm^3$ ; давление в атмосферах ( $76,0\text{ см}$  рт. столба), вязкость в сантипуазах.

Существующая абсолютная система единиц CGS требует, чтобы единицей давления была принята длина на  $cm^2$ . Это привело бы к неудобным в обращении малым численным значениям проницаемости пористой среды, встречающейся в природе. В табл. 4 даны коэффициенты перевода между различными предложенными единицами проницаемости, включая сюда и такие, которые применяются обычно в инженерной гидравлике и гидравлической литературе. Большая часть

<sup>1</sup> Каждый эквивалент выражения  $k = \frac{\text{скорость}}{\text{градиент давления}}$  не может считаться удовлетворительным, так как член, выражющий скорость, может быть осложнен скоростью опережения жидкости при движении ее в среде, что определяется величиной  $\frac{\text{объем/площадь}}{\text{время}\cdot\text{пористость}}$ .

Таблица 4

## Переводные меры для единиц проницаемости

$\frac{1 \text{ см}^3}{\text{сек.} \cdot \text{см}^2 \cdot (\partial u / \partial x)}$	$\frac{1 \text{ см}^3}{\text{сек.} \cdot \text{см}^2 \cdot (am / cm)}$	$\frac{1 \text{ см}^3}{\text{сек.} \cdot \text{см}^2 \cdot (cm H_2O / cm)}$	$\frac{1 \text{ см}^3}{\text{сек.} \cdot \text{см}^2 \cdot (1 \text{ dyne/cm}^2 / \text{см})}$
<b>Дарси</b>			
$\frac{1 \text{ см}^3}{\text{сек.} \cdot \text{см}^2 \cdot (a \pi / \text{см})} =$	1	9,8697 · 10 <sup>-7</sup>	1,0764 · 10 <sup>-3</sup>
$\frac{1 \text{ см}^3}{\text{сек.} \cdot \text{см}^2 \cdot (\partial u / \cdot \text{см}^2) / \text{см}} =$	1,0132 · 10 <sup>6</sup>	1	1,0906 · 10 <sup>3</sup>
$\frac{1 \text{ л.убобумп}}{\text{сек.} \cdot \text{фунт}^2 \cdot (am / \phi m)} =$	9,2904 · 10 <sup>2</sup>	9,1693 · 10 <sup>-4</sup>	1
$\frac{1 \text{ л.убобумп}}{\text{сек.} \cdot \text{фунт}^2 \cdot (am / \phi m)} =$	1,3653 · 10 <sup>4</sup>	1,3475 · 10 <sup>-2</sup>	14,696
$\frac{1 \text{ л.убобумп}}{\text{сек.} \cdot \text{фунт}^2 \cdot (a \cdot 2 \cdot 10 \phi / m / \partial x^2) / \text{фунт}} =$	1,0403 · 10 <sup>3</sup>	1,0267 · 10 <sup>-3</sup>	1,1198
$\frac{1 \text{ см}^3 \cdot H_2O (20^\circ C)}{\text{сек.} \cdot \text{см}^2 \cdot (1 \text{ см} H_2O / \text{см})} =$	70,644	6,9724 · 10 <sup>-5</sup>	7,6041 · 10 <sup>-2</sup>
$\frac{1 \text{ галл.} \cdot H_2O (20^\circ C)}{\text{мин.} \cdot \text{фунт}^2 \cdot (1 \text{ фунт} \cdot H_2O / \text{фунт})} =$			5,1742 · 10 <sup>-3</sup>
			6,7910 · 10 <sup>-2</sup>
			1

**Приимечание.** Первые четыре меры относятся к жидкости, имеющей вязкость 1 сантипуаз. Вязкость воды при 20° С принимается 1,005 сантишуаз.

сцементированных песков, встречающихся в подземных резервуарах, имеет проницаемость от 5,0 до 0,0005 в вышеуказанных единицах.

Ввиду основной роли, которую играет закон Дарси во всех количественных рассмотрениях проблем движения однородных жидкостей в пористой среде, казалось бы правильным присвоить единице проницаемости наименование „дарси“ в память пионера-исследователя<sup>1</sup>. Отсюда, приняв вышеуказанные единицы, имеем для  $k$ :

$$k = 1 \text{ дарси} \sim 1 (\text{см}^3/\text{сек})/\text{см}^2/(\text{ат}/\text{см}).$$

В дальнейшем все численные значения проницаемости мы будем выражать в дарси или же во вполне определенных долях последнего.

**5. Основы методики измерения и вычисления проницаемости пористой среды.** Как это уже было показано в гл. II, п. 3, принцип измерения проницаемости пористой среды в лабораторных условиях состоит в непосредственном определении расхода жидкости, определенной вязкости через единицу площади<sup>2</sup> линейного образца среды, и градиента давления, вызывающего это течение, а также в подсчете  $k$  из выражения:

$$k = \frac{\mu v}{dp/dx}. \quad (1)$$

При фактических экспериментах производят непосредственные замеры суммарного расхода  $Q$  через образец, длины его  $L$ , площади  $A$ , а также граничных давлений  $P_1$  и  $P_2$ . Те же величины, которые входят в состав уравнения (1), определяются расчетным путем. Так, зависимость  $v$  от  $Q$  определяется из соотношения

$$v = \frac{Q}{A}. \quad (2)$$

Если протекающее вещество является жидкостью, то, очевидно, скорость  $v$  должна быть одинаковой по длине образца (пренебрегаем

<sup>1</sup> Это наименование первоначально было предложено в работе Wyckoff, Botset, Muskat and Reed (Rev.-Sci. Instr., 4, 394, 1933). Оно тогда же было принято совместно с указанным комплексом единиц Американским нефтяным институтом. Приведенные выше единицы, за исключением того, что давление было выражено в  $10^6$  динах, или 0,99 ат, было по всей видимости предложено впервые в работе P. G. Nutting, Amer. Assoc. Petrol. Geol., 14, 1337, 1930.

<sup>2</sup> Ф. Толк [Ing. Archiv, 2, 428 (1931)] дал полную теорию измерения проницаемости для сцементированной пористой среды (бетон) на образцах, изготовленных в виде лучевых дисков; при этом жидкость нагнеталась в часть одной из сторон лицевой поверхности и покидала образец с другой стороны через цилиндрическую поверхность, а также в одном случае через остаточную часть поверхности нагнетания. Эти измерения были предложены под предлогом трудности обеспечить герметичность периферийной поверхности линейного образца среды. Однако было найдено, что предложенная ниже техника эксперимента линейного течения оказалась не только точной, но вместе с тем простой и быстрой. Кроме того, метод Толка не свободен от замечания, что капиллярное противодавление на периферии и лицевых поверхностях лучевого образца, хотя бы он был погружен в жидкость, нарушит режим течения. Наконец, следует заметить, что окончательные формулы Толка для определения константы проницаемости включают комплексные функции размеров образца, которые при расчетах приводят к сложным и не так легко поддающимся интерпретации формулам по сравнению с теми, что были выведены для экспериментов с линейным течением.

эффектом сжимаемости, который совершенно не представляет интереса при таких экспериментах).

Отсюда по уравнению (1) градиент давления  $dp/dx$  должен иметь ту же самую величину вдоль всей длины колонки с потоком и должен быть равен своему среднему значению, т. е.

$$\frac{dp}{dx} = \text{const} = \frac{P_1 - P_2}{L} \quad (3)^1$$

при условии, что  $k$  будет постоянным по длине образца. Подставляя эти значения  $v$  и  $dp/dx$  в уравнение (1), получим, что  $k$  можно подсчитать по следующей формуле:

$$k = \frac{\mu Q L}{A (P_1 - P_2)} . \quad (4)$$

При экспериментах с газом скорость  $v$  не будет более постоянной по длине колонки с потоком. Она будет скорее всего возрастать благодаря расширению газа по мере достижения выхода из образца. Поэтому  $dp/dx$  будет также возрастать по мере приближения к выходной поверхности, и рост этот должен проходить таким путем, чтобы отношение  $\frac{v}{dp/dx}$  оставалось постоянным. С другой стороны, произведение  $\gamma v$  будет одинаковым вдоль всей длины колонки с потоком. Полагая расширение газа изотермическим, как для идеального газа, что будет справедливым, за исключением высоких скоростей потока, получим, что произведение  $p \frac{dp}{dx}$  будет также постоянным. Отсюда:

$$2p \frac{dp}{dx} = \frac{dp^2}{dx} = \text{const} = \frac{P_1^2 - P_2^2}{L} = 2P \frac{P_1 - P_2}{L} , \quad (5)$$

где  $\bar{P}$  — среднее алгебраическое давление  $\frac{P_1 + P_2}{2}$ .

После подстановки этих значений в уравнение (1) значение  $k$  примет вид:

$$k = \frac{2\mu vpL}{P_1^2 - P_2^2} = \frac{\mu vpL}{(P_1 - P_2) \bar{P}} , \quad (6)$$

где  $v$  относится к скорости при давлении  $p$ . Так как  $vp$  пропорционально скорости массы в системе, а  $vp/\bar{P}$  является скоростью при среднем давлении  $\bar{P}$ , то, обозначая всю массу выходящего расхода газа через  $Q_m$ , а его объем, замеренный при среднем давлении,

<sup>1</sup> Из этого вывода непосредственно следует, что давление изменяется линейно вдоль колонки с потоком, — заключение, справедливое для любого режима течения жидкости в однородной линейной пористой среде (постоянство  $v$ ), будет ли он струйным или турбулентным. Аналогично этому  $p^2$  будет изменяться линейно в любой изотермической линейной системе, где движется газ, который можно считать идеальным. Поэтому линейные изменения  $p$  или  $p^2$  не являются критерием для струйного режима потока в пористой среде.

через  $\bar{Q}$ , получим, что в конечном итоге  $k$  можно представить в одном из следующих видов:

$$k = \frac{2\mu Q_m L}{\gamma_0 A (P_1^2 - P_2^2)} \quad (7)^1$$

или

$$k = \frac{\mu \bar{Q} L}{A (P_1 - P_2)}, \quad (8)$$

где  $\gamma_0$  — плотность газа при атмосферном давлении и дается для идеального газа формулой  $w/RT$ , где  $w$  — молекулярный вес,  $R$  — молярная газовая константа и  $T$  — абсолютная температура. Таким образом, проницаемость может быть определена из экспериментов с движением газа фактически по той же методике и формуле (8), что и проницаемость при движении жидкости, при одном лишь условии, что объем расхода в первых опытах приводится соответственно к среднему алгебраическому давлению в канале потока. Вышеприведенные формулы дают возможность рассчитать  $k$  по единичному замеру выходящего объемного расхода и перепаду давления. Однако следует помнить, что эти формулы базируются на допущении, что эксперименты с потоком производятся в области струйного движения.

Чтобы убедиться в этом, мы советуем при каждом определении проницаемости замерить несколько величин расхода при различных перепадах давления, сравнить зависимости между ними и определить  $k$  по вышеуказанным сравнениям для каждого измерения в отдельности. Постоянство результатов последнего или же прямолинейная зависимость его от перепада давления в декартовой системе координат, где связь <sup>2</sup> между расходом  $Q$  по отношению к  $\Delta P (P_1 - P_2)$ , в случае движения жидкости, или  $\bar{Q}$  по отношению к  $\Delta P$ , или же  $Q_m$  по отношению к  $\Delta P^2 (P_1^2 - P_2^2)$ , в случае движения газа, дается прямой, проходящей через начало координат, является необходимым и достаточным условием существования струйного режима потока. Наклон этих линий даст количество  $kA/\mu L$  для первых двух видов построения и  $\gamma_0 kA/2\mu L$  для последнего. Если течение в условиях эксперимента хотя бы частично турбулентно, кривые имеют изгиб в сторону осей  $\Delta P$  или  $\Delta P^2$ .

В конечном итоге можно притти к следующему. Для того чтобы получить численное значение  $k$  по вышеприведенным формулам, уравнения (4), (7) и (8) — непосредственно в единицах дарси — необходимо выразить  $\mu$  — в сантимпуазах,  $Q$ ,  $\bar{Q}$  — в  $\text{см}^3/\text{сек}$ ,  $Q_m$  — в  $\text{г}/\text{сек}$ ,  $L$  — в  $\text{см}$ ,  $A$  — в  $\text{см}^2$ ,  $P_1$  и  $P_2$  — в  $\text{ам}$ , а в уравнении (7)  $\gamma_0$  — в  $\text{г}/\text{см}^3$ , или в случае применения его эквивалента — идеального газа —  $w$  — в  $\text{г}$ ,  $T$  — в  $^\circ\text{К}$  и  $R$  — имеет свое значение 82,07.

<sup>1</sup> Из сравнения уравнений (7) и (8) следует, что если „проницаемость газа“  $k_g$  будет определена непосредственно по величине  $\frac{\mu Q_m L}{A (P_1^2 - P_2^2)}$ , то она будет связана с истинной проницаемостью уравнением  $k = \frac{2k_g}{\gamma_0}$ .

<sup>2</sup> Является необходимым условием того, что жидкость не обладает пластичностью и последнее обстоятельство не приписывается струйному режиму течения.

**6. Измерение проницаемости несцементированных песков.** Как было замечено каждым, кто делал попытку определить проницаемость несцементированной пористой среды или песка, что получаемое значение ее изменяется в очень широкой области в зависимости от набивки песка в держателе образца. Хотя эффективный диаметр зерна для данного песка, несмотря на его тщательное определение, остается неизменным при различной набивке последнего, влияние последней на пористость<sup>1</sup> может выразиться в сильно увеличенных отклонениях проницаемости образца. Влияние пористости на проницаемость несцементированного песка можно продемонстрировать ссылками на теоретические формулы Слихтера\* и Козени\*\*, которые, будучи, без сомнения, совершенно непригодными для определения абсолютных значений проницаемости, тем не менее дают порядок величины колебания пористости данного песка. Так, формула Слихтера, выведенная для укладки шаров одинакового размера при различных видах набивки, дает отношение проницаемости при высшем значении пористости, возможной для одинаковых шаров, 47,64% (кубическая укладка) к низшему возможному значению пористости, 25,95% (близко к гексагональной укладке), равное 7,5. Формула Козени, показывающая изменение  $k$  от пористости  $f$ , определяемое зависимостью  $\frac{f^3}{(1-f)^2}$ , дает колебания в вышеуказанном диапазоне — 26—47% — в 11,5 раза.

Поэтому, если нельзя получить одновременно последующую характеристику песка, где значения проницаемости были бы единственными и воспроизводимыми, только измерение проницаемости несцементированного песка само по себе имеет маловажное значение. Вполне вероятным является то обстоятельство, что пористость неоднородного песка является основным параметром, определяющим конечное значение проницаемости<sup>2</sup> данного агрегата песчаных зерен. Вполне естественно, что одна пористость еще не дает полной и достаточной спецификации последнего, так как даже малые изменения в пористости дают заметные колебания в величине проницаемости<sup>3</sup>. В тех случаях, когда пористость оказывается достаточно устойчивой по отношению к проницаемости, последняя может быть замерена по следующей методике. Тщательно перемешанный песок насыпается в стеклянную трубку, размеры которой соответствуют объему взятого песка и снабженную

<sup>1</sup> По анализу зависимости набивки по отношению к пористости в случае однородных шаров см. работу W. O. Smith, P. D. Foote and P. F. Busang, Phys. Rev., 34, 1271, 1929, а также весьма глубокое исследование L. C. Graton and H. J. Fraser, Journ. Geol., 43, 785, 1935 (см. также гл. I, п. 6).

\* Slichter C. S., Geol. U. S. Surv., 19th Ann. Rept., 1897—1898, pt. II, p. 295.

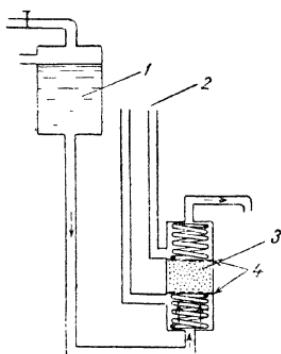
\*\* Козену J., Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 22, 67, 86, 1927.

<sup>2</sup> Внутреннюю связь между пористостью и проницаемостью для данного агрегата песчинок, обусловленную набивкой, не следует смешивать с той, которую обычно принимают в виде указания на признак единственной корреляции между пористостью и проницаемостью среди различных песков (см. гл. II, п. 3).

<sup>3</sup> Для агрегатов, состоящих из одинаковых шаров, среды с различными проницаемостями, но одной и той же пористости, могут быть получены путем „сдавивания“ или „страивания“ некоторых из основных систем кубической или гексагональной укладки (см. работу Graton and Fraser).

сетками, чтобы удержать песок на месте<sup>1</sup>, а затем трамбуется до желаемого значения пористости. Манометры, установленные на входе и выходе из песчаной колонки, должны обеспечить показания перепада давления, воздействующего на жидкость.

Во всех случаях рекомендуется устанавливать трубку с песком вертикально во избежание оседания последнего и образования обходных каналов в верхней части трубы при ее горизонтальном расположении.



Фиг. 12. Схема прибора для определения проницаемости несцементированных песков:

1 — питающая жидкость; 2 — манометры давления 3 — песок; 4 — фильтры-сетки.

пришлось бы столкнуться без нарушения структуры последней. Необходимо убедиться, что почва при экспериментах остается в том же состоянии, в каком она находилась в грунте.

Поэтому рекомендуется замерять проницаемость такой не сцементированной среды на месте или же отбирать образец почвы путем, который не оставлял бы сомнения в ненарушенности образца. Постановка первой задачи, как она решается для определения проницаемости методом опытных откачек из артезианских колодцев или скважин, пробуренных для добычи нефти или газа, будет рассмотрена в гл. II, п. 11<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Это может быть легче всего установлено по длине песчаной колонки, занятой данной навеской песка, средняя плотность зерна которого заранее установлена, или же по объему воды, необходимому для насыщения песка, по мере подъема воды в последний.

<sup>2</sup> Обширное исследование по вопросу измерения проницаемости почв путем наблюдения за просачиванием воды в почву было проведено Коцену J., Die Wasserwirtschaft, pp. 555, 589, 1931. Оставляя в стороне приближенный характер анализа, приведший Коцену к конечным формулам для исчисления проницаемости, видно, что сами методы являются в своей основе неудовлетворительными для получения выводов, обладающих в какой-то степени точностью. В них не только не учитывается влияние капиллярных сил, но природа самого течения такова, что нельзя принять предварительных мер во избежание

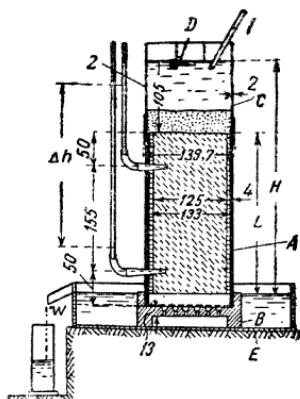
остальных подробностей процедуры измерения, а также меры предосторожности, которые необходимо принять, чтобы обеспечить тщательность результатов, в основном будут те же самые, что описаны в гл. II, пп. 7—9 для измерений со сцементированными разностями. На фиг. 12 показана схематическая установка аппарата по определению проницаемости помостью жидкости. Вполне понятно, что для экспериментов с движением газа необходимы соответствующие видоизменения установки.

В целом необходимо знать значение проницаемости несцементированной пористой среды в своем первоначальном, ненарушенном состоянии. Это особенно справедливо для гидрологических проблем, рассматривающих движение воды в поверхностных слоях почвы. В этом случае становится ясным, что если бы пористость даже была универсальным параметром, который смог установить „состояние“ почвы, все же с проблемой определения той же пористости

с проблемой определения той же пористости

Терциаги<sup>1</sup> описывает типовую методику, которая была разработана им для отбора образцов почвы без нарушения ее структуры, т. е. второй тип предварительно поставленной задачи. Основные особенности этого метода заключаются в следующем: вокруг определенного образца почвы, предназначенного к испытанию, выкапывают кольцевую канавку, оставляя образец в виде столбика несколько больших размеров, чем он потребуется в конечном итоге. Затем на столбик надевают с обжатием металлический цилиндр, состоящий из двух половинок на шарнирном соединении, чтобы верхушка почвы находилась над головкой цилиндра.

Сначала удаляют почву над верхней кромкой цилиндра, и образец отрезают от почвы, лежащей в подошве прибора. В то же самое время под нижний край цилиндра подкладывают пластиинку, чтобы предохранить образец от выпадения. Цилиндр с образцом устанавливают на столе, цилиндр открывают и удаляют в сторону, а на образец надевают металлический кожух больших размеров. В зазор между образцом и кожухом, а также на торцевые поверхности образца заливают расплавленный парафин. В этом состоянии образец переносят в лабораторию. Здесь кожух и парафиновый покров аккуратно снимают с образца. Затем последний снова покрывают тонким слоем горячего парафина. Образец помещают в цилиндрический держатель прибора по определению проницаемости, и свободный зазор между ними снова заполняют расплавленным парафином. Цилиндр переворачивают, удаляют около 2 см почвы и заменяют последнюю песочным фильтром. На нижний конец цилиндра навинчивают перфорированный башмак *B* (фиг. 13). После этого цилиндр *A* устанавливается вертикально, верхняя поверхность почвы очищается, навинчивается сосуд *C* и добав-



Фиг. 13. Аппарат для измерения проницаемости почв (по Терциаги):

1 — поступление; 2 — жесткость

захвата пузырьков воздуха порами почвы. Хотя методы взятия образцов почвы и замер их проницаемости тем же техническим путем, что предназначен для сцепментированных песков, не совсем свободен от замечаний, однако он является более предпочтительным по сравнению с методами, основанными на измерениях непосредственного просачивания влаги в поверхностные слои, почвы.

<sup>1</sup> Терциаги К., Die Wasserwirtschaft, Nos. 18/19, 1930. Несколько похожая процедура взятия проб была описана Fraser H. J., Amer. Journ. Sci., 22, 9, 1931, для определения пористости почв. Однако предложенный им метод покрытия сухих почв парафином делает его неудовлетворительным при получении вполне надежных значений проницаемости таких образцов. Иные пробоотборники описаны Powell E. B., Soil Sci., 21, 53 1921, and Veihmeyer F. J., Soil Sci., 27, 147, 1929. Последний из этих пробоотборников рассчитан на взятие проб значительно ниже верхнего поверхностного покрова почвы. Однако в этих пробоотборниках ни в одном случае не было сделано приспособления, чтобы применить их совместно с прибором по определению проницаемости образца почвы (см. раздел В, т. I, Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Eng., 1936).

ляется еще один песочный фильтр. Весь прибор помещают в бассейн  $E$ , имеющий слив  $W$ , находящийся поверх нижней кромки образца. Показания давления берут по двум манометрам, трубы от которых погружены в образец через стенки цилиндра  $A$ . Расходы протекающей сверху вниз воды замеряются по водосливу  $W^1$ . При исследовании образца с низкой проницаемостью Терцаги чаще применял метод, где велось наблюдение за величиной снижения верхнего уровня воды, связанного с трубкой небольшого сечения, нежели замеряли установившуюся величину течения при постоянном напоре<sup>2</sup>. Однако при таких экспериментах уменьшение величины снижения уровня, возникающее от уменьшения напора, может быть замаскировано снижением величины проницаемости образца вследствие фильтрационного эффекта воды. Можно проверить отсутствие влияния последнего построением на логарифмической бумаге отношения суммарного напора  $h_t$  к его первоначальному значению  $h_0$  как функция времени. Линейная зависимость явится подтверждением, что течение не нарушено изменениями среды. Уравнение, определяющее зависимость между напором жидкости и временем  $t$ , пока уровень воды оставит верхнюю трубку, дается в следующем виде:

$$\ln \frac{h_t}{h_0} = - \frac{k\gamma g A_s t}{\mu L A_t}, \quad (1)^3$$

где  $A_s$  — площадь образца;  $L$  — его длина;  $A_t$  — сечение трубы, в котором наблюдается  $h_t$ . С помощью этих констант, а также плотности  $\gamma$  и вязкости  $\mu$  жидкости можно свободно определить значение проницаемости из наклонной прямой, даваемой уравнением (1).

Если образцы были первоначально освобождены от влаги, то следует предпочесть применение воздуха воде при экспериментах с образцом, взятым и подготовленным согласно вышеизложенной методике. Это особенно удобно в тех случаях, где проницаемость достаточно чистка. Подробная техника применения воздуха аналогична той, что описана ниже (гл. II, п. 9) при рассмотрении измерений проницаемости сцепленных пористых разностей. Если вода разрушает образец, разрыхляя его или способствуя разбуханию некоторых его компонентов, можно рекомендовать применение воды при опытах только при условии, что будет дано достаточно времени для выравнивания этих нарушений, чтобы обеспечить постоянную величину их раньше, чем будет приступлено к снятию наблюдений.

В общем следует отметить, что единственная существенная разница между проблемой определения проницаемости сцепленных образцов, подробная техника которой будет описана в последующих разделах.

<sup>1</sup> Чтобы избежать захвата воздуха, по мере того как вода начинает проникать в образец, по всей вероятности, будет, безопасным направить движение воды в этих опытах так же, как и при измерениях со сцепленными песками, — снизу вверх, разумеется, с соответственным изменением в конструкции аппарата.

<sup>2</sup> В этом случае должна быть в общем предпочтена фильтрация воды в направлении снизу вверх.

<sup>3</sup> Вывод этого уравнения аналогичен описанному в сноске на стр. 531 (гл. X, п. 6) для нахождения величины проницаемости продуктивного пласта по величине подъема жидкости в эксплоатационной скважине.

лах, и не сцепленных пористых разностей, встречающихся в естественном состоянии, заключается в получении образца последних без нарушения их структуры. Следует заметить, что метод взятия проб, предложенный Терцаги, должен предохранить образец от разрушения, но все же следует считать, что более простой и удовлетворяющей процедурой будет такая, где пробоотборник будет составной частью прибора для определения проницаемости. Это даст возможность избежать частой смены держателей образца и будет иметь особое преимущество, когда образец обладает плохими связующими свойствами и будет распадаться на части, при открытии цилиндра пробоотборника. Однако, если образец уже взят и помещен в прибор по определению проницаемости, дальнейшая техника и меры предосторожности должны быть аналогичны тем, что описаны в последующих разделах для определения проницаемости сцепленных разностей.

**7. Общая техника определений проницаемости сцепленной пористой среды<sup>1</sup>.** Будут ли производиться окончательные измерения проницаемости жидкостями или газами — безразлично, но существуют определенные правила всей процедуры испытания, например, связанные с подготовкой и установкой образца, которые необходимо выполнять во всех случаях. Только путем строгого подчинения определенной, вполне установленной методике можно получить воспроизведимые и весьма ценные значения проницаемости.

Чтобы уменьшить влияние ошибочности, возникающей вследствие местной неоднородности, например, наличия конкреций или прослойков глин, рекомендуется применять образцы значительного размера, порядка 3 см диаметром и 1 см длиной. Если это возможно, образцы следует нарезать так, чтобы их оси были перпендикулярны или параллельны плоскости напластования песчаника, т. е. чтобы получить значения проницаемости в этих двух направлениях. Нарезка образцов осуществляется пропиленной медной трубкой, установленной в тихоходном сверлильном станке с подачей грубозернистого карборуна и небольшого количества воды. Полученный керн устанавливается в специальной машинке (фиг. 14), снабженной нортоновским режущим диском из карборуна на бакелитовой связке, диаметром 17,5 см и толщиной 1,5 мм<sup>2</sup>. Соответствующая скорость диска составляет 1700 об/мин. На диск в процессе нарезки беспрерывно подается небольшое количество воды. Чтобы избежать затягивания мелких опилок в поверхность керна капиллярными силами с последующим заиливанием поверхности и закупоркой пор, необходимо предварительно пропитать керны водой

<sup>1</sup> Техника, описанная здесь и в последующих разделах, опубликована в работе R. D. Wyckoff, H. G. Botset, M. Muskat and D. W. Reed, Rev. Sci. Instr., 4, 394, 1933, а также в Bull. Amer. Assoc. Petro!. Geolog., 18, 161, 1934.

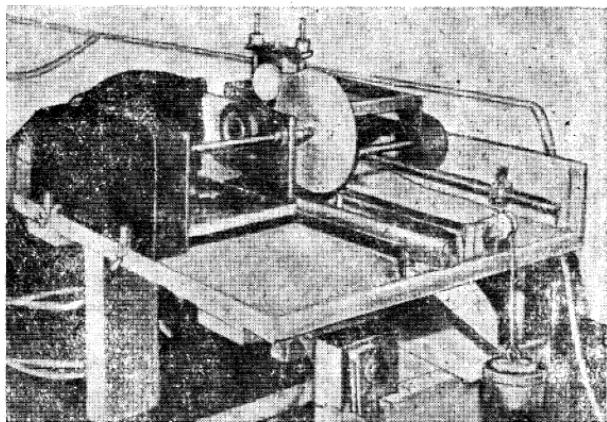
В основном та же методика дается в работе Fancher, Lewis and Barnes, а также W. L. Ногнер (Petro!. Engg., 5, May, 1931). Детально техника измерений проницаемости, описанная здесь, была разработана на опытах с кернами из нефтяных песков. Вместе с тем она вполне приложима ко всем сцепленным пористым разностям.

<sup>2</sup> Некоторые исследователи предпочитают метод расщепления. Но, если принять соответствующие меры предосторожности, как это показано на примерах, можно получить те же самые результаты способом нарезки.

или иной какой-либо жидкостью, которая не разрушает цементирующего материала. Эта предосторожность дает керну достаточное предохранение против закупоривающего действия режущего диска. С этой целью мы приводим табл. 5, показывающую значения проницаемости двух прилегающих частей песчаника, которые были получены в одном случае после нарезки диском, а в другом случае после расщепления на специально сконструированном прессе, где поверхности кернов по необходимости остаются свободными от загрязнения.

Таблица 5

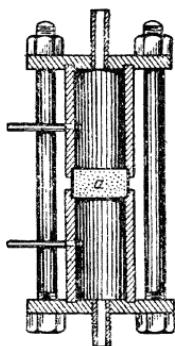
Образец нарезан	Режущим диском	Расщеплением
$k$ (1 образец) в дарси	0,65	0,67
$k$ (2 образец) » »	4,83	4,83



Фиг. 14. Машина для нарезания кернов.

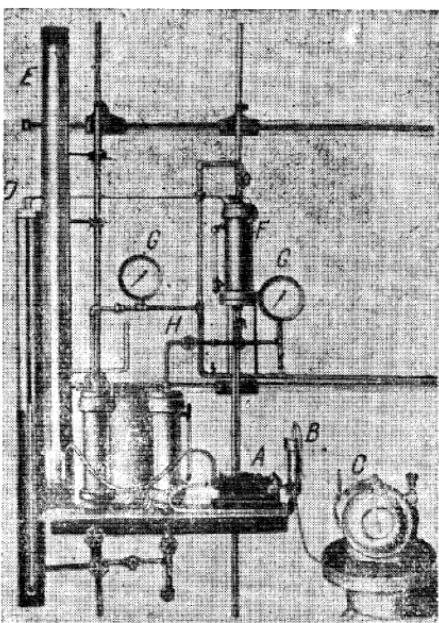
Если образец пористой среды является керном из нефтяного песчаника, нефть из него должна быть тщательно удалена до производства измерений проницаемости. Для этой цели можно применить большой экстрактор Сокслета, где в качестве растворителя берется четыреххлористый углерод, бензол или хлороформ. Экстракцию можно ускорить, если предварительно зажать образец в нижний конец медной трубы длиной около 15 см. Тугая посадка образца достаточно хороша для того, чтобы при погружении трубы в экстрактор с образцом, закрепленным на нижнем конце ее, напор жидкости, который может поддерживаться на высоте соответственно 15 см, проталкивал растворитель внутрь образца. Трудность удаления всех следов нефти заставляет рекомендовать к испытанию тонкие образцы кернов из нефтяных песчаников. Детали укрепления образца в приборе могут зависеть от

вкусов экспериментатора, но безопасная и простая процедура опыта заключается в следующем. Сначала боковая поверхность высущенного и слегка подогретого образца покрывается горячим варом или смолой так, чтобы получить непроницаемый слой изолирующего вещества<sup>1</sup>. Затем образец устанавливается между торцами труб (фиг. 15), которые слегка стягиваются болтами и несколько подогреваются, чтобы получить хорошую связь с образцом. Между стыками трубок оставляется зазор, чтобы можно было обнаружить неудовлетворительную изоляцию, через которую можно ожидать утечку по окружности образца. Необходимо принять меры предосторожности, чтобы изоляционное вещество не покрыло торцевых по-



Фиг. 15. Патрон для образца породы при измерениях проницаемости сцепментированных песчаников.

*a* — песчаник.



Фиг. 16. Комплект аппарата для измерений проницаемости сцепментированных песчаников.

верхностей образца. Вар или смола достаточно удовлетворительны при производстве измерений с помощью воздуха или воды, так как они менее хрупки по сравнению с остальными изолирующими веществами. Если при измерениях применяется нефть или иные жидкости (четыреххлористый углерод), которые только отчасти растворяют смолу, изоляционный материал должен быть заменен нерастворимым, например, обычным изоляционным парафином или окисью свинца с глицерином.

На фиг. 16 показана удовлетворяющая форма устройства прибора для определения проницаемости: *A* — держатель образца; *B* — осуши-

<sup>1</sup> Любой непроницаемый цемент окажет то же действие. Однако образцы можно герметизировать в напорной трубке с помощью мягкой резиновой пробки, которая затягивается до тугой посадки стенок образца соответствующим нажимным устройством.

тельная трубка с хлористым кальцием; *C* — жидкостной газомер при измерениях с газами; *D* — ртутный дифференциальный манометр, показывающий перепад давления через образец; *E* — ртутный манометр, показывающий давление на выходе из образца; *F* — баллоны, применяемые при опытах с жидкостями; *G* — пружинные манометры для приблизительного определения давления, существующего в баллонах. Так как пружинные манометры недостаточно точны, чтобы получить удовлетворяющие результаты, то необходимы ртутные манометры.

Для низких давлений можно применить водяные манометры. Для повышенных давлений следует применять ртутные манометры. При измерениях с помощью газа следует принять во внимание определение абсолютных давлений в системе наравне с суммарным перепадом давления.

При производстве измерений проницаемости с помощью жидкостей рекомендуется, как и в случае работы с несцементированными песками, устанавливать кернодержатели вертикально с входящим концом нагнетательной трубы в нижней его части. Тогда верхняя поверхность образца всегда покрыта жидкостью и устраняется возможность образования воздушного фильтра на выпускном торце последнего. Если же на этой поверхности существует неудовлетворительное смачивание, то результаты измерения могут быть серьезно испорчены капиллярными силами.

Следует наблюдать при измерениях расходов течения, чтобы перепады давления были постоянны в процессе замера. В случае небольших расходов газового потока газ можно собирать над поверхностью воды. Конечный замеренный объем газа должен быть отнесен к известному атмосферному давлению. Более высокие расходы газа могут быть замерены с помощью аккуратно откалиброванного счетчика или газомера. Температуру жидкости следует отмечать во всех случаях, чтобы получить истинное значение вязкости жидкости. Это особенно важно в случае измерений проницаемости с помощью жидкостей, так как колебание температуры в 1° С может оказаться причиной изменения величины вязкости многих жидкостей при комнатной температуре порядка 2%.

**8. Дальнейшие подробности измерений проницаемости с помощью жидкостей.** Наиболее серьезной трудностью, с которой столкнулись в ранних измерениях проницаемости сцементированных пористых разностей с помощью жидкостей, была закупорка песка в процессе осуществления течения, с постепенным непрерывным уменьшением проницаемости во времени. Фактически в большей части ранней литературы, посвященной этому вопросу, значения проницаемости относятся к измерениям, взятым спустя определенный отрезок времени, следовавший за началом экспериментов с течением, с ясным сознанием об изменении замеряемой величины во времени. Однако эти выводы с точки зрения представления о динамической характеристике пористой среды скорее всего не имеют ценности, так как дают численное определение, свойственное исключительно специфическим особенностям эксперимента, при которых оно было получено.

Одной из обычных причин закупорки пористой среды при непрерывном течении жидкости, например воды, является выделение воздуха

или газа, растворенного в жидкости. Этот газ остается в порах среды в виде небольших пузырьков и может уменьшить конечную проницаемость для жидкости до небольшой доли ее первоначального значения<sup>1</sup>. Эффективным средством для устранения этой трудности является применение дистиллированной воды, а в добавление к этому фильтрование ее перед поступлением в испытуемый образец. Менее определенной причиной закупорки пор сцементированной пористой среды даже в том случае, когда применяется дистиллированная вода, является растворение силиция из стекла, в котором хранится вода<sup>2</sup>, и отложение его из раствора в порах образца. В этом случае опять фильтрование воды через песчаный или алюмоводный фильтр непосредственно перед ее применением предупредит образование этой трудности. Кроме того, стенки сосуда с водой следует покрыть парафином, чтобы совершенно избежать растворения силиция. С другой стороны, когда в качестве опытной жидкости применяется нефть, закупорка может образоваться благодаря отложениям клейких, смолистых веществ в результате окисления ненасыщенных углеводородов. В этом случае нельзя получить воспроизводимых и надежных результатов, если только ненасыщенные углеводороды не будут удалены хорошо известными химическими средствами, и нефть будет находиться в неокисляющей атмосфере азота или естественного газа<sup>3</sup>.

Следующая мера предосторожности, за которой следует вести наблюдение, заключается в том, чтобы воздух не былдержан в образце, когда опытная жидкость проникает в последний. Безопасной процедурой является отсос воздуха из системы вакуумным насосом, присоединенным к выходному отверстию. После того как давление в образце будет значительно понижено, дают жидкости проникнуть в образец. Применяемая жидкость, разумеется, не должна способствовать разрыхлению цементирующего вещества образца. Во многих случаях было установлено, что наиболее подходящей жидкостью является четыреххлористый углерод, так как вода разрушает цементирующее вещество.

## 9. Дальнейшие подробности измерений проницаемости с помощью газов.

По аналогии с требованиями, чтобы образец, через который протекает жидкость при измерениях проницаемости, был свободен от

<sup>1</sup> Совместное присутствие газовой и жидкой фазы в пористой среде способствует возникновению системы неоднородной жидкости, рассмотрение которой лежит вне рамок настоящей работы. Однако можно упомянуть, что образование таких систем благодаря выделению газа из жидкой фазы состоит из первоначального этапа улавливания и аккумуляции выделяющегося газа в порах среды с непрерывным уменьшением проницаемости по отношению к жидкости. Это будет происходить до тех пор, пока не будет достигнуто условие динамического равновесия, при котором дополнительное количество газа, выделяющегося из жидкости, достигнет своего максимального значения, а газовая и жидккая фазы займут в среднем какую-то часть порового пространства, определяемую первоначальной проницаемостью среды. Проницаемость по отношению к жидкости не будет уже больше снижаться, после того как это условие будет достигнуто, хотя бы количество газа, растворенного в жидкости, возросло (см. R. D. Wyckoff and H. G. Botset, Physics, 7, 325, 1936).

<sup>2</sup> Botset H. G., Rev. Sci. Instr., 2, 84, 1931.

<sup>3</sup> Там же в работе Ботсета.

заключенного в нем воздуха или газа, необходимым предохранительным мероприятием в случае испытательного вещества — газа — является отсутствие в образце влаги. Жидкости, которые первоначально заключались в поровом пространстве, можно удалить тщательной длительной сушкой в соответствующей печи, хотя температуру в последних не следует поднимать выше 102° С, или же применением вакуума, чтобы способствовать улетучиванию жидкости. Опасность загрязнения образца влагой или иными посторонними веществами из проходящего через него газа может быть устранена фильтрованием или сушкой воздуха (пропусканием через трубу с хлористым кальцием) перед тем, как он поступает в испытуемый образец.

Как уже было упомянуто в гл. II, п. 7, прибор для измерения проницаемости с помощью газа должен быть снабжен манометром, показывающим абсолютное давление в системе в дополнение к дифференциальному манометру, показывающему перепад давления в образце. Эти требования вытекают из того обстоятельства, что формула для подсчета проницаемости по замерам газового потока включает или квадраты абсолютных давлений [уравнение (7), гл. II, п. 5], или расход потока в объемных единицах, отнесенный к среднему давлению в системе [уравнение (8), гл. 2, п. 5].

**10. Сравнение газа и жидкостей при измерениях проницаемости.** Хотя проницаемость пористой среды (как это было видно из предыдущих глав) является константой, определяемой только структурой среды, и не зависит от природы однородной жидкости, проходящей через нее, — это обстоятельство только недавно нашло свое признание в литературе. Фактическое ознакомление с литературой, посвященной этому вопросу, оставляет впечатление, что если кто-либо займется практической проблемой движения определенной жидкости в пористой среде, определение проницаемости последней он должен делать только этой жидкостью. Проницаемость любой среды выражается обычно терминологически как „проницаемость по отношению к определенной, представляющей интерес жидкости“. Так, практически во всей литературе, посвященной измерениям проницаемости в керамической промышленности, в связи с возникающими проблемами принято применение воздуха без всякого упоминания о приложимости выводов с внесением поправки (даже на вязкость жидкости) к движению иной жидкости в среде. Определение проницаемости в гидрологической литературе почти исключительно выражается в величинах ее по отношению к воде жидкости, которая применяется в этом случае почти без исключения. Однако в свете того обстоятельства, что измерение проницаемости пористой среды с помощью газа дает динамическую характеристику среды, приложимую к потоку газов или жидкостей сквозь последнюю, представляет собой практический интерес отметить, что в действительности существуют вполне определенные преимущества измерения проницаемости с помощью газов<sup>1</sup>. Эти преимущества заключаются в устраниении

<sup>1</sup> Если не представляется возможным совершенно удалить нефть или другие жидкости, первоначально представленные в образце, гораздо безопаснее применять в качестве опытного вещества жидкость, которая легко смешивается с той, что находится в образце.

трудностей, возникающих вследствие закупорки образца веществами, которые отлагаются из жидкостей; разбухания цементирующего вещества в сцепленной пористой среде; исключение ошибок, возникающих вследствие захвата образцом воздуха; необходимостью отсасывать воздух из образца и заполнять образец жидкостью под вакуумом; уничтожение опасности разрушения сцепленного образца и разрыхления цементирующего вещества, а также легкость получения замеряемых потоков, даже для очень плотных образцов, без приложения повышенных давлений. Поэтому с точки зрения простоты, скорости и тщательности следует заметить, что измерения проницаемости с помощью воздуха или любого иного, удобного к применению газа, предпочтительнее измерения с помощью жидкостей.

Проницаемость пористой среды является постоянным параметром ее и не зависит от жидкости, применяемой при определении проницаемости. Фактическая справедливость этого допущения видна из данных, приведенных в табл. 6. Данные эти, базирующиеся на результатах измерений одних и тех же образцов с помощью воздуха и жидкости и подсчитанные по формулам гл. II, п. 5, показывают, что в пределах ошибки эксперимента при таких измерениях конечные значения проницаемости фактически остаются теми же, не завися от примененной жидкости.

Таблица 6

Образцы	Проницаемость, дарси	
	<i>k</i> (измерения воздухом)	<i>k</i> (измерения жидкостью)
Песок зернистостью 40—45 меш . . . . .	139,13	139,4 ( $H_2O$ )
» 80—100 меш . . . . .	24,90	22,0 ( $H_2O$ )
№ 1 песчаник из пласта Вудбайн (В. Тексас)	1,18	1,20 ( $CCl_4$ )
№ 2 » » » »	1,56	1,57 ( $H_2O$ )
№ 3 » » » »	1,63	1,63 ( $H_2O$ )
№ 4 » » » Бирн . . . . .	1,54	1,50 ( $H_2O$ )

Несоответствие между данными, относящимися к песку зернистостью 80—100 меш, следует, без сомнения, отнести за счет небольшого изменения в набивке при прохождении воды через песок, одновременно с неполным удалением захваченного воздуха. Следует также упомянуть здесь, что аналогичные несоответствия часто обязаны гидратации и разбуханию глины в песчанике. Для песчаников, не содержащих глин или иных легко гидратизирующихся веществ, например, песчаника Виллокса<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Если практическая проблема, в которой участвует величина проницаемости, включает поток воды и опытный песчаник показывает явление гидратации и разбухания, будучи смочен водой, не следует брать низких значений проницаемости, которые получаются при измерениях с помощью воды. Так как естественные горные породы нередко обладают тенденцией к гидратации и разбуханию при смачивании их водой, то если производятся измерения над еще не подвергшимися исследованию горизонтами, рекомендуется предварительно испытывать образцы пород на этот эффект.

(основной нефтяной пласт в штате Оклахома, США), между значениями проницаемости, измеренными с помощью газа и воды, существует согласие, аналогичное результатам, полученным в табл. 7.

**11. Измерения проницаемости в полевых условиях.** Измерение проницаемости пористой среды на соответствующем приборе и по определенной методике в лабораторных условиях, несомненно, дает наиболее тщательные результаты.

Вместе с тем является обычно необходимым определить значение проницаемости в полевых условиях на основе общих данных по движению жидкости в системе потока. Типичные условия, при которых возникает эта необходимость, встречаются в том случае, когда водоносные пески сложены несцементированными разностями и вместе с тем залегают на такой глубине, что к ним нельзя приложить метод отбора грунтов для поверхностных слоев почвы, описанный в гл. II, п. 6.

Это представляет собой обычное явление при изучении артезианских бассейнов, подвергающихся дренированию скважинами, или же других искусственных сооружений каптажа по выводу потока на дневную поверхность. Другое типичное положение, обычно встречающееся при добыче жидкостей из подземных резервуаров, имеет место в том случае, где, несмотря на сцепленность пористой среды, нет кернов или образцов, необходимых для определения проницаемости в лабораторных условиях. До последних нескольких лет получение кернов со скважин рассматривалось как дорогостоящая роскошь. Однако и в настоящее время, когда взятие кернов из бурящихся скважин является вполне планомерным мероприятием, обнаруживается часто, что сам процесс бурения разрушает керны. Если сцепленность песчаника недостаточно прочна или же если песчаник, сохраняя свою структуру, может быть поврежден проникновением глинистого раствора, который оставляет в нем значительное количество твердого вещества, не представленного в среде в ее девственном состоянии, то полученная проницаемость не отразит истинного состояния среды.

Поэтому значительный практический интерес представляет собой процедура, с помощью которой можно определить проницаемость пористой среды на месте ее нахождения, без какого-либо нарушения состояния среды, по характеристике течения в сложной системе песчаник-скважина. Так как подобные методы найдут себе самое широкое применение в тех типах течения, где большие участки пористой среды дренируются скважиной малого диаметра, представленные в настоящем разделе формулы приложимы только к таким системам, где режим потока принят радиальным по отношению к интересующей нас скважине. Чтобы не смешать основы подсчета с аналитическими подробностями, заранее будут рассмотрены специальные формулы, вывод которых дается в последующих главах. Однако следует уточнить, что применение любых формул к подсчету проницаемости песчаника по данным течения у скважины, дрениющей этот песчаник, требует предварительного знания размерностей параметров, характеризующих систему. В частности, необходимо знать радиус скважины  $r_w$ , мощность песчаника  $h$  и глубину входа скважины в песчаник. В дополнение к этому следует знать или замерить вязкость жидкости, добываемой из сква-

жины. Наконец, все формулы включают в себя радиус  $r_e$ , который следует рассматривать как величину, определяющую „внешнюю эффективную границу“ системы песчаник-скважина. При выводе формул этот радиус, входит как величина расстояния от центра скважины до точки, где известно давление жидкости, соответствующее  $P_e$  — давлению резервуара. С другой стороны, последнее соответствует также давлению на обнаженном забое скважины после того, как она закрыта на некоторый, достаточно долгий промежуток времени, пока в ней не будет достигнуто равновесие. Радиус  $r_e$ , при котором давление жидкости в процессе фонтанирования скважины приблизительно равно давлению резервуара, заранее с достоверностью не известен. Следует заметить, что он входит в представленные формулы в логарифмическом виде. Отсюда значительная ошибка при исчислении  $r_e$  приведет в целом к небольшому изменению в конечном значении  $k$ . Для целей фактического подсчета достаточно принять для  $r_e$  половину среднего расстояния от рассматриваемой скважины до ее ближайших соседей, за исключением тех случаев, когда дебиты последних резко отличны от рассматриваемого. Давление в срединной точке между двумя соседними скважинами приблизительно равно (как это было уже определено выше) давлению резервуара. Если не имеется достаточно данных относительно местоположения или дебитов остальных скважин, можно взять для  $r_e$  значение 152,5 м. Ошибка в окончательно подсчитанной величине  $k$  будет только 10%, если истинное значение  $r_e$  составляет половину или же двойную величину от 152,5 м.

Допуская, что параметры, рассмотренные выше, были определены, можем окончательно установить проницаемость для несущего жидкость песчаного пласта из соотношения:

$$k = \frac{\mu Q \ln r_e / r_w}{2\pi h (P_e - P_w)} , \quad (1)^1$$

где  $Q$  — расход жидкости в объемных единицах при давлении на забое скважины  $P_w$  за единицу времени.

В случае, если скважина дает газ, соответствующая формула будет:

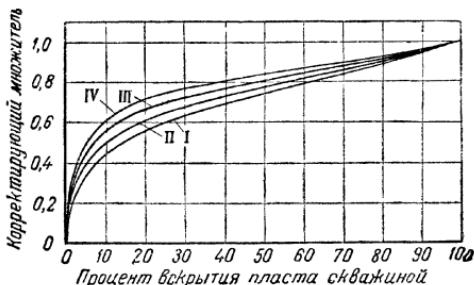
$$k = \frac{\mu \bar{Q} \ln r_e / r_w}{2\pi h (P_e - P_w)} = \frac{\mu Q_m \ln r_e / r_w}{\pi h \gamma_0 (P_e^2 - P_w^2)} , \quad (2)^2$$

где  $\bar{Q}$  — дебит газа в объемных единицах, приведенный к среднеалгебраическому давлению в пласте  $\frac{(P_e + P_w)}{2}$ ;  $Q_m$  — дебит газа в единицах массы;  $\gamma_0$  — плотность газа при атмосферном давлении и температуре замера, значение  $w/RT$  принимается для идеального газа. В обоих этих уравнениях конечное значение  $k$  будет выражено в единицах дарси при условии что  $\mu$  выражено в сантимпузах;  $Q$  и  $\bar{Q}$  — в  $\text{cm}^3/\text{сек}$ ;  $h$  — в  $\text{cm}$ ;

<sup>1</sup> Вывод этого уравнения дан в гл. IV, п 2. Здесь следует отметить, что значения логарифма во всех формулах настоящей работы относятся к основанию  $e=2,71828$ . Зависимость между основанием  $e$  и основанием десятичных логарифмов дается соотношением  $\log_{10}x = 0,43429 \ln_e x$ .

<sup>2</sup> Вывод этих уравнений дан в гл. XI, п. 3.

$P_e$  и  $P_w$  — в ат;  $Q_m$  — в г/сек;  $\gamma_0$  — в г/см<sup>3</sup>. Если проницаемость подсчитывается по величине идеального газа,  $w$  выражается в г/моль;  $T$  — в °К, а  $R = 82,07$ . Так как  $r_e$  и  $r_w$  входят в уравнение в виде дроби, то отношение их безразмерно только при условии, что оба радиуса выражены в тех же самых единицах. Эти формулы справедливы в том случае, если скважина полностью вскрыла песчаный пласт и когда столб жидкости соответственно уравнению (1), равный динамическому забойному давлению  $P_w$ , больше мощности песчаного пласта. Тогда течение горизонтальное, радиальное, без гравитационной составляющей.



Фиг. 17. Корректирующие множители для подсчета величины проницаемости по данным текущего дебита скважин с частичным вскрытием забоя при мощностях песчаника:

I — 15,25 м; II — 22,9 м; III — 38,15 м;  
IV — 61 м.

Если скважина не вскрыла полностью песчаный пласт и  $h$  в уравнениях (1) и (2) берется просто как мощность песчаника, открытого забоем скважины, следует ввести некоторую поправку в эти формулы, иначе применение их дает повышенное значение для  $k$ . Поправочные коэффициенты, на которые должны быть умножены величины, полученные из уравнений (1) и (2), чтобы получить истинные значения проницаемости, приводятся в виде графиков на фиг. 17 как функции вскрытия забоем различной мощности песчаников для

скважины радиусом 0,075 м. Эти графики получены на основе тщательного анализа проблемы течения в несовершенной скважине, т. е. вскрывшей пласт только частично (гл. V, пп. 3 и 4)<sup>1</sup>. Поправочный коэффициент применяется в обоих случаях: для скважин, дающих жидкости, и для скважин, дающих газ, но применить его можно только в том случае, если известны действительное вскрытие пласта забоем и суммарная мощность песчаника. Если песчаный пласт представлен анизотропной средой, проницаемость будет отличной в различных направлениях как параллельно, так и перпендикулярно плоскостям напластования, и в видимое значение  $k$ , которое дается уравнениями (1) и (2), должен быть введен дополнительный поправочный коэффициент. Этот коэффициент довольно легко подсчитывается на основании выводов, развитых в главе V, п. 5 и представленных на фиг. 87. Однако, ввиду того что в целом заранее неизвестна величина анизотропии, мы и не дадим здесь точного представления об этом поправочном коэффициенте. С другой стороны, если высота жидкости в скважине в процессе испытания меньше мощности песчаника,

<sup>1</sup> Возможно, что наиболее простой путь получения поправочных коэффициентов  $C$  дается формулой  $C = \frac{\text{частичное вскрытие}}{\frac{Q}{Q_0}}$ , где  $\frac{Q}{Q_0}$  является отно-

шением дебита скважины с неполным вскрытием пласта к дебиту скважины с полным вскрытием, как это показано на фиг. 264 и 265.

следует быть осторожным в выборе и применении соответствующего видоизменения уравнения (1). Это положение обычно возникает в артезианских скважинах, где можно не получить значительных дебитов без дополнительной откачки и снижения уровня ниже кровли продуктивного пласта. В дополнение к фактической высоте жидкости необходимо знать также, является ли течение в скважину подчиняющимся строго гравитационному режиму с высотой стояния жидкости в отдаленной точке песчаного пласта соответственно ниже кровли последнего, или подчиняется сложной системе артезианского и гравитационного течения с высотой напора жидкости в отдельных точках пласта больше мощности последнего.

Для первого случая — строго радиального гравитационного течения — было найдено опытным путем (гл. VI, п. 18), что проницаемость может быть определена из следующего уравнения:

$$k = \frac{\mu Q \ln \frac{r_e}{r_w}}{\pi \gamma g (h_e^2 - h_w^2)}, \quad (3)^1$$

где  $\gamma$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $h_w$  — напор жидкости в скважине, считая от непроницаемой подошвы продуктивной зоны, и  $h_e$  — напор на расстоянии радиуса  $r_e$ .

Если  $h_e$  превышает мощность песчаного пласта  $h$  так, что существует перепад величиной  $\gamma(h_e - h)$ , накладываемый на гравитационную составляющую течения, то результирующий поток в системе будет таков, что значение  $k$  будет даваться уравнением следующего вида (гл. VI, п. 19):

$$k = \frac{\mu Q \ln \frac{r_e}{r_w}}{\pi \gamma g (2hh_e - h^2 - h_w^2)}. \quad (4)$$

Для обоих уравнений (3) и (4) опять делается допущение, что скважина полностью вскрывает продуктивный песчаник. Практически это всегда будет иметь место, когда давления жидкости настолько малы, что гравитационная составляющая течения становится важнейшим фактором суммарной отдачи песчаного пласта.

<sup>1</sup> В связи с этим можно напомнить о так называемом „методе Тима“ для подсчета  $k$ . В этом случае, применяя первоначальную интерпретацию Дюпюи значений  $h$  в уравнении (3) как фактических высот жидкости (см. гл. VI, п. 17, в котором приведено более подробное рассмотрение этого вопроса) и беря любые две точки  $r_e, r_w (r_1, r_2)$  в песчаном пласте с соответствующими высотами жидкости  $h_1$  и  $h_2$ , можно рассматривать выражение  $h_1^2 - h_2^2$  как сомножители  $(h_1 + h_2)(h_1 - h_2)$  или произведение двойной средней мощности насыщения на разность депрессии при снижении уровня ниже его ненарушенного состояния между  $r_1$  и  $r_2$ . Связывая независимое установление первого сомножителя с замером второго, определяют затем значения  $k$  для данного дебита откачки  $Q$  в двух пробных скважинах, пробуренных на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от эксплуатационной. Однако в свете сомнительной справедливости интерпретации Дюпюи величина  $h$  как высот жидкости и большой стоимости таких определений язвствует, что предложенная здесь процедура, несмотря на ее ограничения, должна быть в целом более приемлема и более практична (см. также гл. VI, п. 18 краткий обзор применения этого метода в полевых опытах, описанный L. K. Wentzel).

Следует заметить, что если действительная мощность песчаника  $h$  превосходит величину вскрытия последнего  $h_e$ , то, чтобы принять в расчет частичное вскрытие пласта в нормально работающих под давлением скважинах, формулировка уравнения (3) должна быть поправлена коэффициентом из фиг. 17 совершенно так же, как это описано для уравнений (1) и (2). Соответственно этому в случае применения уравнения (4), когда действительная мощность песчаника превосходит величину вскрытия последнего скважиной или видимую мощность  $h$  и если  $h_e, h_w$  представляют собой напоры жидкости, считая от забоя скважин<sup>1</sup>, применение поправочных коэффициентов опять возместит влияние недостаточного вскрытия пласта<sup>1</sup>.

Методика фактических определений  $k$  по вышеприведенным формулам, должна состоять в основном из измерения забойного давления в резервуаре  $P_e$  или высоты столба жидкости  $h_e$  в скважине, закрытой на достаточно продолжительный отрезок времени, чтобы достигнуть состояния равновесия между жидкостью в ней и окружающим песчаником, а также из измерения дебита  $Q, \bar{Q}$  или  $Q_m$ , соответствующего значению забойного давления  $P_w$  или высоте столба жидкости  $h_w$  в процессе фонтанирования скважины с дебитом  $Q$ . Измерения должны быть произведены только при установившемся режиме течения и после того, как погаснет переходное состояние<sup>2</sup>, наступающее за открытием скважины после ее остановки или же при изменении величины предыдущего отбора. В этом можно удостовериться, только отмечая, когда забойное давление или высота столба жидкости достигнут своего установившегося значения при твердо сохраняющейся величине дебита  $Q$  или же меняющемся значении последнего.

В дополнение к этим фактическим опытам с течением необходимо также подсчитать или измерить мощность песчаника  $h$ . Хотя  $h$  не входит непосредственно в уравнение (3), тем не менее значение его необходимо знать даже и в этом случае. Тогда можно быть уверенным, что поток в действительности гравитационный и что уравнение (3) применимо к рассматриваемому случаю.

Наиболее точное определение  $h$  или фактическое вскрытие пласта берется в общем по буровому разрезу скважины. Если это невыполнимо или является по каким-либо причинам не удовлетворяющим поставленным требованиям, можно использовать данные по соседним скважинам<sup>3</sup>. Однако, поскольку рассматривается определенная скважина, то

<sup>1</sup> Аналитическое доказательство справедливости применения поправочных коэффициентов будет приведено в гл. VI, п. 20.

<sup>2</sup> В гл. X, п. 6 приведен несколько отличный метод полевого измерения проницаемости пористой среды, основывающийся на измерении скорости подъема жидкости в стволе скважины, после того как столб жидкости был снижен от его положения равновесия.

<sup>3</sup> Кровля продуктивного песчаника в системах негравитационного течения может быть установлена, по крайней мере принципиально, при условии, что измерения производятся достаточно аккуратно. Для непрерывного диапазона забойного давления и построения графика  $Q/(P_e - P_w)$  по отношению к  $P_w$ , отмечая значение, при котором это отношение начинает возрастать благодаря добавлению составляющей гравитационного течения, по мере того как высота жидкости в скважине падает ниже кровли песчаника, получим значение столба жидкости, эквивалентного мощности песчаника (для совершенной скважины).

всякий замер  $Q$  и  $\Delta p$  или  $h_e^2 - h_w^2$  даст в общем необходимые данные, чтобы произвести по ним подсчет максимального текущего дебита скважины, а также дебитов при любом заранее намеченному значении  $P_w$  или  $h_w$ , что обычно и является действительной целью измерений. Поскольку течение является ламинарным, дебиты будут прямо пропорциональны  $P_e - P_w$  или  $h_e^2 - h_w^2$  (для обычного гравитационного течения). Поэтому всякий замер  $Q$  и  $P_e - P_w$  или  $h_e^2 - h_w^2$  даст коэффициент пропорциональности, включающий геометрические и физические параметры, который в состоянии продиктовать текущие дебиты для остальных значений  $P_e - P_w$  или  $h_e^2 - h_w^2$ .

Что касается значения пластового давления  $P_e$  или высоты столба жидкости  $h_e$ , следует заметить, что производство двух наблюдений дебита  $Q$  для двух значений  $P_w$  или  $h_w$  позволяет исключить  $P_e$  или  $h_e$  из формул. Заменяя разность двух значений  $Q$  через  $\Delta Q$  и разность значений  $P_w$  или  $h_w^2$  через  $\Delta P_w$  и  $\Delta h_w^2$ , можно убедиться из уравнений (1), (2), (3) и (4), что  $k$  на основании такой пары наблюдений определится из следующего выражения:

$$k = \frac{\mu \Delta Q \ln r_e / r_w}{2\pi h \Delta P_w} \quad (5)$$

для жидкостей при радиальном потоке,

$$k = \frac{\mu \Delta Q \ln r_e / r_w}{2\pi h \Delta P_w} \quad (6)$$

для газов при радиальном потоке и

$$k = \frac{\mu \Delta Q \ln r_e / r_w}{\pi g \Delta h_w^2} \quad (7)$$

для простого и сложного гравитационного течения.

Разумеется, если известны  $P_e$  или  $h_e$ , то значения  $k$ , подсчитанные для каждого эксперимента из уравнений (1—4), должны быть согласными между собой. Несоответствие значений будет указывать на ошибку в измерении или на иной — неструйный режим течения. По этой же самой причине при определении проницаемости общим правилом должно быть измерение значений  $Q$  по крайней мере для двух значений  $P_w$  или  $h_w$ .

Следующим моментом, который необходимо отметить в связи с применением вышеуказанных формул при определении  $k$  в полевых экспериментах, будет то, что формулы, выведенные для строго радиального течения, могут безопасно применяться, даже когда течение не является больше строго радиальным. Так, для случая, представленного уравнениями (1) и (2), можно совершенно строго доказать (гл. IV, п. 5), что если даже давления по всей поверхности кругового контура радиусом  $r_e$  далеки от постоянства, полученные уравнения остаются справедливыми. Это возможно при условии, что для пластового давления  $P_e$  будет принято его среднее значение, которое фактически может иметь место по всей поверхности контура. Соответственно, если скважина не находится в центре кругового контура, выражения для радиального течения все же остаются справедливыми, хотя бы местоположение скважины находилось на очень небольшом расстоянии от контура (гл. IV, п. 6).

Фактически можно сохранить вышеуказанные уравнения для  $k$ , даже если граница дренирования не является больше окружностью, при условии замены  $r_e$  соответственно обоснованным средним расстоянием от скважины до действительной границы (гл. IV, п. 16). Эти положения могут быть строго доказаны только для систем с негравитационным течением. Вместе с тем ясно, что так как они вытекают в основном из геометрии течения, то эти положения, без сомнения, будут относительно справедливы также и для гравитационных течений. Фактически можно показать на основе приближенной теории гравитационного течения в скважину, разработанной в главе VI, п. 20, что указанные выше обобщения уравнений (1) и (2) выдерживаются при тех же самых условиях также и для случая гравитационного течения, для которого даны уравнения (3) и (4). Наконец, следует помнить, что в основе вышеприведенного рассмотрения лежит подразумевающееся допущение однородности песчаника<sup>1</sup>. Только в том случае, когда это допущение совершенно справедливо, можно ожидать, что значение  $k$ , определенное полевым экспериментом в данной скважине, будет согласно с величиной, полученной лабораторным измерением керна, который мог быть взят из той же самой скважины. Если песчаник слоист или же имеет участки или прослойки с меняющейся проницаемостью, такого согласия ожидать нельзя. В этих случаях полевой замер дает „эффективную“ проницаемость, которая, не характеризуя ни одного элемента среды, тем не менее является параметром большей практической значимости, чем тщательно проведенное определение значения проницаемости, полученное в лаборатории для маленького образца. Эта причина и обуславливает ту разницу, благодаря которой полевые измерения будут всегда давать более точные средства предугадывания фактических текущих дебитов скважины при различных противодавлениях, чем по существу своему более дорогие лабораторные определения проницаемости единичных образцов песчаника, даже если можно будет располагать последними в достаточном количестве.

**12. Типовые значения проницаемости.** Измерения проницаемости производились многими экспериментаторами в течение последних 40 лет. Однако наиболее систематизированный опубликованный перечень результатов измерений проницаемости нефтяных песков, выполненных со всеми предосторожностями, необходимыми, чтобы обеспечить тщательность полученных результатов, принадлежит Фенчеру, Льюис и Бэрнесу<sup>2</sup>.

Более ранние определения, произведенные Бэрб и Брэнсон, были все проделаны с помощью воды. Многие из определений Фенчера, Льюис и Бэрнеса, были выполнены при помощи экспериментов с движением воздуха уже после того, как было признано равенство между

<sup>1</sup> На протяжении всей работы сделано дополнительное допущение об однородности жидкостей. Поэтому необходимо быть осторожным и не применять формул, выведенных в настоящей работе, к таким случаям, где, например, в песчанике освобождаются значительные количества газа, по мере того как жидкость (нефть) уходит в скважину. Величины „эффективной“ проницаемости, полученные на основании применения этих формул, к таким случаям не будут постоянными течения, но будут изменяться в целом в зависимости от скорости течения и количества газа, освободившегося в пласте песчаника.

<sup>2</sup> Fancher, Lewis and Barnes, цитированная работа.

измерениями проницаемости с помощью жидкостей и газов. Большое преобладание данных о песчаниках из Пенсильвании обязано не только близости этих исследователей к нефтяным месторождениям Пенсильвании, но и тому обстоятельству, что в северо-западной части указанных месторождений стало текущей практикой отбирать керны и определять проницаемость продуктивных песчаников во всех новых скважинах, которые бурились для целей заводнения нефтяных горизонтов. Однако в этой же таблице приводится достаточное количество определений и по другим месторождениям, чтобы дать, по крайней мере, общее представление о порядке величины проницаемости, которую можно встретить в различных пластах. Последовательные замеры образцов из одного и того же месторождения показывают большое разнообразие проницаемости, которое можно встретить в том же самом продуктивном горизонте. Фенчер, Льюис и Бэрнес приводят некоторые весьма интересные примеры изменчивости проницаемости образцов песчаника из одной и той же скважины. Их данные особенно резко показывают наличие прослойков непроницаемых глинистых сланцев, полученных в результате исследования образцов при непрерывном керновом отборе.

Из рассмотрения данных по скважине следует заметить, что хотя пористости в целом остаются почти неизменными, в отношении проницаемости Брадфордский песчаник представлен двумя отличными разностями. В то время как второй образец показывает в целом удовлетворительную степень однообразия проницаемости, в первом керне имеются две вполне определенные „плотные“ зоны. Третий образец является собой пример замечательного постоянства пористости с весьма умеренными колебаниями проницаемости. Четвертый керн как будто является характерным для брадфордского песчаника. Он показывает неустойчивость проницаемости и отчетливую слоистость песчаника<sup>1</sup>.

Эти же авторы показывают достаточно высокую проницаемость типичного песчаника Венанго. Значительную изменчивость ее можно наблюдать в некоторых кернах, взятых с непрерывным отбором, например, в образце песчаника Клерендон. В этом случае только три образца песчаника на мощности 11,1 м имеют проницаемость, которую можно замерить в условиях эксперимента, и эти значения показывают колебания в 54 раза,

Полученные результаты дают довольно интересный материал, который можно получить систематическим измерением проницаемости. В то же самое время они показывают, что допущение однородности пористой среды, которая слагает подземные резервуары, несущие жидкость, является совершенно ложным. Несмотря на это обстоятельство, можно найти полное оправдание принятой однородности, так как иначе большинство проблем практической значимости без этого допущения не будет доступно для аналитической обработки, а отсюда их нельзя будет

<sup>1</sup> Интересно заметить, что отчетливая слоистость брадфордского песчаника подтверждается также и несоответствием между временем, потребным для прохождения воды от инъекционной скважины к эксплуатационной в типовых установках по заводнению, рассчитанных теоретически и наблюденных в промышленной практике (гл. IX, п. 33), также см. M. Muskat and R. D. Wyckoff A. I. M. E. Techn. Publ., 507, 1933.

подвергнуть количественному рассмотрению. Тем не менее имеются все физические основания полагать, что в большинстве случаев отсутствие однородности, показанное в табл. 8, не влияет серьезно на справедливость выводов, полученных на базе этого допущения.

Когда скважины полностью вскрывают песчаный пласт, течение двухмерное и его основные свойства, включая сюда распределение давления и линий тока, не зависят от численного значения проницаемости. Действительно, одно и то же явление будет иметь место в двух параллельных или примыкающих слоях различной проницаемости при условии, что граничные условия остаются теми же. Единственная физическая разница между ними будет заключаться в том, что численные величины скоростей жидкости для соответственных точек этих двух слоев будет всегда находиться в зависимости от их проницаемости. Все эти теоретические выводы, основанные на допущении, что слойстый песчаник эквивалентен единичной однородной пористой среде, будут совершенно справедливы, при одном лишь условии, что проницаемость, входящая в выражения для скоростей суммарного течения, берется как средневзвешенная величина из всех определенных значений для различных слоев согласно их мощностей. Суммарное течение будет иметь правильную величину с этой поправкой, а скорость в любой точке будет средневзвешенной из скоростей в различных слоях. Отсюда, поскольку изменчивость проницаемости в горизонтальном направлении не имеет значительной величины, можно при теоретическом исследовании таких проблем, которые в основном двухмерны и где проекция течения представлена горизонтальной плоскостью, совершенно не принимать во внимание изменчивости ее в вертикальном направлении. По отношению к изменчивости проницаемости в горизонтальном направлении следует заметить, что за исключением того случая, когда эти изменения имеют место в непосредственной близости к забою скважины или сходящейся поверхности стока, только такие изменения представляют собой практическую значимость, которые имеют значительное распространение по площади. Влияние рассеянных локализированных пятен высокой или низкой проницаемости будет усреднено в течении, имеющем большие размеры, и его совершенно не следует принимать в расчет при аналитических выкладках.

В тех проблемах, что рассматривают частичное вскрытие песчаника скважинами или же просачивание под плотинами, где значительная часть или же все течение движется в направлении крупных изменений проницаемости, последние, разумеется, могут серьезно влиять на основные свойства потока. В этом случае, если только принять в расчет изменения проницаемости, могут быть получены точные выводы. Тем не менее ввиду огромных аналитических трудностей, связанных с этим расчетом, наличие изменений проницаемости, за исключением известных простых случаев, заставляет нас вернуться к допущению однородности, так как только последним путем мы можем получить определенные результаты полукачественного характера. В большинстве проблем качественная сторона явления неоднородности может быть достаточно легко установлена физическими доказательствами, и выводы, основывающиеся на допущении постоянства проницаемости, дадут ограничивающие случаи по отношению к тем, где проницаемость является величиной переменной.

С той же самой точки зрения можно рассматривать и значимость анизотропности песчаника, как это показывают относительные значения проницаемости, замеренные параллельно и перпендикулярно плоскостям напластования. Из 65 пар данных, имеющихся в таблице Фэнчера, Льюиса и Бэрнеса более чем две трети (46) дают значение проницаемости параллельно плоскостям напластования выше по сравнению с теми, которые определены в плоскости, нормальной к последним. Отношение между этими двумя значениями проницаемости колеблется от 1 до 42. С другой стороны, среди тех случаев, где проницаемость нормально к плоскости напластования превосходит проницаемость в плоскости, параллельной последней, максимальное отношение между этими двумя величинами составляет 7,3.

Здесь опять следует заметить, что допущение изотропности, лежащей в основе анализа практически всех проблем, рассматриваемых в последующих главах, будет вполне достаточным, чтобы дать правильное представление о важнейших свойствах течения, в большинстве случаев представляющих промышленный интерес. В действительности, это будет совершенно справедливо, если течение двухмерно и проекции его параллельны плоскостям напластования. При этих условиях просто отсутствует слагаемая скорости, нормальная к плоскости напластования, так что проницаемость в этом направлении не входит в задачу<sup>1</sup>. С другой стороны, когда эта задача включает составляющие течения более чем в одном направлении с различными величинами проницаемости, анизотропность может быть принята в расчет, применяя преобразование координат. Последнее описано в гл. IV, п. 15 и освещается исследованием в гл. V, п. 5 проблемы о скважинах, частично вскрывающих анизотропный продуктивный песчаник. Как это будет показано ниже, аналитическое решение задачи в системе преобразованных координат эквивалентно такому, что соответствует течению в изотропной среде с соответственно измененными границами. Поэтому с аналитической точки зрения при рассмотрении таких анизотропных систем приходится возвращаться к решению изотропных систем с несколько видоизмененной геометрией, так что полное рассмотрение последних включает в то же самое время неявное решение аналогичных проблем, где можно по желанию принять в расчет анизотропию. Отсюда в большинстве случаев совершенно достаточно рассмотреть сначала проблему, как заданную в изотропной среде, и только в самом конце, если подвергается изучению влияние анизотропии, ввести соответствующее преобразование координат. Типичные данные о проницаемости несцементированных пористых разностей приведены в табл. 7. В таблицу включены данные о пористости, чтобы показать более ясно характеристику природы пористой среды в дополнение к той, что дается ситовым анализом, так как на основании вывода, сделанного в гл. II, п. 6, проницаемость несцементированной пористой среды данного агрегата песчаных зерен может изменяться в широких пределах, завися от пористости, полученной при набивке. Несцементированная разность не включает в себя

<sup>1</sup> См. гл. V, п. 5, особенно фиг. 87, показывающую, что для скважины, полностью вскрывшей песчаник, текущие дебиты не зависят от проницаемости, нормальной к плоскости напластования.

лишнюю переменную, определяемую цементацией ее, и чья изменчивость может явиться причиной больших отклонений проницаемости различных песчаников приблизительно с одним и тем же средним размером зерна и пористости. В таблице перечислено только немногое из проделанного большого количества измерений. Тем не менее они дают достаточно материала, чтобы показать, по крайней мере, порядок величины чисел, которые можно получить из определений проницаемости несцементированной пористой среды.

Таблица 7  
Проницаемости и пористости несцементированных песков

Зернистость песка	Пористость, %	Проницаемость, дарси
30—40	40,0	344,81
40—50	40,0	65,89
50—60	40,0	43,46
60—70	40,0	30,96
70—80	40,0	26,36
80—100	40,0	10,49
100—120	40,0	9,93
120—140	40,0	9,26
Тонкие неоднородные пески	30—35	1—10
Илы	36—41	5—180*
Тонкие пылевидные пески	37—70	0,01—0,1**

**13. Измерения пористости.** Как это уже было показано в предыдущих разделах, производительность однородной жидкости, движущейся в пористой среде, полностью определяется проницаемостью последней и только косвенно зависит от пористости, которая в основном является статическим свойством. Тем не менее пористость имеет огромнейшую значимость при промышленной оценке пористых разностей, заполненных нефтью или газом, так как она определяет суммарное содержание жидкости в таких резервуарах. Поэтому мы вкратце опишем некоторые типовые методы измерения пористости пористой среды, коснувшись только основных принципов, заключенных в этих методах<sup>1</sup>.

Следует сделать различие между абсолютной пористостью среды и ее эффективной пористостью. Первая дает суммарный объем всех пустот в пористой среде в процентах по отношению к ее валовому объему и в случае сцементированной разности будет включать в себя объем всего порового пространства вне зависимости от того, соединяются ли между собой поры для движения жидкостей или нет. Второе понятие относится только к той части порового пространства, которое предоставлено потоку жидкости. Совершенно ясно, что только соединяющиеся поры могут влиять на проницаемость среды как косвенным путем, так и непосред-

\* Vaidhianathan V. L. and Luthra H. R., Punjab Irrigation Research Institute, Research Pub., 2, № 2, 1934.

\*\* Traxler R. N. and Baum L. A. H., Physics, 7, 9, 1936.

<sup>1</sup> Более подробный обзор всех этих методов можно найти в работе Фенчера, Льюиса и Бэрнеса, а также см. работу О. Е. Meinzer U. S. Geol. Surv. Watersupply Paper, 489, 1923.

ственno воздействуя на нее. Однако для полноты опишем оба метода определения как для полной, так и эффективной пористости пористой среды. Общепризнанный и наиболее точный метод определения суммарной пористости образца горной породы принадлежит Мельчеру и Нэттингу<sup>1</sup>. Этот метод является полностью гравиметрическим и покоятся на следующем соотношении:

$$f = 100 \left( 1 - \frac{V_g}{V_b} \right) = 100 \left( 1 - \frac{\gamma_b}{\gamma_g} \right), \quad (1)$$

где  $f$  — пористость,  $V_g$  и  $\gamma_g$  — объем и плотность зерен песка в образце и  $V_b$ ,  $\gamma_b$  — валовой объем и видимая (валовая) плотность образца. После тщательного экстрагирования какой бы то ни было жидкости из образца и высушивания его так, как это было описано при рассмотрении измерений проницаемости, плотность  $\gamma_b$  определяют следующими этапами: 1) производят взвешивание образца; 2) покрывают образец тонким слоем парафина или коллодия определенной плотности и снова подвергают его взвешиванию; прирост в весе, деленный на плотность покрытия, дает объем последнего<sup>2</sup>; 3) погружают образец в заполненный водой пикнометр, предварительно взвешенный пустым и с заполнением воды, и подвергают его опять взвешиванию. Потеря веса, найденного этапом (3), деленная на плотность воды, даст объем покрытого защитной пленкой образца, а вычитая объем покрытия и деля на вес (1), получают искомую величину  $\gamma_b$ . Затем определяют плотность зерен песка, разделяя образец в ступке и измеряя объем взвешенного количества зерен<sup>3</sup>, замещением жидкости (тетрахлорэтан или тетралин) в пикнометре методом, аналогичным описанному при нахождении  $\gamma_b$ . Затем по уравнению (1) находят значение  $f$ .

Значительно более простая процедура представлена методом Русселя<sup>4</sup>, который базируется на 1-й части уравнения (1) и требует только объемных измерений. Валовой объем образца определяется с помощью

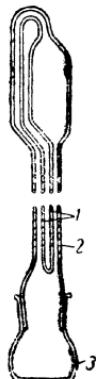
<sup>1</sup> Melcher A. F., A. I. M. E., 65, 469, 1921; Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 8, 716, 1924; там же, 9, 442, 1925; Nutting P. G., Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 14, 1337, 1930.

<sup>2</sup> Если в качестве иммерсионной жидкости применяется ртуть, этот этап может быть опущен, за исключением образцов с крупными порами. В последнем случае было установлено, что наиболее удобным прибором для взвешивания являются весы Жоли, измененные Эти (Athy, Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 14, 1337, 1930).

<sup>3</sup> Следует заметить, что при экспериментировании с нефтяными или водяными песками не следует сушить зерна песка после раздробления образца, чтобы получить плотность зерен. В уравнении (1)  $\gamma_g$  следует рассматривать как определяющую также содержание массы жидкости в изолированных порах образца. Если для нахождения  $\gamma_g$  взята абсолютная плотность высущенных зерен, уравнение (1) даст ошибку в величине суммарной пористости  $\Delta f = \gamma_1 \delta f / \gamma_g$ , где  $\gamma_1$  — средняя плотность жидкости в изолированных порах и  $\delta f$  — разность между суммарной и эффективной пористостью (M. Muskat, Rev. Sci. Instr., 7, 503, 1936). Так, если  $\gamma_1=1$ ,  $\delta f=1\%$ ,  $\gamma_g=2,6$ , то  $\Delta f=0,38\%$ , что полностью сводит на нет высокую тщательность, которая присуща методике определения  $\gamma_b$  и  $\gamma_g$ .

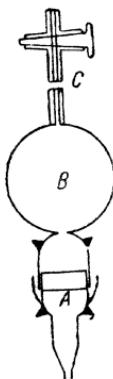
<sup>4</sup> Russell W. L., Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 10, 931, 1926; см. также H. R. Frankstone, Geaby W. B. and Smith W. O., Amer. Assoc. Petrol. Geol., 16, 915, 1932.

стеклянного волюметра (фиг. 18), который состоит в основном из двух сосудов приблизительно одинакового объема, соединенных двумя параллельными градуированными трубками. Нижний сосуд присоединяется притертой поверхностью к небольшому контейнеру для образца. Прибор поворачивается, и верхний сосуд заполняется тетрахлорэтаном до откалиброванной нулевой отметки. Образец, хорошо насыщенный тетрахлорэтаном, помещается в контейнер. Оба сосуда затем соединяются вместе и прибор возвращается в свое первоначальное положение. Замещение предварительно введенной жидкости в образец отмечается по

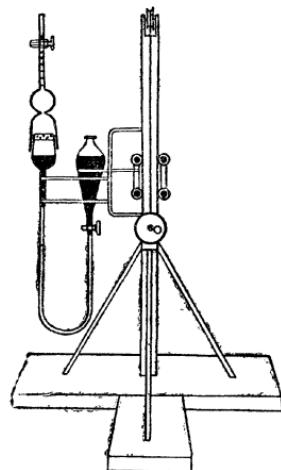


Фиг. 18. Аппарат  
Русселя для опре-  
деления пористости:

1 — градуированные  
трубочки; 2 — нуле-  
вая точка; 3 — кон-  
тейнер для образца  
породы.



Фиг. 19. Порози-  
метр Уэшберна и  
Бэнтинга.



Фиг. 20. Схематическое  
изображение подъемного  
приспособления для сосуда,  
выравнивающего уро-  
вень в порозиметре типа  
Уэшберна — Бэнтинга.

калиброванным соединительным трубкам, давая, таким образом, непосредственный валовой объем образца. Та же самая процедура, но с соответствующими видоизменениями повторяется над раздробленными зернами песка образца, и устанавливается их объем. Пористость определяется подстановкой искомых величин в уравнение (1). Этот метод принципиально дает непосредственные и прямые показания. Однако он требует исключительно высокую технику эксперимента, чтобы избежать значительных ошибок, могущих возникнуть при переносе образца после насыщения в волюметр, а также при разрушении образца на составляющие его зерна.

Кроме того, при опыте с уплотненными песчаниками неполное насыщение образца поведет к дополнительным ошибкам. Это может произойти благодаря последующему проникновению жидкости из волюметра в образец, после того как последний ввели в контейнер и подвергли иммерсии.

Один из первых методов, разработанных для измерения эффективной пористости и главный принцип которого является основой большинства конструкций „газовых порозиметров“, принадлежит Уэшберну и Бентингу<sup>1</sup>. Основной принцип его заключается в непосредственном измерении объема воздуха или газа, содержащегося в соединяющемся поровом пространстве при атмосферном давлении, после того как газ подвергнут расширению. Определение пористости выполняется на порозиметре, представленном на фиг. 19—20, где *A* — камера для образца, *B* — камера расширения, *C* — градуированный капилляр, припаянnyй к верхней части *B* и снабженный краном на конце. Сначала улавливается воздух в образце при атмосферном давлении поднятием уравнительного сосуда, пока уровень ртути в порозиметре не поднимется выше крана при его закрытом положении. Затем уравнительный сосуд опускается вниз, чтобы уменьшить давление в порозиметре и позволить воздуху, заключенному в образце, расшириться и проникнуть в градуированную трубку. Объем этого удалившегося воздуха при атмосферном давлении замеряется вторичным поднятием уравнительного сосуда, пока ртуть в нем и в градуированной трубке не установится на одной высоте.

После того как воздух, собравшийся в градуированной трубке, будет удален открытием крана и будет произведено повторное наполнение трубы ртутью до уровня последнего, объем воздуха, остающегося в образце при уменьшенном давлении, соответствующем той величине, при которой был удален первый замеренный объем, определяется повторением первоначальной процедуры. Этот процесс повторяется до тех пор, пока остающееся количество воздуха в образце не становится настолько малым по объему, что его можно не принимать во внимание. Затем валовой объем образца замеряется методом замещения или гравиметрическим. Отношение этих величин дает значение пористости<sup>2</sup>. Отличный метод предложен Бэрнесом<sup>3</sup>. Основой этого метода, который также дает значение эффективной пористости, является определение объема сообщающихся пор взвешиванием высушенного образца, а затем насыщенного тетрахлорэтаном. Разность этих двух весов, деленная на плотность жидкости, даст искомый объем. Полное насыщение образца достигается отсасыванием воздуха, заполнившего его соединяющиеся поры, из высушенного предварительно керна в процессе иммерсии в судне с тетрахлорэтаном.

Когда сосуд открыт в атмосферу, жидкость проникает и насыщает эвакуированные поры. Валовый объем образца определяется затем по

<sup>1</sup> Washburn E. W. and Bunting E. N., *journ. Amer Ceramic Soc.*, 5, 48, 112, 1922.

<sup>2</sup> Процедура, описанная здесь, в действительности представляет собой видоизменение первоначального метода Уэшберн-Бентинга, разработанное Фенчером, Льюисом и Бэрнесом. Дальнейшие вариации первоначального принципа предусматривают расширение газа в образце и камере образца, заполненной под высоким давлением, в другую камеру с установленным объемом (C. J. Cobley and Stevens A. B., A. I. M. E., *Petrol. Dev. Technol.*, 103, 261, 1933), или же в бюретку с атмосферным давлением (R. B. Vagles, p. 50, *Prod. Bull.*, 217, *Amer. Petrol. Inst.*, 1936). Объем зерен образца получается непосредственным приложением закона Бойля.

<sup>3</sup> Vagles K. B., *Bull. Mineral Ind. Exp. Sta.*, Penn State College, 10, 1931

Таблица 8

## Пористость сцепментированных песчаников и горных пород

Песчаник	Месторождение	Суммарная по-ристость, %		Эффективная пористость, %	
		Мель-чер-Нэт-тинг	Руссель	Уэшберн-Бентинг	Бер эс
Стоктон	Стоктон, Нью-Йорк .		1,3		1,2
»	» . . . . .		2,9		2,7
»	» . . . . .		7,9		7,6
»	Лэмбервилл . . . . .		3,7		3,5
»	» . . . . .		4,3		4,3
Чикис	Нарвон стейшен . . . . .		3,8		3,6
»	» . . . . .		4,3		4,1
»	Валлей Фордж . . . . .		4,9		4,8
»	» . . . . .		6,0		5,1
»	» . . . . .		7,8		7,2
3-й Венанго	Оайл Сити . . . . .		7,5		4,8
»	» . . . . .		8,5	8,3	
»	» . . . . .	11,1	9,8		
»	» . . . . .	11,4	11,3		
»	» . . . . .		12,7	12,6	12,4
»	» . . . . .			13,3	12,9
»	» . . . . .	13,2	13,0		
»	» . . . . .		13,3		13,3
»	» . . . . .			14,6	14,3
»	» . . . . .	14,3	14,5		
»	» . . . . .		15,3	14,9	14,5
»	» . . . . .		15,5	14,9	14,4
»	» . . . . .		16,0	15,7	
»	» . . . . .	16,4	16,3		
»	Плезентвил . . . . .		17,1	14,7	
»	» . . . . .		17,7		17,4
»	» . . . . .		17,8	15,3	
»	» . . . . .	17,7	17,8		
»	» . . . . .			20,9	20,8
»	» . . . . .			21,6	21,3
3-й Брадфорд	Брадфорд . . . . .		13,1	12,2	12,1
»	» . . . . .		13,4	13,3	13,0
»	» . . . . .	13,6	13,5	13,3	12,8
»	» . . . . .		13,6	13,4	13,1
»	» . . . . .		13,7	13,2	13,0
»	» . . . . .		15,7	15,4	14,9
»	» . . . . .		16,1	15,6	15,5
»	» . . . . .		16,2	15,2	15,0
»	» . . . . .		16,9	15,3	15,0
Кларендон	Уоррен . . . . .		10,0	9,9	9,3
»	» . . . . .		11,8	11,8	11,6
»	» . . . . .		12,1	11,8	11,4

Русселью или иному эквивалентному методу. В этом случае вопрос полноты насыщения керна, особенно для уплотненных песчаников, в течение определенного интервала времени, а также соответственная обтирка насыщенных поверхностей опять создают большую неуверенность в абсолютной точности этого способа.

В табл. 8 и 9 Фенчер, Льюис и Бэрнес<sup>1</sup> дают интересное сравнение всех четырех методов, описанных выше, а также типовые измерения пористости, произведенные этими авторами по различным методам. Можно видеть, что суммарная пористость во многих образцах превосходит эффективную пористость на 0,5—1,0%, а в одном случае даже

Таблица 9

## Сравнение методов определения пористости

Рассматриваемые параметры	Мельчер-Нэттинг	Руссель	Уэшберн-Бентинг	Бэрнес
Тип пористости	Суммарная	Суммарная	Эффективная	Эффективная
Прибор	Дорогой*	Дешевый	Дешевый	Дорогой*
Точность	До 0,005%**	До 0,025%***	До 0,075%	До 0,05%***
Время измерения	4 часа	1 час	0,75 часа	1 час
Размеры и форма	1 кусок диаметром 2,5 см и длиной 1,25 см	Один или несколько маленьких кусков, в сумме равных от 10 до 14 см <sup>3</sup> . Форма должна позволить поместить в прибор образец	Предпочтительно 1 кусок от 10 до 14 см <sup>3</sup> ; правильные контуры. Форма должна позволить поместить в прибор образец	1 кусок 10—14 см <sup>3</sup> ; правильного контура; форма должна позволить поместить в прибор испытуемый образец
Предназначение	Сцепментированный песчаник любой структуры	Сцепментированный песчаник любой структуры	Любая горная порода с малым отверстием пор	Любая горная порода с малым отверстием пор
Условия после анализа	Уменьшение размеров зерна	Уменьшение размеров зерна	Некоторые поры заполнены ртутью, последняя прилипает к поверхности зерен	Легко восстанавливается до первоначальных условий

<sup>1</sup> Цитированная работа, Bull., 12, 1933.

\* Основная статья расхода — аналитические весы. Если последние недоступны, то можно использовать специальную для пользования этим прибором, последний дорог. Если же весы уже имеются, то стоимость его такая же, как и остальных приборов.

\*\* С прецизионным аппаратом.

\*\*\* С весьма точной техникой производства опытов.

на 3,8%<sup>1,2</sup>. Такая разница может дать ясное представление о больших количествах возможных к извлечению подземных жидкостей при подсчете запасов в пластовых условиях. Можно вспомнить из гл. I, п. 6, что для несцементированных песков граница возможной пористости однородных шаров представляется соответственно 26,0—47,6%. Верхний предел обычно остается справедливым для зерен неправильной формы и неоднородного распределения размеров, за исключением тех случаев, когда имеет место экстенсивное „сводообразование“ зерен внутри пористой среды<sup>3</sup>. Нижний предел — 26% может быть значительно снижен путем смешивания песков с различными размерами зерен, и пористость может даже практически совершенно исчезнуть при добавлении пыли или илов.

---

<sup>1</sup> Имеются сообщения, что в таких песках, как, например, взятые из месторождения Кеттлмен-Хилс, Калифорния, эта разница настолько высока, что суммарная пористость в три раза выше эффективной пористости (16,2—5,2) (см. уже цитированную работу C. J. Coberly and Stevens A. B.).

<sup>2</sup> Большое количество аналогичных данных, относящихся к скважинам, из которых были взяты образцы, можно найти в работе A. F. Melcher, Amer. Assoc. Petrol. Geolog., 8, 716, 1924.

<sup>3</sup> Эти исключения можно обычно встретить в порошках, где „сводообразование“ бывает настолько экстенсивным, что пористость возрастает до таких высоких значений, как 70% (R. N. Traxler and Baum L., A. H., Physics, 7, 9, 1936).

---

### *Глава третья*

## **ОБЩИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

**1. Основные гидродинамические соотношения.** Раньше чем приступить к анализу и количественному рассмотрению специальных задач по движению жидкости в пористой среде, было бы неплохо сначала дать обзор и подвести итог некоторым, хорошо известным принципам гидродинамики, которые можно приложить к любому течению. После этого мы сформулируем те соотношения, которые характеризуют течение жидкости в пористой среде, и на их основе разовьем решения, которые соответствуют специфическим проблемам, представляющим промышленный интерес. При производстве анализа основных принципов гидродинамики легко установить, что они представляют собой вновь сформулированные соответственные основы механики в такой редакции, чтобы их можно было приложить к течению жидкостей. Так, раньше всего следует заметить, что хотя жидкости и не представляют собой устойчивых систем, но они подчиняются закону сохранения материи. Этот закон гласит, что масса жидкости в замкнутой системе не может ни создаться вновь, ни исчезнуть.

Для целей анализа представляется удобным сформулировать этот закон по отношению к движению жидкости следующим образом: избыток массы потока в чистом виде в единицу времени для бесконечно малого элемента объема жидкости точно равен изменению плотности жидкости в этом элементе в единицу времени, помноженному на объем элемента. Если подвергнуть это положение дальнейшему анализу, то оно получит вид, эквивалентный уравнению:

$$\operatorname{div}(\gamma \bar{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\gamma v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma v_z) = -\frac{f \partial \gamma}{\partial t}, \quad (1)^1$$

где  $\bar{v}$  — вектор скорости жидкости в точке  $(x, y, z)$ , обладающий компонентами  $v_x, v_y, v_z$ ;  $\gamma$  — плотность жидкости в точке  $(x, y, z)$ ;  $f$  — пористость среды.

---

<sup>1</sup> Обозначение  $\operatorname{div}$  или  $\nabla$  взято из обозначений векторного анализа и определяется средним выражением в уравнении (1), где  $\gamma v$  рассматривается как общая функция вектора (A. P. Wills, Vector Analysis, 2d edit., 1923).

Уравнение (1) можно вывести следующим путем. Возьмем прямоугольный параллелепипед с ребрами  $dx, dy, dz$  и центром в точке  $(x, y, z)$ ; масса потока через боковую сторону  $dydz$ , перпендикулярную к оси  $x$  на расстоянии  $x - \frac{dx}{2}$  от плоскости  $yz$  будет, очевидно (фиг. 21):

$$\left[ \gamma v_x - \frac{\partial}{\partial x} (\gamma v_x) \frac{dx}{2} \right] dydz,$$

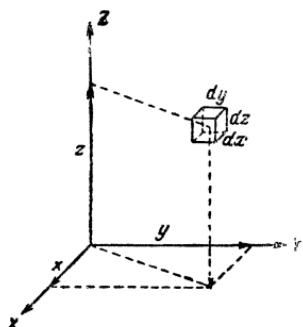
где  $\gamma v_x$  относится к точке  $(x, y, z)$ .

Так как масса вытекает с параллельной стороны, то она выразится через

$$\left[ \gamma v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\gamma v_x) \frac{dx}{2} \right] dydz,$$

и рабочий поток, прошедший через обе стороны параллелепипеда, будет разностью расхода на этих двух сторонах, или

$$\frac{\partial}{\partial x} (\gamma v_x) dx dy dz.$$



Фиг. 21.

Рассматривая аналогично этому остальные стороны параллелепипеда и складывая полученные величины вместе, находим, что величина результирующего потока в единицу времени для элемента объема  $dxdydz$  будет:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\gamma v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma v_z) \right] dxdydz.$$

Масса жидкости в элементе объема будет, очевидно,  $\int \gamma dxdydz$ , где  $\gamma$  — мгновенное значение плотности в точке  $(x, y, z)$ . Отсюда убыль массы в элементе за единицу времени может быть выражена:

$$-\frac{d\gamma}{dt} dxdydz.$$

Приравнивая это выражение согласно закону сохранения материи, величине, определяющей убыль массы из элемента объема, и сокращая дифференциал объема  $dxdydz$ , получаем непосредственно уравнение (1).

Уравнение (1), так называемое „уравнение неразрывности“ или его эквивалент встречаются почти во всех отраслях физики. В рассматриваемом случае оно определяет собой закон сохранения материи. В теории электричества несколько измененные формы его выражают закон сохранения заряда. В теории теплопередачи аналогичное уравнение неразрывности выражает закон сохранения тепловой энергии. Фактически каждый физический закон сохранения может быть выражен в форме, эквивалентной уравнению (1). Если состояние потока не зависит от времени, т. е. он является установившимся, правая сторона

уравнения (1) становится равной нулю, и уравнение неразрывности принимает вид:

$$\operatorname{div}(\gamma \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\gamma v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma v_z) = 0. \quad (2)$$

Это уравнение может быть в известных случаях еще более упрощено. Мы уже подчеркивали, что при рассмотрении нами вопросов гидродинамики мы имеем дело с материальной жидкостью. Отсюда становится ясной необходимость установить природу рассматриваемой жидкости и термодинамический характер ее движения.

Иными словами, следует знать „уравнение состояния“, определяющее собою жидкость. В общей форме это уравнение представляет количественную зависимость между плотностью  $\gamma$ , давлением  $p$  и абсолютной температурой  $T$ , что может быть выражено следующим равенством:

$$\Phi(p, \gamma, T) = 0, \quad (3)$$

где  $p$ ,  $\gamma$  и  $T$  относятся к одному и тому же элементу жидкости.

В качестве примера уравнения (3) можно отметить, что если принять жидкость физически совершенно несжимаемой, получим уравнение состояния следующего вида:

$$\gamma = \text{const}. \quad (4)$$

Для идеального газа уравнение состояния будет:

$$p - \frac{\gamma RT}{w} = 0, \quad (5)$$

где  $w$  — молекулярный вес газа;

$R$  — газовая постоянная, отнесенная к 1 молю.

Уравнение (3) представляет собой определение природы исследуемой жидкости в аналитической форме, и поэтому оно должно являться отправным пунктом при рассмотрении каждой гидродинамической задачи. Установление термодинамического режима течения потребует, разумеется, иного уравнения вида (3) и потому позволит исключить одно из переменных  $p$ ,  $\gamma$  и  $T$ , чтобы дать полное описание термодинамической природы жидкости и течения с помощью только двух переменных, например,  $\gamma = \gamma(p)$ .

Так, если жидкость представлена идеальным газом и уравнением состояния будет (5), т. е. течение будет изотермическим, характеристика этого типа течения в аналитической форме выразится:

$$T = \text{const}, \quad (6)$$

что является упрощением уравнения (5) до вида:

$$\gamma = cp; \quad c = \frac{w}{RT}. \quad (7)$$

С другой стороны, если течение адиабатическое, мы вместо уравнения (6) будем иметь:

$$T = \text{const} \gamma^{m-1}, \quad (8)$$

где  $m$  — отношение удельной теплоты при постоянном давлении к удельной теплоте при постоянном объеме. В этом случае уравнение (5) приведется к виду:

$$p = \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^m, \quad (9)$$

где  $\gamma_0$  — плотность для  $p = 1$ .

Уместность приложения уравнения состояния к решению гидродинамических проблем может быть показана на примере непосредственного применения уравнения (4).

Так, для случая несжимаемых жидкостей уравнение (4) должно быть подставлено в уравнение неразрывности (2), что приведет его к виду:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

которое включает теперь только компоненты скорости.

Уравнение (10) можно рассматривать как условие, определяющее распределение скорости в любой несжимаемой жидкости. Однако аналитически этого недостаточно, чтобы определить индивидуальные компоненты скорости, а физически это уравнение не дает различия между одной несжимаемой жидкостью и другой. Оно также не делает различия между системами, подверженными воздействию внешних массовых сил, как, например, силе тяжести, и системами, где движение осуществляется под действием перепадов давления, а также между жидкостями, движущимися через пористую среду, и жидкостями, протекающими через нестесенные сосуды.

Тогда, очевидно, становится необходимым дать характеристику интересующей нас жидкости с динамической и термодинамической стороны и установить вполне определенно, как она реагирует на градиенты давления и внешние усилия. Следует также сформулировать гидродинамический эквивалент закона Ньютона: сила, действующая на любое тело, равняется произведению массы этого тела на его ускорение. Более детально эта формулировка будет зависеть от природы жидкости и условий, при которых она движется. Хотя мы, в конечном итоге, заинтересованы только в движении жидкости в пористой среде, будет полезно рассмотреть вначале динамическую характеристику жидкости, как онадается в классической гидродинамике струйного потока.

**2. Классическая гидродинамика.** Уже было отмечено, для того, чтобы иметь законченную систему гидродинамики, в дополнение к уравнению неразрывности и уравнению состояния, требуется получить динамическое определение природы течения. Рассматривая элемент единицы объема жидкости, легко установить, что в целом он подвержен трем видам усилий: 1) компоненты градиента давления  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z}$ ; 2) компоненты внешних „массовых сил“ (как, например, сила тяжести)  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ , действующих на каждый элемент объема жидкости, и 3) силы, тормозящие движение жидкости и обязанные внутренним силам сопротивления или трению, испытываемому жидкостью. В работах

по гидродинамике<sup>1</sup> показано, что последние силы для случая струйного течения даются декартовыми компонентами:

$$\mu V^2 v_x + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \mu V^2 v_y + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \mu V^2 v_z + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

где  $\mu$  — вязкость жидкости, определяемая как напряжение при сдвиге в жидкости, созданное единичным градиентом скорости, перпендикулярным к плоскости сдвига, и  $\nabla^2$  — оператор,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где  $\theta$  — функция, вытекающая из уравнения неразрывности, дается выражением

$$\theta = \operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

и физически определяет градиент объемного расширения жидкости.

Как уже было отмечено ранее, динамическое уравнение движения должно быть получено приравниванием суммы этих сил произведению массы элемента объема на ускорение, вызванное приложением сил. Так как в целом скорость жидкости будет изменяться от точки к точке, следует заметить при вычислении величины ускорения, что скорость элемента жидкости будет изменяться в течение какого-то интервала времени не только от своего первоначального положения, но будет испытывать дополнительное изменение вследствие того, что за истекший интервал времени этот элемент переместился в другую область жидкости. Поэтому ускорение должно быть выражено производной от скорости по суммарному времени, т. е. через оператор

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Объединяя эти выводы, получаем в конечном итоге динамические уравнения движения, первоначально выведенные Навье и Стоксом<sup>2</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \gamma \frac{Dv_x}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \mu V^2 v_x + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \gamma \frac{Dv_y}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + F_y + \mu V^2 v_y + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \gamma \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z + \mu V^2 v_z + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При физическом рассмотрении вопроса видно, что, полная система гидродинамических уравнений должна содержать уравнение неразрыв-

<sup>1</sup> См., например, H. Lamb, Hydrodynamics, 6 th ed., p. 577, 1932, Есть русский перевод: Лэмб, Гидродинамика, 1947 г.

<sup>2</sup> Navier C. L. M. H., Ann. chim. phys., 19, 234, 1821; Stokes G. G. Trans. Cambridge Phil. Soc., 8, 287, 1845.

ности, уравнение состояния и динамическое уравнение движения жидкости. Не входя в теоретический разбор достаточности этих уравнений, можно заметить, что по крайней мере с элементарной точки зрения вышеприведенная система уравнений полная, так как мы имеем пять независимых уравнений [уравнения (1), (3), гл. III, п. 1 и (1)] для пяти основных неизвестных  $\gamma$ ,  $p$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ <sup>1</sup>.

В действительности эти пять уравнений в принципе достаточны, чтобы детально описать движение вязкой жидкости, движущейся внутри или через сосуд любой формы. Строго говоря, течение вязкой жидкости в пористой среде является частным случаем общей проблемы струйного движения жидкостей между непроницаемыми стенками. Поскольку поры среды имеют фиксированные размеры и их граничные поверхности имеют определенные геометрические формы, течение через эти поры в принципе подчиняется классическим уравнениям гидродинамики [уравнения (1) и (3), гл. III, п. 1].

Однако даже беглый обзор исследований в области гидродинамики показывает, что, за исключением определенных случаев с относительно простой геометрией, математические трудности при решении этих классических уравнений почти непреодолимы. Решение с помощью этих уравнений проблем движения жидкости через каналы неправильной и извилистой формы, как, например, в песчанике, остается под большим вопросом, и следует обратиться к иным методам работы в этой области.

**3. Обобщенная форма закона Дарси.** Из рассмотрения гл. III, п. 1 становится ясным, что поскольку гидродинамика течения в пористой среде может быть сформулирована отлично от классической теории струйного потока, это различие должно заключаться в основном в выражении динамических уравнений, которые классическая теория дает в форме уравнения (1), гл. III, п. 2. Разумеется, закон сохранения материи и термодинамические определения жидкости должны быть сохранены в любой гидродинамической системе. Однако, совершенно резонно, что динамические связи жидкости, движущейся по узким каналам, с макроскопической точки зрения могут быть представлены в совершенно отличной форме от той, что получается при микроскопическом анализе, и представлены уравнением (1), гл. III, п. 2.

Это и есть то отличие, которое было установлено эмпирическим путем ранними экспериментами Дарси над жидкостями и более поздними опытами над газами (см. гл. II, п. 2) и было сформулировано как закон Дарси. Последний гласит, что макроскопическая скорость жидкости, движущейся в пористой среде, прямо пропорциональна градиенту давления, воздействующего на жидкость. Описывая скорость макроскопически, мы полагаем, что элементы объема, к которым относятся скорость и давление, содержат предположительно большое количество пор. При этом динамические переменные фактически усреднены в большом количестве пор среды, хотя в отдельности они могут показывать большую изменчивость в пределах отдельной поры. Таким

<sup>1</sup> Предполагается, что переменная  $T$  исключается отсюда с помощью уравнения для определения термодинамического режима потока, например, уравнения (6) и (8), гл. III, п. 1.

образом, если бы можно было найти точное решение уравнения (1), гл. III, п. 2, указанные переменные соответствовали бы ему полностью. Иными словами, закон Дарси является по своей природе статистическим выводом, дающим опытный эквивалент уравнения (1), гл. III, п. 2, Стокса-Навье, усредненный на протяжении очень большого количества отдельных пор. Непосредственные эксперименты, относящиеся к закону Дарси, как это было показано в главе II, ограничены колонками или слоями пористого вещества, в которых макроскопический поток имеет по необходимости линейный характер. Поэтому следует раньше дать обобщение эмпирическим выводам, а затем уже разработать законченную теорию, которую можно будет приложить к любому течению<sup>1</sup>.

Для этого сначала сделаем допущение, что результирующая скорость в любой точке трехмерного течения прямо пропорциональна по величине и имеет то же направление, что результирующий градиент давления в этой точке. Это будет равнозначно допущению, что результирующая скорость может быть разложена на три компонента, параллельные осям координат, причем каждый из них связан с градиентом давления независимо от остальных. Тогда закон Дарси примет следующий вид:

$$v_x = -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad v_z = -\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1)^2$$

где  $\mu$  — вязкость жидкости. Проницаемость  $k$  в этих уравнениях может изменяться от точки к точке и может быть различной для всех трех компонентов  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , как это показано сносками при буквенных обозначениях. Однако среди обычно рассматривают как изотропную<sup>3</sup>, и потому  $k$  принимается независимым от направления, если только не указывается обратное. Уравнение (1) все же не является достаточно общим, чтобы охватить все интересующие нас случаи. Если скорость жидкости имеет компонент, направленный по вертикали, ясно, что необходимо принять в расчет явным или неявным путем силу тяжести. В этом случае мы опять должны вернуться к обобщению и допустить, что если какая-нибудь массовая сила с компонентами  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  действует на единицу объема жидкости, она будет влиять на скорость точно так же, как и градиент давления. Тогда для этого случая закон Дарси напишется так

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \right); & v_y &= -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \right) \\ v_z &= -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + F_z \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Некоторые характерные эмпирические подтверждения, оправдывающие эти обобщения, будут приведены в гл. IV, пп. 7 и 11 (см. фиг. 37 и 55).

<sup>2</sup> Знак минус взят в уравнении (1) для того, чтобы компоненты скорости были положительными, когда жидкости движутся в направлении увеличивающихся значений координат (гл. II, п. 3).

<sup>3</sup> См. гл. II, п. 12.

Если сила  $\bar{F}$  имеет потенциал<sup>1</sup>  $V$ , можно ввести функцию  $\Phi$ , определяемую выражением:

$$\Phi = \frac{k}{\mu} (p - V), \quad (3)$$

так, что

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ v_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отсюда видно, что  $\Phi$  фактически является „потенциалом скорости“ — функция, отрицательный градиент которой дает вектор скорости.

Для удобства уравнения (4) могут быть объединены в единое векторное уравнение

$$\bar{v} = -\nabla \Phi. \quad (5)$$

Уравнения (3) и (5) можно рассматривать как обобщенный закон Дарси. Их можно принять за динамическую основу для всех проблем, связанных с течением вязкой, а также всех остальных типов однородных жидкостей в пористой среде. Они являются нашим заменителем уравнения (1), гл. III, п. 2 Стокса-Навье и могут рассматриваться как их макроскопический эквивалент. Следует заметить, что зависимость потенциальной функции  $\Phi$  от вязкости жидкости  $\mu$  выражается совершенно определенно. Поэтому нет необходимости вводить ее в значение проницаемости  $k$ , даже если оба эти фактора принимаются за постоянные величины. Как уже было отмечено в гл. II, п. 3, это разделение освобождает  $k$  от любой связи с природой жидкости и делает ее зависящей только от природы пористой среды. Фактически одной константы  $k$  вполне достаточно, чтобы охарактеризовать однородную пористую среду как носитель любой однородной жидкости.

Следующим моментом, который следует отметить по отношению к обобщенным уравнениям Дарси (3) и (4), — это отсутствие в них плотности  $\gamma$ . Они не только отличаются по форме от классических уравнений гидродинамики [гл. III, п. 2 (1)], но также и тем, что не содержат совершенно зависимой переменной  $\gamma$ . В уравнениях Стокса-Навье  $\gamma$  входит в член  $\gamma \frac{D\bar{v}}{Dt}$ , который представляет собой инерцию или силу ускорения в жидкости. Поэтому отсутствие  $\gamma$  в уравнениях Дарси (3) и (4) указывает на пренебрежение силами инерции. Следует заранее ожидать этого фундаментального различия, если обратить внимание на то, что благодаря очень большой поверхности, обнаженной для жидкости в пористой среде, сопротивление, определяемое вяз-

<sup>1</sup> Вектор  $\bar{F}$  имеет „потенциал“  $\Phi$ , если его можно представить как градиент (положительный или отрицательный, в зависимости от условий) от  $\Phi$ , т. е. если  $\bar{F}$  может быть выражено как  $\bar{F} = -\nabla \varphi$ , где  $\nabla$  — дифференциальный оператор вектора с компонентами  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ .

костью, значительно превосходит любые силы ускорения в жидкости, пока не установится турбулентное течение. При этих условиях вполне правильно уже заранее пренебречь величиною инерции, как это часто и делается в действительности при пользовании классическими уравнениями для случаев, где преобладающими силами являются те, что возникают вследствие сопротивлений от внутренних сил трения. Поэтому отсутствие переменной  $\gamma$  в уравнениях Дарси следует приписать сравнительной незначительности сил ускорения по сравнению с внутренними сопротивлениями трения в пористой среде, несущей жидкость. Различия в форме уравнений следует отнести к влиянию на классические уравнения статистического усреднения мгновенных и мельчайших изменений, имеющих место в отдельных порах, так что создается упрощенное представление в величинах, которые имеют макроскопическое значение<sup>1</sup>.

**4. Уравнения движения.** Теперь, когда сформулированы динамические законы, характеризующие течение жидкостей в пористой среде, мы должны вернуться обратно и дополнить их уравнением неразрывности и уравнением состояния, чтобы сделать систему полной. Так, прилагая сначала динамическое уравнение (5), гл. III, п. 3 к уравнению неразрывности (1), гл. III, п. 1, получим:

$$\operatorname{div}(\gamma V \varphi) = V \cdot \left[ \gamma V \frac{k}{\mu} (p - V) \right] = f \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad (1)$$

где при всех условиях, представляющих практический интерес,  $\mu$  может быть принято независимым от давления и поэтому может быть вынесено за скобки. Для однородной среды  $k$  может быть также вынесено за скобки, и если мы ограничим себя однородной средой, то после этого  $k$  можно считать постоянной величиной за исключением некоторых определенных проблем, например, главы VII, при условии, что значение проницаемости не определено иным путем<sup>2</sup>. Уравнение (1) тогда примет вид:

$$V \cdot [\gamma A (p - V)] = \frac{f \mu}{k} \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \quad (2)$$

Теперь осталось дать определение природы жидкости, чтобы получить дифференциальное уравнение с одной переменной  $\gamma$  или  $p$ . В каче-

<sup>1</sup> В действительности было бы весьма интересно получить вывод вакона Дарси как прямое следствие уравнений классической гидродинамики [гл. III, п. 2, (1)], но создается впечатление, что выводы, какие были сделаны Н. К. Боз, являются ложными (N. K. Bose, Memoir Punjab Irrigation Res. Lab., 2, № 1, 1929, and Punjab Eng. Congr., 1930). В последнем случае уравнение (4) было получено как решение уравнения (1), гл. III, п. 2, где величина инерции была отброшена, а обе стороны уравнения (4) представляли экспоненциальное изменение в времени. Оставляя в стороне посторонние изменения времени, видно, что решение уравнения (1), гл. III, п. 2 в форме уравнения (4) по необходимости должно относиться к микроскопическим скоростям и давлениям в поре и не может быть признано идентичным макроскопическим скоростям и давлениям уравнения (4), пока не будут приняты в детальный расчет граничные условия, которые бы удовлетворяли всем порам среды.

<sup>2</sup> См. гл. II, п. 12 для подтверждения правильности этого допущения, несмотря на большую изменчивость  $k$ , установленную по керчам из той же самой скважины.

стве достаточно общего уравнения, включающего все однородные жидкости, представляющие промышленный интерес, и все типы струйного течения, мы можем взять<sup>1</sup>:

$$\gamma = \gamma_0 P^m e^{\beta p}.$$

Определенные жидкости физической значимости можно подвергнуть следующей классификации:

жидкость:  $m = 0$ ;

несжимаемые жидкости:  $\beta = 0$ ;

сжимаемые жидкости:  $\beta \neq 0$ .

Газы:  $\beta = 0$ ;

изотермическое расширение:  $m = 1$ ;

адиабатическое расширение:

$$m = \frac{\text{удельная теплота при постоянном объеме}}{\text{удельная теплота при постоянном давлении}}.$$

Прилагая эти обозначения к уравнению (2) и делая допущение, что сила тяжести является единственной массовой силой, действующей на жидкость, так что  $V = \gamma g z$ , находим, что для несжимаемых жидкостей

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 = \nabla^2 p, \quad (4)^2$$

где  $\Phi$  определяется уравнением (3), гл. III, п. 3. Для сжимаемых жидкостей

$$\nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{\beta} - \gamma g z \right) \nabla \gamma - \gamma^2 g \nabla z \right] = \frac{f \mu}{k} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \quad (5)$$

Заметим, что нормальная жидкость имеет величину  $\beta$  порядка  $10^{-4} am$ , в то время как величина  $\gamma g$  имеет значение порядка  $10^{-3} am/cm$ . Ясно, что величиной  $\gamma g z$  можно совершенно пренебречь по сравнению с  $\frac{1}{\beta}$ . С другой стороны, члены  $\gamma^2 g \nabla z$  и  $\frac{1}{\beta} \nabla \gamma$  пропорциональны отношению вертикальной массовой силы, возникающей благодаря силе тяжести, к той, что создается градиентом давления жидкости. Если это отношение имеет значительную величину, как, например, в случае систем гравитационного течения (глава VI), и сжимаемость жидкости также имеет физическую значимость, решение уравнения (5) потребует весьма точных выкладок.

Однако, подобное решение будет в целом очень трудным благодаря нелинейности уравнения. Поэтому для практических целей необходимо рассмотреть фазу сжимаемости и гравитационный компонент течения раздельно: первую путем решения уравнения (5), пренебрегая членами, включающими  $g$ , и последний — решением уравнения (4).

С практической точки зрения ошибки в этом приближении по сравнению с точным решением уравнения (5) не имеют больших послед-

<sup>1</sup> Muskat M., Physics, 5, 71, 1934.

<sup>2</sup> Вывод уравнения, которому подчиняется движение жидкостей в пористой среде, был первоначально дан в работе (C. S. Slichter, Geol. U. S. Survey, 19th Ann. Rept., 1897 — 1898, p. 330), где представлено большое количество решений специальных проблем, посвященных этому вопросу.

ствий; например, в тех случаях, где градиент давления будет представлен достаточно большими значениями, чтобы привести к значительным изменениям плотности жидкости на небольших расстояниях, и где этот же градиент будет очень велик по сравнению с градиентом гравитационного напора  $\gamma g^*$ . Если изменение плотности имеет значительную величину, особенно вследствие большой протяженности потока (горизонтальной) (см. гл. X, п. 1), течение будет в значительной степени ограничено горизонтальными плоскостями, и гравитационный компонент снова будет иметь малое значение. В таких проблемах, где сила тяжести играет значительную роль, влияние сжимаемости будет иметь меньшее значение, и анализ можно свободно основывать на уравнении (4). В тех же условиях, где влияние сжимаемости жидкости играет преобладающую роль, сила тяжести может быть исключена из рассмотрения. Поэтому в тех случаях, когда течение жидкости можно фактически рассматривать как течение сжимаемой жидкости, мы должны отбросить из уравнения (5) члены, содержащие  $g$ , и принять, что система подчиняется уравнению:

$$V^2 \gamma = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = \frac{f \beta \mu}{k} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}; \quad (6)$$

для газов:

$$V^2 \gamma^{\frac{1+m}{m}} = \frac{\partial^2 \gamma^{\frac{1+m}{m}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma^{\frac{1+m}{m}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma^{\frac{1+m}{m}}}{\partial z^2} = \frac{(1+m)f \mu \gamma_0}{k^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \quad (7)$$

Эти основные дифференциальные уравнения мы примем как основу для решения разнообразных проблем течения в пористой среде, имеющих промышленное значение. Следует тут же заметить, что для несжимаемых жидкостей отпадает изменчивость во времени, так что в системе не может быть переходного или неустановившегося состояния, если только граничные условия не изменяются во времени. Давление подчиняется так называемому „уравнению Лапласа“, которое встречается также в других разделах физики<sup>1</sup>.

Основное уравнение (6) для сжимаемых жидкостей включает в себя время и фактически по форме совпадает с уравнением теплопроводности Фурье<sup>2</sup>. Однако его форма при установившемся состоянии<sup>3</sup> совпадает с приведенной для несжимаемых жидкостей, где плотность играет роль потенциала давления или скорости. Подробно это будет рассмотрено в третьей части настоящей работы.

\* Если даже  $\frac{1}{\gamma_0} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 10^{-5}$ , то общий градиент давления будет больше градиента силы тяжести  $\gamma g$  в 100 раз.

<sup>1</sup> См. гл. III, п. 6.

<sup>2</sup> Carslaw H. S., «Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids», 2d ed., 1921. Есть русский перевод.

<sup>3</sup> Термин „установившееся состояние“ в этой работе принимается как определение условий течения, где важнейшие динамические переменные — давление, плотность и скорость — не изменяются во времени, так что все члены основного дифференциального уравнения, включающие  $\frac{d}{dt}$ , могут быть приравнены нулю.

Уравнение (7) для газов также содержит время и поэтому допускает неустановившееся состояние. Однако являясь при этом нелинейным и включая зависимую переменную  $\gamma$  в степени больше единицы, оно не может иметь точного решения в замкнутой форме. Поэтому в четвертой части будет разработана приближенная теория движения газов. С другой стороны, следует отметить, что в этом случае устанавливющееся состояние также подчиняется уравнению Лапласа при зависимости переменной  $\gamma$  от времени  $t$  по закону  $\frac{1+m}{m}$ .

Уравнение Лапласа (4) принимается за основу всего аналитического материала второй части, где рассматриваются проблемы течения жидкостей при установленном состоянии. Это уравнение вытекает из допущения, что жидкость совершенно не сжимаема. Оно дает для реальных жидкостей в общем довольно хорошее приближение, за исключением тех случаев, когда жидкость обладает ненормально высокой сжимаемостью или когда размеры потока весьма велики (см. гл. X, п.1). С другой стороны, можно рассматривать применение уравнения (4), как дающее только формальное упрощение проблемы движения реально сжимаемой жидкости. Если это только требуется, можно получить распределение плотности жидкости  $\gamma$  для установленного движения сжимаемой жидкости из выражения для  $\Phi$  или  $p$ , выведенного для системы несжимаемой жидкости той же геометрии, простой интерпретацией  $\Phi$  или  $p$ , как  $\gamma$ , при одном условии, что пренебрегают влиянием силы тяжести. При этом граничные условия (гл. III, п. 5) выражаются в единицах граничной плотности или массы потока.

На поверхностях или кривых равного давления или потенциала плотность будет постоянной, и линии тока будут касательны к градиенту вектора  $\gamma \nabla \gamma$  или вектору скорости массы  $1 - \frac{\gamma^k}{\mu} \nabla d$ . Для практических целей в связи с весьма низкой сжимаемостью реальных жидкостей всегда будет достаточно рассматривать течение жидкости в установленном состоянии как проблему течения несжимаемой жидкости и отсюда подчиняющимся уравнению (4). За исключением тех случаев, когда сжимаемость непосредственно входит как важная часть в проблему, например, тот случай, о котором будет идти речь в гл. X, п.1, можно рассматривать решения для установленного состояния как восстанавливающие в непрерывной последовательности изменения граничных условий во времени. Время входит во все эти выражения скорее как постоянная величина (параметр), чем как независимая переменная. Каждое мгновенное распределение давления и связанного с ним расхода будет в то же мгновение отражать граничные условия, как будто последние сохраняли свое значение и раньше в продолжение неопределенного долгого отрезка времени. Хотя такое определение изменений времени будет точным только для строго несжимаемой жидкости, однако, с практической точки зрения этого будет вполне достаточно при рассмотрении аналогичных проблем, где можно пренебречь сжимаемостью, если только система действительно находится в установленном состоянии.

---

<sup>1</sup> При интерпретации символа  $\nabla$  см. уравнения (3) и (4), гл. I I, п. 5, а также сноска в гл. III, п. 3.

Следует заметить также, что основные дифференциальные уравнения (4), (6) и (7) базируются на неявном допущении, что течение обладает фиксированной геометрией. Однако, для определенных типов гравитационного течения жидкость, освобождая первоначальный объем пористой среды, не возмещается, и геометрические границы интересующей нас области будут изменяться таким образом, что получится непрерывное уменьшение объема. Этот тип проблемы непосредственно входит в сферу изучения флуктуаций уровня грунтовых вод, что представляет большой практический интерес в вопросах залегания вод, ирригации и т. д. К несчастью, он осложнен такими аналитическими трудностями, что получить удовлетворительные решения даже для более простых случаев не представляется возможным. Приложение теории Дюпюи — Форхгеймера, которая обычно применялась для решения таких задач и которая приведена в гл. VI, п. 17, включает в себя столько находящихся под вопросом допущений, что может быть оправдано с трудом воспроизведение анализов, базирующихся на этой теории, хотя ничего лучшего до сих пор еще не было предложено. Поэтому мы решили опустить в настоящей работе любой вид рассмотрения флуктуаций уровня грунтовых вод с надеждой, что это опущение будет стимулировать последующих исследователей к работе над этой важной проблемой. В конечном итоге можно заметить, что аналитические основы, уравнения (4), (6) и (7), решений специфических проблем течения, которые даются в последующих главах, были выведены на допущении строгой справедливости обобщенного закона Дарси, уравнение (5), гл. III, п. 3, или ламинарности рассматриваемого течения. Область применимости этого закона покрывает, как это было указано в гл. II, п. 2, почти все практические интересные проблемы. Фактически мы можем ограничить рамки настоящей работы теми проблемами течения, которые подчиняются закону Дарси.

**5. Границные и начальные условия.** Как это хорошо известно из теории дифференциальных уравнений в частных производных, уравнения (4), (6), (7), гл. III, п. 4, имеют бесконечное количество решений. Кроме того, решения линейных уравнений (4) и (6), гл. III, п. 4, можно связать линейно с произвольными постоянными коэффициентами, которые дадут дополнительно иные решения. Естественно, возникает вопрос, как можно выбрать среди этих решений те, которые следует приложить к какой-нибудь определенной проблеме. Без всякого детального анализа ясно, что выбранное решение должно быть таково, чтобы оно имело индивидуальный характер для интересующей нас проблемы.

Так как все проблемы, которые мы собираемся рассматривать, имеют один и тот же динамический характер и все они подчиняются уравнениям (4) и (7), гл. III, п. 4, то их различие между собой по необходимости следует отнести к различию в границах, определяющих жидкость, и в отдельных физических условиях, которые налагаются на эти границы в тот начальный момент, когда вводятся „граничные условия“.

Следует заметить, что эти границы совсем не представляют собой водонепроницаемых стенок, ограничивающих область, занятую жидкостью от пространства. Они скорее являются в общем геометрическими поверхностями, во всех точках которых скорость жидкости или потенциал скорости, а также данная функция их обеих могут рассматриваться как

известные величины. Только в исключительных случаях, где на отдельных частях этих геометрических поверхностей нормальные составляющие скорости становятся равными нулю, эти части соответствуют физически непроницаемым границам<sup>1</sup>. Эти поверхности могут находиться всецело в конечной области пространства. В таком случае физической задачей является определение скорости и распределение потенциала внутри ограниченной поверхности для данных „граничных условий“. Интересующая нас область может распространяться также до бесконечности, будучи заключена в замкнутые поверхности конечной области пространства. В одном случае нас может интересовать распределение скорости и потенциала внутри сферической области для данного распределения потенциала или скорости на поверхности сферы. Можно сосредоточить свое внимание также на пространстве, внешнем по отношению к сфере и распространяющимся до иной поверхности, замыкающей сферу, или даже до бесконечности. В последнем случае условия, которые налагаются на решение при бесконечном протяжении области, могут состоять, например, в требовании, чтобы потенциал или скорость обращались в нуль заранее указанным способом.

Когда рассматривается задача установившегося состояния, т. е. решается проблема со строго несжимаемой жидкостью, то ввиду отсутствия независимой переменной  $t$  в уравнении (4), гл. III, п. 4, является достаточным следующий перечень „граничных условий“: заданные значения потенциала давления или скорости<sup>2</sup>, нормальной составляющей скорости, или же линейной связи между ними во всех граничных точках системы, чтобы установить единственность распределения давления или потенциала внутри области с определенными границами. Если система принадлежит к неустановившемуся состоянию, с распределением плотности в системе, изменяющейся во времени, необходимо оговорить также начальные условия, т. е. первоначальное распределение плотности, при котором система начинает свое существование. Вполне понятно, что плотности, а отсюда давления в любой конечный отрезок времени в двух системах с одними и теми же граничными условиями будут совершенно различны. Например, в одном случае система имеет постоянную плотность в произвольный начальный момент, в то время как в другом случае плотность в тот же самый начальный момент имеет совершенно иное переменное распределение.

С другой стороны, следует заметить, что всякое неустановившееся состояние с граничными условиями, стремящимися к постоянным значениям, будет приближаться с течением времени к состоянию установленвшегося распределения, вне зависимости от начальных условий, и будет

<sup>1</sup> „Нормальной“ составляющей скорости к поверхности называется компонент скорости, перпендикулярный к поверхности.

<sup>2</sup> Термины потенциал давления и потенциал скорости применяются здесь в достаточно широком смысле и взаимозаменяемы, так как оба они удовлетворяют уравнению Лапласа (4), гл. III, п. 4, и любой из них можно принять в качестве основной физической зависимой переменной, характеризующей течение несжимаемой жидкости. Окончательный выбор соответствующей величины при производстве фактического анализа делается в зависимости от удобства, что в свою очередь определяется той ролью, которую играет сила тяжести, воздействующая на движение жидкости.

определяться только конечными значениями граничных условий<sup>1</sup>. Это означает, что после неопределенного длительного промежутка времени все течения с одной и той же геометрией и одними и теми же постоянными пределами граничных условий, не содержащие внутри себя каких-либо источников жидкости или стоков (области бесконечно малого объема, где жидкость вводится в систему или удаляется из нее), будут иметь ту же самую установившуюся плотность и распределение давления. Величина расхода, при котором исчезает влияние начальных условий и устанавливается состояние установившегося распределения для данной пористой среды, определяется в основном эффективной сжимаемостью жидкости. Расход увеличивается по мере уменьшения сжимаемости. Это является следствием того факта, что „начальные условия“ не нужны при решении задач с несжимаемыми жидкостями. Можно рассматривать несжимаемые жидкости как жидкости со сжимаемостью, равной нулю. Отсюда следует, что если бы в системе существовало сначала неустановившееся распределение давления, оно бы немедленно исчезло и установилось бы состояние установившегося распределения последнего. Таким образом, рассмотрение проблемы неустановившегося состояния для несжимаемых жидкостей при постоянных граничных условиях автоматически преобразуется в проблему установившегося состояния для данных граничных условий. По этой же самой причине распределение давления в системе с несжимаемой жидкостью и граничными значениями давления и скорости, изменяющимися во времени, пройдет через непрерывный ряд состояний установившихся распределений и каждый из них будет соответствовать мгновенным условиям на границах.

Однако для сжимаемых жидкостей или газов не может быть установленных состояний, если только граничные условия не остаются во времени постоянными, так как изменения в граничных значениях не будут передаваться сейчас же остальной части системы. Фактически благодаря сжимаемости жидкости потребуется неопределенное время для полного перераспределения плотностей и восстановления условий установившегося состояния. Исходя из этого, видно, что в конечном итоге физическая проблема движения жидкостей в пористой среде в общем определяется заданием: 1) геометрических границ области пространства, для которого желательно иметь решение, 2) граничных условий на этих границах и 3) плотности и отсюда распределения давления в начальный момент. Обозначая границы через  $S$  и зависимые переменные  $p$ ,  $\Phi$  или  $\gamma$  через  $\Phi$ , можем принять одну из следующих форм для обозначения граничных условий, имеющих физический смысл:

- a)  $\Phi$  дается на  $S$
  - b)  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  дается на  $S$  ( $n$  является нормалью к  $S$ )
  - c)  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} + h\Phi$  дается на  $S$  [ $h$  может быть функцией от  $(x, y, z)$ ]
- } (1)

где эти граничные значения зависят или не зависят от времени.

<sup>1</sup> Здесь делается допущение, что величина алгебраической суммы течения, проходящего через систему, стремится в конечном итоге к нулевому значению.

Тогда физическая проблема сводится к аналитической задаче нахождения функции  $\Phi(x, y, z)$ , которая в зависимости от природы жидкости удовлетворяла бы уравнениям (4), гл. III, п. 4; (6), гл. III, п. 1 или (7), гл. III, п. 4, и в то же самое время особенностям выбранного заранее граничного, а также начального условий, если только проблема относится к неустановившемуся течению сжимаемой жидкости или газа. К счастью, можно доказать, что если эта функция определена, то не существует других, которые бы удовлетворяли всем этим условиям. Поэтому можно быть уверенным, что если это решение было найдено применявшимся методом, то всякий другой правильный метод по необходимости приведет к тому же самому выводу.

**6. Аналогии с остальными физическими проблемами.** Было уже показано, что общая задача установившегося течения жидкостей в пористой среде может быть сведена к решению уравнения Лапласа с за-

висимыми переменными  $p$ ,  $y$  или  $y^{\frac{1+m}{m}}$  при соответствующих граничных условиях, которые даются, например, уравнением (1), гл. II, п. 5. Так как это уравнение очень хорошо известно по остальным разделам физики, то можно использовать общий метод его решения, а в отдельных случаях принять и сами решения для большого количества практических интересных проблем течения из числа тех, что уже были решены с иными целями в других разделах физики, простым переводом их в соответствующие гидродинамические эквиваленты. Поэтому в табл. 10 мы приводим сопоставление между гидродинамикой установившегося течения жидкости в пористой среде и проблемами установившейся теплопроводности, электростатикой и электрическим током в сплошных проводниках. Эти аналогии могут оказать помощь в отчетливом представлении себе проблем течения тем, кто уже знаком с подобными проблемами в области теплопроводности, электростатики или электротока. Существуют еще иные физические проблемы, например, известные случаи теории кручения упругих стержней или течения вязких жидкостей, согласно законов классической гидродинамики, которые также подчиняются уравнению Лапласа. Однако более широко распространенные примеры из таблицы будут совершенно достаточны, чтобы показать общность природы этих аналогий. Для удобства был выбран специфический случай течения несжимаемой жидкости, где зависимой переменной является давление  $p$ . При этом пренебрегаем влиянием силы тяжести. Однако существует одна особенность в гидродинамике течения в пористой среде, которая не имеет непосредственного аналога в остальных физических проблемах, охарактеризованных в табл. 10.

Это потенциал  $V$  в уравнении (3), гл. III, п. 3, который представляет собою потенциал силы тяжести, если он только входит в рассматриваемые проблемы течения, и имеет вид:

$$V = \gamma g z, \quad (1)$$

где  $z$  — вертикальная ось, направленная вниз. Хотя в расчет и принимается формальное введение потенциала  $\Phi$ , однако, следует учитывать этот факт при установлении граничных условий, которые с физической стороны более естественно представить в виде значений давления. Так,

Таблица 10

**Аналогия между течением несжимаемой жидкости в пористой среде, теплопроводностью, электростатикой и электропроводностью**

Гидродинамика установившегося потока через пористую среду (несжимаемые жидкости)	Теплопроводность	Электростатика	Электропроводность
Давление $p$	Температура $u$	Электростатический потенциал $\Phi$	Напряжение — потенциал $V$
Отрицательный градиент давления $-\nabla p$	Отрицательный температурный градиент $-\nabla u$	Вектор напряжения поля $\vec{E} = -\nabla \Phi$	Отрицательный градиент потенциала $-\nabla V$
Проницаемость $\frac{k}{\mu}$	Коэффициент теплопроводности $k$	Диэлектрическая постоянная $\epsilon$	Удельная проводимость $\sigma$
Вязкость $\mu$		$\frac{\epsilon}{4\pi} : \frac{\epsilon}{4\pi}$	
Вектор скорости $\vec{v} = \frac{k}{\mu} \nabla p$	Величина теплопроводности $q = -k \nabla u$	Диэлектрическое замещение $\frac{\epsilon}{4\pi} \vec{E} = -\frac{\epsilon}{4\pi} \nabla \Phi$	Вектор тока $\vec{I} = -\sigma \nabla V$
Закон Дарси	Закон Фурье	Закон Максвелла о диэлектрическом замещении	Закон Ома
Поверхность равного давления $p = \text{const}$	Изотермическая поверхность $u = \text{const}$	Эквипотенциальная поверхность $\Phi = \text{const}$	Эквипотенциальная поверхность $V = \text{const}$
Непроницаемые перемычки или линии тока	Изолированные поверхности или линии теплопередачи $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$	Трубки или силовые линии	Свободная или изолированная поверхность трубы или линии тока $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$

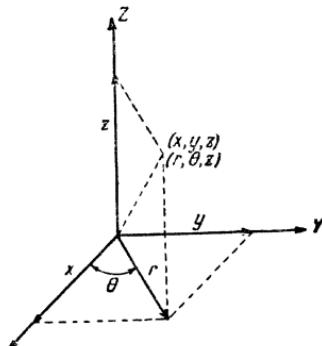
если жидкость движется по трещине в породе, которая поддерживается все время в состоянии дренирования, давление будет постоянным по всей поверхности трещины, в то время как  $\Phi$  будет изменяться линейно с изменением  $z$ . С другой стороны, если трещина будет заполнена жидкостью в гидростатическом равновесии, давление по поверхности трещины будет возрастать линейно с изменением  $z$ , в то время как потенциальная функция  $\Phi$  будет постоянной по всей поверхности. Если пренебречь силой тяжести, давление будет постоянным в обоих случаях по всей поверхности трещины. В общем можно принимать или давление  $p$ , или потенциал  $\Phi$ . В последующих главах в зависимости от специфики рассматриваемых задач мы будем произвольно переходить от одного фактора к другому.

**7. Недекартовы системы координат.** Так как изучаемые в последующих разделах системы течения жидкости обладают часто особыми видами симметрии, будет удобным выразить основное уравнение Лапласа

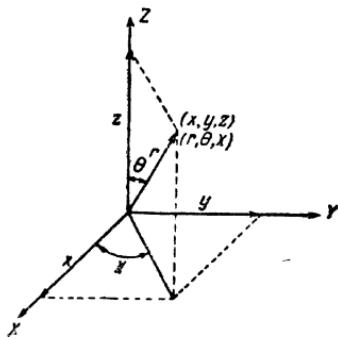
в таких системах координат, где симметрия системы может быть выражена соответственным образом. Поэтому перепишем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

в цилиндрических и сферических координатах, установим их связь с прямоугольными декартовыми координатами  $(x, y, z)$  и, допустив, что  $\Phi$  является потенциалом скорости, дадим компоненты последней в новых системах координат.



Фиг. 22.



Фиг. 23.

Цилиндрические координаты  $(r, \theta, z)$ , (фиг. 22):

$$\left. \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}; \quad z = z \\ x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta; \quad z = z \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad (2)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Сферические координаты  $(r, \theta, \chi)$  (фиг. 23):

$$\left. \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z}}; \quad \chi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \\ x = r \sin \theta \cos \chi; \quad y = r \sin \theta \sin \chi; \quad z = r \cos \theta \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad v_\chi = -\frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \chi}; \quad (5)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} = 0. \quad (6)$$

Эти уравнения показывают, что если течение жидкости симметрично относительно некоторой оси, то эту симметрию можно свободно выразить в системе цилиндрических координат, принимая ось  $z$  за ось сим-

метрии и принимая  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$ . С другой стороны, если система обладает сферической симметрией, то последняя естественно должна выражаться в сферических координатах с началом координат в центре симметрии, с исключением членов, выраженных через  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial \chi}$  в уравнении (6).

**8. Заключение.** Раньше чем дать решение какой-нибудь частной проблемы движения жидкостей в пористой среде, следует разработать общую формулировку гидродинамики рассматриваемого течения. Любое такое исследование можно представить себе как формулировку в новой редакции хорошо известных основных определений и закономерностей механики, выраженных гидродинамическими значениями так, чтобы их можно было приложить к течению жидкостей. Это требует раньше всего, чтобы течение полностью подчинялось закону сохранения материи. Поэтому оно должно удовлетворять уравнению неразрывности [(1), гл. III, п. 1], которое является аналитическим утверждением закона сохранения материи. После этого необходимо определить термодинамическую природу интересующей нас жидкости и режим течения. Природа жидкости в общем виде может быть представлена зависимостью между давлением, плотностью и температурой его [уравнение (3), гл. III, п. 1], которое является уравнением состояния жидкости. Постоянство плотности в уравнении состояния характеризует собой несжимаемую жидкость. Так, закон Бойля может быть принят в качестве уравнения состояния для течения идеального газа. Термодинамический режим течения может быть охарактеризован аналогичным путем зависимостью между давлением, плотностью и температурой. Так, температура потока постоянна при изотермическом режиме и изменяется от известного показателя степени плотности для адиабатического режима. Наконец, необходимо установить динамические связи жидкости с градиентом давления и внешними силами. В основном это дается гидродинамическим подтверждением первого закона движения Ньютона. Из всех характеристик течения, требуемых формулировками, эта характеристика является наиболее специфичной. В то время как все жидкости должны удовлетворять уравнению неразрывности, и большие группы их могут контролироваться единичным уравнением состояния, одна и та же жидкость может иметь различные динамические характеристики в зависимости от условий, при которых происходит движение, и среды, в которой поток движется.

Классическая гидродинамика, например, определяет динамическое действие на жидкость с помощью уравнения Стокса-Навье [уравнение (1), гл. III, п. 2]. Последнее дает следующее распределение сил, которые действуют на жидкость: градиент давления, внешние массовые силы, например, сила тяжести и силы внутреннего трения в жидкости, которые определяются ее вязкостью.

В принципе этот анализ можно приложить ко всем видам движения жидкости и даже в том случае, когда жидкость проходит сквозь пористую среду. Однако решение конечных уравнений можно получить только для относительно простых случаев. Эти уравнения создают

непреодолимые математические трудности, если их приложить непосредственно к течению через лабиринты и путанные ходы пористой среды. К счастью, эти математические трудности не так серьезны, как они кажутся, так как, помимо всего, мы не заинтересованы в мельчайших подробностях движения жидкости в отдельных порах. Практический интерес представляют собой только макроскопические свойства течения, усредненные по большому количеству пор.

Эта конечная усредненная зависимость течения в пористой среде подвергалась изучению эмпирическим путем. Проведенные исследования дали весьма простой вывод — закон Дарси, а именно: скорость жидкости в любой точке пористой среды прямо пропорциональна градиенту давления в этой точке. При этом все полученные количества усреднены по большому числу пор [уравнение (1), гл. III, п. 3]<sup>1</sup>. Это уравнение является макроскопическим эквивалентом динамического определения природы течения вязких жидкостей, лежащего в основе классической гидродинамики, и образует динамический базис для гидродинамики струйного течения однородных жидкостей в пористой среде. Обобщая первичные результаты опытов Дарси, чтобы получить пространственную форму течения и включить в нее влияние силы тяжести [уравнение (2), гл. III, п. 3], а также прилагая уравнение неразрывности и уравнение состояния к различного типа жидкостям, получаем, что давление и плотности должны удовлетворять следующим уравнениям.

Для несжимаемых жидкостей:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0;$$

$$\Phi = \frac{k}{\mu} (p - V) \quad [\text{см. уравнение (4), гл. III, п. 4}]$$

Для сжимаемых жидкостей:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = \frac{f \beta \mu}{k} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad [\text{см. уравнение (6), гл. III, п. 4}]$$

Для газов:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \gamma^{(1+m)/m}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma^{(1+m)/m}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma^{(1+m)/m}}{\partial z^2} = \\ & = \frac{(1+m) f \mu \gamma_0^{1/m}}{k} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad [\text{см. уравнение (7), гл. III, п. 4}], \end{aligned}$$

где  $\Phi$  и  $p$  — потенциал скорости и давление жидкости в точке  $(x, y, z)$ ;  $V$  — потенциал массовых сил (тяжести), действующих на жидкость;  $\gamma$  — плотность жидкости;  $t$  — время;  $k$  — проницаемость пористой среды;  $f$  — ее пористость;  $\beta$  — сжимаемость жидкости;  $\mu$  — вязкость жидкости;  $\gamma_0$  — плотность газа при единичном давлении;  $m$  — константа, опреде-

<sup>1</sup> Этот вывод справедлив только в пределах известных скоростей жидкости, в зависимости от среднего размера зерна или поры среды, плотности и вязкости жидкости. По мере того как эти пределы будут превзойдены, правильность вывода будет становиться все менее точной. Однако почти во всех практических проблемах скорости жидкости фактически меньше или того же самого порядка, что и предельные скорости, почему эти системы и находятся в области ламинарного или макроскопического струйного потока.

ляющая термодинамическую природу течения, имеющая значение 1 для изотермического потока и 0,71 для воздуха при адиабатическом течении.

Во всех случаях, подчиняющихся вышеуказанным уравнениям, предполагается, что пористая среда остается изотропной и однородной.

Все проблемы течения однородных жидкостей в пористой среде при ламинарных условиях подчиняются одному из этих уравнений. Специфические задачи характеризуются геометрией области, где происходит течение, граничными условиями, которые устанавливаются на контурах этих областей, и начальным распределением давления или плотности в тот момент, когда система начинает свою жизнь, при условии, что рассматриваемая проблема относится к неустановившемуся состоянию. Граничные условия заключаются в установленных значениях зависимых переменных на контурах, или полных производных от зависимых переменных, которые представляют собой нормали скоростей жидкости на границах области. Когда заданы эти условия, а это можно установить совершенно произвольно, проблема становится аналитически определимой и существует только одно решение ее, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению, граничным и начальным условиям (гл. III, п. 5).

Теперь, когда гидродинамика движения жидкости в пористой среде была сформулирована в целом в виде дифференциальных уравнений в частных производных для давления или плотности, необходимо разработать способы их решения. Поэтому представляется интересным заметить, что уравнение Лапласа, которому подчиняются все случаи установившегося течения, уже хорошо известно в остальных разделах физики, например, теории установившейся теплопроводности, электростатике и электрического тока. Так как при изучении последних областей науки многие проблемы уже были решены, эти решения можно перенести и приложить к проблеме течения жидкости в пористой среде, если только мы будем знать, как произвести переход и интерпретацию интересующих нас количеств от одного предмета науки к другому. Поэтому была показана внешняя аналогия, относящаяся к количественным значениям температуры, напряжения, тока, диэлектрической постоянной и т. д., с соответственными понятиями в нашей гидродинамической системе (гл. III, п. 6). Наконец, предусматривая, что некоторые из интересующих нас проблем обладают специфическими формами симметрии, уравнение Лапласа было представлено в иных системах координат, где определенные виды симметрии найдут себе более яркое выражение, чем в декартовой системе координат (гл. III, п. 7).

# ЧАСТЬ ВТОРАЯ

## УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

### Глава четвертая

#### ПРОБЛЕМЫ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

**1. Введение.** После рассмотрения наиболее элементарного типа задач о течении — линейном, который подвергся изучению в главе II при установлении закона Дарси, следующей по простоте задачей является двухмерный или плоский поток. В этой задаче принимают, что распределение вектора скорости в жидкости  $\bar{v}$  зависит только от двух прямоугольных координат системы и остается независимым по отношению к третьей. С физической точки зрения, разумеется, всякая жидкость по необходимости имеет свое развитие во всех трех измерениях, но значение плоских течений заключается в том, что при этом все особенности движения жидкости можно рассматривать в одной плоскости. Для всех иных плоскостей, параллельных данной, характер движения будет тождественным. Проблемы плоского течения, имеющие практический интерес, представлены в общем следующими двумя типами задач. Первый тип ограничен горизонтальным плоским движением, где  $\bar{v}$  не зависит от вертикальной координаты  $z$ . Такие задачи возникают при рассмотрении песчаников с постоянной мощностью, все поры которых заполнены жидкостью и разбурены скважинами, вскрывшими всю мощность песчаника. При этом течение должно быть по необходимости плоским. Отсюда следует, что если даже сила тяжести и действует на каждый элемент жидкости, то последний будет двигаться всей своей массой в вертикальном направлении, или же нигде не будет иметь перемещения, а отсюда и скорости по вертикали. Поэтому становится ясным, что сила тяжести в любом случае при этом типе движения не имеет никакого значения. Поэтому можно совершенно точно принять давление  $p$  эквивалентом<sup>2</sup> потенциала скорости.

В главе VI рассмотрены соответствующие задачи, где уровни жидкости на поверхностях стока падают ниже кровли песчаника, что влечет за собой появление определенного гравитационного эффекта.

<sup>1</sup> Кроме того линейного течения, которое было уже описано, и чьи характерные особенности фактически приведены в гл. II, п. 5, не имеется другого подробно изученного случая этого движения.

<sup>2</sup> Коэффициент  $k/\mu$  должен быть, конечно, умножен на  $p$ , чтобы получить правильные численные значения внутренних скоростей при любом течении.

Исходя из указанных предпосылок, следует, что основное уравнение в прямоугольной системе координат, которому подчиняется горизонтальное плоское движение в установившемся состоянии, будет:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0; \quad (1)$$

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2)$$

Второй тип задач плоского течения, который будет рассматриваться в настоящей главе, характеризуется большим распространением течения в одном горизонтальном направлении без всяких изменений динамического режима вдоль последнего. Отсюда природа жидкости, за исключением граничного участка всего течения, остается той же самой во всех вертикальных плоскостях, пересекающих эту огромную протяженную систему под прямым углом.

Задачи второго типа возникают при рассмотрении фильтрации и противодавления под плотинами, длина которых сравнительно велика по отношению к их ширине. В этом случае соответственной динамической переменной будет потенциальная функция  $\Phi$ , так как вследствие того, что течение осуществляется в вертикальной плоскости, линии тока будут нормальны скорее к эквипотенциальнym поверхностям, чем к поверхностям равного напора. Однако в процессе математического решения можно применить и  $p$  и  $\Phi$ , так как они оба удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0; \quad \Phi = \frac{k}{\mu} (p \pm \gamma gy), \quad (3)$$

откуда

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \pm \gamma g \right), \quad (4)$$

где  $y$  принимается за вертикальную координату;  $\pm$  соответствуют положительному и отрицательному направлению  $y$ .

**2. Радиальное течение в скважину.** Радиальным течением называется плоское движение жидкости, симметричное относительно оси и изменяющееся в отдельных своих чертах с удалением от оси симметрии. Это течение является наиболее простым случаем плоского движения. Чтобы можно было извлечь пользу из симметрии рассматриваемой задачи, необходимо при решении принять соответствующую систему координат. Это очевидно, цилиндрическая система координат, приведенная к плоскости.

Из уравнений (2) и (3), гл. III, п. 7 имеем, что основные уравнения в цилиндрической системе координат, приложенные к плоскости, а также уравнения эквивалентные (1) и (2), гл. IV, п. 1 имеют вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0; \quad (1)$$

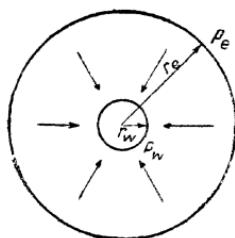
$$v_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad v_\theta = -\frac{k}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (2)$$

Из полученных определений следует, что, в частности, для радиального течения это выражение примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0; \quad (3)$$

$$v_r = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad v_\theta = - \frac{k}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0. \quad (4)$$

Интегрируя уравнение (3), получим сначала:



Фиг. 24.

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \text{const} = c_1, \quad (5)$$

а затем:

$$p = c_1 \ln r + c_2, \quad (6)$$

как общее выражение для распределения давления при радиальном течении.

В предыдущей главе было показано, что дифференциальные уравнения для потенциала скорости и давления должны быть восполнены описанием границ течения и состоянием граничных условий. Как уже было отмечено, эти границы и граничные условия являются совершенно

произвольными при условии, что не было сделано предварительных допущений относительно режима течения. Но так как в настоящем случае уже было произведено допущение радиальности течения, мы уже не являемся свободными в выборе соответствующих границ и граничных условий. Фактически не представляет собой труда показать, что единственной системой, создающей радиальное течение, является область, оконтуренная двумя концентрическими окружностями, на каждой из которых давление постоянно.

Таким образом, радиальное течение характеризуется следующими условиями (фиг. 24):

$$\begin{aligned} r &= r_w; & p &= p_w \\ r &= r_e; & p &= p_e \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (7)$$

где при решении практических задач  $r_w$  может соответствовать радиусу скважины, в которую поступает жидкость (вода или нефть) из пласта;  $p_w$  — давление на обнаженном забое скважины. Последнее может являться до известной степени произвольным и может регулироваться напором столба жидкости, поддерживаемого в скважине<sup>1</sup>. С другой стороны, давление  $p_e$  нельзя изменять по усмотрению. В целом оно зависит от глубины залегания несущего жидкость песчаника относительно его выходов и всей предварительной истории разработки песчаника. Расстояние  $r_e$  является совершенно произвольным. Его следует принимать от центра скважины до такой точки, где есть все основания получить

<sup>1</sup> Рекомендуется, однако, поддерживать всегда уровень жидкости выше кровли продуктивного песчаника. Иначе следует принимать в расчет гравитационный эффект (глава VI).

вполне обоснованные величины давления  $p_e$ . Вводя условия (7) в (6), получаем в итоге два уравнения для  $c_1$  и  $c_2$ :

$$p_w = c_1 \ln r_w + c_2, \quad p_e = c_1 \ln r_e + c_2,$$

где

$$c_1 = \frac{(p_e - p_w)}{\ln r_e / r_w};$$

$$c_2 = \frac{p_w \ln r_e - p_e \ln r_w}{\ln r_e / r_w},$$

так, что

$$p = \frac{p_e - p_w}{\ln r_e / r_w} \ln r + \frac{p_w \ln r_e - p_e \ln r_w}{\ln r_e / r_w} = \frac{p_e - p_w}{\ln r_e / r_w} \ln \frac{r}{r_w} + p_w. \quad (8)$$

Прикладывая сюда уравнение (4), получим следующее выражение для  $v_r$ :

$$v_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{k}{\mu r} \frac{(p_e - p_w)}{\ln r_e / r_w}. \quad (9)$$

В конечном итоге суммарный приток за единицу времени из песчаника в скважину определится, очевидно, из уравнения:

$$Q = -h \int_0^{2\pi} r v_r d\theta = \frac{2\pi k h (p_e - p_w)}{\mu \ln r_e / r_w}, \quad (10)$$

где  $h$  — мощность песчаника. Отсюда  $p$  и  $v_r$  можно выразить через расход  $Q$ :

$$p = \frac{Q\mu}{2\pi k h} \ln \frac{r}{r_w} + p_w; \quad (11)$$

$$v_r = -\frac{Q}{2\pi r h}. \quad (12)$$

Как показывают эти уравнения, давление при радиальном течении меняется с изменением логарифма расстояния от центра скважины; скорость изменяется прямо пропорционально общему перепаду давления в системе  $p_e - p_w$  и обратно пропорционально радиусу последней; текущий дебит в системе также пропорционален общему перепаду давления  $p_e - p_w$ . Все эти функции изменяются обратно пропорционально логарифму отношения радиусов контуров. Кривые равного напора являются окружностями, концентричными по отношению к контуру скважины, а линии тока — радиусами-векторами, проведенными из центра внутренней граничной окружности. Рассмотрим следующий численный пример, основанный на этих выводах. Допустим:

$$p_w = 0; \quad p_e = 10 \text{ atm};$$

$$r_w = 0,075 \text{ m}; \quad r_e = 150 \text{ m}; \quad k = 1 \text{ дарси};$$

$$\mu = 1 \text{ сантипуазу.}$$

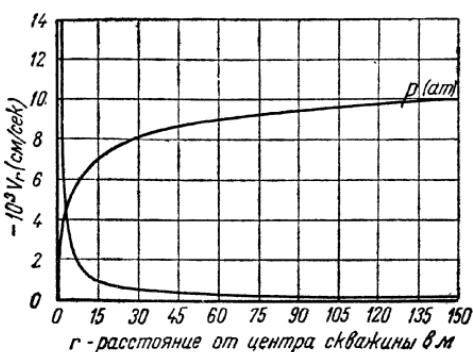
Из уравнений (8) и (9) следует:

$$p = \frac{10 \ln r/r_w}{\ln 2000} = 1,32 \ln 4r \text{ atm}; \quad (13)$$

$$v_r = -\frac{10}{r \ln 2000} = -\frac{1,32}{r} \text{ см/сек}; \quad (14)^1$$

$$Q = \frac{20\pi}{\ln 2000} = 8,27 \text{ см}^3/\text{сек}/\text{см песчаника} =$$

$$= 71,452 \text{ м}^3/\text{сутки}/\text{м мощности}. \quad (15)$$



Фиг. 25. Распределение радиальной скорости ( $v_r$ ) и давления ( $p$ ) относительно забоя скважины, вскрывшей полностью однородный пласт песчаника с постоянной мощностью, где  $k/\mu=1$ , и соответственные давления при  $r = 0,075$  м и  $r = 150$  м равняются нулю и 10 ат.

шению к граничному контуру окружность является постоянной величиной или

$$2\pi r v_r h = \text{const} = -Q.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$v_r = -\frac{Q}{2\pi r h}. \quad (12)$$

Прикладывая сюда уравнение (4), имеем:

$$v_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi r h}.$$

В результате получаем снова:

$$p = \frac{Q\mu}{2\pi k h} \ln \frac{r}{r_w} + p_w. \quad (11)$$

<sup>1</sup> В этом случае отрицательное значение  $v_r$ , так же как и в уравнениях (9) и (12), при условии  $p_e > p_w$  обозначает просто, что жидкость движется в направлении уменьшающихся значений  $r$ .

На фиг. 25 приведены графики построения данных решения уравнений (13) и (14).

Полученные выводы все-цело основаны на непосредственной аналитической трактовке проблемы радиального течения. Однако представляет собой интерес привести здесь несколько более физически обоснованный метод решения, чем манипуляция с дифференциальными уравнениями (3). В этом случае необходимо начать с интегрирования уравнения неразрывности, которое полагает, что суммарное течение через любую концентрическую по отно-

Эти выводы индентичны с уже полученным ранее уравнением. Однако этот же вывод ясно показывает, что первое интегрирование дифференциального уравнения для  $p$  (5) непосредственно обеспечивает уравнение неразрывности. Второе интегрирование соответствует приложению закона Дарси к распределению скорости, а отсюда к распределению давления.

Возвращаясь к вопросу распределения давления и скорости, можно отметить некоторые отличительные особенности графиков на фиг. 25. Видно, что давление растет очень быстро, а скорость резко падает с увеличением расстояния от скважины на интервале последнего, имеющего малые значения. С другой стороны, при больших расстояниях от скважины изменения давления и скорости очень малы. Давление медленно растет, приближаясь к своему максимальному значению на внешнем контуре<sup>1</sup>, а скорость падает еще более плавно по мере своего приближения к минимуму на том же внешнем контуре. Что же касается абсолютного значения скорости, следует заметить, что для рассмотренного только что числового примера, где текущий дебит составлял  $214,4 \text{ м}^3/\text{сутки}$  для песчаника мощностью  $3 \text{ м}$ , скорость даже на забое скважины не превышала  $0,17 \text{ см/сек}$ . Отсюда для скважины, дающей воду с указанным дебитом из песчаника с эффективным диаметром зерна  $-0,05 \text{ см}$ , число Рейнольдса даже на обнаженной поверхности забоя будет только  $0,85$ . Оно будет значительно ниже того критического значения числа Рейнольдса, при котором закон Дарси начинает отклоняться от эксперимента (гл. II, п. 2). Из уравнения (10) видно, что текущий дебит  $Q$  прямо пропорционален проницаемости песчаника. Изменчивость его определяется логарифмом отношения радиуса внешнего контура к радиусу скважины. Она показывает необходимость иметь большие изменения в величине последних, чтобы это отразилось заметным образом на текущем дебите. Для удвоения продуктивности скважины увеличением ее радиуса необходимо, чтобы радиус скважины был увеличен до значения

$$r'_w = \sqrt{r_e r_w}. \quad (16)$$

<sup>1</sup> Тот факт, что  $p$  в уравнении (11) продолжает возрастать до бесконечности по мере роста значения  $r$  большем, чем  $r_e$ , не следует принимать за указание на ошибку в основной теории, ведущей к уравнению (11). Все, что можно требовать от любой аналитической теории, — это дать физически правильные выводы в границах области, для которых ищется решение. При экстраполяции полученного решения за пределы этих границ не встречается надобности в его физической значимости. Если, например, хотят, чтобы при величине  $1(r_e$  давление было  $p_e$ , это требование должно быть принято совершенно точно граничным условием задачи. Тогда значение  $p$  при  $r_e$  будет зафиксировано однозначно в полученном решении. Аналогично этому, если  $p$  в уравнении (11) станет бесконечно большим ( $-\infty$ ) при  $r$  равным нулю, оно не получит никакого значения, так как уравнение (11) по своему существу не имеет никакого смысла при  $r < r_w$  и не должно применяться при условии  $r < r_w$ . Фактически, если освободить забой скважины от связи с пластом песчаника, это сделает по необходимости недействительным приложение решения, полученного для течения в песчанике к самой скважине.

Чтобы получить тот же самый эффект уменьшением радиуса внешнего контура, последний должен уменьшиться до величины

$$r_e' = \sqrt{r_e r_w}. \quad (17)$$

Для приведенного числового примера это означает, что удвоение текущего дебита вызовет необходимость увеличения радиуса скважины от 0,075 до 3,354 м или уменьшения радиуса внешнего контура питания от 150 до 3,354 м.

Практическое значение этого малого изменения величины  $Q$  с изменением  $r_w$  и  $r_e$  заключается в том, что относительно небольшие погрешности в значении  $r_w$  и  $r_e$  для любого практического случая будут создавать мало заметные ошибки при конечном исчислении  $Q$ . Отсюда можно допускать вполне приемлемыми значения для  $r_w = 0,075$  м и  $r_e = 150$  м, не боясь ввести большие погрешности в исчисление  $Q$  (гл. II, п. 11). Следующим интересным моментом в приведенном выводе является то обстоятельство, что увеличение производительности артезианской или нефтяной скважины за счет увеличения диаметра последней является недостаточно практическим методом. Приведенный пример ясно показывает, что может потребоваться увеличение диаметра скважины в 40 раз только для того, чтобы удвоить ее производительность. Наконец, следует упомянуть, что согласно аналогиям, приведенным в предыдущей главе, уравнения (8) и (9) соответствуют распределению потенциала и плотности тока между двумя концентрическими цилиндрами, разделенными средой с величиной проводимости  $k/\mu$ . Уравнение (10) дает суммарную величину тока, протекающего через систему.

**3. Ряд Фурье.** Чтобы распространить выводы, полученные в предыдущем разделе, также и на те случаи, где течение в скважину не является строго радиальным, необходимо несколько отклониться от темы и привести описание существенных моментов из теории рядов Фурье. Так как нас интересует только их приложение к решению уравнения Лапласа [(1), гл. IV, п. 2], то все доказательства, относящиеся к теории Фурье, будут опущены и рассмотрение вопроса будет ограничено формулировкой теоретических выводов и некоторыми примерами, их иллюстрирующими.

Основная теорема, определяющая ряд Фурье, сформулирована следующим образом. Любая функция  $f(x)$ , имеющая конечное число конечных точек разрыва непрерывности, а также максимума и минимума в интервале  $-c \leq x \leq c$ , может быть выражена для этого интервала рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \right), \quad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} f(x) \cos \frac{n\pi x}{c} dx; \quad b_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} f(x) \sin \frac{n\pi x}{c} dx. \quad (2)^1$$

<sup>1</sup> Принимая уравнение (1), можем легко получить из него (2) умножением обеих сторон (1) на величину, например,  $\cos \frac{m\pi x}{c} dx$  и интегрируя затем по-

Для значений  $x$ , когда  $f(x)$  изменяется монотонно, сумма ряда в правой части уравнения (1) равняется  $f(x)$ . Для значений  $x$ , где  $f(x)$  имеет точки разрыва, сумма ряда в уравнении (1) равняется среднему алгебраическому значению  $f(x)$  по обе стороны разрыва непрерывности.

Если функция с такими наложенными ограничениями определяется сегментом  $0 \leq x \leq c$ , ее можно выразить на сегменте  $0 \leq x \leq c$  любым из следующих рядов:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{c} \\ a_n &= \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \cos \frac{n\pi x}{c} dx \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \\ b_n &= \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \sin \frac{n\pi x}{c} dx \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Вывод этих выражений для действительных случаев будет показан нами на следующих примерах.

I. Общий ряд Фурье. Допустим, что

$$\begin{aligned} f(x) &= 0: & -\pi \leq x \leq 0; \\ f(x) &= x: & 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

как это показано на фиг. 26.

Ссылаясь на уравнения (1) и (2), видно, что в данном случае  $c = \pi$ . Отсюда значения коэффициентов в разложении будут:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx, \\ a_n &= -\frac{2}{n^2 \pi}, \end{aligned}$$

лученное выражение в пределах от  $-c$  до  $+c$ . Это интегрирование даст нам величину коэффициента  $a_m$ . Аналогичная процедура с умножением обеих сторон

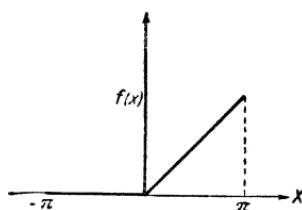
уравнения (1) на член  $\sin \frac{m\pi x}{c} dx$  даст величину  $b_m$ . Для полного представления о теории рядов Фурье читатель может познакомиться с книгой H. S. Carslaw, „Fourier's Series and Integrals“, 3d. ed., 1930; или E. T. Whittaker and G. N. Watson, „Modern Analysis“, chap. IX, 4th ed., 1927. Есть русский перевод. Практическое приложение теории рядов Фурье можно найти в книге W. E. Byerly, „Fourier's Series and Spherical Harmonics“, 1893. Приведенные в настоящей работе формулы рядов Фурье являются довольно свободными. Это сделано для того, чтобы избежать введения пространной терминологии, требуемой при более точном рассмотрении вопроса.

когда  $n$  — нечетное и  $a_n = 0$ , когда  $n$  — четное. Однако  $a_0$  должно быть подсчитано в отдельности, как:

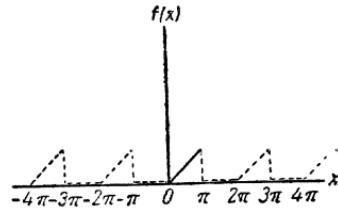
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично этому значение  $b_n$  выразится так:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$



Фиг. 26. Построение функции:  
 $f(x) = 0: -\pi \leq x \leq 0;$   
 $f(x) = x; 0 \leq x \leq \pi.$



Фиг. 27. Построение общего вида ряда Фурье, изображенного на фиг. 26.

Подставляя эти значения в уравнение (1), получим следующий вид его для  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \\ &+ \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Хорошо сделать в этом месте следующее предостережение. Справедливо, что для каждого значения  $x$  между  $x = -\pi$  и  $x = 0$  сумма ряда в уравнении (5) будет фактически равна нулю, а для всех значений  $x$  между  $x = 0$  и  $x = +\pi$  сумма ряда будет равна значению  $x$ . Однако для значений  $x < -\pi$  сумма ряда не будет больше оставаться равной нулю и не будет также равна  $x$  для значения  $x > \pi$ . Вне сегмента  $-\pi \leq x \leq \pi$  ряд повторяет свои значения на этом сегменте. В частности, он имеет свойства

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \text{а фактически} \quad f(x + 2n\pi) = f(x), \quad (6)$$

как это показано на фиг. 27.

Отсюда видно, что ряд Фурье по своему численному значению эквивалентен в каждой точке произвольной функции в пределах сегмента для которого эта функция определена. Вместе с тем он воспроизводит периодически эту функцию на равных интервалах вне установленного сегмента. Таким образом, если необходимо взять ряд Фурье для некоторой функции в точке  $x_0$ , необходимо определить эту функцию для промежутка, который включал бы в себя по крайней мере  $x_0$ .

Следующий пример относится к ряду косинусов, в котором ряд Фурье содержит только члены с косинусами, например, уравнение (3).

II. Разложение по косинусам. Допустим, как это показано на фиг. 28,

$$\begin{aligned} f(x) &= b; & 0 \leq x \leq \pi \\ f(x) &= 0; & \pi \leq x \leq 2\pi \end{aligned}$$

Для этого случая  $c = 2\pi$ . Отсюда на основании уравнения (3)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \frac{nx}{2} dx = \frac{b}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{nx}{2} dx;$$

$$a_n = 0, \text{ когда } n \text{ — четное}; \quad a_n = \frac{2b(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi n}, \text{ когда } n \text{ — нечетное.}$$

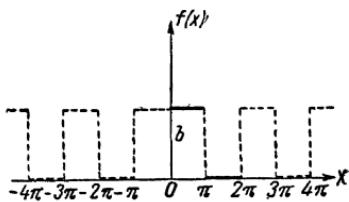
Далее  $a_0 = b$ . Отсюда

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b}{2} + \frac{2b}{\pi} \left( \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3x}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5x}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{7} \cos \frac{7x}{2} + \dots \right). \end{aligned} \tag{7}$$

В этом выражении имеются два момента, вызывающие особый интерес. Первое, что следует заметить, — при  $x = \pi$  все тригонометрические функции в уравнении (7) обращаются в нуль и  $f(\pi) = \frac{b}{2}$ .

Так как на основании уже данного определения это есть среднее значение функции в точке разрыва непрерывности, видно, что ряд Фурье в точке разрыва непрерывности фактически принимает значение, равное среднему алгебраическому предельных значений функции по обе стороны разрыва.

Так как  $\cos x$  является четной функцией  $x$ , то следующее, что необходимо заметить, — ее значение не меняется при изменении  $x$  на  $-x$ , и ряд Фурье, представленный уравнением (7) и фиг. 28, не только воспроизводит периодически себя для  $x > 2\pi$ , но для  $x < 0$  он дает точное отражение своих значений в области, где  $x > 0$ . Хотя поведение ряда Фурье имеет значение только в промежутке его предельных значений, представляется интересным заметить, что разложение функции в ряд косинусов для  $0 \leq x \leq c$  эквивалентно допущению, что она является четной функцией в двойном промежутке  $-c \leq x \leq c$ . В случае разложения функции в ряд по синусу можно видеть, что результаты будут несколько отличны.



Фиг. 28. Построение ряда по косинусам функции:

$$\begin{aligned} f(x) &= b : 0 \leq x \leq \pi; \\ &f(x) = 0: \pi \leq x \leq 2\pi. \end{aligned}$$

**III. Разложение по синусам.** Разложим теперь только что проанализированную функцию в ряд синусов. Допустим снова, что:

$$\begin{aligned} f(x) &= b; \quad 0 \leq x \leq \pi; \\ f(x) &= 0; \quad \pi \leq x \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Из уравнения (4) имеем:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \frac{nx}{2} dx = \frac{b}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{nx}{2} dx$$

$$b_n = \frac{2b}{n\pi}; \quad n \text{ — нечетное;} \quad$$

$$b_n = 0; \quad n = 4m; \quad$$

$$b_n = \frac{4b}{n\pi}; \quad n = 2m,$$

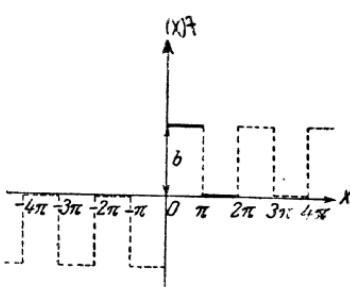
Откуда

$$f(x) = \frac{2b}{\pi} \left( \sin \frac{x}{2} + \sin x + \frac{1}{3} \sin \frac{3x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5x}{2} + \dots + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right) \quad (8)$$

Для  $x = \pi$  следует опять:

$$f(\pi) = \frac{2b}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) = \frac{b}{2},$$

как и при разложении в ряд косинусов. Но так как  $\sin x$  является нечетной функцией  $x$ , т. е. функция меняет свой знак при изменении  $x$



Фиг. 29. Построение ряда по синусам функции:

$$\begin{aligned} f(x) &= b; \quad 0 \leq x \leq \pi; \\ f(x) &= 0; \quad \pi \leq x \leq 2\pi. \end{aligned}$$

разложение ряда по косинусу воспроизводит на концах промежутка значения, установленные первоначальной функцией. Таким образом, можно легко подтвердить, что разложение по косинусу, согласно уравнению (7), дает  $f(0) = b$ , так как ряд

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

на  $-x$ , ряд в уравнении (8) дает отрицательное отражение функции  $f(x)$ , как это показано на фиг. 29, когда  $x$  меняется на  $-x$ . Отсюда видно, что разложение в ряд синусов для  $0 \leq x \leq c$  эквивалентно допущению, что  $f(x)$  является нечетной функцией в промежутке  $-c \leq x \leq c$ . Из общего ряда при разложении по синусу (уравнение 4) следует также, что ряд по синусу дает в сумме нуль для предельных значений в концах промежутка даже в том случае, если функция определена как не имеющая нулевых значений в конечных точках. Так, из уравнения (8) следует, что  $f(0) = 0$ , хотя определение  $f(x)$  требует условия, чтобы  $f(0) = b$ . Разложение ряда по синусам

Наконец, следует отметить следующие важные и оригинальные свойства ряда Фурье. Если два ряда Фурье с одним и тем же промежутком предельных значений равны во всех точках этого промежутка, то оба ряда тождественно равны и коэффициенты соответствующих тригонометрических функций должны быть также равны. Это равнозначно утверждению, что если ряд Фурье во всех точках промежутка предельных значений обращается в нуль, он равен тождественно нулю.

**4. Несимметричное течение в скважину.** С практической точки зрения строго радиальное течение, налагающее условие постоянства давления на круговой контур, концентричный поверхности скважины, повидимому, является слишком идеальным случаем по отношению к действительным условиям, которые существуют на практике. Скорее следует допустить, что даже такие, течения, которые имеют только одну скважину, не будут обладать в целом постоянством давления при распределении его на внешних границах системы; скважины не будут лежать в центре их внешних контуров и наконец, сами границы, давления на которых предусмотрены и известны, будут по своей форме отличны от окружности. Во всех этих случаях течение в скважину будет несимметрично, и распределение давления будет зависеть от координат азимута и радиуса системы. В последующих трех разделах будут подвергнуты исследованию три такие типичные задачи. В первом случае мы еще сохраним в качестве внешней границы окружность, концентричную скважине, но позволим граничному давлению, а также давлению на поверхности забоя скважины изменяться произвольным путем. Решение задачи будет базироваться на теории рядов Фурье. Другой случай будет относиться к круговым, но не концентричным контурам, соответствующим смещению скважины от центра ее внешнего контура. Для решения этой задачи будет применен метод функций Грина. Наконец, будет рассмотрена задача, в которой внешний контур не является больше окружностью, а скорее прямой линией, как, например, линия водонефтяного контакта при продвижении краевой воды.

**5. Произвольное распределение давления на контуре.** Если течение в скважину не обладает совершенной симметричностью, то задача не может подвергнуться упрощению, как это сделано в п. 2. Вернее всего следовало бы приложить более общие уравнения (1) и (2), гл. IV, п. 2, и их решения, которые зависят в целом от угла  $\theta$ , а также от радиуса  $r$ . Легко убедиться в том, что эти решения могут иметь один из следующих видов:

$$\text{const}; \quad \ln r; \quad r^\alpha \cos \alpha\theta; \quad r^\alpha \sin \alpha\theta; \quad r^{-\alpha} \cos \alpha\theta; \quad r^{-\alpha} \sin \alpha\theta,$$

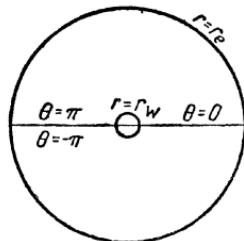
где  $\alpha$  является действительной постоянной для всех задач, имеющих практическое значение. Так как уравнение (1), гл. IV, п. 2, является линейным, ибо оно не имеет членов, содержащих  $r$  или его производных в степени больше единицы, то всякое линейное сочетание отдельных решений будет также являться его решением. На этом основании общее решение уравнения (1), гл. IV, п. 2, может быть написано в следующей форме

$$p = c_0 \ln r + \sum r^\alpha (a_\alpha \sin \alpha\theta + b_\alpha \cos \alpha\theta) + \sum r^{-\alpha} (c_\alpha \sin \alpha\theta + d_\alpha \cos \alpha\theta). \quad (1)$$

В этом уравнении величины  $c_0, a_a, b_a, c_a, d_a$  и даже сами  $a$  являются постоянными, не зависящими от  $r$  и от  $\theta$ , и должны быть подобраны так, чтобы  $p$  или  $\frac{\partial p}{\partial r}$  приняли бы заранее установленные значения вдоль двух окружностей радиусом  $r = r_w$  и  $r = r_e$ , которые оконтуривают интересующую нас область. Это может быть получено, как это описано в п. 3, гл. IV, приложением теории рядов Фурье.

С этой целью является удобным допустить, что окружность  $2\pi$  разделена при радиусе  $\theta = \pi$ , как это показано на фиг. 30, так, что искомый сегмент будет  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . В этом случае, если значения  $p$  на границе будут выражены рядами Фурье, граничные условия могут быть написаны в следующей форме:

$$\left. \begin{array}{l} r = r_w; \quad p = p_w = \sum (w_n \sin n\theta + x_n \cos n\theta); \\ r = r_e; \quad p = p_e = \sum (e_n \sin n\theta + f_n \cos n\theta); \end{array} \right\} \quad (2)$$



Фиг. 30.

Однако раньше, чем приложить эти выражения, следует вначале заметить, что с физической точки зрения  $p$  само должно быть периодично по отношению к  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . Отсюда можно сделать непосредственное заключение, что величины  $a$  в уравнении (1) должны принять по необходимости только целые значения, которые можно обозначить через  $n$ , где  $n$  положительно. Зная величины  $a$ , можно приложить условия уравнения (2) к (1). Это даст:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} (w_n \sin n\theta + x_n \cos n\theta) &= c_0 \ln r_w + \sum_0^{\infty} r_w^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) + \\ &+ \sum_1^{\infty} r_w^{-n} (c_n \sin n\theta + d_n \cos n\theta), \\ \sum_0^{\infty} (e_n \sin n\theta + f_n \cos n\theta) &= c_0 \ln r_e + \sum_0^{\infty} r_e^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) + \\ &+ \sum_1^{\infty} r_e^{-n} (c_n \sin n\theta + d_n \cos n\theta). \end{aligned}$$

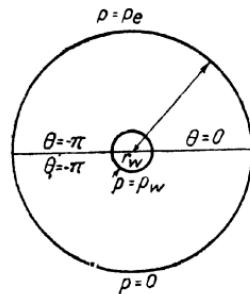
Так как эти уравнения должны удовлетворяться для всех значений  $\theta$  в сегменте  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , то, исходя из свойств ряда Фурье, приведенных в п. 3, гл. IV, следует, что коэффициенты при  $\sin n\theta$  и  $\cos n\theta$  с обеих сторон уравнений должны быть равны.

Это даст следующие равенства:

$$\begin{aligned} w_n &= a_n r_w^n + c_n r_w^{-n} & n > 0, \\ x_n &= b_n r_w^n + d_n r_w^{-n} & n > 0, \\ e_n &= a_n r_e^n + c_n r_e^{-n} & n > 0, \\ f_n &= b_n r_e^n + d_n r_e^{-n} & n > 0, \\ x_0 &= c_0 \ln r_w + b_0, \\ f_0 &= c_0 \ln r_e + b_0, \\ a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Решим эти равенства относительно  $a_n$ ,  $c_n$ ,  $b_n$ ,  $d_n$ :

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{w_n r_e^{-n} - e_n r_w^{-n}}{D_n} \\ b_n &= \frac{x_n r_e^{-n} - f_n r_w^{-n}}{D_n} \\ c_n &= \frac{e_n r_w^n - w_n r_e^n}{D_n} \\ d_n &= \frac{f_n r_w^n - x_n r_e^n}{D_n} \\ D_n &= r_w^n r_e^{-n} - r_w^{-n} r_e^n \\ c_0 &= \frac{(f_0 - x_0)}{\ln r_e / r_w}; \quad b_0 = \frac{x_0 \ln r_e - f_0 \ln r_w}{\ln r_e / r_w} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Фиг. 31.

Отсюда, если известны  $w_n$ ,  $x_n$ ,  $e_n$ ,  $f_n$ , уравнение (3) дает постоянные  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  и  $d_n$ , которые определяют распределение давления во всех точках между границами с радиусом  $r_w$  и  $r_e$ .

В качестве примера была выбрана следующая задача (фиг. 31):

$$\left. \begin{aligned} r &= r_w: \quad p = p_w = \text{const}: -\pi \leq \theta \leq \pi \\ r &= r_e: \quad p = p_e = \begin{cases} p_e: & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0: & -\pi \leq \theta \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Хотя эти условия являются достаточно определяющими задачу, они должны быть раньше всего выражены рядом Фурье.

Так, из уравнения (2) видно, что разложение  $p_w$  выражается просто:

$$p_w = x_0; \quad x_n = w_n = 0; \quad n > 0. \quad (5)$$

С другой стороны, разложение  $p_e$  имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} p_e &= \frac{p_e}{2} + \frac{2p_e}{\pi} \left( \sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots \right) \\ f_0 &= \frac{p_e}{2}; \quad f_n = 0; \quad n > 0, \\ e_n &= 0, \quad \text{когда } n \text{ — четное,} \\ e_n &= \frac{2p_e}{n\pi}, \quad \text{когда } n \text{ — нечетное.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда решение для  $p$  примет следующую форму:

$$p = c_0 \ln r + \sum_0^{\infty} r^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) + \\ + \sum_1^{\infty} r^{-n} (c_n \sin n\theta + d_n \cos n\theta), \quad (7)$$

где согласно уравнениям (3), (5) и (6)

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\frac{p_e}{2} - p_w}{\ln r_e/r_w}; & b_0 &= \frac{p_w \ln r_e - \frac{p_e}{2} \ln r_w}{\ln r_e/r_w}, \\ a_n &= 0, & a_0 &= 0; \\ a_n &= -\frac{2p_e r_w^{-n}}{n\pi D_n}; & n &— \text{нечетное}, \\ b_n &= 0; & n &> 0, \\ c_n &= 0; & n &— \text{четное}, \\ c_n &= \frac{2p_e r_w^n}{n\pi D_n}; & n &— \text{нечетное}, \\ d_n &= 0; & D_n &= r_w^n r_e^{-n} - r_w^{-n} r_e^n. \end{aligned}$$

Отсюда в конечном итоге  $p$  можно выразить следующим равенством:

$$p = \frac{\frac{p_e}{2} \ln \frac{r}{r_w} + p_w \ln \frac{r_e}{r}}{\ln r_e/r_w} + \frac{2p_e}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n D_n} \left[ \left( \frac{r_w}{r} \right)^n - \left( \frac{r}{r_w} \right)^n \right]. \quad (8)$$

Легко убедиться, что при  $r = r_w$  уравнение (8) приводит немедленно к значению  $p = p_w$ ; когда же  $r = r_e$ , оно, как и следует ожидать, приводится к уравнению (6). Распределение скорости, соответствующее распределению давления согласно уравнению (8), легко устанавливается приложением уравнений (2), гл. IV, п. 2, к (8). Так,

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{k \left( \frac{p_e}{2} - p_w \right)}{\mu r \ln r_e/r_w} + \frac{2p_e k}{\pi \mu r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{D_n} \times \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{r_w}{r} \right)^n + \left( \frac{r}{r_w} \right)^n \right], \\ v_\theta &= -\frac{k}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{2p_e k}{\pi \mu r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{D_n} \left[ \left( \frac{r_w}{r} \right)^n - \left( \frac{r}{r_w} \right)^n \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Расход  $Q$  в скважине примет вид:

$$Q = - \int_{-\pi}^{+\pi} r v_r d\theta = \frac{2\pi k (p_e/2 - p_w)}{\mu \ln r_e/r_w}. \quad (10)$$

Сравнивая этот вывод с уравнением (10), гл. IV, п. 2, которое дает значение  $Q$  для строго радиального течения, заметно, что влияние приложения давления  $p_e$  только на половине внешнего контура равноценно приложению половины  $p_e$  по всему контуру. Аналогично этому легко показать, что если давление  $p_e$  приложено только к дуге окружности, угол которой  $s$  при окружности радиусом  $r_e$ , расход составит:

$$Q_s = 2\pi k \frac{\left( \frac{p_e s}{2\pi} - p_w \right)}{\mu \ln r_e/r_w}. \quad (11)$$

Это равноценно допущению распределения давления  $\frac{p_e s}{2\pi}$  по всему внешнему контуру. Так как для общего распределения давления согласно уравнению (1) дебит  $Q$  определяется выражением:

$$Q = - \int_{-\pi}^{+\pi} r v_r d\theta = \frac{2\pi k c_0}{\mu} = \frac{2\pi k (f_0 - x_0)}{\mu \ln r_e/r_w} = \frac{2\pi k (\bar{p}_e - \bar{p}_w)}{\mu \ln r_e/r_w}, \quad (12)$$

то для более общей формулировки следует заметить, что если  $p_e$ ,  $p_w$  являются усредненными значениями произвольного распределения давления соответственно радиусам  $r_e$  и  $r_w$ , то суммарное течение через пласт песчаника является аналогичным тому, при котором средние давления будут равномерно приложены к их соответственным границам. Этот интересный вывод показывает всю силу более совершенного аналитического метода решения, хотя физически это явление имеет слабое доказательство своей очевидности<sup>2</sup>. Отсюда следует, если только известно окружающее давление вокруг скважины, можно пренебречь отклонениями при распределении давления и рассчитывать добычу со скважины, как будто течение в нее строго радиальное.

В последнем случае неуверенность в выборе внешней границы системы  $r_e$  приведет к сравнительно небольшим ошибкам при исчислении

<sup>1</sup> В данном случае, а также в последующих разделах термин „расход“ будет представлять собой величину текущего дебита с данной поверхности стока на единицу мощности пористой среды.

<sup>2</sup> Следует заметить, что ряд Фурье можно приложить также и к решению уравнения Лапласа в декартовых координатах [уравнение (1), гл. IV, п. 1]. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что  $\frac{\text{ch}}{\text{sh}} ay \frac{\cos}{\sin} ax$  и  $\frac{\text{ch}}{\text{sh}} ax \frac{\cos}{\sin} ay$  являются частными решениями этого уравнения. Однако эти решения применимы только в том случае, когда область питания ограничена прямыми линиями, параллельными осям  $x$  или  $y$ . Применение разложения в ряд Фурье для решения задач, рассматриваемых в последующих главах, приводится в главах V, п. 3, VI, п. 20, VII, пп. 5 и 10 и X, п. 14.

значения  $Q$ , так как радиусы входят в величину  $Q$  в логарифмической форме.

Когда вместо распределения давления будет дано распределение скорости по одному или обоим радиусам  $r_e$  и  $r_w$ , можно применить для решения тот же самый аналитический метод. Так как в этом случае суммарный расход дается с самого начала, то все, что остается решить, — это установить отдельные подробности распределения давления и скорости в пласте песчаника, а такая задача не представляет большого практического интереса. Обычно достаточно знать средние давления, и уравнение (12), написанное в следующей форме:

$$\bar{p}_e = \frac{\mu Q \ln r_e/r_w}{2\pi k} + \bar{p}_w. \quad (13)$$

Этого вполне достаточно, чтобы охарактеризовать среднее давление на расстоянии  $r_e$  от скважины, когда известны среднее давление  $\bar{p}_w$  и текущий дебит  $Q$ .

Возвращаясь к первоначальной задаче, ограниченной уравнением (4), следует уточнить, является ли величина  $p_w$  положительной или отрицательной. В зависимости от этого течение будет соответствовать движению из верхней половины системы с радиусом  $r = r_e (0 < \theta < \pi)$  в скважину и утечке из скважины в нижнюю половину системы радиусом  $r = r_e (-\pi < \theta < 0)$ , или же движению в скважину из всей оконтуренной внешней границей области. Плотность расхода при этом будет выше при условии  $\theta > 0$ , чем при условии  $\theta < 0$ .

Наконец, при условии  $p_w > p_e$  следует держаться аналогичного аналитического метода, за исключением того, что скорости будут иметь обратное направление и система будет представлена движением, направленным от скважины в окружающий ее песчаный пласт.

**6. Течение между неконцентричными круговыми границами.** **Функция Грина.** В предыдущем разделе было показано, что допущение постоянства давления по внешнему круговому контуру, окружающему скважину, может дать очень близкое приближение при подсчете расхода, поступающего в скважину, при одном условии, что допущенное постоянство давления представляет собой среднее значение распределения давления по контуру. Следующим вопросом, который будет подвергнут рассмотрению, является приближение, заключающееся в допущении, что скважина находится в центре внешнего контура. Поэтому следует проанализировать условия течения в системе, где скважина и внешний контур не концентричны, и посмотреть, в какой степени эти условия будут отличаться от идеальной обстановки, когда центр скважины совпадает с центром внешнего кругового контура.

С этой целью является удобным ввести для решения задачи теорию и метод функции Грина. Для плоской задачи функция Грина может быть сформулирована следующим образом: решение  $G$  уравнения Лапласа, симметричное в двух точках  $(x, y; x', y')$ , имеет логарифмическую особенность при  $(x, y) = (x', y')$  и равно нулю, если  $(x, y)$  является точкой на контуре рассматриваемой области питания. В теории потенциала изучается аналогичная функция, которая обладает тем свойством,

что ее производная по нормали равняется нулю на всех точках контура. Для целей, поставленных в настоящей работе, встречается потребность только в функции, сформулированной в первоначальном изложении. Если эта функция будет найдена для данной области, можно показать, что распределение потенциала внутри последнего определится из следующего:

$$\bar{p}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \oint \bar{p}(x', y') \frac{\partial G}{\partial n'}(x, y; x' y') ds, \quad (1)$$

где  $\bar{p}(x', y')$  дает значение  $p$  на контуре области, элементы которого обозначены через  $ds$ ;  $n$  — внешняя нормаль к  $ds$ , а интеграл распространяется на весь контур. В принципе функция Грина представляет собой наиболее мощное аналитическое оружие, способное разрешить задачи в области теории потенциала. Однако недостатком ее является то обстоятельство, что нахождение функции Грина является часто такой же тяжелой задачей, что и решение задачи о потенциале прямыми способами. Все же для задачи, рассматриваемой в настоящем разделе, функция Грина может быть найдена без затруднения. Ход решения будет таков.

Допустим наличие двух элементарных точек питания (с пространственной точки зрения линия питания) с противоположными знаками на расстоянии  $\delta$  и  $d$  от центра круга, описанного радиусом  $r_e$ . Обе точки лежат на одной и той же радиальной линии так, что  $\delta < r_e < d$  (фиг. 32). Тогда результирующее давление в точке  $(x, y)$  можно выразить следующим равенством:

$$p = \ln \frac{r_2}{r_1} + \text{const} = \ln \frac{cr_2}{r_1}, \quad (2)$$

где  $r_1$  — расстояние  $(x, y)$  от источника в точке  $(\delta, 0)$  и  $r_2$  — расстояние от места стока в точке  $(d, 0)$ . Это выражение является решением уравнения Лапласа и имеет логарифмическую особенность внутри круга  $r = r_e$  при  $r_1 = 0$ . Оно становится равным нулю вдоль линии, определяемой уравнением:

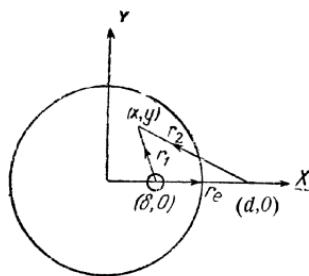
$$\frac{cr_2}{r_1} = 1, \quad (3)$$

или же для кривых:

$$\left( x - \frac{\delta - c^2 d}{1 - c^2} \right) + y^2 = \frac{c^2 (d - \delta)^2}{(1 - c^2)^2}. \quad (4)$$

Чтобы представить контур  $r = r_e$  с центром в начале координат, необходимо следующее:

$$d = \frac{r_e^2}{\delta}, \quad c = \frac{\delta}{r_e}. \quad (5)$$



Фиг. 32. Источник находится в точке  $(\delta, 0)$  внутри круга с радиусом  $r = r_e$  и его отображение  $(d, 0)$ .

Отсюда функция:

$$G_0 = \ln \frac{\delta}{r_e} \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

удовлетворяет требованиям функции Грина для области, оконтуренной окружностью  $r = r_e$ , за исключением того, что ее особенность относится к фиксированной точке  $(\delta, 0)$ . Если последняя будет замещена переменной точкой  $z' = (x', y')$ , легко убедиться, что соответствующая функция, которая является интересующей нас функцией Грина, будет иметь вид:

$$G(x, y; x', y') = \ln \frac{|z'| r_2}{r_e r_1}, \quad (6)^1$$

где

$$\left. \begin{aligned} |z'| &= \sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ r_2 &= \sqrt{\left(x - \frac{x' r_e^2}{|z'|^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y' r_e^2}{|z'|^2}\right)^2} \\ r_1 &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В общем случае отображением расположенной в круге  $r = r_e$  точки  $(x', y')$ , как это показано на фиг. 33, будет точка  $\left(\frac{x' r_e^2}{|z'|^2}, \frac{y' r_e^2}{|z'|^2}\right)$ .

Если скважина небольшого радиуса  $r_w$  помещена в точке  $(x', y')$ , для которой  $|z'| = \delta$ , ясно, что в случае

$$\frac{r_w}{r_e} \ll \frac{\delta}{r_e} < 1,$$

функция  $G$  будет постоянной во всех практических случаях по кругу радиусом  $r_w$  и будет иметь фактическое значение

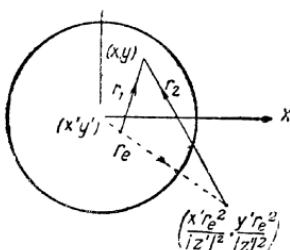
$$\ln \left[ \frac{\delta(d - \delta)}{r_e r_w} \right] = \ln \frac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}.$$

Отсюда решение  $p$ , для которого

$$\left. \begin{aligned} p &= p_w : & \sqrt{(x - \delta)^2 + y^2} &= r_w, \\ p &= p_e : & r &= r_e \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Фиг. 33. Отображение произвольной точки  $(x', y')$  внутри круга с радиусом  $r = r_e$ .

<sup>1</sup> Отсутствие симметрии в этом выражении для  $G$  является только внешним, так как достаточно небольших преобразований, чтобы показать  $|z'| r_2$  действительно симметричным в точке  $(x, y)$  и  $(x', y')$ . Вид  $G$ , который более отчетливо показывает симметрию, будет  $G = \ln \left| \frac{r_e^2 - z' z}{r_e(z - z')} \right|$ , где  $z, z'$  являются комплексными векторами к  $(x, y)$  и  $(x', y')$ , а вертикали указывают на комплексное сопряжение.



дается следующим равенством:

$$p = p_e - (p_e - p_w) \frac{G(x, y; \delta, 0)}{\ln \frac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}}. \quad (9)$$

Последнее дает распределение давления между скважиной и круговым контуром радиуса  $r_e$  для случая, когда скважина смешена на расстояние  $\delta$  от центра внешнего контура и где граничные условия даются уравнением (8). Чтобы определить расход из пласта в скважину, является удобным принять центр ее за начало полярных координат  $(r, \theta)$ . Тогда  $Q$  выразится из уравнения:

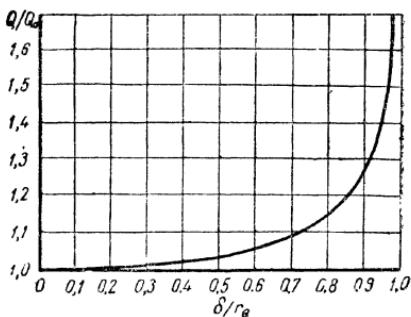
$$\begin{aligned} Q = - \int_{-\pi}^{+\pi} r v_r d\theta &= - \frac{k (p_e - p_w)}{\mu \ln \frac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}} \int_{-\pi}^{+\pi} r_w \left( \frac{\partial G}{\partial r_1} \right)_{r_1=r_w} d\theta = \\ &= \frac{2 \pi k (p_e - p_w)}{\mu \ln \frac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}} \end{aligned} \quad (10)$$

Интересно сравнить полученное значение  $Q$  из уравнения (10) с полученным ранее для строго радиального течения  $Q_0$  согласно уравнению (10), гл. IV, п. 2. Отношение

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\ln \left( 1 - \frac{\delta^2}{r_e^2} \right)}{\ln \frac{r_e}{r_w} + \ln \left( 1 - \frac{\delta^2}{r_e^2} \right)} \quad (11)$$

дано построением на фиг. 34 как функция  $\delta/r_e$  для  $r_e/r_w = 2000$ . Видно, что влияние смещения скважины из центра области питания настолько незначительно, что, даже когда она находится на половине расстояния между центром внешнего контура и самим контуром, рост дебита меньше 5% от первоначального  $Q_0$ .

С практической точки зрения этот вывод показывает, что можно пренебречь ошибкой, которая создается допущением нахождения скважины непосредственно в центре кругового контура, если только смещение ее из центра не является величиной порядка самого радиуса контура. Этот вывод вполне оправдывает применение формулы простого радиального течения в том случае, когда забой скважины наклонен к плоскости залегания песчаника под любым более или менее обоснованным углом, так как получающееся в конечном итоге



Фиг. 34. График влияния на эксплоатационную производительность скважины ее смещения ( $\delta$ ) от центра внешнего кругового контура:

$Q/Q_0 = (\text{эксплоатационная производительность смещенной скважины}) / (\text{эксплоатационную производительность центральной скважины})$ ;  $(\text{радиус скважины}) / (\text{радиус внешнего контура}, r_e) = 1/2000$ .

результатирующее смещение скважины от центра пласта создает малоощущительные изменения в значении  $Q$ .

Для того чтобы подчеркнуть исключительное преимущество применения функции Грина, если только последняя была найдена, определим распределение давления для случая, когда последнее не является более постоянным по внешнему контуру. Так, если граничные условия представлены в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} p = p_w: \quad V(x - \delta)^2 + y^2 = r_w \\ p = p_e \theta: \quad r = r_e \end{array} \right\} \quad (12)$$

уравнения (1) и (9) дают нам следующее решение:

$$p = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} p_e(\theta') r_e \left( \frac{\partial G}{\partial n'} \right)_{r'=r_e} d\theta' + \frac{p_w - u_0}{\ln \frac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}} G(x, y; \delta, 0), \quad (13)$$

где

$$u_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} p_e(\theta') r_e \left\{ \frac{\partial G(\delta, 0; x', y')}{\partial n'} \right\}_{r'=r_e} d\theta' \quad (14)$$

является, очевидно, значением первого члена в уравнении (13) для центра скважины и отсюда согласно теореме Гаусса (гл. IV, п. 16) представляет среднее давление на поверхности забоя, обязанное распределению давления на внешнем контуре. Таким образом, математическое определение давлений в любой точке между забоем скважины и внешними границами сводится к решению определенного интеграла из уравнения (13). Равным образом решается просто задача определения расхода в скважину при этих условиях. В уравнении (10) расход обозначается следующим выражением:

$$Q = \frac{k}{\mu} \int_{-\pi}^{+\pi} r_w \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_{r=r_w} d\theta.$$

Легко убедиться в том, что интеграл в уравнении (13) не определяет собой полезного расхода в скважину, так как все выражение содержит член, связанный с  $p$  и имеющий конечное значение во всех точках внутри внешнего контура. Отсюда  $Q$  принимает вид:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{kr_w(p_w - u_0)}{\mu \ln \frac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ \frac{\partial G}{\partial r_1}(x, y; \delta, 0) \right]_{r_1=r_w} d\theta = \\ &= \frac{2k\pi(u_0 - p_w)}{\mu \ln \frac{r_e^2 - \delta^2}{r_e r_w}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Значение  $u_0$  среднего давления на поверхности скважины, обязанное распределению его на контуре, так же, как и значение давления для центра скважины, обязанное распределению давления на поверхности

последней, может быть получено простым решением интеграла (уравнение 14), принимая во внимание, что

$$G(\delta, 0; x', y') = \frac{1}{2} \ln \frac{r_e^4 + \delta^2 r'^2 - 2\delta r' r_e^2 \cos \theta'}{r_e^2 \{r'^2 + \delta^2 - 2r'\delta \cos \theta'\}}, \quad (16)$$

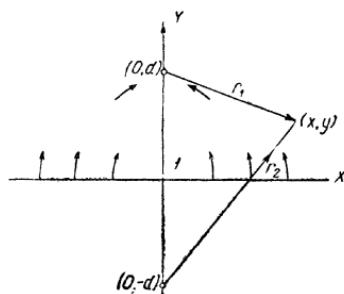
где  $|z'|$  заменено через  $r'$  и  $\theta'$  — угол между  $z'$  и осью  $x$ . Легко установить, что полученный результат является интегралом Пуассона:

$$u_0 = \frac{1 - \delta^2/r_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{p_e(\theta') d\theta'}{1 - 2 \frac{\delta}{r_e} \cos \theta' + \frac{\delta^2}{r_e^2}}. \quad (17)$$

Так как метод решения с помощью функций Грина требует первоначального определения функции Грина применительно к геометрии изучаемой проблемы, в приложении приводятся функции Грина для некоторых двухмерных областей. Они могут явиться полезными при решении других плоских задач.

**7. Течение из бесконечного линейного источника питания в скважину. Фронтальное продвижение. Метод отражений.** Следующей плоской задачей, имеющей практический интерес и относящейся к течению в единичную скважину, является такая, где внешним контуром вместо окружности будет прямая линия. Эта система соответствует наиболее простому случаю наступления краевой воды, где проникающая в пласт вода образует „фронтальное продвижение“, замещая и оттесняя нефть в скважину, расположенную вблизи водо-нефтяного раздела. Она может также соответствовать течению в артезианскую скважину, пробуренную в проницаемом песчанике, который беспрестанно насыщается водой из близлежащей реки или канала. Тогда последний будет являться линейным источником питания, в котором давление будет поддерживаться постоянным и выше, чем давление на забое скважины (фиг. 35). Можно допустить, что бесконечно протяженный линейный источник жидкости представлен осью  $x$ -ов и что на расстоянии  $d$  от него имеется скважина радиусом  $r_w$ . Допустим на один момент, что давление вдоль линейного источника питания поддерживается на нулевом значении, а давление на забое скважины равным  $p_w$ . Будет ли тогда течение жидкости направлено в скважину или из скважины и каков будет характер распределения давления?

Из рассмотрения, произведенного в предыдущем разделе, становится ясным, что вследствие незначительности размеров радиусов скважины по



Фиг. 35. Бесконечный линейный источник движения жидкости по направлению к скважине в точке  $(0, d)$ .

$I$  — линейный источник.

сравнению с остальными величинами размеров, рассматриваемых в практической задаче, для аналитических целей можно представить себе любую скважину с постоянным давлением  $p_w$  в виде точечного источника или стока, помещенного в центре забоя скважины (с трехмерной точки зрения это будет линейный источник питания или стока, ось которого перпендикулярна к плоскости  $xy$ ). Потенциал такой скважины будет иметь вид:

$$p = q \ln \frac{r}{r_w} + p_w, \quad (1)$$

где  $r_w$  — радиус скважины и  $q$  — произвольный коэффициент. В системе, состоящей из некоторого числа скважин, каждая из них будет участвовать в суммарном распределении давления именно этой величиной, причем радиусы  $r$  будут, разумеется, замеряться от центра забоя отдельных скважин. Справедливо, что в уравнении (1), при  $r=0$ , т. е. соответственно центру скважины  $p$  становится неопределенным. Однако в этом нельзя усмотреть затруднений, так как интересующая нас область помещается между скважиной и внешним контуром. Допустим, что в самой скважине нет песка или иной пористой среды, т. е. основное уравнение (1), гл. IV, п. 2, неприменимо к ее внутренности. Поэтому, если последнее экстраполировать на те области, которые не подчиняются этому уравнению, решение уравнения (1), гл. IV, п. 2, не представляет собой никакого интереса.

Исходя отсюда, можно к величинам, представленным уравнением (1) и отнесенными к реальным скважинам в верхней полуплоскости, где  $y > 0$ , т. е. в интересующей нас области, добавить другие аналогичные величины, относящиеся к гипотетическим скважинам в нижней полуплоскости, где  $y < 0$ . В этом случае опять принятые величины обращаются в неопределенность в центрах соответствующих скважин. Но так как поведение их в пределах интересующей нас области, где  $y > 0$ , не будет противоречиво, то приложение их в этом месте не встречает особых затруднений. Так, в частности, реальная скважина в точке  $(0, d)$  может иметь или можно допустить, что она имеет, зеркальное отражение в нижней части плоскости под осью  $x$ -ов. Кроме того, можно допустить, что это отражение является отрицательным, т. е. его потенциальная форма является отрицательной величиной членов соответствующего уравнения (1). Тогда в результате взаимодействия этих двух скважин будет иметь место следующее соотношение:

$$p = q \ln \frac{r_1}{r_w} + p_w - q \ln \frac{r_2}{r_w} - p_w = q \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad (2)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  будут соответственными расстояниями от центра скважины и ее отражения. Посмотрим теперь, что обозначает это выражение. Чтобы найти его значение для поверхности забоя скважины, необходимо заметить следующее. Для реальной скважины  $r_1 = r_w$  и  $r_2$  изменяется от  $2d - r_w$  до  $2d + r_w$ . Но так как  $r_w$  гораздо меньше  $d$ , а согласно уравнению (2)  $p$  изменяется логарифмически с изменением  $r_2$ , вполне

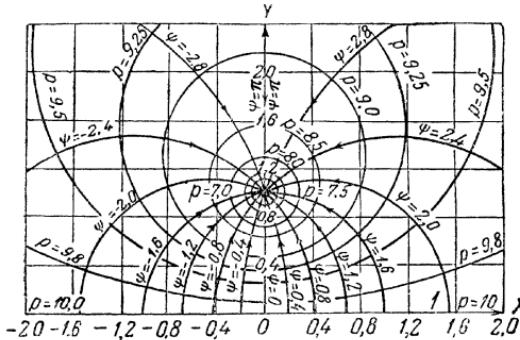
оправдывается допущение  $r_2 = 2d$  для всех случаев рассмотрения поверхности забоев скважин. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$p = q \ln \frac{r_w}{2d} ; \quad r_1 = r_w, \quad (3)$$

который при соответствующем подборе величины  $q$  может принять любое допускаемое и заранее намеченное значение.

Однако большую значимость имеет вывод из уравнения (2), что при  $r_1 = r_2$ , —  $p = 0$  и что геометрическое место точек, где  $r_1 = r_2$ , — есть ось  $x$ -ов. Иначе говоря, решение

$$p = \frac{p_w}{\ln r_w/2d} \ln \frac{r_1}{r_2} , \quad (4)$$



Фиг. 36. Кривые равного давления и линии тока для движения жидкости в скважину из бесконечного линейного источника при постоянном давлении.

I — линейный источник.

обращается в нуль на оси  $x$ -ов и имеет значение  $p_w$  для поверхности забоя скважины. Таким образом, этот вывод является решением физической задачи, поставленной в начале настоящего раздела.

Быть может, на практике явится более удобным установить давление на линейном источнике питания скорее  $p_e$ , чем нуль.

Тогда легко заметить, что решение задачи в декартовых координатах будет:

$$p = \frac{p_w - p_e}{\ln r_w/2d} \ln \frac{r_1}{r_2} + p_e = \frac{1}{2} \frac{p_e - p_w}{\ln 2d/r_w} \ln \frac{x^2 + (y-d)^2}{x^2 + (y+d)^2} + p_e. \quad (5)$$

Отсюда кривые постоянного напора даются отношением:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{x^2 + (y-d)^2}{x^2 + (y+d)^2} = \text{const} = c^2, \quad (6)$$

или

$$x^2 + \left[ y - d \left( \frac{1+c^2}{1-c^2} \right) \right]^2 = \frac{4d^2c^2}{(1-c^2)^2} \quad (7)$$

и являются, очевидно, окружностями радиуса  $2dc/(1-c^2)$  с центрами, находящимися в точке  $\left[ 0, d \left( \frac{1+c^2}{1-c^2} \right) \right]$ . На фиг. 36 приведены несколько



Легко убедиться, что этот вывод можно получить также из уравнения

$$Q = - \frac{kr_w}{\mu} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_{r_1=r_w} d\theta_1, \quad (9)$$

где  $n$  — нормаль к окружности радиусом  $r_1 = r_w$ , определяющим скважину.

Интересно заметить, что согласно уравнению (8) расход в скважину, находящуюся на расстоянии  $d$  от линейного источника питания с давлением  $p_e$ , является аналогичным расходу в ту же самую скважину, если она окружена круговым источником питания с радиусом  $2d$  и давлением  $p_e$ . Отсюда поток пропорционален перепаду давления  $p_e - p_w$  и изменяется логарифмически с изменением расстояния от скважины до источника питания.

Уравнение (8) можно приложить к решению задачи подсчета производительности артезианской скважины, пробуренной вблизи реки или канала (фиг. 38)<sup>1</sup>. В частности, оно показывает, что эта производительность изменяется весьма медленно, логарифмически, с изменением расстояния скважины от источника питания водой. Более того, производительность прямо пропорциональна превышению напора жидкости в реке или канале над уровнем, который поддерживается в скважине.

Возьмем в качестве численного примера (фиг. 38) перепад давления жидкости 3 м, проницаемость песчаника 1 дарси, диаметр скважины 0,15 м и расстояние от берега 30 м (допустим вертикальность скважины). Тогда:

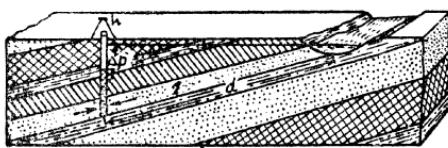
$$p_e - p_w = 0,295 \text{ atm}; \quad k = 1 \text{ дарси}; \quad \mu = 1; \quad r_w = 0,075 \text{ м}; \quad d = 30 \text{ м}.$$

Согласно уравнению (8) имеем:

$$Q = 0,309 \text{ см}^3/\text{сек}/\text{см} \text{ мощности песчаника.}$$

Для скважины, которая пробурена на расстоянии 60 м от берега, производительность уменьшится до величины  $0,295 \text{ см}^3/\text{сек}/\text{см}$  мощности песчаника.

Полученное аналитическое решение можно распространить также на подсчет влияния интерференции вследствие наличия других скважин



Фиг. 38. Артезианская скважина, дренирующая пласт песчаника, питаемый водой из реки или из канала.

1 — песчаник.

<sup>1</sup> То обстоятельство, что представленный на фиг. 38 пласт песчаника имеет уклон, не имеет никакого влияния на справедливость полученного решения. Поскольку скважина вскрыла песчаник полностью, течение в скважину будет строго двухмерным, исключая не заслуживающие внимания нарушения его, обязанные отклонению оси скважины от перпендикулярности по отношению к плоскости напластования песчаника.

вдоль берега реки или канала. Подробности такого решения будут даны в главе IX, где будет развита общая теория многоскважинных систем. Следует упомянуть, что метод отображений является в основном способом нахождения соответствующей функции Грина для частной интересующей нас задачи. Это становится ясным из сравнения уравнения (4) с функцией Грина в гл. IV, п. 6 и уравнения (5) с функцией Грина для полубесконечной плоскости, рассматриваемой в приложении. Фактически функции Грина, перечисленные в приложении, можно свободно получить как конечные выводы соответствующего комплекса конечного или бесконечного числа отображений. Уравнение (7), которое показывает, что для функции давления

$$p = q \ln \frac{r_1}{r_2} .$$

окружности радиусом  $\frac{2dc}{1-c^2}$  и центрами в точке  $\left[0, d - \frac{1+c^2}{1-c^2}\right]$  являются эквипотенциальными кривыми, позволяет точное решение<sup>1</sup> задачи гл. IV, п. 5 без допущения, что  $r_w \ll r_e$ .

Таким образом, можно убедиться в том, что, обозначая  $\alpha = r_e/r_w$ ,  $\beta = \frac{\delta}{r_e}$ , константы  $c_e$ ,  $c_w$ , характеризующие внешний контур и скважину, определяются из следующего выражения:

$$\beta c_w^2 + c_w \left( \alpha \beta^2 - \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) + \beta = 0,$$

$$c_e = \beta + \frac{c_w}{\alpha}$$

и

$$p(x, y) = \frac{\Delta p}{\ln c_e/c_w} - \ln \frac{r_1}{r_2} - \frac{p_e \ln c_w - p_w \ln c_e}{\ln c_e/c_w} ,$$

где

$$r_1^2 = x^2 + \left[ y - \frac{r_e (1 - c_e^2)}{2c_e} \right]^2; \quad r_2^2 = x^2 + \left[ y + \frac{r_e (1 - c_e^2)}{2c_e} \right]^2,$$

и центры круговых границ радиусом  $r_e$ ,  $r_w$  будут находиться в точках:

$$\left[ 0, \frac{r_e}{2c_e} (1 + c_e^2) \right], \quad \left[ 0, \frac{r_w}{2c_w} (1 + c_w^2) \right].$$

**8. Течение из конечного линейного источника питания в песчаник бесконечной величины. Метод сопряженных функций.** В последнем разделе была подвергнута рассмотрению задача единичной скважины, дренирующей песчаник, в который поступает жидкость из бесконечного источника питания. Такая обстановка создается, если линейный источник питания, например, канал или река, параллелен

<sup>1</sup> Другой способ точного решения этой задачи заключается в применении „биполярных“ координат (см. H. Bateman „Partial Differential Equations“, стр. 260, 1932).

контакту жидкости с песчаником на большем расстоянии по сравнению с остальными размерами системы, например, расстоянием скважины от источника питания. Если же канал или река пересекают выход песчаника, как это показано на фиг. 39, то эффективным источником питания будет ширина канала или реки, которая может быть значительно меньше расстояния скважины от выхода пласта. Тогда источник питания следует рассматривать как конечный и для него должно быть найдено соответственное аналитическое решение.

При разборе такого решения является удобным применить теорию сопряженных функций, которую вкратце и опишем. Физическое значение теории сопряженных функций заключается в основном наблюдении, что обе части аналитической функции<sup>1</sup> комплексной переменной, действительная и мнимая,  $z = x + iy$ , определяемые выражением

$$\omega = \Phi + i\Psi = f(z) = f(x+iy) \quad (1)$$

удовлетворяют плоскому уравнению Лапласа. Тогда из уравнения (1) непосредственно вытекает, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i \frac{\partial\Psi}{\partial x} = f'z; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} + i \frac{\partial\Psi}{\partial y} = if'(z), \quad (2)$$

так что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Функции  $\Phi$  и  $\Psi$  являются потенциальными. Более того, они образуют взаимно связанную ортогональную решетчатую систему, так как из уравнения (3) следует непосредственно, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

Если теперь допустить, что  $\Phi$  является потенциалом скорости, согласно уравнения (5) гл. III, п. 3, так что:

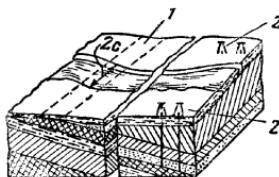
$$v_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad (6)$$

получим

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\partial\Phi/\partial y}{\partial\Phi/\partial x} = -\frac{\partial\Psi/\partial x}{\partial\Psi/\partial y}. \quad (7)$$

Таким образом, направление течения жидкости в любой точке совпадает с касательной в этой точке к кривым  $\Psi(x, y) = \text{const}$ . Эти кривые известны под названием линий тока для жидкости, где кривые

<sup>1</sup> Функцию  $f(z)$  называют „аналитической“ в точке  $z = a$ , если она имеет однозначно определяемую производную в  $a$ , а также в каждой точке, непосредственно примыкающей к ней.



Фиг. 39. Выход песчаника пересекает ложе реки или канала, которые образуют при этом линейный источник питания:

1 — выход пласта песчаника;  
2 — скважины

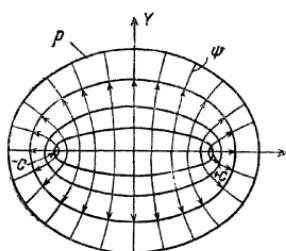
$\Phi(x, y) = \text{const}$  являются эквипотенциальными линиями. Такие две функции называются сопряженными. Функции  $\Psi(x, y)$  также известны под названием „функций тока“.

Отсюда видно, что, если составить уравнение вида (1) и принять  $\Phi$  и  $\Psi$  соответственно за действительную и мнимую часть его, можно рассматривать  $\Phi$  как потенциал скорости в физической задаче с эквипотенциальными линиями  $\Phi = \text{const}$  и линиями тока  $\Psi = \text{const}$ . Вспоминая, что для плоской горизонтальной системы потенциал скорости  $\Phi$  является давлением, умноженным на величину  $k/\mu$ , заключаем, что если в частном случае одна из кривых  $\Phi = \text{const}$  совпадает с интересующей нас физической границей, общие значения  $\Phi$  и  $\Psi$  соответствуют физической проблеме, где граничные условия обеспечиваются постоянством давления.

В настоящем разделе, рассматривая физическое приложение этой теории, мы введем предположение, что конечный линейный источник питает при постоянном давлении пласт бесконечной величины. Задача о скважине, дренирующей этот песчаный пласт, будет рассмотрена в ближайшем разделе. Так, для частного случая (уравнение 1) будет допущено, что

$$f(z) = p + i\Psi = \operatorname{ch}^{-1} \frac{(x+iy)}{c}, \quad (8)$$

где  $c$  — постоянная величина и где потенциальная функция  $\Phi$  заменена давлением жидкости  $p$ . Легко заметить, что, выделяя действительную и мнимую часть выражения, имеем:



Фиг. 40. Кривые равного давления и линии тока относительно конечного линейного источника питания.

Уравнения (10) показывают, что кривые равного напора  $p = \text{const}$  являются конфокальными эллипсами, фокусы которых находятся в точке  $x = \pm c$ , а полуоси имеют значения  $c \operatorname{ch} p$  и  $c \operatorname{sh} p$ . Линии тока  $\Psi = \text{const}$  являются конфокальными гиперболами, у которых полуоси соответственно  $c \cos \Psi$  и  $c \sin \Psi$ , как это показано на фиг. 40. С физической стороны эти кривые можно принять дающими распределение давления и линий тока в системе, где поддерживается постоянное давление  $p_e$  по эллиптическому контуру:

$$\frac{x^2}{a_e^2} + \frac{y^2}{b_e^2} = 1,$$

и давление  $p_w$  по внутренней конфокальной эллиптической поверхности:

$$\frac{x^2}{a_w^2} + \frac{y^2}{b_w^2} = 1.$$

Когда  $b_w = 0$ , внутренний эллипс вырождается в конечный линейный источник питания длиной  $2c$ , определяемый из

$$y = 0; \quad |x| \leq a_w = c; \quad b_w = 0, \quad (11)$$

Тогда распределение давления и линий тока определяется вполне точно следующим выражением<sup>1</sup>:

$$p = \operatorname{ch}^{-1} H; \quad \Psi = \cos^{-1} H, \quad (12)^2$$

где

$$H = \left[ \frac{x^2 + y^2 + c^2 \pm \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2 c^2}}{2c^2} \right]^{1/2}, \quad (13)$$

знак плюс относится к  $p$ , а минус к  $\Psi$ .

В частности, вдоль оси  $x$ -ов, на которой лежит линейный источник питания, уравнения (12) и (13) дают:

$$\left. \begin{array}{l} p = 0; \quad |x| \leq c; \quad p = \operatorname{ch}^{-1} \left| \frac{x}{c} \right|; \quad |x| \geq c \\ \Psi = 0; \quad x > c; \quad \Psi = \pi; \quad x < -c \\ \Psi = \cos^{-1} \frac{x}{c}; \quad |x| < c \end{array} \right\} \quad (14)$$

Чтобы найти величину суммарного расхода  $Q$ , поступающего в песчаник из линейного источника питания, необходимо только заметить следующее свойство функции тока  $\Psi$ , а именно

$$\Delta\Psi = \int d\Psi = \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \frac{k}{\mu} \int \frac{\partial p}{\partial n} ds, \quad (15)$$

где интегралы относятся ко всей кривой, представленной элементарным отрезком  $ds$ . Отсюда разность в величине  $\Psi$  между любыми двумя точками системы равняется полезной величине расхода, проходящего через любую кривую, соединяющую обе точки. Из уравнения (14) вытекает, что расход  $Q$ , выходя из источника питания, определяется выражением

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu}. \quad (16)$$

Эта величина соответствует нулевому давлению у линейного источника питания и давлению  $p_e = \ln \frac{(b_e + a_e)}{c}$  на внешнем конфокальном эллипсе, имеющем полуоси  $a_e$  и  $b_e$ .

<sup>1</sup> Уравнения (12) и (14) даются также Слихтером (U. S. Geol. Surv. 19th Ann. Rept., 295, 1897—1898).

<sup>2</sup> Уравнение (12) показывает непосредственно, что  $p$ ,  $\Psi = \text{const}$  есть конфокальные эллипсы, а гиперболы определяются выражением  $p = \operatorname{ch}^{-1} \frac{(r_1 + r_2)}{2c}$ ;  $\Psi = \cos^{-1} \frac{(r_1 - r_2)}{2c}$ , где  $r_1$ ,  $r_2$  являются расстояниями от фокусов ( $\pm c$ , 0), внешних точек линейного источника питания ( $x$ ,  $y$ ).

Отсюда для общего перепада давления  $\Delta p$ , поддерживаемого между источником питания и внешним эллипсом с меньшей полуосью  $b_e$ , значение расхода будет:

$$Q = \frac{2\pi k \Delta p}{\mu \ln \frac{a_e + b_e}{c}} = \frac{2\pi k \Delta p}{\mu \ln \frac{b_e + \sqrt{c^2 + b_e^2}}{c}}, \quad (17)$$

где  $2c$  — длина линейного источника питания<sup>1</sup>.

Наконец, можно заметить, что для расстояний от линейного источника питания, значительно больших по сравнению с длиной самого источника питания, давление, как это и следует ожидать, принимает логарифмическую радиальную форму. Если  $x^3 + y^2 = r^2 \gg c^2$ , то  $H \sim r/c$  или  $x/r$ . Беря верхний или нижний знаки в уравнении (13), получаем:

$$\left. \begin{aligned} p &\cong \operatorname{ch}^{-1} \frac{r}{c} \cong \ln \frac{2r}{c} : & x^2 + y^2 &\gg c^2 \\ \Psi &\cong \cos^{-1} \frac{x}{r} = \theta \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где  $\theta$  — угол полярных координат, начало которых находится в центре источника.

**9. Течение из конечного линейного источника питания в скважину.** Преобразования сопряженной функции. Бесконечный ряд отображений. В предыдущем разделе было показано, что всякое уравнение вида (1), гл. IV, п. 8 дает две „сопряженные функции“, одна из которых может „интерпретироваться“ физически как система эквипотенциальных кривых, а другая соответствующими им линиями тока. Они найдут себе отражение в действительной физической системе, если заранее намеченное распределение давлений и расходов на ее границах будет пропорционально (аддитивной константе) тем величинам, которые создаются решеткой сопряженных функций на кривых, оконтуривающих физическую систему. Так, при рассмотрении задачи, представленной в гл. IV, п. 8, фактическое решение состоит в заключении, что один из эквипотенциалов решетки сопряженной функции, сформулированной уравнением (8), гл. IV, п. 8, а именно вырождающийся эллипс из уравнения (14), гл. IV, п. 8 геометрически совпадает с конечным линейным источником питания исследуемой физической системы. Аналогичные задачи могут решаться тем же путем.

Однако для решения представленной задачи будет использовано несколько иное свойство сопряженных функций. Это означает: вместо того чтобы получить из них непосредственное решение уравнений Лапласа, эти функции будут использованы для преобразования независимой переменной ( $x$ ,  $y$ ). Здесь следует заметить, что преобразование сопряженной функции

$$\zeta = \xi + i\eta = f(z) = f(x + iy) \quad (1)$$

<sup>1</sup> Следует заметить, что уравнения (16) и (17) дают величину расхода, выходящего с обеих сторон источника питания.

оставляет уравнение Лапласа инвариантным, так что если

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0,$$

то, очевидно, также справедливо:

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} = 0. \quad (2)$$

Преобразование уравнения (1) можно использовать для замены геометрических границ физической системы на иные, являющиеся более подходящими при аналитических упражнениях. Так, физическая система в прямоугольной  $(x, y)$  системе координат, т. е. в плоскости  $z$ , соответствующая течению из конечного линейного источника питания в скважину, может быть представлена схематически на фиг. 41. Вследствие того, что предполагается пересечение выхода песчаника ложем реки, можно принять, что, кроме линейного источника питания, соответствующего выходу песчаного пласта в ложе реки, отсутствует расход через ось  $x$ -ов и в песчаник. Это требование легко удовлетворяется само по себе, если использовать распределение давления согласно предыдущему разделу и добавить к нему логарифмический член, обязанный наличию скважины в точке  $(x_0, y_0)$ , и другой логарифмический член, обязанный ее положительному отражению в точке  $(x_0, -y_0)$ . Однако присутствие этих двух логарифмических членов нарушит постоянство давления на линейном источнике питания. Тогда возникнет задача найти такое дополнительное распределение расхода по линейному источнику, которое скорректирует нарушение распределения давления, созданное наличием действительной скважины и ее отражением. Чем пытаться решить интегральное уравнение, к которому приводит эта задача, вернее будет преобразовать схему на плоскости  $z$  в плоскость  $(\xi, \eta)$  или „плоскость  $\zeta$ “ следующим путем.

Прибегая снова к соотношению комплексного переменного из гл. IV, п. 8, имеем:

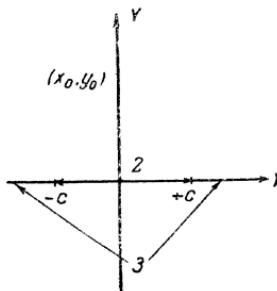
$$\zeta = \xi + i\eta = \operatorname{ch}^{-1} \frac{(x+iy)}{c}. \quad (3)$$

Отсюда следует, как и раньше,

$$\left. \begin{array}{l} x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta \end{array} \right\} \quad (4)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1 \\ \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1 \end{array} \right\} \quad (5)$$



Фиг. 41.

1 — плоскость  $z$ ; 2 — конечный линейный источник питания;  
3 — нулевой расход.

Подходя аналогичным путем, что и при интерпретации уравнения (14); гл. IV, п. 8, замечаем, что ось  $x$ -ов в плоскости  $z$  переходит в  $y=0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} |x| < c : \rightarrow : \quad \xi = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \pi \\ x > c : \rightarrow : \quad \eta = 0, \quad 0 \leq \xi < \infty \\ x < -c : \rightarrow : \quad \eta = \pi, \quad 0 \leq \xi < \infty \\ (x_0, y_0) \rightarrow (\xi_0, \eta_0) \end{array} \right\} \quad (6)$$

Таким образом, верхняя полуплоскость  $z$  представляется на фиг. 42 в виде полубесконечной полосы плоскости  $\zeta$ .

Уравнением распределения давления в плоскости  $\zeta$  опять является уравнение Лапласа (2), и граничные условия внешне останутся теми же самыми, что и раньше, а именно:

$$\left. \begin{array}{l} p = p_e : \quad \xi = 0, \quad \eta = \pi \text{ (линейный источник)} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 : \quad \eta = 0, \quad \eta = \pi \text{ (остаток оси } x\text{-ов)} \end{array} \right\} \quad (7)$$

Хотя дифференциальные уравнения и граничные условия внешне остались теми же, важно заметить, что в плоскости  $\zeta$  налагается простое условие на каждый из граничных сегментов, в то время как в плоскости  $z$  были наложены „смешанные условия“ на единичный контур ( $y=0$ ), т. е. установление  $p$  на одной части его и  $\frac{\partial p}{\partial y}$  на остальной части. Отсюда действительной целью введения в решение представленной задачи, так же как и в других аналогичных преобразованиях сопряженной функции, является освобождение от смешанных граничных условий<sup>1</sup>.

Чтобы решить теперь преобразованную задачу согласно уравнений (2) и (7), необходимо расширить и применить метод отражений, уже описанный в гл. IV, п. 7. Рассматривая снова скважину в точке  $(\xi_0, \eta_0)$  как математический сток, можно получить нулевой расхода на контурах  $\eta=0, \pi$ , устанавливая дополнительно отражения в точке  $(\xi_0, -\eta_0)$  и  $(\xi, 2\pi - \eta_0)$ . Однако первое условие создает расход, не равный нулю, при  $\eta=\pi$ , а второе при  $\eta=0$ . Тогда эти точки должны будут исправляться собственными отражениями и т. д.

В дополнение к этому бесконечная система должна отражаться в направлении оси  $\eta$  так, чтобы создать постоянное (превращающееся в нуль) давление по оси  $\eta$  (линейного источника питания в плоскости  $z$ ).

<sup>1</sup> Гораздо более простым способом решения задач со смешанными граничными значениями является объединение метода преобразований сопряженной функции со „смешанными“ функциями Грина, которые сформулированы так, что имеют нулевое значение на той части контура, где давление было установлено и где производные их по нормали равняются нулю на той части контура, для которой эти производные были определены (см. M. Muskat, Physics, 6, 27, 1935, в частности, раздел В). Действительно, при таком решении распределение давления согласно уравнению (11) будет найдено просто, как сама функция Грина, хотя координаты  $(\xi, \eta)$  будут установлены преобразованием, отличным от уравнения 3).

Тогда конечный полный ряд отражений определится выражениями (фиг. 42):

$$-q : (\xi_0, \pm 2n\pi \pm \eta_0); \quad +q : (-\xi_0, \pm 2n\pi \pm \eta_0), \quad (8)$$

где  $q$  представляет „напряжение“ физической скважины в точке  $(\xi_0, \eta_0)$ .

Отсюда распределение давления в результате такой системы отражений напишется:

$$p = \frac{q}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{(\xi + \xi_0)^2 + (\eta - 2n\pi - \eta_0)^2}{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - 2n\pi - \eta_0)^2} + \\ + \frac{q}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{(\xi + \xi_0)^2 + (\eta - 2n\pi + \eta_0)^2}{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - 2n\pi + \eta_0)^2}. \quad (9)$$

Эти суммы могут быть упрощены ввиду того, что

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \ln [(\xi - h)^2 + (na - \eta)^2] = \\ \ln = \prod_{-\infty}^{+\infty} [(\xi - h)^2 + (na - \eta)^2] = \\ = \ln^* \prod_{-\infty}^{+\infty} n^2 a^2 + \ln \eta^2 + 2 \ln \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\eta}{na}\right) \left(1 + \frac{\eta}{na}\right) + \\ + \ln \prod_{-\infty}^{+\infty} \left\{1 + \frac{(\xi - h)^2}{(na - \eta)^2}\right\} = \\ = \ln \sin^2 \frac{\eta\pi}{a} + \ln \frac{\operatorname{ch} 2\pi (\xi - h)/a - \cos 2\pi\eta/a}{1 - \cos 2\pi\eta/a} = \\ = \ln [\operatorname{ch} 2\pi (\xi - h)/a - \cos 2\pi\eta/a], \quad (10)^1$$

где константа  $\ln \prod_{-\infty}^{+\infty} n^2 a^2$ , а также другие константы отброшены.

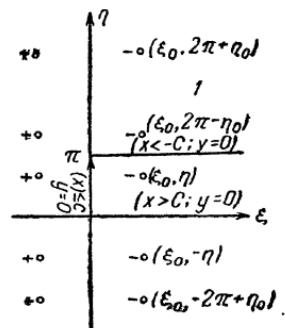
Уравнение (9) может быть приведено к виду:

$$p = p_e + \frac{q}{2} \ln \frac{[\operatorname{ch} (\xi + \xi_0) - \cos (\eta - \eta_0)]}{[\operatorname{ch} (\xi - \xi_0) - \cos (\eta - \eta_0)]} \times \\ \times \frac{[\operatorname{ch} (\xi + \xi_0) - \cos (\eta + \eta_0)]}{[\operatorname{ch} (\xi - \xi_0) - \cos (\eta + \eta_0)]}, \quad (11)$$

где константа  $p_e$  была добавлена, чтобы получить  $p(\xi = 0) = p_e$ .

\* Отметка „ прим“ указывает, что член  $n=0$  опущен.

<sup>1</sup> Whittaker and Watson, „Modern Analysis“, 4th ed., p. 137, 1927.



Фиг. 42. Отображение на плоскости  $\zeta$ , необходимое для удовлетворения граничных условий, показанных на фиг. 41.

Уравнение (11) удовлетворяет второму граничному условию (7). Тогда дифференциальное уравнение (2) может быть подтверждено непосредственной подстановкой. Если теперь помочью уравнений (4) и (5) ( $\xi$ ,  $\eta$ ) выразить через  $(x, y)$  и подставить в (11), можно сейчас же получить распределение давления для первоначальной задачи в плоскости  $z$ . Однако, чтобы получить величину расхода в системе, следует избежать применения этой достаточно сложной подстановки. На радиусе скважины можно принять  $\eta = \eta_0$ ,  $\xi = \xi_0 = \varepsilon \ll 1$ , откуда:

$$p_w = p_e + \frac{q}{2} \ln \frac{2 \operatorname{sh}^2 \xi_0 (\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta_0)}{\varepsilon^2 \sin^2 \eta_0} = \\ = p_e + q \ln \frac{2c \operatorname{sh} \xi_0 (\operatorname{sh}^2 \xi_0 + \sin^2 \eta_0)}{r_w \sin \eta_0}, \quad (12)$$

где  $r_w$  — радиус скважины, так как

$$\bar{ds}^2 \text{ (плоскость } z) = c^2 (\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta) \bar{ds}^2 \text{ (плоскость } \zeta). \quad (13)$$

Уравнение (12) указывает, что очень близко к центру скважины распределение давления дается выражением:

$$p = p_e + \operatorname{const} - q \ln \varrho, \quad (14)$$

где  $\varrho$  — расстояние от центра скважины.

Тогда расход в скважину будет:

$$Q = - \frac{2\pi k q}{\mu}, \quad (15)$$

так что, возвращаясь к уравнению (12), величина расхода в общем виде будет:

$$Q = \frac{2\pi k (p_e - p_w)}{\mu \ln \frac{2c \operatorname{sh} \xi_0 (\operatorname{sh}^2 \xi_0 + \sin^2 \eta_0)}{r_w \sin \eta_0}} = \\ = \frac{2\pi k (p_e - p_w)}{\mu \ln \frac{4y_0}{r_w} \left\{ \frac{\sqrt{(c^2 - r_0^2)^2 + 4y_0^2 c^2}}{c^2 - r_0^2 + \sqrt{(c^2 - r_0^2)^2 + 4y_0^2 c^2}} \right\}}, \quad (16)$$

где

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Представляют интерес некоторые случаи, ограничивающие применение этой формулы. Так, если скважина находится на перпендикуляре, секущем надвое линейный источник питания, значение  $Q$  принимает вид:

$$Q_1 = \frac{2\pi k (p_e - p_w)}{\mu \ln \frac{2y_0}{r_w} \left( 1 + \frac{y_0^2}{c^2} \right)} = \frac{2\pi k (p_e - p_w)}{\mu \ln \left\{ \frac{2y_0}{r_w} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} \right\}}, \quad (17)$$

где  $\theta$  — угол у скважины, стянутый линейным источником. Уравнение (17) имеет аналогичную форму, которая была найдена для бесконечного источника питания [гл. IV, п. 7, уравнение (8)], за исключением отсутствия в нем множителя  $1 + \frac{y_0^2}{c^2}$ . Отсюда оно становится, как и следует этого ожидать, тождественным случаю, когда скважина при-

ближена к конечному источнику питания ( $y_0/c \ll 1$ )<sup>1</sup>. Однако, если скважина сильно удалена от линейного источника питания ( $y_0/c \gg 1$ ), текущий дебит ее уменьшается, словно линейный источник эквивалентен внешнему круговому контуру питания с радиусом, обратно пропорциональным кубу угла, стянутого линией источника у скважины.

Если скважина находится на одной линии с краями линейного источника питания, т. е. если  $x_0^2 = c^2$ , то

$$Q_2 = \frac{2\pi k (p_e - p_w)}{\mu \ln \frac{4y_0 \sqrt{4c^2 + y_0^2}}{r_w \sqrt{4c^2 + y_0^2} - y_0}}, \quad |x_0|^2 = c^2 \quad (18)$$

что, очевидно, имеет меньшую величину по сравнению со случаем, когда  $x_0 = 0$ , так как аргумент логарифма в данном случае больше, чем в уравнении (17).

Так, если  $y_0 = c$ , то

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\ln 7,24 y_0 / r_w}{\ln 4 y_0 / r_w}.$$

Если скважина расположена от центра линейного источника питания на расстоянии, равном половине ширины источника, то уравнение (16) приводится к виду:

$$Q_3 = \frac{2\pi k (p_e - p_w)}{\mu \ln 4y_0 / r_w}, \quad (19)$$

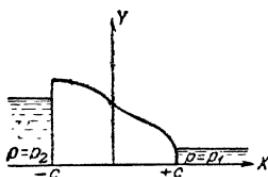
который не зависит от  $x_0$ .

Наконец, следует заметить, на основании уравнения (17), что поправочный множитель  $\text{cosec}^2 \frac{\theta}{2}$  входит в логарифмический член. Отсюда допущение бесконечного линейного источника питания ( $\theta = \pi$ ) даст весьма малую ошибку при практическом исчислении  $Q$ , если вполне определенно известно, что расстояние от скважины до выхода пласта значительно больше, чем ширина реки или канала, питающего этот выход.

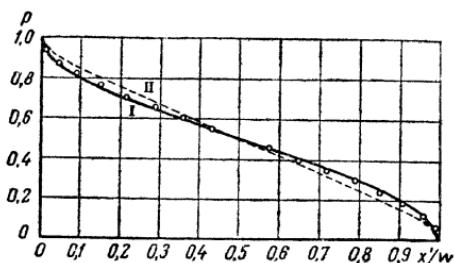
**10. Противодавление на плотину с расширенным основанием.** **Забивная крепь отсутствует.** При рассмотрении фильтрации воды под плотиной значительной ширины возникает весьма интересный практический вопрос, связанный с характеристикой противодавления, действующего на основание плотины и возникающего вследствие этой фильтрации. Эта задача имеет большую значимость при проектировании плотин и может быть решена непосредственным приложением теории потенциала, вкратце описанной в предыдущих разделах. Так как основной интерес здесь лежит в природе распределения давления на основание плотины при допущении, что оно установлено на пористом массиве без значительного углубления в него, то ширину основания плотины следует рассматривать как конечную величину, а длину плотины следует принять бесконечной. Кроме того, чтобы упростить под-

<sup>1</sup> В действительности, если  $c$  делается неопределенным большим, уравнение (16) приводится непосредственно к уравнению (8), гл. IV, п. 7.

счет противодавлений и моментов<sup>1</sup>, глубина песчаника, залегающего под плотиной, принимается бесконечной для данного случая, а также для случаев, рассматриваемых в последующем разделе (фиг. 43). При рассмотрении задачи о фактическом расходе при фильтрации будет дано точное решение только для пласта конечной мощности (см. гл. IV, пп. 12 и 14), так как песчаник бесконечной мощности даст бесконечный расход фильтрации. Когда под основанием плотины отсутствуют сваи, характер распределения давления можно установить простой интерпретацией выводов из гл. IV, п. 8. Если мы произведем замену функций  $\Psi$  и  $p$  в уравнении (10), гл. IV, п. 8, и будем рассматривать давление  $p$  как потенциал скорости  $\Phi$ , можно заметить, на основании уравнения (14), гл. IV, п. 8, что



Фиг. 43. Схематическое поперечное сечение водонепроницаемой плотины, установленной на пористом ложе, имеющем бесконечную мощность.



Фиг. 44. Распределение давления в основании плотины без забивной крепи:

$p$  — давление в основании плотины для единицы перепада общего давления;  $x'/w$  — (расстояние от пяты плотины) / (ширину основания); I — мощность проницаемого слоя  $h$ , залегающего ниже основания плотины, принимается бесконечной; II —  $w/h = 5,0$ ; кружочки —  $w/h = 1,0$ .

решения, которые даются в гл. IV, п. 8, соответствуют распределению потенциала, где по оси  $x$ -ов  $\Phi = \pi$  для  $x < -c$  и  $\Phi = 0$  для  $x > c$ . Участок оси  $x$ -ов между ними соответствует линии тока  $\Psi = 0$ . Кроме того, потенциал, а отсюда и распределение давления на основание даются следующим выражением:

$$p = \frac{\Delta p}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{c} + p_1, \quad (1)$$

где  $\Delta p$  — суммарное падение давления между сторонами плотины вверх и вниз по течению. Давление, под которым находится плотина, обозначим через  $p_1$ . На фиг. 44 дано графическое построение уравнения (1), показывающее, что обычное допущение линейной изменчивости не дает такой большой ошибки, но оно приводит к завышенным давлениям вблизи края плотины вверх по течению и заниженным давлениям у края ее вниз по течению.

Эта разница особенно заметна, когда рассматриваются скорости, пропорциональные наклонам кривой фиг. 44. Согласно уравнению (1)

<sup>1</sup> Это приближение не повлечет за собой серьезных ошибок, за исключением тех случаев, когда ширина плотины велика по сравнению с мощностью песчаника или когда забивная крепь при ее наличии проникает глубже, чем на половину мощности песчаника (см. фиг. 44 и 68).

это ведет к созданию неопределенного больших скоростей у краев плотины<sup>1</sup>, указывающих на большую опасность эрозии и песчаных потоков, чем это можно получить при линейном распределении давления.

Суммарная направленная вверх сила  $F$  на единицу длины плотины дается выражением:

$$F = \int_{-c}^{+c} \left[ \frac{\Delta p}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{c} + p_1 \right] dx = c \Delta p + 2p_1 c = (p_2 + p_1) \frac{w}{2}, \quad (2)$$

где  $w$  — ширина плотины и  $p_2$  — давление вверх по течению. Очевидно, это же значение будет существовать при допущении линейной изменчивости давления. Суммарный момент сил противодавления по отношению к пятым плотины будет:

$$M = \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} \left( x + \frac{w}{2} \right) \left[ \frac{\Delta p}{\pi} \cos^{-1} \frac{2x}{w} + p_1 \right] dx = \frac{w^2}{16} (3p_2 + 5p_1), \quad (3)$$

в то время как линейное распределение давления даст величину момента

$$M = \frac{w^2 (p_2 + 2p_1)}{6},$$

которая всегда будет меньше истинного значения уравнения (3). Когда  $p_1 = 0$  величина ошибки достигает 11,1%.

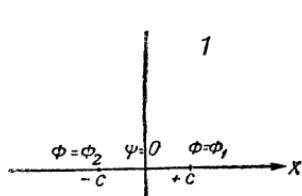
**11. Противодавление на плотину с забивной крепью<sup>2</sup>. Теорема Шварца-Кристоффеля.** Задачей, имеющей большое практическое значение, является определение противодавления на плотину в том случае, когда основание плотины покоятся на забивной крепи из шпунтовых свай. Однако раньше чем дать вывод точного решения для этого случая, будет полезно осветить более ясно реальную аналитическую значимость преобразований гл. IV, п. 8, которые были приложены в предыдущей главе.

Так, первоначальная задача состояла из нахождения распределения потенциала (удовлетворяющего уравнению Лапласа), которое предполагало бы постоянное значение его по оси  $x$ -ов для  $x < -c$ , отличное постоянное значение его для  $x > c$ , и искомое значение распределения потенциала было таково для  $|x| < c$ , чтобы ось  $x$ -ов соответствовала бы линии тока, где  $\Psi = \text{const} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \right)$ . Однако трудно

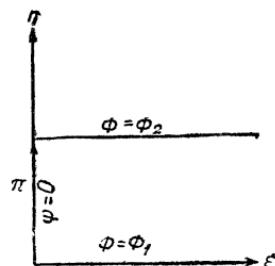
<sup>1</sup> Разумеется, с физической стороны строго бесконечные скорости никогда не могут иметь места, вследствие того что в этом случае нарушится закон Дарси (гл. II, п. 2). Однако аналитическая теория, основанная на законе Дарси, правильно характеризует тенденцию в развитии столь высоких скоростей, хотя бы даже отдельные подробности распределения давления и скорости в отдельных местах решения не отражали бы с точностью физическое течение.

<sup>2</sup> Основные аналитические выводы этого раздела вплоть до уравнения (14), но выведенные в несколько измененной форме, включая сюда фиг. 50—53, были даны W. Weaver, «Journ. Math. and Physics», 11, 114, 1932.

удовлетворить требованию, где оба значения  $\Phi$  и его производная по нормали  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  были определены для отдельных частей одного и того же прямолинейного контура (ось  $x$ -ов) с помощью элементарных решений,



Фиг. 45. Отображение плотины без забивной крепи, установленной на пористом ложе, имеющей бесконечную мощность, на плоскости  $Z$ .  
1 — плоскость  $Z$ .



Фиг. 46. Отображение фиг. 45 на плоскость  $\zeta$ .  
1 — плоскость  $\zeta$ .

выведенных непосредственно из уравнения Лапласа. По этой причине было введено преобразование комплексной переменной<sup>1</sup>, равносенное выражению:

$$\zeta = \xi + i\eta = \operatorname{ch}^{-1} \frac{(x+iy)}{c}. \quad (1)$$

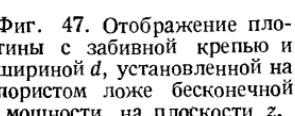
Для плоскости  $\zeta$  граница первоначальной системы (ось  $x$ -ов на фиг. 45) реализует свою внешность на фиг. 46 в виде полубесконечной полосы. Для такой геометрической области с установленными гранич-

ными условиями можно написать выражение распределения потенциала:

$$\Phi = \frac{\Delta \Phi}{\pi} \eta + \Phi_1. \quad (2)$$

Отмечая, что вдоль оси  $x$ -ов, где  $\Psi = 0$ ,  $\eta = \cos^{-1} \frac{x}{c}$ , получим уравнение (1), гл. IV, п. 10.

Этот же метод решения можно использовать для более сложной задачи о плотине, установленной на забивной крепи из шпунтовых свай, представленной на фиг. 47. Из последней ясно, что контур  $BCDEF$  является линией тока системы. Отсюда, если этот участок контура отображен на отрезке действительной оси вспомогательной плоскости,



Фиг. 47. Отображение плотины с забивной крепью и шириной  $d$ , установленной на пористом ложе бесконечной мощности, на плоскости  $z$ .  
1 — плоскость  $z$ .

а участки  $AB$  и  $FG$  на остальной части действительной оси, то задача становится внешне равносенной случаю, представленному на фиг. 45, который можно решить с помощью дальнейшего преобразования урав-

<sup>1</sup> Та же самая процедура была применена нами в гл. IV, п. 9, хотя весь ход анализа, последовавшего за преобразованием уравнения (1), был совершен но отличен от приведенного здесь.

нения вида (1). В этом и заключается новый аналитический путь, по которому решается задача о плотине с забивной крепью<sup>1</sup>. Реализацию конформного отображения можно выполнить на основе теоремы Шварца-Кристоффеля, которая дает методику получения внешности любой полигональной области на верхней половине комплексной плоскости, где контур области преобразуется по отношению к действительной его оси. Действительно, преобразование уравнения (1), примененное для получения внешности плоскости  $z$  (фиг. 45) на плоскость  $\xi$  (фиг. 46) может быть получено из этой теоремы первоначальной реализацией отображения бесконечного прямоугольника (фиг. 46) на плоскость  $z$  и последующим его инвертированием.

Теорему Шварца-Кристоффеля можно сформулировать так: полигон с вершинами  $z_k = x_k + iy_k$  на плоскости  $z = x + iy$  и внутренними углами  $a_1, a_2, \dots, a_n$  отображается на верхнюю полуплоскость  $\xi = \xi + i\eta$  с точками  $\xi = \xi_k$ , соответствующими вершинам  $z = z_k$  при условии, что соотношение между  $z$  и  $\xi$  определяется уравнением:

$$z = c_1 \int \frac{d\xi}{\prod (\xi - \xi_k)^{1-a_k/\pi}} + c_2, \quad (3)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — константы, определяемые размерами и ориентировкой полигона. Если  $\xi = \pm\infty$  соответствует углу полигона, то соответствующий коэффициент в произведении интегрируемой функции опускается. Правильность этой теоремы может быть легко установлена, если обратить внимание, что аргументы  $\frac{dz}{d\xi}$ , соответствующие уравнению (3), в действительности изменяются на величину  $\pi - a_k$ , по мере того как пересекаются точки  $\xi = \xi_k$ . Чтобы приложить эту теорему для решения рассматриваемой задачи, необходимо учесть все углы  $a_k$  полигона  $ABCDEFGA$ . Это будут, очевидно:

$$\alpha = \angle FED = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = \angle EDC = 2\pi; \quad \alpha = \angle DCB = \frac{\pi}{2};$$

$$\alpha = \angle BAG = 0.$$

Тогда, принимая значение  $\xi = 1$ , соответствующее точке  $E$ ,  $\xi = 0$  — точке  $D$ ,  $\xi = -1$  — точке  $C$  и  $\xi = -\infty$  — точке  $A$ , уравнение (3) примет вид:

$$z = c_1 \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + c_2 = c_1 \sqrt{\xi^2 - 1} + c_2. \quad (4)$$

---

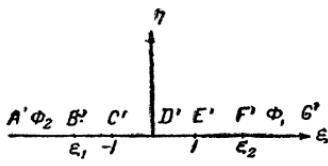
<sup>1</sup> Следует заметить, что задача нахождения сопряженной функции, с помощью которой осуществляется преобразование внешности одной области на контур другой, очень близка к нахождению функции Грина для данной области. В частности, можно показать, если  $G(x, y; \xi, \eta)$  является функцией Грина для данной области и  $G_1(x, y; \xi, \eta)$  — ее сопряжение, то функция  $\xi = f(z) = e^{G - iG_1}$  дает возможность отобразить внешность контура первоначальной области на внутренность единичного круга в плоскости  $\xi$ , причем точка  $(\xi, \eta)$  совместится с началом координат плоскости  $\xi$  (см. Riemann-Weber's, „Differentialgleichungen der Physik“, vol. 1, p. 546, 1925).

Константы  $c_1$  и  $c_2$  можно определить из условия, чтобы установленные соответствия были справедливы численно. Это означает, что

$$\begin{aligned} E \rightarrow \zeta = 1; \quad b = c_2; \quad D \rightarrow \zeta = 0; \quad b - id = c_1 i + c_2; \\ C \rightarrow \zeta = -1; \quad b = c_2 \end{aligned} \quad (5)$$

явится условием, при котором  $A \rightarrow \zeta = -\infty$  будет, очевидно, тождественно удовлетворяться. Отсюда уравнение (4) примет вид:

$$z = -d \sqrt{\zeta^2 - 1} + b, \quad (6)^1$$



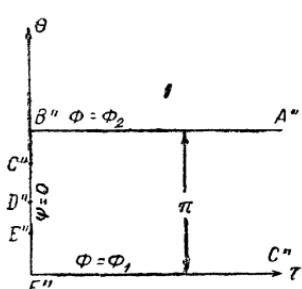
Фиг. 48. Отображение фиг. 47 на плоскость  $\zeta$ .  
1 — плоскость  $\xi$ .

реализующий конформное отображение на плоскости  $\zeta$ , как это видно из фиг. 48, причем  $B'$  и  $F'$  имеют соответственные значения:

$$\xi_1 = -\sqrt{1 + \frac{(c+b)^2}{d^2}}$$

$$\xi_2 = +\sqrt{1 + \frac{(c-b)^2}{d^2}}.$$

Тогда задача сводится в принципе к вопросу о плотине без забивной крепи. Перемещая начало координат плоскости  $\zeta$  так, чтобы оно легло на полпути между  $B'$  и  $F'$ , и меняя масштаб так, чтобы длина  $B'F' = 2$ , т. е. прибегая к преобразованию следующего вида:



Фиг. 49. Отображение фиг. 47 на плоскость  $\lambda$ .  
1 — плоскость  $\lambda$ .

$$\zeta' = \frac{\zeta - \frac{(\xi_2 + \xi_1)}{2}}{\frac{(\xi_2 - \xi_1)}{2}}; \quad \xi' = \frac{\xi - \frac{(\xi_2 + \xi_1)}{2}}{\frac{(\xi_2 - \xi_1)}{2}}, \quad (7)$$

получим плоскость  $\zeta$ , преобразованную в равноценную ей плоскость  $z$  (фиг. 45). Отображая теперь плоскость  $\zeta'$  на плоскость  $\lambda$  путем следующего преобразования:

$$\lambda = \tau + i\theta = \operatorname{ch}^{-1} \zeta', \quad (8)$$

получим полубесконечную полосу, представленную на фиг. 49. Тогда конечное решение для распределения потенциала определится из выражения:

$$\Phi = \frac{\Delta\Phi}{\pi} \theta + \Phi, \quad (9)$$

которое на основании уравнений (6), (7) и (8) дает значение  $\Phi$  как функции  $(x, y)$  в первоначальной плоскости  $z$ . Для изучения противо-

<sup>1</sup> Следует заметить, что отрицательный радикал должен быть взят для  $\xi > 1$ , а положительный для  $\xi < 1$ .

давления на плотину следует рассматривать только те значения  $\Phi$ , для которых  $y=0$ ,  $|x| < c$ . Это налагает условие, что  $\zeta$  и  $\zeta'$  вещественны и что фактически  $|\xi'| < 1$ . Отсюда уравнение (9) для потенциала у основания плотины примет вид:

$$\Phi = \frac{\Delta\Phi}{\pi} \cos^{-1} \xi' + \Phi_1. \quad (10)$$

Вводим сюда обозначения:

$$c = \frac{w}{2}; \quad b+c = \bar{x}; \quad x' = x + \frac{w}{2}; \quad a = \frac{w}{d}; \quad \beta = \frac{\bar{x}}{d},$$

где  $w$  — ширина плотины;  $\bar{x}$  — расстояние от свай до пятых основания;  $a$  — отношение ширины плотины к глубине забивки свай;  $x'$  — расстояние, отсчитываемое по основанию, начиная от пятых плотины. Сделав соответствующие подстановки и возвращаясь к значениям давлений, можем переписать в конечном итоге уравнение (10) так:

$$p = \frac{\Delta p}{\pi} \cos^{-1} \times \\ \times \left[ \frac{2 \sqrt{1 + \left( \frac{x'}{d} - \beta \right)^2} - \sqrt{1 + (a - \beta)^2} + \sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 + (a - \beta)^2} + \sqrt{1 + \beta^2}} \right] + p_1, \quad (11)$$

где знак первого радикала берется плюс для  $x' > \bar{x}$  и минус для  $x' < \bar{x}$ .

Легко заметить, что при  $d=0$  это уравнение приводится к уравнению (1), гл. IV, п. 10, т. е. для плотины без забивной крепи. Тогда вся сила противодавления на плотину будет:

$$F = p_1 w + \frac{\Delta p}{\pi} \left\{ \int_0^{b_1} \cos^{-1} \left[ \frac{-2 \sqrt{1 + \left( \frac{x'}{d} - \beta \right)^2} - e + j}{e + j} \right] dx' + \right. \\ \left. + \int_{b_1}^w \cos^{-1} \left[ \frac{2 \sqrt{1 + \left( \frac{x'}{d} - \beta \right)^2} - e + j}{e + j} \right] dx' \right\}, \quad (12)$$

где

$$e = \sqrt{1 + (a - \beta)^2}; \quad j = \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Раскрытие этих интегралов повлечет за собой применение эллиптических интегралов 3-го порядка и поэтому гораздо проще получить их решение графическим или численным путем. Только в отдельных случаях, где сваи находятся в одном из плечей основания плотины или же в ее центре, сила  $F$  может быть выражена с помощью элементарных функций. Так, если забивная крепь находится у верхнего плеча плотины (у пятых ее), то

$$\left. \begin{aligned} \beta = 0, \quad j = 1, \quad e = \sqrt{1 + a^2} \\ F = p_1 w + \frac{d \Delta p (e - 1)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Забивная крепь в центре основания плотины:

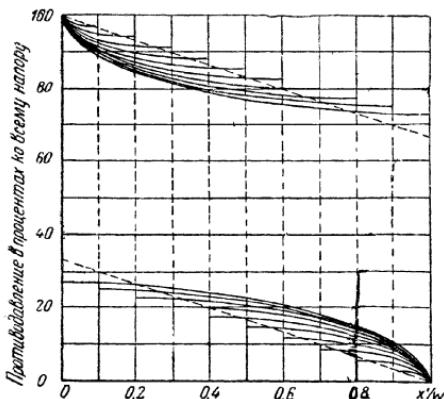
$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{a}{2}, \quad j = e, \\ F &= p_1 w + \frac{w \Delta p}{2} = \frac{(p_2 + p_1) w}{2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Забивная крепь у нижнего плеча плотины (у носка плотины):

$$\left. \begin{aligned} \beta &= a, \quad e = 1, \quad j = \sqrt{1 + a^2} \\ F &= p_1 w + d \Delta p \left( a - \frac{(j-1)}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Суммарный момент противодавления дается уравнением:

$$\begin{aligned} M &= \frac{p_1 w^3}{2} + \frac{\Delta p}{\pi} d \beta F_0 + \frac{d^2 \Delta p}{8\pi} [\pi (3e^2 - j^2 - 2ej - 4) + \\ &+ \{8 + 2je - 3(j^2 + e^2)\} \left\{ \sin^{-1} \sqrt{\frac{j+1}{j+e}} + \sin^{-1} \sqrt{\frac{e+1}{j+e}} \right\} - \\ &- \sqrt{(j+1)(e-1)} (3j+3e-2) - \\ &- \sqrt{(e+1)(j-1)} (3e-3j-2)], \end{aligned} \quad (16)$$



Фиг. 50. Распределение давления в основании плотин, имеющих забивную свайную крепь, с глубиной, равной ширине основания плотины;  $x/w$  = (расстояние от носка плотины) / (ширина основания).

Вертикальные пунктирные линии дают местоположение свай, а их длины — потерю давления через сваи. Наклонные пунктирные линии совместно с вертикальными пунктирными участками дают распределение давления, продиктованное теорией Бляя (теория ползущей линии).

Фигуры, отображающие уравнения (11) — (18), показывают распределение противодавления в основании плотины для различных положений забивной крепи и для отношений ширины плотины к глубине

где  $F_0$  — выражение, заключенное в скобках уравнения (12). Следующим интересным выводом является определение потери давления  $\delta p$  вокруг свай, которая дается разностью давлений между плечами основания плотины вверх и вниз по течению, считая от свайной крепи. Эта величина находится из уравнения (11) и дается выражением:

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{\Delta p}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{(j+e)^2} [ -4 + \\ &+ 4\sqrt{(j^2 - 1)(e^2 - 1)} + \\ &+ (j - e)^2 ]; \end{aligned} \quad (17)$$

фактическое давление в подошве свай будет иметь величину:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\Delta p}{\pi} \cos^{-1} \frac{j-e}{j+e} + \\ &+ p_1 + \gamma g d. \end{aligned} \quad (18)$$

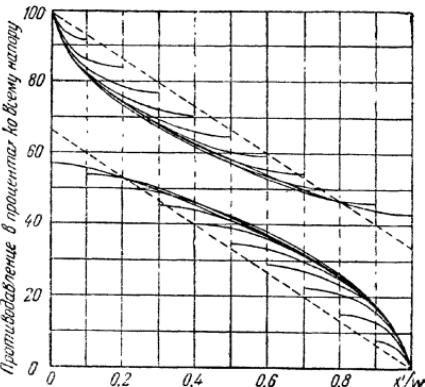
Легче всего представить всю значимость этих выводов из гра-

фиков, отображающих уравнения (11) — (18). Так, фиг. 50 и 51 показы-  
вают распределение противодавления в основании плотины для различных

забивки свай от 1 до 4; ординаты показывают долю всей потери давления, соответствующую величине  $(p - p_1)/\Delta p$  уравнения (11). Положение свай показано на фигурах вертикальными пунктирными линиями. Длина свай согласно уравнению (17) также создает потерю давления через них. В то время как эти потери не меняются особенно заметно с изменением местоположения свай, — с увеличением  $a$ , как и следует ожидать, значение их резко падает.

Суммарные силы противодавления и опрокидывающие моменты, выраженные в долях величин, которые они имели бы в случае отсутствия забивной крепи (и при  $p_1 = 0$ ), приводятся на фиг. 52 и 53, где они построены в зависимости от местоположения свай и для различных значений  $a$ . Интересно заметить, что забивная крепь, если только она установлена в центре основания плотины, не влияет на величину общей силы противодавления. Если же крепь установлена под тем плечом плотины, что находится вниз или вверх по течению, это будет соответственно увеличивать или уменьшать силы противодавлений. Рассмотренный анализ последних и их влияния на плотины базируется всецело на достаточно идеализированном представлении всей проблемы. Возможно, что наиболее серьезным приближением в этом случае является допущение о бесконечности распространения пористой среды, подстилающей плотину<sup>1</sup>, и ограниченное проникновение основания плотины в пористое вещество. Однако прежние теории основывались на еще более интуитивных допущениях.

Наиболее широко распространенной теорией этого типа<sup>2</sup> была теория „пути фильтрации“ Бляя, которая заключается в основном в допущении, что свайная крепь глубиной  $d$  добавляет к эффективной ширине основания плотины свой периметр  $2d$ . Тогда весь перепад давления распределяется линейно по развитой ширине  $w + 2d$ . Получающееся в результате этого перепада распределение давления в осно-



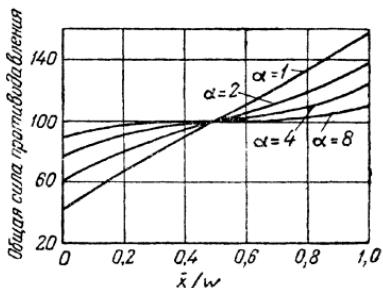
Фиг. 51. Распределение давления у основания плотин с забивной свайной крепью, имеющей глубину, равную одной четверти ширины основания:

$x/w$  — (расстояние от пяты плотины) / (ширина основания). Вертикальные пунктирные линии дают местоположение свай, а их длины — перепад давления через сваи. Наклонные пунктирные линии совместно с вертикальными пунктирными участками дают распределение давления, предиктованное теорией Бляя (теория ползущей линии).

<sup>1</sup> Это приближение приводит в результате к весьма малым перепадам давления через сваи на „безопасной стороне“ плотины и к очень большим силам противодавления (фиг. 68). Однако фактические ошибки будут достаточно малы, за исключением тех случаев, когда сваи доходят на короткое расстояние до подошвы проницаемых слоев.

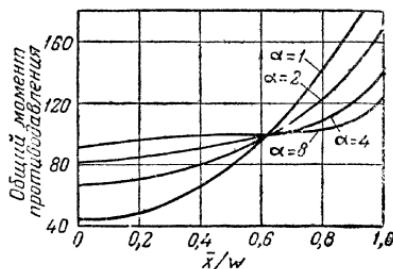
<sup>2</sup> Остальные теории являются не чем иным, как допущениями и описаны Уивером.

вании плотины для случая  $\alpha = 1,4$  показано на фиг. 50 и 51 наклонными пунктирными линиями. Вертикальные пунктирные линии, заключенные между последними, указывают величину перепада давления через забивную крепь. Можно заметить, что в целом ошибки, получающиеся при распределении давления, не велики. Однако перепады давления через сваи, согласно теории Бляя, не зависят от местоположения свай. Приведенная же нами теория показывает, что величина этого перепада может изменяться в два раза, по мере того как сваи перемещаются от верхнего или нижнего бьефа к центру плотины.



Фиг. 52. Изменение общей силы противодавления в зависимости от местоположения забивной свайной крепи под основанием плотины и выраженное в процентах от величины этой силы при отсутствии свайной крепи.

Напор жидкости со стороны нижнего бьефа равен нулю;  $x/w$  — (расстояние от пяты плотины) / (ширина плотины);  $\alpha$  = (ширина плотины) / (глубину свай).



Фиг. 53. Изменение общей величины опрокидывающего момента относительно пяты плотины в зависимости от местоположения забивной свайной крепи под основанием плотины, выраженное в процентах к значению момента, при отсутствии свайной крепи.

Напор со стороны нижнего бьефа равен нулю;  $x/w$  — (расстояние свай от пяты плотины) / (ширина плотины);  $\alpha$  = (ширина плотины) / (глубину свай).

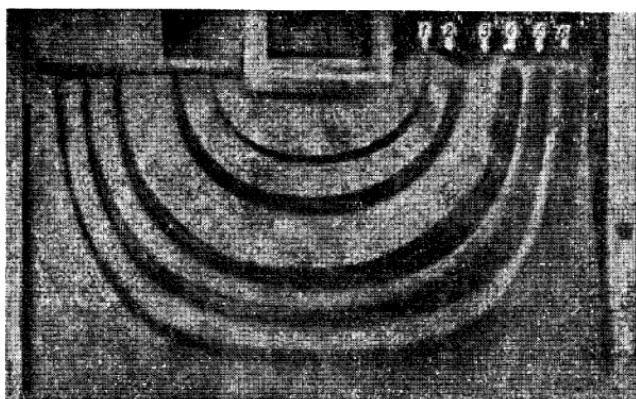
Что же касается общей силы противодавления, то теория Бляя дает слишком малое значение ее (до 20%), когда свайная крепь находится под плечом плотины, примыкающим к верхнему бьефу, и очень большое значение (на 8%) для местоположения свай у нижнего бьефа. Опрокидывающие моменты, рассчитанные по теории Бляя, являются заниженными (до 30%), когда сваи установлены в пределах 70% ширины основания плотины, считая от верхнего бьефа, и слегка завышенными для местоположения свай, находящихся в пределах 30% ширины основания плотины, считая от нижнего бьефа. Теория Бляя является поэтому с количественной точки зрения только приблизительной. Однако следует напомнить, что лежащее в ее основе допущение о фильтрационном потоке, следующим за основанием плотины и сторонами забивной свайной крепи, является совершенно правильным. К несчастью, существование этого потока упорно отвергается при рассмотрении этого вопроса Тейлором и Эппаль<sup>1</sup> в их прекрасной во всем остальном эксперимен-

<sup>1</sup> Taylor E. M. and H. L. Uppal, Punjab Irrigation Research Institute, «Research Publ.», 2, № 3, 4, 1934.

Выводы из расширенного изучения распределения давления под действующими плотинами — водосливной плотиной Пенджаб — приводятся у

ментальной работе о линиях тока на моделях плотин с забивной крепью и без таковой.

В этих экспериментах следы линий тока в песке под плотинами создавались вводом раствора азотнокислого серебра через специальные краны с воронками, а фильтрующейся жидкостью служил раствор хромовокислого калия. На фиг. 54, 55 и 56 приведены характерные фотографии таких моделей, без забивной крепи, с одним рядом и с двумя рядами свай. Из проведенных экспериментов фактически не было замечено, чтобы линии тока следовали основанию плотины (фиг. 54),

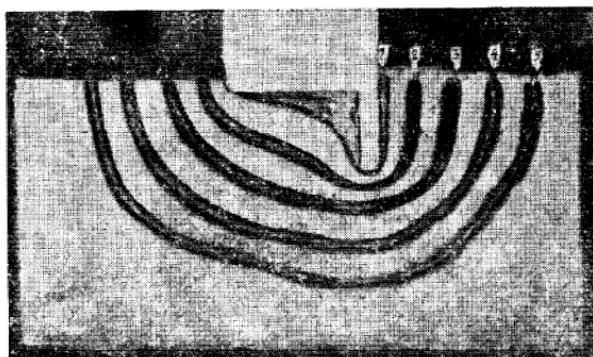


Фиг. 54. Фотография линий тока под плотиной, не имеющей свайной крепи, — получена из экспериментов на песчаных моделях (по Тейлору и Эппалю).

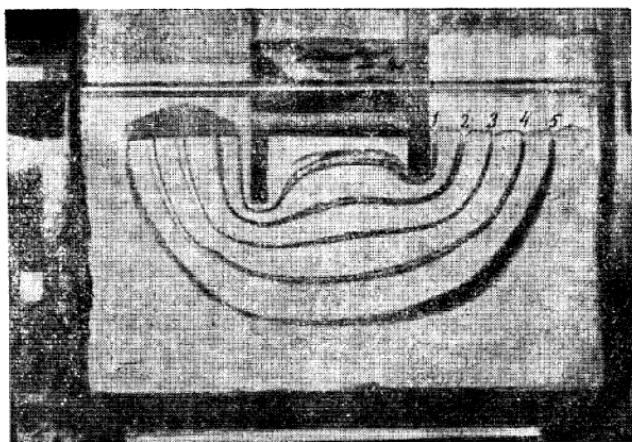
или же только первая линия тока (фиг. 55) касается основания забивной крепи в направлении нижнего бьефа плотины. Отсюда было сделано заключение, что стороны забивной крепи и основания плотины не представляют собой линии тока. Однако такое заключение является ложным не только потому, что в любой потенциальной системе фиксированная непроницаемая граница должна быть по необходимости линией тока, но также и потому, что следы линий тока на экспериментальной модели кажутся касающимися основания забивной крепи только в результате их конечной ширины, а также благодаря грубозернистости песка и естественной диффузии раствора азотнокислого серебра. Сближение линий тока у резко непроницаемого препятствия в системе потока требует по необходимости более тщательных методов исследо-

A. N. Khosla, Paper 162, p. 50. Proc. Punjab Eng. Cong., 21, 1933. См. также J. B. T. Colman, Amer. Soc. Civil Eng., 80, 421, 1916, где рассматривается распределение давления в песчаной модели плотины с забивной крепью и без таковой, установленной со стороны верхнего бьефа под флютбетом, со стороны нижнего бьефа или же с обеих сторон флютбета. Хотя некоторые детали, описанные в этих работах, не могут быть увязаны с выводами, непосредственно вытекающими из развитой здесь теории, общие качественные положения, полученные этими авторами, закрепляют выводы, вытекающие из аналитического решения задачи.

вания, если желательно подвергнуть изучению с большой точностью отдельные элементы течения. С другой стороны, следует заметить, что, за исключением случая отсутствия забивной крепи, линия тока, обходящая основание плотины, будет иметь в общем меньшую среднюю



Фиг. 55. Фотография линий тока под плотиной со свайной крепью в пятне последней, — получена из экспериментов на песчаных моделях (по Тейлору и Эппалю).



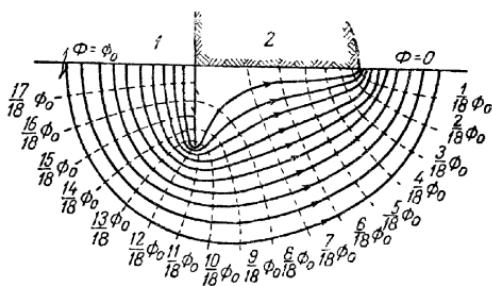
Фиг. 56. Фотография линий тока под плотиной со свайной крепью, забитой в пятне и носке плотины. Линии тока получены из экспериментов на песчаных моделях (по Тейлору и Эппалю).

скорость по сравнению с остальными линиями, пересекающими основание забивной крепи (хотя фактически они не касаются ее), и непосредственно направляющимися к ложу нижнего бьефа. Область между линией тока с наивысшей средней скоростью и ползущей линией тока, оги-

бающей основание плотины и забивной крепи, может явиться тогда „мертвой зоной“, хотя в действительности жидкость движется вдоль линий тока системы. Поскольку экспериментальные модели в настоящее время достаточно разработаны, чтобы показать детали движения, можно видеть, как последнее увязывается с приведенной здесь теорией. Достаточно только сравнить фиг. 55 и фиг. 57<sup>1</sup>, на которых приведены вычисленные эквипотенциальные линии и линии тока для случая, где глубина забивной крепи равна половине ширины плотины. Все характерные особенности течения являются, очевидно, одинаковыми в обоих случаях.

Постоянство нарушений крайних линий тока на модели должно быть отнесено, без сомнения, за счет конечности ширины забивной крепи, конечности глубины песка при забивке свай и отсутствию однородности песка. Как видно, нарушение в линиях тока распространяется только на расстояние, равное приблизительно глубине крепи. Фактически эксперименты на моделях могут быть приняты как еще одно прямое подтверждение справедливости обобщенного закона Дарси при рассмотрении других видов течения, помимо линейного.

**12. Фильтрационный расход под плотинами с удлиненной шириной основания. Отсутствие забивной крепи. Преобразование эллиптической функции<sup>2</sup>.** В последних двух разделах была приведена теория противодавлений под плотинами при допущении, что залегающий в их основании песчаник имеет мощность бесконечной величины. Как видно из дальнейшего, это допущение приводит в общем к довольно хорошему приближению в отношении распределения давления и общей величины противодавления в плотинах, а также к фильтрационному расходу бесконечной величины за исключением тех случаев, когда мощность пласта песчаника незначительна или забивная крепь близко подходит к подошве проницаемого слоя. Чтобы получить физически



Фиг. 57. Теоретическое распределение потенциала и линии тока под плотиной с забивной свайной крепью, установленной в ее пяте на глубине, равной половине ширины основания плотины (по Уверу):

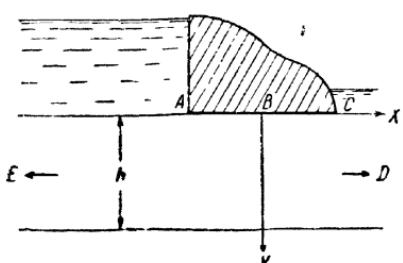
1 — напор воды; 2 — поперечное сечение плотины.

<sup>1</sup> Эквипотенциальные линии на фиг. 57, взятые из работы Увера, первоначально фиксировались как кривые равного напора. Однако значения их должны получаться из добавления в каждой точке к величине  $\Phi$  члену  $u_d u$  (для  $k/\mu = 1$ ). Обоими экспериментальными путями: на электролитических и песчаных моделях было установлено также вполне удовлетворительное подтверждение теории (фиг. 50 и 51), а также отдельная изменчивость в распределении давления у основания плотины со свайной крепью у верхнего щебефа.

<sup>2</sup> Выводы для этого раздела, а также двух последующих разделов взяты из работы M. Muskat. Physics, 7, 116, 1936.

ощутимое значение расхода, необходимо принять для этого в расчет конечную мощность проницаемого слоя.

Это может быть сделано тем же путем, который был описан в гл. IV, п. 11, за исключением того, что преобразования сопряженной функции [уравнения (1) и (8), гл. IV, п. 11] будут заменены преобразованием эллиптической функции.



Фиг. 58. Плотина, не имеющая забивной свайной крепи и установленная на проницаемом ложе конечной мощности, в плоскости  $z$ .

$z$  — плоскость  $z$ .

Так, прилагая теорему Шварца-Кристоффеля, уравнение (3), гл. IV, п. 11, легко заметить, что плоскость  $z$  на диаграмме течения, представленной на фиг. 58, преобразуется в верхнюю полуплоскость  $\zeta$  с помощью преобразования функции  $z(\zeta)$ , которое дается выражением

$$z = c_1 \int \frac{d\zeta}{\zeta^2 - m^2} + c_2. \quad (1)$$

Вычислив интеграл и разрешив уравнение (1) относительно  $\zeta$ , легко найти, что

$$\zeta = \frac{\operatorname{th} z/2h}{\operatorname{th} \pi w/4h}, \quad (2)$$

где  $w$  — ширина плотины и  $h$  — мощность песчаника.

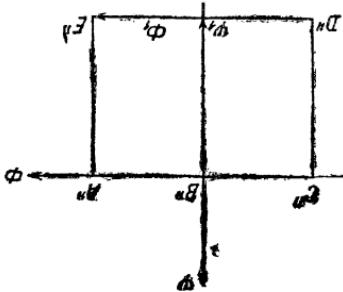
Константы выбраны так, что

$$\begin{aligned} z = 0 &\rightarrow \zeta = 0; \\ z = \pm \frac{w}{2} &\rightarrow \zeta = \pm 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Конформное отображение плоскости  $\zeta$  с граничными значениями

$$\begin{array}{c} \text{Плоскость } \zeta \\ \psi = \varphi, E' \Phi = \varphi, A' \\ \varphi = 0 \\ -m \quad -l \quad 0 \quad l \quad m \end{array}$$

Фиг. 59. Отображение внешности фиг. 58 на плоскости  $\zeta$ .



Фиг. 60. Отображение внешности фиг. 58 на плоскости  $\omega$ .  
 $1$  — плоскость  $\zeta$ .

потенциальной функции и функции тока показано на фиг. 59;  $m$  имеет значение  $\operatorname{ctn} \pi w/4h$ . Приняв теперь обратную точку зрения той, которая была выведена в гл. IV, п. 11, и построив сначала конформное отображение плоскости  $\omega = \Phi + i\Psi$ , соответствующее плоскости  $z$ , ясно, что

при этом мы встретимся с прямоугольной фигуруй (фиг. 60)<sup>1</sup>. Отсюда, если отобразить плоскость  $\omega$  на плоскость  $\zeta$  (фиг. 59), получим зависимость между  $\omega$  и  $z$  через промежуточную переменную  $\zeta$ , дающую желаемое распределение потенциала и линий тока в первоначальной системе.

Прилагая снова теорему Шварца-Кристоффеля к результату этого отображения, находим:

$$\omega = \Phi + i\Psi = c_1 \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - 1)(\zeta^2 - m^2)}} + c_2, \quad (4)$$

где, как уже было отмечено,  $m$  — координата  $D'$  должна иметь значение  $\operatorname{ctg} \pi w/4h$ , чтобы удовлетворить уравнение (3). Принимая  $k^* = 1/m$ ,  $c_2 = 0$  и подбирая пределы интегрирования так, что  $\omega = 0$  соответствует  $B'$ , получим уравнение (4), написанное в следующем виде:

$$\omega = c_1 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^{*2}\zeta^2)}}. \quad (5)^2$$

Если  $\zeta \ll 1$ , это уравнение может быть выражено так:

$$\omega = c_1 \int_0^{\sin^{-1}\zeta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^{*2}\sin^2\theta}} = c_1 F(\sin^{-1}\zeta; k^*); \quad (6)$$

$$k^* = \operatorname{th} \frac{\pi w}{4h},$$

где  $F$  — эллиптический интеграл первого порядка с „амплитудой“  $\sin^{-1}\zeta$  и „модулем“  $k^*$ .<sup>3</sup>

Замечая, что точка  $C''$ , в которой  $\Phi = -\Phi_1$ ,  $\Psi = 0$ , соответствует условию  $\zeta = +1$ , имеем, следовательно:

$$-\Phi_1 = c_1 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^{*2}\zeta^2)}} = c_1 F\left(\frac{\pi}{2}, k^*\right) = c_1 K(k^*), \quad (7)$$

где  $K(k^*)$  — полный эллиптический интеграл первого порядка с модулем  $k^*$ . Так как общее падение потенциала в системе  $\Delta\Phi$  составляет  $2\Phi_1$ , то уравнение (5) может быть окончательно написано так:

$$\omega = \Phi + i\Psi = \frac{-\Delta\Phi}{2K} \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^{*2}\zeta^2)}}. \quad (8)$$

<sup>1</sup> Значение  $\Psi_1$  показано отрицательным как следствие отношения  $\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} < 0$  для системы координат, представленной на фиг. 58.

<sup>2</sup> Предполагается, что множитель  $k^*$  вошел в константу  $c_1$ .

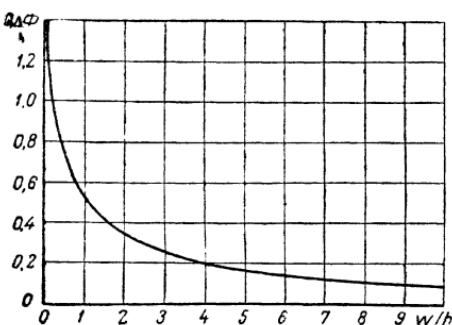
<sup>3</sup> Обычное обозначение  $k$  для модуля здесь заменено через  $k^*$ , чтобы не смешивать с условным обозначением, принятым в настоящей работе для пропицаемости.

Фильтрационный расход под плотиной дается, очевидно, величиной  $\Psi_1'$ . Последняя может быть найдена из значения  $\omega$  для  $D''$  в соответствии с  $\zeta = m = 1/k^*$ .

Так:

$$\begin{aligned} \zeta - \Phi_1 + i\Psi_1 &= \frac{-\Delta\Phi}{2K} \int_0^{1/k^*} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^{*2}\zeta^2)}} = \\ &= \frac{-\Delta\Phi}{2K} (K + iK'), \end{aligned} \quad (9)^1$$

где  $K'$  — полный эллиптический интеграл первого порядка с модулем  $\sqrt{1-k^{*2}}$ . Так как  $-\Psi_1$  представляет собой общий расход  $Q$  под плотиной (на единицу длины плотины) и  $\Delta\Phi$  — величина падения общего потенциала от верхнего бьефа к нижнему, соответствующая перепаду давления  $\Delta p$  или разности уровней верхнего и нижнего бьефов, т. е. действующему напору  $\Delta H$ , из уравнения (9) непосредственно вытекает, что



Фиг. 61. Расход фильтрации под плотинами, не имеющими свайной крепи;  $Q/\Delta\Phi$  — расход на единицу падения потенциала через плотину и на единицу длины последней;  $w/h$  — (ширина основания) / (мощность проницаемого слоя, залегающего под основанием плотины).

ширины основания плотины к мощности проницаемого слоя<sup>2</sup>. Из этого построения, как и следовало ожидать, видно, что расход или эффективная проводимость системы падает с возрастанием значений  $w/h$ , начиная от бесконечно больших величин при нулевом значении  $w/h$  и достигая нулевого расхода, когда  $w/h$  становится бесконечно большим.

Разумеется, при фактическом подсчете величины фильтрации необходимо помножить ординаты фиг. 61 на член  $k\gamma g\Delta H/\mu$ <sup>3</sup>. Уравнение (10)

<sup>1</sup> Whittaker and Watson, p. 502. Полное рассмотрение эллиптических интегралов функций можно найти в гл. XXII этой работы.

<sup>2</sup> Весьма подробные таблицы для  $K$ ,  $K'$  и  $K'/K$  можно найти в работе „Tafeln der Besselschen, Theta, Kugel — und andere Funktionen“, 1930 г., составленной K. Hyashi.

<sup>3</sup> Можно упомянуть, что исключительно близкое приближение к точному значению  $Q$ , которое дается уравнением (10), было получено в 1917 г. Форхгеймером (Wien, Ber., 126, 409, 1917). Он получил свое приблизительное решение построением бесконечного комплекса конформных отображений на основании плотины так, чтобы достичь нулевого значения нормального расхода при  $y=h$ . Результат бесконечного ряда отображений был просуммирован введением в него пре-

$$Q = \frac{kK'\Delta p}{2\mu K} = \frac{k\gamma g K' \Delta H}{2\mu K};$$

$$k^* = \operatorname{th} \frac{\pi w}{4h}. \quad (10)$$

На фиг. 61 дается построение фильтрационного расхода на единицу падения потенциала, т. е.  $Q/\Delta\Phi = K'/2K$  как функции  $w/h$ , т. е. отношения

или его эквивалентная форма

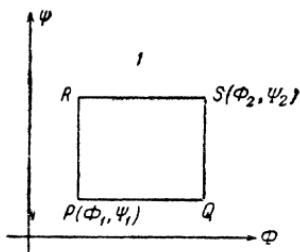
$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{K'}{2K} \quad (11)$$

были выведены здесь для специального случая фильтрации под плотиной, у которой отсутствует забивная крепь. Вместе с тем важно заметить, что этот вывод является в целом достаточно удовлетворительным для любой системы, оконтуренной двумя сегментами постоянного потенциала, последовательно сменяющимися двумя сегментами линий тока. Полная характеристика этой системы, представляющей особый интерес в зависимости от значения  $Q/\Delta\Phi$ , заключается в величине модуля  $k^*$  эллиптических интегралов.

Таким образом, допуская, что течение, изображенное на плоскости  $\omega$  ( $\Phi, \Psi$ ), согласно фиг. 62, отображено на верх-

$$\begin{array}{c} \text{Плоскость } \zeta \\ \Psi = \psi_2 \quad R \Phi = \phi_1, P \quad \Psi = \psi_1, Q \quad \Phi = \phi_2, S \quad \Psi = \psi_1 \\ \hline r \qquad p \qquad q \qquad s \end{array}$$

Фиг. 63. Отображение фиг. 62 на плоскость  $\zeta$ .



Фиг. 62,  
1 — плоскость  $\omega$ .

нюю полуплоскость  $\zeta$  так, чтобы получить конформное отображение на фиг. 63, получаем, как следствие из теоремы Шварца-Кристоффеля, что зависимость между  $\omega$  и  $\zeta$  дается уравнением вида

$$\omega = \Phi + i\Psi = \int \frac{d\zeta}{[(\zeta - r)(\zeta - p)(\zeta - q)(\zeta - s)]^{1/2}}. \quad (12)$$

Если теперь сделать преобразование <sup>1</sup>

$$\lambda = \frac{D\zeta - B}{A - C\zeta} \quad (13)$$

---

образования комплексного переменного, эквивалентного выражению  $x + iy = \operatorname{ch} \pi \frac{(x+iy)}{h}$ , которое отображает внешность бесконечной полосы плоскости  $(x, y)$  (фиг. 58) на всю область плоскости  $(x, y)$  в целом в виде потенциальной функции, сноска на которую дана в гл. IV, п. 8. Единственная ошибка в анализе, как это дается самим Форхгеймером, заключается в том, что анализ не дает строго постоянного потенциала вдоль оси  $y$  (фиг. 58), чего требует симметрия (гл. IV, п. 16). Окончательные формулы Форхгеймера имеют следующий вид:

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \pi w/8h - 1}{3 \operatorname{ch} \pi w/8h - 1}, \quad \text{для } \frac{w}{h} < 1$$

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{1}{\left[0,86 + \frac{w}{h}\right]}, \quad \text{для } \frac{w}{h} > 1;$$

Батеман Н., „Partial Differential Equations“, p. 302, 1932.

и подобрать  $A, B, C$  и  $D$  так, чтобы:

$$\left. \begin{aligned} A - Cp &= B - Dp; & A - Cq &= Dq - B \\ A - Cr &= k^*(B - Dr); & A - Cs &= k^*(Ds - B) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

найдем, что  $\omega$  принимает следующую форму:

$$\omega = \Phi + i\Psi = G \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{V(1-\lambda^2)(1-k^{*2}\lambda^2)}, \quad (15)$$

где модуль  $k^*$  в уравнениях (14) и (15) является корнем меньше единицы уравнения

$$\begin{aligned} k^{*2}(q-p)(r-s) + k^* [(q-p)^2 + (r-s)^2 - (p+q-r-s)^2] + \\ + (q-p)(r-s) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

и  $G$  — константа, вытекающая из сделанного преобразования. В дополнение к приведению уравнения (12) к стандартной форме эллиптического интеграла (уравнение 15) преобразование уравнений (13) и (14) ведут к следующим соответствиям между плоскостью  $\omega$  и  $\lambda$ :

$$\lambda(R) = \frac{-1}{k^*}; \quad \lambda(P) = -1; \quad \lambda(Q) = +1; \quad \lambda(S) = \frac{1}{k^*}. \quad (17)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \omega(R) &= \Phi_1 + i\Psi_2 = G \int_0^{-1} \frac{d\lambda}{V(1-\lambda^2)(1-k^{*2}\lambda^2)} = -G(K - iK') \\ \omega(P) &= \Phi_1 + i\Psi_1 = G \int_0^{-1} \frac{d\lambda}{V(1-\lambda^2)(1-k^{*2}\lambda^2)} = -GK \\ \omega(Q) &= \Phi_2 - i\Psi_1 = G \int_0^1 \frac{d\lambda}{V(1-\lambda^2)(1-k^{*2}\lambda^2)} = GK \\ \omega(S) &= \Phi_2 + i\Psi_2 = G \int_0^{\frac{1}{k^*}} \frac{d\lambda}{V(1-\lambda^2)(1-k^{*2}\lambda^2)} = G(K + iK') \end{aligned} \right\} \quad (18)^1$$

где  $K, K'$  являются полными эллиптическими интегралами первого порядка с соответственным модулем  $k^*$  и  $\sqrt{1-k^{*2}}$ .

Из этих преобразований непосредственно следует, что

$$\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\Phi_2 - \Phi_1} = \frac{Q}{4\Phi} = \frac{K'}{2K}. \quad (19)$$

Индивидуальные особенности системы в плоскости  $z$  входят только в значения  $p, q, r, s$ , которые определяют собой величину  $k^*$  согласно

<sup>1</sup> Whittaker and Watson, уже цитированная работа, глава XXII.

уравнению (16). Этот вывод окажется весьма полезным при расчете фильтрационного расхода под плотинами с забивной крепью, который будет рассмотрен в последующих разделах.

Следует дальше заметить, что уравнение (10) можно приложить не только к определению фильтрации под плотинами без забивной крепи, но оно дает также хорошее приближение при установлении фильтрации вокруг стыка плотины с берегом, если только сама плотина не связана намертво с водонепроницаемой горной породой. Для той части плотины, что находится выше уровня нижнего бьефа, перепад давления, принятый в уравнении (10), может быть приближен к действительному за счет усреднения действующего напора между уровнями верхнего и нижнего бьефов. Боковая фильтрация под уровнем нижнего бьефа будет соответствовать суммарному действующему напору или разности уровней с обеих сторон плотины.

Основной целью анализа, произведенного в настоящем разделе, было получение вывода для фильтрационного расхода (уравнение 10). Но представляет также интерес произвести для этого простого случая сравнение распределения давления под плотиной, которое дает здесь точная теория, где принимается в расчет конечная мощность проницаемого слоя, лежащего в основании плотины, и тем случаем, который рассматривается в гл. IV, п. 10, для бесконечно распространяющегося проницаемого слоя. Для этого необходимо только заметить, что так как  $\Psi = 0$  вдоль основания плотины, то уравнение (6) дает следующее выражение:

$$\frac{p}{\Delta p} = \frac{\Phi}{\Delta \Phi} = -\frac{1}{2K} F(\sin^{-1} \zeta, k^*);$$

$$\zeta = \frac{\operatorname{th} \pi x / 2h}{\operatorname{th} \pi w / 4h}; \quad k^* = \operatorname{th} \frac{\pi w}{4h}, \quad (20)$$

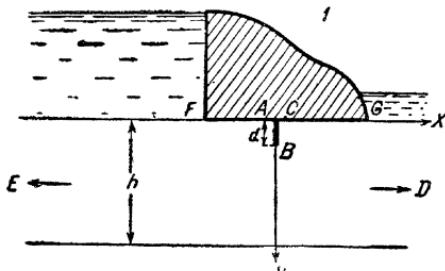
где  $\Phi$  и  $x$  замеряются от центра плотины. Результатирующее распределение давления для  $w/h = 5$  приведено на фиг. 44 в виде пунктирной линии, а для  $w/h = 1$  показано кружочками. Отсюда видно, что допущение бесконечной мощности у проницаемого слоя, залегающего в основании плотины, дает хорошее приближение для величины распределения давления (и отсюда суммарного противодавления) вдоль основания плотины, если даже оно и влечет за собой бесконечный фильтрационный расход.

**13. Фильтрационный расход под плотинами с удлиненной шириной основания при наличии забивной крепи.** Если плотина имеет забивную свайную крепь, проникающую на глубину  $d$  в проницаемый слой мощностью  $h$ , то фильтрационный расход может быть рассчитан последовательным приложением преобразований двух сопряженных функций, выведенных из теоремы Шварца-Кристоффеля. Так, плоскость  $z$  (фиг. 64) будет отображаться на верхнюю полуплоскость  $\zeta$  при соответствиях:

$$A \rightarrow \zeta = -1; \quad B \rightarrow \zeta = 0; \quad C \rightarrow \zeta = +1 \quad (1)$$

путем преобразования функции:

$$\begin{aligned} z &= c_1 \int \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta^2 - m^2) \sqrt{\zeta^2 - 1}} + c_2 = \\ &= \frac{c_1}{2 \sqrt{m^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{m^2 - 1} - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\sqrt{m^2 - 1} + \sqrt{\zeta^2 - 1}} + c_2, \end{aligned} \quad (2)$$



Фиг. 64. Плотина, имеющая свайную крепь на глубине  $d$  и установленная на проницаемом слое с мощностью  $h$ , в плоскости  $z$ .  
1 — плоскость  $z$ .

где точки  $D$ ,  $E$  предположительно переходят в  $\zeta = \pm m$  и знак  $\sqrt{\zeta^2 - 1}$  должен быть минус для  $\zeta < -1$ , плюс для  $\zeta > +1$  и плюс мнимые значения для  $-1 \leq \zeta \leq +1$ . Накладывая в качестве условий соответствия уравнения (1) и требование, чтобы при  $\zeta = \pm m$  оно переходило в линию  $z = x + ih$ , легко установить, что

$$c_1 = -\left(\frac{2h}{\pi}\right) \operatorname{ctg} \frac{\pi d}{2h}, \quad c_2 = 0, \quad m = \operatorname{cosec} \frac{\pi d}{2h}. \quad (3)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Плоскость } \zeta & & & & & & \text{Тогда уравнение (2) можно} \\ \Psi = 0 & & & & & & \text{написать так:} \\ \psi_2 E \Phi - \Phi F' & A' & B' & C' & \delta' \Phi - \phi_2 D' & \Psi = \psi_2 \\ -m & -a & -1 & 0 & 1 & d & m \end{array}$$

$$\zeta^2 = 1 + \operatorname{cig}^2 \frac{\pi d}{2h} \operatorname{th}^2 \frac{\pi z}{2h}. \quad (4)$$

Фиг. 65. Отображение фиг. 64 на плоскость  $\zeta$ .

Реализация конформного отображения плоскости  $\zeta$  показана

на фиг. 65 с граничными значениями  $\Phi$  и  $\Psi$  и крайними точками основания плотины;  $F'$ ,  $G'$  обозначим через  $a$ ,  $b$ .

Чтобы найти величину фильтрационного расхода, необходимо теперь приложить выводы последнего раздела, которые дают

$$\frac{Q}{A\Phi} = \frac{K'}{2K}, \quad (5)$$

с

$$m(a+b)k^{*2} - 2(ab+m^2)k^* + m(a+b) = 0$$

или

$$k^* = \frac{ab+m^2 - \sqrt{(m^2-b^2)(m^2-a^2)}}{m(a+b)}, \quad (6)$$

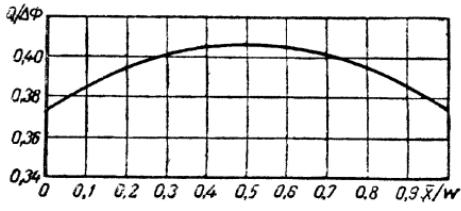
где

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d}{2h} \operatorname{th}^2 \frac{\pi w}{2h} \left( 1 - \frac{\bar{x}}{w} \right) \\ a^3 &= 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d}{2h} \operatorname{th}^2 \frac{\pi \bar{x}}{2h} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$\bar{x}$  — расстояние забивной крепи, считая от пяты основания плотины.

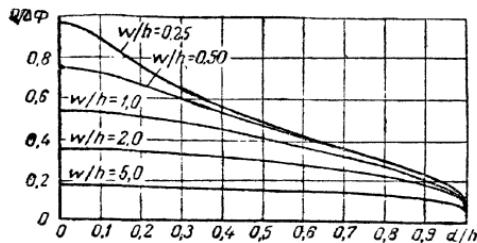
Фиг. 66. Кривая зависимости расхода фильтрации под плотиной, как функция местоположения свайной крепи:

$Q/\Delta\Phi$  — расход на единицу падения потенциала через плотину и на единицу длины плотины;  $x/w$  — (расстояние свайной крепи от пяты плотины) / (мощность залегающего ниже проницаемого слоя) = 1; (глубина свай) / (мощность ниже залегающего проницаемого слоя) = 0,5.



Чтобы показать влияние местоположения свайной крепи на величину фильтрационного расхода, на фиг. 66 построим зависимость  $Q/\Delta\Phi$  по отношению  $\bar{x}/w$ , для  $w/h = 1$  и  $d/h = 0,5$ .

Видно, что расход достигает своего максимума при симметричном положении свай. Общая величина колебания невелика. Чтобы увидеть, как изменяется  $Q/\Delta\Phi$  с изменением относительной ширины  $w/h$  и глубины забивной крепи  $d/h$ , достаточно допустить, что сваи установлены в середине основания плотины.



Фиг. 67. Расход фильтрации под плотиной со свайной крепью, установленной в центре основания:

$Q/\Delta\Phi$  — расход на единицу падения потенциала через плотину и на единицу длины плотины;  $d$  — глубина свай;  $w$  — ширина основания;  $h$  — мощность проницаемого слоя ниже плотины.

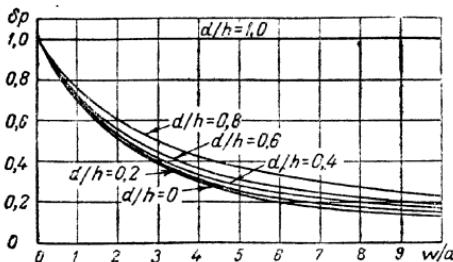
Полученные таким путем значения дадут и в дальнейшем верхние пределы для фильтрационного расхода и будут обладать, таким образом, большим коэффициентом запаса при расчетах типов течений, встречающихся на практике.

На фиг. 67 показаны изменения  $Q/\Delta\Phi$  с глубиной свайной крепи  $d/h$  для различной ширины основания плотины  $w/h$  и для  $\bar{x}/w = 1/2$ . Как и следует ожидать, фильтрационный расход уменьшается с возрастанием глубины забивки свай и ширины плотины. Для плотин, ширина которых значительно превосходит мощность проницаемого слоя, расход почти не зависит от глубины свай до тех пор, пока последние не достигнут непосредственной близости к подошве водопроницаемого слоя. То обстоятельство, что расход возрастает очень резко, по мере того как отношение  $d/h$  падает ниже значения 1, показывает, что пока

свай не будут укреплены намертво в водонепроницаемом слое, всегда будет существовать значительная фильтрация, имеющая место обычно в плотинах без свайной крепи, даже если последняя проникла на 99% в толщу проницаемого слоя.

Мы не будем здесь входить в отдельные детали распределения давления в основании плотин с забивной крепью, как это дается в вышеприведенном анализе. Однако можно получить подтверждение точности приближенной теории, которая приводится в гл. IV, п. 11, подсчетом перепада давления через свайную крепь для частного случая, когда последняя установлена в центре основания плотины. Повторяя ход анализа, приведший нас к уравнению (5), гл. IV, п. 12, легко установить, что этот перепад давления  $\Delta p$  дается выражением

$$\frac{\Delta p}{\delta p} = \frac{1}{K} \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{d\zeta}{V(1-\zeta^2)(1-k^{*2}\zeta^2)} = \frac{1}{K} F \left( \sin^{-1} \frac{1}{b}, k^* \right), \quad (7)$$



Фиг. 68. Падение давления через свайную крепь, установленную в центре основания плотины:

$\frac{\Delta p}{\delta p}$  = (падение давления через крепь) / (общее падение давления через плотину);  $d$  = глубина стояния свай;  $w$  = ширина основания плотины;  $h$  = мощность проницаемого слоя, залегающего ниже основания плотины.

где

$$k^* = \frac{b}{m}; \quad b^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d}{2h} \operatorname{th}^2 \frac{\pi w}{4h}; \quad m = \operatorname{cosec} \frac{\pi d}{2h}, \quad (8)$$

и  $\Delta p$  — суммарный перепад давления через плотину. На фиг. 68 приведено построение уравнения (7) для различных значений  $d/h$ . Кривая для  $d/h=0$  соответствует случаю проницаемого слоя бесконечной мощности, когда уравнение (7) приводится к эквивалентному виду (17), гл. IV, п. 11, а именно:

$$\frac{\Delta p}{\delta p} = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \frac{(w/2d)^2 - 1}{(w/2p)^2 + 1}. \quad (9)$$

То обстоятельство, что отклонения от этой предельной кривой не получают большого значения, пока  $d/h > 0,5$ , оправдывает применение более простой теории, развитой в гл. IV, п. 11 (где  $d/h=0$ ), при изучении сил противодавления и опрокидывающих моментов в плотинах без забивной крепи, по крайней мере для более низких значений  $d/h$ .

Это приближение должно быть в любом случае безопасно с точки зрения практического конструирования плотин без забивной крепи, так как оно приводит к более высоким значениям сил противодавления и моментов, чем они в действительности имеют место. Что же касается численных значений фильтрационного расхода, который соответствует кривым на фиг. 66 и 57, а также параметрам, которые представ-

лены в последующем разделе, следует заметить, что численное значение расхода  $\bar{Q}$  дается следующим выражением:

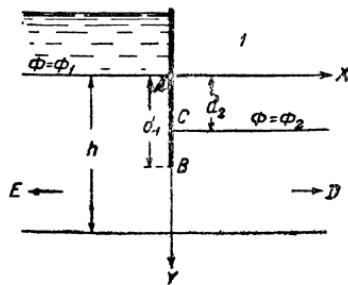
$$\bar{Q} = \frac{kL\Delta p}{\mu} \left( \frac{Q}{\Delta\Phi} \right), \quad (10)$$

где  $k$  — проницаемость водопроницаемого слоя;  $\mu$  — вязкость воды;  $L$  — длина плотины;  $\Delta p$  — перепад давления между верхним и нижним бьефом плотины. Если  $k$  выразить в дарси,  $L$  — в см,  $\Delta p$  — в ат,  $\mu$  — в сантипуазах, то  $\bar{Q}$  будет выражено в  $\text{см}^3/\text{сек}$ .

Так, беря  $k=10$  дарси;  $\mu=1$  сантипуаз,  $L=3048$  см,  $\Delta p=1$  ат, значение  $Q/\Delta\Phi=0,1$  соответствует  $\bar{Q}=3048$   $\text{см}^3/\text{сек}$ .

В свете большой значимости величины дебита или фильтрации и того обстоятельства, что значения  $Q/\Delta\Phi \sim 0,1$  сохраняются, согласно фиг. 67, для глубины свайной крепи, достигающей 99% от мощности проницаемого слоя, становится ясным, что реальная безопасность от высоких скоростей при фильтрации и размыве может быть получена в плотинах, непосредственно не установленных на водонепроницаемом основании, закреплением намертво свай в непроницаемом слое. Если только забивная крепь не установлена таким путем, то она очень мало уменьшит величину фильтрации, за исключением тех случаев, когда ширина плотины мала по сравнению с мощностью проницаемого слоя<sup>1</sup>.

**14. Фильтрационный расход под коффердамом.** Выводы последних нескольких разделов вполне достаточны, чтобы показать наиболее характерные особенности фильтрационного потока воды под стационарными сооружениями плотин. Вместе с тем применение временных водонепроницаемых перемычек, например коффердамов, в процессе проведения гидравлических работ привлекает также практический интерес к вопросу расхода фильтрации под такими временными сооружениями для окончательного перекрытия или уменьшения количества фильтрующейся воды. На фиг. 69 представлена схематично типовая водонепроницаемая перемычка — коффердам. Перемычка установлена до глубины  $d_1$  в водопроницаемом слое мощностью  $h$ . Со стороны нижнего бьефа слой пес-



Фиг. 69. Изображение перемычки, установленной на глубине  $d_1$  ниже поверхности, с глубиной котлована, равной  $d_2$ , в плоскости  $z$ .

$z$  — плоскость  $z$ .

<sup>1</sup> Более подробное рассмотрение некоторых практических вопросов проблемы фильтрации воды под плотинами можно найти в работах A. Casagrande, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 61, 365, 1935; см. также E. W. Lane, Proc. Amer. Civ. Eng., 60, 929, 1934, где сведены различные наблюдения, относящиеся к 250 существующим плотинам, а также в работе L. F. Harza, на стр. 967 этого цитированного журнала, где приведены результаты измерений сил противодавления под плотинами, полученные на электролитических моделях. Сюда входит некоторое число случаев с двумя рядами шпунтовых свай, а также слоистое залегание пористого основания под плотинами.

чника извлечен до глубины  $d_2$ . Сама перемычка представлена тонким водонепроницаемым шпунтовым рядом  $AB$ . На стороне нижнего бьефа установлены насосы для откачки воды, просачивающейся в котлован.

Знание величины ожидаемой фильтрации имеет значение не только для расчета откачивающей установки соответствующей производительности, но также для предупреждения опасностей от размывания и разрушения самой перемычки. Прилагая снова уравнение (3), гл. IV, п. 11, устанавливаем, что диаграмма плоскости  $z$  (фиг. 69) будет отображена на верхней полуплоскости  $\zeta$  преобразованием функции, определяемой выражением:

$$\begin{aligned} z = & c_1 \int \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta - m_1)(\zeta + m_2) \sqrt{\zeta^2 - 1}} + c_2 = \\ = & \frac{c_1}{m_1 + m_2} \left[ \frac{-m_1}{\sqrt{m_1^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{(m_1 - 1)(\zeta + 1)} + \sqrt{(m_1 + 1)(\zeta - 1)}}{\sqrt{(m_1 - 1)(\zeta + 1)} - \sqrt{(m_1 + 1)(\zeta - 1)}} + \right. \\ & \left. + \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{(m_2 + 1)(\zeta + 1)} + \sqrt{(m_2 - 1)(\zeta - 1)}}{\sqrt{(m_2 + 1)(\zeta + 1)} - \sqrt{(m_2 - 1)(\zeta - 1)}} \right] + c_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{array}{c} \text{Плоскость } \zeta \\ \psi = \psi_2 E' \Phi - \Phi_2 A' \\ \frac{\psi_2}{-i} \quad \frac{E' \Phi}{-1} \quad \frac{\Phi_2}{0} \quad \frac{A'}{i} \\ \hline \frac{-m_1}{-i} \quad \frac{B'}{0} \quad \frac{C' \Phi - \Phi_2}{i} \quad \frac{D' \psi - \psi_2}{m_1} \end{array}$$

где следующие соответствия

$$\begin{aligned} A &\rightarrow -1; \quad B \rightarrow 0; \quad C \rightarrow +1; \\ D &\rightarrow m_1; \quad E \rightarrow -m_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Фиг. 70. Отображение внешности фиг. 69 на плоскость  $\zeta$ .

были предположены заранее, как это указано на фиг. 70. Эти условия последовательно дают

$$\begin{aligned} 0 = & \pi i c_1 \left( \frac{-m_1}{\sqrt{m_1^2 - 1}} + \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 - 1}} \right) + c_2 (m_1 + m_2) \\ id_1 = & \frac{c_1}{m_1 + m_2} \left[ \frac{-m_1}{\sqrt{m_1^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{m_1 - 1} + i \sqrt{m_1 + 1}}{\sqrt{m_1 - 1} - i \sqrt{m_1 + 1}} + \right. \\ & \left. + \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{m_2 + 1} + i \sqrt{m_2 - 1}}{\sqrt{m_2 + 1} - i \sqrt{m_2 - 1}} \right] + c_2 \\ id_2 = & c_2. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3)$$

Замечая отсюда, что  $c_1$  является действительной величиной, условие, при котором  $z = x + ih$  для  $\zeta > m_1$ , после уравнивания мнимых частей обеих сторон уравнения (1) для  $\zeta > m_1$  получается из следующего выражения

$$ih = \frac{-\pi i m_1 c_1}{(m_1 + m_2) \sqrt{m_1^2 - 1}} + c_2. \quad (4)$$

Исключая  $c_2$ , можно написать окончательно три уравнения для  $c_1$ ,  $m_1$  и  $m_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\pi m_1 c_1}{\sqrt{m_1^2 - 1}} = & -(h - d_2) (m_1 + m_2); \quad \frac{\pi m_1 c_1}{\sqrt{m_2^2 - 1}} = -h (m_1 + m_2) \times \\ & \times 2c_1 \left[ \frac{-m_1}{\sqrt{m_1^2 - 1}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{m_1 + 1}{m_1 - 1}} + \right. \\ & \left. + \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 - 1}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{m_2 - 1}{m_2 + 1}} \right] = (d_1 - d_2) (m_1 + m_2) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (5)$$

Вводя сюда обозначение

$$m_1 = \sec \alpha_1; \quad m_2 = \sec \alpha_2 \quad (6)$$

и исключая  $c_1$ , в конечном итоге получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} &= 1 - \frac{d_2}{h}, \\ \alpha_1 \left(1 - \frac{d_2}{h}\right) + \alpha_2 &= \pi \left(1 - \frac{d_1}{h}\right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для особого случая, когда  $d_2 = 0$ , т. е. отсутствует котлован со стороны нижнего бьефа перемычки, уравнение (7) получает непосредственное решение:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{d_1}{h}\right); \quad m_1 = m_2 = \operatorname{cosec} \frac{\pi d_1}{2h}; \quad d_2 = 0. \quad (8)^1$$

Однако в целом уравнения (7) могут быть решены без особых трудностей графическим путем.

Величина фильтрационного расхода может быть теперь рассчитана с помощью уравнения (19), гл. IV, п. 12, где значение  $k^*$ дается из уравнения (16), гл. IV, п. 12. Решая последнее уравнение и используя обозначения (6), находим, что

$$\frac{Q}{\Delta \Phi} = \frac{K'}{2K}; \quad k^* = \frac{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)/2}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)/2} \quad (9)$$

Для частного случая, когда глубина котлована со стороны нижнего бьефа достигает глубины забивки свай, т. е.  $d_2 = d_1$ , полученное решение нарушается, и задачу необходимо решить прямым путем, принимая с самого начала точки  $B$  и  $C$  совмещенными. Выполняя это решение аналитическим путем, совершенно аналогичным приведенному выше, находим, что для этого случая  $k^*$  определяется выражением:

$$k^* = \frac{1}{\left(\frac{2h}{d} - 1\right)}; \quad d_2 = d_1 = d. \quad (10)$$

Значения фильтрационного расхода, которые даются уравнениями (8), (9) и (10), приведены в виде построения на фиг. 71 как функции глубины проникновения перемычки в слой песка  $d_1/h$  для различных значений  $d_2/d_1$ . В этом случае также следует ожидать с физической стороны общего уменьшения величины  $Q/\Delta \Phi$  с возрастанием  $d_1/h$  или уменьшением  $d_2/d_1$ , т. е. пока перемычка не будет установлена

<sup>1</sup> Форхгеймером для этого случая также было получено решение с высокой степенью приближения, но путем, сходным с тем, о котором упоминалось в сноске в гл. IV, п. 12. Его окончательные формулы таковы:

$$\frac{Q}{\Delta \Phi} = \frac{\pi}{\left[4 \ln 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi(1-d_1/h)}{4}\right]}, \quad \text{для } \frac{d_1}{h} > \frac{1}{2}$$

и

$$\frac{Q}{\Delta \Phi} = \left(\frac{1}{\pi}\right) \ln 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi d_1}{4h}, \quad \text{для } \frac{d_1}{h} < \frac{1}{2}.$$

на самую подошву проницаемого слоя, можно наблюдать заметное постоянство этого расхода.

Так как физический эквивалент ординат в данном случае является тем же самым, что дается в уравнении (10), гл. IV, п. 13, значение действительного закрепления коффердама на скале очевидно вполне.

Значения  $Q/\Delta\Phi$ , выведенные в настоящем разделе и в некоторых предыдущих, относятся к суммарному расходу, фильтрующемуся через пласт песчаника вдоль всего бесконечного слоя  $EA$  со стороны верхнего бьефа и покидающему этот пласт вдоль всей бесконечной поверхности  $CD$  со стороны нижнего бьефа (фиг. 69).

Вместе с тем конечные ограничения этих поверхностей при реальном течении не нарушают справедливости полученных аналитических выводов. Нетрудно показать, что значительная часть расхода, поступающего или покидающего пористую среду, сконцентрирована вблизи особых точек  $A$  и  $C$ . Таким образом, фильтрация на единицу длины с поверхности  $CD$  дается следующим выражением

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Psi}{d\zeta} : \frac{dx}{d\zeta}. \quad (11)$$

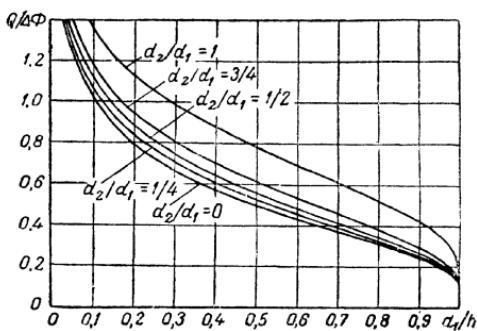
Беря случай, когда  $d_2=0$  и  $m_1=m_2=m$ , имеем, что

$$\frac{d\Psi}{d\zeta} = \frac{A}{\sqrt{(\zeta^2-1)(m^2-\zeta^2)}}; \quad \frac{dx}{d\zeta} = \frac{B\zeta}{(m^2-\zeta^2)\sqrt{\zeta^2-1}}.$$

Отсюда

$$\frac{d\Psi}{dx} = \text{const} \frac{\sqrt{m^2-\zeta^2}}{\zeta} = \text{const} \frac{\text{ctg } \pi d/2h \operatorname{sech } \pi x/2h}{\sqrt{1+\text{ctg}^2 \pi d/2h \operatorname{th}^2 \pi x/2h}}, \quad (12)$$

так как реализация конформного отображения плоскости  $z$  на плоскость  $\zeta$  в данном случае является следствием приложения той же функции, что была определена уравнением (4), гл. IV, п. 13. Видно, что  $\frac{d\Psi}{dx}$  быстро приближается к нулевому значению, если удалиться от перемычки на расстояние одинарной или двойной мощности проницаемого слоя. Однако полученные здесь результаты обладают с практической точки зрения достаточным коэффициентом безопасности при установлении величины фильтрационного расхода в любом случае, ибо они значительно превосходят фактические значения расхода в физических системах, где  $EA$  и  $CD$  являются в действительности конечными величинами.



Фиг. 71. Расход фильтрации под перемычками:

$Q/\Delta\Phi$  — расход на единицу падения потенциала через перемычку и на единицу длины перемычки;  $d_1$  — глубина перемычки;  $d_2$  — глубина котлована со стороны нижнего бьефа;  $h$  — мощность проницаемого слоя.

**15. Анизотропная среда.** Как уже было отмечено в главе II, произведенные измерения показали, что довольно часто проницаемость перпендикулярно плоскости напластования песчаника значительно отличается от ее величины, замеренной в плоскости, параллельной напластованию. В таких случаях песчаник можно рассматривать как анизотропную среду с проницаемостью, зависящей от направления потока. В большинстве практических задач эта анизотропность не имеет большого значения, особенно в тех случаях, где скорости в основном приурочены к плоскостям, параллельным напластованию. Вместе с тем представляется интересным принять в расчет фактор анизотропности, когда последняя подвергается рассмотрению. Так как дальнейшая дискуссия будет ограничена только анизотропным характером среды, здесь будет достаточно сделать допущение, что проницаемость, являющаяся отличной для направлений течения вдоль различных координатных осей, во всем остальном постоянна и не зависит от системы координат. Тогда, возвращаясь к гл. III, п. 3, видно, что закон Дарси для однородного, но анизотропного песка может быть написан в следующем виде:

$$v_x = -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad v_z = -\frac{k_z}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{k_z}{\mu} \gamma g. \quad (1)$$

Полагая, что отдельные проницаемости  $k_x, k_y, k_z$  постоянны, получаем из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 = -k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}.$$

Тогда распределение давления  $p(x, y, z)$  не будет больше устанавливаться уравнением Лапласа, а будет даваться равенством:

$$k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Однако небольшое преобразование последнего выражения приведет его к уравнению Лапласа. Так, преобразуя систему координат в  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , определяемую

$$\bar{x} = \frac{x}{V k_x}; \quad \bar{y} = \frac{y}{V k_y}; \quad \bar{z} = \frac{z}{V k_z}, \quad (3)$$

непосредственно получаем следующее:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \bar{z}^2} = 0. \quad (4)$$

Отсюда яствует, что влияние анизотропности на проницаемость может быть заменено эквивалентным преобразованием координат. Таким образом, чтобы найти давление в точке  $(x, y, z)$  согласно уравнению (2), необходимо только изменить контуры системы путем преобразования (3), решить уравнение Лапласа (4) для этих новых границ, а уже затем подсчитать давление в точке

$$(x/V \bar{k}_x, y/V \bar{k}_y, z/V \bar{k}_z).$$

В гл. V, п. 5 будет рассмотрено приложение этой теории к задачам, имеющим некоторый практический интерес.

Что же касается движения в первоначальной физической системе, можно заметить, что в общем линии тока не будут нормальны к экви-потенциальным линиям. Действительно, легко усмотреть, что угол между этими направлениями дается уравнением:

$$\cos \theta = \frac{\bar{v} \cdot \nabla p}{|\bar{v}| |\nabla p|} = \frac{k_x \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2}{|\bar{v}| |\nabla p|}. \quad (5)$$

Поэтому результативная проницаемость вдоль линий тока будет:

$$k_r = \frac{|\bar{v}|}{|\nabla p| \cos \theta} = \frac{|\bar{v}|^2}{\bar{v} \nabla p} = \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta_x}{k_x} + \frac{\cos^2 \theta_y}{k_y} + \frac{\cos^2 \theta_z}{k_z}}, \quad (6)$$

где  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  — углы между вектором  $\bar{v}$  и координатными осями  $(x, y, z)$ <sup>1</sup>. С другой стороны, эквивалент изотропной проницаемости в преобразованной системе дается для трехмерных систем выражением  $\sqrt{k_x k_y k_z}$ , а для плоских систем  $\sqrt{k_x k_y}$ .

**16. Выводы из общей теории потенциала. Теорема Грина.** В предыдущих разделах настоящей главы были представлены решения некоторых задач плоского течения, имеющих практическое значение. При этом были использованы некоторые из наиболее мощных аналитических методов теории потенциала. Так как мы в первую очередь заинтересованы в физической интерпретации и значении этих задач, то нами были показаны только те методы, которые имеют непосредственное приложение к проблемам некоторого практического значения<sup>2</sup>. Однако существует ряд общих выводов, имеющих практический интерес, которые можно будет достаточно хорошо обрисовать здесь и которые не зависят от таких подробных данных, которыми характеризовались уже рассмотренные задачи. В качестве первого вывода следует упомянуть, что в целом каковы бы ни были отдельные формы граничных контуров, течение в любой системе замкнутых поверхностей всегда пропорционально разности давлений между поверхностями, через которые движется жидкость и от которых она движется при условии, что оба ряда поверхностей имеют постоянное давление каждый. Это положение можно рассматривать как само собой очевидное следствие линейности уравнения Лапласа. Его можно вывести также, пользуясь методом функции Грина. Однако представляет собой интерес показать следу-

<sup>1</sup> Эти результаты были также получены, но с несколько более сложными выводами в работах C. G. Vreedenburgh and O. Stevens, Int. Conf. Soil Mech. and Fondation Eng., 1936; а также F. Schaffernak, Die Wasserwirtschaft, p. 399, 1933.

<sup>2</sup> Возможно, что наиболее часто применяемым методом решения, который не рассматривался в предыдущих разделах, является приложение интеграла Фурье. Полное рассмотрение этого способа, хорошо иллюстрированное примерами, можно найти в работе W. E. Byerly „Fourier's Series and Spherical Harmonics“, гл. IV.

ющее доказательство этого положения, основанное несколько на ином принципе теории потенциала.

С этой целью мы используем гидродинамическую аналогию хорошо известной теоремы обратной взаимности Грина, которая формулируется в теории электричества так: если полные заряды  $E_1, E_2$  и т. д. на отдельных проводниках системы создают потенциалы  $V_1, V_2$  и т. д., а заряды  $E'_1, E'_2$  и т. д. создают потенциалы  $V'_1, V'_2$  и т. д., то:

$$\sum E_i V'_i = \sum E'_i V_i.$$

В гл. III, п. 6 уже было показано, что путем непосредственного распространения аналогий заряды  $E$  и постоянные потенциалы  $V$  для ряда проводников соответствуют гидродинамически полным расходам  $Q$  и постоянным потенциалам  $\Phi$ . Поэтому возможно приложить теорему Грина к течению жидкости в пористой среде, сформулировав ее следующим путем:

Если постоянные потенциалы  $\Phi_1, \Phi_2$  и т. д. на некоторых поверхностях обеспечивают расходы  $Q_1, Q_2 \dots$  и если потенциалы  $\Phi'_1, \Phi'_2 \dots$  обеспечивают расходы  $Q'_1, Q'_2 \dots$ , то

$$\sum \Phi_i Q'_i = \sum \Phi'_i Q_i. \quad (1)$$

Физически это обозначает, что если одно установившееся состояние характеризуется количествами  $\Phi_i, Q_i$ , то  $\Phi'_i, Q'_i$  любого другого установившегося течения в той же самой системе должны удовлетворять уравнению (1). Этот вывод можно приложить к решению рассматриваемой задачи следующим путем.

Допустим, что дренируемые поверхности имеют постоянный потенциал  $\Phi_1$ , а поверхности питания — постоянный потенциал  $\Phi_2$ , причем соответствующие расходы будут, как это показано на фиг. 72,  $Q_1$  и  $Q_2$ . Допустим, что аналогичные величины для иного установившегося состояния обозначены теми же буквами, но со значками „прим“.

Из уравнения (1) следует, что

$$\Phi_1 \sum Q'_1 + \Phi_2 \sum Q'_2 = \Phi'_1 \sum Q_1 + \Phi'_2 \sum Q_2. \quad (2)$$

Так как в системе, которую мы считаем замкнутой, не может быть накопления или уничтожения жидкости, то полные расходы должны удовлетворять отношению:

$$\sum Q_1 + \sum Q_2 = 0 = \sum Q'_1 + \sum Q'_2. \quad (3)$$

которое позволяет написать уравнение (2) в следующем виде:

$$(\Phi'_1 - \Phi'_2) \sum Q_1 = (\Phi_1 - \Phi_2) \sum Q'_1,$$



Фиг. 72.

или

$$\frac{\sum Q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{\sum Q'}{\Phi'_1 - \Phi'_2} = \dots = \text{const}, \quad (4)$$

откуда

$$\sum Q = \text{const } A\Phi, \quad (5)$$

что явилось положением, требующим доказательства, ибо константа зависит только от геометрии системы и, очевидно, прямо пропорциональна проницаемости  $k$ . Отсюда следует дополнительно вполне естественный вывод, что если потенциалы обратимы, то и расходы обратимы, сохраняя, однако, то же самое численное значение, что и ранее. Наконец, можно заметить, что полученный результат, решенный методом функции Грина, сохраняет свое значение даже для отдельных расходов  $Q$ .

Следующий вывод, представляющий некоторый интерес, относится к общему случаю плоского течения в скважину, который вне зависимости от контура области, дренируемой скважиной, выражается следующим уравнением:

$$Q = \frac{2\pi k A p}{\mu \ln c/r_w}, \quad (6)$$

где  $\Delta p$  — перепад давления между внешним контуром (предположительно с постоянным давлением) и скважиной радиуса  $r_w$ ;  $c$  — константа, зависящая от формы внешнего контура.

Следует заметить, что, несмотря на форму внешнего контура,  $p(x, y)$  может быть выражено следующим выражением:

$$p = q\Phi(x, y) + \text{const}, \quad (7)$$

где  $\Phi(x, y) \approx \ln r$  — для небольших значений  $r$  (замеренных от центра скважины). Полагая теперь

$$\ln c = \Phi(r_e), \quad (8)$$

где  $\Phi(r_e)$  представляет собой постоянное значение  $\Phi$  на внешнем контуре, прилагая граничные условия, чтобы определить  $q$ , и рассчитывая обычным способом величину  $Q$ , находим в результате уравнение (6). Интересно заметить, что константа  $c$  в отдельных примерах соответствует вполне обоснованному эффективному среднему расстоянию внешнего контура от скважины.

Так, в частном случае:

1) Круговой контур радиуса  $r_e$ , концентричный со скважиной,

$$c = r_e \quad [\text{см. уравнение (10), гл. IV, п. 2};]$$

2) Круговой контур радиуса  $r_e$  с центром на расстоянии  $\delta$  от скважины

$$c = \frac{r_e^2 - \delta^2}{r_e} \quad [\text{см. уравнение (10), гл. IV, п. 6};]$$

3) Линейный источник питания на расстоянии  $d$  от скважины

$$c = 2d \quad [\text{см. уравнение (8), гл. IV, п. 7};]$$

4) прямоугольный контур со сторонами  $2a, 2b$  и скважиной в центре

$$c = \frac{4\sqrt{ab}}{\pi}.$$

Вывод последнего случая (4) можно получить без всякого труда, применяя функцию Грина для прямоугольного участка, как это дается в приложениях. Следует заметить, что во всех случаях значения  $c$  соответствуют величинам, которые можно рассматривать как средние „эффективные“ радиусы фактических внешних контуров. Отсюда можно вполне обоснованно обобщить и сделать логическое заключение, что для всех практических целей необходимо рассчитывать  $Q$  по уравнению (6), а для определения величины  $c$  сделать расчет соответственного среднего расстояния внешнего контура от скважины.

В главе IV, п. 6 была применена „теорема Гаусса о среднем“, которая, будучи выражена через давление  $p$ , может быть сформулирована таким образом: давление в любой точке равняется среднему давлению по любому кругу, который не включает в себя каких-нибудь источников питания или стоков, и центр которого находится в искомой точке. Для доказательства этой весьма полезной теоремы снова можно использовать метод ряда Фурье<sup>1</sup>. Так, из гл. IV, п. 5 ясно, что распределение давления в пределах окружности радиуса  $r_e$ , не содержащей источников питания или стоков относительно интересующей нас точки, может быть выражено следующим:

$$p = \sum_0^{\infty} r^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta), \quad (9)$$

где  $a_n, b_n$  так подобраны, что  $p$  принимает заранее намеченные значения на внешнем контуре  $r = r_e$ . Отсюда удовлетворяется следующее выражение:

$$p_e(\theta) = \sum_0^{\infty} r_e^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta). \quad (10)$$

Если  $p$  остается конечным внутри круга, то коэффициенты  $c_n, d_n$  соответственного уравнения (1), гл. IV, п. 5 должны быть приравнены нулю.

Из уравнения (10) непосредственно следует, что среднее значение  $p_{e\theta}$  дается:

$$\bar{p}_e = b_0 = p(r = 0), \quad (11)$$

что является аналитическим выражением вышеуказанной теоремы.

Следующий общий вывод из теории потенциала указывает, что для любой проблемы течения, плоского по отношению к декартовой системе

<sup>1</sup> Этот результат получается непосредственно, если в интеграле Пуассона принять  $\delta=0$  [уравнение (17), гл. IV, п. 6].

координат, можно взаимно заменить эквипотенциальные линии на линии тока и все же иметь систему, удовлетворяющую уравнению Лапласа. В гл. IV, п. 8 было показано, что функция тока  $\Psi$  не только удовлетворяет уравнению Лапласа, но более того, кривые  $\Psi = \text{const}$  нормальны к эквипотенциальным кривым  $\Phi = \text{const}$ . Отсюда становится ясным, что можно обменять роли  $\Psi$  и  $\Phi$ , рассматривая первую как функцию потенциала, а последнюю как функцию тока. Таким образом, любой комплекс эквипотенциальных линий и линий тока для данной физической задачи можно интерпретировать как решение другой физической задачи, где эквипотенциальные линии и линии тока обменялись ролями, и граничные условия были изменены соответствующим путем.

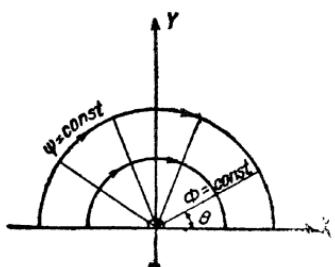
Взаимозаменяемость эквипотенциальных линий и линий тока может быть показана на специальном примере из задачи радиального течения в полукруговой системе, где эквипотенциальные линии даются окружностями:

$$\Phi = \frac{k}{\mu} p = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_w} + \Phi_w = \text{const}^1, \quad (12)$$

а линии тока

$$\Psi = \frac{Q}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} = \frac{Q}{\pi} \theta = \text{const}. \quad (13)$$

являются, очевидно, радиусами. Приложив полученные результаты, замечаем, что если заменить линию тока  $\theta = 0$  эквипотенциальной линией  $\Phi = 0$ , а линию тока  $\theta = \pi$  эквипотенциальной линией  $\Phi = Q$ , то новые линии тока будут окружностями:



Фиг. 73. Результат замены местами эквипотенциальных линий и линий тока при радиальном течении.

Несимметричность в распределении потенциала для течения, чья геометрия обладает определенной симметрией.

Для целей настоящей работы эта теорема может быть сформулирована следующим путем.

Если течение имеет плоскость симметрии и все контуры с высоким потенциалом при одном и том же постоянном потенциале находятся по одну сторону плоскости, а все контуры с низким потенциалом при одном и том же постоянном потенциале симметрично расположены по другую сторону плоскости, то распределение потенциала внутри системы

$$\Psi = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_w}, \quad (14)$$

как это показано на фиг. 73. Это соответствует течению между двумя смежными полубесконечными линейными источниками питания и стоками. Давление в источниках питания должно быть выше давления стоков на величину  $(k/\mu - 1) Q$ .

Последняя теорема из теории потенциала, имеющая практический интерес, относится к вопросу установления известной симметрии в распределении потенциала для течения, чья геометрия

<sup>1</sup> В этом случае  $Q$  относится к расходу через единицу мощности в полукруговую поверхность стока  $r = r_w$ .

будет также симметрично по отношению к геометрической системе линий тока и эквипотенциальных линий на обеих сторонах плоскости. Нумерация эквипотенциальных линий будет иметь тот же самый численный порядок при возрастающей последовательности, идя от плоскости симметрии к границам с высоким потенциалом, а также при убывающей последовательности, идя к границам с низким потенциалом. В частности, плоскость симметрии будет иметь потенциал, равный среднегеометрическому потенциальному на контурах.

Простое доказательство этой почти очевидной теоремы может быть построено следующим путем. Допустим, что контуры с высоким и низким потенциалом  $S_1$  и  $S_0$  имеют потенциал 1 и 0. Распределение последнего обозначим через  $\Phi(x, y, z)$ . Тогда распределение потенциала  $\Phi' = 1 - \Phi$  будет соответствовать, очевидно, тождественному состоянию течения, но с обращенными скоростями. Так как условия  $\Phi'$  можно получить вращением потока на  $180^\circ$  относительно соответственной оси в плоскости симметрии, то при этих условиях вследствие геометрической симметрии системы нумерации потенциалов, начиная с 1 при  $S_0$ , будет тождественной нумерации в первоначальной системе, начиная с 1 при  $S_1$ . Отсюда, если  $P_1, P_0$  — точки, симметричные по отношению к плоскости симметрии на сторонах  $S_1$  и  $S_0$ , т. е.

$$\Phi(P_1) = \Phi'(P_0) = 1 - \Phi(P_0), \quad (15)$$

то

$$\Phi(P_1) + \Phi(P_0) = 1. \quad (16)$$

По мере того как  $P_1$  и  $P_0$  приближаются и достигают плоскости симметрии, становится ясным, что  $P_1 = P_0 = \bar{P}_1$ .  
Отсюда

$$\Phi(\bar{P}) = \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Тогда уравнение (16) можно переписать в таком виде:

$$\Phi(P_1) - \Phi(\bar{P}) = \Phi(\bar{P}) - \Phi(P_0), \quad (18)$$

что совместно с уравнением (17) является аналитическим эквивалентом формулировки доказанной теоремы.

Следует заметить, что эта теорема является основой для выводов, которые даются в заключении к настоящей главе (п. 18) по отношению к распределению давления и сил противодавления в плотинах с двумя рядами шпунтовых свай, установленных симметрично по отношению к вертикальной плоскости, проходящей через центральную линию основания плотины.

**17. Приближенные и неаналитические методы решения задач плоского течения.** В предыдущих разделах было показано, что можно идеализировать, не вводя серьезных ошибок, различные проблемы течения жидкости в пористой среде, тщательное рассмотрение которых в настоящей главе привело к тому, что они стали доступны точной аналитической формулировке. Однако на этом основании нельзя надеяться, что для всех возникающих практических задач в этой области можно найти решения в аналитической форме.

Поэтому для полноты обзора мы вкратце упомянем о некоторых возможных способах подхода к проблеме, когда нельзя найти строгого аналитического решения. Наш основной интерес заключается здесь скорее в раскрытии физической сущности проблем течения, чем в аналитической теории уравнения Лапласа. Мы не претендуем на полноту раскрытия возможных методов решения его и ограничимся в большинстве случаев простым их определением. Наиболее интересны из этих методов, с аналитической точки зрения, являются, возможно, совершенство техники вывода ряда аналитических функций, которые в пределе приближаются индивидуально или в соответственных комбинациях к потенциальной функции, удовлетворяющей предначертанным граничным условиям. Среди различных видов этих функций имеются удовлетворяющие в отдельности граничным условиям, но не удовлетворяющие дифференциальному уравнению (метод Пуанкаре), а также такие, что являются в отдельности решением уравнения Лапласа, но не удовлетворяют граничным условиям (метод среднего арифметического Ньюмена). Эти методы являются весьма мощным орудием при изучении формальной теории решений уравнения Лапласа, но непригодны, в частности, для обработки специфических задач. Читатель может найти полное обозрение этих методов в работе „Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften“, т. II, ч. III, I, стр. 177—377, а также в „Potential Theory“ О. Д. Келлог, гл. XI, 1929 г.

Значительно более практический путь решения базируется на выводе из вариационного исчисления<sup>1</sup>, гласящем, что проблема решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

для удовлетворения заранее установленных граничных условий на контурах определенной области эквивалентна нахождению функции  $\Phi$ , удовлетворяющей этим граничным условиям и имеющей такое значение, чтобы привести интеграл

$$I = \iint \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2)^2$$

к минимуму. Хотя задача приведения интеграла  $I$  к минимуму обычно преобразуется обратно в решение (1), непосредственная попытка получения приближенного минимума во многих случаях будет являться более

<sup>1</sup> Riemann-Webers, уже цитированная работа, главы V и XX; также Courant-Hilbert, „Methoden der Mathematischen Physik“, 1924, главы IV и VI; есть русский перевод.

<sup>2</sup> Это выражение содержит, очевидно, весьма интересное следствие, а именно: фактическое распределение давлений и скоростей в пористой среде, несущей жидкость в условиях ламинарного течения, должно быть таким, чтобы создать минимум общей макроскопической кинетической энергии жидкости по сравнению со всеми остальными способами распределения, согласующимися с заранее принятыми граничными условиями. Другим следствием является то обстоятельство, что движение жидкости должно быть таким, чтобы общая величина произведенной работы трения была минимальной, так как интегральное выражение  $I$  пропорционально величине последней в каждой точке  $(x, y)$ .

легкой процедурой. Среди различных схем минимизации  $I$  следует упомянуть о схемах Ритца<sup>1</sup> и Трефтица<sup>2</sup>, которые являются аналогами приведенных выше формальных аналитических методов. В них мы встречаемся с соответственными рядами функций, которые удовлетворяют граничным условиям, но не уравнению Лапласа, и обратно.

Практическое содержание метода Ритца состоит в основном из построения функции  $\Phi$ :

$$\Phi(x, y) = g(x, y) + \sum_1^n c_m \Phi_m(x, y), \quad (3)$$

где  $g(x, y)$  является любой дифференцируемой функцией, удовлетворяющей граничным условиям, в то время как  $\Phi_m$  является последовательностью функций, обращающихся в нуль на контуре. Значение  $g$  может быть принято равным нулю, если каждое из  $\Phi_m$  удовлетворяет граничным условиям. Выбираем постоянные коэффициенты  $c_m$  таким путем, что, когда  $\Phi$  будет подставлено в уравнение (2),  $I$  будет иметь минимум. Согласно элементарным правилам исчисления выбор  $c_m$  приводит к системе уравнений линейных относительно  $c_m$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial c_m} = \iint (g_x \Phi_{mx} + g_y \Phi_{my}) dx dy + \\ + \sum c_j \iint (\Phi_{mx} \Phi_{jx} + \Phi_{my} \Phi_{jy}) dx dy = 0; \quad m = 1, 2 \dots n, \quad (4)$$

где индексы  $(x, y)$  показывают на дифференцирование по  $x$  и  $y$ , или же, применяя теорему Грина<sup>3</sup>, получаем окончательно:

$$\sum c_j \iint \Phi_m V^2 \Phi_j dx dy = - \iint \Phi_m V^2 g dx dy; \quad m = 1, 2 \dots n. \quad (5)$$

Точность результативной функции  $\Phi$  будет, очевидно, зависеть от выбора функций  $\Phi_m$  и числа элементов  $n$ , принятого в суммировании.

Успешность применения этой методики будет зависеть вполне определенно от выбора  $\Phi_m$ , так как для получения их численных значений следует разрешить интегральные уравнения (4) и (5). Таким образом, если можно выбрать  $\Phi_m$  так, что их производные по  $x$  и  $y$  образуют ортогональные ряды, становится ясным, что уравнения (4) сводятся к  $n$  отдельным уравнениям по единичным коэффициентам  $c_m$ . Иначе их следует рассматривать как ряд совместных уравнений. Однако в любом случае можно показать, что хотя бы конечная сумма отобранных  $\Phi_m$  представляла фактически строгое решение, значение интеграла из уравнения (2) с любым конечным рядом, например, согласно уравнению (3), будет больше по сравнению с его минимальным значением, даваемым точным решением. Путь решения, который дает Трефтиц, отличается от схемы Ритца только природой функций  $\Phi_m$ . Здесь  $\Phi_m$  выбраны первоначально как потенциальные функции. Отсюда все они удовлетворяют

<sup>1</sup> Ritz W., J. rein. u. angew. Math., 135, 1, 1909.

<sup>2</sup> Trefftz E., „Intern. Cong. Applied Mech.“, стр. 131, Цюрих, 1926.

<sup>3</sup> E. B. Wilson, „Advanced Calculus“, p. 349, 1912.

уравнению (1), но не удовлетворяют граничным условиям. Беря тогда ряд

$$\chi(x, y) = \sum_1^n c_m \Phi_m(x, y) \quad (6)$$

и устанавливая как эквивалент уравнения (2) требование, чтобы выражение

$$\iint |V(\Phi - \chi)|^2 dx dy \quad (7)$$

имело значение минимума, где  $\Phi$  является истинным решением при значениях границ  $g(s)$ , легко установить, что  $c_m$  получаются из линейных уравнений:

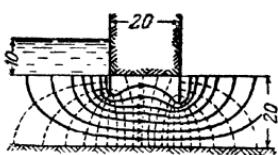
$$\sum c_j \int \Phi_j \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} ds = \int g(s) \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} ds. \quad (8)$$

В этом случае точность  $\chi$  будет зависеть снова от выбора  $\Phi_m$  и числа членов в ряду. Однако в противоположность методу Ритца величина  $I$  в уравнении (2), используя значение  $\chi$  из (6), для данного случая будет всегда меньше истинного минимального значения  $I$  при правильном решении, если только последнее не было выражено как конечная сумма  $\Phi_m$ . Огличный метод вывода решения уравнения Лапласа, соответствующий вполне определенной физической проблеме течения, заключается в графическом интегрировании уравнения. При этом способе решение последнего представляется геометрической сетью эквипотенциальных линий и линий тока, соответствующих физической задаче. Эта сеть получается в результате следования определенным правилам и при повторении дает последовательно более близкое приближение к форме сети, определяемой точным решением. Отдельные детали этого метода могут быть самого разнообразного порядка. Они могут базироваться на принципе соответственного преобразования первоначально произвольной сети, которая показывала бы режим на контурах, соответствующий заранее принятым граничным условиям, или же на принципе дальнейшего развития элементов сети, первоначально выбранных так, чтобы удовлетворить полностью или частично граничным условиям внутри интересующей области, согласно правилам, соответствующим дифференциальному уравнению, которое необходимо решить. Главной особенностью совершенно иной схемы является графическое построение функций Грина для рассматриваемой области и последующий подсчет конечного значения потенциала графическим или численным интегрированием согласно уравнению (1), гл. IV, п. 6. Подробное описание этих методов с полной библиографией можно найти в работе „Numerische und graphische Integration“, C. Runge und Fr. A. Willets „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften“, II, 3, 1, ст. 164—171.

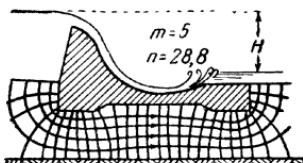
Примеры распределения потенциала для проблем течения, полученные этим путем, показаны на фиг. 74 и 75.

Указанные виды графического интегрирования уравнения Лапласа непосредственно дадут только сети эквипотенциальных линий и линий

тока. Фактический же расход в системе может быть установлен следующим путем: предполагая, что общее падение потенциала в системе  $\Delta\Phi$  от поверхности поступления потока до поверхности стока было раздelenо на  $n$  равных частей ( $n-1$ ) эквипотенциальными линиями, лежащими между контурами, замечаем, что падение между каждой из них будет  $\Delta\Phi/n$ . Если разрыв между двумя из этих эквипотенциальных линий в данной точке будет  $S$ , то расход на единицу длины вдоль эквипотенциальной поверхности будет  $\Delta\Phi/ns$ . Допуская теперь, что линии тока были построены так, что они образуют квадратную сеть с эквипотенциальными линиями, получим величину расхода между двумя такими линиями тока  $\Delta\Phi/n$ . Отсюда в конечном итоге, если квадратная



Фиг. 74. Эквипотенциальные линии и линии тока под плотиной со свайной крепью, полученные графическим интегрированием (по Терцаги).



Фиг. 75. Эквипотенциальные линии и линии тока под плотиной с основанием, имеющим неправильную геометрическую форму, полученные графическим интегрированием:

$m$  — число единиц расхода;  $n$  — число эквивалентных единиц потенциала;  $H$  — общий напор жидкости (по Терцаги).

сеть содержит  $(m-1)$  линий тока между ограничивающими линии тока контурами, получим величину общего расхода в системе из следующего выражения:

$$Q = \frac{m}{n} \Delta\Phi. \quad (9)$$

Для того чтобы найти фактический расход в системе, необходимо подсчитать число квадратов на отрезке, ограниченном двумя линиями тока, а также на отрезке, ограниченном двумя эквипотенциальными линиями, взять их отношение, а затем приложить уравнение (9). Результат такого подсчета приведен на фиг. 75, причем было найдено, что  $m$  и  $n$  имеют значения 5 и 28,8.

Другой способ решения уравнения Лапласа заключается в численном интегрировании. В этом случае было также предложено значительное количество схем. Однако все они дают искомое решение в форме численных значений потенциала или функции давления на заранее принятой сетке точек, покрывающих интересующую нас область.

Единственный численный способ, который необходимо рассмотреть здесь для применения в практических целях, заключается в том, что дифференциальное уравнение в частных производных сначала заменяется

соответствующим разностным уравнением, и математическая обработка прилагается к последнему уравнению<sup>1</sup>.

Уравнение в частных разностях строится с помощью применения (для двух переменных) соответствий:

$$\left. \begin{aligned} \delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} &\rightarrow \Phi(x + \delta, y) - \Phi(x, y) \\ \delta \frac{\partial \Phi}{\partial y} &\rightarrow \Phi(x, y + \delta) - \Phi(x, y) \\ \delta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &\rightarrow \Phi(x + \delta, y) - 2\Phi(x, y) + \Phi(x - \delta, y) \\ \delta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &\rightarrow \Phi(x, y + \delta) - 2\Phi(x, y) + \Phi(x, y - \delta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

для квадратной ячейки со стороной  $\delta$ . Принимая  $\delta$  в качестве единицы длины, получим разностное выражение, соответствующее уравнению Лапласа, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x+1, y) + \Phi(x, y+1) + \Phi(x-1, y) + \\ + \Phi(x, y-1) - 4\Phi(x, y) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $x$  и  $y$  являются независимыми координатами точек решетчатой ячейки.

Чтобы решить это уравнение прямым путем, необходимо выписать его последовательно для каждой точки  $(x, y)$  в пределах контура, определяющего интересующую нас область. В уравнении, где  $(x, y)$  непосредственно примыкают к контуру и содержат по крайней мере одно граничное значение  $\Phi$ , подставляется заранее принятое граничное значение. Таким образом, будет получен ряд линейных неоднородных уравнений, выраженный через неизвестные значения  $\Phi$  во внутренних точках решетки, численно равный количеству этих точек. В результате решения этих уравнений обычным алгебраическим путем получается решение уравнения (11).

Повидимому, для практических целей такое непосредственное решение будет утомительным и трудоемким. Поэтому были разработаны приближенные методы получения желаемых результатов, даже не прибегая к обработке уравнения (11) как точною алгебраического выражения. Наиболее удобным путем нахождения таких решений является методика усреднения, предложенная Либманом<sup>2</sup>.

В этом случае уравнение (11) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = \frac{1}{4} [\Phi(x+1, y) + \Phi(x, y+1) + \\ + \Phi(x-1, y) + \Phi(x, y-1)], \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>1</sup> Следует упомянуть также о возможности решать численным путем задачи о потенциале математической обработкой интегрального уравнения, эквивалентного дифференциальному уравнению в частных производных Лапласа (Келлог, стр. 286) и вариационного приближенного метода Ритца (см. также гл. IV, Bull. 92 of the National Research Council on „Numerical Integration of Differential Equations“, 1933).

<sup>2</sup> Liebmann H., Münch. Sitzgs. Ber., p. 385, 1918.

из которого видно, что значение  $\Phi$  в любой точке является средней арифметической величиной четырех непосредственно примыкающих соседних точек. Теперь можно показать, что беря для величины  $\Phi$  заранее принятые значения на контурах, а внутри последних любое произвольное распределение значений его, и повторно прилагая уравнение (12), чтобы получить улучшенные значения потенциала на внутренних точках, можно получить такое распределение потенциала, что дальнейшее приложение уравнения (12) уже больше не изменит его. Это предельное распределение будет, очевидно, представлять решение разностного уравнения (11) с заранее принятыми граничными условиями.

Вольфом<sup>1</sup> была опубликована подробная техника выполнения этих последовательных приближений, производимая систематическим путем на основе многократного приложения уравнения (12), а также доказательство сходимости этого метода. Оставляя в стороне неизбежную при этом приближенность, вследствие практической необходимости нарушения процедуры усреднения после конечного числа операций, а отсюда раньше, чем будет достигнуто фактически предельное решение разностного уравнения<sup>2</sup>, следует заметить, что, приближенность в только что рассмотренном численном способе присуща последнему благодаря замене дифференциального уравнения в частных производных уравнением в частных разностях.

Вполне ясно, что ошибки, вводимые таким путем, будут уменьшаться с уменьшением размера ячейки или увеличением числа внутренних точек, для которых подсчитывается величина потенциала. Размер принятой ячейки при действительном вычислении будет, очевидно, определяться точностью, которую желательно получить при конечных результатах.

Последним неаналитическим методом получения решений специальных проблем течения, имеющим большое практическое значение, является применение экспериментальных моделей течения<sup>3</sup>. Особый интерес представляют эксперименты с электрическими моделями, основанные на тождестве движения электрических токов в электропроводящей системе и ламинарного течения однородной жидкости в пористой среде, как это уже было охарактеризовано в гл. III, п. 6. Эквипотенциальные линии и линии движения тока в электрической системе соответствуют эквипотенциальным линиям и линиям тока течения для пористой среды, а величина единицы удельного сопротивления электрической модели соответствует обратной величине расхода для единицы вязкости жидкости, единицы проницаемости среды и единицы полной разности потенциала. Возможно также, что наиболее гибким типом модели является электрическая модель, в которой пористая среда замещена электролитом, а распределение потенциала представлено зондами.

<sup>1</sup> Wolf F., Zeits. Angew. Math. und Mech., 6, 118, 1926.

<sup>2</sup> Можно заметить также, что несколько отличный вид развития процесса усреднения приводит к процедуре, которая принципиально обеспечивает метод получения точного решения разностного уравнения конечным числом операций, L. F. Richardson, Trans. Roy. Soc., London, A-210, 307, 1910.

<sup>3</sup> Эксперименты с песчаными моделями, применяемые многими исследователями, не рассматриваются здесь, так как они представляют собой воспроизведение в малом масштабе фактических типов течений.

При этом следует применять перемечный ток, чтобы избежать эффекта поляризации на электродах, представляющих собой границы питания и стока системы. С помощью электролитической модели могут изучаться обе системы — плоского и пространственного течения. В частности, плоское течение изучается этим путем гораздо свободнее благодаря представляющейся возможности зондирования внутреннего состояния системы, даже если она не обладает заметными характерными чертами симметрии. Распределение потенциала и линий тока в пространственном течении, содержащем непроницаемую перемычку, может быть свободно установлено на электролитической модели, если заменить перемычку геометрически сходным телом — непроводником. Электролитическая модель, которая дает графическое представление о действительном движении частиц жидкости для плоских систем, состоит из электролита, в котором движение ионов становится видимым благодаря наличию индикатора, меняющего цвет последнего, по мере того как ионы движутся от приемных электродов. Этот метод применялся с успехом к задаче о водяной репрессии и более подробно рассматривается в гл. IX, п. 17.

Обычная проводящая модель, на которой можно изучать пространственные системы течения, обладающие такой симметрией, что наиболее важные свойства их воспроизводятся на плоскости, составленной из линий тока, например, на радиальной плоскости в системе, обладающей осевой симметрией, может быть построена из любого однородного вещества с высоким сопротивлением, например, из графита. Контуры течения для большей части поставленных задач могут быть проверены опытно с помощью металлических электролов — контуры постоянного потенциала — или с помощью изолированных поверхностных элементов, соответствующих границам, образуемым линиями тока. Примеры применения таких моделей приведены в гл. VIII, п. 12, в связи с анализом устранения водяных конусов в несовершенных нефтяных скважинах глинистыми линзами.

Когда представленная система двухмерная, можно с успехом применить плоские модели из токопроводящей пластины. Общие принципы их применения и интерпретации остаются те же, что и в остальных электрических моделях. Непроницаемые перемычки, например, линзы песчаника, проверяются опытным путем, вырезыванием из токопроводящей пластины фигуры, геометрически похожей на форму изучаемого барьера. Некоторые примеры распределения потенциала на этом типе модели приводятся в гл. IX, п. 21 для различных установок водной репрессии нефтяных пластов.

Особенно удобным свойством электрических моделей для плоских систем является то обстоятельство, что их можно применять для непосредственного получения эквипотенциальных линий и линий тока системы. Благодаря взаимной ортогональности этих кривых они могут быть взаимно заменены местами и все же отображать возможное течение (гл. IV, п. 16). Отсюда, нанося эквипотенциальные линии на модели, у которой пограничные линии тока соответствуют граничным поверхностям постоянного потенциала первоначальной системы, и поверхности постоянного потенциала соответствуют поверхностным элементам линий тока, можно получить непосредственно линии тока первоначального течения. Этим путем можно избежать достаточно неточной процедуры

нахождения линий тока вычерчиванием нормальных траекторий к эквипотенциальным линиям<sup>1</sup>.

Следует заметить, что при движении жидкостей в пористой среде не существует прямой электрической аналогии с гравитационным эффектом. Поэтому необходимо в задачах, куда входят вертикальные скорости, например, фильтрация под плотинами, соорудить модель скорее на базе аналогии между электрическим потенциалом и потенциалом скорости жидкости, чем на базе аналогии между электрическим потенциалом и давлением жидкости. С другой стороны, системы, куда входят свободные поверхности,—поверхности линий тока, на которых давление постоянно, нельзя рассматривать просто, так как свободные поверхности, которые автомагически развиваются в реальных системах гравитационного течения, не появятся в электрической модели, которая будет повсюду перерезаться линиями протекающего электрического тока.

В подобных случаях необходимо разрезать модель таким образом, чтобы она действительно была ограничена кривой той же самой формы, что и свободная поверхность в физическом течении. Однако это может быть сделано только опытным путем, так как форма свободной поверхности вообще сначала неизвестна и ее определение является фактически одной из искомых величин при решении задач гравитационного течения. Критерий для правильного определения формы свободной поверхности заключается в том, что потенциал вдоль ее должен изменяться линейно с изменением вертикального превышения свободной поверхности над горизонтальной плоскостью; физически это обозначает, что давление, как это требуется определением последней, постоянно на свободной поверхности. Опытная настройка формы элемента ограничивающей поверхности аналогичным путем описана в гл. VIII, п. 10 для случая пространственной модели, примененной для изучения задачи образования водяных конусов. В дополнение к опытной настройке контура в электрической модели так, чтобы он соответствовал свободной поверхности, необходимо также в проблемах гравитационного течения, например, при определении величины фильтрации под плотинами, принять во внимание граничные элементы неизвестной длины, составляющие „поверхности фильтрации“. Прикрепляя к модели полоски проводника по длине рассматриваемого сегмента и пропуская через эту полоску ток, чтобы создать вдоль нее линейное изменение потенциала, можно удовлетворить условию постоянства давления вдоль таких поверхностных сегментов. Длина этой полоски подбирается так, чтобы дать соединение со свободной поверхностью, которая должна заканчиваться у кровли поверхности фильтрации. Фактическое приложение этого типа модели к задаче фильтрации через плотины будет представлено в гл. VI, п. 6.

Последний пункт, о котором следует упомянуть в связи с экспериментами на моделях, связан с масштабами моделей и их цифровыми

<sup>1</sup> Можно обратить также внимание на очень интересное приложение электрических моделей, недавно разработанные K. N. E. Bradfield, S. G. Hooker and R. V. Southwell (Proc. Roy. Soc., 159A, 315, 1937). Эти авторы показывают, как можно прилагать электрические модели к преобразованию конформных и сопряженных функций в плоских системах потенциала. Это делает возможным решение задач с такой геометрией, где теорему Шварца-Кристоффеля или ее обобщение нельзя применять дальше с практическим результатом.

значениями. Хотя предварительно необходимо определить абсолютные размеры модели для удобства и для получения желаемой точности, однако раньше всего совершенно необходимо геометрическое подобие модели и первоначального течения потока, особенно если результаты, полученные на модели, будут приложены к физической проблеме течения. Только в этом случае распределение потенциала и линий тока на модели будет эквивалентно соответствующим параметрам действительного течения. Что же касается сопротивления модели или дебита жидкости, важно заметить при выборе единицы удельного сопротивления, что полное сопротивление системы обратно пропорционально одному какому-нибудь размеру ее. Все же остальные размеры входят в систему в зависимости от величины своего отношения к принятому размеру. Отсюда, чтобы получить эмпирические обобщения из экспериментов на моделях, необходимо изучить сопротивление, как функцию отношений различных размеров модели к фиксированному размеру или же попытаться выразить произведение величины сопротивления и выбранного размера в зависимости от отношений остальных размеров к выбранному.

**18. Заключение.** Встречающиеся в природе водоносные и нефтеносные песчаники обладают часто значительным постоянством мощности на большом протяжении. Проблема движения жидкости в таких песчаниках включает поэтому анализ плоских задач теории потенциала. Это физическое приближение представляет особенный интерес для тех случаев, когда скважины, пробуренные с целью дренирования залегающих горизонтально песчаников постоянной мощности, вскрыли последние полностью. Тогда можно вполне безопасно пренебречь вертикальной изменчивостью в распределении потенциала. В последующей главе будет показано, что если скважина вскрыла не полностью пласт песчаника, то задача принимает пространственный характер, который нельзя удовлетворить приближением, основанным на двухмерных упрощениях. В свете ограничения течения плоскостями, параллельными горизонту, в плоских задачах сила тяжести фактически исчезает из уравнений. Отсюда при изучении горизонтальных плоских систем можно принять давление жидкости  $p$ , помноженное на отношение проницаемости к вязкости жидкости  $k/\mu$ , как эквивалент потенциала скорости.

На этом основании был произведен подробный анализ нескольких физических задач течения, подчиняющихся уравнению:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad [\text{см. уравнение (1), гл. IV, п. 1}],$$

где  $x$  и  $y$  являются декартовыми координатами для горизонтальной плоскости. Каждая задача выбиралась так, чтобы показать условия течения, имеющего практический интерес, и в то же самое время привести один из общих методов анализа, который применяется в теории плоского потенциала. В большинстве этих задач рассматриваемая система состоит из скважины небольшого радиуса, которая дренирует песчаник или через которую происходит питание последнего жилостью. Различие между этими отдельными задачами заключается в условиях, которые налагаются на границы области, окружающей скважину, форму контура

этой области и изотропность песчаника по отношению к его проницаемости. Анализ этих отдельных задач приводит к следующим общим выводам.

Каждая скважина в пласте песчаника, в котором перемещается в единицу времени и через единицу его мощности количество жидкости  $Q$ , вносит в распределение давления в системе<sup>1</sup> член, определяемый выражением:

$$p = \frac{Q\mu}{2\pi k} \ln r \quad [\text{см. уравнение (11), гл. IV, п. 2},$$

где  $k$  — проницаемость песчаника;  $\mu$  — вязкость жидкости;  $r$  — радиус, замеренный от центра скважины. Окончательное распределение давления в системе слагается из величин указанного типа, связанных с наличием индивидуальных скважин в системе, и других членов, находящихся в точной зависимости от границ области питания и принятых граничных условий. На основании приложения теории рядов Фурье (см. гл. IV, п. 3) было установлено, что течение в скважину радиусом  $r_w$  в центре кругового контура радиусом  $r_e$  может быть подсчитано из уравнения:

$$Q = \frac{2\pi k (\bar{p}_e - \bar{p}_w)}{\mu \ln r_e/r_w} \quad [\text{см. уравнение (12), гл. IV, п. 5}],$$

где  $\bar{p}_e$ ,  $\bar{p}_w$  являются соответственно средними значениями давлений, которые поддерживаются на внешнем круговом контуре и на забое скважины.

Идя обратным путем, можно установить среднее значение давления  $\bar{p}_e$  на окружности радиусом  $r_e$ , замыкающей скважину, если известно давление  $p_w$  на данной скважине, имеющей текущий дебит  $Q$ , из соотношения:

$$\bar{p}_e = \frac{Q\mu \ln r_e/r_w}{2\pi k} + \bar{p}_w \quad [\text{см. уравнение (13), гл. IV, п. 5}].$$

Если известно давление в некоторой точке  $(x, y)$ , то среднее давление по кругу, у которого данная точка является центром и который не содержит в себе скважин или иных источников и стоков жидкости, должно равняться этому давлению в центре [см. уравнение (11), гл. IV, п. 16].

С другой стороны, если внешний контур области не представляет окружности или не концентричен боковой поверхности скважины, то расходы жидкостей в скважину или из нее определяются приложением функции Грина или методом конформных отображений. На основании общих соображений расход может быть выражен уравнением:

$$Q = \frac{2\pi k \Delta p}{\mu \ln c/r_w} \quad [\text{см. уравнение (6), гл. IV, п. 16}],$$

где  $\Delta p$  — перепад давления, существующий между скважиной радиусом  $r_w$  и внешним контуром, а  $c$  — константа, зависящая от формы внешнего

---

<sup>1</sup> Значение  $Q$  во всех этих уравнениях относится к расходу через единицу мощности песчаника.

контура, к значению которой можно приблизиться выбором соответствующего среднего расстояния скважины до контура. Так, если внешний контур представлен окружностью, но скважина расположена вне центра его даже на такую значительную величину, как половина радиуса кругового контура, то ошибка в величине расхода, которая получится, если принять с равным этому радиусу, будет менее 5% (см. гл. IV, п. 16 и фиг. 34). Вследствие логарифмической зависимости дебита  $Q$  от длины, характеризующих размеры системы, даже приблизительный подсчет последних приводит в результате к весьма точным значениям для проектирования дебита  $Q$ .

Если система содержит более одного источника или стока и если ряды источников и стоков имеют каждый постоянное давление, то приложение теоремы Грина или общих соображений, которые обеспечивают применение теории функций Грина, показывает, что суммарный расход в системе прямо пропорционален перепаду давления между рядом источников и рядом стоков и проницаемости среды, в которой они расположены [см. уравнение (5), гл. IV, п. 16].

Если эффективный внешний контур, обеспечивающий питание скважины жидкостью, не является даже приблизительно круговым, то практической задачей является такой случай, когда внешний контур представлен бесконечным линейным источником питания. Аналитическая идеализация бесконечного линейного источника питания и единичной скважины соответствует наиболее простой задаче перемещения краевой воды, когда вода движется поступательно, образуя фронтальное продвижение и вытесняя нефть в скважину, расположенную вблизи водонефтяного раздела. Мы встречаемся с подобным явлением, рассматривая движение воды в артезианскую скважину, вскрывшую пласт песчаника, выходы которого открыты в канале или ложе реки и параллельны их берегам (см. фиг. 38). Решение этой задачи методом конформных отображений показывает, что текущий дебит скважины является таким же, какой можно получить из скважины, окруженной концентрическим круговым контуром питания при симметричном радиальном течении и при радиусе контура, равном двойному расстоянию скважины от линейного источника питания [уравнение (8), гл. IV, п. 7].

Если ложе реки или канала пересекает выход песчаника (см. фиг. 39), то источник питания жидкостью нельзя рассматривать больше как бесконечную линию, а вместо этого ее следует принимать как конечную линию питания. Такую систему можно подвергнуть рассмотрению методом сопряженных функций (гл. IV, п. 8), что приводит к системе конфокальных эллипсов для эквипотенциальных линий и софокусных гипербол для линий тока (см. фиг. 40). Разумеется, течение в скважину, вскрывшую пласт песчаника, получающего питание водой из такого конечного линейного источника, будет меньше по сравнению с тем случаем, когда источник питания будет иметь бесконечную длину. Это различие между ними становится незначительным, если скважина расположена очень близко к конечному линейному источнику питания. При решении этой задачи методом преобразования сопряженной функции установлено, что на любом заданном расстоянии от источника питания текущий дебит будет наибольшим, если скважина расположена на перпендикуляре, рассекающем пополам линейный источник, и будет уменьшаться по мере

того, как скважина перемещается по направлению к концам линейного источника и еще дальше.

Следующим типом плоской задачи является случай, когда течение осуществляется скорее в вертикальной, чем в горизонтальной плоскости. Такие явления возникают, когда течение обладает постоянной динамической характеристикой, простирающейся на значительные расстояния в горизонтальном направлении, например, при фильтрации под плотинами, длина которых велика по сравнению с их толщиной. Так как сила тяжести эквивалентна постоянному вертикальному градиенту давления, то для таких задач соответственной динамической переменной является потенциал скорости<sup>1</sup>  $\Phi = \frac{k}{\mu} (p - \gamma gy)$  в противоположность давлению  $p$  для горизонтальных плоских систем. Кроме того, линии тока в системе, когда течение вертикально, будут скорее ортогональны по отношению к кривым постоянного потенциала скорости, чем к кривым равного напора.

Однако с аналитической стороны эти задачи все же требуют решения плоского уравнения Лапласа [3, гл. IV, п. 1]. Особенно интересные примеры этого типа плоских задач относятся к фильтрации под плотинами, длина которых велика по сравнению с шириной их оснований. Эти задачи включают в себя вопросы противодавления и опрокидывающих моментов у основания плотины, а также численного значения фильтрации. В большинстве практических случаев для решения первого вопроса достаточно принять мощность проникаемого слоя, залегающего в основании плотины, бесконечной и этим путем упростить анализ.

Если в основании плотины отсутствует забивная шпунтовая крепь, аналитическая задача становится эквивалентной случаю горизонтального течения из конечного линейного источника питания в пласт песчаника бесконечных размеров, при замене местами эквипотенциальных линий и линий тока в последней системе, и последующим поворотом горизонтальной плоскости в вертикальную. Давление в основании плотины распределяется по арксинусу (см. фиг. 44), показывая, таким образом, большие градиенты со стороны пяты и носка основания плотины в противоположность обычно принимаемому линейному распределению давления. Однако суммарная опрокидывающая сила является той же самой, что при допущении линейного распределения давления, а именно равна среднему алгебраическому значению давления в пяте и носке основания плотины, помноженному на ширину последней.

С другой стороны, суммарный опрокидывающий момент всегда превышает величину, подсчитанную исходя из линейного закона распределения давления, и достигает завышения на 11% для давлений, имеющих нулевое значение в носке основания плотины. В том случае, если под основанием плотины имеется один ряд забивной шпунтовой крепи, задача может быть решена аналитическим путем, переведя геометрию системы в вид, тождественный плотине без забивной крепи. Это преобразование производится на основе теоремы Шварца Кристоффеля, которая дает формулу для отображения внешности любого многоуголь-

<sup>1</sup> Здесь принимается, что  $y$  представляет вертикальную ось, направленную вниз.

ника на комплексную полуплоскость и где контур полигона преобразуется в действительную ось комплексной плоскости (гл. IV, п. 11). Анализ показывает, что и в этом случае также существуют градиенты высоких давлений у пяты и носка основания плотины.

Следующим характерным вопросом, имеющим практический интерес, является падение давления через забивную крепь. Это падение давления уменьшается достаточно быстро, по мере того как увеличивается отношение ширины плотины к глубине забивки свай, но оно может достичь значительной величины при небольшом значении этого отношения. Когда глубина свай так же велика, как ширина плотины, и сваяная крепь находится у пяты или носка ее основания, падение давления через сваянную забивную крепь может достигать 72,8% от величины всего падения давления, имеющего место на протяжении всего основания плотины от пяты до ее носка (см. фиг. 50).

Когда забивная крепь находится в центре основания плотины, то соответственное падение давления между напором верхнего и нижнего бьефов вдоль основания плотины составит 70,5% всего перепада давления через плотину. Для больших отношений ширины плотины к глубине свай величина этого снижения достаточно высока, но все же это незначительное уменьшение процента является противоположностью тому выводу, что дает теория Бляя. В последней теории сваяная крепь успешно заменяется дополнительной эквивалентной шириной основания, равной периметру свай, и падение давления вдоль всей растянутой „пользущей линии“ принимается линейным. Падение давления, обязанное наличию свай в упомянутой теории, пропорционально только глубине забивки свай, но не зависит от их местоположения. Непосредственным выводом из высоких перепадов давления через сваянную крепь является то обстоятельство, что градиенты на всей остальной части основания плотины будут по необходимости малыми, уменьшая, таким образом, опасность разрушения основания плотины разрывом песка вследствие высоких скоростей движения жидкости.

Что же касается суммарной величины сил противодавления для плотин со шпунтовыми сваями, теория указывает, что, за исключением тех случаев, когда сваи установлены непосредственно под центром плотины, забивная крепь может внести существенные изменения в величину этих сил. Так, для свай, глубина которых равна ширине плотины, сила противодавления уменьшается на 59% в том случае, если сваи находятся в пяте основания плотины, и увеличивается на ту же величину, если сваи установлены в носке плотины. Разумеется, этот эффект падает по мере того, как увеличивается отношение ширины плотины к глубине забивной крепи. В этом случае теория Бляя дает опять только приблизительные результаты. Значения суммарной силы противодавления, рассчитанные по этой теории, получаются ниже на 20% для сваяной крепи у верхнего бьефа и выше на 6% у нижнего бьефа.

Однако влияние установки шпунтовых свай на величину суммарного опрокидывающего момента (относительно пяты плотины) не является симметричным относительно центра расположения крепи. Последняя уменьшает величину опрокидывающего момента, будучи установлена на расстоянии 62% ширины плотины от ее пяты, и увеличивает величину момента, будучи установлена на расстоянии 38% от ее ширины, считая

от носка плотины. Величина этих колебаний довольно значительна, особенно для небольших отношений ширины плотины к глубине свай. Если это отношение составляет единицу, то сваи, установленные в пяте основания, уменьшают величину суммарного опрокидывающего момента на 46% по сравнению с плотиной без свай. Если же сваи установлены в носке плотины, то опрокидывающий момент будет соответствовать 202,3% величины последнего для плотины без свай. В этом случае заключения теории „ползущей линии“ (Бляя) также отличаются от выводов правильной теории, ибо они дают слишком низкие значения опрокидывающего момента для свайной крепи, установленной на расстоянии 70% от пяты основания плотины, и слегка завышенные значения для местоположения свай в пределах 30% от носка плотины.

Теория „ползущей линии“ со стороны<sup>1</sup> количественных заключений является фактически неправильной. Вместе с тем линия ползучести жидкости, образованная основанием плотины и периметром свайной крепи, представляет собой ограничивающую линию тока жидкости. Действительно, если основание плотины всегда будет направлено вниз выпуклой стороной, эта ограничивающая линия является линией тока максимальной скорости. Однако для плотин со свайной крепью линиями тока максимальной скорости являются те, что следуют более короткими путями, пересекающими песчаник между низшими точками, достигаемыми сваями, и идущими непосредственно к носку плотины.

Аналитическая теория, развитая в настоящей главе, относилась своей количественной стороной только к плотинам с одним рядом свай. Влияние дополнительных шпунтовых рядов можно свободно вывести на основании более простых задач. Так, если представлены два ряда свай равной длины — один ряд в пяте основания плотины, а другой — в носке ее, или же они расположены симметрично по отношению к основанию плотины, то распределение давления под плотиной будет обладать симметрией относительно вертикальной плоскости, проходящей через центральную линию основания плотины (гл. IV, п. 16). В частности, эта центральная линия будет являться эквипотенциальной линией, величина которой будет равна среднеарифметическому потенциалу верхнего и нижнего бьефа. Разность потенциала между этой линией и двумя точками, симметрично расположенные относительно нее, будет одна и та же. Соответственно этому перепад давления у обеих свайных крепей будет одним и тем же. Кроме того, суммарная величина силы противодавления остается неизменной при наличии двух таких симметрично расположенных рядов свай. Абсолютная величина перепада давления через свайные крепи будет меньше по сравнению с тем случаем, когда под плотиной существует только один ряд свай. Разумеется, результирующий перепад будет больше, чем для

<sup>1</sup> Численное решение задачи о плотине с аналогичной забивкой крепи у пяты и носка плотины, основанное на уточненном методе Форхгеймера и заключающееся в дополнительном введении рядов Фурье к потенциалам, предложенным Форхгеймером, было дано в работе R. Hoffmann, Die Wasserwirtschaft, 1, 108, 1934.

В этой работе можно также найти описание экспериментов с песчаной моделью, которые удивительным образом подкрепляют распределение линий тока и потенциала, подсчитанное теоретическим путем.

одинарной забивной крепи той же самой длины. Если сваи у пяты и носка плотины имеют значительную длину, то промежуточные забивки свай создают в общем значительно меньшие перепады давления благодаря сравнительно небольшим градиентам вдоль основания плотины.

Однако во всех случаях, будет ли уменьшаться или увеличиваться значение опрокидывающей силы, ряды свай будут уменьшать величину градиентов давления и скоростей вблизи пяты и носка плотины. Таким образом, будет снижаться опасность размывания песка и разрушения плотины.

При изучении вопроса фильтрации под плотинами следует принять во внимание конечную мощность залегающих под ними проницаемых слоев, так как фильтрация будет иметь бесконечное значение даже для плотин со шпунтовыми рядами свай, если залегающие под ними проницаемые слои имеют бесконечную мощность. В то время как общий аналитический метод преобразования сопряженной функции является вполне достаточным для данного случая, а также для систем с бесконечной мощностью проницаемых слоев, конечность последних приводит в случае, где функции имели до того элементарный характер (гл. IV, п. 12), к преобразованиям эллиптической функции.

Среди косвенных выводов из этого анализа следует упомянуть общее подтверждение распределения давления в основании плотины, установленное ранее на основании более элементарной теории. Так, для плотины без шпунтовых свай конечная мощность проницаемого слоя не будет иметь значительного влияния на распределение давления, хотя бы мощность слоя была в несколько раз меньше по величине, чем ширина плотины (см. фиг. 44). В случае плотины со шпунтовыми сваями конечная мощность проницаемого слоя не будет особенно заметно влиять на перепад давления через свайную крепь, хотя бы сваи проникли в толщу проницаемого слоя более чем на 50% (см. фиг. 68). Однако расход при фильтрации в значительной степени определяется мощностью проницаемого слоя или, выражаясь более точно, отношением ширины плотины к мощности последнего. Этот расход непрерывно уменьшается от бесконечно больших до совершенно исчезающих значений по мере того, как это отношение увеличивается от нуля до бесконечности (см. фиг. 61). Положение шпунтового ряда свай влияет на величину расхода при фильтрации сравнительно в малой степени (см. фиг. 66). Расход при фильтрации симметрично уменьшается от максимального своего значения для свайной крепи, установленной в центре основания плотины, до минимума. Это приблизительно ниже на 9% для свайной крепи, установленной в пяте или носке плотины.

Как и следует ожидать, расход при фильтрации падает с увеличением глубины забивки свай. Однако это изменение достаточно мало, если только мощность залегающего проницаемого слоя не больше или того же порядка, что и ширина плотины. Во всех случаях расчеты приводят к довольно неожиданному выводу, что расход будет продолжать оставаться в пределах относительно высоких значений, пока глубина свай не возрастет до такого размера, что они будут находиться в непосредственной близости к подошве проницаемого слоя (см. фиг. 67). Так, когда ширина плотины равняется мощности последнего, а забив-

ная свайная крепь, находящаяся в центре основания плотины, проникает на 99% глубины слоя, расход при фильтрации будет все же составлять 25,3% величины его для того случая, когда шпунтовые сваи совершенно отсутствуют.

Если ширина плотины равняется пятикратной мощности проникаемого слоя, то расход фильтрации при глубине забивки свай, составляющей 99% мощности слоя, будет составлять 60,6% величины расхода по сравнению с тем случаем, когда шпунтовые сваи совершенно отсутствуют. Отсюда видно, что если установка свай у пяты или носка плотины даже на сравнительно умеренную глубину влияет в значительной степени на величину опрокидывающих усилий в плотине, то их влияние на величину расхода при фильтрации невелико, при условии, что сваи практически не зажорены в подошве проникаемого слоя. Даже щель в 7,5 см между подошвой проникаемого слоя мощностью в 7,5 м и нижним концом свай обеспечивает фильтрацию, величина которой может достичь 60% того значения, которое имело бы фильтрационное течение под плотиной, если бы в плотине вообще отсутствовали сваи. Кроме того, столь большая фильтрация через ограниченные каналы, повидимому, повлечет за собой высокие скорости жидкости, что может привести к серьезным осложнениям с движением песка.

Для подсчета величины расхода при фильтрации под перемычками или иными временными перекрытиями воды, имеющими небольшую толщину, и меняющуюся глубину котлована со стороны нижнего бьефа перемычки (гл. IV, п. 14) можно применить тот же аналитический метод, который ведет к решению задачи о расходе при фильтрации под плотинами с расширенным основанием. Как и следует ожидать, расчеты показывают, что расход при фильтрации увеличивается по мере того, как глубина котлована со стороны нижнего бьефа достигает глубины заложения перемычки (см. фиг. 71). Однако общее увеличение расхода при изменении глубины котлована со стороны нижнего бьефа с начала его углубления до того, как он достигнет основания водяной перемычки, невелико. Расход достигнет, например, роста в 56% при глубине проникновения перемычки, равной 50% мощности проникаемого слоя. Уменьшение величины расхода с увеличением вскрытия проникаемого слоя плотиной или водозакрывающей шпунтовой крепью в данном случае более характерно по сравнению с расходом при соответствующем изменении глубины свай для случая плотины, имеющей расширенное основание. С другой стороны, величина расхода при фильтрации продолжает сохранять высокие значения до тех пор, пока плотина или водонепроницаемая перемычка не будут фактически зажорены в водонепроницаемой горной породе.

Значения расходов при фильтрации, которые даются непосредственно анализом,  $Q/\Delta\Phi$  исчислены на единицу падения потенциала между верхним и нижним бьефом плотины и на единицу длины последней. Если перевести их в величины практического значения, можно установить, что  $Q/\Delta\Phi = 0,1$  эквивалентно расходу при фильтрации  $-3,47 \text{ дц} \cdot \text{м}^3/\text{сек}$  под плотину длиною в 30 м и разностью напора между верхним и нижним бьефом — 1 ат. Когда будет замечено, что величина фильтрационного расхода с увеличением глубины установки свай или водо-

непроницаемой перемычки повлечет за собой значения  $Q/\Delta\Phi$ , равные или значительно превосходящие 0,1, для глубин коффердама или забивной крепи, равных 99% мощности проницаемого слоя, практическая необходимость в закорчивании свай или водонепроницаемой перемычки в скальную породу становится неизбежной. Эти рассуждения и выводы относятся к системам, где среда принимается однородной и изотропной. Однако рассмотренный аналитический метод можно использовать также и для случая, когда песчаник однороден, но анизотропен, т. е. проницаемость его различна в различных направлениях. С этим вопросом встречаются обычно, когда сравниваются вертикальные течения через плоскости напластования с течениями, параллельными плоскостям напластования. Такие задачи можно решить методами потенциальной теории при условии, что системы координат будут соответственно преобразованы [уравнение (3), гл. IV, п. 15] так, чтобы привести уравнение распределения давления к виду уравнения Лапласа.

Следующей характерной особенностью плоских задач движения жидкости в пористой среде, о которой стоит упомянуть, является взаимозаменяемость эквипотенциальных линий и линий тока [уравнение (4), гл. IV, п. 8], представленных кривыми, вдоль которых происходит перемещение частиц жидкости [уравнение (7), гл. IV, п. 8]. Это взаимоотношение вытекает из того обстоятельства, что эквипотенциальные линии и линии тока образуют взаимно ортогональную сетку [уравнение (5), гл. IV, п. 8], где функции тока также удовлетворяют уравнению Лапласа [уравнение (4), гл. IV, п. 8]. Отсюда каждое решение уравнения Лапласа в двух измерениях представляет собой решения для двух отличных физических задач, где роли функции потенциала и тока взаимозаменяются.

Последняя теорема потенциальной теории, представляющая собой интерес при рассмотрении известных типов задач течения, относится к тому случаю, когда течение обладает геометрической плоскостью симметрии и граничные условия являются также симметричными относительно этой плоскости. При этом они симметричны скорее с внешней стороны, чем по их численным значениям. Тогда распределение потенциала и линий тока внутри системы будет также симметричным относительно этой плоскости при условии, что счет эквипотенциальных линий будет вестись по абсолютному значению их разности, считая от потенциала плоскости симметрии. Приведенные выше различные аналитические решения обнимают собой наиболее важные с практической стороны задачи о плоском течении. Однако следует заметить, что даже небольшие изменения в геометрии различных течений могут не только сделать недействительными первоначальные аналитические решения, но даже привести к непреодолимым математическим трудностям при выводе новых правильных решений. В таком случае следует прибегнуть к приближенным аналитическим методам или даже к не аналитическим, т. е. к эмпирическим решениям.

Образцы приближенных аналитических методов для решения задач о потенциале были развиты в процессе вывода доказательств существования решений уравнения Лапласа для заранее установленных граничных условий. Однако эти методы неприложимы в случае специальных

проблем. Один из действительных методов, имеющий очень широкое применение, базируется на том положении, что задача о решении дифференциального уравнения Лапласа при данных граничных условиях аналитически тождественна нахождению потенциала скорости, удовлетворяющего этим граничным условиям и обеспечивающего минимум величины кинетической энергии жидкости в системе [уравнение (2), гл. IV, п. 17].

Последняя задача может быть приближенно решена подбором в качестве потенциальной функции линейного сочетания частных функций, которые удовлетворяют граничным условиям, но не удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. методом Ритца, или же удовлетворяют уравнению Лапласа, но не граничным условиям, т. е. методом Трефтица. Подобрав такие ряды частных функций, приводим фактический процесс аналитического решения, необходимого для получения приближенного результата, к решению систем совместных линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных коэффициентов в линейных сочетаниях частных функций. Коэффициенты в этих алгебраических уравнениях представлены интегралами, которые включают частные функции и заранее установленные граничные значения, которые допускаются точным решением на контурах.

Менее совершенной методикой решения задач течения, которое с трудом подвергается точному анализу, является построение графическим путем распределения потенциала и линии тока. Сетки такого распределения могут быть получены с последовательно возрастающей точностью, следуя определенным правилам их построения, вытекающим из решения дифференциальных уравнений. Когда такое графическое интегрирование уравнения Лапласа будет представлено в виде квадратной сетки эквидистантных линий и линий тока, то расход в системе на единицу падения величины потенциала будет представлен отношением числа квадратов, лежащих между двумя соседними эквидистантными линиями, простирающимися от одной граничной поверхности линии тока к другой, к числу квадратов, лежащих между двумя соседними линиями тока, простирающимися между контурами высокого и низкого потенциала [уравнение (9), гл. IV п. 17].

Для решения задач течения можно применить строго численные способы. Последние базируются на замене дифференциального уравнения Лапласа в частных производных соответственным разностным уравнением [уравнение (10), гл. IV п. 17]. Последнее [(11), гл. IV, п. 17] можно решить в принципе алгебраическим путем. Для получения решения этого уравнения строго повторяющимися численными операциями была разработана методика, которая дает последовательно возрастающие по точности значения для потенциала в вершинах квадратной решетки, покрывающей внутренность системы потока. Наконец, можно совершенно избежать всех аналитических операций и изучать специфические проблемы течения с помощью экспериментов на моделях. Обычно пользуются экспериментами на песчаных моделях, чтобы дать непосредственную картину условий течения в отдельных случаях, но в действительности эти модели представляют собой лишь репродукции фактических течений в уменьшенном масштабе. Вряд ли можно считать, что эти опыты представляют собой приложение основных зако-

нов течения при обобщении основных элементарных экспериментов, устанавливающих закон Дарси. Весьма действенный эмпирический метод, который не требует возврата к применению песчаных моделей, покоится на аналогии между течением тока в электропроводящей системе и течением жидкости в пористой среде (гл. III, п. 6). При этом методе можно применять электролитические модели или модели, состоящие из полупроводников или металлических листов.

Главное преимущество электролитических моделей заключается в том, что они позволяют определить непосредственно распределение потенциала внутри пространственных систем, не имеющих симметрии относительно оси. Когда пространственная система имеет симметрию относительно оси, например, в случае несовершенной скважины, внутреннее распределение потенциала может быть установлено нанесением его на осевые плоскости плотных секционных моделей, изготовленных из обладающего высоким сопротивлением материала, например графита (гл. VIII, п. 10). Поверхности постоянного потенциала во всех электрических моделях представлены металлическими электродами.

В случае плоских систем можно получить электрическим путем на моделях с электролитной поверхностью видоизмененные аналоги экспериментов на песчаных моделях, где линии тока являются следами нагнетания красок в различных точках песка. Это может быть обеспечено применением растворов индикатора так, чтобы изменять цвет электролита, по мере того как ионы, являющие собой поступающую жидкость, движутся от нагнетательных электродов. Такие модели особенно полезны, чтобы показать графически движение нагнетаемой воды в различных процессах метода заводнения (гл. IX, п. 17).

Особенно удобным типом экспериментальной модели для изучения плоского течения является модель плоской проводящей поверхности (гл. IX, п. 21). Водонепроницаемые перемычки, например, линзы очень плотного песчаника, шунтовая свайная крепь или иные виды водяных преград, легко могут быть представлены путем вырезания из проводящей поверхности фигур, геометрически подобных рассматриваемым перемычкам.

Взаимозаменяя в таких моделях эквипотенциальные поверхности и линии тока, имеем, что нахождение и определение потенциалов в новой системе дает непосредственно линии тока первоначальной системы.

Хотя и не существует прямой электрической аналогии с гравитационным явлением, но последнее принимается внешне в расчет построением модели таким образом, что электрический потенциал является скорее аналогом потенциала скорости, чем давления жидкости. Однако этого совершенно недостаточно для гравитационных течений (глава V), где жидкость не заполняет полностью пористую среду, но занимает только область, которая граничит в точках максимальной высоты по вертикали с поверхностью линии тока, вдоль которой давление имеет постоянную величину, так называемую „свободную поверхность“. Эта граничная поверхность заранее не известна, но может быть установлена опытным путем, вырезыванием модели таким образом, чтобы она соответствовала поверхности линии тока с постоянным давлением (гл. VI, п. 6). В дополнение к этому при изучении, например, фильтрации воды через плотины, необходимо обеспечить по-

каз „поверхности фильтрации“, которая является собой часть поверхности стока, вдоль которой давление имеет более постоянную величину, чем потенциал.

Так как постоянство давления влечет за собой линейное изменение потенциала, можно получить соответственные граничные условия на поверхности фильтрации, прикрепляя полоску проводника к поверхности модели, пропуская через него ток и создавая, таким образом, линейное изменение потенциала. Однако длина участка поверхности должна быть отрегулирована опытным путем так, чтобы соединить „свободную поверхность“ с ее верхним краем. Следует заметить, что, применяя любой тип экспериментальной модели, необходимо сохранить общее требование к ним, а именно, модель должна быть геометрически строго подобна физическому течению. Распределение потенциала и линий тока зависит только от формы модели, а не от ее абсолютных размеров, которые могут быть выбраны на основе удобства и точности. Суммарный расход через модель или при действительном течении будет пропорционален одному из абсолютных размеров; остальные же размеры будут входить в решение только в форме отношения. Фактически наиболее важные переменные, которые применяются при изучении систем одного и того же типа, но с постепенно изменяющейся геометрией, например, расход фильтрации под плотинами с изменяющейся глубиной забивной крепи, должен всегда выражаться отношением двух из имеющихся размеров: глубина свай, деленная на ширину плотины или на мощность проницаемого слоя (гл. IV, п. 13).

---

---

---

## Глава пятая

### ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ (ТРЕХРАЗМЕРНЫЕ) ЗАДАЧИ

**1. Введение.** Многие задачи о движении жидкостей в пористой среде, имеющие практическое значение, можно с достаточным приближением свести к одному из видов плоского течения, проанализированных в предыдущей главе. Однако остаются иные задачи, имеющие также весьма серьезное значение, которые отличаются вполне определенным пространственным характером. Так, если скважина, вскрывшая продуктивный песчаник, полностью не проходит сквозь него, то течение в той части песчаника, которая не вскрыта забоем скважины, будет иметь компонент скорости, направленный вверх и влекущий жидкость в скважину. В верхней же части пласта песчаника течение будет попрежнему в значительной степени радиальным и будет иметь сравнительно небольшой компонент скорости по вертикали. Поэтому распределение давления в пласте песчаника будет изменяться по вертикальной координате, т. е. задача будет иметь пространственный (трехмерный) характер. По отношению к общим методам решения пространственных задач следует заметить, что все те методы, которые были рассмотрены нами в приложении к плоским системам (глава IV), за исключением только одного из них, имеют свои аналоги в том случае, когда в систему включается третья координата. Только метод сопряженных функций не имеет своего аналога для случая трехмерного уравнения Лапласа. Все же для решения практических задач мы находим, что имеющиеся в нашем распоряжении методы вполне достаточны для получения искомых результатов.

В настоящей главе мы будем иметь дело чаще всего с функцией потенциала:

$$\Phi = \frac{k}{\mu} (p - \gamma g z), \quad [\text{уравнение (3), гл. III, п. 3}] \quad (1)$$

а не с давлением  $p$  при условии, что пористая среда является изотропной. Ввиду того, что добавление вертикальной координаты сообщает силе тяжести возможность влиять на распределение давления, основным дифференциальным уравнением будет уравнение Лапласа, отнесенное к  $\Phi$ , и

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Разрешим теперь уравнение (2) для некоторых специальных случаев, имеющих практический интерес<sup>1</sup>.

**2. Сферическое течение.** Вполне очевидно, что аналогом плоской задачи радиального потока (гл. IV, п. 2) является такой, где распределение потенциала и скорости зависит только от радиуса  $r$  в системе сферических координат. Так как общий вид уравнения Лапласа в сферических координатах  $(r, \theta, \chi)$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} = 0 \quad (1)$$

[см. уравнение (6) гл. III, п. 7]

в случае сферического течения приводится к выражению

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0, \quad (2)$$

то отсюда непосредственно следует, что

$$r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \text{const} = c_1, \quad (3)$$

или

$$\Phi = -\frac{c_1}{r} + c_2. \quad (4)$$

Это выражение дает функцию общего распределения потенциала  $\Phi$  при сферическом течении. Наиболее характерной особенностью его является изменение  $\Phi$  обратно пропорционально радиусу  $r$ . Очевидно, это обстоятельство создает более резкую изменчивость, чем логарифмическая зависимость от  $r$ , характеризующая плоское радиальное течение [уравнение (6), гл. IV, п. 2]. Чтобы установить физическое значение обеих констант  $c_1$  и  $c_2$ , следует только приложить уравнение (4) к специальному случаю, определяемому граничными условиями (фиг. 76):

$$\begin{cases} \Phi = \Phi_w: & r = r_w \\ \Phi = \Phi_e: & r = r_e \end{cases} \quad (5)$$

Эти условия приводят к выражениям:

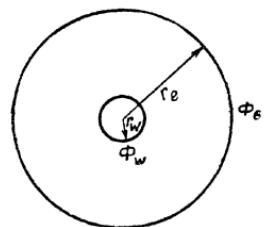
$$\Phi_w = -\frac{c_1}{r_w} + c_2; \quad \Phi_e = -\frac{c_1}{r_e} + c_2,$$

так, что

$$\Phi = \frac{\Phi_e - \Phi_w}{\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_w} \right) + \Phi_w. \quad (6)$$

Теперь ясно, что  $\Phi$  пропорционально разности потенциалов  $\Phi_e - \Phi_w$  между сферическими контурами при  $r_e, r_w$ .

<sup>1</sup> Остальные задачи пространственного течения, включающие песчаники с неоднородной проницаемостью, или двухжидкостные системы будут рассмотрены в гл. VII, пп. 9 и 10 и гл. VIII, п. 10.



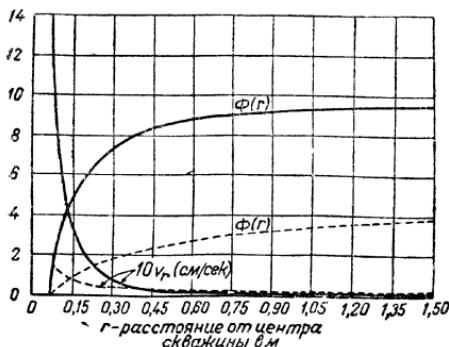
Фиг. 76..

Скорость в системе получается, как обычно, дифференцированием:

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\Phi_e - \Phi_w}{\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w}} \frac{1}{r^2}, \quad (7)$$

и суммарное течение через систему дается выражением:

$$Q = - \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\pi r^2 \sin \theta v_r d\theta = \frac{4\pi (\Phi_e - \Phi_w)}{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e}}. \quad (8)$$



Фиг. 77. Распределение скорости ( $v_r$ ) и потенциала ( $\Phi$ ) в сферической (сплошные кривые) и радиальной (пунктирные кривые) системах течения;  $\Phi(r)$  принимается равным нулю при  $r = 0,075$  м и 10 при  $r = 1,5$  м.

Отсюда  $\Phi$  и  $v_r$  могут быть переписаны в таком виде:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r} \right) + \Phi_w, \quad (9)$$

$$v_r = -\frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (10)^1$$

Из этих уравнений видно, что оба значения  $\Phi$  и  $v_r$  изменяются прямо пропорционально расходу  $Q$  так же, как это имеет место в случае плоского течения [уравнения (11), (12), гл. IV, п. 2]. Однако их изменение в зависимости от  $r$  в последнем случае гораздо резче. Это можно наблюдать более отчетливо на кривых для  $\Phi$  и  $v_r$  (фиг. 77) для случая, где

$$p_w = 0; p_e = 10 \text{ atm при } z = 0 \text{ и } \frac{k}{\mu} = 1,$$

так, что<sup>2</sup>

$$\Phi_w = 0; \Phi_e = 10; r_w = 7,62 \text{ см}; r = 15240 \text{ см};$$

<sup>1</sup> Как и в случае радиального течения, уравнение (10) может быть непосредственно получено из интегрируемой формы уравнения неразрывности, а именно:

$$Q = -4\pi r^2 v_r = \text{const.}$$

Интегрируя это выражение, где  $v_r$  заменено через  $-\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ , приходим непосредственно к уравнению (9).

<sup>2</sup> Следует заметить, что косвенное установление граничных условий для  $\Phi$  на основании заранее принятых значений давления, не является, повидимому, осложнением, неизбежно связанным с применением потенциальной функции  $\Phi$ . Скорее это возникает из почти универсального образа представления о давлении как о количестве принципиальной физической значимости даже в пространственных системах. В действительности, когда принимается во внимание сила тяжести, основное значение приобретает потенциальная функция, хотя оба они — давление и  $\Phi$  — удовлетворяют уравнению Лапласа. Если принять в вышеуказанной системе, что давление постоянно на контуре  $r = r_w, r_e$ , то его распределение примет вид (6), и отсюда система будет сферически симметрична. Однако распределение скорости не будет более при этом радиальным, и система в целом и в действительности не будет сферически симметричной.

отсюда

$$\Phi = 10,005 - \frac{76,24}{r},$$

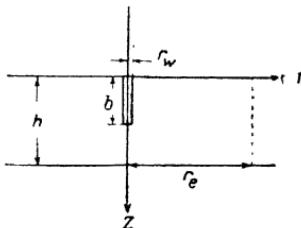
$$v_r = -\frac{76,24}{r^2} \text{ см/сек; } Q = 958 \text{ см}^3/\text{сек.}$$

Сравнение с пунктирными кривыми, которые относятся к случаю радиального течения при тех же самых граничных условиях, указывает что высокие градиенты потенциала в случае сферического течения локализуются с гораздо более высокой концентрацией вблизи контура малого радиуса по сравнению с заведомо высоко концентрированной областью больших градиентов при радиальном течении. Следующее по важности различие заключается в значении величины  $Q$ . Так, для практических случаев, когда  $r_w \ll r_e$ , уравнение (8) приводится к следующему виду:

$$Q \cong 4\pi(\Phi_e - \Phi_w)r_w, \quad (11)$$

где расход изменяется в зависимости от  $r_w$ , в то время как при радиальном течении  $Q$  изменяется гораздо медленнее по логарифмической зависимости [уравнение (10), гл. IV, п. 2]. Кроме того, уравнение (11) показывает, что расход при сферическом течении независим от радиуса внешнего контура, поскольку этот радиус велик по сравнению с  $r_w$ . Следует напомнить, что при радиальном течении  $Q$  изменяется логарифмически в зависимости и от радиуса внешнего контура и от радиуса самой скважины.

Практическое значение проблемы сферического течения заключается в том, что последнее соответствует скважине малого радиуса, только вскрывшей относительно мощный пласт песчаника. Это соответствие явится специальным предметом анализа ближайшего раздела (фиг. 78). Разумеется, само уравнение (11) показывает, что  $Q$  не зависит от радиуса внешнего контура и отсюда от фактической формы последнего при условии, что радиус внешнего контура велик по сравнению с радиусом скважины<sup>1</sup>. Иными словами, если участок поверхности, представляющий забой скважины, невелик по сравнению с поверхностью внешнего контура, ни одна часть которого не прилегает близко к поверхности скважины, можно заменить скважину небольшой сферической полостью. Течение в нее можно принять сферическим, вне зависимости от детальной формы самой скважины или внешней оконтуривающей поверхности.



Фиг. 78. Схематическое изображение скважины с частичным вскрытием пласта забоем (несовершенной).

<sup>1</sup> Допущение постоянства потенциала  $\Phi_e$  на внешнем контуре может быть также опущено, если в уравнениях (8) и (11)  $\Phi_e$  заменить усредненной величиной фактического потенциала на внешнем контуре. Этот вывод можно получить путем, совершенно аналогичным тому, что был выведен в гл. IV, п. 5 для плоского течения. Ряд Фурье, который был использован для последнего, заменяется в данном случае соответствующими функциями — сферическими гармониками — полярных и азимутальных углов  $\theta$  и  $\chi$  (см. Byerly, гл. VI).

Следует упомянуть, что на практике, когда скважина только вскрывает пласт песчаника, поверхность забоя скважины фактически представлена полусферой. Тогда расход будет составлять только половину от своего значения в уравнениях (8) и (11), а в (9) и (10) величина  $\frac{Q}{4\pi}$  должна быть заменена на  $\frac{Q}{2\pi}$ .

Наконец, представляет интерес сравнить эффективность скважины, работающей при сферическом течении, со скважиной, работающей при радиальном течении, при том же самом падении потенциала  $\Delta\Phi$ . Обозначая текущий дебит в первом случае через  $Q_s$ , а во втором случае через  $Q_r$ , видно, что полученные ранее выводы дают следующее соотношение:

$$\frac{Q_s}{Q_r} = \frac{r_w}{h} \ln \frac{r_e}{r_w}, \quad (12)$$

где  $h$  — мощность пласта песчаника при радиальном течении. Для численного примера, рассмотренного выше, следует, что:

$$\frac{Q_s}{Q_r} = \frac{0,57}{h},$$

где  $h$  — в м.

Таким образом, для пласта песчаника мощностью 15 м радиальное течение будет давать дебит в 25 раз больший по сравнению со сферическим течением, при условии, что фонтанирование происходит при одном и том же падении потенциала. В свете различных величин текущих дебитов при радиальном течении — для совершенных скважин и при сферическом течении — для несовершенных скважин становится ясным, что единственным условием, при котором вполне преднамеренно решают вести эксплоатацию скважин с помощью последнего вида течения, будет таков, когда нефтяная зона подстилается подошвенными водами. Тогда трудности, связанные с водяным конусообразованием, удерживают от слишком больших величин вскрытия пласта забоем скважины (гл. VIII, п. 10).

**3. Несовершенные скважины. Распределение потенциала.** Как это видно из рассмотрения, приведенного в предыдущем разделе, радиальное течение, соответствующее скважине, полностью вскрывшей пласт песчаника, и сферическое течение, отражающее случай, когда скважина вскрыла только верхнюю поверхность пласта песчаника, не могут быть использованы достаточно уверительно для изложения положения, когда величина вскрытия пласта забоем скважины является не полной или исчезающе малой. Ввиду того, что условие частичного вскрытия пласта встречается на практике очень часто, дадим в общих чертах анализ этой проблемы, опустив, однако, численные подробности решения<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Muskat M., Physics, 2, 329, 1932. Решение, которое приводится в цитируемой работе, дается в значениях аналогичной электрической проблемы, где электрод проникает частично в большой цилиндрический диск. Аналогия рассматриваемой задачи с цитируемой вытекает непосредственно из тождества граничных условий [уравнение (2) — ниже] этих двух систем (см. также A. F. Samsøe, Zeits. angew. Math. und Mechaniks, 11, 124, 1931).

Допустим, что скважина симметрично расположена по отношению к окружающему ее пласту песчаника, на контуре которого значение потенциала поддерживается постоянным. Тогда система будет радиально симметричной и естественными координатами системы будут цилиндрические координаты. Особо будет допущено, что скважина радиусом  $r_w$  вскрывает песчаник мощностью  $h$  до глубины  $b$ . С внешней стороны песчаник оконтурен окружностью  $r=r_e$ , концентричной скважине, а с кровли и подошвы отделен водонепроницаемыми пластами (фиг. 78).

Аналитически эта задача может быть сведена к нахождению решения  $\Phi$  в системе уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)^1$$

$$\left. \begin{array}{l} v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0; \quad z = 0, \quad h \\ \Phi = \text{const} = \Phi_w: \quad r = r_w, \quad z \leq b \\ \Phi = \text{const} = \Phi_e: \quad r = r_e \end{array} \right\} \quad (2)$$

Первое из уравнений (2) соответствует условию, при котором жидкость не будет проходить через верхнюю и нижнюю поверхность песчаника, так как он перекрыт непроницаемыми слоями. Второе граничное условие показывает, что на поверхности забоя скважины поддерживается постоянство потенциала, как будто скважина полна жидкости по крайней мере до кровли песчаника. Третье условие повторяет допущение, что внешний контур песчаника сохраняет постоянство потенциала.

Отправным пунктом при анализе может явиться одно из следующих направлений.

Можно получить формальное решение уравнения (1) непосредственно в виде ряда или интеграла бесселевых функций с коэффициентами, подобранными так, чтобы они удовлетворяли уравнению (2). Можно применить также менее изящный метод конформных отображений, который в данном случае явится более подходящим для численных операций.

Чтобы облегчить рассмотрение этой задачи, в данном случае будет принят метод конформных отображений. Другой же метод будет использован в более трудной задаче переслаивающихся горизонтов (гл. VII, п. 9).

Раньше, чем мы приступим к анализу, введем для удобства единицу длины, которая равняется двойной мощности песчаника  $h$ . Тогда переменные могут быть представлены следующими выражениями:

$$\varrho = \frac{r}{2h}; \quad w = \frac{z}{2h}; \quad x = \frac{b}{2h}; \quad \varrho_w = \frac{r_w}{2h}; \quad \varrho_e = \frac{r_e}{2h}. \quad (3)$$

Вполне очевидно, что уравнение (1) не изменяется от этого преобразования.

<sup>1</sup> Хотя уравнение (1) представляет собой только зависимость двух независимых переменных ( $r$ ,  $z$ ), его нельзя рассматривать как уравнение Лапласа в двух измерениях, если только его нельзя преобразовать в основной вид уравнения (1), гл. IV, п. 1. Для примера можно сравнить уравнение (1) с (1), гл. IV, п. 2, которое является двухмерным уравнением Лапласа.

Чтобы применить теперь метод конформных отображений, следует заметить сначала, что частным решением уравнения (1) является функция:

$$d\Phi = \frac{qda}{\sqrt{\varrho^2 + (w-a)^2}}, \quad (4)$$

которая с физической стороны представляет собой элементарный источник жидкости<sup>1</sup> с напряжением  $qda$ , расположенный вдоль оси  $w$  на расстоянии  $a$  от кровли песчаника. Возвращаясь к рассуждениям последней главы, где скважины в двухмерных задачах были заменены точечными источниками или стоками, расположенными в центре скважины, видно, что в случае пространственной задачи вполне естественно распространить замену скважины размещением непрерывных источников или стоков вдоль оси скважины от кровли песчаника до крайней точки забоя скважины.

В свете указанных представлений можно сделать попытку решить поставленную задачу интегрированием уравнения (4) относительно  $a$  в пределах от 0 до  $x$ , приняв  $q$ , имеющую функциональную зависимость от  $a$  так, что будут удовлетворяться граничные условия уравнения (2). Однако будет более удобным развивать решение этап за этапом, которые удовлетворят последовательным путем различные граничные условия.

Сначала мы найдем решение, которое удовлетворяет первому из граничных условий уравнения (2), т. е. отсутствию течения жидкости через стратиграфические поверхности песчаника. Чтобы получить это решение, наиболее удобнее всего воспользоваться методом конформных отображений.

Следуя процедуре, аналогичной той, что была приведена в гл. IV, п. 9, легко установить, что условие нулевого расхода через граничные плоскости ( $w=0, \frac{1}{2}$ ) может быть удовлетворено суперпозицией бесконечного ряда элементов течения, размещенных в точках  $(0, \pm n, \pm a)$ , где  $n$  изменяется от нуля до  $\infty$  (фиг. 79). Результирующий потенциал фронта этого течения является простой суммой потенциалов отдельных его элементов и отсюда равен величине:

$$d\Phi = qda \left\{ \frac{1}{[\varrho^2 + (w-a)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[\varrho^2 + (w+a)^2]^{1/2}} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\{\varrho^2 + (n+w-a)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\{\varrho^2 + (n+w+a)^2\}^{1/2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\{\varrho^2 + (n-w-a)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\{\varrho^2 + (n-w+a)^2\}^{1/2}} \right] \right\}. \quad (5)$$

<sup>1</sup> С физической точки зрения элемент скважины, дренирующей пласт, соответствует скорее стоку, чем источнику. Однако мы сохраним последнее понятие, потому что при этом избегается повторное применение отрицательных значений коэффициентов плотности расхода  $q$ .

С формальной стороны первый этап задачи решен. Однако уравнение (5) в представленном виде совершенно непригодно для численной обработки. Поэтому его следует преобразовать в такой вид, который можно было использовать для интересующей нас области. Чтобы подсчитать величину  $d\Phi$ , как это дается уравнением (5), для небольших значений  $\varrho$ , т. е. в области, близко расположенной к скважине, можно разложить каждый член в уравнении (5) в степенной ряд относительно  $\varrho$ . После небольших преобразований найдем, что

$$\begin{aligned} d\Phi = qda \left\{ \frac{1}{[\varrho^2 + (w-a)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[\varrho^2 + (w+a)^2]^{1/2}} - \right. \\ - \psi(1-w-a) - \psi(1-w+a) - \psi(1+w+a) - \psi(1+w-a) - \\ - \frac{1}{2}\varrho^2 [\zeta(3,1-w-a) + \zeta(3,1+w+a) + \zeta(3,1-w+a) + \\ + \zeta(3,1+w-a)] + \frac{3}{8}\varrho^4 [\zeta(5,1-w-a) + \zeta(5,1+w+a) + \\ \left. + \zeta(5,1-w+a) + \zeta(5,1+w-a)] \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где  $\psi$  — функция, определяемая членами функции  $\Gamma$  из выражения<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \psi(y) = \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} = -0,5772 - \frac{1}{y} + \\ + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{y+m} \right), \end{aligned}$$

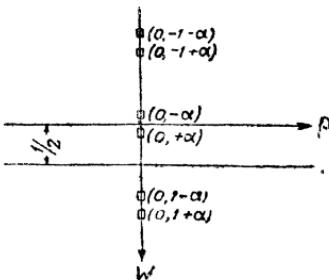
и

$$\zeta(s, y) = \sum_0^\infty \frac{1}{(n+y)^s}.$$

Для больших значений  $\varrho$ , т. е. порядка 1, уравнение (6) сходится очень медленно. Однако установлено, что прямое решение уравнения Лапласа для системы, состоящей из комплекса отображений  $(0, \pm n \pm a)$ , особенно пригодно для этой цели. Оно дается выражением:

$$d\Phi = 4qda \left[ 2 \sum_1^\infty K_0(2n\pi\varrho) \cos 2n\pi w \cos 2n\pi a + \ln \frac{2}{\varrho} \right], \quad (7)$$

где  $K_0$  — функция Ганкеля нулевого порядка<sup>2</sup>. Так как эта функция для больших значений аргумента уменьшается экспоненциально, то одного или двух членов ряда в уравнении (7) достаточно для всех случаев и даже для значения  $\varrho$ , достигающего 0,5<sup>3</sup>. Ряды уравнений (6) и (7)



Фиг. 79. Ряд конформных отображений для скважины с частичным вскрытием пласта.

<sup>1</sup> Whittaker and Watson, глава XII.

<sup>2</sup> Whittaker and Watson, стр. 373.

<sup>3</sup> Трудность суммирования этого ряда для малых значений  $\varrho$  заключается в том, что  $K_0$  становится логарифмической бесконечностью, по мере того как  $\varrho$  приближается к нулю.

являются потенциальными функциями, показывающими эффект единичного элемента расхода  $qda$  в точке  $(0, a)$  и его отображений. Чтобы получить значение потенциала в зависимости от всей скважины или глубины  $b$ , необходимо распределить эти элементы вдоль всей длины скважины, т. е. уравнения (6) и (7) следует проинтегрировать по  $a$  от  $a=0$  до  $a=x=b/2h$ .

Полагая, что напряжение источника постоянно вдоль всей скважины, можем выразить конечные результаты так:

для малых значений  $\varrho$

$$\Phi = q \left\{ -\ln \frac{\Gamma(1+w+x) \cdot \Gamma(1-w+x)}{\Gamma(1-w-x) \Gamma(1+w-x)} + \ln \frac{w+x + [\varrho^2 + (w+x)^2]^{1/2}}{w-x + [\varrho^2 + (w-x)^2]^{1/2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \varrho^2 [\zeta(2,1-w-x) - \zeta(2,1-w+x) + \zeta(2,1+w-x) - \zeta(2,1+w+x) + 0(\varrho^4)] \right\}; \quad (8)$$

для больших значений  $\varrho$

$$\Phi = 4q \left[ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_0(2n\pi\varrho) \cos 2n\pi w \sin 2n\pi x + x \ln \frac{2}{\varrho} \right]. \quad (9)$$

Эти выводы слишком далеки от целевой установки получить решения, определяющие отсутствие течения через стратиграфические поверхности песчаника. Чтобы установить, являются ли полученные решения конечным ответом задачи, представленной уравнениями (1) и (2), необходимо подвергнуть их проверке и определить, удовлетворяют ли они последним граничным условиям уравнения (2). Рассматривая сначала требование постоянства  $\Phi$  при  $r=r_w$ , из уравнения (9) видно, что если это условие и не удовлетворяется полностью<sup>1</sup>, то изменением  $\Phi$  в зависимости от  $w$  или  $z$  для  $\varrho \geq 1$  можно пренебречь со всей безопасностью для всех практических целей. Это обстоятельство связано с тем, что для  $\varrho \geq 1$ ,  $K_0(2\pi\varrho)$  гораздо меньше, чем  $x \ln \frac{2}{\varrho}$ . (за исключением специальных случаев  $\varrho \sim 2$ ), так что может быть опущен из решения весь тригонометрический ряд.

Остается посмотреть, удовлетворяют ли уравнения (8) и (9) конечному граничному условию, что  $\Phi$  постоянно по всей поверхности забоя скважины, т. е. для  $\varrho = \varrho_w$ ,  $w \leq x$ . Расчеты, основанные на решении уравнения (8), приводят к результатам, которые даются пунктирными кривыми на фиг. 80. Очевидно, это условие не удовлетворяется и необходимо видоизменить полученное решение. Действительно, неболь-

<sup>1</sup> Строгое постоянство  $\Phi$  на внешнем радиусе  $\varrho = \varrho_e$  конгруя можно получить простым путем, заменяя в уравнениях (7) и (9) члены  $K_0(2\pi\varrho)$  через

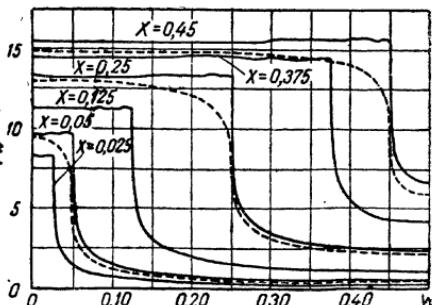
$$K_0(2\pi\varrho) - K_0(2\pi\varrho_e) I_0(2\pi\varrho)/I_0(2\pi\varrho_e),$$

где  $I_0$  — бесселева функция 3-го рода нулевого порядка, которая в противоположность  $K_0$  становится экспоненциально большой для больших значений аргументов и равняется единице для нулевого значения аргумента. Однако для практических целей добавленный член будет иметь маловажное численное значение.

шое рассуждение показывает, что, приняв постоянство плотности расхода  $q(a)$  при выводе уравнений (8) и (9), не следует ожидать, что принятное допущение даст точную картину рассматриваемой проблемы. Дело в том, что в дополнение к обычному распределению течения радиального характера, поступающего через каждую единицу длины вдоль всей поверхности забоя скважины, нижняя часть скважины получает большую часть своего дебита из песчаника, не вскрытого скважиной. Этот дополнительный расход будет не просто поступать в конечную точку забоя скважины, но будет распределяться вдоль нижней части последнего, разумеется, с большей концентрацией в направлении фактической ее оконечности. С этой точки зрения исправление недостатка в постоянстве распределения потенциала по поверхности забоя скважины, повидимому, заключается в том, чтобы отбросить допущение постоянства плотности расхода  $q(a)$  и выбрать такое распределение его, чтобы потенциал скважины был постоянным. Однако точный подбор величины  $qa$  влечет за собой аналитические трудности для скважин с конечным радиусом. Когда же радиус скважины становится исчезающе малым, можно показать, что в целом  $q(a)$  будет пропорционально потенциальну скважины в  $a$ , за исключением оконечности последней, где величина  $qa$  должна быть удвоена. Для скважины с конечным радиусом можно определить  $qa$ , разбивая его на отдельные прерывные элементы и выравнивая их напряжения, пока не будет установлено, что потенциал на поверхности забоя скважины стал постоянным в пределах желаемой высокой точности. Сплошные кривые на фиг. 80 показывают результаты такого выравнивания. Конечные потенциалы в этом случае имеют максимальные отклонения от среднего значения  $-2\%$ . Пунктирные кривые представляют невыравненные потенциалы, т. е. для распределения с постоянной плотностью потока. Требуемые плотности расхода для этого выравнивания резко возрастают (на 45%) по мере приближения к оконечности скважины, и избыток жидкости, поступающей в фактические забои скважин, может быть представлен точечными источниками, помещенными в центре забоев.

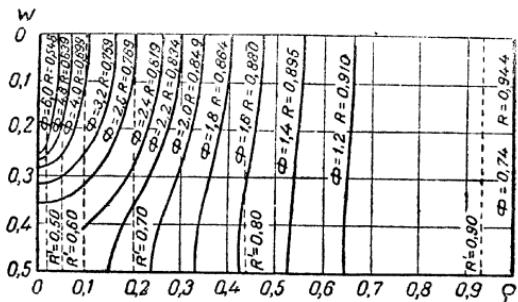
На фиг. 81 показано результативное распределение потенциала в песчанике для скважины, вскрывшей пласт на 50%, и радиусом, равным  $1/500$  мощности песчаника.

Характер концентрированного падения потенциала у скважины показан значениями  $R$ , которые выражают собой часть суммарного падения потенциала в пласте песчаника. Сравнивая эти величины с соот-



Фиг. 80. Распределение потенциала на поверхности забоя скважины ( $\varrho_w = 0,001$ ), как функция глубины  $w$ , после выравнивания распределения плотности расхода:  
х — (глубина вскрытия) / (2 × мощность песчаника); пунктирные кривые дают неотрегулированное распределение.

ветствующими параметрами для строго радиального течения, показанными на фиг. 81 пунктиром для эквипотенциальных линий и дробных значений  $R'$ , становится очевидной их более резкое сгущение для несовершенной скважины. Однако следует заметить, что эквипотенциальные

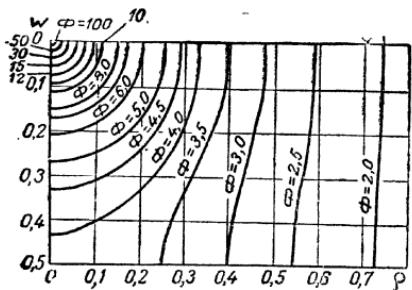


Фиг. 81. Распределение потенциала относительно скважины с радиусом  $0,075$  м и 50% вскрытием  $37,5$  м песчаника:

$R$  — доля общего падения потенциала в подземном резервуаре радиусом  $152,5$  м. Пунктирные кривые и  $R'$  соответствуют системе строго радиального течения и совершенной скважине. Единица замеренного расстояния —  $2 \times$  мощность песчаника.

линии для случая частичного вскрытия пласта быстро заменяются на радиальный тип, и их с трудом можно отличить от соответствующих параметров радиального течения на расстоянии от скважины, не превышающем двойной мощности песчаника<sup>1</sup>. Повидимому, с глубиной вскрытия последнего этот переход на радиальный характер станет еще более резким.

На фиг. 82 приводится соответствующая система эквипотенциальных линий для другого крайнего случая, когда скважина только вскрывает кровлю песчаника, т. е. когда в выше рассмотренных уравнениях  $x \sim \rho_w$ . Следует заметить, что в этом случае эквипотенциальные линии, как и следует ожидать, очень



Фиг. 82. Распределение потенциала у «несовершенной» скважины.

блики к сферической форме вблизи скважины. С отступлением на некоторое расстояние от скважины эквипотенциальные линии снова, как и раньше, выполаживаются и принимают радиальный характер. Конечно, это происходит не так резко, как в том случае, когда скважины фактически вскрывают песчаник на значительную часть его мощности.

<sup>1</sup> Это обстоятельство служит подтверждением вышеупомянутого замечания, что решение, которое дается уравнением (9), автоматически удовлетворяет последнему условию уравнения (2). Вместе с тем нами не было сделано вполне определенной попытки выразить это положение точным образом.

**4. Текущие дебиты несовершенных скважин.** В последнем разделе был рассмотрен характер распределения потенциала у скважин, вскрывших пласт песчаника неполностью. Эта характеристика, являющаяся качественной, важна для правильного представления о механизме течения в несовершенной скважине. Однако на практике обычно сталкиваются с вопросом количественного определения эксплоатационных дебитов, которые можно ожидать в таких системах. Для решения этой задачи применим методику анализа последнего раздела.

На первоначальном этапе рассмотрения текущих дебитов явится полезным обосновать более тщательно интерпретацию плотности расхода  $q$ , входящей в уравнения последнего раздела. Это устанавливается непосредственным подсчетом фактического расхода несовершенной скважины при постоянстве значения величины  $q$ . Так, используя уравнение (9), гл. V, п. 3, и беря определения для  $q$  и  $w$  из (3), гл. V, п. 3, получаем в результате:

$$Q = -4\pi h \int_0^{1/2} q \frac{\partial \Phi}{\partial q} dw = 8\pi h q x = 4\pi q b, \quad (1)$$

ибо члены ряда в уравнении (9), гл. V, п. 3, обращаются при интегрировании в нуль. Отсюда видно, что величина  $q$  равна  $1/4\pi$  реального потока в скважину на единицу длины обнаженной части ее продуктивного горизонта<sup>1</sup>.

Для того чтобы получить постоянство потенциала на поверхности забоя скважины, необходимо принять плотность расхода  $q$  за переменную и получить его приближенное значение суперпозицией отдельных элементов течения, имеющих напряжения  $q_m$ , развитых до глубин<sup>2</sup>  $x_m$ . Для этого случая  $Q$  будет, очевидно, определяться выражением:

$$Q = 8\pi h \sum q_m x_m, \quad (2)$$

так как величина потенциала дается суммированием членов, например, уравнения (9), гл. V, п. 3. Для расстояний от скважины порядка величины мощности пласта песчаника или более того можно, как уже было отмечено, с достаточно близкой степенью приближения опустить весь ряд в уравнении (9) гл. V, п. 3, и переписать его, приняв  $q$  за положительную величину, например:

$$\Phi = -4qx \ln \frac{2}{q}.$$

Для случая суперпозиции элементов течения потенциал для  $q \geq 1$  можно написать, на основании уравнения (2), так:

$$\Phi = -4 \sum q_m x_m \ln \frac{2}{q} = -\frac{Q}{2\pi h} \ln \frac{2}{q}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Было принято изменение знака  $q$  в уравнении (9), гл. V, п. 3, для того, чтобы сделать забой скважины поверхностью стока песчаника.

<sup>2</sup> Согласно этому представлению сначала помещают участок максимальной плотности расхода, распространяющийся до забоя скважины ( $x_m = x$ ), а затем последовательно накладывают более короткие элементы с противоположными плотностями тока, пока не будет получено распределение потенциала, характера, указанного на фиг. 80.

Обозначая совершенно точно потенциал на поверхности забоя скважины через  $\Phi_w$ , имеем между скважиной и величиной  $\varrho$  разницу в  $\Phi$ , которая составляет  $\sim 1$ , определяемую следующим выражением:

$$\Delta\Phi = \frac{Q}{2\pi h} \left( \frac{-\Phi_w}{4 \sum q_m x_m} - \ln \frac{2}{\varrho} \right) \quad (4)^1$$

Наконец, установив, что  $\Delta\Phi$  относится ко всей величине перепада суммарного потенциала между скважиной радиусом  $r_w$  и внешним контуром пласта песчаника радиусом  $r_e$ , возвращаясь к первоначальным единицам длины и обозначая мощность песчаника через  $h$  получаем величину текущего дебита в единицу времени из следующего выражения:

$$Q = \frac{-2\pi h \Delta\Phi}{\frac{\Phi_w(r_w)}{4 \sum q_m x_m} + \ln \frac{4h}{r_e}}. \quad (5)$$

Чтобы использовать эту формулу, необходимо в дополнение к заранее принятым физическим константам  $r_w$ ,  $r_e$  и  $h$  знать величины  $\Phi_w$  и  $\sum q_m x_m$ . Это требует, как уже было замечено в предыдущем разделе, эмпирического выравнивания элементов тока, а этот процесс является весьма трулоемким. Тем не менее эта операция была проделана для двух случаев, где  $\varrho_w = 1/600$  и  $\varrho_w = 1/1000$ , т. е. для песчаника мощностью 22,5 и 37,5 м и радиусе скважины 7,5 см. Положив в основу эти параметры, было установлено, что получающееся в результате этого приближенное решение даст значения с точностью до 0,5%. Таким образом, можно принять плотность тока на забое скважины постоянной и тогда взять потенциал  $\Phi_w$  как „среднеэффективную величину“, во что он и обращается на расстоянии  $3/4$  интервала от кровли песчаника до забоя скважины.

Чтобы получить приближенную формулу, можно заменить в уравнении (5) член  $\sum q_m x_m$  через  $q_x$  и  $\Phi_w$  значением  $\Phi$  из уравнения (8), гл. V, п. 3, при  $w = 3/4 x$ . Опуская члены порядка  $\varrho^2$ , находим, что

$$Q = \frac{2\pi k h \Delta p / \mu}{\frac{1}{2h} \left\{ 2 \ln \frac{4h}{r_w} - \ln \frac{\Gamma(0,875 \bar{h}) \Gamma(0,125 \bar{h})}{\Gamma(1 - 0,875 \bar{h}) \Gamma(1 - 0,125 \bar{h})} \right\} - \ln \frac{4h}{r_e}}, \quad (6)^2$$

<sup>1</sup> Можно сравнить это выражение с соответствующим выводом для строго радиального течения, который согласно уравнению (11), гл. IV., п. 2, тождественен выражению:

$$\Delta\Phi = \frac{Q}{2\pi r h} \left( \ln \frac{2}{\varrho_w} - \ln \frac{2}{\varrho} \right).$$

<sup>2</sup> Козени (Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 28,101) нашел, что результативные расходы, нанесенные на фиг. 83, могут быть получены из еще более простой формулы:

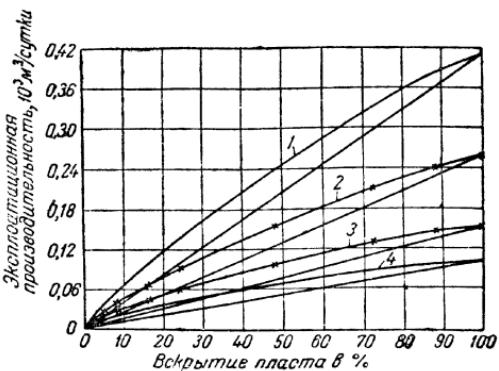
$$Q = \frac{2\pi k h \bar{h} \Delta p / \mu}{\ln r_e/r_w} \left( 1 + 7 \sqrt{\frac{r_w}{2h\bar{h}}} \cos \frac{\pi\bar{h}}{2} \right).$$

где  $\bar{h}$  — глубина вскрытия пласта скважиной, выраженная в долях мощности песчаника  $h$ ;  $k$  — проницаемость песчаника;  $\mu$  — вязкость жидкости. На фиг. 83 дается зависимость  $Q$  от процентной глубины вскрытия песчаника забоем скважины ( $100 \bar{h}$ ) для песчаников различной мощности;  $r_e/r_w$  принимается равным 2000, а  $k\Delta p/\mu$  принимается за единицу. Сплошные кривые для мощности песчаника при  $h = 22,5$  и  $37,5$  м были подсчитаны по методу, который включает в себя уравнение (5). Крестики на кривых соответствуют значениям, подсчитанным по уравнению (6). Отсюда является вполне очевидным, что уравнение (6) представляет собой приближение, которое вполне удовлетворяет всем практическим целям. Остальные кривые на фиг. 83 были подсчитаны по уравнению (6). Прямые линии на фиг. 83 показывают текущие дебиты, которые были бы получены, если бы течение в скважинах

Фиг. 83. Зависимость эксплуатационной производительности скважин с частичным вскрытием пласта от величины вскрытия последнего.

Прямые линии показывают эксплуатационную производительность, если поток строго радиален. Крестики дают значения, подсчитанные согласно уравнениям (6), гл. V, п. 4. Непрерывные кривые были подсчитаны из непосредственной аналитической процедуры для мощности песчаника 22,5 и 37,5 м. Общее падение потенциала принимается за единицу (разность давления — 1 atm, если  $k/\mu = 1$ ); радиус скважины — 0,075 м; радиус внешнего контура — 152,5 м.

1 — мощность песчаника 60 м; 2 — мощность песчаника 37,5 м; 3 — мощность песчаника 22,5 м; 4 — мощность песчаника 15,0 м.

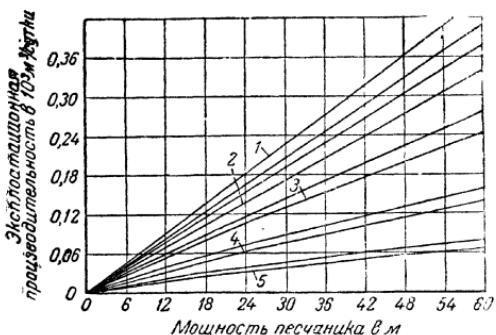


с частичным вскрытием пласта было строго радиальным. Отсюда видно, что по мере уменьшения величины вскрытия превышение фактического эксплуатационного дебита над соответствующей величиной для строго радиального течения непрерывно возрастает, пока при величине вскрытия около 20% это превышение может превзойти на 50% соответствующую величину для строго радиального течения.

Поэтому приближение к строго радиальному течению приводит к большим ошибкам. Эти выводы указывают также, что нельзя рассматривать реальную систему как эквивалентную простой суперпозиции собственно радиального течения в скважину и полусферического течения в ее нижнюю оконечность, ибо доля последнего в общем расходе составляет величину порядка 2 или 3% от расхода при радиальном течении.

На фиг. 84 эти выводы представлены в несколько отличном виде. Здесь текущие дебиты нанесены в зависимости от мощности песчаника для различных глубин вскрытия и для двух скважин с различными радиусами. Интересно заметить, что для песчаников, мощность которых превышает 15 м, изменение текущего дебита в зависимости от мощности песчаника имеет почти точную линейную зависимость даже для несо-

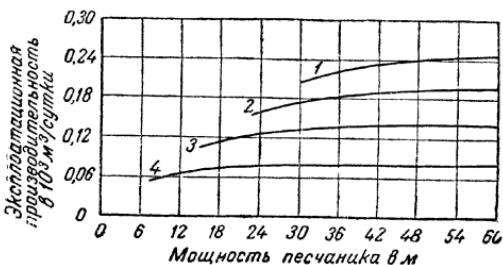
вершенных скважин. Это обстоятельство делает возможным экстраполяцию и интерполяцию полученных кривых со значительной степенью точности.



Фиг. 84. Зависимость эксплоатационной производительности скважин с частичным вскрытием пласта от мощности песчаника.

Общее падение потенциала принимается за единицу;  $r_w$  — радиус скважины; радиус внешнего контура — 152,5 м.

- |                             |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| 1 — вскрытие пласта (100 %) | $r_w = 0,15 \text{ м},$  |
| 2 — вскрытие пласта (75 %)  | $r_w = 0,075 \text{ м};$ |
| 3 — вскрытие пласта (50 %)  | $r_w = 0,15 \text{ м};$  |
| 4 — вскрытие пласта (25 %)  | $r_w = 0,075 \text{ м};$ |
| 5 — вскрытие пласта (10 %)  | $r_w = 0,15 \text{ м},$  |



Фиг. 85. Зависимость эксплоатационной производительности скважин с частичным вскрытием пласта и фиксированной величиной вскрытия, как функции от мощности песчаника. Общее падение потенциала принимается за единицу; радиус скважины — 0,075 м; радиус внешнего контура — 152,5 м.

- 1 — вскрытие пласта 30 м; 2 — вскрытие пласта 22,5 м;  
3 — вскрытие пласта 15,0 м; 4 — вскрытие пласта 7,5 м.

скважины (как это имеет место в случае радиального течения), а затем увеличивают свой диапазон колебаний с уменьшением величины вскрытия пласта, пока в пределе, для случая несовершенной скважины, текущие

Рассматривая в основном те же самые выводы, но совершенно с иной точки зрения, на фиг. 85 были нанесены текущие дебиты в зависимости от мощности песчаника для различных зафиксированных значений действительной глубины вскрытия песчаника в метрах. Эти кривые непосредственно показывают эффект от дополнительной мощности песчаника под забоем скважины. В частности, можно заметить, что, за исключением первых нескольких метров песчаника под забоем скважины, дополнительные слои песчаника дают последовательно уменьшающиеся нарастания дебита скважины. Так, для скважины с глубиной вскрытия 7,5 м повышение мощности песчаника от 37,5 до 60 м увеличит текущий дебит менее чем на 2%, в то время как первые 22,5 м, считая от забоя скважины от (7,5 до 30 м), увеличивают текущий дебит на 45,6%.

Что же касается изменения текущих дебитов в зависимости от радиуса скважины, то кривые на фиг. 84 показывают, что для больших величин вскрытия пласта текущие дебиты изменяются логарифмически с радиусом

дебиты не начинают изменяться пропорционально изменению радиуса скважины, как это мы имеем в случае сферического течения [уравнение (11), гл. V, п. 2].

**5. Несовершенные скважины в анизотропных песчаниках.** При рассмотрении главы V, пп. 3 и 4 было принято важное допущение, что пласт песчаника вполне изотропен. Однако случается часто, что проницаемость в направлении, перпендикулярном плоскости напластования, значительно меньше по сравнению с аналогичной величиной в направлении, параллельном плоскости напластования<sup>1</sup>.

Поэтому представляет интерес посмотреть, какое влияние оказывает анизотропность на текущий дебит скважины, вскрывшей только частично пласт песчаника.

С общей качественной стороны, когда проницаемость по вертикали меньше величины проницаемости по горизонтали, влияние анизотропности в основном будет выражаться в уменьшении вертикальных скоростей в системе так, что характер течения станет более близким к радиальному. Таким образом, доля текущего дебита скважины, обвязанная той частью песчаника, которая фактически не вскрыта забоем скважины, уменьшится, а вместе с ней уменьшится и суммарный текущий дебит. Так как эта доля по мере возрастания величины вскрытия пласта скважиной равномерно уменьшается, то влияние анизотропного характера песчаника должно возрастать от исчезающе малого значения для совершенной скважины до максимума в скважинах, только вскрывших кровлю песчаника. На первом этапе представляется удобным отделить проницаемость  $k$  от потенциальной функции  $\Phi$  и принять вместо нее упрощенную функцию:

$$\varphi = \frac{1}{\mu} (p - \gamma g z). \quad (1)$$

Аналитически эта задача может быть решена методом, рассмотренным в гл. IV, п. 15. Так, принимая для удобства величину проницаемости параллельно плоскости напластования за единицу и перпендикулярно к ней (параллельно оси  $z$ , так как здесь принято допущение о горизонтальном залегании слоев песчаника), обозначив через  $k_z$ , можем написать следующее дифференциальное уравнение для  $\varphi$  в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial \varphi}{\partial r} \right) + k_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Теперь это уравнение может быть приведено к виду, одинаковому с выражением для изотропной среды, производя любое изменение переменных:

$$r = \frac{r'}{\sqrt{k_z}} : \quad z = z'; \quad \text{или} \quad r = r' : z = z' \sqrt{k_z}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> См. гл. II, п. 12, где было показано, что обратное положение, когда проницаемость в направлении, перпендикулярном плоскостям напластования, превышает соответствующую величину в параллельном направлении, может встретиться также довольно часто, но здесь будет рассмотрен и математически обработан наиболее распространенный общий случай. Приведенный анализ тем не менее можно приложить к обоим типам течений.

В том и другом случае уравнение (2) принимает вид:

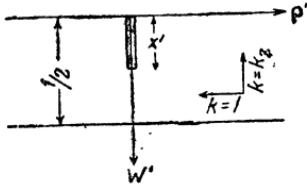
$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial \varphi}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = 0. \quad (4)$$

Вводя снова безразмерные переменные:

$$\varrho' = \frac{r'}{2h'}; \quad w' = -\frac{z'}{2h'}, \quad (5)$$

ясно, что граничные условия, которые следует принять для уравнения (4), будут (фиг. 86):

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial w'} = 0; \quad w' = 0, \frac{1}{2} \\ \varphi = \text{const}: \quad \varrho_w' = \sqrt{k_z \varrho_w}; \quad w' \leq x' = x, \\ \varphi = \text{const}: \quad \varrho_e' = \sqrt{k_z \varrho_e}. \end{array} \right\} \quad (6)$$



Фиг. 86. Скважина с частичным вскрытием пласта в анизотропном песчанике.

Отсюда следует, что распределение потенциала, представленное членами, содержащими переменные ( $w'$ ,  $\varrho'$ ), соответствует аналогичной величине в изотропном песчанике, с тем же самым частичным вскрытием пласта скважиной и радиусами скважины и внешнего контура, равными соответствующим величинам в действительной физической задаче, увеличенным в  $\sqrt{k_z}$  раз.

Тогда падение потенциала между скважиной и внешним контуром выразится следующим уравнением.

$$\Delta \varphi = \varphi_e(\sqrt{k_z} \varrho_e, x) - \varphi_w(\sqrt{k_z} \varrho_w, x). \quad (7)$$

Член  $\varphi_w(\sqrt{k_z} \varrho_w, x)$  может быть, очевидно, получен из уравнения (8), гл. V, п. 3 со значением  $w = \frac{3}{4}x$ , как это было принято в предыдущем разделе. Отсюда принимаем единицу плотности расхода вдоль забоя скважины:

$$\begin{aligned} \varphi_w(\sqrt{k_z} \varrho_x, x) &= -2 \ln \frac{2}{\sqrt{k_z} \varrho_w} + \\ &+ \ln \frac{\Gamma(1,75x) \Gamma(0,25x)}{\Gamma(1 - 1,75x) \Gamma(1 - 0,25x)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Что же касается  $\varphi_e$ , то, возвращаясь к гл. V, п. 3 и взяв уравнение (9), гл. V, п. 3, являющееся равнозначным (8) для больших значений  $\varrho$ , можем переписать его для случая  $w = 0$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_e(\sqrt{k} \varrho_e, x) &= \\ &= -4 \left[ \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{1}{n} K_0(2n\pi \sqrt{k} \varrho_e) \sin 2n\pi x + x \ln \frac{2}{\sqrt{k} \varrho_e} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Необходимо заметить, что в главе V, пп. 3 и 4 этот ряд, применимая уравнение (9), гл. V, п. 3, опускался вследствие весьма резкого уменьшения  $K_0$  с возрастанием аргумента, но когда  $k_z$  настолько мало, что  $\sqrt{k_z} \varrho_e$  заметно меньше 1, следует принимать в расчет, по крайней мере, первые несколько членов этого ряда. Когда же  $k_z$  приближается к нулю, то, как и следует этого в действительности ожидать, приходится брать в расчет столько членов этого ряда, что становится более удобным применять для нахождения  $\varphi_e$  такой вид уравнения (8):  $\Delta\varphi(k_z \sim 0) = 2 \ln \varrho_e / \varrho_w$ .

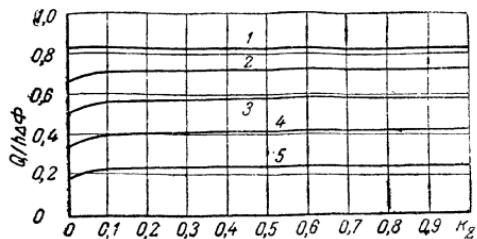
Установив по существу значение  $\Delta\varphi$ , следует найти выражение для текущего дебита  $Q$ , которому соответствует  $\Delta\varphi$ . Применяя уравнение (1), гл. V, п. 4, к (9), находим, что

$$Q = 2\pi \int_0^h \varrho_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial \varrho_e} dz = 8\pi h x. \quad (10)$$

Теперь можно подсчитать количество  $Q/h\Delta\varphi$  или эксплоатационный расход на единицу падения потенциала и на единицу мощности песчаника. Фиг. 87 показывает значения  $Q/h\Delta\varphi$ , нанесенные в виде кривых в зависимости от  $k_z$  для различных значений вскрытия песчаника мощностью 37,5 м. Крайние значения  $k_z = 1$  и  $k_z = 0$  отвечают соответственно, случаю изотропного песчаника, как это рассматривается в главе V, пп. 3 и 4, а также случаю строго радиального течения, ограниченного частью песчаника, фактически вскрытого скважиной. При рассмотрении фиг. 87 влияние изменения проницаемости в вертикальном направлении может казаться не столь большим. Однако график зависимости отношения текущих дебитов,

т. е.  $\frac{Q(k_z=1)}{Q(k_z=0)}$ , с глубиной вскрытия песчаника, как это дается на фиг. 88, показывает, что, особенно для малых величин вскрытия, дополнение к расходу, обязанное вертикальному течению, достигает значительной величины. Так, для глубины вскрытия 20% строго радиальное течение повышается на 50%, принимая вертикальную проницаемость равной проницаемости в горизонтальном направлении, а для 10% вскрытия это увеличение достигает более чем 75%.

Следует заметить, что возрастание дебита  $Q$ , обязанное проницаемости в вертикальном направлении, не является простой зависимостью

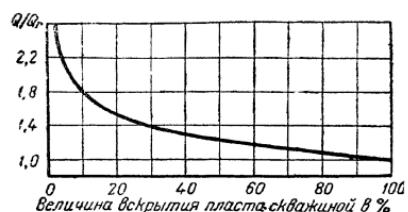


Фиг. 87. Зависимость эксплоатационной производительности скважин с частичным вскрытием пласта от проницаемости в вертикальном направлении  $k_z$ :

$Q/h\Delta\varphi$  — текущий дебит на единицу разности давлений и на единицу мощности песчаника. Общая мощность песчаника 37,5 м; радиус скважины — 0,075 м; радиус внешнего контура — 152,5 м. Горизонтальная непроницаемость — 1, вязкость жидкости — 1.

1 — величина вскрытия — 100%; 2 — величина вскрытия — 80%; 3 — величина вскрытия — 60%; 4 — величина вскрытия — 40%; 5 — величина вскрытия — 20%

от  $k_z$ . Если бы это было действительно так, то кривые на фиг. 87 были бы представлены прямыми линиями, соединяющими точки  $k_z = 0$  и  $k_z = 1$ . В действительности возрастание в зависимости от  $k_z$  устанавливается довольно быстро даже при малых значениях последнего и медленно изменяется для значений  $k_z > 0,1$ . Практическое значение этого вывода заключается в том, что он показывает, поскольку  $k_z$  не является чрезвычайно малой величиной, его не следует определять с большой точностью, хотя в то же самое время эта проницаемость дает возможность установить истинную величину расхода, поступающего в скважину.



Фиг. 88. Отношение эксплуатационной производительности скважин с частичным вскрытием пласта к соответствующей производительности для систем строго радиального потока:

$Q$  — общая эксплуатационная производительность;  $Q_r$  — строго радиальный компонент от  $Q$ ; мощность песчаника — 37,5 м, радиус скважины — 0,075 м, радиус внешнего контура — 152,5 м.

в несовершенную скважину, вскрывшую анизотропный песчаник, и потому во всех случаях, где это возможно, следует принимать в расчет этот фактор.

**6. Заключение.** Довольно часто бывает, что скважины, которые бурятся на жидкость, содержащуюся в песчаниках, не вскрывают их полностью. Так, недобуривание всей толщи продуктивного горизонта может явиться, например, для артезианских скважин, следствием недостаточного предварительного знакомства с фактической мощностью продуктивного пласта песчаника. В последующем это может быть установлено по разрезам соседних буровых. При бурении нефтяных скважин это недобуривание может явиться результатом желания избежать вскрытия пластовых вод, которые залегают или могут залегать в подошве нефтяного песчаника. Трудности, возникающие с проникновением воды в забой нефтяной скважины, часто бывают настолько серьезны, что обычно при подозрении на подошвенную воду на практике прекращают бурение раньше, чем будет вскрыта нижняя вода. Если же подошвенная вода была по ошибке вскрыта, то обычно заливают забой цементом, если это только представляется возможным. В том случае, когда скважина не вскрыла полностью всей мощности продуктивного песчаника, течение не будет радиальным, как в том случае, когда вскрытие пласта произведено полностью, что рассматривалось уже в предыдущем разделе. В рассматриваемом случае в дополнение к жидкости, залегающей в песчанике против вскрытого забоя скважины, к последней будет также двигаться жидкость, залегающая в пласте песчаника ниже забоя. Вполне очевидно, чтобы достичь забоя скважины, эта жидкость должна двигаться в вертикальном направлении, а также радиально. При этом течение становится трехмерным, так как комплексное представление

о динамике такого течения требует по необходимости введения в рассмотрение горизонтальной и вертикальной скоростей.

Методы решения трехразмерных задач почти аналогичны тем, что были приняты в предыдущем разделе при рассмотрении систем плоского течения. Начнем только с более общего трехразмерного вида уравнения Лапласа [уравнения (1) и (2), гл. V, пп. 1 и 2].

Вполне возможно, что наиболее простой из задач такого рода является задача о сферическом течении — точном аналоге строго радиального течения в плоской системе. С физической стороны эта задача соответствует скважине, только вскрывшей пласт песчаника значительной мощности, обладающего постоянством характеристики. Сам забой скважины представляет собой полусферическую поверхность с радиусом, равным радиусу скважины<sup>1</sup>.

Эквипотенциальные поверхности системы представлены полусферами, концентрическими поверхности забоя скважины, а линии тока представлены радиусами, направленными к центру последнего. Потенциал [уравнение (1), гл. V, п. 1] изменяется обратно радиальному расстоянию [уравнение (6), гл. V, п. 2] от центра скважины, и потому градиенты гораздо круче у скважины по сравнению со случаем радиального течения.

Скорость изменяется обратно пропорционально квадрату радиального расстояния [уравнение (7), гл. V, п. 2], что также создает более резкое уменьшение величины ее, чем при радиальном течении. Эта высокая крутизна градиентов давления вблизи скважины и их почти исчезающее малое значение на более значительных расстояниях приводят к выводу, что эксплоатационная производительность таких сферических течений практически не зависит от радиуса внешнего контура, где приложен высокий потенциал. С другой стороны, эта производительность чувствительна к радиусу скважины, будучи фактически пропорциональна его величине [уравнение (11), гл. V, п. 2]. По своей абсолютной величине скважина, работающая при сферическом течении, имеет гораздо меньшую производительность, чем скважина, полностью вскрывшая пласт песчаника и потому работающая при плоском течении. Это отношение для пласта мощностью 15 м и при радиусе скважины 0,075 м составляет 1:26 [уравнение (13), гл. V, п. 2]. В задачах с более практическим уклоном, где пласт песчаника имеет конечную мощность и частично вскрыт скважиной, анализ становится значительно более сложным. В этом случае необходимо дать такое распределение потенциала, которое не создает течения в кровле и подошве песчаника, т. е. соответствует случаю, когда пласт песчаника залегает между водонепроницаемыми глинами, и потенциал имеет постоянное значение на поверхности забоя скважины.

Чтобы удовлетворить первому требованию, удобно приложить метод конформных отображений, уже рассмотренный в главе IV, и последовательно отобразить поверхность забоя скважины на верхнюю и нижнюю плоскости песчаника, создавая в конечном итоге бесконечный ряд таких отображений. Более затруднительно, чтобы потенциальная функция приняла постоянное значение по всей поверхности забоя скважины. При

<sup>1</sup> Когда такие скважины проводятся на водосодержащие песчаники, они обычно называются скважинами с открытым забоем.

аналитическом решении задачи начинают с потенциала, связанного с элементом расхода, помещенным в некоторой точке по оси скважины. Тогда реальная задача будет заключаться в нахождении такого распределения элементов расхода вдоль оси скважины, чтобы потенциал на поверхности скважины сохранял свое постоянство. Когда скважина полностью вскрывает пласт песчаника, очевидно разные количества жидкости поступают через каждую единицу глубины вдоль поверхности забоя скважины. Когда же вскрытие пласта скважиной несовершенно, ясно, что жидкость, поступающая из отдельных частей песчаника, залегающих ниже забоя скважины, будет большей частью концентрироваться вблизи последнего, создавая, таким образом, увеличение плотности расхода жидкости, поступающей на поверхность скважины по мере приближения ее к забою.

Установив распределение расхода, которое дает постоянство потенциала на поверхности забоя скважины, мы по существу разрешили задачу. При этом возможно не только дать распределение потенциала в пласте песчаника, но и найти немедленно же соотношение между текущими дебитами и падением потенциала в пласте. Как уже было показано, плотность расхода жидкости на поверхности скважины неуклонно возрастает по мере достижения забоя скважины благодаря тому, что в нижнюю часть поверхности скважины поступает жидкость из той части песчаника, что залегает ниже глубины вскрытия. Тогда полная сумма этих плотностей тока на поверхности даст суммарную эксплоатационную производительность.

Суммируя также доли потенциала, зависящие от этих отдельных элементов расхода, получаем результативное распределение потенциала. Наиболее характерной особенностью этого распределения является то обстоятельство, что оно принимает почти полный радиальный характер по мере того, как отступает от скважины на расстояние порядка двойной мощности песчаника и в действительности изменяется логарифмически на радиальной дистанции [уравнение (9), гл. V, п. 3]. Однако вблизи поверхности скважины эквипотенциальные поверхности близко следуют контуру скважины, будучи приближенно сферическими для несовершенной скважины (см. фиг. 82) и цилиндрическими для частично совершенных скважин (см. фиг. 81).

Практический интерес представляют собой величины текущих дебитов, которые соответствуют распределению давления. Анализ показывает, что суммарная эксплоатационная производительность скважины, вскрывшей частично пласт песчаника определенной мощности, возрастает более резко, чем глубина вскрытия (для малых значений вскрытия), но более замедленно по мере того, как глубина вскрытия достигает 100% (см. фиг. 83). Объяснение этого явления опять находится в рассмотрении нерадиального течения, которое поступает в скважину, из той части песчаника, что залегает ниже глубины вскрытия. Когда глубина вскрытия мала, величина нерадиального течения будет увеличиваться с глубиной вскрытия благодаря тому, что будет открываться все большая поверхность песчаника, в которую может поступать нерадиальное течение. Так как часть течения, соответствующая строго радиальному, будет возрастать пропорционально глубине вскрытия, суммарный дебит будет резко увеличиваться. Однако по мере того,

как глубина вскрытия достигает известной точки, мощность невскрытой части песчаника, откуда поступает нерадиальный поток, уменьшается. Это обстоятельство уравновешивает влияние увеличивающейся при бурении поверхности забоя скважины, в результате чего изменение в суммарном расходе становится менее резким по сравнению с величиной дальнейшего вскрытия.

Что же касается величины нерадиальной части в величине расхода по сравнению со строго радиальным течением, установлено, что она неуклонно возрастает от исчезающие малых значений при 100%-ном вскрытии пласта, когда течение полностью радиальное, до величины 50% от радиального течения при 20%-ном вскрытии и, наконец, превышает долю радиального течения при величине вскрытия пласта 6% и менее. Косвенно это указывает на то, что действительное течение частично совершенной скважины не может быть даже грубо приближено к непосредственной суперпозиции радиального течения в самой скважине и полусферического течения на ее оконечности.

Рассматривая влияние мощности песчаника на эксплоатационную производительность скважины при данном частичном вскрытии пласта, из анализа видно, что для мощности песчаника более чем 15 м изменение эксплоатационной производительности в зависимости от мощности песчаника почти полностью линейно. Наклоны кривых возрастают с величиной частичного вскрытия пласта скважиной (см. фиг. 84). При небольшой мощности эксплоатационная производительность скважины возрастает в зависимости от мощности песчаника несколько быстрее, хотя этот эффект заметен только для более мелких глубин вскрытия.

Как и следует ожидать, изменение в величине эксплоатационной производительности в частично совершенной скважине в зависимости от радиуса скважины занимает промежуточное положение между изменениями для случая строго сферического течения и строго радиального течения. Это означает, что для больших глубин вскрытия течение приближается к радиальному и эксплоатационная производительность изменяется логарифмически в зависимости от радиуса скважины. Однако степень этого изменения возрастает с уменьшением глубины вскрытия, пока в пределе для несовершенной скважины, что соответствует сферическому течению, эксплоатационные производительности изменяются пропорционально радиусу скважины. Видоизменением только что выведенной задачи эксплоатации несовершенных скважин, имеющей значительный практический интерес, является такая задача, где принимается в расчет влияние анизотропности песчаника на его проницаемость. Когда становится заметным, что большая часть замеров проницаемости единичных образцов сцементированных песков, произведенных параллельно и перпендикулярно плоскостям напластования, показывает значительное отклонение в величине обеих проницаемостей, явление анизотропности приобретает более чем академический интерес. К счастью, аналитическое решение проблемы анизотропного песчаника может быть достигнуто на основе задачи о несовершенных скважинах, производя только небольшие формальные изменения в анализе, разработанном для решения той же задачи, но в изотропной пористой среде.

С этой целью является весьма удобным принять проницаемость параллельно плоскости напластования за единицу, а проницаемость пер-

пендикулярно плоскости напластования обозначить через  $k_z$ , так что фактически  $k_z$  представляет собой отношение обеих проницаемостей. Тогда оказывается, что, умножая радиальные координаты на множитель  $\sqrt{k_z}$  или же вертикальные координаты на множитель  $1/\sqrt{k_z}$ , можно простым приемом получить в новых координатах уравнения, которые будут совершенно те же, что и для изотропного песчаника [уравнение (4), гл. V, п. 4]. Более того, физическое соответствие преобразованной системы одинаково для несовершенной скважины в изотропном песчанике с той же самой частичной глубиной вскрытия, что и для анизотропного песчаника. Эффективность скважины (где численное значение радиусов разделено на двойную мощность песчаника) и внешние радиусы будут те же, что и в действительной системе, но умноженные на величину  $\sqrt{k_z}$  [уравнение (6), гл. V, п. 5]. Сделав эти изменения в числовых значениях рассматриваемых физических размеров системы, можно проделать весь анализ, не принимая более в расчет физическую анизотропность системы, т. е. тем же самым аналитическим методом, что был применен для изотропных песчаников. Как можно предвидеть заранее, влияние анизотропности на эксплоатационные производительности более характерно для скважин с небольшой глубиной вскрытия. Кроме того, эти производительности беспрерывно возрастают с увеличением вертикальной проницаемости  $k_z$ , от значения  $k_z = 0$ , соответствующего строго радиальному течению, до значения  $k_z = 1$ , соответствующего изотропному песчанику (см. фиг. 87). Это возрастание не имеет линейного характера, но более резко проявляется себя при малых значениях  $k_z$ . Отсюда получается вывод, что в тех случаях, где  $k_z$  не отличается сильно от 1, анизотропность, за исключением малых величин вскрытия пласта, не будет иметь особенного значения. С другой стороны, там, где  $k_z < 0,1$  и где глубины вскрытия не превышают 20%, текущий дебит с анизотропного песчаника будет меньше 80% соответствующей величины для скважины с изотропного песчаника.

Если проницаемость по вертикали примет исчезающее малое значение, то эксплоатационная производительность для скважины с глубиной вскрытия 20% упадет до 65% соответствующего дебита изотропного песчаника, а при 5% вскрытия пласта — менее чем на 47% эксплоатационной производительности скважины с изотропного песчаника.

Следующая интересная задача, возникающая в связи с изучением несовершенных скважин, относится к тому случаю, когда продуктивный горизонт скорее слоист, чем сложен единой однородной массой. Хотя при этом течение также имеет трехразмерную характеристику, но влияние неоднородности песчаника требует несколько отличного аналитического метода. Поэтому рассмотрение такой проблемы будет отнесено к главе VII, где будет развита общая методика решения таких систем с неоднородной проницаемостью. В той же главе будет рассмотрена трехмерная задача о скважине с песчаной пробкой в лайнере, ибо этот случай также включает рассмотрение участков с различной проницаемостью в единой, соединяющейся между собой пористой среде<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Толке дает несколько похожий метод анализа при рассмотрении своего способа определения проницаемости сцепментированной пористой среды, на основании экспериментов с нелинейным течением. Однако в связи с тем, что его

Последняя трехразмерная задача течения, имеющая практическое значение, которая будет рассмотрена в настоящей работе, относится к водяному конусу. В этом случае, однако, течение включает в себя две однородные жидкости и потому потребуется снова дать метод решения, отличный от тех методов, которые применяются для систем, несущих только одну однородную жидкость. Поэтому рассмотрение этого вопроса также переносится в последующий раздел (глава VII), который будет полностью посвящен анализу задач этого типа.

---

---

метод вряд ли найдет широкое применение при фактических измерениях проницаемости; теория Толке здесь не приводится.

---

---

## *Глава шестая*

### **ГРАВИТАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ**

**1. Введение.** В предыдущих разделах было показано, что в общем виде можно учесть формально влияние силы тяжести для трехмерного течения, а также для плоского течения с движением жидкостей в вертикальной плоскости введением в уравнение неразрывности потенциала скорости:

$$\Phi = \frac{k}{\mu} (p \pm \gamma g z), \quad (1)$$

где знаки  $\pm$  соответствуют положительному и отрицательному направлению вертикальной координаты  $+z$ . Этот способ приводит непосредственно к уравнению Лапласа для  $\Phi$ ,

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (2)$$

которое можно взять за основу при изучении в отдельных деталях всех трехмерных течений жидкости при установившемся движении. Эта формулировка уже была принята в предыдущей главе, где были получены решения для некоторых практических трехмерных задач. Строго говоря, та же самая формулировка является вполне достаточной, чтобы дать описание всем возможным типам установившегося течения несжимаемой жидкости в однородной среде, когда следует учитывать влияние силы тяжести.

Однако, как это было уже указано предшествующими рассуждениями, каждый отдельный метод, применяемый для решения данной проблемы, зависит в значительной степени от природы границ, ограничивающих жидкость, а также от условий, которые были приняты для этих контуров. Тот класс задач, который будет нами рассматриваться в настоящей главе, характеризуется тем обстоятельством, что часть контура, ограничивающего жидкость, является „свободной поверхностью“. Как и подразумевает собой этот термин, свободная поверхность является поверхностью жидкости, находящейся скорее в состоянии равновесия с атмосферой, чем с жесткой водопроницаемой гранью. Рассматривая эту поверхность со строго гидродинамической стороны, ее можно определить как линию тока, вдоль которой давление будет постоянным. Практическое значение систем, контуры которых обладают свободной поверхностью, заключается в том, что каждое течение, в котором сила тяжести является основной движущей силой, дает образование свобод-

ной поверхности. Так, вода, утекающая через плотину к более низкому уровню, обладает свободной поверхностью, заключенной внутри плотины. Соответственно этому вода, просачивающаяся из ирригационной канавы, обладает свободной поверхностью в почве, окружающей эту канаву. Наконец, вода в песчанике, который питает насосную скважину, где уровень жидкости поддерживается ниже кровли пласта песчаника, движется со свободной поверхностью, находящейся в состоянии равновесия с величиной постоянного давления, действующего на объем жидкости в песчанике и равного значению давления над уровнем жидкости в стволе скважины.

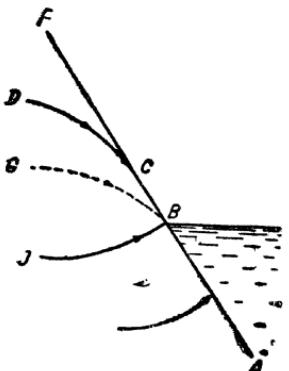
Допустим, что песчаник, несущий воду в артезианскую скважину, покрыт водонепроницаемым слоем. Тогда, становится ясным, что если уровень воды в скважине поднимется до значения, равного высоте залегания песчаника, течение прекратится, если только не будет приложен напор внешнего давления на питающий контур системы. В последнем случае свободная поверхность будет отсутствовать, и течение может быть описано методами, которые рассматриваются в предыдущих и последующих разделах. Однако в том случае, когда присутствует свободная поверхность, математические трудности, заключенные в решении этой проблемы, сейчас же становятся столь значительными, что практически являются непреодолимыми препятствиями для решения трехмерной системы. Причина этого обстоятельства лежит в том, что контуры системы не являются собой более простой геометрической формы. Фактически истинная форма свободной поверхности неизвестна. Вернее всего форму последней следует определить одновременно с распределением давления внутри системы. Мы уверены, что в действительности возможно решить такую задачу аналитическим путем, на основании двойного условия, чтобы свободная поверхность была линией тока и поверхностью постоянного давления. Однако, к сожалению, мы не обладаем соответствующими аналитическими средствами, которые были бы достаточно сильными, чтобы найти точные решения таких задач, за исключением плоских систем, где метод преобразования сопряженных функций приводит в принципе к желаемым результатам. С другой стороны, даже этот метод требует значительно более комплексного анализа, чем это было использовано при его применении к системам без свободной поверхности, например, рассматривавшимся в главе IV.

Дополнительное усложнение, возникающее при изучении общих проблем гравитационного течения, заключается в присутствии у большинства таких систем поверхностей фильтрации<sup>1</sup>. Так же, как и для свободной поверхности, давление по этим элементам поверхности является постоянным. Однако последние не представляют собой линий тока. Они являются просто частями контура пористой среды, где жидкость покидает систему и вступает в область, лишенную и жидкости и пористой среды. С другой стороны, длина этих элементов поверхности заранее не известна, так как их верхняя граница соединяется всегда со свободной поверхностью, которая первоначально также неизвестна. Существование таких элементов поверхности было установлено уже

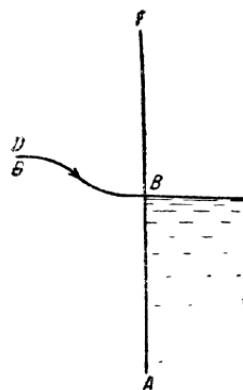
<sup>1</sup> Литературный перевод немецкого термина „Hang-quelle“ вряд ли отображает это явление так, как принятый нами термин.

несколько времени назад, но только недавно (гл. VI, п. 3) был разработан аналитический метод, при котором можно принять в расчет совершенно точно эти элементы.

Физическая основа существования таких поверхностей фильтрации заключается в наблюдении, что свободная поверхность не только должна иметь всегда наклон по мере приближения к поверхности стока, но и скорость вдоль свободной поверхности, будучи компонентом градиента силы тяжести вдоль поверхности, должна быть всегда конечной<sup>1</sup>. Так, допуская, что  $AF$  является физической границей стока гравитационного течения с уровнем истекания жидкости, достигающей точки  $B$  (фиг. 89)



Фиг. 89. Схема направления линий тока на наклонной поверхности стока при гравитационном течении.



Фиг. 90.

видно, что ограничивающая линия тока, что заканчивается вдоль  $AB$ , должна встретить  $AF$  в точке  $B$  под прямым углом, например,  $JB$ . Если теперь принять, что свободная поверхность также заканчивается в точке  $B$ , она должна образовать конечный угол с  $JB$ , например  $GB$ . Однако результативная сходимость обеих линий тока в точке должна повести к бесконечному значению скоростей в  $B$ , вдоль  $JB$  и  $GB$ . Вследствие существования уже отмеченного ограничения величины скоростей вдоль свободной поверхности полученный вывод невозможен, и потому свободная поверхность должна заканчиваться выше точки  $B$ , например в  $C$ . Тогда входящий участок  $BC$  является поверхностью фильтрации, так как он не является линией тока, но подвержен постоянному давлению. Если поверхность стока вертикальна  $AF$ , этот довод нарушается, так как можно допустить схождение свободной поверхности  $DB$  с последней линией тока  $GB$ , ограничивающей те линии, что режут  $AB$  под прямым углом (фиг. 90).

Поставленное условие не представляется возможным, так как неисчезающие малые горизонтальные скорости в  $AB$  требуют, чтобы давление

<sup>1</sup> Можно легко доказать, что суммарная скорость вдоль свободной поверхности не может быть более величины свободного вертикального падения, обвязанного силе тяжести  $k\mu g/\mu$  [уравнение (5), гл. VI, п. 3].

жидкости имело производную в горизонтальном направлении вдоль  $AB$ , не равную нулю. Так как наклон  $DB$  в точке  $B$  равен нулю, то нарастание давления по горизонтали, отступая от  $AB$ , обязано объединенному эффекту от вертикальных скоростей вблизи  $AB$ , направленных вверх<sup>1</sup>. Но так как потенциал вдоль  $AB$  имеет постоянное значение и избыток потока в  $AB$ , помимо величины, соответствующей строго линейному течению, поступает с уровня поверхности  $B$ , направленные вверх вертикальные скорости физически невозможны.

Когда наклон поверхности стока  $AF$  менее  $90^\circ$ , из приведенных доказательств не вытекает необходимость отделения поверхностью фильтрации верхушки уровня стока воды от оконечности свободной поверхности. Существование ее выводится на основании того факта, что для нулевого напора стока жидкости такие поверхности фильтрации, повидимому, необходимы во всех случаях. Физически совершенно необоснованно, чтобы эта необходимость внезапно исчезла, когда к системе будет дополнительно приложен неисчезающее малый напор стока жидкости. С другой стороны, изучение<sup>2</sup> годографов (гл. VI, п. 3) таких систем показывает, что при известных условиях поверхность стока с наклоном менее  $90^\circ$  может быть лишена поверхности фильтрации, когда уровень стока жидкости не принимает нулевого значения.

Вследствие требования, чтобы тангенциальная скорость вдоль поверхности стока была непрерывна при переходе от оконечности свободной поверхности в поверхность фильтрации, непосредственно вытекает, что для наклонов поверхности стока, которые равны или более  $90^\circ$ , свободная поверхность должна встретиться с поверхностью фильтрации или поверхностью стока тангенциально. В том случае, когда наклон поверхности стока менее  $90^\circ$ , это же самое условие приводит к заключению, что свободная поверхность не будет более тангенциальной к поверхности стока, но будет пересекать ее скорее вертикально.

Что же касается поведения свободной поверхности на плоскости водопоглощения, небольшое рассуждение показывает, что для фронта поглощения с наклоном  $\geqslant 90^\circ$  свободная поверхность будет входить в пласт песчаника горизонтально. Если же фронт водопоглощения пористой среды имеет наклон  $\leqslant 90^\circ$ , свободная поверхность будет входить под прямым углом к фронту. Наконец, можно заметить, что во всех случаях скорость в нижней оконечности поверхности фильтрации будет теоретически<sup>3</sup> бесконечной благодаря разрыву непрерывности тангенциальной скорости над и под нижней оконечностью поверхности фильтрации. Когда наклон поверхности стока менее  $90^\circ$ , скорость у ее основания (горизонталь) будет также бесконечной. Это будет точка схождения линий тока, которые будут входить сюда с неисчезающими малыми значениями углового расхождения.

<sup>1</sup> Так как направленные вверх скорости сделают линии тока выпуклыми вблизи  $AB$ , то совпадение  $DB$  и  $GB$  будет иметь своим дальнейшим последствием, что линии тока будут сходиться в точке пересечения кривых  $B$ .

<sup>2</sup> B. Davison, Phil. Mag., 21, 904, 1936.

<sup>3</sup> Разумеется, в физической системе такие бесконечные значения не будут иметь места вследствие нарушения закона Дарси, после того как будут превышены числа Рейнольдса для данной системы.

Если эквипотенциальные поверхности стока или поглощения дают острые углы с граничной линией тока, например, в пяте плотины, фасы которой направлены в разные стороны, скорости в вершинах этих углов<sup>1</sup> будут равны нулю. Последние свойства применимы, разумеется, ко всем течениям и не имеют никакого отношения к гравитационному компоненту потока. В настоящем случае представляется вполне возможным дать достаточно полное качественное рассмотрение гравитационного течения. Однако их количественная обработка находится, в целом, в довольно неудовлетворительном состоянии. В принципе метод годографов дает средство для математической обработки практически любой двухразмерной системы. Однако цифровая работа при этом настолько трудоемка, что она была выполнена в подробностях только для ограниченного количества частных случаев. В то же самое время нет ни одной задачи по трехразмерным системам, для которой бы имелось точное аналитическое решение. Поэтому следует обратиться к приближенным методам. Однако их точность в некоторых случаях может быть установлена только по физической интуиции.

В свете этого обстоятельства в настоящей работе не делается попыток создать классификацию различных проблем гравитационного течения и подвергнуть систематической разработке каждый класс в отдельности. Вернее всего, мы представим вначале несколько имеющихся точных решений по двухразмерным задачам, которые получены аналитическим путем, а также на электрических моделях; затем приведем некоторые приближенные обработки прочих проблем, имеющих практическую ценность; после этого подвергнем обозрению некоторые эмпирические исследования проблем трехразмерного радиального течения и, наконец, дадим вкратце приближенную теорию подсчета расхода при гравитационном течении. Таким образом, порядок представления материала будет в значительной степени определяться методикой обработки, а не внутренней физической связью различных проблем.

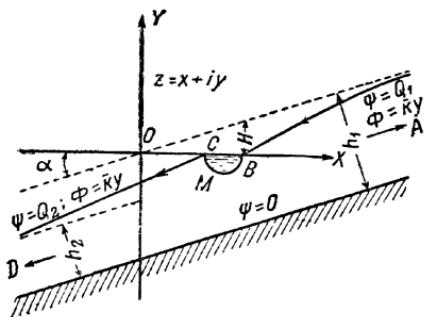
**2. Дренирование наклонного пласта песчаника<sup>2</sup>. Задача Гопфа и Трефтца.** Задача Гопфа и Трефтца заключается по существу в решении вопроса дренирования наклонно залегающего пласта водяного песчаника канавой, проведенной в кровле последнего. Решение этой задачи, представленное в настоящем разделе, аналитически не является столь удовлетворительным по сравнению с решением, полученным методом годографа (гл. VI, п. 3), так как оно не учитывает поверхности фильтрации и вводит только косвенно форму дренажной канавы. Однако оно обладает преимуществом по сравнению с более точным методом в простоте анализа и вычислений.

Действительно, в свете весьма трудоемких вычислительных операций, к которым необходимо прибегнуть при более точном методе, для решения общих проблем при двухразмерном гравитационном течении,

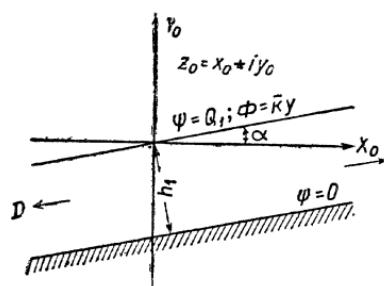
<sup>1</sup> Для поверхности стока это обстоятельство накладывает условие, что существует уровень стока жидкости, не равный нулю. Когда последний исчезает, скорость в носке плотины будет бесконечной.

<sup>2</sup> Норф L. and Трефтц, E., Zeits angew. Math. und Mech., 1, 290, 1921. Здесь и в дальнейших аналитических выкладках не принимается в расчет капиллярная зона насыщения, залегающая над свободной поверхностью системы.

подробное описание решения Гопфа и Трефтица является, несмотря на его ограничения, полностью оправданным. На фиг. 91 представлена схема течения. Вода, которая движется вниз по склону из  $A$ , частично перехватывается канавой, а остаток ее продолжает двигаться в направлении  $D$ . Принято, что водонепроницаемый слой наклонен под углом  $\alpha$  к горизонту и что далеко со стороны верхнего борта канавы вода заполняет песчаник до высоты  $h_1$  над этим слоем. Со стороны нижнего борта канавы уровень воды падает до высоты  $h_2$  над непроницаемым слоем. Наконец, система принимается двухразмерной, распространяющейся до бесконечности в обоих направлениях, нормальных к плоскости чертежа.



Фиг. 91. Изображение канавы, лежащей в кровле наклонно-залегающего песчаника в плоскости  $z$  (по Гопфу и Трефтицу).



Фиг. 92. Линейное течение изображенное на фиг. 91 исключая канаву.

Очевидно, сам водонепроницаемый слой соответствует линии тока. Это можно сформулировать как  $\Psi = 0$ . Соответственно этому наивысшие поверхности воды над и под канавой будут линиями тока, которые можно обозначить через  $\Psi = Q_1$  и  $\Psi = Q_2$ , где  $Q_1 - Q_2$  — расход дренажной канавы<sup>1</sup>.

Помимо того, что они являются линиями тока, поверхности  $\Psi = Q_1, Q_2$  обладают еще более важными свойствами, так как они являются свободными поверхностями, находящимися в состоянии равновесия с атмосферой. Как уже было отмечено в гл. VI, п. 1, это обстоятельство налагает условие, что давление постоянно по всей свободной поверх-

<sup>1</sup> Как это было показано Гамелем (Hamel, Zeits. angew. Math. und. Mech., 14, 129, 1934), линия тока  $\Psi = Q_1$  будет в общем случае вступать на поверхность стока уровня жидкости в последней, образуя, таким образом, поверхность фильтрации (гл. VI, п. 1). Однако поскольку еще не осуществлено более точное аналитическое решение, в котором принята во внимание поверхность фильтрации, и так как теория Гопфа и Трефтица должна в любом случае дать существенные особенности искомого решения, эта теория будет дана здесь во всех своих подробностях, как пример метода решения, существенно отличающегося от процедур, представленных в последующих трех разделах настоящей главы.

ности и отсюда может быть принято равным нулю. Поэтому значение потенциалов  $\Phi$  на этих поверхностях может быть выражено

$$\Phi = \frac{k y g}{\mu} y = \bar{k} y, \quad (1)^1$$

как это показано на фиг. 91, где  $y$  принимается за вертикальную координату. Разумеется, поставленное условие характеризует собой все гравитационные течения. С одной стороны, это условие создает трудности решения проблемы, а с другой делает возможным решение ее аналитическим путем, так как оно „компенсирует“ неизвестные нам формы свободных поверхностей. В частном способе решения, принятом в настоящем разделе, установление формы свободной поверхности избегнуто соответствующим преобразованием координат (уравнение 4), и основная трудность, как это будет видно из дальнейшего, заключается в установлении истинной формы дренажной канавы.

Предварительно следует заметить, приступая к основной части анализа рассматриваемой здесь проблемы, что комплексный потенциал

$$\omega_0 = \Phi + i\Psi = z_0 \bar{k} \sin \alpha e^{-ia} + iQ_1; \quad \frac{Q_1}{\bar{k} \sin \alpha} = h_1 \quad (2)$$

дает полное представление о наклонном течении при удаленной канаве (фиг. 92). Так, уравнивая действительную и мнимую части уравнения (2), видно, что

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \bar{k} \sin \alpha (x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) \\ \Psi &= Q_1 - \bar{k} \sin \alpha (x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Очевидно, линия тока  $\Psi = 0$  совмещается с водонепроницаемым слоем, изображенным на фиг. 92, и верхняя поверхность  $y_0 = x_0 \operatorname{tg} \alpha$  дает совершенно точно

$$\Psi = Q_1, \quad \Phi = \bar{k} y_0.$$

Тогда переменная  $z$  преобразуется в  $z_1$  на основании соотношения:

$$\left. \begin{aligned} z &= z_0(\omega) + z_1(\omega) \\ z_0(\omega) &= \frac{(\omega - iQ_1)e^{ia}}{\bar{k} \sin \alpha}; \quad \omega = \Phi + i\Psi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

так что  $z_1(\omega)$  представляет собой исключительное влияние канавы.

<sup>1</sup> Количество  $k y g / \mu$  обозначено здесь символом  $\bar{k}$ , так как оно представляет собой „эффективную“ проницаемость систем, в которых движущим агентом является всецело сила тяжести и которые имеют дело исключительно с одной жидкостью — водой. Этот символ не выражает собой смысла коэффициента проницаемости с основной физической точки зрения. Однако с практической стороны является удобным применить эту специфическую форму эффективной проницаемости в области гражданского и мелиоративного строительства, где исключительное использование гидравлических градиентов в единицах водяного столба делает невозможным ошибочную экстраполяцию ее к остальным типам течения жидкости в пористой среде. Разумеется, размерность  $\bar{k}$  соответствует размерности скорости, т. е. см/сек (гл. II, п. 3).

Принимая в расчет граничные условия, указанные на фиг. 91, совершенно точно видно, что плоскость  $z$ , на основании уравнения (4), отображается на плоскость  $z_1$  согласно следующим соответствиям:

$$\left. \begin{array}{l} BA \rightarrow: y_1 = 0; \quad x_1(B) = x(B); \quad x_1(A) = 0 \\ AD \rightarrow: x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha = 0 \\ DC \rightarrow: y_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{k} \operatorname{ctg} \alpha; \quad x_1(D) = y_1 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{Q_1 - Q_2}{k} \operatorname{ctg}^2 \alpha \\ x_1(C) = x(C) - \frac{Q_1 - Q_2}{k}; \quad x_1(B) - x_1(C) = b + \frac{Q_1 - Q_2}{k} \end{array} \right\} \quad (5)$$

где  $b = x(B) - x(C)$  — ширине канавы и  $h_2 = Q_2/k \sin \alpha$ . Секция  $C'B'$  не определена до тех пор, пока не установлена форма канавы. Однако представляется более легким принять форму  $C'B'$  (т. е.  $Q_1, Q_2, Q_m$ ), а затем рассмотреть форму канавы, выполненную на этом условии, чем вставлять в решение непосредственную геометрическую ее форму. Отображение фиг. 91 в плоскости  $z_1$  показано на фиг. 93. Система, представленная на фиг. 91, еще более просто отображается на плоскости  $\omega$ . Результат этого отображения показан на фиг. 94.

При таком отображении внешний разрез  $B''M''C''$  соответствует канаве, где  $\Phi = 0$ .

Значение  $\Psi$  уменьшается от  $Q_1$  до минимума  $Q_m$ , а затем возрастает до  $Q_2$ .

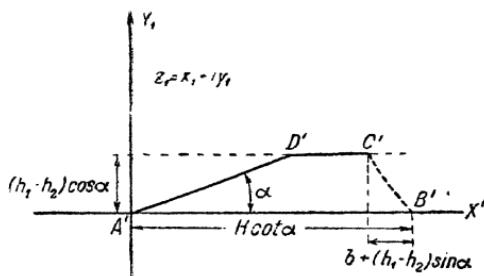
Следующим этапом решения проблемы является определение  $z_1$  с такой функциональной зависимостью от  $\omega$ , что в направлении оси  $\Phi$

$$x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha = 0;$$

в направлении  $\Psi = Q_1; y_1 = 0$ ; в направлении  $\Psi = Q_2$ :  $y_1 = -\frac{Q_1 - Q_2}{k} - \operatorname{ctg} \alpha$  и так, что отрезок  $B''M''C''$  входит в канаву  $y_1 = F_1(x_1)$ . Однако вместо того чтобы попытаться отобразить непосредственно внешность  $\omega$  в плоскости  $z_1$ , гораздо проще следовать более косвенному методу отображения обеих плоскостей на первом квадранте плоскости  $\zeta = \xi + ih$  (фиг. 95). При этом отображении внешности мы должны сделать следующие соответствия:

$$C'' \rightarrow \zeta = 0; \quad B'' \rightarrow \zeta = \infty; \quad A'' \rightarrow \zeta = \alpha;$$

$$D'' \rightarrow \zeta = d; \quad M'' \rightarrow \zeta = im.$$



Фиг. 93. Отображение фиг. 91 на плоскость  $z_1$ .

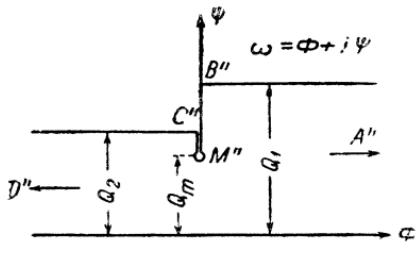
При небольшом изменении<sup>1</sup> теоремы Шварца-Кристоффеля (гл. IV, п. 11) легко заметить, что соответствующее преобразование функции дается следующим выражением:

$$\omega = \frac{Q_1}{\pi} \ln \frac{a+\zeta}{a-\zeta} - \frac{Q_2}{\pi} \ln \frac{\zeta+d}{\zeta-d}. \quad (6)$$

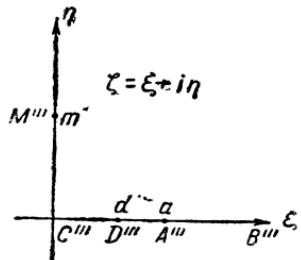
Для плоскости  $z_1$  отображающая функция может быть найдена обобщением преобразования Шварца-Кристоффеля:

$$z_1 = \int_a^z \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - d)^{\frac{a}{\pi}} (\zeta - a)^{1 - \frac{a}{\pi}}}, \quad (7)$$

где  $f(\zeta)$  не имеет особенностей в первом квадранте, положительна на положительной стороне действительной оси ( $\zeta$ ) и обращается в нуль на бесконечности. Ее вид определяет собой геометрическую форму канавы



Фиг. 94. Отображение фиг. 91 на плоскость  $\omega$ .



Фиг. 95. Отображение плоскостей  $z_1$  и  $\omega$ , представленных на фиг. 93 и 94, на плоскость  $\zeta$ .

Легко убедиться, что преобразование уравнения (7) отображает границу  $C'D'A'B'$  на положительную действительную ось ( $\xi$ ) на плоскости ( $\zeta$ ) и канаву  $BC$  на положительную мнимую ось ( $\eta$ ). Связь, налагаемая уравнениями (6) и (7), между  $\omega$  и  $z_1$  (а отсюда и  $z$ ) ограничивает формальное решение задачи. Нельзя получить точного вывода, пока не будет сделано особого допущения в отношении функции  $f(\zeta)$ , т. е. геометрической формы канавы. Только раньше чем устанавливать вид  $f(\zeta)$ , представляет собой интерес дать вывод взаимоотношения между расходом, отбираемым канавой  $Q_1 - Q_2$  и остальными константами системы.

Так как точка  $B$  соответствует  $\zeta = \infty$  и

$$x_1(B) = x(B)$$

<sup>1</sup> Следует только объединить уравнение (3), гл. IV, п. 11, с дальнейшим

непосредственно следует, что

$$x_1(B) = \int_a^{\infty} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - d)^{\frac{a}{\pi}} (\zeta - a)^{1 - \frac{a}{\pi}}}$$

Для практических случаев отношение  $\frac{a}{\pi}$  очень мало. Поэтому можно ограничиться приближениями, которые, за исключением близости к  $\zeta = a$ ,  $d$ , даются

$$(\zeta - d)^{\frac{a}{\pi}} \approx 1; \quad (\zeta - a)^{1 - \frac{a}{\pi}} \approx \zeta - a.$$

Отсюда следует, что разность отметки  $H$  верхнего края канавы от ненарушенного уровня дается выражением:

$$H = x_1(B) \operatorname{tg}(a) = \pi f(a) + O\left(\frac{a}{\pi}\right).$$

Так как  $D$  соответствует  $\zeta = d$ , то

$$z_1(D) = \int_a^d \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - d)^{\frac{a}{\pi}} (\zeta - a)^{1 - \frac{a}{\pi}}},$$

так что

$$y_1(D) = \sin a \int_d^a \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - d)^{\frac{a}{\pi}} (a - \zeta)^{1 - \frac{a}{\pi}}} = \frac{\pi}{a} f(a) \sin a + O(a) \approx \pi f(a).$$

Объединяя эти выводы с уравнением (5), получаем, что для порядка  $\frac{a}{\pi}$

$$H = y_1(D) = \frac{Q_1 - Q_2}{k \sin a},$$

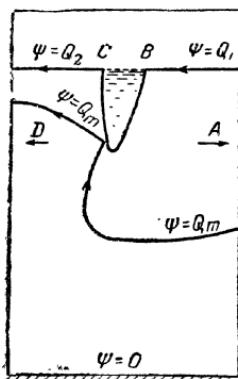
так что

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{H}{h_1}. \quad (8)$$

Отсюда для порядка  $\frac{a}{\pi}$  доля первоначального расхода в песчанике, которая отбирается канавой, равна отношению разности отметок свободной поверхности в канаве к мощности ненарушенного слоя насыщенного водой песчаника. Все предшествующие формулы, которые были использованы для решения этой проблемы, включали в себя глубину воды в канаве или ее ширину. Между тем уравнение (8) показывает, что отношение  $(Q_1 - Q_2)/Q_1$  определяется разностью отметок  $H$  и начальной глубиной залегания жидкости  $h_1$ .

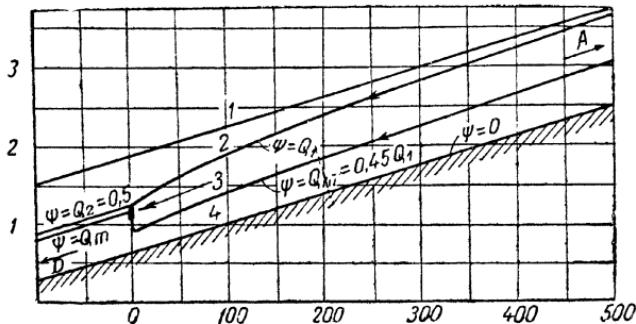
Не входя в отдельные детали, которые можно найти в первоисточнике, мы покажем выводы специальных математических выкладок, исполненных Гопфом и Трефтцом. Сделанные допущения были таковы:

что  $0,55 Q_1$  входит в канаву и  $0,05 Q_1$  вытекает обратно. В единицах глубины  $h_1$  ненарушенного потока следует, что



Фиг. 96. Геометрическая форма канавы и оконтуривающих линий тока в соответствии с уравнением (9), гл. VI, п. 2 (по Гопфу и Трефтцу).

на фиг. 97. Форма канавы, показанная на фиг. 96, может показаться искусственной, однако можно без больших затруднений согласовать



Фиг. 97 (по Гопфу и Трефтцу):

1 — ненарушенная свободная поверхность; 2 — свободная поверхность; 3 — канава; 4 — непроницаемое ложе.

коэффициенты  $A$  и  $l$  или изменить внешний вид  $f(\zeta)$ , так что сечение канавы, по крайней мере в грубом приближении, примет любую заранее намеченную геометрическую форму.

Такое изменение не повлияет материально на производительность дренажа канавой или общую форму свободной поверхности системы, за исключением непосредственной близости к канаве<sup>1</sup>.

**3. Решение задачи двухразмерного гравитационного течения методом годографа. Отображение границ.** Метод годографов был развит довольно подробно Гамелем<sup>2</sup> и его способу обработки мы будем следовать. Этот математический анализ является весьма действенным, однако очень трудным методом обработки двухразмерных систем, содержащих одновременно водонепроницаемые границы, поверхности с постоянным потенциалом и поверхности фильтрации.

Годограф дает отображение динамической системы, координаты которой являются компонентами скорости ее частиц. В двухразмерных задачах первоначальный геометрический образ системы можно рассматривать заключенным в плоскости  $z$ , в то время как годограф находится в плоскости  $(u, v)$  или годографа, где  $u$  и  $v$  являются компонентами скорости в направлении первоначальных осей  $x$  и  $y$ . Особым преимуществом этого отображения плоскости  $(u, v)$  является то обстоятельство, что геометрические формы свободных поверхностей в первоначальной плоскости будут в принципе неизвестны до тех пор, пока не будет решена вся динамическая проблема. Вместе с тем их годографы являются окружностями с определенными и конечными параметрами. Более того, поверхности фильтрации, которые не могут быть зафиксированы в плоскости  $z$ , пока не будет известна точная геометрическая форма свободной поверхности, могут быть даны также заранее единственными в своем роде отображениями годографа. Таким путем будет получено аналитическое решение всей проблемы в целом. Поскольку границы системы зафиксированы в плоскости  $u$  и  $v$ , для окончательного решения проблемы можно приложить теорию сопряженных функций. Преобразования круговых сегментов, дающих изображение

<sup>1</sup> Пренебрежение поверхностью фильтрации в  $B$  делает значения величин расходов  $Q_1 - Q_2$ , отбираемых канавой для данной разности отметок  $H$ , как это дается уравнением (8), несколько меньшими по сравнению с тем случаем, когда учитывается поверхность фильтрации в  $B$ .

<sup>2</sup> Краткое качественное описание теории было дано уже несколько ранее П. Немени в его работе „Wasserbauliche Strömungslehre“, стр. 204, 1933.

Этот метод почти аналогичен развитому Гельмгольцем и Кирхгофом для изучения неразрывного движения жидкости в классической гидродинамике. Однако приводимый здесь подробный анализ является более трудным для освоения вследствие необходимости иметь дело с круговыми сегментами в плоскости годографа (см. также работу M. Muskat, Physics, 6, 402, 1935).

Б. Дэвисон опубликовал по существу аналогичное исследование, но выраженное в более строгой аналитической терминологии (Phil. Mag., 21, 881, 904, 1936), являющееся дальнейшим развитием опубликованной этим автором более ранней его работы на русском языке и опубликованной в Mem. l'Inst. Hydr., 6, 121, 1932 г., Ленинград, которая, повидимому, не была аннотирована Гамелем. Дэвисон также прилагает общую теорию к задаче о плотине с вертикальными фасадами (гл. VI, п. 4), но не приводит математических выкладок. Можно также отметить, что комбинация обратного преобразования годографа по методу, развитому в гл. VI, пп. 8 и 9, была применена В. В. Веденниковым к решению частного случая фильтрации воды в канал (C. R., 202, 1155, 1936), а также к фильтрации воды из каналов, представленных прямыми линейными секциями (Zeits. angew. Math. u. Mech., 17, 155, 1937).

свободных поверхностей, требуют введения<sup>1</sup> теории модулярных эллиптических функций, которая до сих пор не применялась широко при рассмотрении физических проблем.

Чтобы построить гидограф системы в плоскости  $z$ , необходимо отобразить различные граничные сегменты на плоскость  $(u, v)$ . Это может быть достигнуто следующим путем.

а) Водонепроницаемые границы. Обозначая через  $s$  — длину водонепроницаемой границы, получим, очевидно, компоненты скорости на контуре из следующего выражения:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} \cos \alpha; v = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} \sin \alpha; \quad \frac{v}{u} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (1)$$

где  $\Phi$  — потенциал скорости:  $\alpha$  — наклон элемента контура к оси  $x$ -ов в  $s$ . Отсюда для прямолинейной водонепроницаемой границы  $\alpha$  будет иметь постоянную величину и ее образ в плоскости гидографа будет изображаться прямой линией, проходящей через начало координат плоскости  $(u, v)$ , параллельно границе.

б) Поверхность постоянного потенциала. Постоянная масса жидкости. В этом случае согласно определению  $\Phi = \text{const}$ , и компоненты скорости на поверхности будут:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \sin \alpha; \quad v = +\frac{\partial \Phi}{\partial n} \cos \alpha; \quad \frac{v}{u} = -\operatorname{ctg} \alpha, \quad (2)$$

где  $n$  — нормаль к поверхности. Отсюда следует, что прямолинейный контур постоянного потенциала дает линию через начало координат в плоскости  $(u, v)$ , нормально к действительной границе.

в) Свободные поверхности. Так как согласно определению давление постоянно вдоль свободной поверхности,  $\Phi$  дается выражением:

$$\Phi - \bar{k}y = C; \quad \bar{k} = \frac{kyg}{\mu}, \quad (3)$$

где вертикальная координата, направленная вверх, берется  $+y$ . Эффективная проницаемость  $\bar{k}$  равна, очевидно, вертикальной скорости свободного падения жидкости, обязанного силе тяжести. Отсюда при

$$\frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$

$$-\bar{k} \sin \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0. \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> Когда прямолинейные отрезки проходят все через точку, лежащую на круговом сегменте, инверсия преобразования делает излишней необходимость применения модулярных эллиптических функций (см. работу Веденникова). Такие случаи возникают, когда все поверхности постоянного потенциала горизонтальны, например, при фильтрации в сухую канаву, или когда отсутствует поверхность фильтрации, например, в задаче фильтрации из канав. Более того, для большого класса проблем последнего типа метод гидографов является совершенно ненужным (гл. VI, пп. 8 и 9). С другой стороны, в известных специальных случаях, например, при фильтрации воды через вертикальную перемычку, гидографы могут быть настолько просты, что модулярные функции вырождаются в элементарные функции, которые могут быть построены из наблюдений (см. работу R. Dachler „Grundwasserströmung“, 95, 1936).

Так как свободная поверхность должна быть в то же самое время линией тока системы,  $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$  дает величину суммарной скорости на поверхности. Умножая уравнение (4) на  $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ , получаем, следовательно, что

$$v^2 + u^2 + \bar{k}v = 0. \quad (5)$$

Это соответствует, очевидно, окружности, проходящей через начало координат в плоскости  $(u, v)$ , с радиусом  $\bar{k}/2$  и центром  $(0, -\bar{k}/2)$ .

г) Поверхности фильтрации. На поверхности фильтрации, через которую жидкость проходит и вступает в область, свободную от обеих сред, пористой и жидкой, давление будет сохранять постоянное значение. Поэтому для решения задачи следует приложить уравнение (4). Однако поскольку этот тип поверхности не является поверхностью линии тока, скорость вдоль нее дается следующим выражением:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial s} = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad (6)$$

так что

$$\bar{k} \sin \alpha + u \cos \alpha + v \sin \alpha = 0. \quad (7)$$

Отсюда, если поверхность является плоскостью, ее отображение в плоскости  $(u, v)$  будет представлять собой прямую линию, нормальную к поверхности и проходящую через точку  $(0, -\bar{k})$ , которая явится низшей точкой окружности уравнения (5), характеризующего свободную поверхность.

**4. Фильтрация через плотину с вертикальными фасадами. Аналитическая теория.** Теперь, когда мы знаем построение гидографа для данной динамической системы, мы готовы приступить к анализу практической проблемы. Возможно, что наиболее простой задачей, которая в одно и то же самое время содержит контурные отрезки, удовлетворяющие всем типам граничных условий, является фильтрация через вертикальную земляную плотину, длина которой сравнительно велика по отношению к ее толщине. Тогда задача аналогична двухразмерной системе.

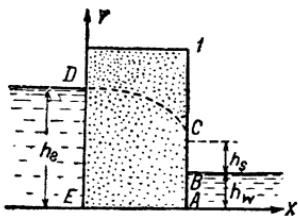
Допустим, что емкости со стороны верхнего и нижнего бьефа плотины настолько велики, что, несмотря на фильтрацию через плотину, вся система находится в состоянии гидростатического равновесия, за исключением внутренности плотины.

Чтобы построить гидограф системы в плоскости  $z$  (фиг. 98), сначала следует заметить, что так как область слева от  $DE$  находится в гидростатическом равновесии, отрезок  $DE$  имеет постоянный потенциал и отсюда образует прямой отрезок в плоскости  $(u, v)$  нормально к  $DE$ , т. е. параллельно оси  $u$ . Действительно, отрезок лежит на оси  $u$ , так как он должен пройти через начало координат плоскости [уравнение (2), гл. VI, п. 3];  $EA$  водонепроницаемая граница, вдоль которой  $v=0$ , так что она также отображается на ось  $u$ . Потенциал вдоль  $AB$  имеет постоянную величину с исчезающими малыми вертикальными скоростями и поэтому отображается в  $A'B'$  на плоскости  $(u, v)$ ;  $BC$  — поверх-

ность фильтрации, параллельная оси  $y$ . Отсюда она должна отобразиться в линию, параллельную оси  $u$ .

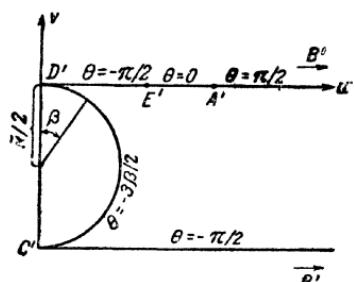
$$v = \bar{k} = -\frac{kyg}{\mu}.$$

Наконец, свободная поверхность  $CD$  завершает собой диаграмму в виде полуокружности, проходящей через  $D'$  и  $C'$ \*. Полный гидограф такой системы показан на фиг. 99. Одни только граничные условия не дают точно установленного положения гидографа свободной поверхности. Вместе с тем можно показать, что положение его (фиг. 99) вытекает из условия, что течение не имеет источников и стоков.



Фиг. 98. Схема фильтрации через плотину с вертикальными фасадами в плоскости  $z$ .

1 — плоскость  $z$ .



Фиг. 99. Плоскость гидографа фиг. 98.  
1 — плоскость гидографа ( $u$ ,  $v$ ).

Следует заметить, что пока задача в целом не будет решена, точная форма граничного отрезка  $DC$  в плоскости  $z$ , а отсюда и верхняя оконечность  $BC$ , в принципе неизвестны, хотя контуры системы в плоскости  $(u, v)$  являются вполне известными, за исключением численных значений абсцисс  $E'$  и  $A'$ . Следующий этап решения заключается в нахождении иной функции от  $(u, v)$ , действительное значение которой на граничных отрезках может быть заранее установлено.

Такая функция может быть получена следующим путем. Беря сначала потенциал комплексного числа

$$f(z) = \Phi + i\Psi, \quad (1)^1$$

где  $\Phi$  — потенциал скорости и  $\Psi$  — функция тока, получаем, что:

$$u - iv = -f'(z); \quad u + iv = -\overline{f'(z)}, \quad (2)$$

где жирная черта над  $[-f'(z)]$  указывает на комплексно сопряженные числа. Эта функция является исходной для промежуточных потенциалов  $\tau$ ,  $\theta$ , определяемых из выражения:

$$\tau + i\theta = -\ln [-f''(z)], \quad (3)$$

\* Непосредственное использование  $\Phi$  и  $\Psi$  для конформного отображения плоскости  $z$  на плоскость  $(u, v)$  является неудобным, так как неизвестно заранее ни значения, ни изменения  $\frac{d\Psi}{d\Phi} = -\frac{u}{k}$  на поверхности фильтрации  $BC$ .

где  $\theta$  может быть фактически установлена на контурах области в плоскости  $(u, v)$ . Так

$$-f''(z) = \frac{(-d/dt)f'(z)}{(dz/dt)} = \frac{\dot{u} - i\dot{v}}{u + iv} = \frac{be^{-i\chi}}{ne^{iv}}, \quad (4)$$

где  $n, b$  — абсолютные значения скорости и ускорения, а  $\chi, v$  — отклонения от их направлений (точки указывают дифференцирование по времени).

Отсюда

$$\tau = \ln \frac{n}{b}; \quad \theta = v + \chi. \quad (5)$$

Теперь граничные значения  $\theta$  можно установить следующим путем. Для водонепроницаемого основания  $EA$ :

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = 0; \quad -f''(z) = \frac{du - idv}{dx + idy} = \frac{du}{dx}.$$

Отсюда  $f''(z)$  действительна и

$$\theta_{EA} = 2m\pi = 0, \quad (6)$$

так как скорость и ускорение, очевидно, оба параллельны оси  $x$ -ов.

Для контура постоянного потенциала  $AB$ :

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = 0; \quad -f''(z) = \frac{du - idv}{dx + idy} = \frac{1}{i} \frac{du}{dy}.$$

Поскольку  $\frac{du}{dy} > 0$ , то  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2m'\pi$ , так как  $v = 0$  в направлении  $AB$ , — ( $\theta = \chi$ ). Тогда вектор ускорения вблизи  $AB$  будет направлен вверх, так как линии тока, когда они выходят из  $DE$ , являются выпуклыми и должны резать  $AB$  под прямым углом, так что  $\lambda > 0$ . Отсюда  $m' = 0$  и

$$\theta_{AB} = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Для поверхности фильтрации  $BC$ :

$$v = -\bar{k}; \quad -f''(z) = \frac{1}{i} \frac{du}{dy}.$$

В этом случае  $\frac{du}{dy} < 0$ , так что

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + 2m''\pi.$$

В точке  $B$   $v = 0$ , в  $C$   $v = -\frac{\pi}{2}$ . Отсюда, так как

$$|\theta - v| = |\chi| \leq 2\pi,$$

то единственными возможными значениями для  $m''$  будут  $(0, 1)$ . Если  $m'' = 1$ , то  $\chi$  будет равняться  $(\frac{3}{2})\pi$  в  $B$  и непосредственно над  $B$ , в то время как непосредственно ниже  $B$ , в  $AB$   $\chi = \pi/2$ . Отсюда вследствие непрерывности  $\chi$  внутри системы, вблизи  $B$ , будут точки, где  $\chi = \pi$ .

Однако с физической стороны это является необоснованным, так как будет создаваться запаздывание частиц жидкости, по мере того как они будут приближаться к поверхности стока. Отсюда вытекает, что  $m'' = 0$  и

$$\theta_{BC} = -\frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Вдоль свободной поверхности  $CD$ :

$$n^2 = u^2 + v^2 = -\bar{k}v,$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv} &= -\left[\frac{v+(\bar{k}/2)}{u}\right]; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}, \\ -f''(z) &= \frac{du-idv}{dx+idy} = \frac{2uv+\frac{\bar{k}u}{2}+i\left(u^2-v^2-\frac{\bar{k}v}{2}\right)}{\bar{k}v} \cdot \frac{dv}{dx}. \end{aligned}$$

Вводя полярный угол  $\beta$  (фиг. 99), можно выразить  $u$  и  $v$  следующими выражениями:

$$u = \bar{k} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}; \quad v = -\bar{k} \sin^2 \frac{\beta}{2}, \quad (9)$$

так что  $f''(z)$  принимает вид:

$$-f''(z) = -\frac{e^{3i\beta/2}}{2 \sin \beta/2} \frac{dv}{dx}. \quad (10)$$

Отсюда

$$\theta = -\frac{3\beta}{2} + 2m''\pi,$$

так как  $\frac{dv}{dx} < 0$ . Поскольку  $\beta = 0$ ,  $v = 0$  и  $\chi = 0$  в  $D$ , следует, что  $m''' = 0$  или

$$\theta_{CD} = -\frac{3\beta}{2}. \quad (11)$$

Наконец, вдоль поверхности постоянного потенциала  $DE$ :

$$v = 0, \quad u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad -f''(z) = \frac{1}{i} \frac{du}{dy}.$$

В данном случае  $\frac{du}{dy} < 0$ , так что

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + 2m^{IV}\pi.$$

Вдоль  $DE$   $v = 0$ , и частицы получают ускорение, направленное вниз; отсюда  $\chi = -\pi/2$  и  $m^{IV} = 0$ , или

$$\theta_{DE} = -\frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

Теперь, когда граничные значения  $\theta$  установлены, можно перейти к отображению гидографа в плоскости  $(u, v)$  на бесконечную полуплос-

кость. Однако сначала явится удобным преобразовать годограф плоскости  $(u, v)$  в более обычную форму (фиг. 100), полученную отражением годографа на ось  $u$ , последующим умножением на  $1/\bar{k}$ , чтобы сделать длину  $D'C'$  единицей, затем положительным поворотом на  $90^\circ$  и, наконец, переводом в обычные единицы. Преобразованная плоскость  $q$  определяется следующей переменной:

$$q = \frac{i}{k} (u - iv) + 1 = 1 + \frac{v}{k} + \frac{iu}{k}. \quad (13)$$

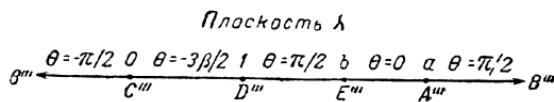
Область  $B''C''D''E''A''B''$  в плоскости  $q$  может быть теперь конформно отображена в верхнюю полуплоскость  $\lambda$  с помощью модулярной эллиптической функции<sup>1</sup>  $\lambda(q)$ . При этом функция выражена так, что

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= 0; \quad \lambda(1) = 1; \quad \lambda(i\infty) = -\infty; \\ \lambda(1+i\infty) &= +\infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Очевидно, значения граничных констант  $\theta$  сохранятся и в плоскости  $\lambda$ . Угол  $\beta$  для отрезка  $0 \leq \lambda \leq 1$  будет также сохранен; соответствие  $\lambda - \beta$  дается выражением:

$$\lambda = \lambda [1/2 (1 + e^{i\beta})].$$

Отображение плоскости  $\lambda$  показано на фиг. 101.



Фиг. 100. Отображение фиг. 99 на плоскость  $q$ .

1 — плоскость  $q$ .

Фиг. 101. Отображение фиг. 100 на плоскость  $\lambda$ .

Поскольку  $\theta$  известна на действительной оси плоскости  $\lambda$ , комплексная функция  $\theta - it$  может быть выражена во всей верхней полу-плоскости  $\lambda$  через обобщенный интеграл Пуассона как

$$\theta - i\tau = -i\tau_0 + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{0(\varepsilon)(\lambda\varepsilon + 1)}{(\varepsilon - \lambda)(1 + \varepsilon^2)} d\varepsilon, \quad (15)^2$$

где  $\tau_0$  — произвольная константа.

<sup>1</sup> Анализ, в котором даются необходимые формулы, относящиеся к модулярной эллиптической функции, можно найти в книге Г. А. Шварца (H. A. Schwarz, „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen“). Выводы, которые необходимы для данного анализа, приводятся в приложении.

<sup>2</sup> См. приложение.

Если теперь обозначить значения  $\lambda$ , соответствующие  $E'''$  и  $A'''$ , через  $b$  и  $a$ , уравнение (15) при подстановке в него граничных значений  $\theta$  принимает вид:

$$\theta - ir = -i\tau_0 + \frac{1}{\pi i} \left[ \frac{-3}{2} \int_0^1 \frac{\beta(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - \lambda} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \ln \frac{\lambda - 1}{(a - \lambda)(\lambda - b)} \right], \quad (16)$$

где  $\tau_0$  содержит известные константы. Возвращаясь к определениям  $\theta, \tau$  из уравнений (4) и (5), имеем в результате

$$-f''(z) = \sqrt{\frac{(\lambda - b)(a - \lambda)\lambda}{\lambda - 1}} e^{-\tau_0 + \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \frac{\beta(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - \lambda}} \quad (17)$$

Так как  $\lambda = \lambda(q)$  является известной функцией  $u - iv = -f'(z)$ , следует, что  $f''(z) = F[f'(z)]$  и

$$z = - \int \frac{d(u - iv)}{F(u - iv)} = \int e^{\tau + i\theta} d(u - iv) = \\ = C \int \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda(a - \lambda)(\lambda - b)}} e^{-\frac{3}{2\pi} \int_0^1 \frac{\beta(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - \lambda}} d(u - iv), \quad (18)$$

где  $C = e^{\tau_0}$ .

Знак радикала для действительного  $\lambda$  тот же самый, что и для  $e^{-i\theta}$ . В принципе задача решена, так как на основании уравнения (18)  $z$ дается как функция  $(u - iv)$ , а отсюда даются компоненты скорости как функции  $z$ .

**5. Численные приложения.** Физическое содержание аналитического решения, заключенного в уравнении (18), гл. VI, п. 4, может быть дано, как это соответствует смыслу констант  $a$  и  $b$ , оценкой геометрических размеров течения, установлением формы свободной поверхности, подсчетом распределения скорости вдоль границ, расчетом расхода через систему и конформным отображением распределения потенциала и линий тока в системе. Легко заметить, что приводимые ниже уравнения являются теми особыми выражениями, в которых даются эти выводы, учитывающие значения  $\theta$ , указанные на фиг. 101 и принимающие константу  $C$  за единицу.

а) Распределение скорости  $[x = x(u)]$  вдоль  $EA$ , длина последней  $L$  и распределение напора жидкости  $h(x)$ :

$$x(EA) = \int_{u(E)}^u e^\tau du; \quad L = \int_{u(E)}^{u(A)} e^\tau du, \quad (1)$$

$$h(x) = h_e - \int_0^x \left( \frac{u}{k} \right) dx = h_e - \frac{1}{k} \int_{u(E)}^u ue^\tau du. \quad (2)$$

б) Распределение скорости  $[y_w = y_w(u)]$  вдоль фронта стока  $AB$  и высота жидкости на стоке  $h_w$ :

$$y_w = \int_{u(A)}^u e^\tau du; \quad h_w = \int_{u(A)}^\infty e^\tau du. \quad (3)$$

в) Распределение скорости  $[y_s = y_s(u)]$  вдоль поверхности фильтрации  $BC$  и длина  $BC - h_s$ :

$$y_s = - \int_{u(B)}^u e^\tau du; \quad h_s = - \int_{\infty}^0 e^\tau du. \quad (4)$$

г) Геометрическая форма и распределение скорости.

$$[x = x(u, v); \quad y = y(u, v)],$$

вдоль свободной поверхности  $CD$ :

$$\begin{aligned} z - z_c &= x - L + i(y - h_w - h_s) = \int e^{\tau - \frac{3i\beta}{2}} d(u - iv) = \\ &= \frac{\bar{k}}{2} \int_{\pi}^{\beta} e^{\tau - \frac{i\beta}{2}} d\beta. \end{aligned} \quad (5)$$

д) Распределение скорости  $[y_e = y_e(u)]$  вдоль поверхности поглощения и высота  $h_e$  поглощаемой жидкости:

$$y_e = - \int_{u(E)}^u e^\tau du; \quad h_e = - \int_{u(E)}^0 e^\tau du. \quad (6)$$

Соответствующий контроль между расчетом  $h_e$  и  $h_w$  на основании уравнения (2) дается следующим соотношением:

$$h_e - h_w = \int_0^L \left( \frac{u}{k} \right) dx = \frac{1}{k} \int_{u(E)}^{u(A)} ue^\tau du. \quad (7)$$

е) Суммарный расход  $Q$  через систему:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \int_0^{h_e} u dy_e = - \int_{u(E)}^0 ue^\tau du = \\ &= \int_0^{h_w} u dy_w + \int_0^{h_e} u dy_s = \int_{u(A)}^\infty ue^\tau du - \int_{\infty}^0 ue^\tau du \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ж) Чтобы найти распределение потенциала и линии тока аналитическим путем внутри системы, потребовалось бы выразить уравнение (18), гл. VI, п. 4, в числах сначала для получения распределения внутренней скорости, а затем путем интегрирования для нахождения  $\Phi(x, y)$ . После того как будут определены форма свободной поверх-

ности на основании уравнения (5) и значения  $\Phi$  вдоль  $EA$  по уравнению (2), явилось бы более скрым и удобным методом нахождение  $B(x, y)$  численным или графическим путем, приведенным в гл. IV, п. 17. Если имеется электрическая модель, то изображение эквипотенциальных линий может быть быстро получено на модели после того, как будут сделаны необходимые уточнения граничных условий, как это описано в гл. IV, п. 17<sup>1</sup>.

Чтобы понять все значение приближений, которые делались в более ранних теориях гравитационного течения и которые будут рассмотрены несколько ниже, весьма важно получить ясную физическую картину всех существенных свойств течения. Наиболее важной особенностью полученного решения с гидродинамической точки зрения является зависимость между суммарным расходом  $Q$  через плотину и напорами жидкости, который поглощается и отдается плотиной, т. е.  $h_e$  и  $h_w$ <sup>2</sup>. Поэтому мы разовьем главным образом эту часть решения и дадим несколько другие выводы, как они получаются косвенным путем при расчете  $Q$ .

Чтобы получить необходимые численные результаты, необходимо установить во всех случаях значение интегрируемых количеств в уравнениях (1) — (8):

$$\begin{aligned} e^{\tau} &= \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda(a - \lambda)(\lambda - b)}} e^{-\frac{3}{2\pi} \int_0^1 \frac{\beta(e)}{e - \lambda} de} = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda(a - \lambda)(\lambda - b)}} e^a. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом необходимо сначала отметить, что модулярная эллиптическая функция  $\lambda(q)$  была определена здесь уравнением (14), гл. VI, п. 4. Ее свойства определяются свойствами функции  $k^{*2} = \theta(q)^3$ , определяемой условиями:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 1; \quad \theta(1) = \infty; \quad \theta(i\infty) = 0; \\ \theta(1+i\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Сравнивая эти условия с уравнением (14), гл. VI, п. 4, видно, что:

$$\lambda(q) = 1 - \frac{1}{\theta(q)} = 1 - \frac{1}{k^{*2}}. \quad (11)$$

<sup>1</sup> Некоторые распределения потенциала, получаемые на таких моделях, будут представлены в гл. VI, п. 6.

<sup>2</sup> Следует заметить, что со строго инженерной точки зрения эрозия поверхности стока и ее влияние на устойчивость плотины имеют гораздо большее значение. Для изучения этой части проблемы следует сосредоточить свое внимание на точке выхода свободной поверхности и распределении скорости вдоль фронта стока. Однако рассмотрение этих вопросов находится вне рамок настоящей работы, и читатель, который заинтересован в этом, должен обратиться к таким работам, как „Erdbaumechanik“, K. Terzaghi, или вышедшая недавно работа A. Casagrande, J. Boston Soc. Civil Eng., 23, 13, 1936.

<sup>3</sup> Здесь модуль эллиптического интеграла снова обозначен условно  $k^*$ , чтобы не смешивать с обозначением  $k$  — коэффициента проницаемости.

Отсюда применяем формулу, взятую из приложения III к настоящей книге,

$$\lambda(q) = \theta\left(1 - \frac{1}{q}\right), \quad (12)$$

которая теперь может быть развернута на основании правил, уже установленных для функции  $\theta$ . Эта зависимость устанавливается связью между переменной  $\lambda$ , заключенной в интегрируемом количестве  $e^{\xi}$  уравнения (18), гл. VI, п. 4, и переменной интегрирования  $(u - iv) = -ki(q - 1)$ , а также позволяет изменять переменную интегрирования от  $u - iv$  до  $\lambda$ .

В конечном итоге следует раскрыть интеграл

$$\alpha(\lambda) = -\frac{3}{2\pi} \int_0^1 \frac{\beta(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon - \lambda}. \quad (13)$$

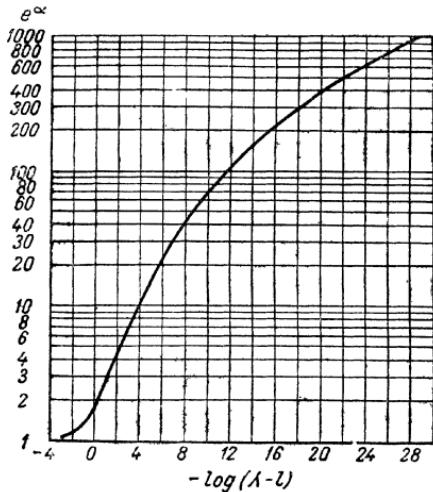
Это можно сделать, заметив, что переменная  $\varepsilon$  в уравнении (15), гл. VI, п. 4, фактически представляет действительную ось плоскости  $\lambda$ , на которой реализовано конформное отображение плоскости  $q$  из фиг. 100, помочью функции  $\lambda(q)$ . Тогда

$$\varepsilon = \lambda(q) = \lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{e^{i\beta}}{2}\right) = \theta\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \theta\left(i \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right) = k^{*2}, \quad (14)$$

откуда  $\beta$  может быть подсчитана как функция  $\varepsilon$ . Результат вычислений, выполненных на основании этого соотношения, приведен на фиг. 102<sup>1</sup> и может быть использован для того, чтобы выразить в числах  $e^{\xi}$  из уравнения (9) для всех значений  $a$  или  $b$ .

$e^{\alpha}$  известно как функция  $\lambda$ . Тогда  $e^{\xi}$  можно рассчитать по уравнению (9) после выбора  $a$  и  $b$ . Связь между переменной  $\lambda$  и  $q$  или  $\varepsilon$  в уравнениях (1)–(8) устанавливается с помощью формулы инверсии, утверждающей, что если

$$\lambda(q) = \theta(\xi) = k^{*2},$$



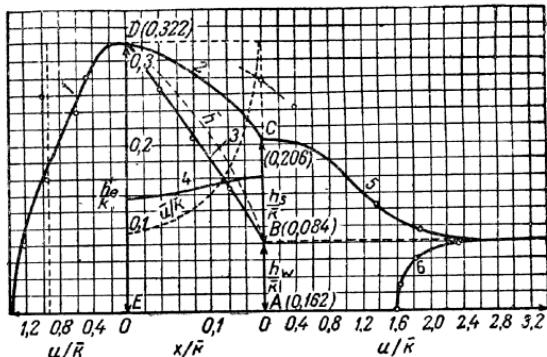
Фиг. 102. Кривая  $\alpha(\lambda)$ , определяемая согласно уравнению (13), гл. VI, п. 5.

<sup>1</sup> Автор выражает свою признательность д-ру Г. Гамелю за присылку ему до публикации этой книги числовых выкладок М. Гюнтера, в которых даны значения  $e^{\alpha}$  для  $0,01 \leq \lambda \leq 20$  и  $-20 \leq \lambda \leq 0$ . Что же касается распространения этих выводов для  $\lambda < 0,01$  и  $|\lambda| > 20$ , так же как и рассуждение о пяти случаях числовых выкладок, помимо сделанных Гюнтером ( $b=5$ ;  $a=10$ ), см. у Маскета (M. Muskat, цит.). Подсчеты Гюнтера были опубликованы затем в Zeits. angew. Math. u. Mech., 15, 255, 1935.

то

$$\pi i \xi = -\pi \frac{K'}{K} = G(k^{*2}) = \ln \frac{k^{*2}}{16} + \frac{k^{*2}}{2} + \frac{13k^{*4}}{64} + \frac{23k^{*6}}{192} + \dots, \quad (15)$$

где  $K'$  и  $K$  — полные эллиптические интегралы первого рода с модулем  $\sqrt{1-k^{*2}}$  и  $k^*$ . Они перечислены независимо, а также в отношении  $K'/K$ , как функция  $k^*$  в работе K. Hayashi, „Tafeln der Besselschen, Theta, Kugel- und andere Functionen“.



Фиг. 103. Распределение скорости по фасам и основанию плотины для случая I (табл. 11).

$h_e$ ,  $h_w$ ,  $h_s$  — напор поглощения, напор на стоке и длина поверхности фильтрации;  $\bar{h}$ ,  $u$  — скорости на свободной поверхности и основании плотины, согласно теории Дюпюи и Форхгеймера. Кружочками нанесены значения, вычисленные согласно теории гл. VI, п. 20.

1 — скорость вдоль поверхности поглощения ( $ED$ ); 2 — свободная поверхность; 3 — давление вдоль  $EA$ ; 4 — скорость вдоль  $EA$ ; 5 — горизонтальная скорость вдоль поверхности фильтрации ( $BC$ ); 6 — скорость вдоль поверхности стока ( $AB$ ).

Окончательные интегрирования могут быть исполнены графическим путем в отношении переменной  $u$  для конечного значения  $u$ , а также аналитическим приближением в значении  $\lambda$  для бесконечности и близкому к особому значению  $\lambda$  ( $a$ ,  $b$ ).

На фиг. 103 дано распределение скорости вдоль фронта поглощения и стока, так же как и распределение напора жидкости вдоль основания плотины, соответствующее случаю, когда  $a=10$ ,  $b=E$ . Размеры для этого случая были рассчитаны Гюнтером, длины  $EA$  и  $DE$  были найдены, как это дается уравнением (5), из конечности  $D$  свободной поверхности по отношению к  $C$ .

Табл. 11 дает числовые результаты для пяти других случаев, включая сюда значения наиболее важных размеров системы, правильные расходы  $Q/\bar{k}^2$ , а также рассчитанные на основании уравнения

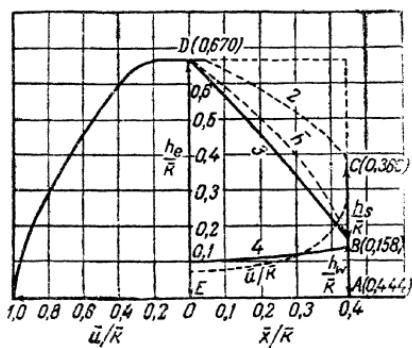
$$\bar{Q} = \bar{k} \frac{(h_e^2 - h_w^2)}{2L}, \quad (16)$$

что может быть получено различными приближенными методами обработки этой проблемы (гл. VI, пп. 17 и 20). Рассчитанное распределение давления и скорости для случаев II, III и VI (табл. 11) показаны на фиг. 104—106. Свободные поверхности для этих случаев были нанесены на графике без предварительного расчета, следуя общей характеристике, указанной расчетом для случая I, и отрегулированные так, что они проходят через точки  $C$ , ( $h_s + h_w$ ), даваемые расчетом.

Кривые  $\bar{h}$  представляют собой свободные поверхности, которые получаются на основании теории Дюпюи-Форхгеймера (гл. VI, п. 17), т. е. согласно уравнению

$$\bar{h}^2 = -(h_e^2 - h_w^2) \frac{x}{L} + h_e^2, \quad (17)$$

а скорости  $\bar{u}/\bar{k}$  соответствуют  $\bar{h}$ , основанному на допущении Дюпюи, что горизонтальные скорости пропорциональны гидравлическому градиенту свободной поверхности.



Фиг. 104. Распределение скорости по фасам и основанию плотины для случая II (табл. 11).

1 — скорость вдоль поверхности поглощения (ED); 2 — свободная поверхность; 3 — давление вдоль EA; 4 — скорость вдоль EA.

Таблица 11

Случай	I	II	III	IV	V	VI
$b^*$	5	2	10	5	2	1,2
$a$	10	5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$h_e/\bar{k}^{**}$	0,322	0,670	0,672	0,872	1,286	1,823
$h_w/\bar{k}$	0,084	0,158	0	0	0	0
$h_s/\bar{k}$	0,122	0,202	0,430	0,519	0,646	0,719
$L/\bar{k}$	0,162	0,444	0,329	0,484	0,906	1,692
$Q/\bar{k}^2$	0,299	0,480	0,687	0,783	0,913	0,983
$\bar{Q}/\bar{k}^2$	0,298	0,477	0,686	0,786	0,913	0,982

\* Можно заметить, что случай  $b=1$  соответствует фильтрации из пласта песчаника или плотины бесконечной мощности, т. е.  $L=\infty$ .

\*\* Следует запомнить, что количества  $h_e$ ,  $h_w$ ,  $h_s$ ,  $L$  и  $Q$  могут быть умножены на постоянную величину и все же соответствовать тем же самым параметрам  $a$  и  $b$ , так как константа  $C$  уравнения (18), гл. VI, п. 4, которая была принята за единицу, может быть выбрана совершенно произвольно. Выражение длин  $h_e - L$  по отношению к  $k$  берет свое основание из того обстоятельства, что табличные значения отношения  $K'/K$  (уравнение 15), которое применяется как переменная интегрирования в уравнениях (1) — (8), соответствует скорее  $u/k$ , чем самой величине  $u$ .

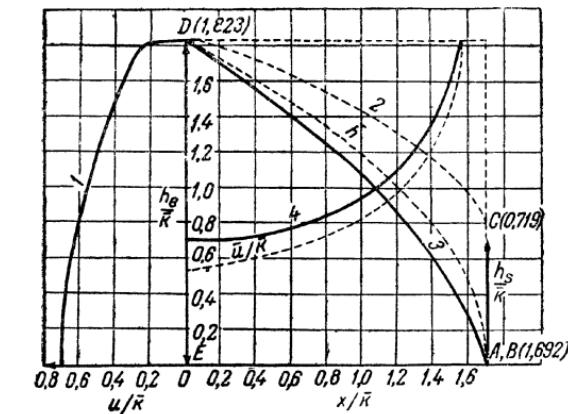
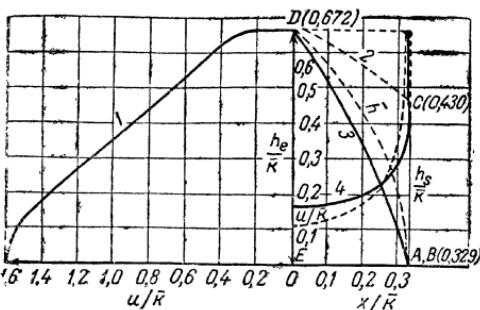
С практической точки зрения наиболее интересным выводом из этих выкладок является тот факт, что уравнение (16) очень близко воспроизводит правильные значения расходов  $Q^1$ .

Поэтому для практических целей достаточно подсчитать расход на основании простой формулы (16) и избежать, таким образом, утомительных выкладок, которых требует точная теория. Однако успешное использование уравнения (16) не следует рассматривать как оправдание тем приближениям, к которым приводят допущения, сделанные при выводе этого уравнения. Действительно, как это будет видно из гл. VI,

Фиг. 105. Распределение скорости по фасам и основанию плотины для случая III (табл. 11).

1 — скорость вдоль поверхности поглощения ( $ED$ );  
2 — свободная поверхность; 3 — давление вдоль  $EA$ ; 4 — скорость вдоль  $EA$ .

п. 17, теория Дююи-Форхгеймера, которая также приводит к уравнению (16), базируется на таких допущениях, что даже его прибли-



Фиг. 106. Распределение скорости по фасам и основанию плотины для случая VI (табл. 11).

1 — скорость вдоль поверхности поглощения ( $ED$ ); 2 — свободная поверхность; 3 — давление вдоль  $EA$ ; 4 — скорость вдоль  $EA$ .

зительная справедливость не может быть заранее оправдана, и ее совпадение с уравнением (16) следует рассматривать как совершенную

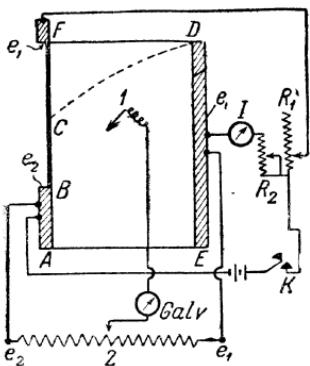
<sup>1</sup> Действительно, разница между  $\bar{Q}$  и  $Q$  вряд ли будет более, чем несоответствие в величине последней, получающееся из-за ошибки, неминуемой при графическом раскрытии интегралов уравнения (8).

случайность. Как уже было замечено, эта теория предусматривает, что действительная свободная поверхность внутри плотин должна следовать уравнению (17) или кривым  $\bar{h}$  на фиг. 103—106. Однако даже для случаев I и II (табл. 11), где напоры жидкости  $h_w$  представлены величинами, не равными нулю, несоответствия между правильной формой свободной поверхности и кривыми  $\bar{h}$  настолько велики, что единственным сходством, на что можно согласиться, является однообразный характер падения обоих семейств кривых по мере приближения к поверхностям стока. Эти кривые, отмеченные буквой  $\bar{h}$ , представляют собой интерес не только потому, что они показывают ошибочность теории Дюпюи-Форхгеймера, предугадывающей формы свободной поверхности при гравитационном течении, но, кроме того, они еще предупреждают об осторожности, которую необходимо соблюдать, экстраполируя выводы, полученные аналитическим или эмпирическим путем для систем с одной геометрией, в случае их использования для другой геометрии. Установлено, что аналог уравнения (17) для радиального гравитационного течения воспроизводит довольно точно фактическое давление или распределение напора жидкости в основании радиальных песчаных моделей (гл. VI, п. 18). Он дает, однако, только грубое приближение к правильному распределению напора жидкости при линейной гравитационной фильтрации через плотину.

Это несоответствие становится еще более отчетливым, когда сравнивается действительное распределение скорости вдоль основания линейных систем со значениями ее, соответствующими уравнению (17) и обозначенными кривыми  $\bar{u}/\bar{k}$ , которые допускают, что это уравнение воспроизводит непосредственное распределение напора жидкости в основании сооружения или, как это дается теорией Дюпюи-Форхгеймера, свободную поверхность, уклон которой пропорционален горизонтальной скорости. Эта несопоставимость весьма заметна на фиг. 103 и 104, где  $h_w \neq 0$ . Вместе с тем отношение  $\bar{u}/\bar{k}$  к точной величине скорости становится бесконечно большим, так как поверхность стока приближается к основанию сооружения для  $h_w = 0$  по мере того, как последнее становится логарифмически бесконечным;  $\bar{u}/\bar{k}$  принимает бесконечное значение, как  $1/\sqrt{x}$  для  $x \rightarrow 0$ , где  $x$  — расстояние от точки A (фиг. 98). Несмотря на ошибочные стороны остальных характерных особенностей теории Дюпюи-Форхгеймера, стремящейся воспроизвести даже приблизительно внутренний режим линейного гравитационного течения, остается важным обстоятельством тот факт, что результирующий расход дается простой формулой (16) с достаточной для практических целей точностью, как это было первоначально выведено на основе теории Дюпюи-Форхгеймера. Эта парадоксальная ситуация по отношению к уравнению (16) будет освещена в гл. VI, п. 20, где будет показано, что (16) может быть получено из физически обоснованной приближенной теории. Последняя в то же самое время дает приближение к величине точного распределения давления. Именно та теория, которая будет приведена ниже, определяет собой физическое значение уравнения (16), но не теория Дюпюи-Форхгеймера, на основании которой был получен вывод уравнения (16) и который следует рассматривать только как совпадение.

**6. Изучение гравитационного течения с помощью электрических моделей.** Как уже было показано в гл. IV, п. 17, для течения жидкости отсутствует непосредственный электрический аналог гравитационного эффекта. В целом это обстоятельство не нарушает тождественности между электрическими моделями и негравитационным течением той же самой геометрической формы, включающими в себя вертикальные скорости, если только граничные условия для последних выражены в значениях потенциала скорости. Однако электрические модели гравитационного течения конструируются не так легко. Отсутствие априорного знания формы свободной поверхности оставляет соответствующую границу электрической модели не установленной. Так как электрический ток нельзя подвергнуть воздействию такой постоянной внешней массовой силы, как сила тяжести, он пересечет в итоге всякий проводник, в котором протекает, и граничные линии тока будут всегда совпадать с физическими контурами модели.

Поэтому свободная поверхность в электрической модели должна быть искусственно введена в систему изменением физических контуров проводящей модели. Хотя ее точная форма заранее не известна, само определение поверхности налагает условие, что потенциал вдоль нее должен изменяться линейно с изменением координаты, соответствующей вертикальной координате течения жидкости. Отсюда если только геометрическая форма свободной



Фиг. 107. Электрическая схема тока для экспериментов на модели гравитационного течения:

1 — зонд потенциала; 2 — делитель потенциала.

поверхности на модели будет вырезана опытным путем так, что выполнится это условие, а также будут удовлетворены остальные граничные условия, то внутреннее распределение потенциала и линий тока будет совершенно таким же, как если бы свободная поверхность развились автоматически в результате воздействия реальной массовой силы, например, силы тяжести. Схема распределения электрического тока в моделях, сконструированных<sup>1</sup> для изучения фильтрации воды через плотину с вертикальными ребрами, показана на фиг. 107, где AEDF представляет собой пластину высокого сопротивления, тождественную проницаемому сечению плотины.

<sup>1</sup> R. D. Wuskoff and D. W. Reed, Physics, 6, 395, 1935. Фиг. 108—111 также взяты из этой работы, которая содержит полностью все детали техники эксперимента, применявшийся в этих электрических моделях. Более раннее изучение гравитационного течения, основанное на электрической аналогии, было сделано C. G. Vreedenburgh and O. Stevens (De Ingenieur, 48, 187, 1933), которые применили для этой цели электролитические модели. Однако эти авторы должны были принять, что формы свободной поверхности заранее очертаны предварительными экспериментами на песчаных моделях. Более того, изменения потенциала вдоль поверхности фильтрации были приняты в расчет ими только приблизительно.

Высокое сопротивление необходимо для уменьшения потери тока через пластину, а отсюда и пертурбации линейного распределения потенциала вдоль  $BF$ , которая представляет часть поверхности стока над уровнем вытекающей жидкости. Более того, пластина должна быть изготовлена из такого материала, который можно легко вырезать с целью найти свободную поверхность  $DC$ . Эти оба требования удовлетворяются изготовлением пластины из листа плотного бристольского картона, политого 12—20 раз графитовой коллоидной жидкостью, например „аквадагом“. Однородность покрытия испытывают совершенно свободно электрическим путем, начертив распределение потенциала между двумя параллельными электродами с постоянным потенциалом и равной длиной, расположеннымми вдоль противоположных краев первоначально прямоугольного листа картона. Соответствующие граничные условия устанавливаются следующим путем. Поверхность поглощения с постоянным потенциаломдается высокопроводимым электродом  $ED$ , на котором поддерживается потенциал  $e_1$ , а поверхность стока с постоянным потенциалом—электродом  $AB$  при потенциале  $e_2$ . Отношение  $AB/ED$  равно  $h_w/h_e$ . Отношение  $AE/ED$  имеет значение  $L/h_e$ . Полоска сопротивления кладется вдоль остальной части  $BCF$  на поверхности стока. На оконечностях поддерживаются потенциалы  $e_2$  и  $e_1$ .

Так как сопротивление полоски вдоль  $BCF$  гораздо меньше, чем у листа  $AED$ , ток в первой намного превосходит значение его в последнем.

В результате этого изменение потенциала вдоль  $BF$  остается близко к линейному, соответствующа, таким образом, постоянному давлению поверх  $AB$ . Конечный этап в создании модели заключается в вырезывании левого верхнего угла  $DFC$  таким образом, что потенциал в любой точке вдоль  $DC$  будет изменяться линейно с расстоянием этой точки поверх  $AE$ .

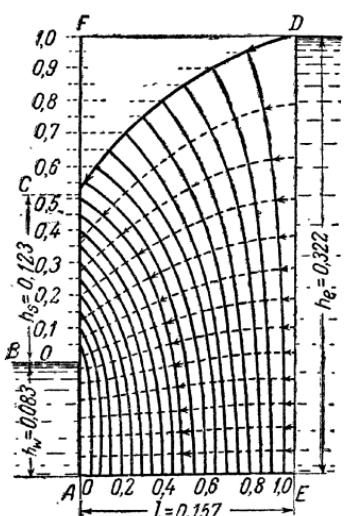
Это достигается лучше всего регулированием формы  $CD$  так, чтобы оконечности одинаково расположенных эквипотенциальных линий на  $CD$  имели проекции на  $CF$ , расположенные на равном расстоянии. Укол, сделанный сравнительно острой иглой, дает удовлетворительную пробу потенциала. Поскольку форма  $CD$  была установлена, распределение потенциала может быть начертано внутри контура  $ABCDE$  совершенно так же, как и в любой другой электрической модели. Линии тока можно построить как линии, ортогональные эквипотенциальным кривым. Можно определить также расход тока в системе измерением его через счетчик с делителем потенциала в разомкнутой цепи. Если величина тока составляет  $I$  для падения потенциала  $e_2 - e_1$  и если удельное сопротивление пластины  $\sigma$ , то расход в соответствующей плотине с проницаемостью  $k$  будет:

$$Q = \frac{k\gamma g (h_e - h_w)}{\mu} \frac{\sigma I}{e_1 - e_2}. \quad (1)$$

На фиг. 108—111 показано распределение потенциала и линий тока, полученное указанным методом на электрических моделях плотин с вертикальными и наклонными фасами. Фиг. 108 воспроизводит плотину, относительные размеры которой для  $AB$ ,  $AE$  и  $ED$  соответствуют величинам того случая, который был аналитически обработан в гл. VI,

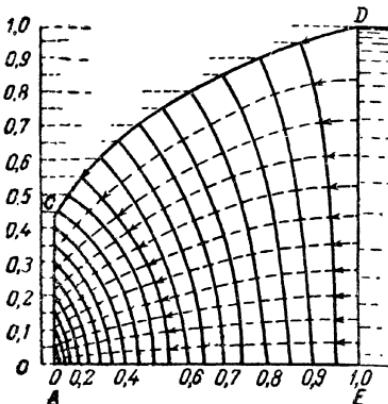
п. 5, и дает хорошее подтверждение применимости электрической модели для решения этих проблем, так как геометрическая форма свободной поверхности и высота  $BC$  превосходно согласуются со значениями, подсчитанными в гл. VI, п. 5 (фиг. 103).

Более того, распределение скорости вдоль  $ED$  и  $AC$ , а также распределение

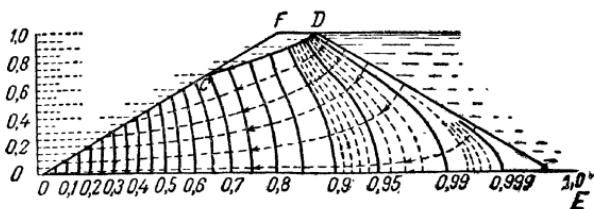


Фиг. 108. Распределение потенциала и линии тока в плотине с вертикальными фасадами, соответствующее случаю, изображеному на фиг. 103, и полученное из экспериментов с электрическими моделями (по Вайкову и Риду).

ние потенциала вдоль  $EA$ , которые приводятся на фиг. 108, близко совпадают с соответствующими величинами на фиг. 103.



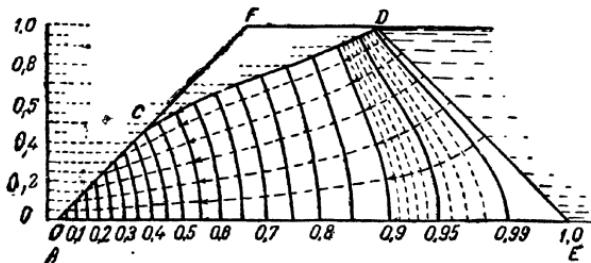
Фиг. 109. Распределение потенциала и линии тока в плотине с вертикальными фасадами и нулевым уровнем жидкости на стоке, полученное из экспериментов на электрических моделях (по Вайкову и Риду).



Фиг. 110. Распределение потенциала и линии тока в плотине с фасадами, имеющими наклон  $30^\circ$ , полученное из экспериментов на электрических моделях (по Вайкову и Риду).

Фиг. 109 дает распределение потенциала и линии тока для плотины с вертикальными фасадами и исчезающе малым уровнем вытекающей жидкости. Размеры приблизительно пропорциональны соответствующим величинам случая VI (табл. 11), (гл. VI, п. 5). Распределение потен-

циала и линий тока для плотин с ребрами, наклоненными под углами 30 и 45°, показано на фиг. 110 и 111. Следует заметить низкие градиенты в пяте  $E$ , а также перегибы свободной поверхности. В то время как теоретически предсказанные нулевые значения скорости в  $E$  оказались (гл. VI, п. 1), таким образом, подтвержденными бесконечно большие скорости, которые следует ожидать в носке плотины  $A$ , должны, очевидно, густо концентрироваться вблизи  $A$ , так как даже последняя из эквипотенциальных линий, начерченных на фиг. 110 и 111, не дает практически никакого намека на достижение бесконечно больших скоростей в  $A$ .



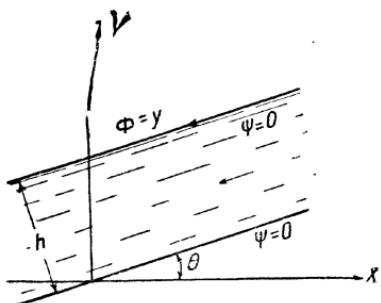
Фиг. 111. Распределение потенциала и линии тока в плотине с фасадами, имеющими наклон 45°, полученное из экспериментов на электрических моделях (по Вайкову и Риду).

Следует заметить, что приведенные здесь примеры приложения метода электромоделирования для изучения гравитационного течения включают в себя достаточно идеализированные проблемы фильтрации воды через плотины. Однако этот метод практически неограничен в своих рамках. Нельзя только создать моделей, имитирующих плотины с центральной водонепроницаемой сердцевиной, но двухразмерные системы, содержащие участки различной проницаемости, могут прекрасно обрабатываться по этой методике. Водонепроницаемые участки могут имитироваться вырезыванием из проводника пластины фигур, геометрически подобных водонепроницаемым участкам. Влияние же изменения проницаемости можно изучать, изменения число покрытий графитом, нанесенных на различных частях модели.

**7. Соответствие некоторых точных решений уравнения Лапласа для гравитационного течения.** Методы Гопфа, Трефтца и Гамеля, непосредственно направленные на изучение проблем гравитационного течения, приводят к решениям для систем с заранее установленной геометрией. Однако трудность выполнения полного необходимого анализа до самого конца является серьезным ограничением их общего применения к различным частным задачам<sup>1</sup>. Поэтому некоторым оправданием

<sup>1</sup> Следует заметить, что трудности реализации конформного отображения плоскости гидографа зависят всецело от аналитического метода. Поэтому с практической точки зрения можно получить существенные характеристики стороны решения, делая преобразование графическим путем (F. Weinig and A. Shields, Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 31, 233, 1937).

явится, если рассматривать не только приближенные методы математической обработки поставленных задач, но вначале даже более примитивные способы построения типового распределения потенциала, а затем уже оценивать, соответствуют ли они системам, имеющим практический интерес. Последняя процедура обладает тем достоинством, что она, по крайней мере, обеспечивает точное решение проблемы потенциала, если даже геометрия соответствующей физической системы не идентична с рассматриваемой. Поэтому вначале будут показаны типовые примеры таких решений<sup>1</sup>. Так как приводимые здесь решения будут все представлены сопряженными функциями, получающимися в результате выделения из комплексной переменной функции ее действительной и мнимой части, то по необходимости эти решения будут относиться к двухмерным системам (гл. IV, п. 8).



Фиг. 112. Плоское линейное течение под действием силы тяжести.

тот, где рассматривается течение в бесконечно распространяющемся наклонном слое, не нарушенном источниками или стоками<sup>2</sup>. Согласно обозначениям на фиг. 112 соответственная зависимость выразится:

$$\omega = \Phi + i\Psi = z \sin \theta e^{-i\theta} + h \cos \theta, \quad (1)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= (x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \theta + h \cos \theta \\ \Psi &= (-x \sin \theta + y \cos \theta) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Тогда очевидно, линия тока

$$\Psi = 0; y = x \operatorname{tg} \theta \quad (3)$$

представит собой водонепроницаемое ложе и выражение

$$\Psi = Q = h \sin \theta; y = x \operatorname{tg} \theta + h \sec \theta \quad (4)$$

— верхнюю поверхность. Это есть выражение для свободной поверхности, которая получается из подстановки уравнения (4) в (2), что дает, как и следует ожидать,

$$\Phi = y. \quad (5)$$

<sup>1</sup> Решения, приведенные здесь, взяты из работы J. Kozenu in *Wasserwirtschaft und Wasserwirtschaft*, 26, 28, 1931; см. также В. В. Ведерников, там же, 29, 128, 1934.

<sup>2</sup> Это положение уже применялось при обработке задачи Гопфа и Трефта (уравнение (2), гл. VI п. 2].

**б) Параболическая свободная поверхность.** Полагая

$$x + iy = z = \frac{1}{2Q} \omega^2 \quad (6)$$

и выделяя действительную и мнимые части, получаем:

$$x = \frac{1}{2Q} (\Phi^2 - \Psi^2); \quad y = \frac{\Phi\Psi}{Q}. \quad (7)$$

Поэтому линия тока  $\Psi = Q$  является свободной поверхностью:

$$y^2 - Q^2 - 2Qx = 0, \quad (8)$$

что соответствует выражению для параболы с фокусом в начале координат. Положительная ось  $x$ -ов соответствует водонепроницаемому основанию (фиг. 113), в то время как отрезок ее от начала координат до  $x = -Q/2$  является поверхностью нулевого потенциала.

За исключением пористой среды, расположенной вправо от оси  $y$ , система должна приближаться к физическому явлению фильтрации через очень толстую плотину. Наличие среды вправо от оси  $y$ , повидимому, уменьшает суммарный расход  $Q$  от той величины его, что проходит через соответствующую плотину. Действительно, полагая, что на большом расстоянии  $L$  высота свободной поверхности и напор жидкости —  $h_e$ , из уравнения (8) следует, что  $Q$  можно получить из следующего выражения:

$$Q = L \left( \sqrt{1 + \frac{h_e^2}{L^2}} - 1 \right). \quad (9)$$

которое всегда будет меньше, чем  $h_e^2/2L$  — выражение, найденное в гл. VI, п. 5, для того, чтобы воспроизвести почти точно фильтрацию через плотину с нулевым напором вытекающей жидкости. Как это и следует ожидать, для малых значений  $h_e/L$  уравнение (9) очень тесно сближается с (16), гл. VI, п. 5 при ( $h_w = 0$ ), так как излишнее количество пористой среды на поверхности стока (фиг. 113) должно принять малое значение по сравнению с основной массой плотины, по мере того как возрастает мощность последней. Следует заметить, что любую параболическую линию тока  $0 < \Psi < Q$  можно рассматривать как границу течения, не изменяя свободной поверхности, которую дает уравнение (8).

**в) Дренаж из каналов.** Следующее выражение дает несколько иной тип связи комплексной переменной. Оно приводит к системам свободной поверхностью, соответствующей фильтрации воды из каналов:

$$z = -He^{\frac{\pi\omega}{Q}} - i\omega + \frac{Q}{2}, \quad (10)$$

так что

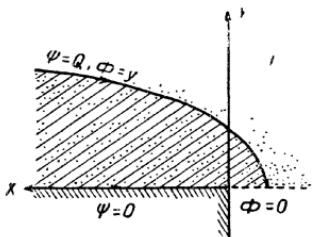
$$\left. \begin{aligned} x &= -He^{\frac{\pi\Phi}{Q}} \cos \frac{\pi\Psi}{Q} + \Psi + \frac{Q}{2} \\ y &= -He^{\frac{\pi\Phi}{Q}} \sin \frac{\pi\Psi}{Q} - \Phi \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Так как  $+y$  берется здесь направленным вниз (фиг. 114), потенциал будет  $(k/\mu)(p - \gamma gy)$ , и условие для линии тока  $\Psi = \text{const}$ , которая является свободной поверхностью, будет:

$$\Phi = -y \quad (\text{где } kyg/\mu = 1).$$

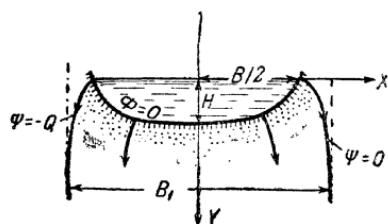
Две линии тока  $\Psi = 0, -Q$  являются, очевидно, линиями тока свободной поверхности и определяются специальными кривыми:

$$x = -He^{-\frac{\pi y}{Q}} + \frac{Q}{2}; x = +He^{\frac{\pi y}{Q}} - \frac{Q}{2}, \quad (12)$$



Фиг. 113. Гравитационное течение с параболической свободной поверхностью (по Козени).

$z$  — плоскость  $z$ .



Фиг. 114. Фильтрация из канавы со свободной поверхностью, ограниченной вертикальными асимптотами (по Козени).

которые будут симметричными относительно оси  $y$ . Геометрическая форма канавы, вдоль которой  $\Phi = 0$ , дается выражением:

$$\left( x - \frac{Q}{\pi} \cos^{-1} \frac{y}{H} \right)^2 + y^2 = H^2. \quad (13)$$

Отсюда ширина канавы

$$B = Q - 2H, \quad (14)$$

в то время как ее максимальная глубина —  $H$ . Максимальная ширина поверхности жидкости, просачивающейся в пористую среду, будет

$$B_1 = 2|x|_{y=\infty} = Q = B + 2H. \quad (15)$$

Разумеется, полученные таким путем простые выводы могут быть приложены, если только геометрическая форма канавы принадлежит к семейству, установленному уравнением (13), и пористая среда имеет очень большую мощность, так что жидкость будет сохранять неопределенно долго свою вертикальную, направленную вниз фильтрацию. Небольшие отклонения в форме канавы от уравнения (13) не будут сами по себе создавать серьезных ошибок в случае пользования уравнениями (14) или (15). Однако допущение бесконечной мощности пористой среды вполне определено ограничивает область применения этих формул случаями, где водяное зеркало грунтовых вод лежит на большой глубине под основанием канавы. Во многих практических слу-

чаях вода, просачиваясь из канав вниз, достигнет нормального уровня грунтовых вод на сравнительно небольшой глубине, заставляя при этом линии тока принимать скорее горизонтальное, чем вертикальное, направление. Несколько отличное приближенное решение задачи, особенно для проблем последнего типа, дается следующим отношением комплексной переменной:

$$z = He^{-\frac{\pi \omega}{Q}} - i\omega + \frac{Q}{2}, \quad (16)$$

что эквивалентно

$$\left. \begin{aligned} x &= He^{-\frac{\pi \Phi}{Q}} \cos \frac{\pi \Psi}{Q} + \Psi + \frac{Q}{2} \\ y &= -He^{-\frac{\pi \Phi}{Q}} \sin \frac{\pi \Psi}{Q} - \Phi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

В данном случае две симметричные линии тока свободной поверхности,  $\Psi = 0, -Q$  даются выражением:

$$x = He^{\frac{\pi y}{Q}} + \frac{Q}{2}; \quad x = -He^{\frac{\pi y}{Q}} - \frac{Q}{2}. \quad (18)$$

Отсюда нарастание с глубиной происходит логарифмически, в зависимости от увеличения расстояния от канавы (фиг. 115), в то время как в случае уравнения (12) свободная поверхность достигает вертикальных асимптот, по мере того как она приближается к расстоянию  $Q/2$  от центра канавы. Геометрическая форма канавы ( $\Phi = 0$ ), соответствующая уравнениям (16) и (17), определяется равенством:

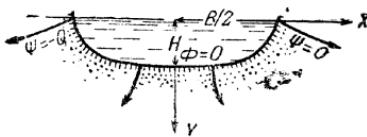
$$\left( x - \frac{Q}{\pi} \cos^{-1} \frac{y}{H} \right)^2 + y^2 = H^2, \quad (19)$$

так что ее максимальная глубина будет  $H$ , ширина ее определяется выражением

$$B = Q + 2H. \quad (20)$$

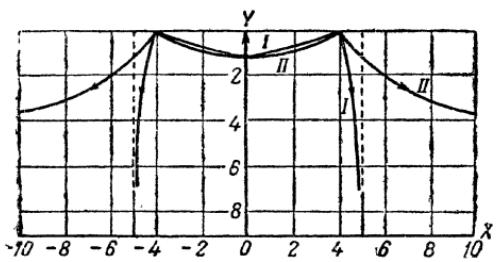
Таким образом, и в данном случае знание ширины и глубины канавы даст величину расхода фильтрации из нее при условии, что ее геометрическая форма определяется уравнением (19)<sup>1</sup>. На фиг. 116 показана геометрическая форма канав и предельная свободная поверхность для двух уравнений (10) и (16) при  $H=1$  и  $B=8$ . В обоих случаях форма канав несколько отлична друг от друга. Вместе с тем основное различие между соответствующей им свободной поверхностью и характером течения не следует относить к различным формам канав.

<sup>1</sup> Следует заметить, что уравнение (19) с внешней стороны идентично (13). Однако для решения (19) относительно  $x$  следует взять положительный радикал  $\sqrt{H^2 - y^2}$ , в то время как в (13) для нахождения  $x$  следует принимать отрицательные значения этого радикала.



Фиг. 115. Фильтрация из канавы с радиально распространяющейся свободной поверхностью (по Козени).

Основные свойства течения, например, общая природа свободной поверхности и расхода через систему, определяются в значительной степени скорее граничными условиями, чем тщательным изображением геометрической формы граничных поверхностей<sup>1, 2</sup>. Хотя для обоих уравнений (10) и (16) было принято допущение, что пористая среда имеет в действительности бесконечную мощность, эти уравнения предполагают резко отличные типы распределения потенциала на больших глубинах от поверхности. Так, из уравнения (11) следует, что потенциалы на больших глубинах представлены горизонтальными параллельными линиями



Фиг. 116. Свободная поверхность, получившаяся в результате фильтрации из канав при особых условиях:

I — форма канавы и свободной поверхности, определяемая уравнением (11), гл. VI, п. 7; II — форма канавы и свободной поверхности, определяемая уравнением (17), гл. VI, п. 7.

свободной поверхности, ограниченной вертикальными асимптотами, как это показано свободной поверхностью на фиг. 116.

С другой стороны, для уравнения (16) эквипотенциальные линии на больших глубинах даются выражением:

$$\Phi \sim -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{x^2 + y^2}{H^2}. \quad (22)$$

Поэтому течение на больших глубинах должно быть радиальным, давая объяснение этим боковому растеканию свободной поверхности для случая, изображенного на фиг. 116. Более того, потенциал вдоль оси  $y$ ,  $-\frac{Q}{\pi} \ln \frac{y}{H}$  будет по вполне понятной причине больше соответствующей ему величины на той же самой глубине вдоль свободной по-

<sup>1</sup> Дальнейшие примеры систем, определяемых уравнением (11), можно найти в работе В. В. Веденникова.

<sup>2</sup> Разумеется при аналитическом методе, примененном в настоящем случае, истинное поведение свободной поверхности и распределение потенциала на больших глубинах (см. уравнения 21 и 22), несомненно, зависят от геометрической формы канавы. Уравнение (13) дает форму канавы, которая имеет перегиб и выпуклую поверхность вблизи  $y \sim 0$ , давая, таким образом, начало вертикальному асимптотическому падению для свободной поверхности, в то время как уравнение (19) сообщает канаве профиль, который является везде вогнутым, со свободной поверхностью, имеющей тенденцию к радиальному расширению (фиг. 116). Однако ясно, что при решении проблемы в целом, где характеристика граничных условий была установлена с самого начала, может быть принят любой тип асимптотического поведения. Уравнения (21) или (22) могут быть получены при этом вне зависимости от геометрической формы канавы.

Это выражение представляется очевидно, эффективное свободное падение фильтрационной жидкости под действием силы тяжести как вертикальной водной по-

$$\Phi \sim -y. \quad (21)$$

верхности<sup>1</sup> —  $y$ . Эта разница обеспечивает значение падения потенциала для горизонтального перемещения, наложенного на свободное вертикальное падение.

Уравнение (16) со своим усложнением (22) дает возможное течение. Вместе с тем его можно рассматривать только как грубое приближение к действительной проблеме фильтрации, где свободная поверхность, а также промежуточные линии тока должны стать асимптотами к горизонтальной или наклонной линии, представляющей собой нормальный уровень грунтовых вод. Такое же положение возникает, когда течение фильтрующейся воды происходит действительно в вертикальном направлении к глубоко залегающему водяному зеркалу или же к весьма проницаемому слою, несущему водяное зеркало, через которое просачивающаяся вода только капает, пока она не ударится о поверхность водяного зеркала (см. следующий параграф). Геометрическая форма свободной поверхности может быть несколько видоизменена вблизи канавы так, чтобы получить перегиб, принимая линейную комбинацию<sup>2</sup> [уравнений (10) и (16)], а строго горизонтальная асимптота ( $y = y_0$ ) для свободной поверхности может быть получена прибавлением к уравнению (10) или (16) члена  $\frac{A}{\sin h \frac{\pi}{Q} (\Phi + i\Psi + y_0)}$ .

Это суммирование дает распределение потенциала на больших глубинах по типу свободного [уравнение (21)] или искусственно радиального падения согласно уравнению (22). Это обстоятельство не дает возможности построить с самого начала такую зависимость сопряженной функции, которая дала бы соответствующие физические вариации распределению потенциала для всех типов и проблем фильтрации, встречающихся на практике. Однако приведенные выше примеры должны служить по крайней мере указателями природы косвенных методов нахождения решений проблем течения, так же как и возможностей установления и ограничения их применимости<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Более высокие значения  $\Phi$  вдоль оси  $u$  для данного случая объясняют также, почему здесь значение расхода меньше, чем по уравнению (10) [уравнения (15) и (20)], если даже средняя ширина заполненной жидкостью среды гораздо больше по сравнению со случаем дренирования свободным падением.

<sup>2</sup> См. работу П. Немени (P. Neimenni „Wasserströmungslehre“, р. 201).

<sup>3</sup> Если обратить внимание, что для простого случая кругового сечения канавы и фильтрации по вертикальной поверхности (фиг. 116) прямое решение уравнения Лапласа дает

$$\Phi = -y \left( 1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right); \Psi = -x \left( 1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right),$$

где  $a$  — радиус канавы, то становится очевидной трудность получения распределения потенциала со свободной поверхностью прямым решением уравнения Лапласа. (N. K. Bose, Mem. Punjab Irrigation Res. Lab., Lahore, 2, № 1, 1929; а также V. I. Vaichianathan, H. R. Luthra and N. K. Bose, Proc. Ind. Acad. Sci., 1, 325, 1934).

Эти решения дают вертикальные асимптоты для линий тока  $\Psi = \text{const}$ , но ни одна из этих линий тока не представляет собой свободной поверхности. Определение трансцендентных функций  $\Phi(x, y)$ ,  $\Psi(x, y)$ , которые удовлетворяют условиям уравнения (13) из решения  $\nabla^2 \Phi = 0$ ,  $\nabla^2 \Psi = 0$ , в отдельности, без помощи метода комплексных переменных создаст, очевидно, наиболее невыполнимую задачу.

**8. Фильтрация воды из каналов и канав в песчаники с глубоко залегающим водяным зеркалом.** Более непосредственным методом решения проблемы фильтрации воды из каналов и канав в песчаники с глубоко залегающим водяным зеркалом (фиг. 117), который отличается

от уже рассмотренного в гл. VI, п. 7, является способ, почти схожий с методом Гопфа и Трефтца, описанным нами в гл. VI, п. 2.

Применяя и в этом случае последовательные преобразования комплексной переменной, устанавливаем совершенно точно последовательный ряд распределений потенциала и линии тока. При этом соответствующий профиль канавы или канала находится только в конце решения<sup>1</sup>. Чтобы продемонстрировать этот метод, мы разберем сначала случай, где высокопроницаемый слой гравия, содержащий зеркало воды, залегает действительно на бесконечной глубине, ниже поверхности канала.

Фиг. 117. Фильтрация из канавы в песчаники с глубоко залегающим водяным зеркалом (по Ведерникову).

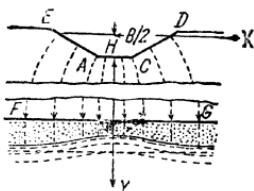
Путем, аналогичным введению комплексной переменной Гопфом и Трефтцом [уравнение (4) гл. VI, п. 2], вводится переменная:

$$\begin{aligned}\tau &= \theta_1 + i\theta_2 = -z - i(\Phi + i\Psi - H); \quad \theta_1 = \Psi - x; \\ \theta_2 &= -(y + \Phi - H),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $H$  — уровень жидкости в канале. Принимая  $y$ , имеющее направление вниз, и  $\bar{k}$  для простоты за единицу, становится ясным, что вдоль свободной поверхности гравитационного течения  $\theta_2 = H$ , в то время как вдоль основания канала  $AC$   $\theta_2 = 0$ , атмосферное давление принимается равным нулю.

Примем, что стороны канавы  $CD$  и  $AE$  имеют такую геометрическую форму, что вдоль них  $\theta$  имеет постоянное значение  $C_1$  и  $C_2$ , определяемое точками  $D$  и  $E$ . Отображение (фиг. 117) на плоскость  $\tau$  будет соответствовать поэтому фиг. 118. В плоскости  $\omega = \Phi + i\Psi$  граница  $GDCAEF$  будет, очевидно, отображаться на бесконечную полосу, показанную на фиг. 119. Отображая обе плоскости  $\tau$  и  $\omega$  на действи-

<sup>1</sup> Анализ этого, а также последующего раздела сделан В. В. Ведерниковым. Влияние капиллярных явлений на проблему фильтрации из песчаников рассматривается им же в работе, опубликованной в том же журнале 30, 245, 1935. В более поздней работе (Zeitschr. angew. Math. u. Mech., 17, 155, 1937) Ведерников рассматривает проблему фильтрации воды из каналов приложением преобразований инверсии плоскостей гидографа, которое исключает круговые отрезки и приводит к треугольным прямолинейным диаграммам. Последующим конформным отображением последних с помощью обычных преобразований Шварца-Кристоффеля на вспомогательные плоскости Ведерников дает возможность рассматривать случаи, где профиль канала имеет заранее установленную прямолинейную трапециoidalную форму. Тем не менее числовые результаты отличаются весьма незначительно от показанных в настоящем разделе для криволинейных профилей. С другой стороны, можно отметить, что оба метода Ведерникова могут быть приложены к настоящей задаче только потому, что отсутствуют поверхности фильтрации.



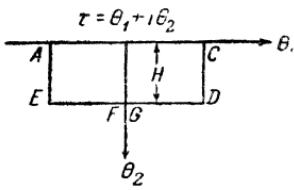
тельную ось плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  помощью теоремы Шварца-Кристоффеля, причем соответствия будут:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow -k^*; & C &\rightarrow +k^* \\ E &\rightarrow -1; & D &\rightarrow +1 \end{aligned} \quad (2)$$

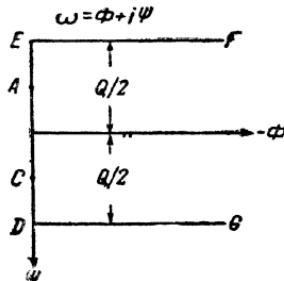
легко установить, что

$$\tau = \theta_1 + i\theta_2 = C_1 \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{V(1-\zeta^2)(k^{*2}-\zeta^2)}; \quad (3)$$

$$\omega = \Phi + i\Psi = C_2 \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{V^{1-\zeta^2}} = C_2 \sin^{-1} \zeta. \quad (4)$$



Фиг. 118. Отображение фиг. 117 на плоскость  $\tau$ .



Фиг. 119. Отображение фиг. 117 на плоскость  $\omega$ .

Чтобы определить константы в этих преобразованиях, заметим, что в  $D$ , где  $\zeta = +1$ :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{Q}{2} - \frac{B}{2} + iH = C_1 \int_0^1 \frac{d\zeta}{V(1-\zeta^2)(k^{*2}-\zeta^2)} = C_1(K + iK'), \\ \omega &= i \frac{Q}{2} = C_2 \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2} C_2; \quad C_2 = \frac{iQ}{\pi}; \end{aligned}$$

где  $K$  и  $K'$  — комплексные эллиптические интегралы первого порядка с модулями  $k^*$ ,  $\sqrt{1-k^{*2}}$ . Отсюда:

$$C_1 K = \frac{Q-B}{2}; \quad C_1 K' = H; \quad \frac{Q-B}{2H} = \frac{K}{K'}. \quad (5)$$

Далее в  $C$ , где  $\zeta = k^*$ ,

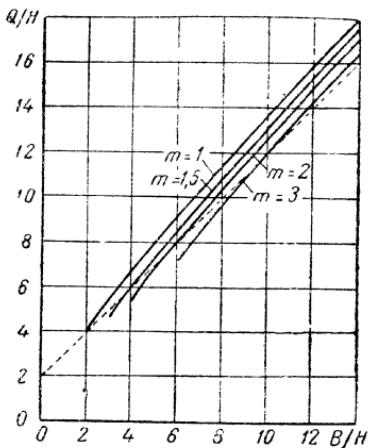
$$\omega = \Phi + i\Psi = i\Psi = i \left( \frac{Q}{2} - \frac{B}{2} + \frac{b}{2} \right) = \frac{iQ}{\pi} \sin^{-1} k^*,$$

так, что

$$\left. \begin{aligned} k^* &= \sin \frac{\pi}{Q} \left( \frac{Q}{2} - \frac{B}{2} + \frac{b}{2} \right) = \cos \frac{\pi m H}{Q} \\ Q &= \frac{\pi m H}{\cos^{-1} k^*} = B + \frac{2HK}{K'} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $b$  — ширина основания канала и  $1/m$  — средний наклон ее сторон в рассуждении, что  $m = (B - b)/2H$ .

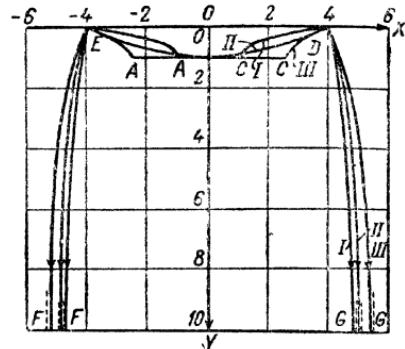
Уравнения (3) и (4) совместно с уравнением (1) дают распределение потенциала и линии тока так же, как и связывающую их геометрическую форму свободной поверхности. Расход дается уравнением (6), подсчеты выполняются более свободно, беря  $Q/H$ . Сначала по уравнению (6) рассчитывается величина связующего  $k^*$ , затем определяется значение  $B/H$ , которому соответствуют значения  $Q/H$  на основании второго уравнения (6). Несколько таких кривых для различных зна-



Фиг. 120. Изменение расхода фильтрации  $Q$  из каналов или канав, утекающего в глубоко залегающие песчаники, согласно уравнению (6), гл.

VI, п. 8:

$B$  — общая ширина канала или канавы по верхней кромке свободной поверхности;  $H$  — максимальная глубина свободной воды;  $m = (B - b)/2H$ ;  $b$  — ширина плоской части основания. Пунктирная кривая дает величину  $Q$  согласно уравнению (14), гл. VI, п. 7;  $k$  принимается равным 1.



Фиг. 121. Профили канала или канавы и их свободная поверхность для фильтрации в песчаники с глубоко залегающим водяным зеркалом.

I — профиль согласно гл. VI, п. 8,  $b = 2$ ,  $Q/H = 9,68$ ; II — профиль согласно гл. VI, п. 7, уравнение (13) гл. VI, п. 7;  $Q/H = 10,0$ ; III — профиль согласно гл. VI, п. 8,  $b = 5$ ,  $Q/H = 10,8$ ;  $B$  — общая ширина по верхней кромке свободной поверхности;  $H$  — максимальная глубина свободной воды;  $b$  — ширина плоской части основания (для I и III случаев);  $B/H = 8$  для всех случаев;  $k = 1$ .

чений  $m$  приведены на фиг. 120<sup>1</sup>. Максимум или асимптотическую ширину поверхности просачивающейся вниз воды, как и следует ожидать, легко найти из следующего выражения:

$$B_1 = 2|x|_{y=\infty} = Q = B + \frac{2HK}{K'} . \quad (7)$$

Следует помнить, что при численных выкладках для сохранения размерности между расходом  $Q$  и длинами, например  $B$ , необходимо умножить последние на  $k$ , которое принимается здесь за единицу.

Следует заметить, что выражение для расхода, приведенное здесь [уравнение (6)], отличается от соответствующей величины, найденной бо-

<sup>1</sup> Кривые Веденникова дают только зависимость  $B/H$  по отношению  $K/K'$  и все же требуют приложения второго из уравнений (6) для получения значения  $Q/H$ .

лее простым анализом (гл. VI, п. 7), т. е. уравнением (14), гл. VI, п. 7, только множителем  $K/K'$ . Так как эта величина может быть больше или меньше единицы [так как  $\frac{Q}{H} < \text{или} > 4 m$ ], профили канала или канавы, выполненные на основании теории настоящего раздела, будут терять больше или меньше воды путем фильтрации по сравнению с соответствующими значениями, исполненными согласно уравнению (13), гл. VI, п. 7<sup>1</sup>.

На фиг. 121 ясно показано, что эта разница в значении  $Q$  обязана в действительности различию в профилях канала или канавы. На фиг. 121 начертаны профили дренажных поверхностей одной и той же ширины ( $B=8$ ) и глубины ( $H=1$ ), но с различной геометрической формой сторон, соответствующей в одном случае (II) уравнению (13), гл. VI, п. 7, а в двух других случаях уравнением (3) и (4). Кривая I приведена для случая  $m=3$ , а кривая III — для  $m=1,5$ . Соответствующие значения  $Q : 9,68; 10,0$  и  $10,8$  показаны для случаев I, II и III. Порядок величин этих расходов укладывается, как это следует ожидать, в значение средней глубины профилей, ниже верха свободной поверхности. Чем больше эта средняя глубина, тем меньше будет действительное сопротивление песчаника, которое должна преодолеть фильтрующаяся вода при суммарном падении потенциала в  $H$  единиц.

**9. Фильтрация воды из каналов или канав в песчаники, которые подстилаются высокопроницаемыми гравийными ложами на малых глубинах.** Когда глубина подстилающего высокопроницаемого гравийного ложа, содержащего зеркало воды, сравнима по размерам с каналом или напором жидкости в нем, анализ последнего раздела должен быть слегка изменен. Так как рассматриваемое гравийное ложе обладает более высокой проницаемостью по сравнению с осадочными образованиями, расположенными над ним, и может пропускать гораздо большее количество жидкости, чем последние могут ему обеспечить, то вода, которая просачивается в гравийное ложе, будет попросту капать в последнее и в виде струи капель ударяться о зеркало воды. Давление в кровле гравийного ложа может быть тогда принято равным атмосферному. Значение  $\theta_2$  вдоль поверхности  $FG$  (фиг. 117) будет поэтому  $H$ , как это имеет место вдоль свободной поверхности, и фиг. 118 для плоскости  $\tau$  не изменится, за исключением того, что точки  $F_1G$  будут отделены и лягут вдоль  $ED$  на равных расстояниях от оси  $\theta_2$ . Отображение плоскости  $\tau$  на плоскость  $\zeta$  будет дано тогда снова уравнением (3), гл. VI, п. 8. Однако диаграмма на плоскости  $\omega$  изменится теперь в прямоугольник (фиг. 122). Обозначая точки на действительной оси плоскости  $\zeta$ , на которой точки  $G, F$  отобразятся на основании уравнения

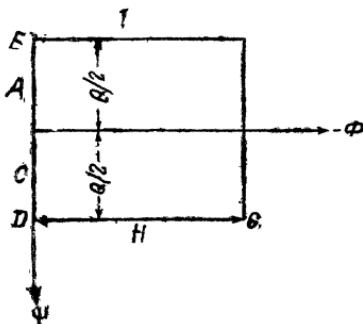
<sup>1</sup> Веденников, повидимому, исключает все случаи, для которых  $K/K' < 1$ , и объясняет излишек (для  $K/K' > 1$ ) расхода сверх величины, что дается уравнением (14), гл. VI, п. 7, истечением через трещину (аналитически „щель“) в профилях у точек С и А. Однако основание для заключения, что уравнения (3) и (4) предполагают наличие щели в точках С и А не ясно. Фиг. 118 и 119 дают непрерывное отображение  $AC, CD$  и  $AE$ , так как  $|\zeta|$  в уравнениях (3) и (4) пересекает значение  $k^*$ .

ния (3), гл. VI, п. 8, через  $\pm 1/a$ , конформное отображение фиг. 122 на плоскости  $\zeta$  (фиг. 123) определяется отношением:

$$\omega = \Phi + i\Psi = C_2 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-a^2\zeta^2)}}. \quad (1)$$

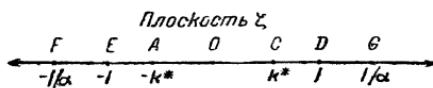
Константы  $C_1$ ;  $C_2$ ;  $a$  и  $k^*$  определяются из следующего: в  $d$ , где  $\zeta = 1$ , уравнения (1) и (3), гл. VI, п. 8, дают:

$$\begin{aligned} \frac{iQ}{2} &= C_2 K(a); \quad \frac{Q-B}{2} + iH = \\ &= C_1 [K(k^*) + iK'(k^*)], \end{aligned} \quad (2)$$



Фиг. 122. Отображение фиг. 117 для конечной глубины до  $FG$  на плоскость  $\omega$ .

1 — плоскость  $\omega$ .



Фиг. 123. Отображение фиг. 122 на плоскость  $\zeta$ .

где  $a$ ,  $k^*$  — модули эллиптических интегралов. В  $C$ , где  $\zeta = k^*$  следует, что

$$i\Psi = \frac{i(Q-B+b)}{2} = C_2 F(\sin^{-1} k^*, a), \quad (3)$$

а в  $G$

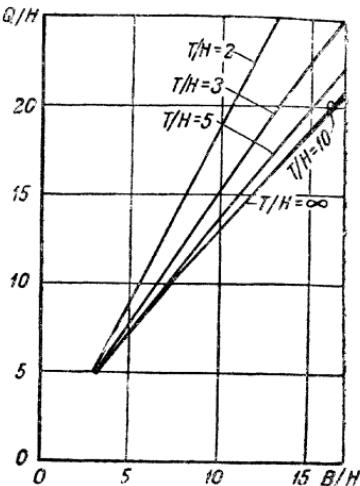
$$-T + i \frac{Q}{2} = C_2 [K(a) + iK'(a)],$$

так что

$$\frac{2T}{Q} = \frac{K'(a)}{K(a)}. \quad (4)$$

Решая эти уравнения относительно  $Q$ , находим, что

$$Q = \frac{2Hm}{1 - \frac{F(\sin^{-1} k^*, a)}{K(a)}} = B + 2H \frac{K(k^*)}{K'(k^*)}. \quad (5)$$



Фиг. 124. Изменение расхода фильтрации  $Q$  с шириной каналов или канав, расположенных над неглубоко залегающими слоями гравия:

$B$  — общая ширина по верхней кромке свободной поверхности;  $H$  — максимальная глубина свободной воды;  $T$  — глубина гравийного слоя ниже верхнего уреза свободной воды;  $m(B-b)/2H$ ;  $b$  — ширина плоской части основания;  $k = 1$ .

Чтобы рассчитать по этим уравнениям значение  $Q$  как функцию  $B$ ,  $H$  и  $T$  для данного  $t$ , можно начать с допущения зависимости  $Q/T$  и получить значение  $a$  из уравнения (4). Затем определяется  $k^*$  из первой части уравнения (5) после установления величины  $Q/H$  и, наконец,  $B/H$  из второй части уравнения (5). На фиг. 124 показаны исчисленные таким путем несколько кривых зависимости  $Q/H$  по отношению к  $B/H$ . Как и следует ожидать, видно, что расходы фильтрации через ложе конечной толщины, как это дается уравнением (5), превосходят соответствующие величины для фильтрации через ложе бесконечной толщи, исчисленные в предпоследнем разделе. Этот излишек становится особенно велик, когда глубина  $T$  достигает порядка  $H$ .

**10. Приближенная теория фильтрации воды через плотины с наклонными фасадами.** В гл. VI, п. 6 было показано, что распределение потенциала в плотинах с наклонными фасадами может быть почти точно получено с помощью электрических моделей, после экспериментального вырезывания верхнего контура, имитирующего свободную поверхность. При этом каждая модель дает результаты только для единичного напора поглощаемой жидкости, напора вытекающей жидкости и наклонов поверхностей поглощения и стока. Для получения данных в табличном или графическом виде, который бы охватывал широкую область изменения этих переменных, потребовалась бы весьма трудоемкая и очень длительная экспериментальная работа. Поэтому представляет собой некоторую ценность иметь в своем распоряжении такой метод подсчета, который, будучи даже приближенным, даст правильный порядок величины расхода и может быть выполнен для какого-нибудь специфического случая без затраты ненужного труда.

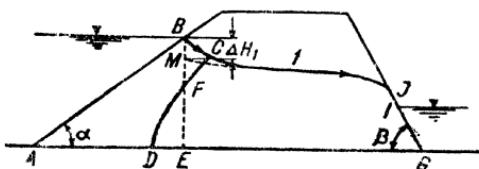
Такой метод был разработан Дахлером<sup>1</sup>, где поверхность поглощения, основная масса и поверхность стока плотины рассматриваются путем различных приближений как отдельные системы. Затем они объе-

<sup>1</sup> Dachler, R., Die Wasserwirtschaft, G. 37, 1933; также стр. 41, 1934. Учитывая большое значение точного местонахождения оконечности  $J$  (фиг. 125) свободной поверхности на поверхности стока, с точки зрения стабильности, можно упомянуть, что для нулевых уравнений стока жидкости была предложена Казагранде (Die Bautechnik, 15, 1934) приближенная формула для установления положения  $J$ , которая получила экспериментальное подтверждение для значений  $\beta \leqslant 90^\circ$ . Эта формула дается следующим выражением:

$$y_0 = m \sin \beta - \sqrt{m^2 \sin^2 \beta - H^2},$$

где  $y_0$  — высота  $J$  над основанием плотины,  $m$  — длина свободной поверхности плюс расстояние  $Jl$ , для которого должно быть принято особое приближение, и  $H$  — суммарный напор жидкости на поверхности поглощения. Казагранде (Journ. New. Eng. Water Works Assoc., 51, 131, 1937) разработал кривые, дающие  $y_0$  как функцию  $\beta$  и  $H$  для всех значений  $\beta$ . Они были получены из сравнения значений  $y_0$ , которые даются параболой Козени [уравнение (8) гл. VI, п. 7] для свободной поверхности, с величинами, непосредственно вытекающими из прямого графического решения для сетки эквипотенциальных линий и линий тока. Разность между этими двумя решениями дает построение ее как функции  $\beta$  и  $H$ . В последней работе можно найти также большое количество практических замечаний, относящихся к проектированию земляных плотин, основанных на гидродинамике проблем фильтрации, так же как и много иных полезных замечаний для построения и графических решений проблем течения, включающих свободную поверхность в изотропной и анизотропной среде.

деляются вместе условием, чтобы расходы через каждую систему в отдельности были равны и чтобы напоры жидкости были неразрывны, переходя из одной области в другую. На фиг. 125 поглощающая часть системы берется, ограниченная контуром  $ABDC$ . Поток через эту область подсчитывается с помощью преобразования сопряженной функции, соответствующей клину с углом  $\alpha$ , ограниченного с одной стороны линией тока  $AD$ , а с другой стороны эквипотенциальной линией  $AB$ ;  $BC$  принимается линией тока системы, которая уходит в  $B$ . При этом не делается попытки внести



Фиг. 125. Свободная поверхность в плотине с наклонными фасадами (по Дахлеру).

$I$  — свободная поверхность.

поправку в тот факт, что в данном случае отсутствует линия тока свободной поверхности.

Если  $\alpha = \pi/2n$ , где  $n$  — целое число, то соответствующее преобразование комплексной переменной будет:

$$H = i\Psi = (x + iy)^n, \quad (1)$$

где для удобства потенциал скорости заменен напором жидкости  $H$ . Типовые эквипотенциальные линии и линии тока для  $n = 3$  показаны на фиг. 126, где

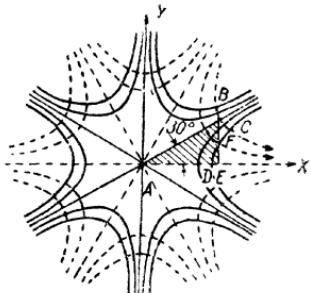
$$x^3 - 3xy^2 = H; \quad 3x^2y - y^3 = \Psi. \quad (2)$$

Величина эквипотенциальной линии  $C$ , ограничивающей эту область, вышеуказанный процедурой не установлена заранее. Однако выбор ее может быть сделан вполне определенно из условия<sup>1</sup>, что потеря энергии трения при прохождении жидкости через  $ABCD$  должна иметь то же значение, что и проходя через  $ABE$ . Эта потеря энергии, испытываемая жидкостью, проходящей между двумя линиями тока, разделенными  $\Delta\Psi$ , против перепада напора жидкости  $\Delta H$ , будет:

$$dW = \gamma g \Delta H \Delta \Psi, \quad (3)$$

где  $\gamma$  — плотность жидкости, а  $g$  — ускорение силы тяжести.

Отсюда поставленное выше условие становится тождественным требованию, чтобы  $BC$  и  $DE$  имели ту же самую площадь в плоскости  $(H, \Psi)$ . Принимая длину  $EB$  за единицу, значение  $\Psi$  в точке  $B$  из урав-



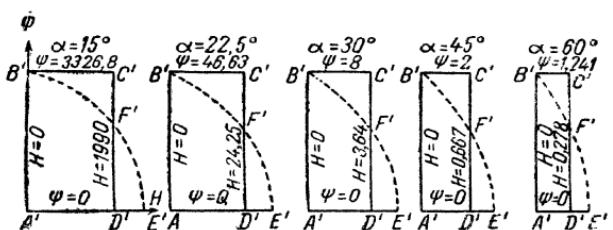
Фиг. 126. Приближенное распределение потенциала и линии тока вблизи поверхности стока плотины с наклонными фасадами ( $30^\circ$  наклона), (по Дахлеру).

<sup>1</sup> Это условие не имеет физического значения и выбрано только для удобства, так как оно позволяет сблизить подсчет потока вправо от  $BCD$  с той величиной, что находится вправо от  $BE$  и с тем же самым средним напором жидкости вдоль  $BE$ , что и вдоль  $BCD$ .

нения (2) или же его эквивалента для других значений  $n$  и продолжая линию  $B'C'$  в плоскостях  $(H, \Psi)$  (фиг. 127) так, что площадь  $B'C'F'$  равняется площади  $F'D'E'$ , можно свободно получить соответствующее значение  $H$  для  $CD$ . Результирующая проводимость  $ABCD$ , являющаяся отношением  $\frac{A'B'}{H'D'}$  (фиг. 127), устанавливаемая этим путем, может быть выражена функцией угла  $\alpha$  из следующего выражения:

$$\varepsilon_1 = \frac{Q}{\Delta H_1} = 1,12 + 1,93 \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)^1$$

Этот вывод находится в полном согласии со значениями, найденными путем непосредственных экспериментов. Следует заметить, что  $\Delta H_1$  в уравнении (4) относится к падению потенциала только на участке  $BC$  свободной поверхности. Течение в плотине вправо от  $BE$  делится тогда



Фиг. 127. Графическое определение  $\varepsilon_1$  в уравнении (4), гл. VI, п. 10 (по Дахлеру).

на две части. Первая часть от  $BE$  до  $KL$ , заключенная в основной массе плотины, рассматривается имеющей по существу линейный характер (фиг. 125). Расход относится к потере напора жидкости  $\Delta H_2$  и выражается:

$$Q = \frac{H_m \Delta H_2}{l}, \quad (5)$$

где  $H_m$  — средняя высота свободной поверхности вдоль  $CK$  и  $l$  — расстояние  $EL$ .

Для получения характеристики течения от  $KL$  до поверхности стока прибегают к экспериментам на модели. Точка  $K$  для несомненности выбирается на пересечении между фактической свободной поверхностью и линией  $GK$ , проведенной от носка плотины под наклоном  $\beta$ , равным двум третям поверхности стока (фиг. 128). Такие эксперименты на модели, выполненные с вертикальными поверхностями поглощения  $KL$  и углами  $\beta = 30, 45$  и  $60^\circ$  для различных значений  $\Delta H_3/H_3$  (фиг. 128), показали для количества

$$\varepsilon_3 = \frac{Q}{\Delta H_3} \quad (6)$$

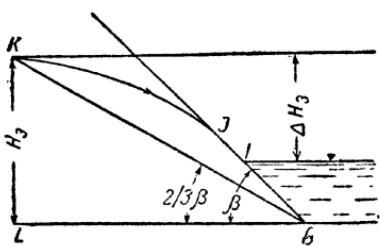
данные, указанные точками на фиг. 129.

<sup>1</sup> В настоящем разделе принято для удобства, что эффективная проницаемость  $k$  имеет значение 1.

Сплошные кривые даются уравнением:

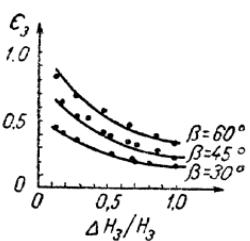
$$\varepsilon_3 = 0,068 \beta^\circ \left( 0,86 + 0,39 \frac{\Delta H_3}{H_3} - \sqrt{\frac{\Delta H_3}{H_3} + 0,36} \right), \quad (7)$$

Эти выводы будут использованы таким образом (см. фиг. 130, где  $\Delta H_3/H_3 = 1$ ). Сначала принимается положение  $L$ , затем берется  $H_3$ , выраженное через  $GL \operatorname{tg} \frac{2}{3}\beta$  так, что, зная уровень стока жидкости, можно определить  $\Delta H_3$ , а отсюда из уравнения (7) значение  $\varepsilon_3$ . Тогда можно рассчитать  $Q$ , возвращаясь к уравнению (6), а затем из (4) —  $\Delta H_1$ . Так как суммарный дифференциал напора жидкости дается выражением



Фиг. 128 (по Дахлеру).

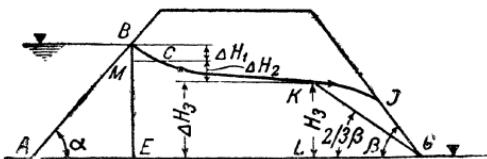
в уравнение (5), должно быть найдено то же самое значение для  $Q$ , что было дано первоначально уравнением (6). Отсутствие согласованности показывает ошибку в выборе положения  $L$ , и расчет должен быть повторен, пока не будет достигнута полная согласованность между различными количествами, входящими в эту формулу. Когда уровень вытекающей жидкости настолько высок, что  $\Delta H_3/H_3 < 0,1$ , предел



Фиг. 129. Результаты экспериментов на модели для определения  $\varepsilon_3$ . Сплошные кривые даются согласно уравнению (7), гл. VI, п. 10 (по Дахлеру).

справедливости уравнения (7) имеет свое экспериментальное оправдание. Приближенный подсчет расхода может быть выполнен, полагая течение линейным от  $BE$  до  $IN$ , где  $IN$  — вертикальное снижение уровня от пересечения массы вытекающей жидкости поверхностью стока. Дополнительное падение, вызванное клином справа от  $IN$ , может быть получено тогда приближенным методом, т. е. на основании выражения, дающего соответственную величину, обязанную только клину поверхности поглощения влево от  $BE$ , а именно уравнению (4).

К сожалению, точные решения проблемы фильтрации через плотины с наклонными фасадами, которые можно было бы использовать для проверки точности рассмотренной выше приближенной теории, до сих пор отсутствуют. Вследствие высоких уровней поглощения жидкости, соот-



Фиг. 130. Наиболее важные количества, которые применяются при подсчете расхода фильтрации через плотины с наклонными фасадами (по Дахлеру).

ветствующих моделям на фиг. 110 и 111, гл. VI, п. 6, область  $KJGL$  с фактором геометрической формы  $\varepsilon_3$ , построенным по указанному выше методу, будет распространяться или перекрывать область  $ABE$  так, что это приводит к излишнему сопротивлению стока или к заниженным значениям расхода. Тем не менее интересно показать, что даже при таком неблагоприятном случае приближенная теория дает, по крайней мере, правильный порядок величины расхода. Заметив для фиг. 110, что  $\alpha = \beta = 30^\circ$  и  $\Delta H_3/H_3 = 1$ , из уравнений (4) и (7) следует, что  $\varepsilon_1 = 2,235$  и  $\varepsilon_3 = 0,171$ . Так как в этом случае область  $GJKL$ , указанная на фиг. 130, перекрывает  $ABE$ , можно опустить участок  $MKLE$ , и значение  $Q$  определится из уравнений:

$$Q = 2,235 \Delta H_1 = 0,171 \Delta H_3; \quad \Delta H_3 + \Delta H_1 = 1,$$

где суммарный напор жидкости принят за единицу. В результате получается  $Q = 0,159$ .

Соответственно этому заметим, что для фиг. 111  $\alpha = \beta = 45^\circ$ , так что  $\varepsilon_1 = 3,05$  и  $\varepsilon_3 = 0,257$ . Опустим опять участок  $MKLE$  (фиг. 130) и легко установим, что в данном случае  $Q = 0,238$ .

Чтобы получить соответствующие значения  $Q$  из распределения потенциала и линии тока, которые даются электрическими моделями, необходимо слегка изменить процедуру, описанную в гл. IV, п. 17. Так, вспоминая, что расход  $\Delta q$  между двумя соседними линиями тока определяется выражением

$$\Delta q = \frac{\Delta \Phi}{\Delta n} \Delta s, \quad (9)$$

где  $\Delta \Phi$  — падение потенциала по длине  $\Delta n$  и  $\Delta s$  — промежуток между двумя линиями тока, ясно, что, принимая разрыв между эквипотенциальными линиями  $\Delta \Phi$  так, чтобы они образовали квадраты при пересечении с линиями тока и  $\Delta s = \Delta n$ , суммарный расход будет равен числу  $m$  квадратов, лежащих между двумя крайними линиями тока, умноженному на  $\Delta \Phi$ , т. е.

$$Q = m \Delta \Phi. \quad (10)$$

Прилагая эту процедуру к фиг. 110 для полосы, лежащей между эквипотенциальными линиями  $\Phi = 0,75$  и  $\Phi = 0,80$ , находим, что  $m = 5,1$ . Отсюда, так как для всей единицы  $\Delta H$ ,  $\Delta \Phi = 0,05$ , вытекает, что

$$Q = 5,1 \cdot 0,05 = 0,255.$$

Поступая аналогичным путем для случая фиг. 111, находим, что вдоль полосы между  $\Phi = 0,70$  и  $\Phi = 0,75$ ,  $m = 5,6$ , так что

$$Q = 5,6 \cdot 0,05 = 0,28.$$

Эти значения следует сравнить со значениями 0,159 и 0,238, которые дает приближенная теория. Как это было предуказано заранее, последние значения слишком занижены, и разрыв между значениями будет гораздо меньше в наиболее благоприятном случае, соответствующем фиг. 111. Приближенная теория дает, однако, правильный порядок величин расхода. Поэтому для более низких уровней жидкости на верхнем бьефе плотины, при расширяющейся свободной поверхности, даже численные значения расхода будут иметь небольшую ошибку и явятся вполне обоснованными.

Последним пунктом проблемы фильтрации воды через плотины с наклонными фасадами, который необходимо подчеркнуть, является усложненность уравнения (1) по отношению к скоростям фильтрации вдоль поверхности поглощения. Так уравнение (1) дает для распределения напора жидкости в области  $ABE$

$$H = r^n \cos n\theta, \quad (11)$$

где  $r$  — радиальное расстояние от точки  $A$ ,  $\theta$  — угол полярных координат. Нормаль скорости к поверхности поглощения будет пропорциональна:

$$-\frac{1}{r} \left| \frac{\partial H}{\partial \theta} \right|_{\theta=a} = nr^{n-1} = \frac{\pi}{2a} r^{\frac{n}{2a}-1} \quad (12)$$

Отсюда следует, что скорость будет равна нулю в пяте плотины и возрастает до максимума вверх по склону ее. Возрастание скорости увеличивается по мере того, как уменьшается наклон ребра плотины<sup>1</sup>. Тот же тип колебаний скорости будет приблизительно иметь место и на поверхности стока ниже поверхности фильтрации. В месте пересечения поверхности фильтрации и уровня вытекающей жидкости скорость будет бесконечна, но будет резко падать по мере приближения к оконечности стока свободной поверхности. Скорость в этом месте будет направлена по касательной к поверхности стока и равняться компоненту скорости свободного падения  $\bar{k}$  вдоль поверхности<sup>2</sup>. Так как области максимальных скоростей поглощения или стока будут являться участками максимальной эрозии, ясно, чтобы контролировать последнюю, необходимо обратить особое внимание на пересечение уровней жидкости со стороны верхнего и нижнего бьефа с фасадами плотины<sup>3</sup>.

**11. Фильтрационные струи из каналов и канав, поглощаемые неглубоко залегающим зеркалом воды<sup>4</sup>.** Теория движения грунтовых вод в наклонном пласте песчаника, который дренируется канавой, был рассмотрен в гл. VI, п. 2. Чистый дренаж канавой был дан уравнением (8), гл. VI п. 2. При рассмотрении фильтрации из канавы или канала, проведенного над неглубоко залегающим нормальным уровнем грунтовой воды, возникает обратная проблема, связанная с фильтрацией в окружающий пласт песчаника, заполненный водой. Хотя представляется возможным дать решение такой задачи, где зеркало воды залегает в слое, имеющем более высокую проницаемость по сравнению с первоначальным носителем фильтрационного течения прямыми аналитическими методами (гл. VI, пп. 8 и 9), однако в том случае, где

<sup>1</sup> Этот вывод нарушается для вертикальной поверхности поглощения, так как скорость уменьшается от максимума в пяте плотины до нуля у свободной поверхности.

<sup>2</sup> См. также гл. VI, п. 1.

<sup>3</sup> Практическое рассмотрение методов сохранения свободной поверхности от соударения с поверхностью стока в том случае, когда напор воды со стороны нижнего бьефа равняется нулю, с помощью вставок гончарных дренажных труб или проницаемых фильтров — бланкетов и устранением поверхностной эрозии можно найти в уже цитированной работе Казагранде.

<sup>4</sup> Необходимо совершенно точно представить себе, что выводы этого раздела, а также всех последующих разделов в настоящей главе, могут быть приложены после того, как будет достигнуто установившееся течение.

фильтрационное течение поглощается зеркалом воды, требуется приложение приближенных и полуэмпирических методов решения. Один такой тип решения мы дадим в настоящем разделе. Строго говоря, установившееся гравитационное течение из бесконечно распространяющегося пласта песчаника требует, чтобы песчаник не имел наклона, равного нулю в точках, отстоящих на некотором расстоянии от канавы, за исключением того случая, когда фильтрация, как это принято в гл. VI, п. 8, окончательно переходит в вертикальное свободное падение через песчаник. На больших расстояниях от канавы свободная поверхность должна, очевидно, стать асимптотически параллельной нормальному, ненарушенному уровню жидкости, а отсюда водонепроницаемому ложу.

Если последнее горизонтально и свободная поверхность ему параллельна, то скорости в удалении от канавы будут равны нулю. Это, разумеется, противоречит принятому допущению, что в пласт песчаника вводится из канавы или канала установившийся расход.

В дополнение к физическому условию, чтобы свободная поверхность при гравитационном течении, соответствующая вышеуказанному типу фильтрации из канавы или канала, стала асимптотой к водонепроницаемому ложу песчаника, распределение потенциала должно принять асимптотический вид, что соответствует линейному течению поверхности воды. Таким образом, эквипотенциальные линии на большом расстоянии от канавы или канала должны быть нормальными к водонепроницаемому ложу с постоянным их размещением, пропорциональным наклону водонепроницаемого ложа. Поэтому ясно, что точные решения уравнения Лапласа, которые даются в гл. VI, пп. 7, 8, 9, где предполагается асимптотическое приближение к вертикальному свободному падению, не могут быть приняты в качестве физического воспроизведения практических фильтрационных течений в песчаниках с конечной толщиной<sup>1</sup>, где фильтрационное течение сливаются с нормальным зеркалом

<sup>1</sup> Отсюда следует также отвергнуть распределение потенциала и линий тока:

$$\Phi = \frac{2b}{\pi} \cos \alpha \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2b} \sin \frac{\pi y}{2b} + x \sin \alpha;$$

$$\Psi = -\frac{2b}{\pi} \cos \alpha \operatorname{sh} \frac{\pi x}{2b} \cos \frac{\pi y}{2b} + y \sin \alpha,$$

где  $x, y$  — координаты, параллельные и нормальные водонепроницаемому ложу пористого слоя с углом падения  $\alpha$  и глубиной  $b$ , которые даются непосредственным решением для уравнения Лапласа (см. работу N. K. Bose; и V. I. Vaithianathan H. R., Luthora и N. K. Bose, уже цитированную нами). Эти решения, действительно, дают распределение линий тока и потенциала вблизи канала, обладая некоторыми характерными физическими свойствами, которые и следуют ожидать. Ни одна из линий тока  $\Psi = \text{const}$  не представляет собой свободной поверхности и экспоненциальное возрастание  $\Phi$  с большими значениями  $x$  не следует нормальной ненарушенной линейной поверхности течения, аналогичной выводу из уравнения (2), гл. VI, п. 7, что должно иметь место при больших значениях  $x$  (фиг. 31). Поэтому трудно оценить соответствующим образом практическое значение, которое следует приписать этим решениям. С другой стороны, даваемое здесь приближенное решение, связанное больше и непосредственно со значением расхода фильтрации, получается таким путем, что приближения, имеющиеся в анализе, имеют отрицательное влияние на точное количественное значение последнего.

грунтовых вод. Однако вместо того, чтобы как уже об этом было упомянуто, рассматривать песчаник бесконечных размеров с граничными условиями в бесконечности, допустим, что интересующая нас область имеет ширину  $2L$  и что высота  $H_0$  свободной поверхности в  $x = \pm L$  известна. Тогда не возникнет трудности при обработке, если принять водонепроницаемое ложе для  $|x| < L$  горизонтальным и систему в целом симметричной относительно оси канавы или канала. Если фильтрация будет продолжаться неопределенно долго, то за пределами  $|x| = L$  песчаник должен принять в действительности наклон вниз, чтобы унести фильтрационную жидкость. Однако при установлении высоты  $H_0$  при  $x = L$  область вне  $|x| = L$  исключается из рассмотрения в задаче, и метод анализа может быть выбран так, чтобы соответствовать системе конечных размеров. К сожалению, весьма трудно подвергнуть точной обработке даже ограниченные задачи, следя такому методу, хотя в принципе к ним вполне приложимы способы Гопфа, Трефца и Гамеля. Поэтому до сих пор необходимого анализа получено и не было.

В дальнейшем мы разовьем приблизительное решение, в котором объединены оба метода — эксперименты на моделях и приближенный анализ для получения упрощенной процедуры подсчета расхода фильтрации, не входя в подробности изучения свободной поверхности системы.

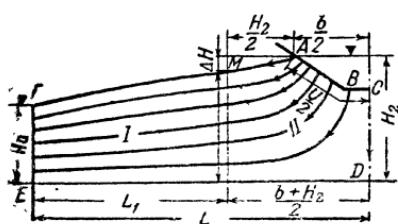
Фиг. 131. Схематическое представление фильтрационного течения из канавы, которая лежит поверх неглубоко залегающего водяного зеркала (по Дахлеру).

на моделях и приближенный анализ для получения упрощенной процедуры подсчета расхода фильтрации, не входя в подробности изучения свободной поверхности системы.

Эта теория, также разработанная Дахлером<sup>1</sup>, аналогична приведенной в предыдущем разделе для фильтрации через плотины. В ней течение также разделено на отдельные части. К каждой из них приложен различный метод приближения<sup>2</sup>. Благодаря симметрии, возникающей из допущения, что ненарушенный уровень грунтовых вод горизонтален, следует рассматривать только половину системы, которая представлена в виде диаграммы на фиг. 131. Как уже было сказано, в дополнение к ширине канала  $b$  и высоте уровня воды в ней над водонепроницаемым ложем  $H_2$  будет считаться также известной высота  $H_0$  свободной поверхности на расстоянии  $L$  от центра канала.

<sup>1</sup> Dachler R., Die Wasserwirtschaft, p. 110, 1933.

<sup>2</sup> Можно отметить здесь также работу (I. M. Burgers, De Ingenieur, 22, 1926), где делается аналогичное разделение течения. Течение в части II для канала с плоским дном ( $DC = H_2$ ) сравнивается с линейным течением, соответствующим каналу с вертикальными стенками, углубленному до водонепроницаемого ложа,  $ED$  пластина песчаника. Тогда разница в потенциале для обоих случаев, в удаленной от канала точке, при том же самом значении потенциала и расхода в канале [соответствующего действительному каналу, рассчитанному на основании уравнения (4)] может быть представлена как „сопротивление истечению“, возникающее из особенностей геометрической формы области II. Однако эта теория является менее удовлетворительной, чем теория Дахлера, так как она не принимает в расчет депрессии свободной поверхности и отсюда уменьшения средней толщины среды, пропускающей жидкость на далеких расстояниях от канала.



Разделение областей *I* и *II* на расстоянии  $(b + H_2)/2$  от оси канала (фиг. 131) является совершенно произвольным и находит свое оправдание в том факте, что вне этого расстояния  $(b + H_2)/2$  течение с большой степенью приближения будет линейным. Это подтверждается следами линий тока на песчаных моделях системы, представленной на фиг. 131 (фиг. 132). Обозначив через  $H_1$  высоту свободной поверхности в  $MN$ , течение через область *I* можно представить приближенно следующим выражением:

$$\frac{Q}{2} = \bar{k} \left( \frac{H_1 - H_0}{L_1} \right) \left( \frac{H_1 + H_0}{2} \right); \quad L_1 = L - \frac{b + H_2}{2}. \quad (1)^1$$

Для области *II*, где линии тока претерпевают наибольшее изменение своего направления, можно попытаться представить

$$\frac{Q}{2} = \bar{k} (H_2 - H_1) \varepsilon, \quad (2)$$

где „фактор геометрической формы“  $\varepsilon$  определяется геометрией области канала. Исключая неизвестное количество  $H_1$ , величину  $Q$  получим из равенства:

$$Q = 2\bar{k}\varepsilon [H_2 + \varepsilon L_1 - \sqrt{(H_2 + \varepsilon L_1)^2 - H_2^2 + H_0^2}]. \quad (3)$$

Из этого выражения легко заметить, что относительная ошибка в величине  $Q$  будет в целом меньше, чем в соответствующей величине  $\varepsilon$ . Поэтому ошибки, которые получаются при подсчете значения последней, не поведут к излишним ошибкам в конечном значении величины  $Q$ .

Чтобы получить величину  $\varepsilon$ , течение в области *II* будет приближаться к значению, которое соответствует распределению потенциала и линии тока, получаемым из следующего уравнения:

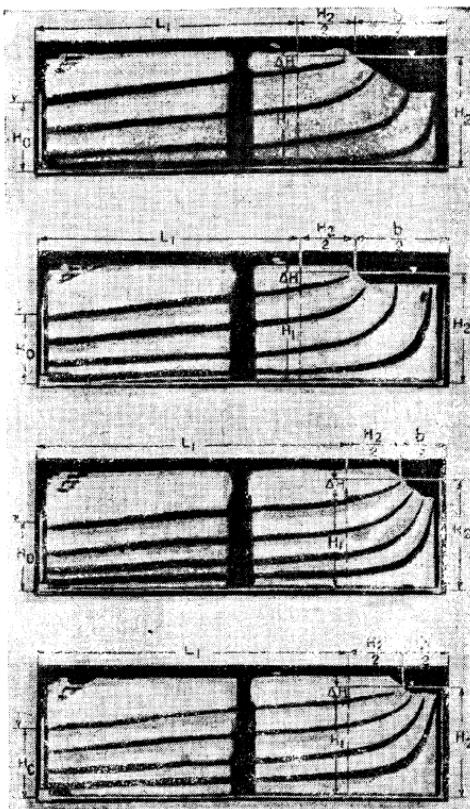
$$\left. \begin{aligned} H + i\Psi &= \ln(\operatorname{sh} z + \sqrt{\operatorname{sh}^2 z - \operatorname{sh}^2 f}) \\ z &= x + iy, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где опять взят напор жидкости вместо потенциала скорости  $\Phi$ . На фиг. 133 показан типичный комплекс потенциалов и линий тока, ограниченный уравнением (4). Видно, что контур  $CDN$  вполне точно воспроизведен линией тока  $\Psi = \pi/2$ , где  $DN$  выражено через  $y = \pi/2$ . Очевидно, в качестве границы канала можно взять любую кривую  $H = \text{const}$ , в то время как свободная поверхность  $AM$  должна быть приближенно охарактеризована обычной линией тока, проходящей через  $A$  — оконечность контура канала. В частной задаче точка  $M$  выбирается так, что

<sup>1</sup> В действительности средний потенциал вдоль  $FE$  будет меньше, чем эквивалент напора жидкости. Приблизительно та же самая ошибка будет входить и в  $MN$ , так что  $H_1 - H_0$  дает хорошее представление о правильности среднего разностного напора жидкости в области *I*. Для случая, представленного уравнением (2), соответствующие ошибки в  $H_2 - H_1$  учитываются методом определения величины  $\varepsilon$ .

ее высота  $H_1$  будет давать тот же самый расход согласно уравнению (1), что и по уравнению (2). Значения  $\varepsilon$  получаются на фиг. 133, подбирая различные значения  $b/2$  и  $H_2$  и рассматривая соответствующие значения  $H_1$ , которые даются на фиг. 134 в виде кривых с постоянным значением  $\varepsilon$  и координатами  $b/H_2$  и  $H_1/H_2$ . Таким образом, для резко очерченных контуров фиг. 133 соответствующие значения  $\varepsilon$  будут:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\pi}{2} - 0,393}{1,466 - 0,450} = 1,16. \quad (5)$$



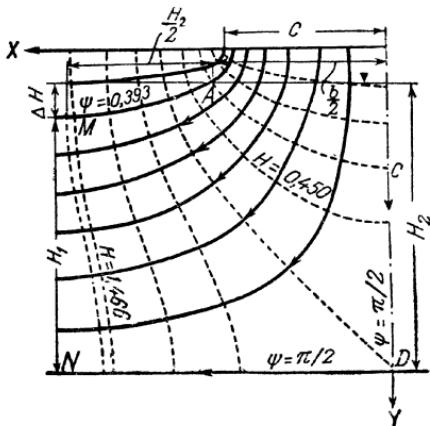
Фиг. 132. Фотографии экспериментов на модели, показывающие фильтрационные течения из каналов, залегающих поверх неглубокого водяного зеркала (по Дахлеру).

Для  $b/U = 0,9$  значения  $\varepsilon$ , получаемые из обеих половин диаграммы фиг. 134, могут быть усреднены. Непосредственные эксперименты на моделях, которые дают результаты, указанные точками на фиг. 134, подтверждают, что в результате указанного метода подсчета получаются значения  $\varepsilon$  с довольно близким приближением. На фиг. 135 приведены фотографии типовых результатов этих экспериментов на моделях. После того как  $\varepsilon$  установлено, из уравнения (3) можно рассчитать расход. Однако значения  $Q$  будут получаться попутно при находже-

В дополнение к отношению  $b/H_2$ , что является мерилом распространения канавы по сравнению с мощностью пористого слоя, форма канавы может быть охарактеризована отношением  $b/U$ , где  $U$  — длина смоченного периметра канавы. Однако на фиг. 134 результаты различных значений  $b/U$  соединены в группу, где  $b/U > 0,9$  соответствует мелким профилям каналов, и группу, где  $b/U < 0,9$  соответствует глубоким профилям. Поэтому значения  $\varepsilon$  следует рассматривать как средние для профилей с  $b/U > 0,9$  или  $< 0,9$ . Применение этих средних значений является достаточным для большинства практических целей. Однако более точные значения при каждом отдельном случае выбора  $b/U$  можно свободно получить, возвращаясь к фиг. 133 и рассчитывая непосредственно величину  $\varepsilon$ , как в примере, показанном в уравнении (5).

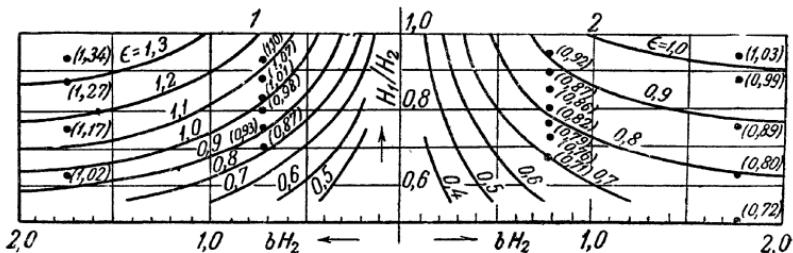
дении значения  $H_1$ , что сделает равными правые части уравнений (1) и (2). Так, выбирая

$$b = \frac{1}{2}; \quad H_2 = 1; \quad H_0 = \frac{1}{2}; \quad L = 5; \quad \frac{b}{U} > 0,9,$$



Фиг. 133. Приближенное распределение потенциала и линии тока вблизи канавы, показанной на фиг. 131 (по Даахлеру).

находим, со ссылкой на фиг. 134, что для  $H_1 = 0,915$ ,  $\varepsilon = 6,8$ , уравнения (1) и (2) дают в пределах 1% точности то же самое значение для  $Q$ , а именно  $Q = 1,37k$ .

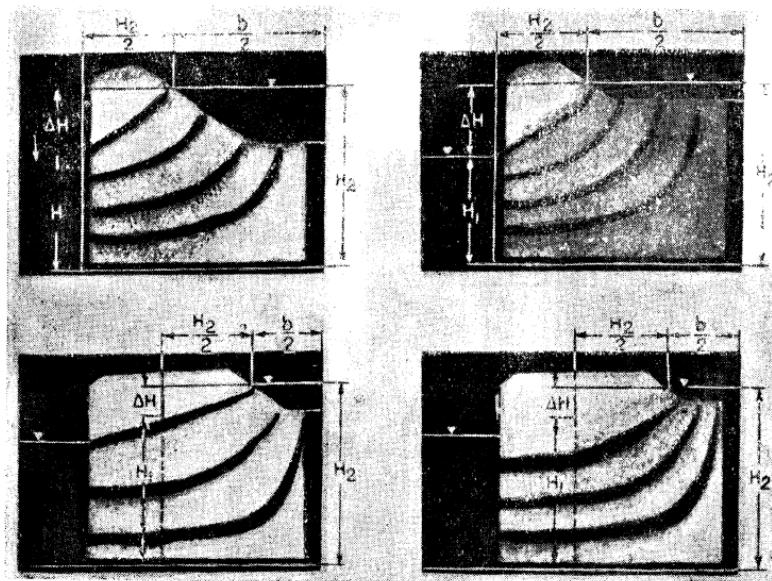


Фиг. 134. Кривые постоянного значения  $\varepsilon$ , подсчитанные из распределения потенциала и линии тока, представленного на фиг. 133. Точки соответствуют значениям, найденным непосредственно экспериментами на моделях (по Даахлеру).

1 — глубокие поперечные сечения:  $b/U < 0,9$ ; 2 — неглубокие поперечные сечения:  $b/U > 0,9$ .

Чтобы получить численные величины, имеющие практическое значение, входящие в состав единицы следует применять для различных констант. Если при указанных отношениях  $b/H_2$ ,  $H_2/L$  и  $H_0/H_2$ ,  $H_2$  взяты в числах, например,  $+H_2 = 304,8 \text{ см}$ ,  $k = 10 \text{ дарси}$  и  $\gamma/\mu = 1$ , то значение  $Q$  для воды будет  $Q = 1,37 \cdot 10 \cdot 0,968 \cdot 10^{-3} \cdot 304,8 = 4,042 \text{ см}^3/\text{сек}/\text{см}$  длины канавы.

Этот расчет не только дает дренажную производительность канавы или канала для данного уровня грунтовых вод  $H_0$  на расстоянии  $L$ , но позволяет путем инверсии определить величину  $H_0$ , если первоначально задан расход  $Q$ . Таким образом, можно предсказать предел дренажной производительности, которую может осуществить любая канава или канал, не прибегая к воспроизведению условия водопогружения в удаленных точках.



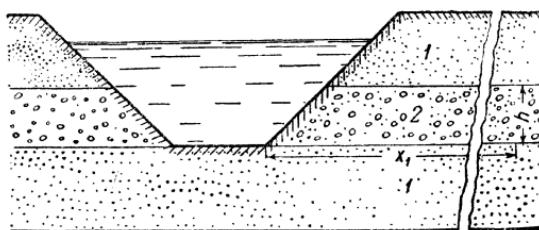
Фиг. 135. Фотографии экспериментов на модели, показывающие линии тока, вблизи основания дренажной канавы, залегающей поверх неглубокого водяного зеркала (по Дахлеру).

**12. Приближенное решение некоторых проблем ирригации и дrenирования.** Некоторые проблемы гравитационного течения, рассматривающие вопросы ирригации и дренажа, требуют для своего решения непосредственного приложения приближенного метода анализа. Такие проблемы рассматривались Гарднером, Коллие и Фарром, и в настоящей работе мы будем в основном следовать их методу<sup>1</sup>. Следует отметить, что их анализ базируется на таких прямых физических упрощениях, что становится возможным избежать точного решения уравнения Лапласа, которое потребовалось бы при строгом рассмотрении задач. В частности, ими не учитывается свободная поверхность, которая представлена во всех рассматриваемых системах, и связанные с нею нарушения геометрических ограничений первоначальных течений. Однако

<sup>1</sup> Gardner W., Collier T. R. and Farr D., Utah Agr. Exp. Sta. Bull., 252, 1934.

соответствующий точный анализ еще не был разработан, и поэтому представленные приближенные методы обработки таких проблем должны дать по крайней мере существенные стороны этих решений.

**13. Субирригация.** Частный вопрос, рассматриваемый здесь, заключается в установлении степени протяженности  $x_1$  — одностороннего дренажирования из канала в грубозернистый пласт песчаника раньше, чем вся утечка воды из канала проникнет в залегающие ниже слои. Сделаем допущение, что дренажный слой полностью насыщен водой и не имеет утечек в верхнем направлении, или свободной поверхности, вплоть до точки  $x_1$ , и что фильтрация в глине под каналом является постоянным вертикальным свободным падением с такой скоростью, с какой глины



Фиг. 136. Схематическое представление проблемы субирригации (по Гарднеру, Коллие и Фарру).

1 — глина; 2 — гравий.

в состоянии унести жидкость. Тогда уравнение неразрывности совместно с законом Дарси приведет к следующему выражению:

$$hk_g \frac{d^2p}{dx^2} = k_c \gamma g, \quad (1)$$

где  $h$  — толщина гравийного слоя;  $k_g$  — его проницаемость;  $k_c$  — проницаемость глины;  $\gamma$  — плотность воды;  $g$  — ускорение силы тяжести (фиг. 136). Интегрируя уравнение (1) при условиях, что давление и его градиент будут равняться нулю при  $x_1$ , можно легко убедиться, что  $x_1$  дается волях давления  $p_0$  на поверхности канала гравийного слоя следующим уравнением:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2p_0 h k_g}{k_c \gamma g}} = \sqrt{\frac{2h_0 h k_g}{k_c}}, \quad (2)$$

где  $h_0$  — напор жидкости, тождественный давлению  $p_0$ . Таким образом, если  $p_0$  является собой напор жидкости — 0,610 м, слой гравия имеет мощность 0,305 м, и отношение  $k_g/k_c = 100\,000$ , то  $x_1$  будет иметь значение 192,75 м. Хотя пренебрежение фильтрацией в направлении перекрывающего слоя глины создает тенденцию к завышению значения  $x_1$ , даваемого уравнением (2), последнее все же дает численный результат порядка правильных величин.

**14. Проблема водонасыщения.** Из определения потенциала скорости с вертикальной координатой  $y$ , направленной вверх

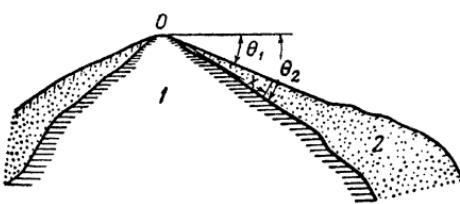
$$\Phi = \frac{k}{\mu} (p + \gamma gy), \quad (1)$$

следует, что высота над плоскостью  $y=0$ , до которой поднимется жидкость в открытой трубе или трещине, пронизывающей пористую среду в плоскости  $y$ , дается выражением

$$H = \frac{p - p_0}{\gamma g} + y = \frac{\mu}{kg} \Phi - H_0 = \frac{\Phi}{k} - H_0, \quad (2)$$

где  $p_0$  — атмосферное давление и  $H_0$  — соответствующий напор жидкости. Выбирая затем  $\Phi$ , абсолютное значение которого требует всегда прибавления произвольно выбранной константы так, чтобы включить в уравнение (2) член  $H_0$ , видно, что кривая, представляющая собой высоты жидкости  $H$  — „пьезометрическую поверхность“, пропорциональна потенциальному скорости в пористой среде. Так как  $H$  показывает нижний предел высоты, до которой распространяется зона полного насыщения жидкостью при гравитационном течении, „зона погружения в воду“ — расчет распределения потенциала  $\Phi$  дает по крайней мере ограничивающую нижнюю граничную поверхность той части пласта песчаника, которая насыщена и погружена в воду. Это определение условия водонасыщения соответствует такому его значению, которое зависит от величины давления жидкости, а именно, песчаник будет в любой точке водонасыщенным или сухим по мере того, как давление жидкости в нем будет больше или меньше атмосферного давления.

**15. Проблема эрозии.** Если почва, покрывающая склоны холма или горы, имеет недостаточную глубину залегания, чтобы отвести выпадающий на нее дождь, то излишек воды будет стекать по



Фиг. 137. Склон холма, подвергнутый почвенной эрозии (по Гарднеру, Коллие и Фарру).

1 — скала; 2 — почва.

через  $\theta_1(x)$  падение верхнего покрова почвы на расстоянии  $x$  от вершины холма, получим следующее равенство из уравнения неразрывности:

$$q \cos \theta_1(x) = \bar{k} \frac{d}{dx} \left[ x \int_{\theta_1(x)}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \right], \quad (1)$$

в результате этого может образоваться серьезная эрозия верхнего покрова почвы. Приближенный расчет минимальной глубины почвы, необходимой для удаления выпадающего дождя с интенсивностью  $q$ , может быть сделан следующим путем. Допустим, что поверхность почвы лежит на склоне холма с углом падения  $\theta_2$  и имеет форму клина (фиг. 137). Обозначая

или

$$\left(1 - \frac{q}{k}\right) \cos \theta_1(x) = \cos \theta_2 + x \sin \theta_1(x) \frac{d\theta_1(x)}{dx}. \quad (2)$$

Легко удостовериться, что решение этого уравнения дается:

$$\cos \theta_1 = \frac{\cos \theta_2}{1 - \frac{q}{k}} + \frac{C}{x - \frac{q}{k}}. \quad (3)$$

Так как  $\theta_1$  должен оставаться конечным даже при  $x=0$ , то  $C$  следует брать равным нулю. Поэтому  $\theta_1$  имеет постоянное значение, определяемое выражением:

$$\cos \theta_1 = \frac{\cos \theta_2}{1 - \frac{q}{k}}. \quad (4)^1$$

Таким образом, видно, что если интенсивность падающего дождя  $q$  настолько велика, что правая сторона уравнения (4) превосходит единицу, то падающий дождь по необходимости будет растекаться по поверхности почвы, даже если верхний покров ее горизонтален.

**16. Дренирование гончарными трубами.** Основная задача систем дренирования гончарными трубами — защитить верхний покров почвы некоторой области от опасности затопления водой<sup>2</sup>.

Так, если грунтовая вода в поверхностных отложениях подвержена направленному вверх градиенту потенциала, то она будет подниматься к поверхности и насыщать верхний почвенный покров, если только дренажные приспособления не в состоянии собрать весь направленный вверх поток воды. Приближенный расчет соответствующего размещения дренажных труб может быть произведен следующим образом. Представим себе дренажные трубы бесконечным рядом стоков с расстоянием между ними  $a$ , установленным на глубине  $d$  ниже поверхности. Они сообщают результирующему распределению потенциала в системе член

$$\Phi = q \ln \left[ \operatorname{ch} \frac{2\pi(y-d)}{a} + \cos \frac{2\pi x}{a} \right] \quad (1)$$

(гл. IV, п. 9 и гл. IX, п. 8), где расход каждой дренажной трубы  $4\pi q$  (фиг. 138).

Условие, при котором в системе не будет водонасыщения или фильтрации воды через поверхностный покров, будет заключаться в допущении, что верхний покров водонепроницаем. Это условие аналитически

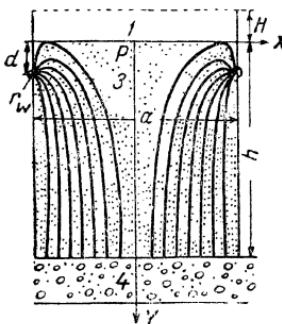
<sup>1</sup> В работе Гарднера, Коллие и Фарра совершенно точно принято, что верхняя поверхность почвы является плоскостью, так что  $\frac{d\theta_1}{dx} = 0$ .

<sup>2</sup> Рассуждение, которое приводится здесь, отличается от метода Гарднера, Коллие и Фарра тем, что последний синтезирует течение из гравийного слоя в дренажные трубы как простую сумму линейного и радиального течений. В данном случае течение в систему дренажных труб представлено строго уравнением (2), за исключением того, что пренебрегается свободной поверхностью, которая образует верхнюю границу течения.

выполняется помещением мнимого ряда дренажных труб в  $y = -d$  или прибавлением к величине  $\Phi$  уравнения (1) совершенно аналогичного члена, где  $d$  в нем заменено через  $-d$ . Тогда можно написать результатирующий потенциал в таком виде:

$$\Phi = c + q \ln \left[ \operatorname{ch} \frac{2\pi(y-d)}{a} + \cos \frac{2\pi x}{a} \right] \left[ \operatorname{ch} \frac{2\pi(y+d)}{a} + \cos \frac{2\pi x}{a} \right]. \quad (2)$$

Отсутствие фильтрации через поверхностный покров фактически обязано гравитационному характеру течения, а не водонепроницаемости его. Это можно установить добавлением условия, что давление в центральной точке  $P$  (фиг. 138) и на поверхностях дренирования с радиусом  $r_w$  будет атмосферным  $p_0$ . Сначала выберем константу  $c$  в уравнении (2) так, чтобы суммарный, направленный вверх движущий потенциал от гравийного слоя на глубине  $h$  был тождествен напору жидкости  $H$ .



Фиг. 138. Два ряда гончарных дренажных труб, установленных поверх гравийного слоя, чтобы предохранить почву от водонасыщения (по Гардиеру, Коллие и Фарру).

1 — пьезометрическая поверхность; 2 — поверхность почвы; 3 — глинистая почва; 4 — гравий.

Чтобы иметь строго постоянный потенциал на глубине  $h$ , потребуется получить отражение двух рядов стоков, участвующих в уравнении (2) мнимыми отображениями сначала по линии  $y = h$ , затем в направлении оси  $X$ -ов, затем снова по  $y = h$  и т. д., образуя при этом бесконечный ряд параллельных стоков. Если глубина гравийного слоя ниже линии дренажных труб имеет порядок или больше, чем расстояние между трубами  $a$ , то ряд при  $y = +d$  уже дает потенциал при  $y = h$ , который будет постоянным для всех практических целей, что будет детально показано в гл. IX, п. 8. Таким образом, потенциал при  $y = h$ , соответствующий уравнению (2), может быть выражен:

$$\Phi(y=h) \cong c + q \ln \operatorname{ch} \frac{2\pi(h-d)}{a} \operatorname{ch} \frac{2\pi(h+d)}{a}. \quad (3)$$

Потенциал на поверхности в точке, лежащей между дренажными трубами:

$$\Phi(0, 0) = c + 2q \ln 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi d}{a}, \quad (4)$$

так что  $q$  дается выражением:

$$q = \frac{\bar{k}H}{\ln \frac{\operatorname{ch} 2\pi(h-d)/a \operatorname{ch} 2\pi(h+d)/a}{4 \operatorname{ch}^4 \pi d/a}}. \quad (5)$$

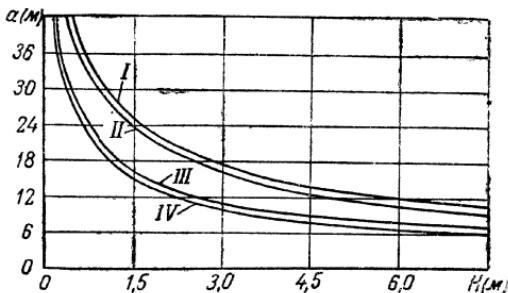
Прилагая теперь условие, что давление в  $P$  аналогично тому, что имеется на дренажных поверхностях, следует, что

$$\frac{2q}{k} \ln 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi d}{a} = d + \frac{2q}{k} \ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi r_w}{a} \operatorname{sh} \frac{2\pi d}{a}.$$

Объединяя это выражение с (5), можно написать уравнение, устанавливающее величину расстояния  $a$ , а именно:

$$\ln \frac{\operatorname{ch}^2 \pi d/a}{\operatorname{sh} \pi r_w/a \operatorname{sh} 2\pi d/a} = \frac{d}{4 \operatorname{ch}^4 \pi d/a} - \ln \frac{\operatorname{ch} 2\pi(h-d)/a \operatorname{ch} 2\pi(h+d)/a}{4 \operatorname{ch}^4 \pi d/a}. \quad (6)$$

Наиболее простая процедура нахождения расстояния  $a$  между дренажными трубами из этого уравнения как функции остальных параметров  $r_w$ ,  $d$ ,  $h$  и  $H$ , повидимому, заключается в допущении некоторых значений  $r_w$ ,  $d$ ,  $h$  и  $a$ , а затем в подсчете соответствующих величин  $H$ . На фиг. 139 даётся построение рассчитанных этим путем расстояний  $a$  по отношению к разности движущего напора жидкости  $H$  для глубин дренирования  $d = 1,525$  и  $3,05$  м и глубины залегания гравийного слоя  $h = 15,25$  м с радиусом дренирующей трубы  $0,075$  и  $0,152$  м. Следует заметить, что по мере того, как возрастает движущий напор  $H$ , резко падает величина расстояния  $a$ . Поэтому стоимость эффективного дренаажа с ростом  $H$  становится очень быстро недопустимой. Дальнейшее сравнение кривых при различных  $d$  и  $r_w$  показывает, что близкое размещение становится весьма существенным фактором, по мере того уменьшается глубина дренажных труб или их радиусы.



Фиг. 139. Расстояние  $a$  фронта гончарных труб, необходимых для предупреждения затапливания водой:

$H$  — напор жидкости, создающей течение, направленное вверх;  $I$  —  $d = 3$  м,  $r_w = 0,15$  м;  $II$  —  $d = 3$  м,  $r_w = 0,075$  м;  $III$  —  $d = 1,5$  м,  $r_w = 0,15$  м;  $IV$  —  $d = 1,5$  м,  $r_w = 0,075$  м;  $d$  — глубина дренирования;  $r_w$  — радиус дренирования; глубина гравийного слоя, служащего источником питания, — 15 м.

**17. Теория гравитационного течения Дюпюи-Форхгеймера.** В настоящее время положения теории гравитационного течения Дюпюи-Форхгеймера являются настолько сомнительными, что обесценивают почти всю теорию, если только ее не прикладывать с большой осторожностью. Однако ее широкое применение даже в настоящее время требует дать по крайней мере краткое описание ее основных сторон. Все они, разумеется, вытекают из допущений, сделанных Дюпюи<sup>1</sup> в 1863 г., что для малых углов наклона свободной поверхности при гравитационном течении линии тока могут быть приняты горизонтальными и должны быть связаны со скоростями, пропорциональными наклону свободной поверхности, и не зависят от глубины (цилиндрическое течение). Эти два допущения позволили Дюпюи вывести формулу для радиального

<sup>1</sup> Dupuit J., Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux, 1863.

гравитационного течения, а в руках Форхгеймера<sup>1</sup> дали общее уравнение для любого гравитационного течения. Вывод Форхгеймера может быть очень легко получен простым приложением уравнения неразрывности к жидкости в любой колонне песка, заполненного ею с высотой  $\bar{h}$  поверх водонепроницаемого ложа системы. Если  $v_x$ ,  $v_y$  являются компонентами скорости при установившемся движении в колонне и сохраняют свое значение по всей длине ее, то уравнение неразрывности требует, чтобы:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{h} v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{h} v_y) = 0. \quad (1)$$

Далее, допущения Дюпюи налагают условия, что

$$v_x = -\bar{k} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}; \quad v_y = -\bar{k} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}. \quad (2)$$

Отсюда немедленно следует:

$$\frac{\partial^2 \bar{h}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}^2}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

что и является выводом Форхгеймера.

Это уравнение свободной поверхности при гравитационном течении было приложено к разнообразным проблемам последнего<sup>2</sup>. Повидимому, аналитическая процедура, которую можно применить для решения этого уравнения, соответствует той, что была развита в главе IV для математической трактовки двухразмерного уравнения Лапласа при распределении давления в несущей жидкости пористой среде, так как она фактически с внешней стороны дает выражение, тождественное приведенному нами ранее.

Так, в частности, уравнение (3) налагает условие, что для линейного течения длиной  $L$ , с граничными значениями для  $\bar{h}$  величин  $h_e$ ,  $h_w$ :

$$\bar{h}^2 = \frac{h_e^2 - h_w^2}{L} x + h_w^2, \quad (4)$$

в то время как для соответствующей радиальной системы, оконтуренной концентрическими кругами с радиусами  $r_e$ ,  $r_w$ :

$$\bar{h}^2 = \frac{h_e^2 - h_w^2}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r}{r_w} + h_w^2, \quad (5)$$

Возвращаясь теперь к допущениям Дюпюи, ясно, что, так как

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad (6)$$

то допущение о „цилиндрическом течении“  $\left( \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \right)$  налагает условие, чтобы вертикальная скорость оставалась постоянной в горизон-

<sup>1</sup> Forchheimer, Ph., Zeits. Arch. Ing. Ver. Hannover, 1886.

<sup>2</sup> Forchheimer, Ph., Hydraulik, 3d ed., Chap. III, 1930.

тальных плоскостях. Тогда на внешнем контуре, где поддерживается постоянство потенциала,  $v_z$ , очевидно, будет равняться нулю. Отсюда  $v_z$  будет равняться нулю внутри всей системы. Однако без вертикальных скоростей свободная поверхность будет горизонтальной, и течение не будет иметь гравитационной составляющей. Отсутствие вертикальных скоростей при гравитационном течении совершенно противоречит условиям, налагаемым законом Дарси.

Из следующего соотношения можно вывести суждение об общей природе действительных вертикальных изменений результирующей скорости при гравитационном течении:

$$\frac{\partial}{\partial z} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 2 \left[ v_x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_z}{v_x} \right) + v_y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_z}{v_y} \right) \right]. \quad (7)$$

Отсюда следует, что в точках, где линии тока образуют выпуклость, результирующая скорость уменьшается с возрастанием высоты и возрастает в тех точках, где линии тока образуют вогнутость. Результирующая скорость возрастает с увеличением высоты. Поэтому вблизи поверхности поглощения с высоким уровнем жидкости результирующие скорости должны уменьшаться с высотой, в то время как вблизи поверхности стока и постоянного потенциала с низкими уровнями жидкости, где линии тока будут перегнуты так, чтобы встретить эти поверхности под прямым углом, результирующие скорости будут увеличиваться с возрастанием высоты<sup>1</sup>. По сравнению с этими общими рассуждениями, показывающими несовместимость допущений Дюпюи с непосредственными условиями, налагаемыми законом Дарси, становятся еще более убедительными результаты специальных подсчетов, проведенных весьма строго в гл. VI, п. 5, для фильтрации воды через плотины с вертикальными ребрами. Так, возвращаясь к фиг. 108—106, видно, что даже вдоль поверхности поглощения, где наклон свободной поверхности является минимальным, распределение скорости далеко от постоянства<sup>2</sup>. Огсуществует также какая-либо связь между средней величиной скорости вдоль поверхности поглощения и наклоном свободной поверхности, которая всегда в этом месте равняется нулю. Ошибка допущений Дюпюи еще более заметна на поверхности стока, где скорости изменяются от нуля до бесконечно больших значений. Такое несоответствие было по всей вероятности замечено Дюпюи, так как он первоначально предложил свою теорию для применения только в областях с небольшим наклоном свободной поверхности.

Как и следует ожидать, обобщение Форхгеймера, представленное уравнением (3), стоит не большего, чем первоначальные допущения Дюпюи. В гл. VI, п. 5 было уже отмечено, что свободная поверхность,

<sup>1</sup> Эти общие выводы приложимы ко всем установившимся течениям жидкости. Их можно подтвердить и для частной задачи о фильтрации через плотины, сославшись на распределение скорости вдоль поверхностей плотин, как это показано на фиг. 103—106.

<sup>2</sup> Действительно, логичное приложение допущений Дюпюи приводит к абсурдному выводу, что, так как наклон свободной поверхности вдоль поверхности поглощения равняется нулю, ибо понятие „свободная поверхность“ вытекает из представления о контуре постоянного потенциала, скорость поглощения будет везде равняться нулю.

которая дается уравнением (4) и показана кривыми  $\bar{h}$  на фиг. 103—106, является только плохим приближением к правильной форме свободной поверхности. Расхождения особенно велики в том случае, где напор жидкости на стоке равен нулю. Так как теория Дюпюи-Форхгеймера не учитывает поверхности фильтрации, то граничные значения  $\bar{h}$ , которые берутся в решениях уравнения (3), должны, очевидно, соответствовать величинам напора жидкости. Когда последний равняется нулю, также будут равняться нулю высоты свободной поверхности, выведенные на основании уравнения (3). С другой стороны, пренебрежение поверхностью фильтрации является не единственной причиной трудности, ибо если даже принять граничные высоты жидкости такими, которые даются точной теорией или экспериментами на моделях, то параболическое изменение уравнения (4) все же не даст близкого приближения к форме истинной свободной поверхности.

Как уже указывалось в гл. VI, п. 5, если пренебречь всеми отмеченными трудностями, относящимися к лежащим в основе теории допущениям и выводам из уравнения (3), и приложить допущения Дюпюи к решениям (3), чтобы получить величину расхода, то окончательные значения его будут тем не менее удивительно близки к величинам, устанавливаемым эмпирическим путем или точным решением. Так, для линейного течения эта процедура в соединении с уравнением (4) дает следующее выражение:

$$Q = \bar{k} \bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{\bar{k} (h_e^2 - h_w^2)}{2L}, \quad (8)$$

а для радиального течения та же процедура, приложенная на основании уравнения (5), дает:

$$Q = 2\pi \bar{k} r \bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} = \frac{\pi \bar{k} (h_e^2 - h_w^2)}{\ln r_e/r_w}. \quad (9)$$

Как уже было замечено, уравнение (8) воспроизводит значения  $Q$ , которые даются строгим расчетом с точностью, достаточной для всех практических целей (см. последние два ряда в табл. 11). Уравнение (9), как это будет показано в гл. VI, п. 18, дает достаточно точно величину расхода по сравнению с соответствующими величинами, полученными эмпирическим путем на радиальных песчаных моделях. Разумеется, весьма затруднительно показать, каким образом различные ошибки в отношении величины  $\bar{h}$  уничтожаются при решении уравнения (3) взаимно, таким образом, что в результате получаются близкие приближения к значению результирующего расхода. Однако в гл. VI, п. 20 мы найдем, что можно получить точный вывод обоих уравнений (8) и (9) совершенно отличным путем для систем, в которых, рассматривая их с физической стороны, можно ожидать встретить величину расхода, отличную от соответствующих им значений при аналогичных гравитационных течениях. Существует весьма обширная литература, в которой на основании решения уравнения (3) выводится свободная поверхность для различных гравитационных течений<sup>1</sup>. Однако в свете проведенной дискуссии

<sup>1</sup> См., в частности, Ph. Forchheimer, Hydraulik 3d ed., Chap. III, а также J. Kozeny, Ing. Zeits., 1, 97, 1921.

едва ли стоит воспроизводить эти выводы в настоящей работе. Если известно заранее, что наклон свободной поверхности невелик на протяжении всего течения или в любой части его, можно применить вполне обоснованно для приблизительных расчетов свободной поверхности уравнение (3) или первоначальные допущения Дюпюи при условии, что известны точные значения высоты жидкости на границах интересующей нас области.

Методы нахождения соответствующих решений уравнения (3) идентичны с теми, что были описаны нами и детально показаны в главе IV. Если геометрия системы и граничные условия аналогичны соответствующим значениям проблемы, рассматриваемой в главе IV, то развитые там решения могут быть формально взяты для решений уравнений (3) с единственным изменением, что функцию  $r$  или  $\Phi$  из главы IV следует заменить через  $\bar{h}^2$  уравнения (3).

Раньше чем расстаться с рассмотрением теории Дюпюи-Форхгеймера, следует заметить, что те же самые допущения были использованы для построения теории изменения во времени уровня грунтовых вод по соседству с каналами или колодцами<sup>1</sup>. Так, если  $\bar{h}(x, y)$  — высота уровня грунтовых вод в  $(x, y)$  над водонепроницаемым ложем, принятным за горизонтальную поверхность, то уравнение неразрывности, приложенное тем же самым путем, что и при выводе уравнения (3), дает для изменения величины  $\bar{h}$  в зависимости от времени и от координат следующее выражение:

$$f \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \bar{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right) \right\}, \quad (10)$$

где  $f$  — пористость песчаника. Так как это уравнение является нелинейным и не может быть решено точным путем, в него вводятся дальнейшие приближения. Вначале  $\bar{h}$  выражается через  $H + z$ , где  $z$  — высота уровня грунтовых вод (свободная поверхность над нулевой плоскостью) и  $H$  — высота этой плоскости над водонепроницаемым ложем. Тогда уравнение (10) принимает вид:

$$f \frac{\partial z}{\partial t} = \bar{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (H+z) \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (H+z) \frac{\partial z}{\partial y} \right] \right\}. \quad (11)^2$$

Если теперь выбрать величину  $H$  так, что она представляет собой большую часть мощности водонасыщенной зоны, т. е.  $z \ll H$ , то уравнение (11) можно приближенно заменить следующим выражением:

$$\frac{f}{kH} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad (12)$$

<sup>1</sup> См. Ph. Forchheimer, там же, стр. 104; V. Felber, Die Wasserwirtschaft, 25, 25, 60, 1932; Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 26, 73, 1931; J. Kozeny, там же, 28, 102, 1933.

<sup>2</sup> Это уравнение первоначально было предложено J. Boussinesq, Jour. Math., 10, 14, 1904, и может быть также приложено к случаю, когда водонепроницаемое ложе не является горизонтальным, так что  $H$  изменяется в зависимости от  $(x, y)$ .

Это линейное уравнение тождественно соответствующему уравнению двухразмерной теплопередачи или же соответствующему двухразмерному течению сжимаемой жидкости в пористой среде [уравнение (6), гл. III, п. 4]. Хотя решения этого уравнения могут быть получены методами, развитыми в главе X, для почти произвольных граничных и начальных условий для  $z$ , подробное рассмотрение этих решений едва ли кажется оправданным в свете сомнительного характера допущений Дюпюи, лежащих в основе построения первоначального уравнения (10). Несмотря на практическое значение знания величины изменений уровня грунтовых вод при решении задач дренирования и ирригации, лучше подождать, пока не будет разработана более удовлетворительная теория, чем давать осложнения, заключающиеся в уравнении (12), которое влечет за собой ошибки неизвестной величины.

**18. Эксперименты на песчаных моделях с трехразмерными гравитационными течениями.** Теперь становится ясным, что в свете рассмотрения, проведенного в гл. VI, п. 17, уравнения (5) и (9) гл. VI, п. 17, базирующиеся на теории Дюпюи-Форхгеймера, дающие форму свободной поверхности и величину расхода при гравитационном радиальном течении, едва ли могут считаться в какой-либо степени справедливыми без прямого эмпирического или точного аналитического подтверждения. Однако эти уравнения были поставлены под сомнение только в 1927 г., когда Козени опубликовал свою первую попытку решить проблему течения прямыми методами потенциальной теории<sup>1</sup>. Так, начав с уравнения Лапласа [(2), гл. VI, п. 1], он сделал попытку синтезировать решение, удовлетворяющее граничным условиям гравитационного течения с помощью элементарных решений того типа, который был применен нами для исследования проблемы несовершенных скважин [уравнение (7), гл. V, п. 3]. К сожалению, точные граничные условия не были приложены им к решению этой задачи. Так, расход через систему был принят соответствующим линии тока, входящей в колодец на уровне жидкости в последнем. Однако в колодце, как уже было отмечено, будет иметь место определенный разрыв непрерывности, так что свободная поверхность системы будет входить в колодец над уровнем жидкости в последнем, давая толчок к образованию поверхности фильтрации. Тогда решение будет состоять только из постоянных членов и ряда функций Ганкеля, и радиальные скорости на значительных расстояниях от колодца станут экспоненциально исчезающими малыми. Однако с физической стороны ясно, что в точках, удаленных от поверхности колодца, радиальные скорости должны асимптотически приближаться к соответствующим значениям в строго двухразмерном радиальном течении. Поэтому потенциальная функция в таких точках асимптотически приближается к логарифмическому изменению или содержит, очевидно, логарифмический член, как это имеет место, например, в уравнении (5), гл. VII, п. 20 (*vide infra*). Наконец, потенциальная функция Козени не обладает характеристикой, требуемой каждым точным решением проблемы гравитационного течения, а именно, чтобы наивысшая линия тока была линией тока свободной поверхности с потенциалом, пропорцио-

<sup>1</sup> Козени J., Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 22, 120, 1927.

нальным его вертикальной координате. Конечное выражение Козени для суммарного расхода  $Q$  было:

$$Q = 2\pi \bar{k} \zeta h r_w F\left(\zeta, \frac{\pi r_w}{2h}\right), \quad (1)$$

где  $\bar{k}$  — „эффективная“ проницаемость песчаника, т. е.  $k y g / \mu$ ;  $h$  — мощность песчаника;  $r_w$  — радиус колодца и  $\zeta = 1 - \frac{h_w}{h}$ , где  $h_w$  — высота жидкости в колодце.  $F(\zeta, \pi r_w / 2h)$  является довольно сложной функцией обоих аргументов и должна быть подсчитана численно.

Условие пропорциональности расхода  $Q$  от  $r_w$ , которое налагает уравнение (1), когда функция  $F$  независима от  $\pi r_w / 2h$ , является одним из наиболее важных указаний этой теории. Этот расход совершенно точно зависит от допущения, что величина  $\pi r_w / 2h$  значительна. Однако большинству практических случаев соответствует как раз обратное явление. Что же касается остальных условий, налагаемых уравнением (1), необходимо заметить, что недавние экспериментальные исследования проблемы гравитационного течения<sup>1</sup> установили формулу, не имеющую двух толкований и которая совершенно не соответствует уравнению (1).

Поэтому, если теорию Козени нельзя считать дающей удовлетворительное решение гравитационного радиального течения<sup>2</sup>, все же она дала толчок для первого непосредственного экспериментального исследования проблемы.

Чтобы подвергнуть испытанию положения этой теории, что расход  $Q$  должен иметь свой максимум при  $\zeta = \frac{1}{2}$ , установить изменения его при  $\zeta < \frac{1}{2}$  (высота жидкости в колодце выше, чем половина мощности песчаника), а также посмотреть, какие произойдут изменения при введении  $\zeta > \frac{1}{2}$ , Козени произвел сам некоторые экспериментальные измерения в круглом баке. Его эксперименты, повидимому, удовлетворяют его теории для значения  $\zeta < \frac{1}{2}$ . Чтобы охватить все возможные данные, им была предложена эмпирическая формула:

$$Q = Q_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{h_w}{h} \right)^2 \right]^{2/3}, \quad (2)$$

которая, очевидно, мало имеет физического значения. Более полное исследование теории Козени было выполнено Эренбергером<sup>3</sup>. Эти опыты

<sup>1</sup> Wyckoff R. D., Botset H. G. and Muskat M., Physics, 3, 90, 1932.

<sup>2</sup> Следует также упомянуть о более поздней работе Козени (Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 28, 88, 1933), где была получена формула для распределения давления в основании системы при радиальном течении, воспроизводящая довольно близко результаты, полученные в экспериментах Wyckoff, Botset and Muskat. Однако анализ, который был им развит по аналогии с теорией комплексных переменных параболического линейного гравитационного течения (гл. VI, п. 7), повидимому, оправдывается с трудом, так как конечное распределение потенциала не удовлетворяет уравнению Лапласа.

<sup>3</sup> Ehrenberger R., Zeits. Oster. Ing. Arch. Ver., nos. 9/10, 11/12, 13/14, 1928

были прекрасно поставлены и во многих отношениях были вполне исчерпывающими. Все же, повидимому, они не дали удовлетворительного ответа на вопросы, поставленные в задаче. Основным результатом этой работы было опять получение корректирующего опыта коэффициента, который следует приложить к формуле Козени. Ввиду того, что этот корректирующий множитель не имеет физического значения, распространение его на иные размеры модели течения или на иные геометрические формы течения должно быть установлено новыми экспериментами. Опыты Эренбергера с трудом поддаются интерпретации, так как в большинстве случаев жидкость откачивали из скважины с помощью спущенных труб, установленных сейчас же под уровнем жидкости, нарушая при этом, повидимому, течение по соседству со скважиной.

Следующие попытки получения более удовлетворительного ответа на проблему гравитационного течения были исследования Венцеля<sup>1</sup>, а также Вайкова, Ботсета и Маскета, которые были выполнены ими почти одновременно.

Венцель был заинтересован скорее в задаче обратного решения уравнения (9), гл. VI, п. 17, и применить его для определения проницаемости водяного песчаника, чем в общей постановке вопроса гравитационного течения. Так, Венцель замечал снижение уровня в 80 с лишним наблюдательных скважинах, расположенных радиально относительно двух скважин, в которых производилась откачка с известной скоростью. После этого он подсчитал проницаемость на основании пар наблюдений за скважинами с расстояниями  $r_1$  и  $r_2$  от насосной скважины по формуле, в основном аналогичной обратному уравнению (9), гл. VI, п. 17, Дююи-Форхгеймера, а именно

$$\bar{k} = \frac{Q \ln r_2/r_1}{\pi (h_2^2 - h_1^2)}, \quad (3)$$

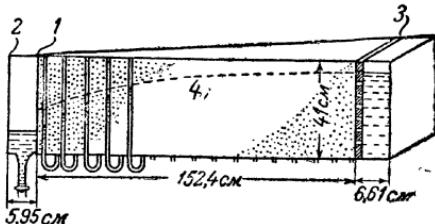
где  $h_1$  и  $h_2$  — высоты жидкости в двух точках  $r_1$  и  $r_2$ .

Их можно определить путем вычитания значений снижения уровня из ненарушенных величин уровня воды в песчанике. Венцель в результате этих расчетов нашел, что проницаемость  $\bar{k}$ , повидимому, равномерно возрастала с увеличением расстояния  $r_2$  второй обсервационной скважины, и вывел заключение, что по крайней мере в его экспериментах уравнение (3) должно подвергнуться некоторому исправлению. Однако ошибочность уравнения (3), заключающаяся в невозможности дать постоянное значение  $\bar{k}$ , была отнесена скорее за счет отсутствия равновесия при течении, чем к присущему уравнению (3) основному недостатку. После того, как начинается откачка в центральной скважине, повидимому, существует отставание во времени при установлении равновесия свободной поверхности в точках, далеко от нее расположенных. Это обстоятельство, согласно Венцелю, дает видимое увеличение значения  $\bar{k}$ , когда последняя рассчитывается по данным наблюдений, в удаленных от скважины точках. При полевых измерениях, например, сделанных Венцелем, необходимо обратить особое внимание на достижение установив-

<sup>1</sup> Wenzel L. K., Trans. Amer. Geophys. Union, p. 313. 1932, published by the National Research Council.

шегося состояния в системе. Однако не следует ожидать строгого постоянства  $k$  даже после того, как система достигла полного равновесия, пока основная формула Дюпюи [уравнение (5), гл. VI, п. 17] не стала бы совершенно справедливой. Результаты опытов Вайкова, Ботсета и Маскета<sup>1</sup> ясно показали, что причина этого несоответствия заключается в несколько иных фактах. Эти исследователи, в противоположность Венцелю, обратились к лабораторным методам Козени и Эренбергера. На фиг. 140 показана схема их прибора. Существенно новыми особенностями, введенными в эту работу, явились манометры, присоединенные к днищу резервуара с песком, с помощью которых производилось измерение радиального распределения давления вдоль ложа всей системы, а также непрерывная циркуляция жидкости в резервуаре так, чтобы можно было поддержать без труда вполне удовлетворительное установившееся состояние течения. Песок в резервуаре был набит так, чтобы обеспечить не только постоянство проницаемости, но и освобождение от захваченного системой воздуха. Для удобства был взят круговой сектор в  $15^\circ$ , который полностью воспроизводит радиальное течение.

Для изучения строго гравитационной задачи резервуар, заполненный тонкозернистым песком, имел стеклянные стенки. В последующих экспериментах, когда изучалось явление движения под давлением, был сооружен цельнометаллический резервуар (6,3-мм листовая медь) с вертикальными трубками на входе и выходе из системы. Поток жидкости замерялся по тщательно откалиброванному счетчику, включенному в систему циркуляции.



Фиг. 140. Схема резервуара, применявшегося при экспериментальном изучении радиального гравитационного течения. Расстояние между каждым из первых 10 манометров — 5,08 см; расстояние между каждым из вторых 9 манометров — 10,16 см.

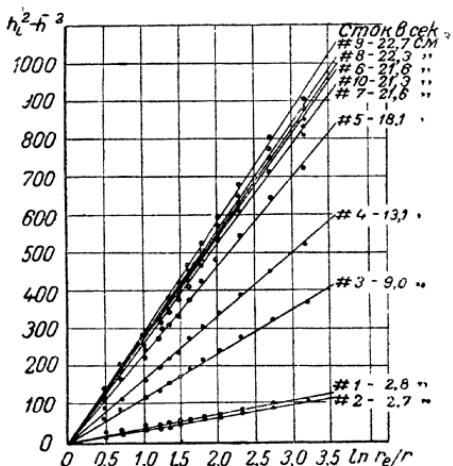
1 — проволочная сетка; 2 — центр скважины; 3 — перфорированная медная пластина; 4 — песок.

<sup>1</sup> Действительно, допуская правильность уравнения (3) для установившегося течения, казалось бы, что неустановившиеся явления, упоминаемые Венцелем, вызовут скорее видимое уменьшение  $k$  с увеличением значения  $r_2$ . Если удаленные точки  $r_2$  запаздывают достичь своего состояния равновесия при откачках, то соответствующие значения  $h_2^2 - h_1^2$  будут слишком велики. Отсюда найденное значение  $k$  будет меньше по сравнению с малыми значениями  $r_2$ , где запаздывание будет малозаметным. Следует заметить, что Венцель в полном отчете об этих испытаниях (U. S. Geol. Surv., Water Supply Paper, 679-A, 1936) показывает, что средние величины видимых значений проницаемости на противоположных радиусах от насосной скважины, что по его мнению, должно устранять по крайней мере частично влияние нормального градиента грунтовых вод в водоносном горизонте, являются более или менее постоянными. Тем не менее трудно дать оценку этого вывода в свете того обстоятельства, что глубина вскрытия песчаника насосной скважины составляла только 40%. Один этот факт должен обесценить уравнение (3), даже если принять допущения Дюпюи вполне справедливыми.

При экспериментах с резервуаром, имеющим стеклянные стенки, наблюдения за высотой стояния воды в песке производились на различных расстояниях от центра скважины. Однако лучшую количественную характеристику дают отсчеты по манометрическим трубкам, которые, очевидно, соответствуют напорам<sup>1</sup> жидкости в системе, замеренным в основании слоя песка. Анализ этих данных показывает, что в пределах ошибки эксперимента они удовлетворяют отношению:

$$\bar{h}^2 - h_w^2 = \frac{h_e^2 - h_w^2}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r}{r_w}, \quad (4)$$

где  $\bar{h}$  — отсчет по манометру напора жидкости на расстоянии  $r$ , а  $h_e$  и  $h_w$  — отсчеты при расстоянии  $r_e$  и  $r_w$ ; последняя величина определяет собой соответственно радиус скважины. На фиг. 141 показана характеристика типичного комплекса полученных эмпирических данных и согласованность их с уравнением (4). Видно, что, несмотря на отклонения в отдельных точках, данные эти можно рассматривать в целом подтверждающими уравнение (4).



Фиг. 141. Распределение напора жидкости  $\bar{h}(r)$  в основании радиальной модели гравитационного течения, представленной на фиг. 140.  $h_e$  — напор жидкости при  $r = r_e$ .

дом  $Q$  в системе и граничными условиями, было произведено измерение проницаемости по месту опытов<sup>2</sup>, исходя из того обстоятельства, что, когда уровень жидкости в скважине находится поверх высоты песка,

<sup>1</sup> В гидрологической литературе эти высоты обычно называются „пьезометрическими высотами“ (гл. VI, п. 14).

<sup>2</sup> В этих, а также во всех последующих экспериментах, где делается попытка отнести расход  $Q$  к физическим и геометрическим константам системы, резервуар, приведенный на фиг. 140, был заменен цельнометаллическим 15° сектором, выдерживающим давление, так как было найдено, что эффективная проницаемость песков в открытом резервуаре (фиг. 140) значительно отличается от соответствующих величин, подсчитанных из опытов с трубками, набитыми песком.

На фиг. 142 показаны манометрические отсчеты для одного из этих экспериментов, построенные в декартовой системе координат.

Точки дают наблюденные значения, кружки — численные, согласно уравнению (4), а крестики — величины, подсчитанные на основании приближенной теории, котораядается в гл. VI, п. 20 (5).

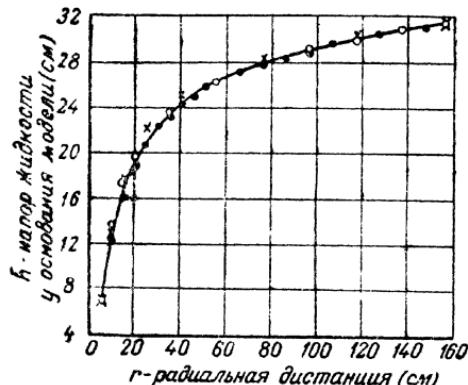
Чтобы определить зависимость между суммарным расходом

течение принимает двухразмерный радиальный характер, для которого являются уже известными распределение давления и расход  $Q$ .

Из уравнения (10), гл. VI, п. 2, видно, что  $\bar{k}$  может быть подсчитано:

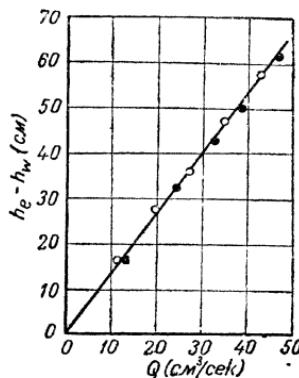
$$\bar{k} = \frac{Q \ln r_e/r_w}{2\pi (h_e - h_w) h}, \quad (5)$$

где  $Q$  — расход течения через систему, где напоры жидкости в точках  $r_e$  и  $r_w$  будут соответственно  $h_e$  и  $h_w$ , и  $h$  — мощность песка. Отсюда, делая



Фиг. 142. Распределение напора жидкости в основании радиального течения гравитационного течения.

Точки — наблюденные значения; кружочки — исчисленные согласно уравнению (4), гл. VI, п. 18;  $\times$  — подсчитанные согласно уравнению (5), гл. VI, п. 20;  $r_w = 6,4$  см;  $r_e = 156$  см;  $h_w = 7,0$  см;  $h_e = 31,5$  см.



Фиг. 143. Определение проницаемости песчаника в экспериментах по гравитационному течению с помощью измерений при условиях строго радиального течения.

Перепад напора жидкости равен  $(h_e - h_w)$ ;  $Q$  — расход течения через сектор.

построение величины  $Q$  по отношению к  $h_e - h_w$  и принимая в расчет множитель  $(\ln r_e/r_w)/2h\pi$ , получаем значение  $\bar{k}$  из наклона результирующей прямой линии.

На фиг. 143 приведен такой график для некоторых фактически проведенных экспериментов.

Более серьезным вопросом явилось определение величины капиллярного слоя, который по природе своей должен перекрывать основную массу жидкости в песке и который следует принимать во внимание при окончательных выводах.

Сначала можно предположить, что капиллярный слой не будет участвовать в течении. Однако более внимательное рассмотрение показывает, что, наоборот, капиллярный слой должен вести себя как сифон, действующий в направлении главного течения, и, таким образом, увеличивать последнее. На фиг. 144 показана схематически сложная система капиллярного слоя и основной массы жидкости. Видно, что верхний и нижний покровы капиллярного слоя являются по существу своему

свободной поверхностью при атмосферном давлении. Напоры жидкости в основании песка обозначены через  $h$ , напоры жидкости в песке через  $z$ .  $h_c$  представляет собой мощность капиллярного слоя и равняется приблизительно капиллярному подъему жидкости в рассматриваемом песке, через который она движется.

Выводы из проделанного анализа, дальнейшие подробности которого можно найти в первоисточнике, показывают, что когда высоты жидкости в скважине, а особенно в нагнетательном резервуаре, близки

к кровле песка, так что капиллярный слой полностью не развит, можно пренебречь течением в капиллярном слое. Следующее уравнение воспроизводит довольно точно строго гравитационное течение:

$$Q_g = \frac{\pi k (h_e^2 - h_w^2)}{\ln r_e/r_w}, \quad (6)$$

Фиг. 144. Схема влияния капиллярного слоя на гравитационное течение.

$h$  — напор жидкости у основания модели;  $z$  — высота жидкости в песке ниже капиллярного слоя;  $l$  — ось скважины.

кости в скважине и нагнетательном резервуаре стоят ниже кровли песка на высоту по крайней мере капиллярного подъема жидкости, нельзя более пренебречь течением в капиллярном слое, и комбинированное течение может быть довольно близко представлено уравнением:

$$Q_{g+c} = \frac{\pi k (h_e - h_w) (h_e + h_w + h_c)}{\ln r_e/r_w}. \quad (7)$$

В табл. 12 приведены данные, взятые из отдельных опытов, которые показывают целесообразность применения скорее уравнения (7), чем (6), для сравнительно малых напоров поглощения, и где капиллярный слой был полностью развит. В этих экспериментах  $h_c$  принимается 9,5 см.

Таблица 12

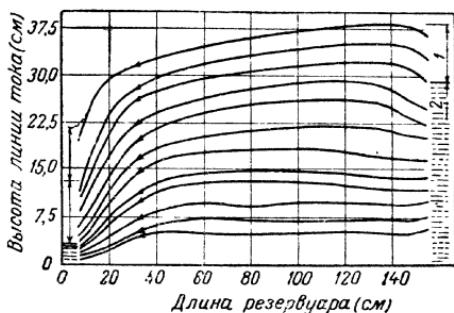
Сравнительная таблица наблюденных и подсчитанных расходов через радиальную гравитационную систему

№ опытов	$h_e$	$h_w$	$h$	Подсчитан- ный расход по уравне- нию (6), $cm^3/\text{сек}$	Подсчитан- ный расход по уравне- нию (7), $cm^3/\text{сек}$	Наблюден- ный расход, $cm^3/\text{сек}$
1	23,67	18,07	29,0	3,06	3,76	3,90
2	15,37	0,17	29,0	3,09	4,98	4,95
3	14,37	0,17	29,0	2,70	4,47	4,55
4	9,57	0,17	29,0	1,18	2,37	2,50

Когда  $h_e = 0$  или когда значением его можно пренебречь по сравнению с  $h_e + h_w$ , уравнение (7) обращается, как это и следует ожидать, в (6).

Таким образом, уравнение (6), которое было получено первоначально на основе ошибочных допущений Дююи и которое будет выведено в последующем (гл. VI, п. 20) с помощью физически обоснованного приближенного метода, получает эмпирическое обоснование, за исключением учета возмущений, обязанных наличию капиллярного слоя. Так как при встречающихся на практике течениях мощность песчаника обычно значительно выше высоты капиллярного подъема в пласте, в большинстве случаев для расчетов будет вполне достаточной более простая формула (6).

Что же касается формы свободной поверхности, то, несмотря на очень большое количество наблюдений, которые были проделаны над высотой ее, эмпирические исследования оказались недостаточными, чтобы дать какое-либо аналитическое представление об этой форме. На фиг. 145 приведено типичное семейство линий тока, включая сюда и их значения для капиллярной зоны, следы которых даются чернильными струйками вдоль поверхности поглощения. Теория Дююи-Форхгеймера дает совершенно точное уравнение свободной поверхности. Ошибка же его, заключающаяся в том, что теория не учитывает поверхности фильтрации у скважины, сама по себе является достаточной, чтобы обесценить все его усложнения, относящиеся к форме свободной поверхности. Как было показано выше, этот вывод следует также из эмпирического наблюдения, что распределение напора жидкости у основания может быть формально представлено тем же самым выражением (4), что и формула Дююи-Форхгеймера для свободной поверхности. Справедливость последней формулы требует совпадения между пьезометрическими высотами у основания и высотами свободной поверхности. Однако опыты не подтверждают даже их приближенной сходимости. Что же касается допущений Дююи относительно цилиндрического течения в отдаленных частях системы при радиальном течении, то из эмпирических заключений для уравнений (4) и (6) можно извлечь косвенное подтверждение этого положения. Небольшое наблюдение показывает, что течение определяется значением скорости у основания, соответствующей уравнению (4), помноженной на напор поглощения  $h_e$ . Это в свою очередь налагает условие постоянства скорости вдоль поверхности поглощения, как это требуется гипотезой „цилиндрического течения“. В дальнейшем будет показано, что приближенная теория (гл. VI, п. 20) также приводит к практически постоянной скорости по-



Фиг. 145. Ряд типовых линий тока, наблюденных при экспериментах с гравитационным течением.

1 — капиллярная секция; 2 — гидростатический уровень.

глощения, если радиус внешнего контура, как это легко выводится из уравнения (5), гл. VI, п. 20, значительно превышает мощность песчаника. С другой стороны, следует заметить, что значение средней скорости не является тождественной величиной гидравлического градиента свободной поверхности, который теоретически должен равняться нулю на внешнем контуре, но фактически дается градиентом напора жидкости в основании системы.

**19. Составной напор при гравитационном течении.** В исследовании, которое было описано в предыдущем разделе, были установлены зависимости между давлением и течением, контролирующие радиальное гравитационное течение. Полученные выводы были распространены на

системы, в которых радиальные перемещения наложены на простое гравитационное течение. Это положение соответствует системам, в которых уровни или напоры жидкости в нагнетательных краях системы выше мощности песчаника. Разумеется, динамические столбы жидкости в скважинах должны быть при этом меньше мощности песчаника. В противном случае течение будет строго двухмерным и радиальным без всякого гравитационного компонента. Небольшое рассмотрение показывает, что в первом приближении сложное течение, охарактеризованное нами выше, может решаться аналитически как строго радиальное течение, непосредственно наложенное на гравитационное. На фиг. 146 приведена диаграмма, из которой видно, что если  $h$  — мощность песчаника;  $h_w$  — напор жидкости на поверхности поглощения и  $h_b$  — напор жидкости в скважине, то радиальный компонент расхода дается [уравнение (10), гл. IV, п. 2]:

$$Q_r = \frac{2\pi k h (h_0 - h)}{\ln r_e/r_w} . \quad (1)$$

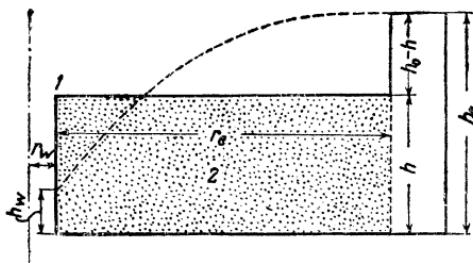
Компонент гравитационного течения будет, согласно уравнению (6), гл. IV, п. 18:

$$Q_g = \frac{\pi k (h^2 - h_w^2)}{\ln r_e/r_w} ,$$

так что результирующий суммарный расход:

$$Q_{gr} = \frac{\pi k (2hh_0 - h^2 - h_w^2)}{\ln r_e/r_w} . \quad (2)$$

Так как капиллярный слой не будет полностью развит, когда напор жидкости у нагнетательной поверхности будет превышать высоту песка,



Фиг. 146. Схематическое представление составного гравитационного течения.

1 — поверхность забоя скважины; 2 — песок.

влияние его будет ничтожным. Табл. 13 показывает типовую серию проверок уравнения (2), где

$$h = 29,0 \text{ см}; \quad r_e = 39 \text{ см}; \quad r_w = 3 \text{ см}; \quad \frac{\pi k}{24} = 0,0335.$$

Эти данные были получены на цельнометаллическом, выдерживающем давление  $15^\circ$  секторе, в днище которого были расположены манометрические трубы для замера значений  $\bar{h}$ , аналогично схеме, представленной на фиг. 140. Следует заметить, что согласованность наблюденных и подсчитанных расходов в данном случае значительно лучше, чем при опытах со строго гравитационным течением.

Проделывая аналогичный анализ по распределению напора жидкости при сложном течении, легко сделать вывод, что результирующий напор жидкости при радиусе  $r$  у основания должен выразиться:

$$\bar{h} = \frac{h_0 - h}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r}{r_w} + \sqrt{h^2 - \frac{(h^2 - h_w^2)}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r_e}{r}}. \quad (3)$$

Табл. 14 приводит эксперименты, проверяющие это уравнение для граничных условий

$$\begin{aligned} h_0 &= 50,4 \text{ см}; & h &= 40,5 \text{ см}; & h_w &= 0; \\ r_w &= 6,4 \text{ см}; & r_e &= 156,0 \text{ см}; & Q &= 50,0 \text{ см}^3/\text{сек}. \end{aligned}$$

В данном случае согласованность в величине расходов опять гораздо лучше, чем для простого гравитационного течения. Поэтому можно рассматривать оба уравнения дающими вполне удовлетворительные решения.

Таблица 13

**Сравнение наблюденных и подсчитанных расходов в радиальной системе со сложным напором и гравитационным течением**

$h_0$	$h_w$	Подсчитанный расход, $\text{см}^3/\text{сек}$	Наблюденный расход, $\text{см}^3/\text{сек}$
89,47	27,47	46,97	46,1
78,38	27,47	38,56	38,4
59,67	27,47	24,38	23,7
39,37	27,47	8,99	8,6
70,87	22,57	36,07	36,1
47,57	22,57	18,41	18,5
78,37	17,17	44,56	44,2
58,47	17,17	29,48	29,0
44,97	17,17	19,25	19,3
74,37	12,57	43,32	43,5
59,57	12,57	32,09	31,5
48,17	12,57	23,46	23,9
68,17	6,97	40,05	40,8
50,87	6,97	26,94	27,0
35,55	6,97	15,32	16,4
61,47	0,17	35,61	36,1
56,47	0,17	31,82	32,1
48,17	0,17	25,52	26,7

Таблица 14

**Сравнение наблюденного и рассчитанного распределения напора жидкости у основания радиальной системы для сложного напора и гравитационного течения**

( $r$ ), см	Рассчитанный ( $\bar{h}$ ), см	Наблюденный ( $\bar{h}$ ), см	( $r$ ), см	Рассчитанный ( $\bar{h}$ ), см	Наблюденный ( $\bar{h}$ ), см
6,4	0	0	55,8	39,9	40,0
10,2	16,4	15,7	66,0	41,8	41,7
15,3	23,5	22,8	76,2	43,0	43,1
20,3	27,8	27,4	86,4	44,4	44,3
25,4	30,6	30,6	96,5	45,6	45,4
30,5	33,0	33,2	106,7	46,7	46,5
35,6	34,9	35,1	116,8	47,6	47,4
40,6	36,5	36,8	127,0	48,3	48,5
45,7	37,6	38,0	137,2	49,1	49,3
50,8	39,0	38,9	147,3	49,7	50,0
			156,0	50,4	50,4

**20. Приближенная потенциальная теория расхода при гравитационном течении.** Было показано, что вследствие сомнительного характера допущений, лежащих в основе теории Дюпюи-Форхгеймера, успех ее, приведший к установлению расхода при линейном и радиальном гравитационных течениях [уравнения (8) и (9), гл. VI, п. 17], которые дают исключительно близкие приближения к значениям расходов, получаемым с помощью точного аналитического решения или прямыми экспериментами, следует рассматривать как в значительной степени случайный. Было показано на основании общих рассуждений и специальных расчетов (гл. VI, п. 5), что эти допущения являются ложными. Чтобы разрешить это противоречивое положение, при котором формулы расхода принимаются в таком неблагоприятном освещении, мы дадим краткую теорию, которая также приводит к указанным формулам, но является свободной от допущений Дюпюи. Она включает только те приближения, при которых можно заранее ожидать, что они дадут небольшие ошибки в конечных расчетах величины расхода.

Эта теория<sup>1</sup> базируется на замене реального гравитационного течения таким, которое обладает теми же граничными условиями, но не включает свободную поверхность.

Так, для линейного течения с напором поглощения  $h_e$  и напором стока  $h_w$  приближенная система, заменяющая физическое гравитационное течение  $ABCDE$ , будет  $AFDE$  с теми же самыми граничными условиями вдоль  $AF$  и  $ED$ , как и в  $ABCDE$  (фиг. 147). Контуры  $EA$  и  $DF$  принимаются водонепроницаемыми. Вспоминая рассмотрение электрической модели гравитационного течения, которая дается в гл. VI, п. 6, видно, что приближенная система  $AFDE$  совершенно аналогична электрической модели гравитационного течения перед тем, как был

<sup>1</sup> Muskat, M., Physics, 6, 402, 1935; также Trans. Amer. Geophys. Union, p. 391, 1936.

вырезан угол  $FCD$ , чтобы создать подобие свободной поверхности  $CD$ . Так как потенциал вдоль  $CF$  нарастает постепенно, пока в  $F$  не станет равным соответственному значению вдоль  $ED$ , ясно, что суммарный расход вдоль  $CF$  должен быть очень мал.

Поэтому участок  $DCF$  сообщит очень небольшую величину дополнительного расхода, помимо того, который проходит при физическом гравитационном течении  $ABCDE$ <sup>1</sup>. Отсюда расход через  $AFDE$  будет по необходимости превышать величину расхода через  $ABCDE$ , так как  $ACDE$  имеет большее проницаемое сечение, чем  $ABCDE$ . Вполне резонно ожидать, что этот излишек в расходе не будет иметь практического значения и оба расхода будут очень близки по своему абсолютному значению. Справедливость этого подтверждается непосредственными электрическими измерениями<sup>2</sup> проводимости модели приближенной системы  $AFDE$  и системы  $ABCDE$ , соответствующей случаю I, гл. VI, п. 5, который показывает, что излишек величины первого расхода над вторым составляет не более  $1/4\%$ . В дальнейшем это обстоятельство подтверждается сравнением величины расхода, полученной теоретически из приближенной теории и рассчитанной по точному методу годографа согласно гл. VI, п. 5.

В свою очередь теоретическое значение расхода через приближенную систему  $AFDE$  легко устанавливается после того, как будет определено внутреннее распределение потенциала соответственно граничным условиям, а именно

$$\left. \begin{array}{l} y=0, \quad h_e: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0; \quad x=0, \quad 0 \leqslant y \leqslant h_e: \quad \Phi=k\bar{h}_e \\ x=L: \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi=\bar{k}h_w: \quad 0 < y < h_w \\ \Phi=\bar{k}y: \quad h_w < y \leqslant h_e \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (1)$$

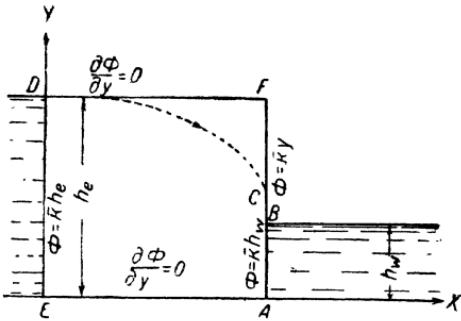
где  $\bar{k}=kyg/\mu$  — „эффективная“ проницаемость системы песчаник — вода.

Применяя теорию рядов Фурье, легко установить, что потенциальная функция, удовлетворяющая этим граничным условиям<sup>3</sup>, может быть

<sup>1</sup> В действительности, как это будет показано дальше, плотность расхода вблизи  $F$  будет даже отрицательной, так как значение потенциала, например, вдоль  $FD$  уменьшается, удаляясь от  $F$ .

<sup>2</sup> Wyckoff R. D. and Reed D. W., Physics, 6, 395, 1935.

<sup>3</sup> См. гл. VI, п. 3.



Фиг. 147. Схема приближенной системы для подсчета величины расхода через плоскость с вертикальными фасадами.

выражена:

$$\Phi = \bar{k}h_e - \frac{\bar{k}}{2h_e L} (h_e^2 - h_w^2)x + \\ + \frac{2\bar{k}h_e}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{[( - 1)^n - \cos n\pi h_w/h_e]}{n^2 \operatorname{sh} n\pi L/h_e} \cos \frac{n\pi y}{h_e} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{h_e}. \quad (2)$$

Связанный с этим расход будет, очевидно,

$$Q = - \int_0^{h_e} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy = \frac{\bar{k}(h_e^2 - h_w^2)}{2L}, \quad (3)$$

что является идентичным уравнению (8), гл. VI, п. 17, которое вытекает также из теории Дюпюи-Форхгеймера и дает значения  $\bar{Q}/\bar{k}^2$  последнего ряда табл. 11. Возвращаясь опять к сравнению этих значений  $\bar{Q}/\bar{k}^2$  и соответствующих значений, приведенных в соседнем ряду, получающихся на основе точной теории, видно, что в пределах ошибки выкладок ( $1\%$ ) оба ряда согласуются довольно точно. Это доказывает, что излишек расхода в приближенной системе по сравнению с физическим течением не может превзойти порядок величины этих ошибок.

Правильность установления величины расхода приближенной теорией не является случайной. Это можно доказать на основании того, что представленная теория дает также возможность хорошо воспроизводить распределение давления или потенциала вдоль основания системы гравитационного течения  $EA$ . Так, принимая в уравнении (2)  $y = 0$  и беря значения  $h_e$ ,  $h_w$  и  $L$ , соответствующие случаю I, гл. VI, п. 5, получаем конечное распределение давления вдоль  $EA$ , показанное кружочками на фиг. 103. Согласованность с соответствующими сплошными кривыми, подсчитанными на основании точной теории гл. VI, п. 5, повидимому, настолько близка, насколько это можно ожидать вообще от приближенной теории. Действительность показывает, что последняя дает удовлетворительное физически приближенное представление линейного гравитационного течения с такой стороны, которая непосредственно не относится к самой свободной поверхности. Фактически распределение скорости вдоль поверхности поглощения  $ED$ , как это налагается условиями уравнения (2) и как это представлено для того же случая соответствующими кружками на фиг. 103, также является вполне удовлетворительным приближением к реальному течению<sup>1</sup>. Наконец, распределение скорости вдоль поверхности стока  $AF$  представляет собой приближенное изображение правильного распределения, за исключением участка над и под свободной поверхностью, как это опять показано кружочками на фиг. 103. Изменение знака скорости вблизи верхнего края поверхности стока, разумеется, обязано тому обстоятельству, что приближенная теория налагает условия существования реального источника жидкости вблизи верхнего края поверхности стока, чтобы поддерживать здесь высокий потенциал. Аналогичная приближенная система

<sup>1</sup> Аналогичное условие, налагаемое теорией Дюпюи-Форхгеймера, будет прямая линия, параллельная  $ED$  (фиг. 103) на расстоянии  $u/k = 0,925$ .

может быть построена для задачи радиального гравитационного течения. Так, принимая опять в качестве граничных условий те, что соответствовали системе до введения в нее контура свободной поверхности, т. е.

$$\left. \begin{array}{l} y=0, \quad h_e: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0; \quad r=r_e, \quad 0 < y < h_e; \quad \Phi=\bar{k}h_e \\ r=r_w \left\{ \begin{array}{ll} \Phi=\bar{k}h_w: & 0 < y < h_w \\ \Phi=\bar{k}y: & h_w < y < h_e \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (4)$$

где  $r=r_w$ ,  $r_e$  — радиусы контуров; внутреннее распределение потенциала определяется из выражения:

$$\Phi=\bar{k}h_e+\frac{\bar{k}(\bar{h}_e^2-\bar{h}_w^2)\ln r/r_e}{2\bar{h}_e\ln r_e/r_w}+\\ +\frac{2\bar{k}h_e}{\pi^2}\sum_1^{\infty}\frac{\left\{(-1)^n-\cos\frac{n\pi h_w}{h_e}\right\}U(a_n r)\cos\frac{n\pi y}{h_e}}{n^2U(a_n r_w)}, \quad (5)$$

где<sup>1</sup>

$$U(a_n r)=I_0\left(\frac{n\pi r}{h_e}\right)K_0\left(\frac{n\pi r_e}{h_e}\right)-I_0\left(\frac{n\pi r_e}{h_e}\right)K_0\left(\frac{n\pi r}{h_e}\right), \quad (6)$$

$I_0$ ,  $K_0$  — бесселевы функции третьего рода нулевого порядка<sup>2</sup>.

В данном случае величина расхода опять дается формулой Дюпюи-Форхгеймера, так как

$$Q=2\pi r\int_0^{h_e}\frac{\partial \Phi}{\partial r}dy=\frac{\pi\bar{k}(h_e^2-h_w^2)}{\ln r_e/r_w}, \quad (7)$$

члены ряда при интегрировании становятся равными нулю. Как это было показано в гл. VI, п. 18, формула эта воспроизводит с точностью, достаточной для всех практических целей, эмпирически наблюденные значения расхода при радиальных гравитационных течениях. В данном случае точный вывод этой формулы для приближенной системы, определяемой уравнением (4), опять показывает, что она дает величину расхода, несколько более высокую, чем соответствующая величина при физическом гравитационном течении. Заранее можно ожидать, что такое несоответствие будет не больше ошибки расчета величины расхода по эмпирическим данным.

На фиг. 142 показано крестиками распределение потенциала или давления у основания системы радиального течения, соответствующее одному из экспериментов на песчаной модели, описанной в гл. VI, п. 18. Согласованность с эмпирическими наблюдениями — сплошная линия

<sup>1</sup> Для практических расчетов член  $\frac{U(a_n r)}{U(a_n r_w)}$  для  $r_e \geq h_e$  может быть приближенно заменен через  $\frac{K_0(n\pi r/h_e)}{K_0(n\pi r_w/h_e)}$ .

<sup>2</sup> См. гл. XVII, „Modern Analysis“, E. T. Whittaker and G. N. Watson.

и точки — в данном случае не так близка, как это имеет место между приближенно и точно рассчитанным распределением для линейного течения. Однако этот разрыв имеет весьма ограниченную величину.

В результате высокой концентрации градиентов давления при радиальном течении, а отсюда большей восприимчивости участка вблизи поверхности стока к изменениям своей геометрии<sup>1</sup>, следует ожидать в действительности лучшей согласованности именно для случая линейного течения. При этом следует отметить, что уменьшение в толщине фактического русла вблизи поверхности стока, вследствие образования свободной поверхности при физическом гравитационном течении, влияет более серьезно на отдельные свойства последнего при радиальном нежели при линейном течении<sup>1</sup>.

С другой стороны, приближения уравнения (5) к правильной величине распределения давления у основания системы могут считаться в действительности достаточно близкими, чтобы показать отсутствие случайности в применении более точной формулы для величины расхода (уравнение 7), тогда как в теории Дюпюи-Форхгеймера случайность имеет место без всякого сомнения. На основании наблюдения, что применение указанной приближенной теории при выводе уравнений (3) и (7) для величины расхода при линейном и радиальном гравитационных течениях является по существу тождественным обобщенной теореме, выведенной в гл. IV, п. 5 для расхода при плоском радиальном течении с произвольно выбранным распределением давления на круговых контурах, можно предложить более простой и все же удовлетворительный с физической стороны метод для вывода уравнений (3) и (7).

Следует напомнить, что в настоящем разделе было показано: величина расхода дается формулой, аналогичной строго радиальному течению [уравнение (10), гл. IV, п. 2], при условии, что для граничных давлений приняты усредненные величины фактического граничного распределения [уравнение (12), гл. IV, п. 5]. Уравнения (3) и (7) можно вывести на основе той же самой процедуры. Так, из любого уравнения (1) или (4) следует, что средняя величина потенциала на поверхности стока высотой  $h_e$ , находящейся под воздействием постоянного потенциала  $\bar{k}h_w$  до высоты  $h_w$ , определяется из выражения:

$$\bar{\Phi}_w = \frac{\bar{k}(h_e^2 + h_w^2)}{2h_e}. \quad (8)$$

Так как потенциал на поверхности поглощения равняется  $ch_e$ , то разность средних потенциалов выразится:

$$\bar{\Delta}\Phi = \frac{\bar{k}(h_e^2 - h_w^2)}{2h_e}. \quad (9)$$

Прилагая это выражение к формуле расхода при строго линейном течении [уравнение (4), гл. II, п. 5], получим непосредственно уравнение (3). Уравнение (7) вытекает из приложения уравнения (9) к выражению для величины расхода при строго радиальном течении [уравнение

<sup>1</sup> Это явление аналогично большей чувствительности расхода при радиальных течениях к проницаемости песчаника у непосредственной поверхности стока по сравнению с линейными течениями (гл. VII, п. 3, и гл. VIII, пп. 3 и 4).

ние (10), гл. IV, п. 2]. Аналогичным путем можно решить типовую задачу о сложном гравитационном течении, которая рассматривалась в гл. VI, п. 19. Принимая потенциал на внешнем контуре, равным  $k\bar{h}_0$ , где  $\bar{h}_0$  больше мощности песчаника  $h = h_e$ , средний перепад потенциала принимает вид, вместо уравнения (9):

$$\Delta \bar{\Phi} = \frac{\bar{k}(2hh_0 - h^2 - h_w^2)}{2h}. \quad (10)$$

Прилагая это выражение к формуле расхода при строго радиальном течении, получаем непосредственно уравнение (2), гл. VI, п. 19, которое было установлено эмпирическим путем<sup>1</sup>.

Следующим практическим приложением этого метода является гравитационное течение в несовершенных скважинах. В этом случае, оставляя без внимания отдельные детали распределения потенциала на поверхности скважины и внешнего контура, текущий дебит скважины с частичным вскрытием  $\bar{h}$  пласта песчаника, суммарной мощностью  $h$ , может быть получен из следующего выражения:

$$Q = \frac{2\pi\bar{h}\bar{h}\Delta\bar{\Phi}}{C \ln r_e/r_w}, \quad (11)$$

где  $C$  — геометрический фактор, учитывающий несовершенство скважины, как это следует из гл. V, п. 4 и выраженный кривыми на фиг. 17;  $\Delta\bar{\Phi}$  — разность среднего значения потенциала между поверхностью скважины и внешним контуром. Если при этом  $h_w (< \bar{h}\bar{h})$  будет представлять собой столб жидкости в скважине и величина потенциала принимается такой, что она равняется нулю на забое скважины при  $h_w$ , равном нулю, то средний потенциал на поверхности скважины будет

$$\bar{\Phi}_w = \frac{\bar{k}(h^2\bar{h}^2 + h_w^2)}{2\bar{h}\bar{h}}.$$

Постоянный и средний потенциал на внешнем контуре будет, очевидно,  $\bar{\Phi}_e = \bar{k}\bar{h}\bar{h}$ . Тогда  $\Delta\bar{\Phi}$  дается выражением:

$$\Delta\bar{\Phi} = \frac{\bar{k}(\bar{h}^2\bar{h}^2 - h_w^2)}{2\bar{h}\bar{h}}, \quad (12)$$

откуда текущий дебит скважины будет:

$$Q = \frac{\pi\bar{k}(\bar{h}^2\bar{h}^2 - h_w^2)}{C \ln r_e/r_w}. \quad (13)$$

Сравнение этого выражения с (7) показывает, что эффект несовершенства скважины, работающей при гравитационном течении, может быть принят во внимание введением того же самого поправочного фактора (фиг. 17), который учитывает явление несовершенства для скважин с нормальным напорным режимом. Аналогичным же путем можно показать, что уравнение (2), гл. VI, п. 19, объединенное с тем же самым по-

<sup>1</sup> Разумеется, этот же вывод можно получить из приближенной теории простой подстановкой в уравнение (4),  $\Phi = k\bar{h}_0$  для граничных условий при  $r = r_e$  вместо  $\Phi = \bar{k}\bar{h}$  [ $h_e$  — принимается согласно обозначениям уравнения (4)].

правочным фактором  $C$ , ласт величины текущих дебитов в несовершенных скважинах, работающих под сложным воздействием силы тяжести и напора (давления).

Наконец, можно заметить, что приближенные методы этого раздела можно приложить к гравитационным течениям с более сложной геометрией по сравнению с теми, которые нами специально рассматривались в настоящем разделе. Так, например, можно получить величину текущих дебитов различных единиц из групп артезианских скважин, работающих при простом или сложном гравитационном течении, из соответствующих значений, выведенных в главе IX для скважин, работающих на напорном режиме, простой заменой в последних формулах приложенных перепадов давления значениями  $yg\Delta\bar{F}/\bar{k}$ , которые даются с уравнениями (9) или (10). Аналогичным путем, прибегая к той же самой подстановке в уравнении (8), гл. IV, п. 7, можно получить текущий дебит скважины, работающей при гравитационном течении вблизи развитого линейного источника, например, реки или канала. Действительно, эта процедура должна дать близкое приближение к истинному значению величины расхода при любом гравитационном течении, где свободная поверхность резко не обрывается, оставляя поверхность поглощения или внешний контур так, что объем соответствующей приближенной системы будет намного превосходить соответствующую ей величину при физическом гравитационном течении<sup>1</sup>.

**21. Заключение.** Когда средняя высота по вертикали, при которой жидкость покидает пористую среду, меньше той, при которой она поступает в последнюю, сила тяжести принимает на себя роль движущего агента, создающего течение в среде и через поверхности стока. Эта сила в действительности является градиентом потенциальной энергии жидкости, так как он перемещает последнюю от более высоких уровней поглощения к пониженным уровням стока. По мере того как жидкость перемещается от поверхности поглощения, она использует свою потенциальную энергию на преодоление сопротивления пористой среды. Более того, обладая тенденцией падать к нижнему уровню, жидкость в общем случае будет отрываться от верхней границы пористой среды и давать начало образованию „свободной поверхности“, создающей естественный контур зоны насыщения, над которой среда будет сухой и свободной от жидкости. Капиллярными явлениями мы пренебрегаем.

Присутствие этой свободной поверхности характеризует все гравитационные течения в противоположность тем системам, которые подвержены внешнему давлению жидкости и где жидкость под напором заполняет весь свободный объем пористой среды. Так как свободная поверхность представляет собой контур течения, через который не происходит никакого движения, ясно, что она является предельной линией тока системы. Более того, поскольку область поверх свободной поверхности свободна от жидкости, давление в этой области должно быть постоянным. Поэтому потенциал в каждой точке свободной поверхности будет

<sup>1</sup> Те же самые конечные формулы были уже получены для большого количества случаев применением теории Дюпон-Форхгеймера (Гидравлика, глава III). Однако следует быть весьма осторожным при выводе заключений, связанных со свободной поверхностью, которые дает эта теория.

изменяться линейно в зависимости от высоты ее над произвольно выбранной горизонтальной плоскостью. При негравитационных течениях изменения потенциала на линиях тока по контурам заранее не известны и должны устанавливаться на основании нахождения распределения потенциала внутри системы. Знание же изменения потенциала над свободной поверхностью можно рассматривать как компенсацию того обстоятельства, что нам неизвестна заранее геометрическая форма свободной поверхности. С аналитической точки зрения задача определения геометрической формы свободной поверхности, даже если изменение потенциала поверх нее известно, является гораздо более трудным для решения, чем нахождение изменения потенциала, когда геометрические формы всех граничных элементов заранее предуказаны. Эта особенность проблемы и делает математическую обработку задач гравитационного течения особенно трудной.

Определение истинной формы свободной поверхности, даже для простейших систем, является весьма сложной задачей. Однако некоторые из свойств ее могут быть установлены на основании общих соображений. Быть может наиболее важным свойством свободной поверхности является то обстоятельство, что она всегда будет заканчиваться на поверхности стока поверх уровня поступающей жидкости, за исключением отдельных случаев, которые могут возникнуть, когда поверхности стока наклонены к горизонту менее  $90^\circ$ . Течение через участок поверхности стока между окончанием свободной поверхности и уровнем поступающей жидкости будет представлять собой фильтрацию в область, свободную от пористой среды и жидкости. Эта область будет поэтому подвержена постоянному атмосферному давлению, но не будет представлять поверхности линии тока. Этот участок поверхности стока называется „поверхностью фильтрации“.

Так как геометрическая форма свободной поверхности, включая сюда ее окончание на поверхности стока, заранее не известна, не будет также известна длина поверхности фильтрации. В том случае, когда уровень стекающей жидкости равняется нулю, весь расход при гравитационном течении должен поступать через поверхность фильтрации, но существование этого явления было установлено только недавно. Таким образом, при аналитической обработке задач гравитационного течения это обстоятельство было принято в расчет только в относительно небольшом количестве случаев. Можно определить путь, каким заканчивается свободная поверхность у поверхности фильтрации, без всякого специального анализа. Так, она будет касательной к поверхности стока, если наклон последней отрицателен или же бесконечен, и будет пересекать ее вертикально, если наклон поверхности стока положителен (гл. VI, п. 1).

Суммарная скорость вдоль свободной поверхности в пористой среде никогда не может превзойти величины скорости свободного падения, обязанной силе тяжести, и ее горизонтальная слагающая никогда не может быть более половины скорости свободного падения. Скорость в нижней оконечности поверхности фильтрации будет всегда бесконечно высокой, за исключением случаев нарушения закона Дарси, когда будут преодолены критические скорости, свойственные некоторым жидкостям и средам, составляющим систему (гл. II, п. 2).

Первой практической задачей, для которой было получено полное и удовлетворительное решение, является дренаж наклонно падающего водяного песчаника канавой, прорытой в кровле песчаника. Единственное существенное приближение, которое дается Гопфом и Трефтицем при решении этой задачи, заключается в пренебрежении поверхностью фильтрации при входе свободной поверхности в дренажную канаву со стороны верхнего течения подземных вод.

Анализ базируется на предварительном преобразовании комплексной переменной первоначальной плоскости  $z$ , изображающей течение, на промежуточную плоскость, где интересующая нас область принимает вид трапециoidalной фигуры и где все контурные участки, включая и те, что относятся к свободной поверхности, определяются однозначно, за исключением соответствующей геометрической формы канавы. Затем на квадранте вспомогательной плоскости получают отображение этой плоскости, а также плоскости, дающей изображение распределения экви-потенциальных линий и линии тока первоначального течения. Таким образом, неявно дается требуемая зависимость между потенциалом скорости, функцией тока и координатами в плоскости  $z$ . Однако отображение трапециoidalной фигуры требует выбора геометрической формы участка, соответствующего контуру канавы, который в свою очередь накладывает условие единственности формы самой канавы. При практическом применении этой теории неудобно устанавливать заранее форму канавы, а более простой процедурой будет выбрать функцию преобразования, а затем уже в конце анализа определить геометрическую форму канавы, обусловленную этим выбором.

Наиболее ценным выводом из этого анализа для практики является установление зависимости между общим количеством жидкости, которая отводится канавой, и снижением уровня свободной поверхности со стороны ее верхнего по течению края. Найденная зависимость показывает, что та часть первоначальной водонасыщенности песчаника, которая отводится канавой, равняется отношению величины снижения уровня свободной поверхности у канавы к мощности ненарушенного слоя водонасыщенного песчаника [уравнение (8), гл. VI, п. 2]. Этот вывод противоположен тому, который дают предшествующие формулы, которые включали в себя также ширину канавы и глубину воды в ней.

Весьма сильным, однако очень трудным, методом математической обработки задач гравитационного течения является метод годографов. Годограф есть изображение динамической системы, в котором координатами являются компоненты скорости. Применение его при изучении гравитационных течений базируется на том обстоятельстве, что хотя геометрическая форма свободной поверхности заранее не известна, но годограф последней будет всегда представлен участком окружности и радиусом, равным половине скорости свободного падения, с центром на отрицательной половине оси вертикальной скорости и проходящим через начало координат. Годограф прямолинейного водонепроницаемого контура будет прямой линией в плоскости годографа, параллельной контуру и проходящей через начало координат. Прямолинейная поверхность постоянного потенциала, образованная постоянной массой жидкости, имеет в качестве годографа линию, проходящую через начало координат и нормальную к контуру. Наконец, поверхность фильтрации представляется

в плоскости годографа линией, нормальной к поверхности, если только последняя прямолинейна, и проходящей через нижнее пересечение с осью вертикальной скорости кругового годографа, соответствующего свободной поверхности.

Таким путем можно получить полное отображение первоначальной системы на плоскость годографа, причем единственными неизвестными элементами будут числовые значения координат, соответствующие некоторым угловым точкам физического течения.

Трудность математической обработки годографа, если даже известна его геометрическая форма, заключается в том, что он содержит круговой участок, соответствующий свободной поверхности, а отображение таких фигур на полуплоскость не может быть выполнено в общем случае с помощью элементарных функций, которые даются теоремой Шварца — Кристоффеля. Однако в том случае, когда физическое течение представлено проницаемой плотиной с проницаемыми фасами, годограф принимает форму (фиг. 99), которая может дать отображение на полуплоскость с помощью модулярных эллиптических функций. На действительной оси этой плоскости можно расположить промежуточную потенциальную функцию, дающую сумму наклонений векторов скорости и ускорения вдоль контура. Из этих граничных значений можно определить в целом на полуплоскости потенциальную функцию и ей сопряженную. Зависимость между этими функциями и компонентами скорости течения [уравнения (2) и (3), гл. VI, п. 2] окончательно приводит к интегральному воспроизведению распределения внутренних скоростей в последнем.

Производя полностью эту процедуру, можно вывести аналитическим путем все интересующие нас свойства течения, воспроизводящего фильтрацию воды через плотину с вертикальными фасами, включая сюда точную форму свободной поверхности, распределение скорости вдоль фасов плотины, распределение давления вдоль ее основания и, наконец, расход фильтрации, проходящей через плотину. Числовые подсчеты, сделанные по этой методике, были выполнены только для шести специальных случаев, но и этих данных достаточно, чтобы показать все характерные особенности проблемы гравитационного течения в целом.

Так, установлено, что свободная поверхность покидает поверхность поглощения горизонтально и приближается к поверхности стока с постепенно увеличивающимся наклоном, переходящим в конечном итоге в касательную. Поверхность фильтрации достигает значительной величины. Порядок длины ее равняется половине разности напора жидкости между поглощением и стоком. Скорости вдоль поверхности поглощения возрастают равномерно от нуля у верхушки поглощающего столба жидкости до максимума у его основания. Горизонтальная скорость вдоль поверхности стока у окончания свободной поверхности равняется нулю и возрастает до бесконечно больших значений, переходя вниз к крайней оконечности поверхности фильтрации. Если уровень жидкости на стоке не равен нулю, то скорость равномерно уменьшается с переходом вниз вдоль поверхности стока, пока не будет встречено водонепроницаемое ложе (см. фиг. 103 — 106).

Важным практическим выводом из этих выкладок является тот факт, что можно получить с исключительной точностью величину расхода на

единицу длины через такие плотины с вертикальными фасами на основании весьма простой формулы:

$$Q = \frac{k\gamma g(h_e^2 - h_w^2)}{2\mu L},$$

где  $k$  — проницаемость плотины;  $\gamma$  и  $\mu$  — плотность и вязкость жидкости;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $h_e$  и  $h_w$  — напоры жидкости на поверхности поглощения и стока плотины;  $L$  — ширина основания плотины. На первый взгляд этот вывод является весьма поражающим, так как приведенное уравнение было получено первоначально из теории Дюпюи-Форхгеймера; все остальные стороны которой находятся в резком несоответствии с теми выводами, которые получаются на основании расчетов согласно точной гидродинамической теории.

Так, теория Дюпюи-Форхгеймера содержит ошибку в указании геометрической формы свободной поверхности, распределения давления у основания плотины и в распределении скорости вдоль поверхности поглощения. В действительности невольно приходишь к заключению, что вывод этой формулы на основании теории Дюпюи-Форхгеймера является совершенно случайным. С другой стороны, само уравнение имеет физическое значение, так как оно, как это будет показано ниже, может быть получено из другой приближенной теории, которая является свободной от допущения Дюпюи-Форхгеймера и включает в себя только такие приближения, относительно которых можно заранее ожидать, что они приведут к небольшим ошибкам при установлении величины расхода.

Применение метода годографов к математической обработке задач гравитационного течения в пористой среде представляет собой наиболее серьезное по своему значению теоретическое изыскание, которое было сделано в области изучения гравитационных течений. Однако этот метод страдает ужасающей трудностью производства числовых выкладок на всех входящих в него этапах. Когда же геометрия течения становится несколько сложнее плотины с вертикальными фасами, то производство анализа становится еще более трудным и требует для получения частных результатов применения графических или числовых методов.

Однако по счастливой случайности для решения задач гравитационного течения можно приложить также и метод электрического моделирования (гл. VI, п. 6), хотя при течении отсутствует прямая аналогия между электрическим током и эффектом силы тяжести. В действительности для любого гравитационного течения с почти произвольной сложностью можно построить точную эквивалентную электрическую модель. Разумеется, непосредственной трудностью при конструировании такой модели является отсутствие предварительной осведомленности о форме границ гравитационного течения, которые имитирует электрическая модель.

В частности, в формулировках задачи гравитационного течения не дается форма свободной поверхности и верхняя оконечность поверхности фильтрации — оконечность свободной поверхности на стоке. Фактически все эти данные должны быть определены в процессе решения задачи. Однако из определения понятия „свободная поверхность“

заранее известно, что потенциал вдоль последней должен изменяться линейно в зависимости от изменения вертикальной координаты. Тогда если остальные граничные условия будут смоделированы электрическим путем, аналогично моделям негравитационного течения (гл. VI, п. 17), и верхняя часть модели будет вырезана опытным путем так, что потенциал вдоль образованного этим путем контура будет изменяться линейно в зависимости от вертикальной координаты, граница эта будет точным эквивалентом свободной поверхности при действительном течении. Разумеется, необходимо отрегулировать значение потенциала вдоль участка поверхности стока так, чтобы оно также линейно возрас-  
тало с увеличением вертикальной координаты, ибо величина давления вдоль поверхности стока над уровнем жидкости на стоке должна иметь постоянное значение, как это имеет место над свободной поверхностью. Этого можно легко достичь, прикрепив к поверхности стока над уровнем стекающей жидкости полоску высокой проводимости и приложив к ее верхнему и нижнему концам соответственные потенциалы стока и поглощания. Как только будет найдена свободная поверхность, можно будет дать отображение внутреннего распределения потенциала и линии тока точно так же, как это делается в электрических моделях негравитационных течений.

Соответственно этому можно замерить расход тока, проходящий через модель, что дает эквивалентный расход жидкости при аналогичном течении. Особым преимуществом таких моделей, которые легко изготавливаются из листов картона, покрытого коллоидным раствором графита, является их гибкость. Так, если аналитическая теория до сих пор была полностью разработана только для плотины с вертикальными фасами, то электрическим путем можно изучать так же легко плотины с наклонными фасами (фиг. 110—111), как и плотины с вертикальными фасами. Более того, электрическим путем можно моделировать без какой бы то ни было трудности сооружение плотины с внутренним водонепроницаемым сердечником или облицовкой, а также забивной крепью. Можно учесть также разницу в проницаемости отдельных участков сооружения простым изменением количества слоев графитового покрытия, нанесенного на соответственные части модели.

В дополнение к непосредственной аналитической процедуре, например, методу Гопфа и Трефта или же методу годографов, где потенциальные функции строятся и выводятся так, чтобы получить решение для заранее принятого гравитационного течения, можно применить более упрощенную обратную процедуру построения потенциальных функций, а затем последующую привязку их к соответствующему физическому течению. Основным этапом этой процедуры является построение зависимостей комплексной переменной между вектором  $z = x + iy$  и комплексным потенциалом  $\omega = \Phi + i\Psi$ , как  $\omega = f(z)$  или  $z = F(\omega)$ , таким путем, чтобы вдоль одной из линий тока  $\Psi = \text{const}$  потенциал изменялся линейно с изменением вертикальной координаты  $y$ . Эта линия тока будет представлять собой свободную поверхность соответствующего течения и если последняя имеет физическое значение, то комплексный потенциал будет также иметь физическое значение.

Такие зависимости были построены для следующих случаев: а) линейная поверхность течения по склону холма,  $f$  — линейная функция  $z$ ;

б) системы с параболической свободной поверхностью;  $F$  — квадратичная функция  $\omega$ ; в) специальные случаи фильтрации из канав;  $F$  — сумма экспоненциальной и линейной функции  $\omega$ . Решения для параболической свободной поверхности приближаются к соответствующим результатам для мощных плотин с вертикальными фасадами. Решения, соответствующие фильтрации из канав, построенные таким же образом, дают совершенно искусственный радиальный тип распределения потенциала на больших расстояниях от канав или же такой тип распределения, который асимптотически приближается к фильтрации свободным падением на больших глубинах. Проблема фильтрации воды из канав или каналов, где фильтрующийся поток по существу своему относится к свободно падающему типу, может быть решена также более простой процедурой (пп. 6, 8, 9).

Такие системы с физической стороны соответствуют условиям, когда уровень грунтовых вод устанавливается на очень большой глубине или же когда воды уносятся слоем гравия или иной средой, проницаемость которой является более высокой по сравнению с проницаемостью отложений, непосредственно залегающих под основанием канавы или канала. При этом фильтрация из последних недостаточна для поддержания непрерывного течения в этом слое. Тогда фильтрационное течение само по себе не будет сливаться с уровнем грунтовых вод, но будет просто диспергировано в гравийном слое в виде капельных струй, ударяющихся беспрерывно о зеркало воды. Эти системы можно решать методом, весьма похожим на метод Гопфа и Трефта. Решения будут получаться точными, пока строго удовлетворяется условие линейности изменения функции тока вдоль стенки канавы или канала с изменением ее горизонтальной координаты. Допускская сохранность этого условия, можно без всякого труда проделать до конца весь анализ и рассчитать в конечном итоге форму стенок, которые будут удовлетворять этому допущению.

В пределах, которым соответствует для практически интересных случаев найденная таким образом геометрическая форма, можно рассматривать полученное решение, дающее величину расхода фильтрации и форму свободной поверхности как достаточно точное. При этом для данной глубины и ширины верхних кромок канала или канавы имеется еще один произвольный параметр, определяющий геометрическую форму их стенок [уравнения (6), гл. VI, п. 8, и (5), гл. VI, п. 9]. Установлено, что расход возрастает, приближаясь к закону прямой линии, с изменением ширины канавы у верхнего уреза водной поверхности, а для фиксированного отношения ширины канавы к глубине воды в ней — прямо пропорционально величине последней. Более того, расход возрастает с увеличением среднего наклона стенок для данной ширины канавы и глубины воды в ней. Наконец, расход фильтрации возрастает с уменьшением глубины высокопроницаемого слоя, в котором находится зеркало грунтовых вод. Увеличение расхода становится очень большим, когда глубина этого слоя достигает значения, порядок которого составляет глубину свободной воды в пределах разреза канавы или канала (см. фиг. 124).

Метод электрического моделирования имеет возможность дать полное описание решения для любой специальной задачи течения. Однако для каждого отдельного случая требуется своя новая модель с отличными геометрическими размерами. Полное изучение проблемы фильтрации

воды через плотины с наклонными фасами требует сооружения различных моделей для ряда значений ширины основания, напоров жидкости на поглощении и стоке, угла наклона фасов поглощения и стока. Так как до сих пор такой комплекс исследований еще не был проделан полностью, следует обратиться к приближенным методам.

Для плотин с наклонными фасами приближенный метод расчета величины расхода через плотину может быть построен следующим образом. Допустим, что вся система течения, т. е. часть поперечного сечения плотины, занятая движущейся водой, делится на три независимые части. К каждой из них прикладывают самостоятельный приближенный метод решения. Первым участком принимают область, имеющую форму треугольного клина и ограниченную поверхностью поглощения, основанием плотины и нормалью к основанию, проведенной из самой верхней точки поверхности поглощения, которая достигается жидкостью. Когда наклон поверхности поглощения составляет четную часть  $90^\circ$  ( $\pi/2n$ ), течение на этом участке может быть совершенно точно описано комплексными потенциалами, если рассматривать течение как негравитационное. Принимается, что свободная поверхность вблизи поверхности поглощения следует наиболее высоко расположенной линии тока в первой области. Примыкающая к ней область с основной массой фильтрационного течения рассматривается приближенно, как имеющая линейную фильтрацию на линейно уменьшающемся участке, т. е. со свободной поверхностью, падающей с постоянной скоростью. Наконец, область которая включает в себя поверхность стока, подвергается совершенно иному рассмотрению. Характеристика этой области устанавливается на основании экспериментов с песчаной моделью.

Систематическое выполнение всего этого анализа требует принятия во внимание отдельных деталей, относящихся к местам соединения отдельных областей (гл. VI, п. 10). Однако точное положение этого смыкания определяется окончательно из условия, что подсчитанные расходы, проходящие через каждую из этих областей, должны быть равны между собой. Необходимая при этом поправка требует только применения простых алгебраических процессов.

В дополнение к величине расхода фильтрации этот метод дает также некоторые интересные сведения, относящиеся к характеру распределения скорости вдоль поверхности поглощения. Так, установлено, что, за исключением случая вертикальной поверхности поглощения, скорость фильтрации равномерно возрастает от нуля, подымаясь кверху от основания плотины. При этом с уменьшением наклона фаса плотины скорость этого возрастания увеличивается. На поверхности стока, ниже поверхности фильтрации, изменения скорости будут иметь аналогичный характер, хотя теоретически скорость у верхней оконечности уровня жидкости на стоке будет всегда бесконечной. Вполне понятно, что области с высокими скоростями являются теми участками, где более резко отмечается эрозия и где наиболее важно применять профилактические мероприятия.

Значения расхода через плотины с наклонными фасами, подсчитанные на основании рассмотренного метода, разумеется, не будут точными количественно вследствие большого числа сделанных различных допущений. Однако они будут иметь правильный порядок величин, и точность их

будет ближе для низких значений столбов жидкости на фазе поглощения. Это положение было подтверждено на основании тщательного выполнения всех расчетов для двух случаев, исследованных с помощью электрических моделей.

Методика разделения всего течения на независимые части, к которым можно приложить в отдельности различные приближенные методы обработки, может быть использована также при подсчете величины расхода при фильтрации из канав или каналов (гл. VI, п. 11), где фильтрационное течение сливается непосредственно с зеркалом грунтовых вод. В последнем случае течение может быть разделено на две области: а) область, непосредственно окружающую канаву, где линии тока имеют большую кривизну, и распространяющуюся от центра канавы на расстояние, равное полу сумме ширины канавы и уровня жидкости над водонепроницаемым ложем, и б) область с приближенно линейным течением, распространяющуюся до крайних пределов интересующего нас течения. При этом предполагается, что известна высота стояния жидкости в песчанике. Течение в первой области принимается аналитически с допущением комплексной потенциальной функции, а связанные с ним величины расходов устанавливаются по экспериментам на песчаных моделях. Течение в области „б“ принимается линейным. Напор его на поверхности поглощения выбирается опытным путем так, чтобы расход через эту область был равен соответствующей величине в области, окружающей канаву. Эта процедура, включающая в себя ряд допущений, должна дать, как и в предыдущем случае, по крайней мере истинный порядок величины расхода фильтрации.

Для того чтобы установить существенные стороны некоторых других практических проблем ирригации, дренажа, эрозии и т. д., необходимо обратиться к иным, еще более приближенным методам анализа. Так, чтобы найти размер бокового дренажа в слой грубо зернистого гравия, рассеченного каналом, раньше чем вода уйдет в залегающие под гравием слои, необходимо полностью пренебречь свободной поверхностью, которая образуется в пласте гравия. Наоборот, допуская, что течение в гравии состоит из направленной от канала линейной фильтрации, на которую налагается идущая вниз боковая утечка воды, найдем, что квадрат расстояния, на которое будет распространяться фильтрация, прямо пропорционален давлению на поверхности слоя гравия, его мощности и проницаемости и обратно пропорционален проницаемости залегающих под системою глин [уравнение (2), гл. VI, п. 13].

Если задача борьбы с эрозией почвы будет заключаться в необходимости найти такую толщину почвенного слоя, который унесет весь выпадающий на него дождь и не затопит поверхности слоя, то приближенное решение покажет, что такой слой почвы на склоне холма, чтобы не затопило его поверхности, должен иметь форму клина. Как и следует ожидать, угловая мощность клина возрастает с увеличением интенсивности дождя и уменьшается с увеличением проницаемости почвы [уравнение (4), гл. VI, п. 15].

Если пренебречь присутствием свободной поверхности, можно получить решения задачи дренажа гончарными трубами (гл. VI, п. 16), который применяется с целью предохранения от насыщения водой верхнего покрова почвы, направленной вверх фильтрацией воды из

залегающего под ним слоя гравия. Исключая капиллярные явления, зона водонасыщения может быть определена как область, которая должна быть полностью насыщена жидкостью, если она только соединяется с основным руслом течения трещиной или открытой скважиной. Верхняя, ограничивающая эту зону поверхность водонасыщения эквивалентна общепринятому термину „пьезометрическая поверхность“, и ее высота пропорциональна потенциалу скорости в основном русле течения. В области, находящейся ниже пьезометрической поверхности или же в пределах зоны водонасыщения, давления жидкости будут, очевидно, превосходить атмосферное давление. Поэтому условие предупреждения почвенного покрова от насыщения водой путем дренажа его гончарными трубами тождественно условию, чтобы давление жидкости у поверхности не превосходило атмосферного. Принимая известными глубину дренажных труб, их радиусы, глубину залегающего ниже русла течения, поддерживающего направленную вверх фильтрацию, а также перепад давления жидкости, создающей эту фильтрацию, можно получить приближенный подсчет необходимого расстояния между дренажными трубами, которое исключает всякое просачивание через верхний слой почвы и его водонасыщение и полностью удаляет все направленное вверх фильтрационное течение [уравнение (6), гл. VI, п. 16]. Как и следует ожидать, необходимое расстояние между дренажными трубами уменьшается с ростом скоростного напора, уменьшением глубины дренирования или глубины слоя гравия и уменьшением радиуса дренирования (фиг. 139). Если же последние параметры меньше известных пределов, то стоимость эффективного дренирования гончарными трубами может достигнуть недопустимой величины.

К приближенному методу математической обработки задач гравитационного течения, который применялся заинтересованными в этой проблеме лицами в течение многих лет и даже в настоящее время, относится так называемая теория Дюпюи-Форхгеймера. Эта теория, созданная в 1863 г. Дюпюи и позже разработанная Форхгеймером, базируется в основном на следующих допущениях:

- 1) жидкость при гравитационном течении движется цилиндрическими оболочками, причем горизонтальная скорость не зависит от глубины;

- 2) значение горизонтальной скорости пропорционально наклону свободной поверхности.

На основании этих допущений можно вывести геометрическую форму свободной поверхности при гравитационном течении и величины расхода через нее [уравнение (3), гл. VI, п. 17].

Эти допущения обладают по всей видимости некоторой вероятностью для вывода приближенной теории. Тем не менее общие рассуждения и точные расчеты показывают, что эти допущения и вытекающие из них следствия находятся в очень сильном противоречии с фактической характеристикой гравитационного течения. Так, можно легко доказать, что постоянство горизонтальной скорости вне зависимости от глубины в системе, имеющей постоянный потенциал на вертикальном контуре, налагает условие равенства нулю всех вертикальных скоростей, а это в свою очередь уничтожает явление гравитационного эффекта, определяющего характер системы. Более того, точные подсчеты фильтрации через плотину с вертикальными фасадами (гл. VI, п. 5) показывают

вполне определенно, что горизонтальные скорости далеки от постоянства и что их средние значения не имеют никакого отношения к наклону свободной поверхности, который всегда равняется нулю на поверхности поглощения.

Наконец, геометрическая форма свободной поверхности, которая предусматривается теорией Дюпюи-Форхгеймера, дает очень плохое приближение к истинному ее значению (фиг. 103). Это несоответствие является следствием полного пренебрежения этой теорией поверхности фильтрации на поверхности стока. В свете этих трудностей становится ясным, что успех теории Дюпюи-Форхгеймера, располагающей формулами, которые даются ею для определения величины расхода в практических целях и которые воспроизводят истинные значения величины расхода при линейном и радиальном гравитационных течениях, следует считать совершенной случайностью. Однако совершенно иной комплекс допущений, как это будет показано ниже, также приводит к идентичным формулам расхода. Эти допущения с физической стороны, повидимому, особенно соответствуют целям подсчета величины расхода при гравитационном течении. Несмотря на фундаментальное значение задачи радиального гравитационного течения в скважину, до 1927 г. не было предложено ничего нового, кроме применения упомянутой теории Дюпюи-Форхгеймера. Тогда же эта теория была впервые поставлена под сомнение и было предпринято решение рассматриваемой проблемы непосредственными методами теории потенциала. С точки зрения получения удовлетворительного математического решения, обладающего точностью, эти теоретические изыскания не имели успеха, но они послужили толчком к развитию экспериментального изучения проблемы. Наиболее поздняя из этих работ (гл. VI, п. 18), проделанная с песчанными моделями действительного течения, привела к следующему выводу: свободная поверхность не следует теории Дюпюи-Форхгеймера. В частности, свободная поверхность заканчивалась совсем не на уровне стока жидкости, как это принимала последняя теория, выше а на высоте порядка половины разности суммарного напора. Однако давление или распределение напора жидкости у основания системы можно выразить формулой, по виду идентичной с той, что дается теорией Дюпюи-Форхгеймера для геометрической формы свободной поверхности, а именно

$$\bar{h}^2 = \frac{h_e^2 - h_w^2}{\ln r_e/r_w} \ln \frac{r}{r_w} + h_w^2, \quad [\text{уравнение (4), гл. VI, п. 18}],$$

где  $\bar{h}$  — напор жидкости при радиусе  $r$  вдоль основания системы, ограниченной радиусами  $r_e$ ,  $r_w$ , где  $h_e$  и  $h_w$  — напоры жидкости. Согласно теории Дюпюи-Форхгеймера  $\bar{h}$  представляет собой высоту свободной поверхности при радиусе  $r$ . С другой стороны эта теория дает следующую формулу для расхода

$$Q = \frac{\pi k y g (h_e^2 - h_w^2)}{\mu \ln r_e/r_w} \quad [\text{уравнение (6), гл. VI, п. 18}]$$

где  $k$  — проницаемость песчаника;  $y$  и  $\mu$  — плотность и вязкость жидкости;  $g$  — ускорение силы тяжести. Эта формула воспроизводит

довольно точно замеренные величины расхода после того, как в них будет внесена поправка на течение в капиллярной зоне. Эти эксперименты были распространены также на те случаи, когда на простое гравитационное течение были наложены скоростные напоры — видоизменения, имеющие значительную практическую важность, но которые до этого времени не подвергались математической обработке ни теоретически, ни экспериментально. Выводы из этих обобщений были весьма недвусмысленны и обладали равным образом исключительной простотой. Так, было найдено, что распределение напора жидкости у основания сложной системы является просто суммой распределения напора жидкости при строго гравитационном течении и соответствующего напора, обязанного негравитационному течению с величиной напора на стоке, равной мощности песчаника. Соответственно этому результирующий расход можно представить в виде суммы отдельных расходов этих индивидуальных систем, т. е.:

$$Q = \frac{\pi k y g (2h h_e - h^2 - h_w^2)}{\mu \ln r_e/r_w}, \quad [\text{уравнение (2), гл. VI, п. 19}]$$

где  $h_e$  — внешний напор жидкости, который превышает мощность песчаника  $h$ .

Как уже было замечено, приведенная формула расхода при простом радиальном гравитационном течении была продиктована раньше теорией Дюпюи-Форхгеймера. Однако сложное течение, повидимому, не попадает в рамки этой теории, пока не будет принята суперпозиция указанных выше негравитационного и гравитационного течений. Кроме того, было показано, что успех этой теории даже для простого случая строго гравитационного течения имеет несколько большее значение, чем обыкновенная случайность. К счастью, оба случая простого и сложного течений можно решить различным приближенным методом, который не только приводит к формулам расхода, установленным эмпирическим путем, но, повидимому, является с физической стороны вполне обоснованным. Эта теория базируется на простом наблюдении, что вследствие относительно высоких потенциалов вдоль поверхности стока при гравитационном течении, например, в плотине с вертикальными фасадами под точкой, где заканчивается свободная поверхность, будет проходить очень малое количество жидкости через верхний участок поверхности стока даже в том случае, когда свободная поверхность не будет падать ниже уровня жидкости со стороны поглощения. Так, с физической стороны можно ожидать, если продолжить линейное изменение потенциала вдоль поверхности стока до уровня столба жидкости на поглощении и если не допустить падения свободной поверхности раньше, чем будет вырезан верхний контур, на соответствующей электрической модели, имитирующей свободную поверхность, то результирующая величина расхода будет немного выше соответствующего значения при физическом гравитационном течении. Тогда эту гипотетическую приближенную систему можно подвергнуть совершенно точной математической обработке, и полученные расходы будут полностью соответствовать тем величинам, которые дает теория Дюпюи-Форхгеймера. Можно получить также аналогичные результаты, прикладывая этот метод к задаче радиального гравитационного течения (гл. VI, п. 20).

Вполне понятно, что полученный аналитический метод совершенно пренебрегает существованием свободной поверхности, и в этом отношении он не имеет никаких преимуществ по сравнению с теорией Дюпюи-Форхгеймера. Тем не менее, оставляя в стороне допущения, заключенные в этом методе, которые, повидимому, являются вполне резонными с точки зрения подсчета величины расхода, полученный метод вполне удовлетворяет и с физической стороны, так как он дает близкое приближение к истинному значению распределения давления вдоль основания обоих — линейного и радиального — гравитационных течений, а также распределение скорости вдоль поверхности поглощения плотин с вертикальными фасадами, которое было подсчитано точным путем. Приближенная теория хорошо воспроизводит распределение скорости вдоль поверхности стока указанной плотины под верхней кромкой уровня жидкости на стоке, которая нарушается только непосредственно под и над оконечностью свободной поверхности. Поэтому с точки зрения предложенной теории не является такой уже удивительной точность величин расхода, которую дает эта теория. Наконец, можно заметить, что приближенную теорию можно приложить более упрощенным путем — заменой в итоге действительного изменения потенциала вдоль поверхности стока суммарной высотой ( $h_e$ ), которая до высоты  $h_w$  имеет постоянный потенциал, эквивалентный напору жидкости  $h_w$ , а начиная от этой точки постоянное давление с его средним значением, эквивалентным напору жидкости  $(h_e^2 + h_w^2)/2h_e$ . Если затем решать задачи течения как негравитационные с полной разностью напора жидкости

$$h_e - \frac{(h_e^2 + h_w^2)}{2h_e} = \frac{(h_e^2 - h_w^2)}{2h_e},$$

можно получить вышеуказанные формулы непосредственно для величины расхода. Аналогично этому для случая сложного напорного и гравитационного течений необходимо приложить среднюю величину разности напора жидкости

$$h_e - \frac{(h^2 + h_w^2)}{2h} = \frac{(2h_e h - h^2 - h_w^2)}{2h}$$

при соответствующих негравитационных течениях, чтобы получить установленные эмпирическим путем формулы расхода. Можно показать, что этот метод полностью эквивалентен более подробной процедуре приближенной теории, которая была вкратце приведена выше. Поэтому таким путем можно вывести значение расхода для любого гравитационного течения общего типа, фильтрации через плотину или радиального течения в скважину с несовершенным или совершенным вскрытием пласта, где поверхность поглощения представлена вертикальным цилиндром (или плоскостью), проходящим через всю массу песчаника, не принимая формально в расчет неизвестный верхний граничный контур, создаваемый свободной поверхностью.

---

## *Глава седьмая*

### **СИСТЕМЫ С НЕПОСТОЯННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ**

**1. Введение. Поверхности разрыва непрерывности.** Большинство течений, встречающихся на практике, являются достаточно „идеализированными“, чтобы оправдать допущение однородности пористой среды. Однако существуют известные типовые отклонения от однородности, которые не только представляют особый интерес как физические отклонения от идеальных систем, но о которых известно также, что они встречаются достаточно часто, чтобы оправдать детальное изучение проблем, включающих в себя эти отклонения. Вполне ясно, что все водонесущие песчаники далеки от однородности и постоянства, и связанные с ними величины проницаемости могут изменяться в довольно широких пределах внутри сравнительно ограниченных объемов песчаника. Однако эта местная неоднородность с ее редким распределением, взятая в большом масштабе, дает усердненный эффект, словно песчаник на всем его протяжении обладает вполне удовлетворительным постоянством. Поэтому практический интерес представляют только такие, взятые в крупном масштабе отклонения, когда проницаемость претерпевает резкие изменения, например, при пересечении пласта известными геометрическими границами, или же когда изменение проницаемости связано с изменением координат. Величина проницаемости в одно и то же время может изменяться с изменением направления течения. Однако при рассмотрении настоящей главы мы заранее допустим, что пласт песчаника изотропен. Влияние анизотропности в однородном песчанике было уже рассмотрено в гл. IV, п. 15. Когда проницаемость изменяется в пределах среды непрерывно, то распределение давления в системе может быть найдено и рассмотрено точно так же, как и для случая однородной среды, за исключением того, что основное уравнение Лапласа для давления заменяется, как это будет видно из следующего раздела, несколько более общим уравнением. Если песчаник слагается из двух или более различных областей с постоянной, но различающейся между собой проницаемостью, то на границах, разделяющих эти области, должны быть приняты определенные условия. Хотя детали решения, очевидно, будут зависеть от особенностей геометрических форм отдельных областей, но методика решения этой проблемы будет заключаться в следующем: для каждой области принимаются совершенно независимо решения уравнения Лапласа. Затем эти решения увязываются на контурах, разделяющих эти области, или на „поверхностях разрыва неп-

прерывности", так что комбинированный ряд решений соответствует комбинированному течению жидкости. Эта "вязка" может быть сформулирована более точно следующими двумя условиями, которые должны удовлетворяться на любой поверхности разрыва непрерывности, разделяющей две области (1) и (2):

$$p(1)=p(2), \quad (1)$$

$$k_1 \frac{\partial p(1)}{\partial n} = k_2 \frac{\partial p(2)}{\partial n} \quad (2)$$

во всех точках контура, нормаль к которой обозначена через  $n$ .

Уравнение (1) выражает собой простое условие постоянства давления при переходе через поверхность разрыва непрерывности, ибо в целом такая геометрическая граница сама по себе не может вызвать дополнительного напряжения. В свете закона Дарси уравнение (2) дает, что нормаль скорости на поверхности разрыва непрерывности должна быть непрерывной. Это условие вытекает из непосредственного наблюдения, что каждый элемент жидкости, попадающий из любой области на поверхность разрыва непрерывности, должен по необходимости попасть в иную область в точке, где он поступает на раздел между областями<sup>1</sup>. Когда оба эти условия в каждой из точек всех поверхностей разрыва непрерывности удовлетворяются, то результирующий ряд распределения давления для нескольких областей будет соответствовать сложной системе, где отдельные части с различной проницаемостью соединены между собой как физически, так и геометрически.

**2. Непрерывное изменение величины проницаемости.** В практических условиях часто может и не встретиться возможность получения достаточно большого количества данных относительно залегающего на глубине песчаника для определения функциональной зависимости его проницаемости по отношению к расстоянию от определенной скважины. Представляет все же интерес показать, что, когда известно отклонение в величине проницаемости, можно решить задачу течения для таких песчаников принципиальным приложением тех же самых методов, что были уже использованы для однородной среды<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Линии тока, однако, будут преломляться согласно закону  $k_2 \operatorname{tg} \theta_1 = k_1 \operatorname{tg} \theta_2$ , где  $\theta_1, \theta_2$  — углы, образованные на разделе линиями тока с нормалью, проведенной к разделу в областях (1) и (2). Этот закон, который вытекает непосредственно из уравнений (1) и (2), контролирует также преломление силовых линий в электростатических системах, где  $k/\mu$  соответствует диэлектрической постоянной, и линий тока в электропроводящих системах, где  $k/\mu$  представляет собой проводимость (гл. III, п. 6). Если линия тока является в одно и то же время свободной поверхностью, следует приложить к системе дополнительное условие:  $\sin \theta_1 \cos(\alpha + \theta_1) = \sin \theta_2 \cos(\alpha + \theta_2)$ , где  $\alpha$  — наклон поверхности разрыва непрерывности. Огюста углы  $\theta_1, \theta_2$  для свободной поверхности вполне четко определяются через  $k_1/k_2$  и  $\alpha$  (См. работу A. Casagrande, Jour. New. Eng. Water Works Assoc., 51, 131, 1937).

<sup>2</sup> Можно упомянуть, что недавние работы показали, если при исследованиях с однородными жидкостями подобный анализ не представляет собой большой практической ценности, то определенные задачи течения, рассматривающие движение смеси газ-жидкость, можно подвергать изучению переводом характеристики смеси жидкости в эквивалентные ей изменения проницаемости пористой среды (R. D. Wyckoff, H. G. Botset, M. Muskat and M. W. Meres, Physics, 7, 325, 346, 1936).

Так, возвращаясь к общей формулировке закона Дарси, которая была выведена в главе III, видно, что он может быть представлен следующим рядом уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_z &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{k}{\mu} \gamma g \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Вполне понятно, что эти уравнения справедливы, даже если  $k$  зависит от координат, так как в действительности последние определяют собой местную проницаемость  $k(x, y, z)$ . Отсюда, прилагая снова уравнение неразрывности (2), гл. III, п. 1 и не допуская постоянства  $k$ , находим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \gamma g \frac{\partial k}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Примем, что  $k(x, y, z)$  известно. Тогда снова получим уравнение относительно  $p$ , которое, будучи разрешено, даст детальное распределение давления. Общего решения уравнения (2)<sup>1</sup> нельзя получить, но простой случай радиального двухмерного течения позволяет иметь точное решение. Так, для двух переменных ( $x, y$ ) уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0, \quad (3)$$

или для более частного случая, когда  $k$  зависит только от радиуса и само течение радиальное, из уравнений (2), гл. IV, п. 2, и неразрывности следует:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ rk(r) \frac{\partial p}{\partial r} \right] = 0, \quad (4)$$

так что

$$rk(r) \frac{\partial p}{\partial r} = \text{const} = \frac{Q\mu}{2\pi},$$

где  $Q$  — расход на единицу мощности песчаника.

Наконец,

$$p(r) = \frac{Q\mu}{2\pi} \int_{r_w}^r \frac{dr}{rk(r)} + p_w, \quad (5)$$

где  $p_w$  — давление на забое скважины радиусом  $r_w$ . Таким образом, чтобы получить точный вид для  $p$ , необходимо произвести только единичное интегрирование. После этой операции можно проделать обычный анализ и интерпретацию его, как будто  $k$  имеет постоянную величину.

**3. Прерывное радиальное изменение проницаемости.** Проблемой, которая имеет значительно больший интерес, чем непрерывное изменение

<sup>1</sup> В том случае, когда  $k$  можно выразить через произведение функций от  $(x, y, z)$  и можно пренебречь гравитационным эффектом, последний член (уравнение 2) допускает общие решения разделением переменных. Частным случаем такого вида для  $k$  является тот случай, когда  $k$  изменяется только в одном направлении и зависит только от одной координаты.

ние проницаемости, рассмотренное в предыдущем разделе, является такая, где несущий жидкость песчаник слагается из двух или более различных однородных частей с различной проницаемостью. В качестве первого образца такой системы рассмотрим случай, когда система обладает двухразмерной радиальной симметрией<sup>1</sup>, так что продуктивный горизонт можно рассматривать разбитым на две соприкасающиеся кольцевые области с проницаемостями  $k_1$  и  $k_2$  (фиг. 148). Такая система

соответствует скважине, которая пробурена в области, имеющей большую или меньшую проницаемость, чем соответствующая ей величина для всего резервуара в целом.

Эта система может воспроизвести также условия течения в скважину, которая была пробурена первоначально в однородном песчанике. Последующее отсутствие однородности могло явиться следствием частичной закупорки или заглинизирования области, непосредственно окружающей открытую поверхность песчаника, в процессе эксплоатации или бурения. Возрастание проницаемости вблизи ствола скважины

Фиг. 148.

могло последовать за введением в последнюю кислоты, например, при способе искусственного стимулирования добычи из карбонатных резервуаров, известного под названием „солянокислотная обработка“<sup>2</sup>.

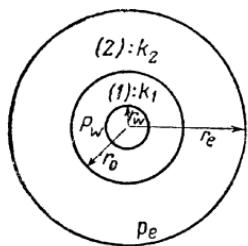
Так как распределение давления в каждой из кольцевых областей будет обладать, очевидно, радиальной симметрией, то наиболее общим решением уравнения Лапласа, которое можно применить в дан-

<sup>1</sup> Легко убедиться в том, что для весьма обычного случая линейной системы, например, фильтрующего слоя, состоящего из участка пористой среды, длиной  $L_1$  и проницаемостью  $k_1$ , примыкающего и последовательно расположенного по отношению к другому участку длиной  $L_2$  и проницаемостью  $k_2$ , с давлениями на поверхности поглощения и стока  $P_1$  и  $P_2$ , распределение давления на обоих участках дается выражениями:  $p_1 = P_1 - \frac{k_2(P_1 - P_2)x}{k_2L_1 + k_1L_2}$  и  $p_2 = P_2 + \frac{k_1(P_1 - P_2)(L - x)}{k_2L_1 + k_1L_2}$  так, что расход будет  $Q = \frac{k_1k_2(P_1 - P_2)}{\mu(k_2L_1 + k_1L_2)}$ , и результирующая эффективная проницаемость  $k_s = \frac{k_1k_2(L_1 + L_2)}{k_2L_1 + k_1L_2}$ . Когда оба участка с площадью  $A_1$  и  $A_2$  примыкают друг к другу, но расположены параллельно, то распределение давления на обоих участках имеет одинаковое значение и дается выражением  $p = P_1 - (P_1 - P_2) \frac{x}{L}$ , где  $L$  — их общая длина. Суммарный расход определяется:

$$Q = \frac{(k_1A_1 + k_2A_2)(P_1 - P_2)}{L\mu}$$

С эффективной проницаемостью  $k_p = (k_1A_1 + k_2A_2)/(A_1 + A_2)$ . Если представлены  $n$  участков с проницаемостью  $k_i$  и мощностью  $L_i$  последовательно, легко показать по аналогии с соответствующей проблемой электрических проводников, что результирующая проницаемость будет  $1/k_s = (\sum L_i/k_i)/\sum L_i$ . Если же участки имеют одну и ту же длину и площади  $A_i$ , но расположены параллельно, их результирующая проницаемость дается выражением  $k_p = (\sum A_i/k_i)/\sum A_i$ .

<sup>2</sup> См. главу VII, п. 7.



ном случае для результирующего распределения, явится уравнение (6), гл. IV, п. 2. Обозначая решения для обеих этих областей с различной проницаемостью соответственными индексами 1 и 2, распределение давлений для области (1) имеет следующее выражение:

$$p_1 = a_1 \ln r + b_1, \quad (1)$$

а для области (2):

$$p_2 = a_2 \ln r + b_2. \quad (2)$$

Если принятые граничные условия будут:

$$p = p_w : r = r_w; \quad p = p_e : r = r_e, \quad (3)$$

то ясно, что так как  $r_w$  лежит в области (1) и  $r_e$  в области (2), то первое условие следует приложить к  $p_1$ , а второе к  $p_2$ . Таким образом, при  $r = r_w$  уравнение (3) налагает условие, чтобы

$$p_1 = a_1 \ln r_w + b_1 = p_w, \quad (4)$$

и при  $r = r_e$ , чтобы

$$p_2 = a_2 \ln r_e + b_2 = p_e. \quad (5)$$

Выбирая  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$  так, чтобы они удовлетворяли этим уравнениям, мы примем во внимание соответственно граничные условия. В дополнение к этому должны быть приложены к поверхности разрыва непрерывности, которая определяется выражением  $r = r_0$ , условия уравнений (1) и (2), гл. VII, п. 1. Уравнение (1), гл. VII, п. 1 дает очевидно,

$$p_1 = a_1 \ln r_0 + b_1 = p_2 = a_2 \ln r_0 + b_2, \quad (6)$$

а из (2), гл. VII, п. 1, следует, что

$$\frac{k_1 a_1}{r_0} = \frac{k_2 a_2}{r_0}. \quad (7)$$

Таким образом, для данного случая были выведены четыре уравнения для четырех констант  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ . Когда эти уравнения будут решены и константы будут подставлены обратно в (1) и (2), находим:

$$p_1 = \frac{p_e - p_w}{\ln \frac{r_0}{r_w} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{r_e}{r_0}} \ln \frac{r}{r_w} + p_w; \quad r_w \leq r \leq r_0, \quad (8)$$

$$p_2 = \frac{\frac{k_1}{k_2} (p_e - p_w) \ln \frac{r}{r_e}}{\ln \frac{r_0}{r_w} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{r_e}{r_0}} + p_e; \quad r_0 \leq r \leq r_e. \quad (9)$$

Эти выражения дают результирующее распределение давления для сложной системы (фиг. 148).

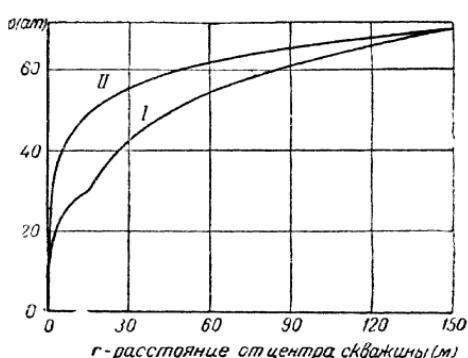
Расход жидкости через песчаник в скважину на единицу мощности последнего дается, очевидно, выражением:

$$Q = \frac{2\pi k r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2\pi k_1 (p_e - p_w)/\mu}{\ln \frac{r_0}{r_w} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{r_e}{r_0}}. \quad (10)$$

На фиг. 149 построены распределения давления, которые даются уравнениями (8) и (9) и которые иллюстрируют эти зависимости. Кривые построены для системы со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} r_w &= 0,075 \text{ м}; & r_0 &= 15,25 \text{ м}; & r_e &= 152,5 \text{ м}; \\ p_e &= 70 \text{ atm}; & p_w &= 0; & \frac{k_1}{k_2} &= 3,0. \end{aligned}$$

Пунктирная кривая представляет собой распределение давления, которое должно существовать в песчанике при его однородности. Видно, что высокая проницаемость вблизи скважины дает в результате медленный подъем давления вблизи последней или же пониженные градиенты давления. Разумеется, следует ожидать этого явления, если



Фиг. 149. Распределение давления при радиальном течении.

I — распределение в песчанике, где кольцевое пространство, окружающее ствол скважины, с радиусом 15,25 м имеет проницаемость, в три раза большую по сравнению с остальной массой песчаника; II — распределение в однородном песчанике; радиус скважины и давление — 0,075 м и нуль; радиус внешнего контура и давление — 152,5 м и 70 atm.

пространственными размерами и находящимся под действием той же разности давлений, но с постоянной проницаемостью  $k_2$ . Обозначая отношение  $k_1/k_2$  через  $\alpha$  из уравнений (10) и (10), гл. IV, п. 2, имеем:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\alpha \ln r_e/r_w}{\ln \frac{r_0}{r_w} + \alpha \ln \frac{r_e}{r_0}} ; \quad \alpha = \frac{k_1}{k_2}. \quad (11)$$

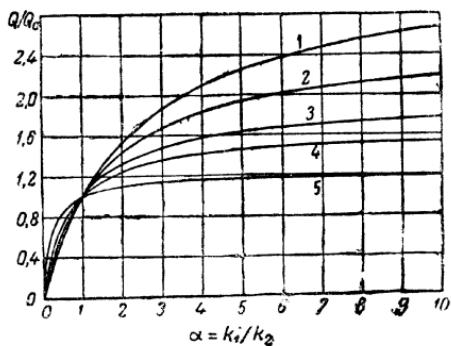
Разница в значении, отличающемся от единицы, дающая относительное изменение текущего дебита, обусловлена наличием цилиндра с проницаемостью  $k_1$  в непосредственной близости к скважине и распространяющегося в песчанике на расстояние  $r_0$ , где проницаемость становится уже  $k_2$ . Так, для приведенного численного примера уравнение (11) дает значение  $Q/Q_0 = 1,87$ , показывающее, что наличие 15,25-м кольцевого пространства, окружающего скважину и имеющего проницаемость в три раза большую, чем основная масса песчаника, увеличивает течение на 87%.

На фиг. 150 построено уравнение (11) для нескольких значений  $r_0$ . Видно характерное влияние местных аномалий проницаемости на величину текущих дебитов. Так, если проницаемость призабойной зоны в 2,5 раза больше проницаемости остального песчаника, то, для того чтобы увеличить текущий дебит скважины на 30%, необходимо, чтобы радиус этой зоны составлял 1,52 м, т. е. 0,01% от всей протяженности песчаника, а именно для  $r_e = 152,5$  м. С другой стороны, если внутренняя зона имеет 0,25 нормальной проницаемости, то текущий дебит скважины упадет больше чем на  $\frac{2}{3}$  от своего нормального значения, хотя радиус призабойной зоны составляет только 0,305 м, т. е. 0,0004% объема песчаника. Эти огромные изменения, которые создаются небольшими зонами у забоя скважины, являются, очевидно, следствием высокосконцентрированного характера перепада давления относительно центра скважины при радиальном течении.

Возвращаясь к фиг. 149, видно, что 60% всего перепада давления при радиальном течении с радиусом системы 152,5 м относительно скважины, с радиусом 0,075 м, сконцентрировано на первых 7,5 м песчаника. Остающиеся 40% перепада давления приурочены ко всей внешней зоне с радиусом протяженности 145 м. Это явление подтверждается также фиг. 150, из которой видно, что ординаты над линией  $Q/Q_0 = 1$  для некоторых кривых растут медленнее значений  $r_0$ . В то время как первые 7,5 м с аномалией проницаемости  $\sim 2,0$  увеличивают текущий дебит на 43%, прибавление следующих 7,5 м дает повышение дебита только на 10%. Соответственно этому снижение текущего дебита на 64,5%, обязанное наличию 7,5-м зоны аномальной проницаемости, равной 0,25 нормальной ее величины, падает до 67,6%, если добавляются следующие 7,5 м к зоне пониженной проницаемости.

Что же касается значения истинной величины аномалии проницаемости  $k_1/k_2$ , то следует заметить, что для зон с малым радиусом совершенно отсутствует необходимость иметь высокие значения  $k_1/k_2$ , чтобы повысить значительно величину  $Q/Q_0$ .

Так, кривые на фиг. 150 имеют постоянный уменьшающийся наклон с возрастанием  $\alpha$  и достигают предельных значений  $Q/Q_0 = (\ln r_e/r_w)/\ln (r_e/r_0)$  для  $\alpha \rightarrow \infty$ , что соответствует скважине с радиусом  $r_0$  по сравнению со скважиной, имеющей радиус  $r_w$ . С другой стороны, предел  $Q/Q_0$ , когда  $\alpha$  уменьшается от 1, составляет нуль.



Фиг. 150. Зависимость изменения производительности скважины от  $k_1/k_2$  = (проницаемость внутри кольцевого пространства с радиусом  $r_0$ ) / (проницаемость от  $r_0$  до 152,5 м):

$Q/Q_0$  — (эксплоатационная производительность скважины в песчанике, где  $k_1/k_2 \neq 1$ ) / (эксплоатационная производительность скважины в песчанике с проницаемостью, которая составляет половину  $k_2$ ); радиус скважины  $= 0,075$  м.  
 1 —  $r_0 = 15$  м; 2 —  $r_0 = 7,5$  м; 3 —  $r_0 = 3$  м;  
 4 —  $r_0 = 1,5$  м; 5 —  $r_0 = 0,3$  м.

Так, если внутренняя зона становится совершенно непроницаемой, течение через всю систему должно стать по необходимости равным нулю, как узка ни была бы зона пониженной проницаемости.

Помимо приложения этих выводов к проблеме солянокислотной обработки скважин, которая будет рассмотрена в последующем разделе, практическое значение полученных результатов заключается также и в том, что они дают объяснение большим колебаниям в величине текущих дебитов одинаковых, повидимому, скважин, эксплуатирующих один и тот же нефтяной или водяной песчаник. Так, весьма локализованная высокопроницаемая зона может сообщить скважине ненормально высокий текущий дебит, в то время как в остальном песчаник обладает сравнительным постоянством, и средние скважины дают значительно меньшие текущие дебиты. Соответственно этому скважина с ненормально низким текущим дебитом обязана этим зоне с пониженной проницаемостью, сосредоточенной в непосредственной близости к данной скважине.

**4. Прилегающие слои с различной проницаемостью. Течение жидкости в трещиноватых известняках.** Как уже было показано в главе I, карбонатные резервуары, в противоположность сложенным из обычных несцепментированных песчаников, пронизаны обычно многочисленными крупными и мелкими трещинами. Некоторые из этих трещин распространяются на значительное расстояние внутри продуктивного горизонта.

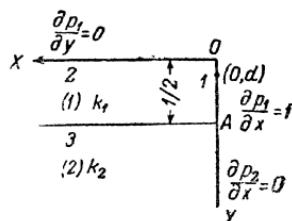
Так как проницаемость самого известняка обычно очень мала, то основную причину высоких текущих дебитов из таких коллекторов следует искать в присутствии этих трещин, которые, несмотря на их весьма малую ширину, имеют значительно большую эффективную проницаемость, чем сам известняк. Тогда можно представить себе общий характер механизма движения жидкостей в известняке следующим образом. Общая масса резервуара питает жидкостью высокопроницаемые трещины, которые приносят ее непосредственно или через сложное сплетение соединительных каналов в эксплоатационные скважины. Детали этого механизма вполне определяются внутренним строением известняка.

Так, равномерно распределенная сеть трещин дает в результате систему, эквивалентную однородному в радиальном направлении песчанику. Если же в известняке имеется только ограниченное количество далеко идущих трещин, можно считать течение обладающим некоторыми из свойств линейного канала. Последнее положение будет рассмотрено в настоящем разделе при допущении, что в системе существует только одна трещина и что единственным выходом для жидкости является часть поверхности забоя скважины, пронизанная этой трещиной. При идеализированном рассмотрении известняка с далеко идущими трещинами удобно рассматривать сам известняк и трещины как две примыкающие пористые среды с различной проницаемостью. Проницаемость трещины будем считать „эффективной“, соответствующей условию, аналогичному свободному линейному каналу, транспортирующему жидкость при ламинарном режиме. Практически в такой системе трещина будет иметь весьма малую ширину.

Следует предусмотреть это обстоятельство только до того предела, где будет наложено граничное условие на конечном выходе из среды, представляющей собой трещину, а это будет соответствовать более удобному требованию постоянства плотности тока.

Вследствие очень малой ширины трещины это требование почти аналогично постоянству давления, что и является физическим условием. Удобно также принять ширину трещины как единицу длины, а среду, представляющую собой трещину, и сам известняк принять бесконечных размеров. Широтное распространение известняка принимается также бесконечным. Вследствие симметрии системы, содержащей только одну трещину, необходимо рассмотреть только один квадрант плоскости  $(x, y)$  — горизонтальный участок системы „известняк-трещина“ (фиг. 151). Тогда можно сформулировать аналитическую задачу таким образом: найти распределение давления  $p_1$  и  $p_2$  так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 p_1 &= 0; \quad \nabla^2 p_2 = 0; \\ \frac{\partial p_1}{\partial y} &= 0; \quad y = 0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = 1; \quad x = 0, \quad y \geqslant \frac{1}{2}; \\ p_1 &= p_2, \quad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial y}; \quad y = \frac{1}{2}; \\ \frac{\partial p_2}{\partial x} &= 0, \quad x = 0, \quad y \geqslant \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Фиг. 151. Схематическое изображение известняка, рассеченного трещиной, показывающее единичный квадрант плоскости поперечного сечения:

1 — ствол скважины; 2—трещина; 3—массив известняка.

Для поставленной цели достаточно допустить, что среда (1) — трещина — распространяется до той же самой глубины, что и среда (2), и что ни одна из констант системы или физических условий не изменяется с глубиной. Таким образом, система становится двухразмерной. Более того, мы должны синтезировать конечное решение из предварительных, но более простых, соответствующих единичному элементу течения в точке  $(0, d)$  среды (1). Отправной пункт вывода предварительных решений заключается в том, чтобы представить распределение давления, обязанное первичному элементу расхода, в точке  $(0, d)$  в интегральной форме<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Вывод этого решения можно получить также, распространяя метод конформных отображений, показанный в гл. IV, п. п. 7 и 9, для однородной среды, хотя последний будет гораздо сложнее аналитического метода, примененного здесь. Метод конформных отображений основывается на следующем положении: чтобы удовлетворить граничные условия на поверхности разрыва непрерывности в  $y = \frac{1}{2}$ , первичный элемент полюса в  $(0, d)$  среды (1) требует отображения в  $(0, 1 - d)$ , кратностью  $(k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$ , относящейся к  $p_1$ , и отображения в  $(0, d)$  кратностью  $2k_1/(k_1 + k_2)$ , относящегося к  $p_2$ . Эти отображения последовательно реализуются в других контурах так, чтобы получить конечный результат, удовлетворяющий иным граничным условиям проблемы. Анализ, который приводится здесь, следует М. Максету, который вывел его для аналогичной электрической проблемы (Physics., 6, 14, 1935).

Такое распределение давления в системе дается выражением:

$$p_0 = \ln [x^2 + (y - h)^2] = 2 \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left\{ e^{-z} - \cos xz \begin{cases} e^{-(d-y)z}; & y \ll d \\ e^{-(y-d)z}; & y \geq d \end{cases} \right\} \quad (2)$$

при условии, что система во всем своем объеме строго однообразна. Однако требование равенства величины расхода нулю при  $y=0$  (вследствие симметрии системы относительно  $y=0$ ) и различная проникаемость для  $y > 1/2$  вводит возмущения в распределение давления для  $y < 1/2$  и для  $y > 1/2$ . Обозначая эти возмущения через  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$ , значения их можно получить из следующего выражения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 &= 2 \int_0^\infty \frac{dz}{z} [\psi_1(z) + (A_1 e^{-yz} + B_1 e^{yz}) \cos xz] \\ \bar{p}_2 &= 2 \int_0^\infty \frac{dz}{z} [\psi_2(z) + A_2 e^{-(y-1/2)z} \cos xz], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — функции, независимые от  $(x, y)$ , соответствующие члену  $e^{-z}$ , выраженному через  $p_0$ , а коэффициенты  $A_1, B_1, A_2$  — функции переменной интегрирования  $z$  — выбираются таким образом, чтобы результирующие функции распределения давления удовлетворяли граничным условиям уравнения (1)<sup>1</sup>. Так как значение  $p_2$  берется так, чтобы получить распределение давления в целом для  $y > 1/2$ , можно написать граничные условия для предварительной задачи, включающей в себя только единичный элемент расхода, где  $p_0 + \bar{p}_1$ , обозначаются через  $p_1$ , а именно:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0; \quad y=0; \quad p_1 = p_2, \quad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial y}; \quad y = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Прилагая эти условия к интегральным выражениям (2) и (3), легко найти, что последние будут удовлетворять при условии, когда произвольные функции  $\psi, A, B$  будут решениями уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -e^{-dz} - A_1 + B_1 &= 0 \\ -e^{-(1/2-d)z} + A_1 e^{-z/2} + B_1 e^{z/2} &= A_2 \\ e^{-z} + \psi_1 &= \psi_2, \\ k_1 \{e^{-(1/2-d)z} - A_1 e^{-z/2} + B_1 e^{z/2}\} &= -k_2 A_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Чтобы обеспечить сходимость  $\bar{p}_1$  и  $p_2$ ,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  должны удовлетворять следующим зависимостям:

$$\psi_1(0) + A_1(0) + B_1(0) = 0; \quad \psi_2(0) + A_2(0) = 0. \quad (6)$$

<sup>1</sup> Можно легко убедиться подстановкой, что интегралы в уравнении (3) являются решениями уравнения Лапласа. Действительно, любая сходящаяся линейная прерывная форма ряда или непрерывная (интегральная форма) суперпозиция элементарных решений  $e^{\pm yz} \cos xz$  будет удовлетворять уравнению Лапласа.

Решения этих уравнений даются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \Delta &= 2\delta \operatorname{sh}(\frac{1}{2} - d)z + 2\operatorname{ch}(\frac{1}{2} - d)z \\ B_1 \Delta &= 2(1 - \delta)e^{-z/2}\operatorname{ch}dz; \quad A_2 \Delta = 4\operatorname{ch}dz \\ \Delta &= -2\left(\delta \operatorname{ch}\frac{z}{2} + \operatorname{sh}\frac{z}{2}\right); \quad \delta = \frac{k_2}{k_1} \\ \psi_1 &= \left(\frac{2}{\delta} - 1\right)e^{-z}; \quad \psi_2 = \frac{2}{\delta}e^{-z} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

При этих значениях для  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  и  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  конечное распределение давления можно написать в виде:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 4 \int^{\infty} \frac{dz}{z} \left[ \frac{e^{-z}}{\delta} - \frac{\cos xz}{\delta \operatorname{ch}\frac{z}{2} + \operatorname{sh}\frac{z}{2}} \times \right. \\ &\times \left. \begin{cases} \left[\delta \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} - d\right)z + \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} - d\right)z\right] \operatorname{ch}yz; & y \leq d \\ \left[\delta \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} - y\right)z + \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} - y\right)z\right] \operatorname{ch}dz; & y \geq d \end{cases} \right] \\ p_2 &= 4 \int^{\infty} \frac{dz}{z} \left[ \frac{e^{-z}}{\delta} - \frac{e^{-(y-1/2)z} \operatorname{ch}dz \cos xz}{\delta \operatorname{ch}\frac{z}{2} + \operatorname{sh}\frac{z}{2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Приравнивая теперь  $\delta = \operatorname{tg} \varepsilon$ , получим следующую форму уравнения (8):

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 4 \int^{\infty} \frac{dz}{z} \left\{ e^{-z} \operatorname{cth} \varepsilon - \frac{\cos xz}{\operatorname{sh}\left(\frac{z}{2} + \varepsilon\right)} \times \right. \\ &\times \left. \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\frac{z}{2} + \varepsilon - dz\right) \operatorname{ch}yz; & y \leq d \\ \operatorname{ch}\left(\frac{z}{2} + \varepsilon - yz\right) \operatorname{ch}dz; & y \geq d \end{cases} \right\} \\ p_2 &= 4 \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} \left[ e^{-z} \operatorname{cth} \varepsilon - e^{-(y-1/2)z} \frac{\operatorname{ch} \varepsilon \operatorname{ch}dz \cos xz}{\operatorname{sh}\left(\frac{z}{2} + \varepsilon\right)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Как уже было допущено, фактическая ширина полоски (1) принимается настолько малой при практическом приложении настоящей задачи, чтобы расход вдоль  $OA$  имел постоянную величину для постоянного давления. Полагая тогда постоянство распределения единичного расхода вдоль  $OA$ , ясно, что результирующее распределение давления будет получено из интегрирования уравнения (9) по отношению к  $d$ , — от  $d = 0$  до  $d = 1/2$ . Однако для случая  $p_1$  является удобным вычесть  $p_0$  и оставить разность в логарифмической форме уравне-

ния (2). Обозначив интегрируемые значения также через  $p_1$  и  $p_2$ , находим:

$$\left. \begin{aligned} p_1 = & \left( \frac{1}{2} - y \right) \ln \left[ x^2 + \left( \frac{1}{2} - y \right)^2 \right] + \\ & + y \ln (x^2 + y^2) + 2x \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{2x^2 + 2y^2 - y} - 1 + \\ & + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z} \left\{ \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} \right) e^{-z} + \frac{2 \cos xz}{z \Delta} \times \right. \\ & \times \left[ e^{-yz} \left( \delta \operatorname{ch} \frac{z}{2} + \operatorname{sh} \frac{z}{2} - \delta \right) + \right. \\ & \left. \left. + (1 - \delta) e^{-z/2 + yz} \operatorname{sh} \frac{z}{2} \right] \right\}; \\ p_2 = & 2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} \left[ e^{-z} \operatorname{cth} \varepsilon - 2e^{-(\varepsilon - 1/2)z} \frac{\operatorname{ch} \varepsilon \operatorname{sh} z/2 \cos xz}{z \operatorname{sh}(z/2 + \varepsilon)} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $\Delta$  дается уравнением (7).

Для подсчетов удобно исключить константы, вычитая значения  $p$  при  $x=0$ . Так, для  $y=1/2$ :

$$\begin{aligned} p_1(x, 1/2) - p_1(0, 1/2) = & 1/2 \ln(1 + 4x^2) + 2x \operatorname{tg}^{-1} 1/2 x + \\ & + 4 \int_0^{\infty} \frac{dz \sin^2 xz/2}{z^2 \operatorname{sh}(z/2 + \varepsilon)} \left[ e^{-z/2} \operatorname{sh} \left( \frac{z}{2} + \varepsilon \right) + \operatorname{sh} \left( \frac{z}{2} - \varepsilon \right) \right] = \\ = & \pi x + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 xz \operatorname{sh}(z - \varepsilon)}{z^2 \operatorname{sh}(z + \varepsilon)} dz, \end{aligned} \quad (11)$$

$$p^2(x, 1/2) - p_2(0, 1/2) = 8 \operatorname{ch} \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 xz/2 \operatorname{sh} z/2}{z^2 \operatorname{sh}(z/2 + \varepsilon)} dz. \quad (12)$$

На фиг. 152 дано построение нескольких распределений давления (вдоль  $y=1/2$ ), получающихся из вышеуказанных уравнений (1)<sup>1</sup>. Изменение давления вначале линейно, а затем принимает логарифмическую форму. Давление для очень больших величин  $x$  и  $\varepsilon \leq 10^{-3}$  достигает значений, которые даются выражением:

$$p\left(x, \frac{1}{2}\right) - p(0, 1/2) = \frac{2 \operatorname{ch} \varepsilon}{\varepsilon} (1,2704 + \ln \varepsilon x). \quad (13)$$

Вместе с тем линейное изменение  $p$  возрастает для все больших и больших значений  $x$  по мере того, как уменьшается  $\varepsilon$  и фактически становится совершенно линейным для  $\varepsilon=0$ , когда среда (2) имеет исчезающую малую проницаемость. Это следует из уравнения (11), где

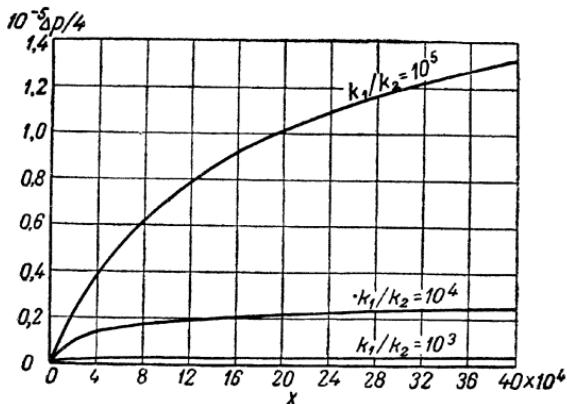
$$p(x, 1/2) - p(0, 1/2) = 2\pi x. \quad (14)$$

<sup>1</sup> Для  $\varepsilon \leq 10^{-3}$  можно получить очень близкие приближения к интегралам уравнений (11) или (12) комбинированием их с более простыми, для которых можно получить точные решения, или вывести их из таблицы для интегралов синуса и косинуса („Funktionen Tafeln“ by E. Jahnke and F. Emde, 1928; есть русское издание).

С другой стороны, в предельном случае, когда среда (2) имеет ту же самую проницаемость, что и среда (1),  $\varepsilon = \infty$  и

$$p(x, 1/2) - p(0, 1/2) = \ln(1+x^2) + 2x \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{x}. \quad (15)$$

Замечая, что уравнение (13) дает перепад давления между скважиной и точками вдоль трещины на расстоянии  $x$  для расхода  $2\pi k_1/\mu$  в скважину с любой стороны оси  $y$ -ов, можно легко рассчитать перепад давления для единицы текущего дебита или эффективного сопротивле-



Фиг. 152. Распределение давления вдоль трещины, отдающей жидкость и рассекающей карбонатный резервуар:

$\Delta p$  — падение давления от оконечности трещины у скважины до расстояния  $x$  (замеренного в единицах ширины трещины), для текущего дебита  $4\pi k_1/\mu$  единиц на единицу мощности известняка;  $k_1/k_2$  — (эффективная проницаемость трещины) / (проницаемость самого известняка).

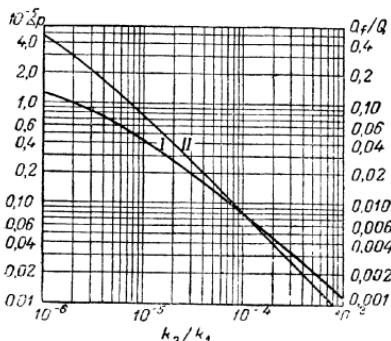
ния системы. На фиг. 153 это сопротивление построено в виде кривой I для  $k_1/\mu = 1$ , в интервале  $k_2/k_1$ , имеющем практический смысл  $\leqslant 10^3$  и для  $x = 4 \cdot 10^5$ . Уменьшение наклона с уменьшением  $k_2/k_1$  на этой фигуре всецело обязано тому обстоятельству, что, если проницаемость второй среды продолжает уменьшаться, то все больше и больше жидкости транспортируется непосредственно средой (1) — трещиной, при практической реализации рассматриваемой системы. Поэтому эффективная проводимость комбинированной системы не будет уменьшаться так сильно от этого фактора, как будет уменьшаться проводимость среды (2). Действительно, из уравнения (12) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 4 \operatorname{ch} \varepsilon \int_0^\infty \frac{\sin xz \operatorname{sh} z/2}{z \operatorname{sh} \left(\frac{z}{2} + \varepsilon\right)} dz = \\ &= \frac{\operatorname{cth} \varepsilon}{x} \left[ 2 - \frac{1}{x^2} (\operatorname{cth}^2 \varepsilon - 1/3) + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Полагая, что  $\frac{\partial p}{\partial x}$  постоянно для больших значений  $x$  по ширине трещины, получаем величину расхода, поступающего непосредственно

в трещину при больших значениях  $x$ . Разделив расход на  $2\pi$ , получаем долю всего течения в скважину, поступающего непосредственно через трещину за пределами, по крайней мере, расстояния  $x$  от скважины. На фиг. 153 дается кривая  $II$ , которая показывает, как изменяется эта доля с изменением  $k_1/k_2$  для  $x = 4 \cdot 10^5$ . Эта кривая показывает, что в то время как для  $k_1/k_2 = 10^4$  из известняка на расстоянии  $x$  поступает в трещину 99,2% всего расхода, для  $k_1/k_2 = 10^6$  поступает только 54% всего расхода.

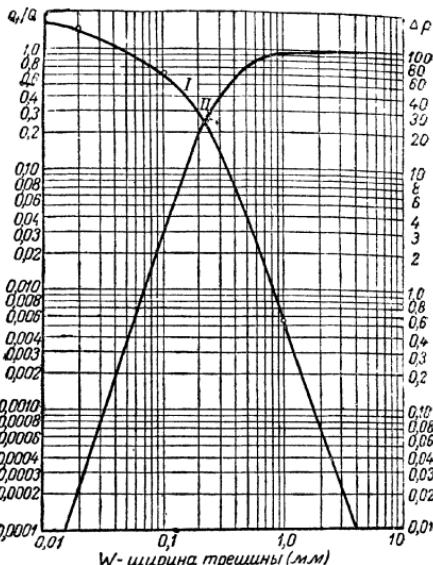
Так как кривая  $I$  (фиг. 153) базируется на фиксированной единице проницаемости среды (1), она дает изменение сложного сопротивления системы известняк — трещина, где трещина сохраняется



Фиг. 153. Сопротивление систем трещин в карбонатном резервуаре на единицу эффективной проницаемости трещин ( $k_1$ ):

$I$  — падение давления  $\Delta p$  между скважиной и расстоянием  $4 \cdot 10^5$  (в единицах ширины трещины) от скважины для единицы расхода на единицу мощности известняка;  $\Delta p$  выражено в атмосферах, где  $k_1/\mu = 1$ ;  $II$  — доля  $Q_f/Q$  общего потока, поступающего в скважину, которая прошла по всей трещине на расстояние  $4 \cdot 10^5$  единиц;  $k_2$  — проницаемость самого известняка;  $\mu$  — 1 сантипуаз.

строго фиксированной, а может изменяться только проницаемость известняка. Если рассматривать известняк имеющим фиксированную проницаемость, при изменении только размера трещины, то эффективное сопротивление системы следует кривой  $I$ , представленной на фиг. 154<sup>1</sup>. В этом случае проницаемость известняка была принята 0,01 дарси, а радиус резервуара — 91,5 м. Следует заметить, что для относительно больших трещин сопротивление сложной системы изменяется обратно пропор-



Фиг. 154. Сопротивление систем трещин в карбонатном резервуаре для фиксированной проницаемости известняка (0,01 дарси):

$I$  — падение давления (в атмосферах) на протяжении первых 91,5 м от скважины для единицы расхода ( $\text{см}^3/\text{сек}$ ) на единицу мощности известняка;  $II$  — доля  $Q_f/Q$  общего потока, поступающего в скважину. Это количество прошло по всей трещине для полного интервала 91,5 м.

<sup>1</sup> Эффективная проницаемость  $k_1$  трещины здесь была переведена в эквивалентную ширину ее  $w$  с помощью уравнения (2), гл. VII, п. 8.

ционально кубу ширины трещины. Этого следует ожидать, так как на основании гл. VII, п. 8 эффективная проницаемость трещины изменяется пропорционально квадрату ее ширины, а величина суммарного расхода через трещину для данного перепада давления будет также пропорциональна ее абсолютной ширине. Кривая II на фиг. 154 дает долю  $Q_f/Q$  суммарного расхода, который поступает в скважину непосредственно через трещину;  $1 - Q_f/Q$  дает долю расхода, которая поступает в трещину из окружающего известняка в пределах 91,5 м от скважины. Видно, что для трещин, ширина которых более 0,75 мм, менее 14% всего течения поступает в трещину в пределах 91,5 м от скважины.

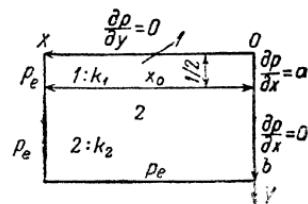
**5. Системы с ограниченными трещинами в известняках.** Анализ последнего раздела базировался на допущении, что известняк и его трещины распространяются на бесконечно большие расстояния от эксплуатационной скважины. Полученные выводы показали, что давление изменяется логарифмически на больших расстояниях от последней, так что составная проводимость системы будет нечувствительной к точным размерам ее при конечности системы. Однако было бы весьма поучительно сделать вывод соответствующих решений для такого случая, где с самого начала принимается конечность размеров системы. Тогда можно было бы приложить метод рядов Фурье аналогично тому, как это было сделано в последнем разделе, где применение интегрального анализа Фурье дало большой эффект<sup>1</sup>.

Будет специально допущено, что на удаленных контурах давление поддерживается точно равным  $p_e$  (фиг. 155). Соответствующие решения для  $p_1$  и  $p_2$  можно получить из выражения:

$$p_1 = p_e + a(x - x_0) + \sum_{\text{нечет.}} A_n \cos \frac{n\pi x}{2x_0} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2x_0}, \quad (1)$$

$$p_2 = p_e + \sum_{\text{нечет.}} B_n \times \cos \frac{n\pi x}{2x_0} \operatorname{sh} \frac{n\pi(b-y)}{2x_0}. \quad (2)$$

Так как эти выражения полностью удовлетворяют условиям, что  $p_1, p_2 = p_e$  при  $x = x_0$ ,  $p_2 = p_e$  при  $y = b$ ;  $\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0$  при  $y = 0$ ;  $\frac{\partial p_2}{\partial x} = 0$  для  $x = 0$ ,  $\frac{1}{2} \geq y \leq b$  и  $\frac{\partial p_1}{\partial x} = a$  для  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ . Остающиеся условия, которые необходимо удовлетворить, заключаются



Фиг. 155. Схематическое изображение оконтуренной системы известняк-трещина:

1 — трещина; 2 — массив известняка

<sup>1</sup> Byerly W. E., „Fourier Series and Spherical Harmonics“, гл. IV.

в непрерывности  $p$  и  $k \frac{\partial p}{\partial y}$  при  $y = \frac{1}{2}$ . Они дают следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + \sum A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{4x_0} \cos \frac{n\pi x}{2x_0} &= \\ = \sum B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi(b - 1/2)}{2x_0} \cos \frac{n\pi x}{2x_0}, \\ k_1 A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{4x_0} &= -k_2 B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi(b - 1/2)}{2x_0}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$a(x - x_0) = \frac{-8ax_0}{\pi^2} \sum_{\text{нечет.}} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2x_0},$$

и решая уравнение относительно  $A_n$ ,  $B_n$ , а затем подсчитывая соответствующий перепад давления при  $y = \frac{1}{2}$ , находим, что

$$p_e - p_w = \frac{8ax_0}{\pi^2} \sum_{\text{нечет.}} \frac{1}{n^2 \left[ 1 + \frac{k_2}{k_1} \operatorname{cth} \frac{n\pi}{4x_0} \operatorname{cth} \frac{n\pi(b - 1/2)}{2x_0} \right]}, \quad (3)$$

где

$$p_w = p_1(0, 1/2) = p_2(0, 1/2).$$

Так как  $x_0$  замеряется в единицах ширины среды (1) — трещины и потому будет выражаться очень большим числом, уравнение (3) приближенно можно выразить так:

$$\Delta p = \frac{8ax_0}{\pi^2} \sum_{\text{нечет.}} \frac{1}{n^2 \left( 1 + \frac{4x_2 x_0}{k_1 n \pi} \right)}, \quad (4)$$

где  $b$  берется порядка  $2x_0$ .

Тогда суммарный расход в системе будет, очевидно:

$$Q = \frac{2ak_1}{\mu} = \frac{\pi^2 k_1 \Delta p}{4\mu x_0} \sum_{\text{нечет.}} \frac{1}{n \left( n + \frac{4k_2 x_0}{k_1 \pi} \right)}. \quad (5)$$

Отсюда, замечая, что

$$\sum_{\text{нечет.}} \frac{1}{n(n+a)} = \frac{1}{a} \left[ 0,2886 + \psi(a) - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{a}{2}\right) \right], \quad (6)$$

где  $\psi$  — логарифмическая производная гамма-функции<sup>1</sup> и принимая  $s = 2x_0 k_2 / k_1 \pi$ , можно переписать уравнение (5) в таком виде:

$$\frac{\Delta p}{Q} = \frac{\mu}{\pi k_2} \left[ 0,2886 + \psi(2s) - \frac{1}{2} \psi(s) \right]. \quad (7)$$

Значения  $\Delta p/Q$  для трещины шириной 1,0, 0,1 и 0,02 мм, полученные из уравнения (7), даны на фиг. 154 в виде кружков на кривой I. Следует заметить, что эти значения для практических целей хорошо

<sup>1</sup> См. главу V, п. 3.

согласуются с величинами, подсчитанными по методике гл. VII, п. 4. То обстоятельство, что сопротивления, которые даются уравнением (7), несколько завышены, всецело обязано принятому допущению, что нижняя граница среды (2), где предполагается давление равным  $p_e$ , находится на расстоянии  $2x_0$  или больше от скважины, в то время как анализ гл. VII, п. 4 налагает в основном условие, что давление будет равняться  $p_e$  на круговом контуре с радиусом  $x_0$  (при условии значительной величины  $x_0$ ). Повидимому, последнее допущение является несколько менее произвольным, чем то, которое было принято при выводе уравнения (7). Однако для математических выкладок форма (7) более удобна, чем (11) и (12), гл. VII, п. 4.

**6. Теория солянокислотной обработки скважин из карбонатных коллекторов<sup>1</sup>.** Весьма интересным практическим приложением аналитической процедуры, разработанной в последних нескольких разделах, является физическое пояснение реакции нефтяных скважин, эксплуатирующих карбонатные коллекторы, на солянокислотную обработку. Солянокислотная обработка является средством искусственного стимулирования добычи из скважин, работающих с малыми и экономически невыгодными дебитами, путем введения на забой скважины интенсифицирующего агента — соляной кислоты. Этот метод до сих пор является единственным наиболее успешным процессом обработки скважин из карбонатных коллекторов, которые легко разрушаются от воздействия кислоты<sup>2</sup>.

Элементарное объяснение, которое до сих пор обычнодается для понимания причин эффективности метода, заключается в том, что кислота «очищает» скважину и отсюда повышает ее текущий дебит. Однако широкое расхождение результатов, полученных в результате обработки, повидимому, аналогичных скважин, очевидно, требует более детального исследования этого явления в целом. Так, в некоторых случаях обработка, видимо, дает плохие результаты, а в других случаях, при совершенно идентичных условиях, она высоко эффективна и приводит к резкому повышению нефтеотдачи. Кроме того, было найдено, что в некоторых случаях обработка повышает только текущую добычу, оставляя суммарную добычу из подземного резервуара неизменной, а в других случаях достигается увеличение суммарной физической отдачи нефти из подземного резервуара.

В настоящем разделе будет сделана попытка произвести согласование некоторых из особенно резко отличающихся результатов промысловой практики, на основе разделения первоначального механизма нефтеотдачи обработанных скважин и первоначальных условий, господствовавших в них до производства обработки. Однако с самого начала подчеркнем, что все дальнейшее рассуждение предполагает отсутствие новых источников жидкости, которые могут открыться в результате солянокислотной обработки, так что последняя скорее увеличивает суммарную экономическую нефтеотдачу, чем физическую. Если же кислота,

<sup>1</sup> Muskat M. and Wyckoff R. D., Physics, 7, 106, 1936.

<sup>2</sup> В скважинах, эксплуатирующих песчаные коллекторы, безуспешно пытались вплоть до настоящего времени применять обработку плавиковой кислотой.

проникая в трещины продуктивного горизонта, вскрывает новые и нетронутые источники жидкости, то не только возрастет суммарная физическая нефтеотдача системы, но весь характер ее настолько изменится, что замаскирует характерные свойства различных механизмов движения, которые рассматриваются в дальнейшем.

Скважины покажут резкое повышение текущих дебитов вне зависимости от воздействия кислоты на ту часть резервуара, которая была подвергнута первоначальному дренированию. Кроме того, кривая падения дебита после обработки может принять более пологий вид, чем до обработки. Если же новые источники жидкости не открыты, то кривая падения добычи становится круче, чем это имело место до обработки. Разумеется, во всех случаях скважины покажут немедленно после обработки первоначально высокий текущий дебит благодаря восстановлению давления в призабойной зоне в процессе обработки. Однако эти промежутки являются слишком кратковременными, чтобы проверить эффективность обработки. Поэтому следует учитывать только установленные дебиты для сравнения с предшествующими дебитами. Рассматривая только такие случаи, где кислота повышает только экономическую суммарную отдачу (повышение текущего дебита), ясно, что эффект от таких обработок по существу должен представлять собой повышение эффективной проницаемости продуктивного горизонта, окружающего забой скважины.

Так как солянокислотная обработка не может вызвать сама по себе воздействия на давление в резервуаре, она не оказывает никакого влияния на перепад давления, необходимый для продвижения нефти в скважину. Поэтому всякий прирост текущего дебита после обработки следует приписать эффективному уменьшению сопротивления течению. С этой точки зрения теория солянокислотной обработки для резервуаров, которые не показывают роста суммарной нефтеотдачи после обработки, будет заключаться в анализе эффекта результативной проницаемости пористой среды, вследствие введения в скважину кислоты, которая в состоянии реагировать и растворять те участки породы, с которой кислота вступает в непосредственный контакт.

Теоретическое обоснование получаемого эффекта основывается, очевидно, на определенном механизме нефтеотдачи и, в частности, на определенной геометрической конфигурации течения, принятой для первоначальных условий продуктивного горизонта до ввода в скважину кислоты. Для практических целей можно рассматривать следующие два типа такого механизма, хотя в действительности чаще могут встречаться промежуточные типы. Этими типами являются: 1) трещины или большие поры, широко и равномерно развитые в пределах всего коллектора, так что течение по существу радиально; 2) большая часть течения в скважину приносится ограниченным количеством развитых трещин, которые питаются широтно от известняка, — результирующее течение является средним между линейным и радиальным. В первом случае кислота просто увеличивает проницаемость относительно небольшого кольцевого пространства, концентрично расположенного относительно скважины, или объем порядка 20% от объема взятой кислоты.

Во втором случае кислота проникает в известняк на значительное расстояние по трещинам, расширяет их и увеличивает их эффективную

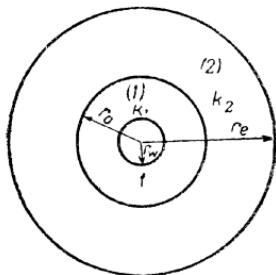
проницаемость на значительное расстояние вдоль их протяжения в массиве известняка. Существуют промысловые наблюдения, которые подтверждают, что в процессе солянокислотной обработки были затронуты скважины на расстоянии 366 м от обрабатываемой, что доказывает вполне определенно существование далеко распространяющихся трещин. Так, полагая, что в скважину было закачено 1890 л соляной кислоты 18° Be, которая равномерно проникла в окружающую породу с пористостью 20% и мощностью 3,0 м, будем иметь кольцевое пространство вокруг скважины, занятое соляной кислотой с радиусом 0,98 м. После полной реакции соляная кислота растворит 0,37 м<sup>3</sup> всей массы известняка. 3780 л соляной кислоты проникнет в кольцевое пространство с приблизительным радиусом 13,8 м и растворит 0,75 м<sup>3</sup> известняка. Однако 1890 л той же самой кислоты могут расширить трещину в известняке на 0,4 см на расстоянии 30,5 м.

Количественная величина эффекта от обработки будет весьма чувствительной к физической характеристике коллектора по отношению к его действительной проницаемости перед обработкой. Так, плотный известняк будет резко отличаться степенью реагирования по сравнению с известняком более высокой проницаемости, а известняк с тонкой трещиноватостью от известняка с более заметной шириной трещин. Более того, горизонт, который был забит или заглущен в непосредственной близости к призабойной зоне, покажет отличный результат по сравнению с однородным коллектором. Постараемся приложить теперь для этих независимых случаев аналитическую теорию, разработанную в последних нескольких разделах с учетом изменения конечных результатов.

**7. Эффект от солянокислотной обработки в радиальной системе.** На фиг. 156 приведено схематическое изображение радиального течения после обработки скважины соляной кислотой. Допустим, что кольцевое пространство между стволом скважины радиусом 0,075 м и радиусом  $r_0$  было поражено соляной кислотой, в то время как остальной известняк за  $r_0$  сохранил свою первоначальную проницаемость  $k_2$ . Результативный эффект от действия кислоты можно представить себе очень удобно отношением текущего дебита скважины после обработки  $Q$  к соответствующему значению  $Q_0$  до обработки. Эксплоатационная производительность в свою очередь зависит от величин проницаемости внутри и вне кольцевой области, поражаемой кислотой. Представляется весьма удобным рассматривать раздельно случай, когда первоначальная проницаемость кольцевой области нормальна и равняется проницаемости основной массы известняка, так что кислота просто увеличивает ее до более высокого значения, и случай, где кольцевая область имеет первоначально низкую проницаемость вследствие природного отсутствия однородности резервуара, а также закупорки или заглущивания его в процессе бурения. В последнем случае эффект от кислотной обработки будет заключаться по существу в увеличении проницаемости до приблизительно нормального ее значения. На фиг. 157<sup>1</sup> дается в виде

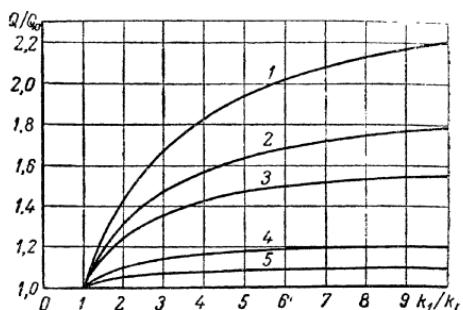
<sup>1</sup> Фиг. 157 и 158 по существу одинаковы с фиг. 150. Они только были перестроены так, чтобы их можно было приложить с удобством к проблеме солянокислотной обработки.

графика результат солянокислотной обработки для первого случая. На фиг. 157 абсциссы  $k_1/k_i$  дают отношение конечной проницаемости кольца к ее первоначальному значению;  $k_i$  равняется также  $k_2$  — проницаемости основной массы известняка. Из фиг. 157 видно, что результаты в целом не так уже велики, пока радиус пораженного кислотой кольца не достигнет большого значения, что в свою очередь потребовало бы огромных количеств кислоты. Более того,  $Q/Q_0$  не зависит особенно резко от абсолютного значения роста проницаемости до тех пор, пока  $k_1/k_i$  составляет величину порядка 5 или больше.



Фиг. 156. Радиальное течение в известняке, который был подвергнут солянокислотной обработке.

1 — зона, поражаемая соляной кислотой.



Фиг. 157. Повышение эксплоатационной производительности системы радиального течения, связанное с солянокислотной обработкой, при условии, что первоначальная проницаемость известняка повсюду одинакова:

$Q/Q_0$  — (эксплоатационная производительность после обработки) / (эксплоатационная производительность до обработки);  $k_1/k_i$  — (проницаемость пораженной зоны с радиусом  $r_0$  после обработки) / (проницаемость пораженной зоны перед обработкой); радиус скважины — 0,075 м; радиус внешнего контура — 152,5 м.

1 —  $r_0 = 7,5$  м; 2 —  $r_0 = 3,0$  м; 3 —  $r_0 = 1,5$  м;  
4 —  $r_0 = 0,3$  м; 5 —  $r_0 = 0,15$  м.

Действительно, если бы даже удалось растворить внутреннее кольцо полностью так, что  $k_1/k_i = \infty$ , то увеличение  $Q_0$  равнялось бы только цифре, соответствующей увеличению радиуса ствола скважины от 0,075 м до  $r_0$ . Таким образом, эксплоатационная производительность скважины не удвоится до тех пор, пока поражение породы соляной кислотой не достигнет радиуса 3,4 м, если даже соляная кислота полностью удалит известняк в пределах этого радиуса.

Соответствующие кривые для второго случая приведены на фиг. 158. Здесь абсциссами являются отношения первоначальной проницаемости внутреннего кольца к значению ее после солянокислотной обработки, причем заранее принимается, что последнее значение проницаемости соответствует основной массе известняка. В этом случае даже для малых значений  $r_0$  можно гораздо легче получить большие значения  $Q/Q_0$  при условии, что внутреннее кольцо обладало первоначально очень малой проницаемостью и не было ограничено значениями  $r_0$ . Повидимому, в предельном случае, когда забой скважины будет полностью очищен от пробки и глинистой корки,  $k_i = 0$  и  $Q/Q_0$  принимает бесконечно большое значение.

**8. Эффект от солянокислотной обработки высокотрещиноватых известняков.** Далеко распространяющиеся трещины в карбонатном коллекторе могут играть важную роль при добыче нефти из таких резервуаров, если заметить при этом, что трещина даже с малой шириной обладает эффективной проницаемостью, в сотни раз превосходящей проницаемость самого известняка. Реальную трещину с шириной  $w$  можно, очевидно, рассматривать как эквивалент открытого линейного канала равной ширины. Тогда для условий ламинарного течения можно показать, что транспортирующая производительность такого линейного канала на единицу градиента давления согласно классической гидродинамики дается выражением:

$$Q = w^3 / 12\mu, \quad (1)$$

где  $\mu$  — вязкость жидкости.

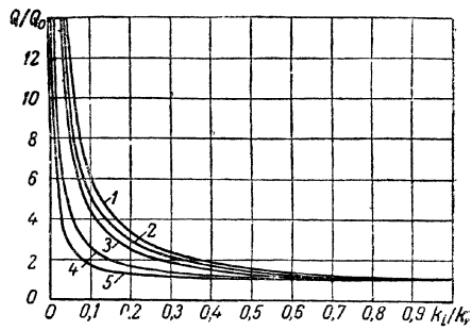
Отсюда эквивалентная проницаемость канала будет:

$$k = \frac{w^2}{12} = \frac{10^8 \mu^2}{12} \text{ дарси},$$

где  $w$  выражено в см. Тогда трещина с шириной только 0,1 мм будет иметь проницаемость 833 дарси, в то время как проницаемость самого известняка обычно бывает порядка 0,01 дарси.

Действительно, суммарная производительность переноса жидкости в сложной радиальной системе с радиусом 13,5 м, состоящей из известняка с проницаемостью 0,01 дарси, может быть заменена единичной линейной трещиной длиной 13,5 м с глубиной, равной глубине радиальной системы, и шириной 0,126 мм.

Если вводить кислоту в скважину, которая вскрыла карбонатную породу, то кислота будет, очевидно, стремиться быстро проникнуть в последнюю, расширить любую трещину, ведущую к стволу скважины, и вступить в реакцию с известняком, непосредственно окружающим забой. Отсюда, если только поражаемая кислотой область не имела первоначально аномальной проницаемости и имея в виду, что рост радиальной проницаемости у ствола скважины создает только относительно небольшое влияние на текущий дебит, представляет собой интерес подвергнуть исследованию те результаты, которые можно ожи-

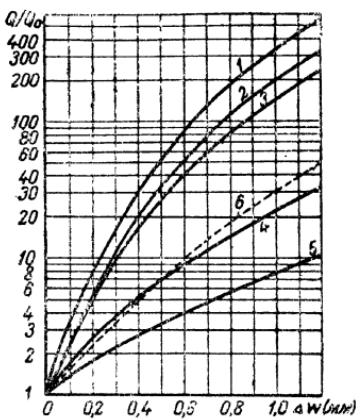


Фиг. 158. Повышение эксплуатационной производительности радиального течения, связанное с солянокислотной обработкой, при условии, что зона, поражаемая соляной кислотой, с радиусом  $r_0$  обладала первоначально более низкой проницаемостью по сравнению с остальной массой известняка, а затем под действием соляной кислоты возросла до величины, соответствующей проницаемости всей массы известняка:

$Q/Q_0$  — (эксплуатационная производительность после обработки) / (эксплуатационная производительность перед обработкой);  $k_i/k_0$  — (проницаемость пораженной зоны перед обработкой) / (проницаемость после солянокислотной обработки). Радиус скважины 0,075 м; радиус внешнего контура 152,5 м.  
 1 —  $r_0 = 7,5$  м; 2 —  $r_0 = 3,0$  м; 3 —  $r_0 = 1,5$  м;  
 4 —  $r_0 = 0,3$  м; 5 —  $r_0 = 0,15$  м.

<sup>1</sup> См. Lamb H., Hydrodynamics, 6 th. edit., p. 582, 1932. Есть русский перевод.

дать вследствие расширения трещин кислотной обработкой. На практике эти трещины имеют ограниченные размеры, и в целом кислота не проникает в трещины на всю их длину. Однако следует вспомнить, что в теоретическом анализе было принято, что с самого начала трещины протягиваются не только до эффективной границы резервуара (90—150 м),



Фиг. 159. Повышение эксплуатационной производительности трещиноватого известняка, связанное с солянокислотной обработкой:

$Q/Q_0$  — (эксплуатационная производительность после обработки)/(эксплуатационная производительность перед обработкой);  $\Delta w$  — расширение трещины, созданное инъекцией соляной кислоты;  $w_i$  — первоначальная ширина трещины; сплошная линия — проницаемость известняка  $= 0,01$  дарси; пунктирная линия — проницаемость известняка  $= 1/12$  дарси;  $1 - w = 0,01$  мм;  $2 - w = 0,05$  мм;  $3 - w = 0,1$  мм;  $4 - w = 0,5$  мм;  $5 - w = 1,0$  мм;  $6 - w_i = 0,1$  мм;

$$k_s = 1/12$$

случаев, представленных на фигуре, принято, что проницаемость известняка составляет 0,01 дарси, а для пунктирной кривой — 0,083 дарси.

Наиболее поразительным свойством этих кривых является, повидимому, колоссальный возможный эффект от обработки, особенно для трещин более мелких размеров, даже при умеренном приросте их ширины. Уже было сказано, что значения  $Q/Q_0$ , приведенные на фиг. 159, должны быть несколько более высокими благодаря сделанным в анализе допущениям. Отсюда кажется вполне вероятным, что если внести соответствующие поправки на эти допущения, все же получим, что увеличение текущих дебитов в 100 и больше раз может быть объяснено

но что последующее действие кислоты равномерно расширяет трещины по всей их длине. Последнее допущение приводит к значительно большим приростам текущего дебита по сравнению с тем, который приходится наблюдать на практике, если только кислота не проникнет полностью в трещины.

Однако эти ошибки должны быть малы вследствие высоких концентраций распределения давления вдоль трещин у скважины, особенно в узких трещинах. Поэтому точное значение эффективной или действительной проницаемости в отдаленных точках от ствола скважины влияет очень мало на общее сопротивление системы.

На фиг. 159 приведен график, на котором показаны конечные результаты, базирующиеся на этих допущениях<sup>1</sup>. Ординаты  $Q/Q_0$  дают отношение текущих дебитов после кислотной обработки и до нее; абсциссы дают дополнительную ширину трещин после обработки. Эти абсциссы приблизительно пропорциональны количеству израсходованной на обработку кислоты. Отдельные кривые относятся к различным начальным ширинам трещин и, за исключением пунктирной кривой, для всех

<sup>1</sup> Расчет величины  $Q/Q_0$  заключается в простом подсчете отношения обратных зависимостей ординат кривой I (фиг. 154) для начального и конечного значения ширины трещин.

всеслед за счет механизма трещин, не требуя привлечения сюда какой-либо иной гипотезы.

Из фиг. 159 становится также ясным, что эффект от обработки, гораздо выше для систем, трещины которых первоначально были узкими, и потому давали добычу при низких дебитах.

Пунктирная кривая, которая была рассчитана для известняка с проницаемостью 0,083 дарси, легла на графике ниже, чем соответствующая кривая ( $w_i = 0,1 \text{ мм}$ ) для известняка с проницаемостью 0,01 дарси. Это показывает, что если первоначальный эксплоатационный дебит являлся скорее следствием низкой проницаемости известняка, чем малой ширины трещин, то эффект от обработки будет опять относительно велик по сравнению со скважиной, которая имела первоначально более высокий текущий дебит (более высокую проницаемость известняка).

Для радиального течения было показано, что эффекты от обработки будут гораздо выше для скважин, в которых проницаемость внутренней зоны составляет только небольшую часть проницаемости всей осталльной массы известняка, т. е. для скважин, которые показывают относительно высокую закупорку призабойной зоны. Для фиксированной проницаемости внутренней зоны скважины с более высокой проницаемостью вне этой зоны, а отсюда наивысшим начальным текущим дебитом будут давать наиболее высокие показатели после солянокислотной обработки. Если же рассматривать проницаемость внешней зоны как фиксированную, то скважины, где внутреннее кольцевое пространство обладает низкой проницаемостью, а отсюда низшим начальным текущим дебитом, будут давать также самые высокие показатели после обработки. Как показали промысловые наблюдения, малодебитные скважины обычно реагируют лучше всего на солянокислотную обработку. Поэтому следует сделать заключение, что поскольку течение соответствует радиальному, такая реакция со стороны малодебитных скважин получается скорее по причине серьезной закупорки призабойной зоны, чем вследствие низкой проницаемости основной массы известняка. Конечные выводы можно резюмировать следующим образом.

1. Небольшое увеличение эксплоатационной производительности (до 50%) после кислотной обработки можно объяснить, допуская увеличение проницаемости небольшой радиальной зоны вокруг ствола скважины от нормального значения до более высокого, так же как и удаление радиальной закупорки или расширение далеко простирающихся трещин, которые имеют широтное питание из самого известняка. Если только известняк не имеет развитой системы трещин или он не закупорен очень сильно у ствола скважины, то солянокислотная обработка должна быть малоэффективна для стимулирования нефтенефти.

2. Умеренный прирост эксплоатационной производительности от 50 до 500% можно объяснить, предполагая радиальное течение при одном только допущении, что забой скважин был первоначально закупорен. Размер закупорки является основным фактором, определяющим начальный текущий дебит, так что малодебитные скважины должны давать самые высокие показатели после обработки. Это явление можно объяснить равным образом, принимая движение по широко развитой трещине.

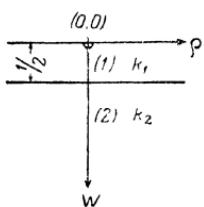
3. Рост эксплуатационной производительности значительно выше 500% для скважин с первоначально умеренным дебитом можно объяснить только допущением, что в известняке присутствуют далеко развитые трещины, через которые поступает жидкость и которые расширяются кислотой. В этом случае малодебитные скважины должны дать наивысшие показатели после обработки, вне зависимости от того, является ли их первоначальный низкий текущий дебит следствием низкой проницаемости известняка или малой ширины трещин. Для скважин с очень низкими дебитами прирост свыше 500% можно объяснить также механизмом отдачи по трещинам, соответствующим радиальному течению, хотя необходимо допустить при этом, что первоначально в системе существовала почти полная закупорка зоны у ствола скважины.

На основании предварительных испытаний величины „отбора“ следует отметить, что нельзя сделать априорных утверждений относительно механизма отдачи и предсказать отсюда возможный эффект от соляно-кислотной обработки. Всякий механизм отдачи покажет приблизительно линейное соотношение между текущим дебитом и перепадом давления, откуда можно вывести результирующее сопротивление системы. Это результирующее сопротивление может быть получено синтезом радиального течения и течения в породе с трещинами, соответственно предсмотров некоторые физические и геометрические константы, необходимые для того, чтобы найти границы отдельных сторон системы.

**9. Несовершенные скважины в переслаивающихся горизонтах.** Иным типом задачи, включающей в себя область с различной проницаемостью и имеющей большое практическое значение, является несовершенная скважина, пробуренная на песчаник, состоящий из слоев с различной проницаемостью.

В противоположность двухразмерным задачам, которые подвергались исследованию до сих пор в настоящей главе, рассмотрение поставленной задачи относится к трехразмерному типу. Однако с формальной точки зрения аналитическая процедура в данном случае будет почти аналогичной той методике, которая была разработана в гл. VII, п. 4, с одной только существенной разницей, что основные элементарные решения, из которых синтезируется конечное распределение потенциала, здесь будут являться произведением экспоненциальной и бесселевой функций, в то время как в гл. VII, п. 4, распределение потенциала выражалось произведением тригонометрической и экспоненциальной функций.

В любом практическом случае глубина вскрытия пласта скважиной имеет величину, неравную нулю; песчаник имеет конечную мощность и может обладать переменной проницаемостью. Однако в данном случае примем для простоты, что скважина несовершенна, и песчаник сложен непосредственно из слоя 1 с проницаемостью  $k_1$ , покоящегося на бесконечном однородном песчанике 2 с проницаемостью  $k_2$ , как это показано на фиг. 160.



Фиг. 160. Схема «несовершенной» скважины, вскрывшей переслаивающийся песчаник.

Эту задачу можно решить путем некоторого обобщения метода конформных отображений, примененного в гл. V, п. 3<sup>1</sup>.

Однако более простым и поучительным является применение бесселевых функций<sup>2</sup> для рассмотрения задач о потенциалах с осевой симметрией. В то же самое время мы остановимся на основных положениях одного из наиболее современных методов классического решения дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, а именно методе разделения переменных. Этот метод обеспечивает систематическую процедуру при выводе элементарных решений уравнения Лапласа, так как применявшиеся до сих пор элементарные решения уравнения Лапласа, как  $\ln r$  (гл. IV, п. 2),  $r^{\cos n\theta}$  (гл. IV, п. 5),  $f(x+iy)$  (гл. IV, п. 8)  $1/r$  (гл. V, п. 2) и  $e^{\pm y \cos \varphi} \sin xz$  (гл. VII, п. 4) при построении распределения давления или потенциала, соответствующего специальным физическим проблемам, были получены из форм вырождения дифференциального уравнения, в частных производных, например, уравнения (2), гл. V, п. 2, и (3), гл. IV, п. 2, или были просто предложены как решения, подтверждающиеся подстановкой. Метод разделения переменных применяется следующим путем. Беря уравнение Лапласа в цилиндрических координатах (3), гл. III, п. 7, и допуская аксиальную симметрию и безразмерные переменные уравнения<sup>3</sup> (3), гл. V, п. 3, а именно

$$w = \frac{z}{2h}; \quad \varrho = \frac{z_1}{2h}, \quad (1)$$

где  $h$  — мощность верхнего слоя, которого коснулся забой скважины; имеем:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Теперь допустим, что функцию потенциала  $\Phi$  можно выразить как функцию, в которой зависимые переменные „разделены“, а именно, как произведение функции  $R$  от одной переменной  $\varrho$  и функции  $W$  от одной переменной  $w$ , т. е.:

$$\Phi = R(\varrho) W(w); \quad (3)$$

это выражение подставляется в уравнение (2), и конечный результат делится на  $\Phi$ . Отсюда находим:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d \varrho^2} + \frac{1}{R \varrho} \frac{d R}{d \varrho} + \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d w^2} = 0. \quad (4)$$

Перенося последний член уравнения (4) в правую сторону и замечая, что левая сторона тогда представит собою функцию от  $\varrho$ , а правая часть функцию от  $w$ , ясно, что обе стороны могут быть

<sup>1</sup> Нимпель J. N., Zeits. Geophysik, 5, 89, 228, 1929; также сноска в гл. VII, п. 4.

<sup>2</sup> Muskat M., Physics, 4, 129, 1933, где приведены остальные ссылки; см. также L. V. King, Roy. Soc. Proc. A = 139, 237, 1933. В этих сносках проблема рассматривается с точки зрения электрической аналогии течения.

равны только в том случае, если они обе равны некоторой постоянной величине, т. е.

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{1}{R\varrho} \frac{dR}{d\varrho} = - \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\varrho^2} = - a^2,$$

где  $a$  — произвольная постоянная.

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{d^2 W}{d\varrho^2} - a^2 W = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} + a^2 R = 0. \quad (6)$$

Таким образом, задача дифференциального уравнения в частных производных (2) была сведена с помощью разделения переменных уравнения (2) к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (5) и (6) для компонентных функций  $R$  и  $W$  и к приведению, которое дает очень серьезные аналитические упрощения.

Решение уравнения (5) будет, очевидно,

$$W = \text{const } e^{\pm w\varrho}. \quad (7)$$

С другой стороны, уравнение (6) не имеет решения, которое может быть представлено конечным числом элементарных функций. Скорее всего решение этого уравнения можно получить с помощью бесконечного степенного ряда от  $\varrho a$  с однозначно установленными коэффициентами<sup>1</sup>, сумма которого представляет бесселеву функцию нулевого порядка и обозначается через  $J_0(\varrho a)$ , т. е.

$$R = \text{const} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n (\varrho a)^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \text{const} J_0(\varrho a). \quad (8)^2$$

Элементарные решения уравнения (2) отсюда могут быть выражены следующим:

$$\Phi = e^{\pm w\varrho} J_0(\varrho a). \quad (9)$$

Возвращаясь теперь к первоначальной физической проблеме, поставленной в настоящем разделе, можно изобразить несовершенную сква-

<sup>1</sup> Piaggio, H. T. H., Differential Equations, 1929, глава IX. Есть русский перевод.

<sup>2</sup> Второе фундаментальное решение уравнения (6), часто называемое функцией Неймана  $N_0(\varrho a)$ , имеет логарифмическую особенность при  $\varrho = 0$  и потому его не следует здесь подвергать рассмотрению. Кроме того, если  $a$  не имеет действительного значения, ни одно из решений уравнения (6) не может быть здесь использовано, так как одно из них становится бесконечностью при малом значении  $\varrho$ . Если  $a$  — мнимая величина, то решение, которое становится бесконечностью при большом значении  $\varrho$ , является функцией  $I_0$ , которая будет применена в следующем разделе. Решение, которое становится бесконечностью при малом значении  $\varrho$ , есть функция Ганкеля  $K_0$ , которая была использована в гл. V, п. 3, а также будет использована в последующем разделе. Дальнейшие подробности, относящиеся к теории этих различных функций, можно найти в гл. XVII, „Modern Analysis,” E. T. Whittaker and G. N. Watson, а также в исследовании „The Theory of Bessel Functions, G. N. Watson, 1922, которое всецело посвящено функциям этого типа.

жину точечным стоком, расположенным в центре скважины. Такой сток будет создавать распределение потенциала вида

$$\Phi_0 = \frac{-1}{\sqrt{\varrho^2 + w^2}}. \quad (10)$$

При помощи этого решения можно построить систему конформных отображений, как это было уже дано в гл. V, п. 3, так, чтобы получить результирующее распределение потенциала, удовлетворяющего граничным условиям. Но так как элементарное решение (9), уравнения (2), выведенное в настоящем разделе, выражено бесселевой функцией, его можно объединить с уравнением (10) только при условии, что последнее также будет выражаться бесселевой функцией.

Этого можно добиться с помощью интегрального выражения<sup>1</sup>:

$$\Phi_0 = \frac{-1}{\sqrt{\varrho^2 + w^2}} = - \int_0^\infty e^{-w a} J_0(\varrho a) da. \quad (11)$$

Тогда, объединяя  $\Phi_0$  с аналогичной непрерывной суперпозицией элементарных решений, например уравнением (9), можно получить результирующее распределение потенциала в верхнем слое (фиг. 160) из следующего выражения:

$$\Phi_0 = \int_0^\infty J_0(\varrho a) [-e^{-w a} + A(a)e^{-w a} + B(a)e^{(w - 1/2)a}] da. \quad (12)$$

Последние два члена в интегрируемом количестве представляют собой возмущение в  $\Phi_0$ , возникающее вследствие наличия нижнего слоя (фиг. 160). Действительно, если нижний слой имеет ту же самую проницаемость, что и верхняя зона, то потенциал, обязанный скважине, будет  $\Phi_0$  и, как это видно из дальнейшего, если  $k_2 = k_1$ , то  $A$  и  $B$  будут равны нулю.

Аналогично этому можно получить вывод для  $\Phi_2$ . Это дает распределение потенциала в нижней зоне. Однако вследствие того, что последняя распространяется до бесконечности, член, включающий в себя  $e^{w a}$ , должен быть отброшен, так как в бесконечности он примет значение бесконечности. Отсюда  $\Phi_2$  примет вид:

$$\Phi_2 = \int_0^\infty C(a)e^{-(w - 1/2)a} J_0(\varrho a) da. \quad (13)$$

Вид функций  $A(a)$ ,  $B(a)$  и  $C(a)$  должен быть выбран таким образом, чтобы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  удовлетворяли граничным условиям задачи. Физически это значит: 1) плоскость  $w = 0$  должна быть непроницаема для жидкости; 2) давления, а отсюда  $\Phi/k$  должны быть непрерывными при переходе через поверхность раздела при  $w = 1/2$ ; 3) нормаль скорости  $-\partial\Phi/\partial n$

<sup>1</sup> Watson G. N., Theory of Bessel Functions, стр. 384.

должна быть непрерывной на поверхности раздела  $w = 1/2$ . Аналитически это обозначает, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} &= 0: w = 0; \quad \frac{\Phi_1}{k_1} = \frac{\Phi_2}{k_2}: w = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial w}: w = \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Так как интегралы обоих потенциалов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  имеют те же пределы 0 и  $\infty$  и так как интегрируемые выражения имеют тот же самый общий член  $J_0(\rho a)$ , необходимо рассмотреть остальную часть интегрируемого выражения, прилагая сюда граничные условия уравнения (14)<sup>1</sup>.

Прилагая эти условия к функциям (12) и (13) и принимая  $k_2/k_1 = \delta$ , найдем, что коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , должны удовлетворять:

$$\left. \begin{aligned} A - Be^{-a/2} &= 0, \\ Ae^{-a/2} + B - \frac{c}{\beta} &= e^{-\gamma/2} \\ Ae^{-a/2} - B - C &= e^{-a/2} \end{aligned} \right\} \quad (15)^2$$

Решения этих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{-e^{-a}(\delta - 1)}{A\delta}, & B &= \frac{-e^{-a/2}(\delta - 1)}{A\delta} \\ C &= \frac{2e^{-a/2}}{A}; & A &= -\frac{2e^{-a/2}}{\delta} \left\{ \sinh \frac{a}{2} + \delta \cosh \frac{a}{2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

так что  $A$  и  $B$  равняются нулю для  $\delta = 1$  ( $k_2 = k_1$ ), как это было уже указано выше.

Найдем после некоторого приведения, что при этих значениях  $A$ ,  $B$  и  $C$  и при обозначении;

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \operatorname{cth} \varepsilon: \quad \frac{k_2}{k_1} = \delta > 1 \\ \delta &= \operatorname{th} \varepsilon: \quad \frac{k_2}{k_1} = \delta < 1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

можно получить  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  из следующих выражений:

<sup>1</sup> Такие процедуры непосредственно ведут только к достаточным условиям для  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Теорема же об однозначности решения уравнения Лапласа с данными граничными условиями (гл. III, п. 5) обеспечивает, что полученное таким образом решение аналитически эквивалентно единственному физическому решению задачи.

<sup>2</sup> Первое из этих выражений было получено, прилагая первое выражение из (14) только к членам  $A$  и  $B$  в  $\Phi_1$ , так как первый член, обязанный  $\Phi_0$ , как это дается уравнением (10), автоматически удовлетворяет первое выражение из (14), хотя производная его интегральной формы будет иметь разрыв непрерывности при  $w = 0$ .

для  $\delta > 1$ 

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \int_0^\infty \frac{J_0(\varrho a) \operatorname{sh}\left(\varepsilon + \frac{a}{2} - wa\right)}{\operatorname{ch}\left(\varepsilon + \frac{a}{2}\right)} da \\ \Phi_2 &= -\operatorname{ch} \varepsilon \int_0^\infty \frac{J_0(\varrho a) e^{-(w-1/2)a}}{\operatorname{ch}\left(\varepsilon + \frac{a}{2}\right)} da; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

для  $\delta < 1$ 

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= - \int_0^\infty \frac{J_0(\varrho a) \operatorname{ch}\left(\varepsilon + \frac{a}{2} - wa\right)}{\operatorname{sh}\left(\varepsilon + \frac{a}{2}\right)} da \\ \Phi_2 &= -\operatorname{sh} \varepsilon \int_0^\infty \frac{J_0(\varrho a) e^{-(w-1/2)a}}{\operatorname{sh}\left(\varepsilon + \frac{a}{2}\right)} da. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Эти уравнения содержат полное описание распределения потенциала в системе. Мы не входим здесь в подробности решения интегралов, но дадим вкратце конечные выводы анализа. Так, для  $w = 0$ , т. е. в кровле песчаника, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(w=0) &= - \left[ \frac{1}{\varrho} + 2 \sum_1^\infty \frac{\nu^n}{\sqrt{\varrho^2 + n^2}} \right], \\ \nu &= \frac{1-\delta}{1+\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

Это показывает, что распределение потенциала можно рассматривать как вытекающее из ряда конформных отображений при  $w = \pm n$  с кратностью  $\nu^n$ . Разлагая уравнение (19) по степеням  $\varrho$  или непосредственно подставляя в (18) и (19) степенной ряд для  $J_0$ , как это дается уравнением (8), получаем ряд, удобный для числовых выкладок, при малом значении  $\varrho$ ; это

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(w=0) &= - \left[ \frac{1}{\varrho} - 2 \ln(1-\nu) - 2\nu + \frac{2\nu}{\sqrt{1+\varrho^2}} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_1^\infty (-1)^m c_m f_m(\nu) \varrho^{2m} \right], \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$c_m = \frac{1 \cdot 3 \dots 2m-1}{2 \cdot 4 \dots 2m}; \quad f_m(\nu) = \sum_2^\infty \frac{\nu^n}{n^{2m+1}} \quad (22)$$

и где выделен член  $2\nu/\sqrt{1+\varrho^2}$ , чтобы увеличить радиус сходимости ряда от  $|\varrho|=1$  до  $|\varrho|=2$ . Для больших значений  $\varrho$  можно получить

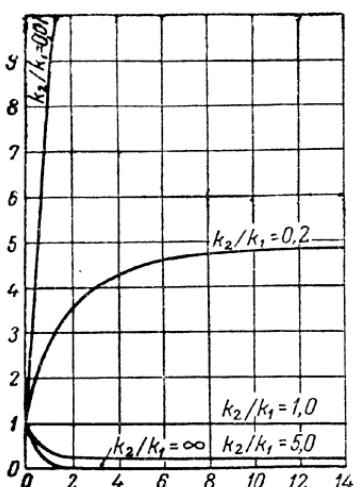
вывод асимптотического распространения  $\Phi_1$  с обратной зависимостью степенем  $\varrho$ . Для членов с  $1/\varrho^9$  это дается выражением:

$$\begin{aligned}\Phi_1(w=0) = & \frac{-1}{\delta\varrho} \left[ 1 + \frac{1}{4\varrho^2\delta^2} (\delta^2 - 1) - \frac{3}{16\varrho^4\delta^4} (\delta^2 - 1)(3 - 2\delta^2) + \right. \\ & \left. + \frac{5}{64\varrho^6\delta^6} (\delta^2 - 1)(17\delta^4 - 60\delta^2 + 45) - \dots \right]. \quad (23)\end{aligned}$$

Если  $\delta = 0$ , нижняя зона полностью непроницаема, уравнение (23) нарушается и необходимо вернуться к (7), гл. V, п. 3, которое было построено полностью для этого случая. С другой стороны, если нижняя зона имеет бесконечную проницаемость —  $\delta = \infty$ , то уравнение (23) должно быть опять заменено. Соответствующее выражение для этого случая будет:

$$\Phi_1(w=0; \delta=\infty) = -4 \sum_0^{\infty} K_0(2n+1) \pi \varrho. \quad (24)^1$$

Чтобы получить более ясное представление о влиянии нижней среды на распределение потенциала, на фиг. 161 была построена зависимость  $\Phi_1$  как функции от  $\varrho$  для нескольких выбранных значений отношения  $k_2/k_1$ .



Фиг. 161. Распределение потенциала в кровле двухслойного песчаника, вскрытоего «несовершенной» скважиной:

$k_2/k$  — (проницаемость нижнего (бесконечной мощности) слоя), (проницаемость верхнего слоя);  $\varrho$  — радиальное расстояние замеренное в единицах двойной мощности верхнего слоя.

текущие вниз, в нижнюю зону с повышенной проницаемостью. Большой практический интерес представляет собой зависимость между эффектив-

<sup>1</sup> Подробный вывод этих результатов, а также уравнения (7), гл. V, п. 3, и математическая обработка электрической аналогии случая, где проницаемый пласт состоит из трех слоев, можно найти в уже цитированной работе М. Маскета.

Видно, что когда проницаемость верхнего слоя выше, чем нижнего ( $k_2/k_1 < 1$ ), потенциал не падает так резко, как в однородной системе. С другой стороны, когда нижние слои более проницаемы, чем залегающие выше, падение потенциала становится более резким. Эту зависимость следует понимать с количественной стороны, если обратить внимание на то, что нижний слой с низкой проницаемостью будет стремиться сконцентрировать течение в верхнем слое, сообщая ему радиальный характер, а отсюда и малые градиенты потенциала, в противоположность совершенному сферическому распределению, когда нижняя зона имеет ту же самую проницаемость, что и верхняя.

Совершенно противоположный эффект будет получен, если направить течение вниз, в нижнюю зону с повышенной проницаемостью. Большой практический интерес представляет собой зависимость между эффектив-

ным сопротивлением системы и отношением проницаемости  $k_2/k_1$ . Практически это осуществляется подсчетом текущего дебита скважины на единицу перепада давления или потенциала в системе как функции  $k_2/k_1$ . Эту зависимость лучше всего представить в графическом виде вследствие различия форм, которые принимает  $\Phi$  для больших значений  $\varrho$ , зависящих от значения  $k_2/k_1$ . Делая эти выкладки, следует сначала заметить, что все приведенные выше выражения для потенциала соответствуют текущему дебиту скважины, умноженному на  $2\pi$ , и потенциалам скважины, которые даются выражением:

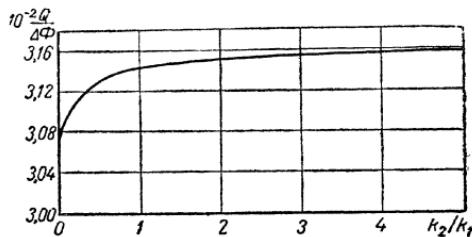
$$\Phi_w = \frac{-1}{\varrho_w} + 2 \ln \frac{2k_2}{k_1 + k_2}. \quad (25)^1$$

Примем для определенности, что

$$\varrho_w = 0,005; \quad \varrho_e = 10,$$

где  $\varrho_w$  — отношение радиуса скважины к двойной мощности верхнего слоя и  $\varrho_e$  — отношение внешнего радиуса, к которому приложен внешний потенциал  $\Phi_e$ , также к двойной мощности верхнего слоя. Тогда, например, для скважины с радиусом 0,075 м значение  $\varrho_w = 0,005$  соответствует верхнему слою мощностью 7,5 м, а  $\varrho_e = 10$  соответствует внешнему радиусу 152,5 м. На фиг. 162 дается построение количества<sup>2</sup>  $Q/\Delta\Phi$  или расхода в скважину на единицу падения потенциала через песчаник по отношению к  $k_2/k_1$  (или на единицу падения давления для значения в верхнем слое  $k/\mu = 1$ ). Из рассмотрения этой кривой видно, что можно представить себе влияние нижней зоны только лишь как небольшую поправку к основному течению в верхнем слое песчаника.

Таким образом, для бесконечного интервала проницаемости нижней зоны  $k_2$  суммарное изменение величины  $Q$  составляет только 3%. Последний вывод был получен из строгого допущения, что забой скважины только вскрывает верхний слой песчаника. Однако с количественной стороны нетрудно усмотреть, что рост влияния нижней зоны в том случае, когда величина вскрытия не равняется нулю, будет небольшим. Допустим на один момент, что нижний песчаник имеет ту же проницаемость, что и верхний. Тогда мы можем приложить к последнему случаю результаты выводов гл. V, пп. 3 и 4, а также фиг. 85, которые показывают, что



Фиг. 162. Эксплоатационная производительность «несовершенной» скважины, вскрывшей 7,5-м пласт песчаника с проницаемостью  $k_1$ , залегающий на пласте песчаника бесконечной мощности с проницаемостью  $k_2$ :

$Q/\Delta\Phi$  — эксплоатационная производительность на единицу падения потенциала в верхнем слое ( $\text{см}^3/\text{сек}$  на атмосферу для  $k_1/\mu = 1$ ); радиус скважины — 0,075 м; радиус внешнего контура — 152,5 м.

<sup>1</sup> Членами в уравнении (21) порядка  $\varrho_w^2$  или меньше можно пренебречь.

<sup>2</sup>  $\Delta\Phi$  представляет собой разность между  $\Phi_1(10)$ , как это дает уравнение (23), и  $\Phi_w$  (0,005), как это дает уравнение (25).

для единичного песчаника и несовершенной скважины нижние слои его, залегающие под забоем скважины, по мере увеличения глубины залегания, дают быстро падающую долю в суммарном течении. Действительно, пока величина вскрытия скважиной верхнего слоя песчаника не превзойдет 50%, а в числовом значении будет меньше 7,5 м, всякое добавление под его залегание очень мощного песчаника той же самой проницаемости не увеличит по всей вероятности суммарного текущего дебита скважины более чем на 15%.

Возвращаясь к фиг. 162, видно, что по крайней мере для несовершенной скважины можно получить дополнительно более чем  $\frac{3}{4}$  эксплоатационной производительности за счет нижнего песчаника с бесконечной проводимостью при условии, что проницаемость нижнего песчаника не превышает проницаемости верхнего слоя. Отсюда можно сделать заключение, что влияние нижней зоны с высокой проницаемостью на несовершенную скважину в песчанике, залегающем над нижним слоем, по всей вероятности не будет превосходить 20% роста суммарного текущего дебита для глубин вскрытия до 50%. В то же самое время при небольших глубинах вскрытия и низкой проницаемости более глубоких слоев этот рост дебита не будет превосходить по всей вероятности, 10%<sup>1</sup>.

Наконец, можно заметить, что большие расхождения между кривыми на фиг. 161 для различных значений  $k_2/k_1$  не противоречат только что отмеченной малой эффективности в колебании расхода  $Q$  в зависимости от  $k_2/k_1$ . Причина этого явления заключается, очевидно, в том, что видимые большие расхождения в значениях  $\varrho\Phi$  для больших значений  $\varrho$  на кривых фиг. 161 включают только малые абсолютные изменения в значении  $\Phi_e$ . Но так как  $\Phi_e$  само по себе пренебрежимо мало по сравнению с потенциалом скважины  $\Phi_w$ , то даже относительно большой процент изменения  $\Phi_e$  очень мало повлияет на разность  $\Delta\Phi = \Phi_e - \Phi_w$  и ординаты  $Q/\Delta\Phi$ , которые приведены на фиг. 162.

**10. Эффективность засыпанного лайнера на эксплоатационную производительность скважины.** В качестве последней задачи, включающей в себя пористые среды с различной проницаемостью в пределах одного и того же течения, рассмотрим влияние засыпанного (забитого песчаной пробкой) лайнера на эксплоатационную производительность скважины. Первая мысль, которая появляется при рассмотрении этой задачи, подсказывает, что присутствие колонны чистого песка на забое ствола скважины должно иметь малое влияние на текущий дебит последней, так как проницаемость такого столба чистого песка должна быть значительно выше проницаемости обычного песчаного коллектора.

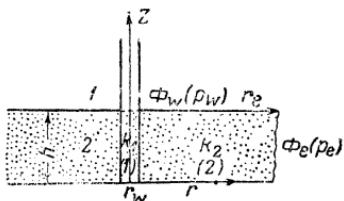
Однако широкие наблюдения показывают, что в фонтанных или глубоконасосных скважинах текущие дебиты очень часто резко падают

<sup>1</sup> Принимая постоянство расхода вдоль поверхности скважины, а затем беря потенциал скважины, соответствующий величине его при  $\frac{3}{4}$  глубины вскрытия от кровли песчаника, получаем близкое приближение к количественному решению при условии, когда глубина вскрытия не равна нулю, как это дается в гл. V, п. 3, для случая единичного песчаника. Однако для большей части практических целей должны быть вполне достаточными приведенные здесь качественные выводы.

вследствие поступления песка в ствол скважины. Так как во многих случаях после удаления накопившейся „пробки“ восстанавливается полная нефтеотдача, то потеря эксплоатационного дебита или даже фактическая гибель скважины часто обязаны присутствию песка в пределах лайнера, а не глинизации или закупорке глинистыми частицами фильтратсетки. Поэтому имеет большой практический смысл подвергнуть детальному анализу физическое объяснение этого явления. Схематическое представление этой физической системы приведено на фиг. 163.

Допустим, что песок заполняет ствол скважины до кровли продуктивного горизонта и имеет постоянную проницаемость  $k_1$ , в то время как проницаемость продуктивного горизонта составляет  $k_2$ . Песок в стволе скважины поддерживается исключительно силой тяжести, так что вблизи верха песчаной колонны течение жидкости, направленное вверх, будет стремиться ослабить набивку, а при высоких скоростях течения жидкость может даже удалить песок из скважины. Однако основные стороны задачи могут быть, повидимому, представлены системой, в которой песчаная колонна имеет постоянную проницаемость от кровли до забоя. Представляется удобным допустить неограниченное распространение продуктивного горизонта по направлению от ствола скважины и принять безграничным давление в резервуаре на большом расстоянии  $r_e$  от последнего. Тогда поставленная задача может быть аналитически сформулирована так: найти такие потенциальные функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , чтобы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= \begin{cases} 2c: & z = 1; \\ 0: & z = 0; \end{cases} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} &= 0; & z &= 0,1 \\ \frac{\Phi_1}{k_1} &= \frac{\Phi_2}{k_2}; & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}; & r &= r_w; & \Phi_2 &\rightarrow \Phi_e \\ \text{для } r &\rightarrow r_e \gg r_w \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Фиг. 163. Схематическое изображение скважины, имеющей заполненный песчаной пробкой хвост-фильтр.

1 — песчаная колонна; 2 — продуктивный горизонт.

где за единицу длины принимается мощность песчаника  $h$ . Чтобы упростить анализ, вместо требования  $\Phi_1 = \Phi_w$  (потенциал скважины) было выбрано условие  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2c$  при  $z = 1$ . Однако в свете малого значения радиуса  $r_w$  по сравнению с остальными размерами системы эти оба условия физически почти эквивалентны.

Вполне ясно, что первый ряд условий уравнения (1) удовлетворяется распределением потенциала:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= B_0 + c \left( z^2 - \frac{r^2}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n I_0(n\pi r) \cos n\pi z \\ \Phi_2 &= \bar{A} + A_0 \ln \cdot \frac{r}{r_w} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_0(n\pi r) \cos n\pi z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $I_0$  и  $K_0$  — бесселевы функции третьего порядка. Первая функция становится экспоненциальной бесконечной для больших значений аргумента, а вторая обращается экспоненциальной в нуль также для больших значений аргумента.  $K_0$  известна как функция Ганкеля, которая была нами введена в анализ для несовершенных скважин (гл. V, п. 3)<sup>1</sup>. Константы  $B_n$ ,  $A_n$  и  $\bar{A}$  следует определить, чтобы они удовлетворяли остальным условиям уравнения (1). Это можно получить из выражений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\delta B_n I_0(n\pi r_w) - A_n K_0(n\pi r_w)] \cos n\pi z &= \bar{A} - \delta B_0 - \\ &\quad - c\delta \left( z^2 - \frac{r_w^2}{2} \right) \\ \pi \sum_{n=1}^{\infty} n [B_n I_1(n\pi r_w) + A_n K_1(n\pi r_w)] \cos n\pi z &= \frac{A_0}{r_w} + cr_w \\ \delta = \frac{k_a}{k_1}; \quad \Phi_e &= \bar{A} + A_0 \ln \frac{r_e}{r_w} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Первые два уравнения представляют собой ряды Фурье; коэффициенты при  $\cos n\pi z$  можно определить согласно гл. IV, п. 3. Таким образом, находим, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \Phi_e + cr_w^2 \ln \frac{r_e}{r_w}; \quad A_0 = -cr_w^2 \\ B_0 &= \frac{\Phi_e}{\delta} - c \left[ \frac{1}{3} - \frac{r_w^2}{2} - \frac{r_w^2}{\delta} \ln \frac{r_e}{r_w} \right], \\ A_n &= -\frac{I_1(n\pi r_w) B_n}{K_1(n\pi r_w)}; \quad B_n = \frac{-4c(-1)^n/n^2\pi^2}{I_0(n\pi r_w) + \frac{I_1(n\pi r_w) K_0(n\pi r_w)}{\delta K_1(n\pi r_w)}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Принимая потенциал скважины  $\Phi_w$  приуроченным к центру песчаной колонны, из уравнения (2) имеем:

$$\Phi_w = \frac{\Phi_e}{\delta} + c \left[ \frac{2}{3} + \frac{r_w^2}{2} + \frac{r_w^2}{\delta} \ln \frac{r_e}{r_w} \right] + \sum_n (-1)^n B_n, \quad (5)$$

так как  $I_0(0) = 1$ .

Вводя обозначение

$$\bar{B}_n = \frac{1}{n^2 I_0(n\pi r_w) + \frac{I_1(n\pi r_w) K_0(n\pi r_w)}{\delta K_1(n\pi r_w)}}$$

<sup>1</sup> Остальные свойства бесселевых функций общего порядка  $n$ , т. е.  $I_n$ ,  $K_n$ , см. гл. XVII, пл. 70 и 71, книги „Modern Analysis“. Однако принятые здесь функции  $K_n$  взяты из работы „The Theory of Bessel Functions“, где они были определены и потому будут отличаться на множитель  $(-1)^n$  от тех функций, что установлены в книге „Modern Analysis“.

