

# Содержание

<b>1</b>	<b>Закон сохранения энергии</b>	<b>3</b>
1.1	Вывод ЗСЭ одной фазы и общего ЗСЭ . . . . .	3
1.2	Уравнение теплопроводности . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Второе начало термодинамики</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Вывод замыкающих соотношений из неравенства Клаузиуса-Дюгема</b>	<b>12</b>
3.1	Прямой подход . . . . .	12
3.2	Замена переменных . . . . .	14
3.3	Переход к потенциалу Гиббса . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Линейное приближение</b>	<b>19</b>
4.1	Для флюида . . . . .	19
4.1.1	На теплоёмкость . . . . .	19
4.1.2	На плотность . . . . .	20
4.2	Для скелета . . . . .	21
4.2.1	На теплоёмкость . . . . .	21
4.2.2	На тензор полных напряжений . . . . .	22
4.2.3	На пористость . . . . .	23
4.3	Общие рассуждения о введённых величинах . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Роль диссипативных слагаемых неравенства Клаузиуса-Дюгема</b>	<b>25</b>
5.1	Термическая диссипация. Закон Фурье . . . . .	25
5.2	Механическая диссипация . . . . .	26
5.2.1	Закон Дарси . . . . .	27
5.2.2	Тензор вязкости и закон вязкости Ньютона в общем виде . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Случай изотропной жидкости</b>	<b>30</b>
<b>7</b>	<b>Соотношения Онзагера</b>	<b>34</b>
<b>8</b>	<b>Пороупругость</b>	<b>37</b>
8.1	Изотропный случай . . . . .	37
8.1.1	Константа Био . . . . .	39
8.1.2	Модуль Био . . . . .	40

8.1.3	Задача для закрепления . . . . .	41
9	Решение задач	42

# Введение в механику пористых сред

## Конспект лекций

Муравцев А.А.<sup>1</sup>

Шель Е.В.<sup>2</sup>

30 марта 2022 г.

Лекция 05.02.2022.

### 1 Закон сохранения энергии

При выводе закона сохранения энергии (ЗСЭ) будем использовать ранее полученные закон сохранения массы (ЗСМ) и закон сохранения импульса (ЗСИ).

ЗСМ:

$$\frac{\partial r_a}{\partial t} + \partial_i (v_i^a r_a) = j_{ab}, \quad (1)$$

где  $j_{ab}$  – обменное слагаемое между фазами  $a$  и  $b$

ЗСИ:

$$r_a \frac{\partial v_i^a}{\partial t} + r_a v_j^a \partial_j v_i^a = \partial_j T_{ij}^a + b_i^{int,a} + f_i^a \quad (2)$$

#### 1.1 Вывод ЗСЭ одной фазы и общего ЗСЭ

В законе сохранения энергии впервые появляются тепло и температура. Приток тепла в некоторый объём:

$$\delta Q = \left[ \iiint_V (r_a Q^a + Q^{int,a}) dV - \oint_{\partial V} h_a dS \right] dt, \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>конспектирует; email: almuravcev@yandex.ru

<sup>2</sup>лектор, Высшая школа теоретической механики, Санкт-Петербургский Политехнический университет. Дополнительные материалы к лекциям [доступны по ссылке](#).

где  $Q^a$  – теплота от массовых источников тепла (например, в ядерных реакциях),  $Q^{int,a}$  – обмен теплом между фазами,  $h_a = n_i q_i^a$  – поток тепла через границу

Выполняется первое начало термодинамики:

$$\delta Q = \delta A_{\text{внутр}} + dU \Leftrightarrow dU = \delta Q + \delta A_{\text{внеш}} \quad (4)$$

Внутренняя энергия  $U = \iiint_V r_a e_a dV$ , где  $e_a = u_a + \frac{1}{2} v_i^a v_i^a$  – удельная плотность энергии (см. теорему Кёнига)

Полная производная внутренней энергии по времени:

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left( r_a \left( u_a + \frac{1}{2} v_i^a v_i^a \right) \right) dV + \oint_{\partial V} r_a \left( u_a + \frac{1}{2} v_i^a v_i^a \right) v_j n_j dS \quad (5)$$

Небольшое напоминание о работе и мощности сил:  $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{S} = (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt$

Работа внешних сил (объёмных + поверхностных; так как работа именно внешних сил, то внутренние взаимодействия  $b^{int}$  не учитываем):

$$\delta A_{\text{внеш}} = \left[ \iiint_V f_i^a v_i^a dV + \oint_{\partial V} v_i^a T_{ij}^a n_j dS \right] dt \quad (6)$$

Подставляем  $\frac{dU}{dt}$ ,  $\delta Q$  и  $\delta A_{\text{внеш}}$  в первое начало термодинамики:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left( r_a \left( u_a + \frac{1}{2} v_i^a v_i^a \right) \right) dV + \oint_{\partial V} r_a \left( u_a + \frac{1}{2} v_i^a v_i^a \right) v_j n_j dS = \\ = \iiint_V f_i^a v_i^a dV + \oint_{\partial V} v_i^a T_{ij}^a n_j dS + \iiint_V (r_a Q^a + Q^{int,a}) dV - \oint_{\partial V} q_j^a n_j dS \end{aligned} \quad (7)$$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса и преобразуем подынтегральное выражение в левой части равенства (7):

$$e_a \frac{\partial r_a}{\partial t} + r_a \left( \frac{\partial u_a}{\partial t} + v_i^a \frac{\partial v_i^a}{\partial t} \right) + \partial_j (r_a e_a v_j^a) = \quad (8)$$

раскрывая последнюю производную произведения и вынося  $e_a$  за скобку

$$= e_a \left( \frac{\partial r_a}{\partial t} + \partial_j (r_a v_j^a) \right) + r_a \left( \frac{\partial u_a}{\partial t} + v_i^a \frac{\partial v_i^a}{\partial t} \right) + r_a v_j^a \partial_j e_a = \quad (9)$$

учитывая ЗСМ (1) и подставляя выражение для  $e_a$

$$= r_a \frac{\partial u_a}{\partial t} + r_a v_i^a \frac{\partial v_i^a}{\partial t} + r_a v_j^a \partial_j u_a + r_a v_j^a \partial_j \left( \frac{1}{2} v_i^a v_i^a \right) = \quad (10)$$

группируя первое и третье слагаемые в полную производную и вынося  $v_i$  во втором и четвёртом слагаемых за скобку

$$= r_a \frac{d_a u_a}{dt} + v_i^a \left( r_a \frac{\partial v_i^a}{\partial t} + r_a v_j^a \partial_j v_i^a \right) \quad (11)$$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса и преобразуем подынтегральное выражение в правой части равенства (7):

$$v_i^a f_i^a + \partial_j (T_{ij}^a v_i^a) + r_a Q^a + Q^{int,a} - \partial_j q_j^a = \quad (12)$$

раскрывая производную во втором слагаемом и вынося  $v_i^a$  за скобку

$$= v_i^a \left( f_i^a + b_i^{int,a} - b_i^{int,a} + \partial_j T_{ij}^a \right) + T_{ij}^a (\partial_j v_i^a) + r_a Q^a + Q^{int,a} - \partial_j q_j^a \quad (13)$$

Подставляем преобразованные части (11) и (13) в исходное равенство (7), опуская тройной интеграл (по лемме Римана, так как объём произвольный и подынтегральная ф-ия непрерывна) и вычлняя ЗСИ:

$$r_a \frac{d_a u_a}{dt} = T_{ij}^a \partial_j v_i^a + r_a Q^a + Q^{int,a} - \partial_j q_j^a - b_i^{int,a} v_i^a \quad (14)$$

Получили ЗСЭ одной фазы. Суммируя по всем фазам, получаем общий ЗСЭ:

$$\sum_a r_a \frac{d_a u_a}{dt} = \sum_a T_{ij}^a \partial_j v_i^a + rQ - \partial_j q_j - b_i^{int} W_i ; \quad rQ = \sum_a r_a Q^a ;$$

$$Q^{int,f} = -Q^{int,s} ; \quad b^{int} = b^{int,f} = -b^{int,s}, \quad (15)$$

где  $q_j$  – общий поток тепла.

## 1.2 Уравнение теплопроводности

Из ЗСЭ получим уравнение теплопроводности. Воспользуемся двумя замыкающими соотношениями: законом Фурье и связью между внутренней энергией и температурой (в дальнейшем мы выведем эти замыкающие соотношения (97) и (131) из второго начала термодинамики).

Закон Фурье:  $q_i = -\kappa_{ij} \partial_j \theta$ , где  $\kappa_{ij}$  – тензор теплопроводности

Связь внутренней энергии и температуры:  $u_a = c_a^\theta \theta$ , где  $c_a^\theta$  – удельная теплоёмкость фазы (счи-

таем, что  $\theta = \theta^s = \theta^f$ , т.е. на масштабе рассматриваемых сред (на микромасштабе) теплообмен мгновенный, происходит быстрее любых других процессов; в плазме это предположение не выполняется, но у нас не плазма)

Также считаем, что  $v_i^a = 0$  (т.е. происходит только теплообмен, среды находятся в механическом равновесии)

Учитывая замыкающие соотношения и поставленное условие, перепишем общий ЗСЭ:

$$\sum_a r_a c_a^\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = rQ + \partial_i (\kappa_{ij} \partial_j \theta) \quad (16)$$

предполагая однородность ( $\kappa_{ij} = \text{const}$ )

$$\sum_a r_a c_a^\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa_{ij} \partial_i \partial_j \theta = rQ \quad (17)$$

предполагая изотропность ( $\kappa_{ij} = \kappa \delta_{ij}$ )

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\kappa}{rc} \Delta \theta = \frac{Q}{c} ; \quad rc = \sum_a r_a c_a^\theta \quad (18)$$

Получили уравнение теплопроводности ( $c$  – удельная теплоёмкость смеси;  $Q$  – удельный источник тепла)

## 2 Второе начало термодинамики

Допустим у нас одна среда, тогда

- 5 скалярных уравнений: 1 из ЗСМ, 3 из ЗСИ, 1 из ЗСЭ. Есть ещё ЗСМИ, но он просто симметризует тензор напряжений (учитывается, когда говорим, что тензор напряжений симметричен)
- неизвестных: 3 смещения в пространстве от времени, плотность материала, температура, внутренняя энергия (её связь с температурой не очевидна), 6 компонент тензора напряжений.

Видим, что неизвестных существенно больше, поэтому необходимо выбрать (ввести) замыкающие соотношения. Но произвольно это сделать не можем, так как есть ещё одно начало термодинамики (энтропия замкнутой системы может только увеличиваться со временем).

Энтропия:

$$H = \iiint_V \sum_a r_a \eta_a dV, \quad (19)$$

где  $\eta_a$  – удельная плотность энтропии

Изменение энтропии в случае равновесного процесса:

$$\frac{\delta Q}{T} = \iiint_V \frac{rQ}{\theta} dV - \oint_{\partial V} \frac{hdS}{\theta} \quad (20)$$

Неравенство Клаузиуса-Дюгема (одна из форм второго начала термодинамики):

$$\iiint_V \frac{rQ}{\theta} dV - \oint_{\partial V} \frac{hdS}{\theta} \leq \frac{\partial H}{\partial t} + \oint_{\partial V} \left( \sum_a r_a \eta_a v_i^a \right) n_i dS, \quad (21)$$

где  $\frac{\partial H}{\partial t}$  – изменение энтропии в объёме;  $\oint_{\partial V} \left( \sum_a r_a \eta_a v_i^a \right) n_i dS$  – отток энтропии наружу

Подставляем выражение для энтропии и переносим всё в одну часть неравенства, учитывая, что  $h = n_i q_i$ , и опуская при этом тройной интеграл по лемме Римана:

$$\sum_a \frac{\partial (r_a \eta_a)}{\partial t} + \partial_i \left( \sum_a r_a \eta_a v_i^a \right) - \frac{rQ}{\theta} + \partial_i \left( \frac{q_i}{\theta} \right) \geq 0 \quad (22)$$

раскрывая производные и вынося  $\eta_a$  за скобку

$$\sum_a \left[ \eta_a \left( \frac{\partial r_a}{\partial t} + \partial_i (r_a v_i^a) \right) + r_a \frac{\partial \eta_a}{\partial t} + r_a v_i^a \partial_i \eta_a \right] - \frac{rQ}{\theta} + \frac{\partial_i q_i}{\theta} - q_i \frac{\partial_i \theta}{\theta^2} \geq 0 \quad (23)$$

учитывая ЗСМ (1) и выделяя полную производную удельной плотности энтропии

$$\sum_a r_a \frac{d_a \eta_a}{dt} - \frac{rQ}{\theta} + \frac{\partial_i q_i}{\theta} - q_i \frac{\partial_i \theta}{\theta^2} \geq 0 \quad (24)$$

Из ЗСЭ:

$$rQ - \partial_i q_i = \sum_a r_a \frac{d_a u_a}{dt} - \sum_a T_{ij}^a \partial_j v_i^a + b_i^{int} W_i \quad (25)$$

Подставляем в неравенство:

$$\sum_a r_a \frac{d_a \eta_a}{dt} - \sum_a r_a \frac{1}{\theta} \frac{d_a u_a}{dt} + \sum_a \frac{1}{\theta} T_{ij}^a (\partial_j v_i^a) - \frac{1}{\theta} b_i^{int} W_i - \frac{q_i \partial_i \theta}{\theta^2} \geq 0 \quad (26)$$

умножая обе части неравенства на  $\theta$  ( $\theta > 0$ )

$$\sum_a r_a \left( \theta \frac{d_a \eta_a}{dt} - \frac{d_a u_a}{dt} \right) + \sum_a T_{ij}^a (\partial_j v_i^a) - b_i^{int} W_i - \frac{q_i \partial_i \theta}{\theta} \geq 0 \quad (27)$$

В дальнейшем введём обозначение  $\delta_\theta = -\frac{q_i \partial_i \theta}{\theta}$  – термическая диссипация.

Энтропия и её частные производные физически не совсем понятны, поэтому проще ввести термодинамический потенциал, у которого частные производные имеют определённый физический смысл.

Далее переходим на школьные обозначения (для краткости).

В равновесном процессе:

$$\delta Q = T dS = dU + dA \quad (28)$$

Введём свободную энергию (термодинамический потенциал):

$$\Psi = U - TS \quad (29)$$

Тогда

$$d\Psi = dU - T dS - S dT = -p dV - S dT \quad (30)$$

Следовательно,  $\Psi = \Psi(V, T)$  (т.е.  $\Psi$  – функция объёма и температуры, т.е. физически понятна)



Получили, что

$$TdS - dU = -d\Psi - SdT \quad (31)$$

Тогда, возвращаясь к исходным обозначениям, получаем

$$\theta \frac{d_a \eta_a}{dt} - \frac{d_a u_a}{dt} = - \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) \quad (32)$$

Подставляем в неравенство:

$$- \sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + \sum_a T_{ij}^a (\partial_j v_i^a) - b_i^{int} W_i + \delta_\theta \geq 0 \quad (33)$$

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij}^s \partial_j v_i^s + T_{ij}^f \partial_j v_i^f + b_i^{eq} W_i + b_i^{dis} W_i + \delta_\theta \geq 0 \quad (34)$$

вспоминая, что  $W_i = v_i^f - v_i^s \Leftrightarrow v_i^f = W_i + v_i^s$

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij}^s \partial_j v_i^s + T_{ij}^f \partial_j v_i^s + T_{ij}^f \partial_j W_i + b_i^{eq} W_i + b_i^{dis} W_i + \delta_\theta \geq 0 \quad (35)$$

вынося  $\partial_j v_i^s$  за скобку, учитывая  $T_{ij}^s + T_{ij}^f = T_{ij}$  и разбивая  $T_{ij}^f = T_{ij}^{eq,f} + T_{ij}^{dis,f}$

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij} \partial_j v_i^s + T_{ij}^{eq,f} \partial_j W_i + b_i^{eq} W_i + T_{ij}^{dis,f} \partial_j W_i + b_i^{dis} W_i + \delta_\theta \geq 0 \quad (36)$$

вводя механическую диссипацию  $\delta_f = T_{ij}^{dis,f} \partial_j W_i + b_i^{dis} W_i$

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij} \partial_j v_i^s + T_{ij}^{eq,f} \partial_j W_i + b_i^{eq} W_i + \delta_f + \delta_\theta \geq 0 \quad (37)$$

Напоминание: закон Дарси можно напрямую получить из сил вязкого трения (вводя силу вязкого трения по закону Ньютона, автоматически получаем закон Дарси в пористых средах)

Вспомним тензор малых деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij}^s = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (\partial_j v_i^s + \partial_i v_j^s) \quad (38)$$

учитывая симметричность  $\varepsilon_{ij}$  преобразуем неравенство к следующему виду

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s + T_{ij}^{eq,f} \partial_j W_i + b_i^{eq} W_i + \delta_f + \delta_\theta \geq 0 \quad (39)$$

Далее  $T_{ij}^{eq,f} = -p \delta_{ij}$  и  $b_i^{eq} = -p \partial_i \varphi$

$$T_{ij}^{eq,f} \partial_j W_i + b_i^{eq} W_i = -p (\varphi \delta_{ij} \partial_j W_i + W_i \partial_i \varphi) = -p (\varphi \partial_i W_i + W_i (\partial_i \varphi)) = -p \partial_i (\varphi W_i) \quad (40)$$

Подставляем в неравенство:

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s - p \partial_i (\varphi W_i) + \delta_f + \delta_\theta \geq 0 \quad (41)$$

Вспомним ЗСМ:

$$\frac{\partial r_f}{\partial t} + \partial_i (r_f v_i^f) = \rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_f \partial_i (\varphi v_i^f) + \varphi v_i^f \partial_i \rho_f = 0 \quad (42)$$

вспоминая  $v_i^f = W_i + v_i^s$  и выделяя полную производную

$$\varphi \frac{d_f \rho_f}{dt} + \rho_f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \partial_i (\varphi W_i) + \partial_i (\varphi v_i^s) \right) = 0 \quad (43)$$

раскрывая производную произведения

$$\varphi \frac{d_f \rho_f}{dt} + \rho_f \partial_i (\varphi W_i) + \rho_f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_i^s \partial_i \varphi + \varphi \partial_i v_i^s \right) = 0 \quad (44)$$

вспоминая, что  $\partial_i v_i^s = \dot{\varepsilon}_{ii}^s = \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s = \delta_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^s}{\partial t} = \delta_{ij} \frac{d_s \varepsilon_{ij}^s}{dt}$  (частная производная равна полной, т.к. тензор МАЛЫХ деформаций), выделяя ещё одну полную производную  $\left( \frac{d_s \varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_i^s \partial_i \varphi \right)$  и поделив обе части равенства на  $\rho_f$

$$\partial_i (\varphi W_i) = -\frac{\varphi}{\rho_f} \frac{d_f \rho_f}{dt} - \frac{d_s \varphi}{dt} - \varphi \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s \quad (45)$$

Видим, что  $\partial_i (\varphi W_i)$  распадается на сумму трёх полных производных. И именно из этой составляющей «вылезут» все законы пороупругости.

Подставляем в неравенство:

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s + p \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{d_f \rho_f}{dt} + p \frac{d_s \varphi}{dt} + p \varphi \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s + \delta_f + \delta_\theta \geq 0 \quad (46)$$

Достигли успеха: есть полная производная температуры, полная производная тензора малых деформаций (можно расписать как относительную производную плотностей скелета, но тензор деформаций более общий вид), полная производная плотности флюида, полная производная пористости.

### 3 Вывод замыкающих соотношений из неравенства Клаузиуса-Дюгема

Далее будем получать замыкающие соотношения из неравенства Клаузиуса-Дюгема:

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + (T_{ij} + p\varphi\delta_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^s + \frac{p\varphi}{\rho_f} \frac{d_f \rho_f}{dt} + p \frac{d_s \varphi}{dt} + \delta_f + \delta_\theta \geq 0 \quad (47)$$

#### 3.1 Прямой подход

Мы знаем, что пористость и свободная энергия должны зависеть от температуры, от давления флюида (при фиксированной температуре связано «намертво» неким замыкающим соотношением с плотностью флюида) и от деформации скелета:

$$\Psi_a = \Psi_a(\theta, \varepsilon_{ij}, \rho_f) \quad (48)$$

$$\varphi = \varphi(\theta, \varepsilon_{ij}, \rho_f) \quad (49)$$

Тогда

$$\frac{d_f \Psi_f}{dt} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta} \frac{d_f \theta}{dt} + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d_f \varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f} \frac{d_f \rho_f}{dt} \quad (50)$$

$$\frac{d_s \Psi_s}{dt} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} \frac{d_s \theta}{dt} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d_s \varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \rho_f} \frac{d_s \rho_f}{dt} \quad (51)$$

$$\frac{d_s \varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d_s \theta}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d_s \varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f} \frac{d_s \rho_f}{dt} \quad (52)$$

Далее полученные разложения подставляем в (47), но анализируем полученное неравенство в уме (не выписываем полное неравенство, т.к. слишком громоздко).

Будем получать замыкающие соотношения, предполагая, что соответствующие полные производные в неравенстве могут принимать любые значения (можем добиться любых значений, воздействуя определённым образом на рассматриваемую физическую систему)

Замыкающие соотношения для флюида:

- Предполагаем, что производная  $\frac{d_f \varepsilon_{ij}}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 \quad (53)$$

- Предполагаем, что производная  $\frac{d_f \theta}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$-r_f \frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta} - r_f \eta_f = 0 \Rightarrow \eta_f = -\frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta} \quad (54)$$

(получили факт из школьного курса: энтропия есть минус производная свободной энергии по температуре)

- Предполагаем, что производная  $\frac{d_f \rho_f}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$-r_f \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f} + \frac{p \varphi}{\rho_f} = 0 \Rightarrow p = \rho_f^2 \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f} \quad (55)$$

Далее скелетные замыкающие соотношения:

- Предполагаем, что производная  $\frac{d_s \theta}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$-r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} - r_s \eta_s + p \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \eta_s = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} + \frac{p}{\rho_s \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (56)$$

(видим, что энтропия скелета уже зависит от пористости)

- Предполагаем, что производная  $\frac{d_s \varepsilon_{ij}}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$-r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} + T_{ij} + p \varphi \delta_{ij} + p \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 \quad (57)$$

(если линеаризовать последнее равенство, то получим закон Гука)

- Предполагаем, что производная  $\frac{d_s \rho_f}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$-r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \rho_f} + p \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f} = 0 \quad (58)$$

Нам не нравятся полученные замыкающие соотношения. Мы реально можем управлять температурой и давлением. А в полученных замыкающих соотношениях есть, например, плотность флюида, значениями которой напрямую мы не управляем. Нам нужно перейти к замыкающим соотношениям на давление. Но напрямую это сделать нельзя; нужно будет сделать 2 промежуточных трюка:

- скажем, что пористость независимая переменная, а плотность флюида – зависящая от неё термодинамическая величина (можем сделать, так как есть связь между плотностью флюида и пористостью)

- перейдём к другому термодинамическому потенциалу

### 3.2 Замена переменных

Сделаем замену переменных:

$$f(\theta, \varepsilon_{ij}, \rho_f) \rightarrow \tilde{f}(\theta, \varepsilon_{ij}, \varphi(\theta, \varepsilon_{ij}, \rho_f)) \quad (59)$$

После замены переменных (59) распишем

$$r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \rho_f} = r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f} \quad (60)$$

и замыкающее соотношение (58) перепишется в следующем виде:

$$\left( -r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} + p \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f} = 0 \quad (61)$$

Следовательно,

$$p = r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \quad (62)$$

С другой стороны, ранее в (55) получили, что

$$p = \rho_f^2 \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f} = \rho_f^2 \frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f} \quad (63)$$

Таким образом,

$$\varphi \rho_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} = \rho_f^2 \frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f} \quad (64)$$

(вывели просто так, не запоминаем)

После замены переменных (59) распишем

$$r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} = r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varepsilon_{ij}} + r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (65)$$

(так как  $\tilde{\Psi}_s$  двояко зависит от деформаций: напрямую и через пористость).

Следовательно, замыкающее соотношение (57) перепишется в следующем виде:

$$-r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varepsilon_{ij}} - r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} + T_{ij} + p \varphi \delta_{ij} + p \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 \quad (66)$$

вынося  $\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}}$  за скобку

$$-r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varepsilon_{ij}} + \left( p - r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} + T_{ij} + p\varphi \delta_{ij} = 0 \quad (67)$$

подставляя (62)

$$-r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varepsilon_{ij}} + T_{ij} + p\varphi \delta_{ij} = 0 \quad (68)$$

После замены переменных (59) распишем

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (69)$$

(так как  $\tilde{\Psi}_s$  двояко зависит от температуры: напрямую и через пористость).

Следовательно, замыкающее соотношение (56) переписывается в следующем виде:

$$\eta_s = -\frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{p}{r_s} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (70)$$

подставляя (62)

$$\eta_s = -\frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \theta} \quad (71)$$

### 3.3 Переход к потенциалу Гиббса

Теперь осталось сделать последний шаг: избавиться от пористости и получить давление.

Для этого перейдём к потенциалу Гиббса:

$$G = U - TS + pV = \Psi + pV \quad (72)$$

Рассмотрим его дифференциал:

$$dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp \quad (73)$$

Из первого начала термодинамики знаем, что

$$dU - TdS = -pdV \quad (74)$$

поэтому

$$dG = -SdT + Vdp \quad (75)$$

(таким образом, термодинамический потенциал Гиббса меняется/зависит только от температуры и давления – то, что нам нужно; а свободная энергия зависит только от температуры и объёма: из-за зависимости от объёма у нас и появлялась пористость)

Лирическое отступление: потенциал Гиббса сохраняется при фазовых переходах.

Но сделаем не совсем потенциал Гиббса (а потенциал Гиббса с точки зрения флюида):

$$\Phi_s = \tilde{\Psi}_s - \frac{p\varphi}{r_s} \quad (76)$$

Распишем дифференциал свободной энергии скелета:

$$d\tilde{\Psi}_s = \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} d\varphi \quad (77)$$

учитывая полученные ранее замыкающие соотношения (62), (68) и (71), получаем

$$d\tilde{\Psi}_s = -\eta_s d\theta + \frac{T_{ij} + p\varphi\delta_{ij}}{r_s} d\varepsilon_{ij} + \frac{p}{r_s} d\varphi \quad (78)$$

Распишем дифференциал второго слагаемого потенциала (76)

$$-d\left(\frac{p\varphi}{r_s}\right) = -\frac{pd\varphi}{r_s} - \frac{\varphi dp}{r_s} + \frac{\varphi p}{r_s} \frac{dr_s}{r_s} \quad (79)$$

а относительное изменение плотности есть минус относительное изменение (деформация) объёма:

$$\frac{dr_s}{r_s} = -\delta_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (80)$$

Распишем дифференциал введённого потенциала (76)

$$d\Phi_s = d\tilde{\Psi}_s - d\left(\frac{p\varphi}{r_s}\right) = -\eta_s d\theta + \frac{T_{ij} + p\varphi\delta_{ij}}{r_s} d\varepsilon_{ij} + \frac{p}{r_s} d\varphi - \frac{pd\varphi}{r_s} - \frac{\varphi dp}{r_s} - \frac{\varphi p}{r_s} \delta_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (81)$$

приводя подобные

$$d\Phi_s = -\eta_s d\theta + \frac{T_{ij}}{r_s} d\varepsilon_{ij} - \frac{\varphi}{r_s} dp \quad (82)$$

(видим, что потенциал  $\Phi$  зависит от температуры, деформации и давления)

Тогда получаем следующие замыкающие соотношения:



- на пористость

$$\varphi = -r_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial p} \quad (83)$$

- на энтропию скелета

$$\eta_s = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} \quad (84)$$

- на напряжение

$$T_{ij} = r_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (85)$$

Ещё в подобной форме необходимо замыкающее соотношение на энтропию флюида и замыкающее соотношение, которое покажет связь между давлением и плотностью флюида. Введём потенциал для флюида:

$$\Phi_f = \Psi_f + \frac{p}{\rho_f} \quad (86)$$

Запишем его дифференциал:

$$d\Phi_f = d\Psi_f + \frac{dp}{\rho_f} - p \frac{d\rho_f}{\rho_f^2} \quad (87)$$

Перепишем первое слагаемое

$$d\Psi_f = \frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f} d\rho_f \quad (88)$$

учитывая ранее полученные замыкающие соотношения (53), (54) и (55) для флюида получаем

$$d\Psi_f = -\eta_f d\theta + \frac{p}{\rho_f^2} d\rho_f \quad (89)$$

подставляем в выражение для дифференциала (87):

$$d\Phi_f = -\eta_f d\theta + \frac{p}{\rho_f^2} d\rho_f + \frac{dp}{\rho_f} - p \frac{d\rho_f}{\rho_f^2} \quad (90)$$

приводя подобные

$$d\Phi_f = -\eta_f d\theta + \frac{dp}{\rho_f} \quad (91)$$

Тогда получаем следующие замыкающие соотношения:

- на энтропию флюида

$$\eta_f = -\frac{\partial \Phi_f}{\partial \theta} \quad (92)$$

- на плотность флюида

$$\frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial \Phi_f}{\partial p} \quad (93)$$

Систематизируем полученные ранее замыкающие соотношения в таблицу.

Таблица 1: Замыкающие соотношения

Для скелета	$\varphi = -r_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial p}$	$\eta_s = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta}$	$T_{ij} = r_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij}}$
Для флюида	$\frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial \Phi_f}{\partial p}$	$\eta_f = -\frac{\partial \Phi_f}{\partial \theta}$	

## 4 Линейное приближение

### 4.1 Для флюида

Представим  $\Phi_f$  в виде частичной суммы ряда Тейлора по всем переменным:

$$\begin{aligned} \Phi_f \approx \Phi_f^0 + \left. \frac{\partial \Phi_f}{\partial p} \right|_{p=p_0, \theta=\theta_0} (p - p_0) + \left. \frac{\partial \Phi_f}{\partial \theta} \right|_{p=p_0, \theta=\theta_0} (\theta - \theta_0) + \\ + \frac{1}{2} \left( \left. \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial p^2} \right|_{p=p_0, \theta=\theta_0} (p - p_0)^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial \theta \partial p} \right|_{p=p_0, \theta=\theta_0} (p - p_0) (\theta - \theta_0) + \left. \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial \theta^2} \right|_{p=p_0, \theta=\theta_0} (\theta - \theta_0)^2 \right) \end{aligned} \quad (94)$$

Условие существования такого разложения:  $\Phi_f \in C_2$  (вторые производные  $\Phi_f$  не только существуют, но и непрерывны)

Заметим, что во всех замыкающих соотношениях важны только производные, поэтому значение первого слагаемого в разложении (94) может быть любым (другими словами, потенциальную и внутреннюю энергии можем отмерять от любого уровня).

#### 4.1.1 На теплоёмкость

Перепишем замыкающее соотношение из таблицы 1, подставив разложение 94:

$$\eta_f = -\frac{\partial \Phi_f}{\partial \theta} \approx -\left. \frac{\partial \Phi_f}{\partial \theta} \right|_{p=p_0, \theta=\theta_0} - \left. \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial \theta \partial p} \right|_{p=p_0, \theta=\theta_0} (p - p_0) - \left. \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial \theta^2} \right|_{p=p_0, \theta=\theta_0} (\theta - \theta_0) \quad (95)$$

(видим, что получили линейное приближение)

Из термодинамики помним, что  $dQ = TdS$  и теплоёмкость

$$C = \frac{dQ}{dT} = T \frac{dS}{dT} \quad (96)$$

Таким образом, из (95) удельная теплоёмкость флюида

$$c_f^\theta = \theta \frac{\partial \eta_f}{\partial \theta} \approx -\theta \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial \theta^2} \Big|_{\substack{p=p_0 \\ \theta=\theta_0}} \quad (97)$$

(получили первое замыкающее соотношение на удельную теплоёмкость флюида; видим, что в первом приближении теплоёмкость является постоянной величиной; ранее использовали удельную теплоёмкость при выводе уравнения теплопроводности (16)).

#### 4.1.2 На плотность

Перепишем ещё одно замыкающее соотношение для флюида из таблицы 1:

$$\frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial \Phi_f}{\partial p} \approx \frac{\partial \Phi_f}{\partial p} \Big|_{\substack{p=p_0 \\ \theta=\theta_0}} + \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial p^2} \Big|_{\substack{p=p_0 \\ \theta=\theta_0}} (p - p_0) + \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial p \partial \theta} \Big|_{\substack{p=p_0 \\ \theta=\theta_0}} (\theta - \theta_0) \quad (98)$$

Обозначив  $\frac{1}{\rho_{f0}} = \frac{\partial \Phi_f}{\partial p} \Big|_{\substack{p=p_0 \\ \theta=\theta_0}}$ , перепишем в следующем виде

$$\frac{1}{\rho_f} \approx \frac{1}{\rho_{f0}} \left( 1 + \rho_{f0} \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial p^2} \Big|_{\substack{p=p_0 \\ \theta=\theta_0}} (p - p_0) + \rho_{f0} \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial p \partial \theta} \Big|_{\substack{p=p_0 \\ \theta=\theta_0}} (\theta - \theta_0) \right) \quad (99)$$

Введём сжимаемость флюида

$$c_f = -\rho_{f0} \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial p^2} \Big|_{\substack{p=p_0 \\ \theta=\theta_0}} \quad (100)$$

и коэффициент объёмного термического расширения флюида

$$\alpha_f^\theta = \rho_{f0} \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial p \partial \theta} \Big|_{\substack{p=p_0 \\ \theta=\theta_0}} \quad (101)$$

Тогда оборачивая обе части (99) и вспоминая, что  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ , получаем линейное замыкающее соотношение на плотность флюида:

$$\rho_f \approx \rho_{f0} \left( 1 + c_f (p - p_0) - \alpha_f^\theta (\theta - \theta_0) \right) \quad (102)$$

(заметим, что  $c_f$  в (102) и  $c_f^\theta$  в (97) обозначают разные физические величины – просто букв не хватает).

Знаки для сжимаемости флюида в (100) и коэффициента объёмного термического расширения

флюида в (101) выбрали исходя из физических соображений: плотность флюида увеличивается при увеличении давления и уменьшается при увеличении температуры.

## 4.2 Для скелета

Предполагаем, что в начальном (базовом) состоянии скелет не деформирован ( $\varepsilon_{ij} = 0$ ). Но напряжения в начальном состоянии могут быть (напряжения, присутствующие в материале при условии отсутствия деформаций – могут быть при наличии включений или, например, при заморозке льда). Выпишем частичную сумму ряда Тейлора для  $\Phi_s$ :

$$\begin{aligned} \Phi_s(\theta, \varepsilon_{ij}, p) \approx & \Phi_s^0 + \left. \frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (\theta - \theta_0) + \left. \frac{\partial \Phi_s}{\partial p} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (p - p_0) + \left. \frac{\partial \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} \varepsilon_{ij} + \\ & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \theta^2} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (\theta - \theta_0)^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial p^2} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (p - p_0)^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \\ & + \left. \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \theta \partial p} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (\theta - \theta_0) (p - p_0) + \left. \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \theta \partial \varepsilon_{ij}} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (\theta - \theta_0) \varepsilon_{ij} + \left. \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial p \partial \varepsilon_{ij}} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (p - p_0) \varepsilon_{ij} \quad (103) \end{aligned}$$

Если  $\varphi = 0$ , то все слагаемые с давлением  $p$  флюида обнуляются и получаем уравнения термоупругости.

При ненулевой пористости можем получить уравнения термoporоупругости (есть вклад связанный с порами и давлением флюида, которое передаётся только через поры).

### 4.2.1 На теплоёмкость

Перепишем скелетное замыкающее соотношение на энтропию из таблицы 1, подставив разложение 103:

$$\begin{aligned} \eta_s = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} = & -\left. \frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} - \left. \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial p \partial \theta} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (p - p_0) - \left. \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \theta \partial \varepsilon_{ij}} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} \varepsilon_{ij} - \\ & - \left. \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \theta^2} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (\theta - \theta_0) \quad (104) \end{aligned}$$

Удельная теплоёмкость скелета:

$$c_s^\theta = \theta \frac{\partial \eta_s}{\partial \theta} \approx -\theta \left. \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \theta^2} \right|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} \quad (105)$$

Видим, что в первом приближении теплоёмкость постоянна (не зависит от температуры и дав-

ления).

#### 4.2.2 На тензор полных напряжений

Перепишем скелетное замыкающее соотношение на тензор полных напряжений из таблицы 1, подставив разложение 103:

$$T_{ij} = r_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} = r_s \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \Big|_{\substack{p_0, \theta_0 \\ \varepsilon_{ij}=0}} + \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \Big|_{\substack{p_0, \theta_0 \\ \varepsilon_{ij}=0}} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \Big|_{\substack{p_0, \theta_0 \\ \varepsilon_{ij}=0}} (\theta - \theta_0) + \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial p} \Big|_{\substack{p_0, \theta_0 \\ \varepsilon_{ij}=0}} (p - p_0) \right) \quad (106)$$

Первое и второе слагаемые отвечают за упругость. Третье слагаемое – за термоупругость. Четвёртое слагаемое – за пороупругость.

Посмотрим на физический смысл каждого из слагаемых в (106).

В первом слагаемом «защито» начальное напряжение:

$$T_{ij}^0 = r_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \Big|_{\substack{p_0, \theta_0 \\ \varepsilon_{ij}=0}} \quad (107)$$

Из второго слагаемого введём тензор упругих коэффициентов (тензор жёсткости):

$$L_{ijkl} = r_s \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \Big|_{\substack{p_0, \theta_0 \\ \varepsilon_{ij}=0}} \quad (108)$$

Из четвёртого слагаемого введём тензор коэффициентов Био (показывает влияние давления флюида на полное напряжение в среде; например, влияние пластового давления на полное напряжение в породе):

$$\alpha_{ij} = -r_s \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial p} \Big|_{\substack{p_0, \theta_0 \\ \varepsilon_{ij}=0}} \quad (109)$$

С третьим слагаемым

$$X_{ij} = r_s \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \Big|_{\substack{p_0, \theta_0 \\ \varepsilon_{ij}=0}} \quad (110)$$

разобраться сложнее всего, так как обычно записывают зависимость от температуры в терминах деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \alpha_{ij}^\theta (\theta - \theta_0) \quad (111)$$

Но в (106) у нас влияние температуры на напряжение при условии сохранения деформации.

Можем выразить  $\varepsilon_{kl}$  из 106:

$$L_{ijkl}\varepsilon_{kl} = T_{ij} - T_{ij}^0 - X_{ij}(\theta - \theta_0) + \alpha_{ij}(p - p_0) \quad (112)$$

тогда

$$\varepsilon_{kl} = L_{ijkl}^{-1} (T_{ij} - T_{ij}^0 - X_{ij}(\theta - \theta_0) + \alpha_{ij}(p - p_0)) \quad (113)$$

и из последнего равенства тензор термического расширения (не путать с тензором коэффициентов Био (109) – букв не хватает):

$$\alpha_{kl}^\theta = -X_{ij}L_{ijkl}^{-1} \quad (114)$$

Таким образом, подставляя (107), (108), (109) и (114) в 106, получаем следующее линейное замыкающее соотношение на тензор полных напряжений:

$$T_{ij} \approx T_{ij}^0 + L_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}^\theta L_{ijkl}(\theta - \theta_0) - \alpha_{ij}(p - p_0) \quad (115)$$

Примечание. Везде в механике: положительные напряжения – растягивающие, а отрицательные – сжимающие. Но в геомеханике наоборот.

### 4.2.3 На пористость

Перепишем скелетное замыкающее соотношение на пористость из таблицы 1, подставив разложение 103:

$$\varphi = -r_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial p} = -r_s \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial p} \Big|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} + \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial p^2} \Big|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (p - p_0) + \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial p \partial \theta} \Big|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} (\theta - \theta_0) + \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial p \partial \varepsilon_{ij}} \Big|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} \varepsilon_{ij} \right) \quad (116)$$

Посмотрим на физический смысл каждого из слагаемых в (116).

В первом слагаемом «зашита» начальная пористость:

$$\varphi_0 = -r_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial p} \Big|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} \quad (117)$$

Из второго слагаемого введём модуль Био  $N$  так, чтобы его обратный

$$\frac{1}{N} = -r_s \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial p^2} \bigg|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} \quad (118)$$

Из третьего слагаемого введём коэффициент термического расширения пор (как правило им пренебрегают):

$$\alpha_\theta^\varphi = -r_s \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial p \partial \theta} \bigg|_{p_0, \theta_0, \varepsilon_{ij}=0} \quad (119)$$

В четвёртом слагаемом есть тензор коэффициентов Био  $\alpha_{ij}$ , который ввели ранее (109).

Таким образом, из (116) получаем линейное замыкающее соотношение на пористость:

$$\varphi \approx \varphi_0 + \frac{p - p_0}{N} + \alpha_\theta^\varphi (\theta - \theta_0) + \alpha_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (120)$$

### 4.3 Общие рассуждения о введённых величинах

Везде, где есть производная по  $\varepsilon_{ij}$ , симметричность относительно замены индексов  $i$  и  $j$  (например, тензор коэффициентов Био (109) симметричен относительно замены индексов).

Теперь самое интересное: тензор упругих коэффициентов  $L_{ijkl}$ . У тензора четвёртого ранга 81 компонента. Но мы знаем, что для тензора  $L_{ijkl}$  по определению верно равенство (108): есть симметрия относительно замены индексов  $i$  и  $j$ , относительно замены индексов  $k$  и  $l$ , а также относительно замены  $ij$  и  $kl$ . Таким образом, у тензора упругих коэффициентов 3 симметрии и, следовательно,  $6 + 30/2 = 21$  независимая компонента в самом анизотропном случае.

Обсудим физический смысл модуля Био и тензора коэффициентов Био. Заметим, что при изменении давления изменяются полные напряжения (за счёт тензора коэффициентов Био  $\alpha_{ij}$  в (115)). Но при изменении полных напряжений в пласте изменяются и полные деформации. И это изменение деформаций передаётся в изменение пористости согласно (120). Также из соотношения (120) изменение давления напрямую передаётся в изменение пористости за счёт модуля Био.

Таким образом, сжимаемость пор (складывается из слагаемого с модулем Био  $N$  и слагаемого с тензором коэффициентов Био  $\alpha_{ij}$ ) и сжимаемость упругого материала скелета (обратно пропорциональна тензору упругих коэффициентов  $L_{ijkl}$ ) – это разные величины. Они разные и по введённым ранее определениям (108), (109) и (118). Таким образом, в дальнейшем не следует



путать сжимаемость пор и сжимаемость породы.

Мы разобрались с консервативными слагаемыми второго начала термодинамики в форме неравенства Клаузиуса-Дюгема (47). Консервативные слагаемые работают в термодинамически обратимых процессах. Далее перейдём к диссипативным слагаемым.

## 5 Роль диссипативных слагаемых неравенства Клаузиуса-Дюгема

Термическая диссипация (ввели при переписывании неравенства (27)):

$$\delta_\theta = -\frac{q_i \partial_i \theta}{\theta} \quad (121)$$

Механическая диссипация (ввели при переписывании неравенства (36)):

$$\delta_f = -b_i^{dis,f} W_i - T_{ij}^{dis,f} \partial_j W_i \quad (122)$$

Из неравенства Клаузиуса-Дюгема:

$$\delta_f + \delta_\theta \geq 0 \quad (123)$$

Диссипации (121) и (122) независимы (например, можем приложить градиент температуры, но флюид будет стоять на месте), следовательно, неравенство (123) распадается на 2 независимых неравенства:

$$\delta_f \geq 0 \text{ и } \delta_\theta \geq 0 \quad (124)$$

### 5.1 Термическая диссипация. Закон Фурье

Заметим, что при отсутствии градиента температуры, поток тепла равен нулю (из физических соображений) и термическая диссипация равна нулю:

$$\partial_i \theta = 0 \Rightarrow q_i = 0 \text{ и } \delta_\theta = 0 \quad (125)$$

Представим термическую диссипацию в виде частичной суммы ряда Тейлора:

$$\delta_\theta \approx \delta_\theta^0 \Big|_{\nabla_i \theta=0} + \frac{\partial \delta_\theta}{\partial (\nabla_i \theta)} \Big|_{\nabla_i \theta=0} \nabla_i \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_\theta}{\partial (\nabla_i \theta) \partial (\nabla_j \theta)} \Big|_{\nabla_i \theta=0} \nabla_i \theta \nabla_j \theta \quad (126)$$

Из следствия (125) первое слагаемое равно нулю.

Из следствия (125) и неравенства (124) производная во втором слагаемом тоже равна нулю (т.к. в этой точке достигается минимум  $\delta_\theta$ ).

Таким образом,

$$\delta_\theta \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_\theta}{\partial (\nabla_i \theta) \partial (\nabla_j \theta)} \Big|_{\nabla_i \theta=0} \nabla_i \theta \nabla_j \theta \quad (127)$$

С другой стороны, раскрывая  $\delta_\theta$  по определению (121), получаем:

$$-\frac{q_i \nabla_i \theta}{\theta} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_\theta}{\partial (\nabla_i \theta) \partial (\nabla_j \theta)} \Big|_{\nabla_i \theta=0} \nabla_i \theta \nabla_j \theta \quad (128)$$

Следовательно,

$$q_i \approx -\theta \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_\theta}{\partial (\nabla_i \theta) \partial (\nabla_j \theta)} \Big|_{\nabla_i \theta=0} \nabla_j \theta \quad (129)$$

Введём тензор теплопроводности:

$$\kappa_{ij} = \theta \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_\theta}{\partial (\nabla_i \theta) \partial (\nabla_j \theta)} \Big|_{\nabla_i \theta=0} \quad (130)$$

тогда

$$q_i \approx -\kappa_{ij} \nabla_j \theta \quad (131)$$

(получили закон Фурье, который использовали при выводе уравнения теплопроводности (17))

Но получили не только закон Фурье, но и симметричность, и положительную определённую тензора теплопроводности  $\kappa_{ij}$ .

## 5.2 Механическая диссипация

Далее будем работать с механической диссипацией (122), условие на которую распадается на 2 независимых условия:

$$\delta_f^1 = -b_i^{dis} W_i \geq 0 \quad (132)$$

(связано с относительной скоростью флюида и скелета).

и

$$\delta_f^2 = -T_{ij}^{dis,f} \partial_j W_i \geq 0 \quad (133)$$

(зависит от градиента скоростей; есть всегда: даже при отсутствии скелета)

### 5.2.1 Закон Дарси

Заметим, что для первого условия (132) верно следствие

$$W_i = 0 \Rightarrow \delta_f^1 = 0 \text{ и } b_i^{dis} = 0 \quad (134)$$

Представим  $\delta_f^1$  в виде частичной суммы ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} \delta_f^1 \approx \delta_f^1 \Big|_{W_i=0} + \frac{\partial \delta_f^1}{\partial W_i} \Big|_{W_i=0} W_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_f^1}{\partial W_i \partial W_j} \Big|_{W_i=0} W_i W_j + \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \delta_f^1}{\partial W_i \partial W_j \partial W_k} \Big|_{W_i=0} W_i W_j W_k \end{aligned} \quad (135)$$

Из следствия (134) первое слагаемое равно нулю.

Из следствия (134) и неравенства (132) производная во втором слагаемом тоже равна нулю (т.к. в этой точке достигается минимум  $\delta_f^1$ ).

Таким образом,

$$b_i^{dis} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_f^1}{\partial W_i \partial W_j} \Big|_{W_i=0} W_j - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \delta_f^1}{\partial W_i \partial W_j \partial W_k} \Big|_{W_i=0} W_j W_k \quad (136)$$

Обозначим

$$A_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_f^1}{\partial W_i \partial W_j} \Big|_{W_i=0} \quad (137)$$

Вспомним ЗСИ (в форме Лагранжа):

$$r_f \frac{d_f v_i^f}{dt} = f_i + b_i^{dis} + b_i^{eq} + \partial_j T_{ij}^f \quad (138)$$

учитывая (136),  $T_{ij}^{eq,f} = -\varphi p \delta_{ij}$  и  $b_i^{eq} = p \partial_i \varphi$ , перепишем

$$r_f \frac{d_f v_i^f}{dt} \approx r_f g_i + A_{ij} W_j + p \partial_i \varphi - \varphi \partial_i p - p \partial_i \varphi \quad (139)$$

и получаем уравнение Навье-Стокса для пористой среды:

$$\partial_i p \approx -\rho_f \frac{d_f v_i^f}{dt} + \rho_f g_i + A_{ij} W_j \quad (140)$$

Далее рассматриваем стационарное течение  $\left(\frac{d_f v_i^f}{dt} = 0\right)$ , тогда из предыдущего равенства

$$W_j \approx A_{ij}^{-1} (\partial_i p - \rho_f g_i) \quad (141)$$

Вводя положительно определённый тензор проницаемости

$$K_{ij} = -\mu A_{ij}^{-1} \quad (142)$$

получаем закон Дарси:

$$W_j \approx -\frac{K_{ij}}{\mu} (\partial_i p - \rho_f g_i) \quad (143)$$

### 5.2.2 Тензор вязкости и закон вязкости Ньютона в общем виде

Аналогично для второго условия (133) верно следствие

$$\partial_j W_i = 0 \Rightarrow \delta_f^2 = 0 \text{ и } T^{dis,f} = 0 \quad (144)$$

( $T^{dis,f} = 0$  из принципа Галилея: если градиент относительной скорости равен нулю, то в каждой точке флюид движется относительно скелета с одинаковой скоростью, а значит можем перейти в систему отсчёта флюида, в которой, очевидно, не будет диссипаций  $T^{dis,f}$ ).

Если **скелета нет** (или его скорость везде равна нулю), то

$$\partial_j W_i = \dot{\epsilon}_{ij}^f \text{ и } \sigma_{ij}^{dis,f} = T_{ij}^{dis,f} \quad (145)$$

(другими словами, градиент превращается в тензор скоростей деформаций флюида, а полное напряжение в истинное).

Тогда условие (133) перепишется в виде

$$\delta_f^2 = -\sigma_{ij}^{dis,f} \dot{\epsilon}_{ij}^f \quad (146)$$

Представим  $\delta_f^2$  в виде частичной суммы ряда Тейлора:

$$\delta_f^2 \approx \delta_f^2 \Big|_{\dot{\epsilon}_{ij}^f=0} + \frac{\partial \delta_f^2}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^f} \Big|_{\dot{\epsilon}_{ij}^f=0} \dot{\epsilon}_{ij}^f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_f^2}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^f \partial \dot{\epsilon}_{kl}^f} \Big|_{\dot{\epsilon}_{ij}^f=0} \dot{\epsilon}_{kl}^f \quad (147)$$

Из следствия (144) первое слагаемое равно нулю.

Из следствия (144) и неравенства (133) производная во втором слагаемом тоже равна нулю (т.к. в этой точке достигается минимум  $\delta_f^2$ ).

Таким образом, для случаев отсутствия скелета ( $\varphi = 1$ ) или нулевой скорости скелета ( $v_s = 0$ ) получаем

$$\sigma_{ij}^{dis,f} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_f^2}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^f \partial \dot{\varepsilon}_{kl}^f} \bigg|_{\dot{\varepsilon}_{ij}=0} \dot{\varepsilon}_{kl}^f \quad (148)$$

Введём тензор вязкости

$$\mu_{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta_f^2}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^f \partial \dot{\varepsilon}_{kl}^f} \bigg|_{\dot{\varepsilon}_{ij}=0} \quad (149)$$

(положительно определён и обладает теми же симметриями, что и тензор жёсткости (108), т.е. имеет 21 независимую компоненту в самом анизотропном случае).

Тогда

$$\sigma_{ij}^{dis,f} \approx -\mu_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^f \quad (150)$$

Ранее ввели определение тензора вязкости (149) и получили связь (150) диссипативного тензора истинных напряжений флюида и тензора скоростей малых деформаций флюида (при условии отсутствия скелета или нулевой скорости скелета во всех точках). Далее подробно разберёмся с тензором вязкости, учитывая изотропность флюида.

## 6 Случай изотропной жидкости

Введём тензор поворота  $\mathbf{O}$  так, чтобы:

$$\mathbf{a} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{a}' \quad (151)$$

в координатном виде:

$$a_i = O_{ik} a'_k \quad (152)$$

Распишем тензор  $\sigma$  в штрихованном базисе и базисе без штриха и приравняем полученные выражения:

$$n'_m n'_r \sigma'_{mr} = n_i n_j \sigma_{ij} \quad (153)$$

учитывая связь штрихованного базиса и базиса без штриха, получаем:

$$n'_m n'_r \sigma'_{mr} = O_{im} n'_m O_{jr} n'_r \sigma_{ij} \Rightarrow \sigma'_{mr} = O_{im} \sigma_{ij} O_{jr} \quad (154)$$

Вспоминая, что умножение на транспонированный тензор реализуется в случае сворачивания первого индекса с первым или второго индекса со вторым; а просто скалярное умножение на тензор реализуется в случае сворачивания первого индекса со вторым или второго индекса с первым, перепишем равенство (154) в тензорном виде:

$$\sigma' = \mathbf{O}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{O} \quad (155)$$

Далее перепишем равенство (150) в тензорном виде в штрихованном базисе (в дальнейшем обозначения  $dis, f$  опущены для краткости):

$$\mathbf{O}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{O} = -\mu' : (\mathbf{O}^T \cdot \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{O}) \quad (156)$$

преобразуем

$$\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{O} \cdot (\boldsymbol{\mu}' : (\mathbf{O}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{O})) \cdot \mathbf{O}^T \quad (157)$$

С другой стороны, в базисе без штриха:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (158)$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{O} \cdot (\boldsymbol{\mu}' : (\mathbf{O}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{O})) \cdot \mathbf{O}^T \quad (159)$$

Перепишем в координатном виде:

$$\mu_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} = O_{ia} \mu'_{abcd} \dot{\varepsilon}'_{cd} O_{jb} = \mu'_{abcd} \dot{\varepsilon}'_{kl} O_{kc} O_{ld} O_{ia} O_{jb} \quad (160)$$

сокращая  $\dot{\varepsilon}_{kl}$ :

$$\mu_{ijkl} = \mu'_{abcd} O_{kc} O_{ld} O_{ia} O_{jb} \quad (161)$$

Изотропность = инвариантность физических свойств во всех направлениях. Математически означает неизменность представления тензора при повороте системы координат. Далее будем считать тензор  $\boldsymbol{\mu}$  изотропным ( $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}$ ). Тогда

$$\mu'_{ijkl} = \mu'_{abcd} O_{kc} O_{ld} O_{ia} O_{jb} \quad (162)$$

Далее получим инварианты тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ . Скалярная функция

Вспомним характеристическое уравнение для симметричного тензора второго ранга  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad (163)$$

Вид уравнения (163) не изменяется при повороте. Действительно,

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{E}) &= \det \mathbf{O}^T \cdot \det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \det \mathbf{O} = \det(\mathbf{O}^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{O}) = \\ &= \det(\mathbf{O}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{O} - \lambda \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}) = \det(\boldsymbol{\sigma}' - \lambda \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (164)$$

Раскроем определитель в уравнении (163):

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{E}) = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) (\sigma_{kl} - \lambda \delta_{kl}) (\sigma_{mn} - \lambda \delta_{mn}) = \quad (165)$$

раскрывая скобки

$$= \frac{1}{3!} \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} (\sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} - \lambda (\delta_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + \delta_{kl} \sigma_{ij} \sigma_{mn} + \delta_{mn} \sigma_{ij} \sigma_{kl}) + \\ + \lambda^2 (\sigma_{mn} \delta_{kl} \delta_{ij} + \sigma_{kl} \delta_{ij} \delta_{mn} + \sigma_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn}) - \lambda^3 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn}) = \quad (166)$$

обнаруживая определитель и применяя Кронекеры

$$= \det \sigma - \frac{\lambda}{3!} (\varepsilon_{ikm} \varepsilon_{iln} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + \varepsilon_{kmi} \varepsilon_{knj} \sigma_{ij} \sigma_{mn} + \varepsilon_{mik} \varepsilon_{mjl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}) + \\ + \frac{\lambda^2}{3!} (\varepsilon_{ikm} \varepsilon_{ikn} \sigma_{mn} + \varepsilon_{mik} \varepsilon_{min} \sigma_{kl} + \varepsilon_{kmi} \varepsilon_{kmj} \sigma_{ij}) - \frac{\lambda^3}{3!} \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{ikm} = \quad (167)$$

вспоминая свойства символов Леви-Чивиты и символов Кронекера

(а именно  $\varepsilon_{ikm} \varepsilon_{iln} = \delta_{kl} \delta_{mn} - \delta_{kn} \delta_{ml}$  и  $\varepsilon_{ikm} \varepsilon_{ikn} = 2\delta_{mn}$ , и  $\delta_{mm} = 3$ )

$$= \det \sigma - \frac{3\lambda}{6} (\sigma_{kk} \sigma_{mm} - \sigma_{nm} \sigma_{mn}) + \frac{3\lambda^2}{6} \cdot 2\sigma_{mm} - \frac{2 \cdot 3 \cdot \lambda^3}{6} = \quad (168)$$

вспоминая определение следа

$$= \det \sigma - \lambda \cdot \frac{\text{tr}^2 \sigma - \text{tr} \sigma^2}{2} + \lambda^2 \cdot \text{tr} \sigma - \lambda^3. \quad (169)$$

Так как вид характеристического уравнения не изменяется при повороте (см. (164)), то и коэффициенты этого уравнения инвариантны относительно поворота. Получаем 3 функционально независимых главных инварианта симметричного тензора второго ранга  $\sigma$ :

- первый:  $I_1(\sigma) = \text{tr} \sigma$
- второй:  $I_2(\sigma) = \frac{\text{tr} \sigma^2 - \text{tr}^2 \sigma}{2}$
- третий:  $I_3(\sigma) = \det \sigma$

И уравнение (163) переписывается в виде

$$-\lambda^3 + \lambda^2 \cdot I_1(\sigma) - \lambda \cdot I_2(\sigma) + I_3(\sigma) = 0 \quad (170)$$

Аналогичные выкладки с характеристическим уравнением верны для любого симметричного тензора второго ранга (в частности, для  $\sigma$  и  $\dot{\varepsilon}$ ).

Из изотропности тензора  $\mu$  (162) следует, что  $\mu$  зависит только от инвариантов тензоров  $\sigma$  и  $\dot{\varepsilon}$ .

И данная зависимость в первом приближении линейна.



Тогда

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = K^1 I_1(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) + K^2 I_2(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) + K^3 I_3(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (171)$$

Но связь линейна, поэтому след тензора напряжений не может зависеть от квадрата и от куба скорости изменения тензора малых деформаций, т.е.  $K^2 = 0$ ,  $K^3 = 0$  и

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = K^1 I_1(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (172)$$

Выделим девиаторную и шаровую части тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\sigma_{ij} = \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (173)$$

След девиаторной части равен нулю:

$$\text{tr} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) = 0, \quad (174)$$

поэтому у девиаторной части есть только второй и третий инварианты и девиаторная часть тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  не зависит от первого инварианта девиаторной части тензора  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ .

Следовательно, с учётом линейности второй инвариант девиаторной части тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  зависит только от второго инварианта девиаторной части тензора  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ :

$$\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = K^2 \left( \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (175)$$

Таким образом, из (172), (173) и (175)

$$\sigma_{ij} = K^2 \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{K^2}{3} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + \frac{K^1}{3} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} \quad (176)$$

Введём вязкость  $\mu = -\frac{K^2}{2}$  и вторую вязкость  $\eta = \frac{K^1}{3}$ , тогда

$$\sigma_{ij}^{dis,f} = -2\mu \dot{\epsilon}_{ij} + \left( \frac{2\mu}{3} + \eta \right) \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} \quad (177)$$

Получили закон Ньютона для изотропной вязкой жидкости.

Обычно  $\eta \ll \mu$  (для воды примерно на 2 порядка).

Также получили изотропный тензор вязкости:

$$\mu_{ijkl} = -\mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \left( \eta + \frac{2\mu}{3} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (178)$$

Аналогично можем получить изотропный тензор жёсткости (108):

$$L_{ijkl} = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij}\delta_{kl} + G (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (179)$$

и закон Гука в изотропном случае:

$$\sigma_{ij}^s = K\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \right), \quad (180)$$

где  $K$  – модуль всестороннего сжатия и  $G$  – модуль сдвига.

И закон Гука в изотропном случае в перегруппированной форме:

$$\sigma_{ij}^s = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (181)$$

где  $\lambda = K - \frac{2}{3}G$  и  $\mu = G$  – константы (параметры) Ляме.

## 7 Соотношения Онзагера

Ларс Онзагер. Лауреат Нобелевской премии по химии 1968 за открытие соотношений, лежащих в основе термодинамики необратимых процессов.

(<https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1968/onsager/facts>)

Мы отдельно разобрались с имеющимися в неравенстве Клаузиуса-Дюгема диссипациями: получили закон Дарси, закон Фурье и закон вязкости Ньютона.

Было 3 диссипации:  $\delta_\theta \geq 0$ ,  $\delta_f^1 \geq 0$  и  $\delta_f^2 \geq 0$ .

Сумма  $\delta_\theta + \delta_f^1 + \delta_f^2 \geq 0$  зависит от  $\nabla\theta$ ,  $W_i$  и  $\partial_j W_i$ . Ранее каждую из диссипаций в отдельности раскладывали в ряд Тейлора. Теперь будем раскладывать общую диссипацию, тогда первые производные по-прежнему равны нулю, но появятся смешанные производные, откуда и будут следовать соотношения Онзагера.

Прикинем порядок значений боковых напряжений при течении флюида.

Вязкость воды  $\mu \approx 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с} = 1 \text{ сП}$

Истинная скорость на забое (представим в виде отношения потоковой скорости к пористости):

$$v_f = \frac{Q}{\varphi h \cdot 2\pi r_w} \approx \frac{10^2 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}}{10^{-1} \cdot 10 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 10^5 \frac{\text{с}}{\text{сут}}} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Оценим порядок производной:

$$\frac{\partial v_f}{\partial r} \sim 10^{-2} \frac{1}{\text{с}}$$

Тогда

$$\mu \frac{\partial v_f}{\partial r} \sim 10^{-5} \text{ Па}$$

Получили пренебрежимо малые значения напряжений (по сравнению с примерным давлением в пласте  $10^7$  Па). Поэтому считаем жидкость в пласте идеальной ( $\partial_j W_i$  пренебрежимо малы).

И исключаем диссипацию  $\delta_f^2$ . Тогда диссипация

$$\delta(\nabla\theta, W_i) = \delta_\theta(\nabla\theta) + \delta_f^1(W_i) \quad (182)$$

Представим в виде частичной суммы ряда Тейлора (первые производные по-прежнему равны нулю аналогично (135)):

$$\begin{aligned} \delta \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial (\nabla_i \theta) \partial (\nabla_j \theta)} \Big|_{\substack{W_i=0, \\ \nabla_i \theta=0}} \nabla_i \theta \nabla_j \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial W_i \partial W_j} \Big|_{\substack{W_i=0, \\ \nabla_i \theta=0}} W_i W_j + \\ + \frac{\partial^2 \delta}{\partial (\nabla_j \theta) \partial W_i} \Big|_{\substack{W_i=0, \\ \nabla_i \theta=0}} \nabla_j \theta W_i \end{aligned} \quad (183)$$

С другой стороны, из (121) и (132)

$$\delta = -\frac{q_i \nabla_i \theta}{\theta} - b_i^{dis} W_i \quad (184)$$

Приравнявая (183) и (184), получаем, что

$$b_i^{dis} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial W_i \partial W_j} \Big|_{\substack{W_i=0, \\ \nabla_i \theta=0}} W_j - \frac{\partial^2 \delta}{\partial (\nabla_j \theta) \partial W_i} \Big|_{\substack{W_i=0, \\ \nabla_i \theta=0}} \nabla_j \theta \quad (185)$$

Видим, что диссипативная сила зависит не только от  $W_j$ , но и от градиента температуры. Если будет градиент температуры, то возможна ситуация, в которой появится некая диссипативная сила, которая приведёт жидкость в движение (в направлении, противоположном градиенту температуры).

Все соотношения выводили в общем виде: выполняются и при рассмотрении небольшого количества жидкости в крупном скелете (пласт), и при небольшом количестве твёрдых частиц в жидкости (взвесь). Например, согласно (185) при действии градиента температуры твёрдые частицы в взвеси могут начать движение относительно жидкости. И наоборот при добавлении движущихся твёрдых частиц в взвесь перенос тепла модифицируется.

Из (183) и (184) дополнительно получаем:

$$q_i = -\theta \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial (\nabla_i \theta) \partial (\nabla_j \theta)} \bigg|_{\substack{W_i=0, \\ \nabla_i \theta=0}} \nabla_j \theta - \theta \cdot \frac{\partial^2 \delta}{\partial (\nabla_i \theta) \partial W_j} \bigg|_{\substack{W_i=0, \\ \nabla_i \theta=0}} W_j \quad (186)$$

Получили стандартное слагаемое (см. (129)) и дополнительное (конвективное) слагаемое: если есть поток жидкости, то тепло тоже переносится.

Таким образом, есть 2 разных процесса:

- конвекция частиц: при приложении градиента температуры появляется поток, индуцированный этим градиентом (см. (185))
- конвекция тепла: при движении частиц индуцируется теплоперенос (см. (186))

## 8 Пороупругость

Самый важный геомеханический раздел в контексте разработки месторождений.

Вспомним полученное ранее замыкающее соотношение на тензор **полных** напряжений (115) (пусть нет начальных напряжений):

$$T_{ij} = \overbrace{L_{ijkl}\varepsilon_{kl}}^{\text{эффективные напряжения}} - \underbrace{\alpha_{ij}(p-p_0)}_{\text{пороупругая часть}} - \overbrace{\alpha_{kl}^{\theta}L_{ijkl}(\theta-\theta_0)}^{\text{термические напряжения}} \quad (187)$$

Вспомним полученное ранее замыкающее соотношение на пористость (120):

$$\varphi - \varphi_0 = \alpha_{ijkl}\varepsilon_{ij} + \frac{p-p_0}{N} + \alpha_{\theta}^{\varphi}(\theta - \theta_0) \quad (188)$$

Сейчас положительными считаем растягивающие напряжения.

**Важно!** Эффективные напряжения не равны скелетным напряжениям.

Выпишем связи между полными/скелетными деформациями/напряжениями.

Связь между полной деформацией и деформацией скелета (с точки зрения механики сплошных сред это определение скелетной деформации):

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \varphi)\varepsilon_{ij}^s + (\varphi - \varphi_0)\delta_{ij} \quad (189)$$

Связь между полным напряжением и напряжением скелета (получали ранее):

$$T_{ij} = (1 - \varphi)\sigma_{ij}^s - \varphi p\delta_{ij} \quad (190)$$

### 8.1 Изотропный случай

Перепишем равенство (187) в изотропном случае:

$$T_{ij} = \overbrace{K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)}^{\text{эффективные напряжения}} - \underbrace{\alpha(p-p_0)\delta_{ij}}_{\text{пороупругая часть}} - \overbrace{3\alpha^{\theta}K(\theta-\theta_0)\delta_{ij}}^{\text{термические напряжения}} \quad (191)$$

Перепишем равенство (188) в изотропном случае:

$$\varphi - \varphi_0 = \alpha \varepsilon_{kk} + \frac{p - p_0}{N} + \alpha_\theta^\varphi (\theta - \theta_0) \quad (192)$$

Закон Гука для материала скелета в изотропном случае:

$$\sigma_{ij}^s = K_s \varepsilon_{kk}^s \delta_{ij} + 2G \left( \varepsilon_{ij}^s - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^s \right) \quad (193)$$

Далее температура фиксирована ( $\theta = \theta_0$ ).

Введём обозначения для следов соответствующих тензоров

$$\varepsilon^s = \varepsilon_{kk}^s, \varepsilon = \varepsilon_{kk}, \sigma = T_{kk}, \sigma^s = \sigma_{kk}^s \quad (194)$$

тогда из равенства (191), применяя след к обеим частям, получаем:

$$\sigma = K \varepsilon - \alpha (p - p_0) \quad (195)$$

и из равенства (192), применяя след к обеим частям, получаем:

$$\varphi - \varphi_0 = \alpha \varepsilon + \frac{p - p_0}{N}, \quad (196)$$

и из равенства (193), применяя след к обеим частям, получаем:

$$\sigma^s = K_s \varepsilon^s \quad (197)$$

и из равенства (189), применяя след к обеим частям, получаем:

$$\varepsilon = (1 - \varphi) \varepsilon^s + (\varphi - \varphi_0), \quad (198)$$

и из равенства (190), применяя след к обеим частям, получаем:

$$\sigma = (1 - \varphi) \sigma^s - \varphi p \quad (199)$$

Далее будем получать формулы для константы Био и модуля Био (их зависимость от пористости и характеристик материала).

### 8.1.1 Константа Био

Рассмотрим образец пористого материала и будем со всех сторон действовать на него сжимающей нагрузкой  $d\sigma$  и изнутри через поры будем действовать давлением  $dp$ . Другими словами, за счёт сжатия прессом сверху и обжатия образца с боков можем сделать равномерное напряжение. Дополнительно через пресс герметично подаём жидкость, увеличивая тем самым давление.

Пусть  $dp = -d\sigma$ , тогда имеем **всестороннее сжатие скелета** (фактически со всех сторон образца обжимаем его напряжением  $d\sigma$  и изнутри на границах пор и скелета тоже обжимаем напряжением  $d\sigma$ ).

Формально из (199):

$$d\sigma = (1 - \varphi) d\sigma^s - \varphi dp \xrightarrow{dp = -d\sigma} d\sigma (1 - \varphi) = (1 - \varphi) d\sigma^s \Rightarrow d\sigma = d\sigma^s \quad (200)$$

(действительно, получили всестороннее сжатие скелета).

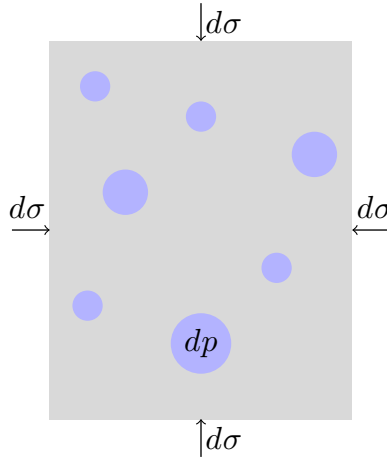


Рис. 1: Эксперимент на всестороннее сжатие скелета

Из закона Гука для материала скелета (197):

$$\varepsilon^s = \frac{d\sigma^s}{K_s} \quad (201)$$

С другой стороны, есть уравнение пороупругости (195):

$$d\sigma = K\varepsilon - \alpha dp \xrightarrow{dp = -d\sigma} d\sigma (1 - \alpha) = K\varepsilon \quad (202)$$

Тогда, учитывая равенство (200) (оно верно в рассматриваемом эксперименте), из (201) и (202)

получаем

$$K_s \varepsilon^s = \frac{K \varepsilon}{1 - \alpha} \quad (203)$$

Предположим, что  $K_s = K_f$ , тогда  $\varepsilon = \varepsilon^s$  (так как при равенстве  $K_s = K_f$  образец деформируется как единое целое) и из (203)

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s}, \quad (204)$$

где  $K$  – модуль всестороннего сжатия (сжимаемость) структуры образца и  $K_s$  – сжимаемость скелета.

Но из определения (109) мы знаем, что  $\alpha$  это характеристика скелета и его структуры, то есть  $\alpha$  не зависит от свойств флюида. Поэтому равенство (204) верно всегда (и при  $K_s \neq K_f$ ).

Таким образом, получили окончательное выражение (204) на константу Био  $\alpha$ .

У очень пористых материалов  $\alpha \approx 1$ , так как у пористых материалов  $K \ll K_s$ .

### 8.1.2 Модуль Био

Продолжаем рассматривать эксперимент на всестороннее сжатие скелета, в котором  $dp = -d\sigma$ , тогда выражение (196) перепишется для этого эксперимента в следующем виде:

$$\varphi - \varphi_0 = \alpha \varepsilon + \frac{dp}{N} = \alpha \varepsilon - \frac{d\sigma}{N} \quad (205)$$

С другой стороны, из (198):

$$\varphi - \varphi_0 = \varepsilon - \varepsilon^s (1 - \varphi) \quad (206)$$

Приравняв 2 последних равенства, получаем

$$\varepsilon - \varepsilon^s (1 - \varphi) = \alpha \varepsilon - \frac{d\sigma}{N} \quad (207)$$

учитывая, что в рассматриваемом эксперименте  $\varepsilon = \varepsilon^s = \frac{d\sigma^s}{K_s} = \frac{d\sigma}{K_s}$ , из последнего равенства получаем

$$\frac{1 - \alpha}{K_s} + \frac{1}{N} - \frac{1 - \varphi}{K_s} = 0 \quad (208)$$

и окончательное выражение для модуля Био:

$$\frac{1}{N} = \frac{\alpha - \varphi}{K_s} \quad (209)$$

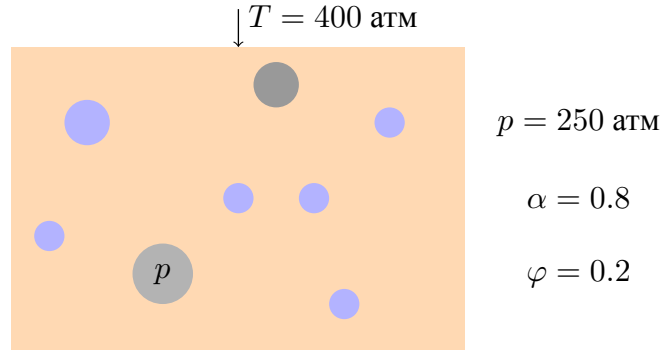
Видим, что если  $\alpha = \varphi$ , то модуля Био не существует и скелетные напряжения не отличаются от эффективных.



### 8.1.3 Задача для закрепления

В общем случае скелетные напряжения  $\sigma_{ij}^s$  не совпадают с эффективными напряжениями  $L_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ . Скелетные напряжения используются только в теоретических выводах (не фигурируют в практических задачах).

Рассмотрим пористый материал.



Найдём скелетные и эффективные напряжения, чтобы почувствовать разницу.

Скелетные напряжения из связи (190):

$$\sigma_{ij}^s = \frac{T_{ij} - p\varphi\delta_{ij}}{1 - \varphi} \quad (210)$$

Эффективные напряжения при постоянной температуре из уравнения пороупругости (187):

$$\sigma'_{ij} = T_{ij} - \alpha_{ij}p \quad (211)$$

Подставляем исходные данные задачи в выражение для скелетных напряжений:

$$\sigma^s = \frac{400 - 0.2 \cdot 250}{0.8} = 437.5 \text{ (атм)} \quad (212)$$

и для эффективных напряжений:

$$\sigma' = 400 - 0.8 \cdot 250 = 200 \text{ (атм)} \quad (213)$$

Скелетные напряжения действуют прямо в скелете. Они существуют в реальности, но для практического решения задач не подходят, так как мы не можем измерить деформацию скелетного материала, а можем только измерить деформацию зерна в целом.

Эффективные напряжения вводятся для удобства расчётов: вычленим их из полных напряжений  $T_{ij}$ , чтобы посчитать деформацию образца зерна. Эффективные напряжения не соответствуют каким либо реальным напряжениям, имеющимся в породе.

## **9    Решение задач**