

Содержание

1	Задание 1 от 14.09.2022	2
1.1	Расчёт давления по формуле Дюпюи	3
1.2	График зависимости давления от расстояния	3
1.3	Код для вывода графика	3
1.4	Анализ чувствительности формулы Дюпюи	3
1.5	Вывод уравнения Дарси и формулы Дюпюи	3
2	Задание 2 от 14.09.2022	4
2.1	Радиус исследований	4
2.2	Решение обратной задачи	5
2.3	Вывод уравнения пьезопроводности без упругости пласта	5
2.3.1	В векторной форме (быстрый, но не совсем строгий вывод)	5
2.3.2	В покомпонентной форме с обезразмериванием (от Шеля Е.В.)	6
2.4	Вывод уравнения пьезопроводности с упругостью пласта	9
3	Задание от 21.09.2022	9
4	Задание от 28.09.2022	9
5	Задание от 05.10.2022	9

Гидродинамическое моделирование

Решение задач

Муравцев А.А. (вариант 16)¹

7 октября 2022 г.

1 Задание 1 от 14.09.2022

Задача 1									
<p>Определить давление на расстоянии x_1 (м) и x_2 (м) от скважины при плоско-радиальном движении несжимаемой жидкости по линейному закону фильтрации, считая, что проницаемость пласта k (Дп), мощность пласта h (м), давление на забое скважины p_w (атм), радиус скважины r_w (см), вязкость нефти μ_0 (сПз), объемный дебит скважины в пластовых условиях q (м³/сут)</p>									
1,1	Построить зависимость давления от расстояния								
1,2	Написать макрос/скрипт, который при запуске будет выводить построенный выше график								
1,3*	Сделать анализ чувствительности закона Дарси-Дюпюи								
1,4	Вывод уравнений Дарси, Дарси-Дюпюи								
1,5									
	Вариант	x_1 , м	x_2 , м	k , Дп	h , м	p_w , атм	r_w , см	μ_0 , сПз	q , м ³ /сут
	1	6	40	10	11	85	9	1	249
	2	67	21	4	12	74	13	3	61
	3	24	35	8	14	69	13	9	232
	4	77	89	4	28	59	18	9	211
	5	93	61	7	15	75	17	9	87
	6	6	32	8	12	100	15	1	114
	7	86	61	4	8	56	11	9	184
	8	57	54	8	18	63	16	10	204
	9	32	32	6	6	77	14	8	124
	10	45	56	10	5	90	16	10	256
	11	52	20	7	26	82	13	9	118
	12	46	35	1	20	77	17	10	135
	13	33	8	10	7	53	12	6	176
	14	78	40	6	15	71	12	7	53
	15	22	41	9	5	81	10	9	193
	16	73	83	9	13	71	10	3	65
	17	53	23	7	14	98	19	9	158
	18	94	87	9	14	63	12	9	231
	19	18	49	1	9	99	14	3	118
	20	37	10	10	14	61	15	9	73
	21	97	50	9	17	93	15	7	264
	22	54	68	5	26	62	12	8	68
	23	14	19	2	8	89	14	8	93
	24	30	17	4	30	96	18	8	214
	25	57	80	4	24	66	9	10	250

¹ студент группы 5040103/10401; email: almuravcev@yandex.ru

1.1 Расчёт давления по формуле Дюпюи

Давление на расстоянии x_1 :

$$P_{x_1} = P_w + \frac{18.41 \cdot Q \mu}{kh} \left(\ln \left(\frac{x_1}{r_w} \right) + S \right) =$$

$$= 71 \text{ атм} + \frac{18.41 \cdot 65 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}} \cdot 3 \text{ сПз}}{9000 \text{ мД} \cdot 13 \text{ м}} \left(\ln \left(\frac{73 \text{ м}}{0.1 \text{ м}} \right) + 0 \right) \approx 71.2023 \text{ атм} \quad (1)$$

Давление на расстоянии x_2 :

$$P_{x_1} = P_w + \frac{18.41 \cdot Q \mu}{kh} \left(\ln \left(\frac{x_2}{r_w} \right) + S \right) =$$

$$= 71 \text{ атм} + \frac{18.41 \cdot 65 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}} \cdot 3 \text{ сПз}}{9000 \text{ мД} \cdot 13 \text{ м}} \left(\ln \left(\frac{83 \text{ м}}{0.1 \text{ м}} \right) + 0 \right) \approx 71.2062 \text{ атм} \quad (2)$$

1.2 График зависимости давления от расстояния

1.3 Код для вывода графика

1.4 Анализ чувствительности формулы Дюпюи

Вид формулы Дюпюи на установившемся режиме в промысловых единицах со скин-фактором:

$$Q = \frac{kh}{18.41 \cdot \mu} \frac{P_e - P_w}{\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) + S} \quad (3)$$

Jupyter-тетрадь с кодом для построения графика и проведения анализа чувствительности доступна по ссылке: [OPEN IN COLAB](#).

1.5 Вывод уравнения Дарси и формулы Дюпюи

Приравнявая значение потоковой скорости, найденное из геометрии пласта, к значению, найденному из закона Дарси, получим дифференциальное уравнение притока флюида к скважине. Дюпюи составил и решил это дифференциальное уравнение для случая границы в виде цилиндрической области (для радиального режима течения).

$$\frac{Q}{A} = \frac{k}{\mu} \frac{dP}{dx} \Rightarrow \frac{Q}{2\pi h} \int_{r_w}^{r_e} \frac{dr}{r} = \frac{k}{\mu} \int_{P_w}^{P_e} dp \Rightarrow Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{P_e - P_w}{\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right)} \quad (4)$$

Формула получена в СИ. При пересчёте в промысловые единицы измерения формула Дюпюи примет следующий вид:

$$Q = \frac{kh}{18.41 \cdot \mu} \frac{P_e - P_w}{\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right)} \quad (5)$$

2 Задание 2 от 14.09.2022

Задача 2						
1,1	Определите радиус исследований					
1,2	Решить обратную задачу. Задать начальный радиус исследований (более приближенный к реальности), приблизиться к решению, меняя параметры.					
1.3*	Решить обратную задачу. Задать начальный радиус исследований (более приближенный к реальности), приблизиться к решению, меняя параметры, используя методы оптимизации					
1,4	Вывод уравнения пьезопроводности без упругости пласта					
1.5*	Вывод уравнения пьезопроводности с упругостью пласта					
Вариант		к, мДа	t, мин	кр, %	mu0, сПз	сг, 10 ⁴ (-4) атм ⁴ (-1)
1		86	1781	22	4	13
2		30	3984	17	6	3
3		91	9682	17	5	15
4		60	2775	21	1	20
5		70	1305	26	3	6
6		7	887	23	10	5
7		3	1520	20	2	4
8		73	8261	22	4	5
9		25	54	26	8	20
10		64	1423	30	9	14
11		71	7600	23	7	10
12		59	5890	11	5	5
13		12	9645	21	9	11
14		85	97	21	1	16
15		49	9645	11	4	2
16		32	7343	14	10	20
17		14	465	19	4	1
18		99	4763	20	8	9
19		94	7593	14	8	3
20		82	8266	13	4	1
21		48	7462	22	8	14
22		74	1046	26	1	16
23		73	8173	19	1	13
24		42	1202	28	10	19
25		11	1841	18	1	10

2.1 Радиус исследований

$$r_{inv} = 0.037 \sqrt{\frac{kt}{\varphi \mu c_t}} = 0.037 \sqrt{\frac{32 \text{ мДа} \cdot 7343 \text{ мин}}{0.14 \cdot 10 \text{ сПз} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{атм}}}} \approx 338.95 \text{ м} \quad (6)$$

График зависимости радиуса исследования от произведения проницаемости и времени построен по ссылке: [OPEN IN COLAB](#).

2.2 Решение обратной задачи

Зададим радиус исследования $r_{inv} = 100$ м, тогда:

$$kt = \varphi \mu c_t \left(\frac{r_{inv}}{0.037} \right)^2 = 0.14 \cdot 10 \text{ сПз} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{атм}} \cdot \left(\frac{100 \text{ м}}{0.037} \right)^2 \approx 20452.89 \text{ мДа} \cdot \text{мин} \quad (7)$$

При проницаемости $k = 32$ мДа, время исследования будет составлять:

$$t \approx \frac{20452.89 \text{ мДа} \cdot \text{мин}}{32 \text{ мДа}} \approx 639 \text{ мин} \approx 10.65 \text{ ч.} \quad (8)$$

2.3 Вывод уравнения пьезопроводности без упругости пласта

1) Набор уравнений:

- неразрывность потока

$$\frac{\partial (\rho_f \varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \varphi \mathbf{v}_f) = q_f(\mathbf{x}) \quad (9)$$

- закон Дарси

$$\mathbf{W} = -\frac{k}{\mu_f} \cdot \nabla p \quad (10)$$

- сжимаемость флюида

$$p - p_0 = K_f \frac{\rho_f - \rho_f^0}{\rho_f^0} \quad (11)$$

На этих уравнениях строится основное уравнение гидродинамики пласта – уравнение пьезопроводности.

2) Насыщенности и относительные фазовые проницаемости (для нескольких флюидов)

3) Геометрия (сложное строение пласта)

2.3.1 В векторной форме (быстрый, но не совсем строгий вывод)

В предположении неподвижности скелета ($\mathbf{v}_s \approx \mathbf{0}$ и $\varphi(t) = \text{const}$) верно равенство $\mathbf{W} \approx \varphi \mathbf{v}_f$.

Подставляя в закон Дарси (10), получаем:

$$\varphi \mathbf{v}_f = -\frac{k}{\mu_f} \cdot \nabla p \quad (12)$$

Условие сжимаемости флюида (11) перепишем в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K_f}{\rho_f^0} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \quad (13)$$

Учитывая предположение о неподвижности скелета, перепишем уравнение неразрывности потока:

$$\varphi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \varphi \mathbf{v}_f) = q_f(\mathbf{x}) \quad (14)$$

Подставляя (12) и (13) в (14), при отсутствии источников слагаемого ($q_f(\mathbf{x}) = 0$) получаем:

$$\varphi \frac{\rho_f^0}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\rho_f \frac{k}{\mu_f} \nabla p \right) = 0 \quad (15)$$

При дополнительном условии слабосжимаемости флюида ($\rho_f \approx \rho_f^0 = \text{const}$) получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k K_f}{\mu_f \varphi} \nabla^2 p \quad (16)$$

Это уравнение пьезопроводности (без упругости пласта), полученное в приближении слабосжимаемого флюида, неподвижного и недеформируемого пласта.

2.3.2 В покомпонентной форме с обезразмериванием (от Шеля Е.В.)

Запишем ЗСМ для флюида:

$$\frac{\partial r_f}{\partial t} + \partial_i (r_f v_i^f) = 0 \quad (17)$$

Закон Дарси в «школьной» форме:

$$Q = -\frac{\Delta p}{L} \frac{k}{\mu} S \quad (18)$$

Закон Дарси в дифференциальной форме:

$$W_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \partial_j p, \quad (19)$$

где $W_i = \varphi v_i^f$ – потоковая относительная скорость флюида.

Учитывая связь эффективной и истинной плотностей ($r_f = \varphi \rho_f$), перепишем ЗСМ для флюида:

$$\frac{\partial (\rho_f \varphi)}{\partial t} + \partial_i (\rho_f \varphi v_i^f) = 0 \quad (20)$$

Подставляя (19) в (20), получаем:

$$\frac{\partial (\rho_f \varphi)}{\partial t} - \partial_i \left(\rho_f \frac{k_{ij}}{\mu} \partial_j p \right) = 0 \quad (21)$$

Замыкающее соотношение (связь плотности флюида и давления):

$$\rho_f = \rho_f^0 (1 + c_f (p - p_0)), \quad (22)$$

где c_f – сжимаемость флюида (1/Па).

Замыкающее соотношение (связь пористости и давления):

$$\varphi = \varphi^0 + c_{\pi} (p - p_0), \quad (23)$$

где c_{π} – сжимаемость пор (не равно сжимаемости породы).

Продифференцируем по времени замыкающее соотношение (22):

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = c_f \rho_f^0 \frac{\partial p}{\partial t} \quad (24)$$

Продифференцируем по пространству замыкающее соотношение (22):

$$\partial_i \rho_f = c_f \rho_f^0 \partial_i p \quad (25)$$

Продифференцируем по времени замыкающее соотношение (23):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c_n \frac{\partial p}{\partial t} \quad (26)$$

Продифференцируем по пространству замыкающее соотношение (23):

$$\partial_i \varphi = c_n \partial_i p \quad (27)$$

Раскрывая производные произведений в (21), получаем:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \varphi + \rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu} \partial_j p \partial_i \rho_f - \rho_f \partial_j p \partial_i \left(\frac{k_{ij}}{\mu} \right) - \rho_f \frac{k_{ij}}{\mu} (\partial_i \partial_j p) = 0 \quad (28)$$

Подставляя (24), (25), (26) и (27) в (28), получаем:

$$\begin{aligned} c_f \rho_f^0 \frac{\partial p}{\partial t} \varphi + \rho_f c_n \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu} \partial_j p c_f \rho_f^0 \partial_i p - \frac{\rho_f}{\mu} \partial_j p \partial_i k_{ij} + \\ + \rho_f \partial_j p k_{ij} \frac{\partial \mu}{\partial p} \frac{1}{\mu^2} \partial_i p - \rho_f \frac{k_{ij}}{\mu} (\partial_i \partial_j p) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Перед анализом физических уравнений всегда делают масштабный анализ, чтобы понять, какие слагаемые в уравнении важны, а какие не важны (пример: уравнение Навье-Стокса с числами Струхала, Эйлера, Рейнольдса, Фруда).

Спойлер: ГДМ симуляторы не решают уравнение пьезопроводности в классическом виде, а решают закон сохранения массы, в который они подставляют закон Дарси.

Далее необходимо выделить характерные масштабные факторы, обезразмерив каждую из функций в уравнении.

Введём безразмерное давление \tilde{p} такое, что:

$$p = \tilde{p} \cdot p_0, \quad (30)$$

где p_0 – пластовое давление.

Введём безразмерное расстояние \tilde{r} такое, что:

$$\vec{r} = \tilde{r} \cdot L, \quad (31)$$

где L – некое характерное расстояние (например, между скважинами).

Введём безразмерную проницаемость \tilde{k}_{ij} такую, что:

$$k_{ij} = \tilde{k}_{ij} \cdot k_0, \quad (32)$$

где k_0 – некая характерная проницаемость.

Введём безразмерную вязкость $\tilde{\mu}$ такую, что:

$$\mu = \tilde{\mu} \cdot \mu_0, \quad (33)$$

где μ_0 – некая характерная вязкость.

Все безразмерные функции (с волной) порядка единицы.

Перепишем (29) в введённых безразмерных величинах, разделив обе части этого уравнения на ρ_f^0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} \left(\varphi c_f + \frac{\rho_f}{\rho_f^0} \cdot c_n \right) - \frac{k_0 p_0^2}{\mu_0 L^2} c_f \frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}} \tilde{\partial}_i \tilde{p} \tilde{\partial}_j \tilde{p} - \frac{\rho_f k_0 p_0}{\rho_f^0 \mu_0 L^2} \frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}} \tilde{\partial}_j \tilde{p} \tilde{\partial}_i \tilde{k}_{ij} + \\ + \frac{\rho_f p_0 k_0}{\rho_f^0 L^2 \mu_0} \tilde{\partial}_j \tilde{p} \tilde{k}_{ij} \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{p}} \frac{1}{\tilde{\mu}^2} \tilde{\partial}_i \tilde{p} - \frac{\rho_f k_0 p_0}{\rho_f^0 \mu_0 L^2} \frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}} (\tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j \tilde{p}) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Вынесли все масштабные множители. Далее делим обе части уравнения на множитель перед старшей производной (на $\frac{k_0 p_0}{\mu_0 L^2}$), т.е. обезразмериваем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 L^2}{k_0 p_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \left(\varphi c_f + \frac{\rho_f}{\rho_f^0} \cdot c_n \right) - p_0 c_f \frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}} \tilde{\partial}_i \tilde{p} \tilde{\partial}_j \tilde{p} - \frac{\rho_f \tilde{k}_{ij}}{\rho_f^0 \tilde{\mu}} \tilde{\partial}_j \tilde{p} \tilde{\partial}_i \tilde{k}_{ij} + \\ + \frac{\rho_f \partial \tilde{\mu}}{\rho_f^0 \partial \tilde{p}} \frac{1}{\tilde{\mu}^2} \tilde{k}_{ij} \tilde{\partial}_j \tilde{p} \tilde{\partial}_i \tilde{p} - \frac{\rho_f \tilde{k}_{ij}}{\rho_f^0 \tilde{\mu}} (\tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j \tilde{p}) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Сделаем 3 важных приближения:

1. $p_0 c_f \ll 1$ (прикинем: сжимаемость воды порядка $10^{-5} \text{ атм}^{-1} = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$; характерные значения давлений на глубинах, равных нескольким километрам, составляют сотни атмосфер; таким образом, произведение порядка 10^{-3} , что много меньше единицы; но такое приближение не работает для газа: для него рассматриваемое произведение порядка единицы); это приближение фактически равносильно приближению $\rho_f \approx \rho_f^0$;
2. $\tilde{\partial}_i \tilde{k}_{ij} \ll 1$ (считаем, что на характерном масштабе задачи по данному направлению проницаемость изменяется незначительно, не больше 10 процентов);

3. $\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{p}} \ll 1$ (считаем, что отмасштабированный график проницаемости от давления пологий – этот факт подтверждается экспериментально – вязкость слабо зависит от давления)

Тогда уравнение (35) переписывается в следующем виде (убрали слагаемые с пренебрежимо малыми множителями в рамках сделанных приближений и вернулись от безразмерных функций с волной к обычным функциям):

$$\frac{\partial p}{\partial t} \underbrace{(\varphi c_f + c_n)}_{c_t} - \frac{k_{ij}}{\mu} \partial_i \partial_j p = 0 \quad (36)$$

(заметим, что если есть анизотропия проницаемости, то лапласиана в уравнении не будет).

Получаем классическое уравнение пьезопроводности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu c_t} \partial_i \partial_j p = 0, \quad (37)$$

где c_t – это полная сжимаемость.

Замечание. Но есть литература, в которой $c_t = c_f + \frac{c_n}{\varphi}$, тогда уравнение пьезопроводности будет выглядеть так:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu \varphi c_t} \partial_i \partial_j p = 0 \quad (38)$$

Пусть тензор проницаемости изотропен $k_{ij} = k_0 \cdot \delta_{ij}$, тогда:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_0}{\mu c_t} \delta_{ij} \partial_i \partial_j p = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_0}{\mu c_t} \Delta p = 0 \quad (39)$$

(получили всем известный вид уравнения пьезопроводности).

2.4 Вывод уравнения пьезопроводности с упругостью пласта

Задача со звёздочкой. Ещё думаю.

3 Задание от 21.09.2022

Jupyter-тетрадь с кодом обработки ОФП доступна по ссылке: [OPEN IN GITHUB](#).

4 Задание от 28.09.2022

5 Задание от 05.10.2022