Содержание

Рациональная механика сплошной среды
Конспект лекций

Муравцев А.А.[1]   Вильчевская Е.Н.[2]

28 мая 2022 г.

[1]конспектирует; email: almuravcev@yandex.ru

[2]лектор, Высшая школа теоретической механики, Санкт-Петербургский Политехнический университет. Дополнительные материалы к лекциям доступны по ссылке.

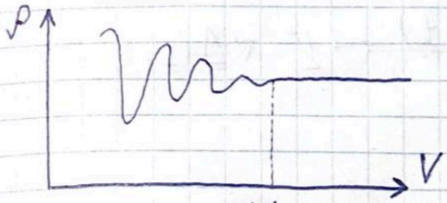
1 Лекция 08.02.2022. Раздел 1. Механика многокомпонентных сред

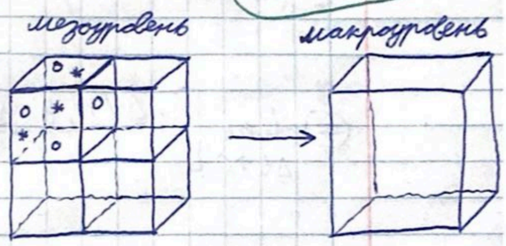
1.1 Материальная производная. Многокомпонентные среды. Баланс массы

(1) Мех-ка многокомпонентных сред

08.02.2022

$$\rho = \frac{M}{V}$$



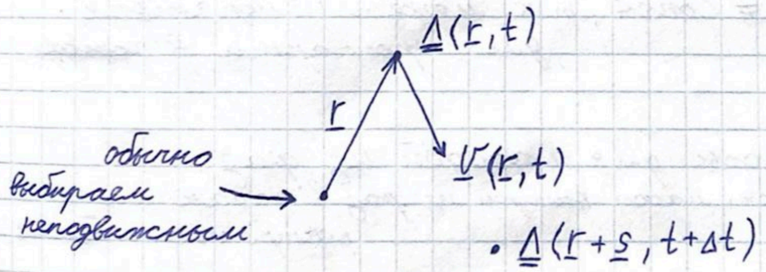


V_* (масштаб, при котором средние х-ки не зависят от объёма) ← только после этого можем исп-ть континуальную теорию.

Пр-ая по пр-ву = изменение х-к при переходе от одного объёма к другому

$$\nabla = \frac{d}{d\underline{r}}$$

Пр-ая по времени = изм-ие материальных св-в с течением времени



$$\frac{\delta \underline{\Delta}}{\delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{\Delta}(\underline{r}+\underline{s}, t+\Delta t) - \underline{\Delta}(\underline{r}, t)}{\Delta t} =$$

1

$\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}+\underline{s})$

$$\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}+\underline{s}, t+\Delta t) = \underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t+\Delta t) + \underline{s}\cdot\nabla\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t+\Delta t)$$

$$\ominus \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t+\Delta t)-\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t)}{\Delta t} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t+\Delta t)\right] =$$

$$= \frac{d\underline{\underline{\Delta}}}{dt} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t)$$

i-компонент.

$$\rho_i = \frac{M_i}{V} = \frac{M_i}{V_i}\,\frac{V_i}{V}$$

ρ_i^* (истинная пл-ть)

объёмная (эффективная) пл-ть

Важный момент! Часто при расчётах дв-ия жидкости с проппантом жидкость считают несжимаемой, т.е. $\rho_i^* = const$, но при этом

$\rho_i \neq const$, т.к. может изменяться доля проппанта в потоке

Баланс массы для каждой из фаз:
(как изменяется масса каждой из фаз в заданном контрольном объёме

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int_V \rho_i\,dV}_{\text{масса фазы } i \text{ в объёме } V} = \underbrace{-\oint_{\partial V} \underline{n}_i\cdot\underline{v}_i\,\rho_i\,dS}_{\text{приток/отток массы}} = -\int_V \nabla\cdot(\underline{v}_i\rho_i)\,dV$$

2

$$\int\limits_V \left[\frac{d\rho_i}{dt} + \nabla\cdot(\underline{V_i}\rho_i) \right] dV = 0$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \nabla\cdot(\underline{V_i}\rho_i) = 0$$

$$\frac{\delta_i \rho_i}{\delta t} = \frac{d\rho_i}{dt} + \underline{V_i}\cdot\nabla\rho_i$$

$$\frac{\delta_i \rho_i}{\delta t} + \rho_i\left(\nabla\cdot\underline{V_i}\right) = 0$$

Хочется сказать, что $\nabla\cdot\underline{V_i} = 0$, если ж-ть несжимаемая, но НЕ $\rho_i \neq const$ (зависит от доли фазы в объёме, которая может изменяться со временем)

Просуммируем по фазам:

$$\sum_i \frac{d\rho_i}{dt} + \sum_i \nabla\cdot(\underline{V_i}\rho_i) = 0$$

(можем изменить порядок суммирования и дифференцирования)

$$\frac{d\left(\sum_i \rho_i\right)}{dt} + \nabla\cdot\left(\sum_i \underline{V_i}\rho_i\right) = 0$$

(на мезоуровне) (сложили компоненты (фазы))

(баланс массы для всего объёма на макроуровне)

Как определить пл-ть и ск-ть на макроуровне?

$\rho, \underline{V}$ – ? Должен вып-ся ЗСМ:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla\cdot\left(\underline{V}\rho\right) = 0$$ (на макроуровне)

3

1.2 Эффективные плотность и скорость

Сравнивая выр-ия на мезо и макро уровнях, получаем:

$$\rho \underline{V} = \sum_i \rho_i \underline{V_i} \quad , \text{т.е.}$$

Эффективная ск-ть на макроуровне:

$$\underline{V} = \frac{1}{\sum_i \rho_i} \sum_i \rho_i \underline{V_i} \quad \left(= \text{бароцентрическая ск-ть} \neq \text{ск-ть центра масс} \right)$$

и Эффективная пл-ть на макроуровне:

$$\rho = \sum_i \rho_i$$

Отступление

Центр масс:

$$\underline{r_c} = \frac{1}{\sum_{i(t)} M_i} \sum_{i(t)} M_i \underline{r_i}$$

(здесь i - это кол-во частиц, которые находятся в заданном объёме в данный момент времени, их кол-во может изм-ся со временем

Показали на пальцах, что ск-ть дв-ия центра масс $\neq$ бароцентрической ск-ти.

Полная пр-ая характ-ет изменение св-ва в данной точке наблюдения.

В материальном описании следим за одной конкретной точкой => материальная пр-ая

4

1.3 Материальное и пространственное описания

совпадает с полной пр-ой.

В материальном описании:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{V} \quad \text{(определение ск-ти)}$$

В пространственном описании:

$$\frac{\delta \underline{r}}{\delta t} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{0} + \underline{V}\cdot\nabla\underline{r}$$

(радиус-вектор точки наблюдения неподвижен)

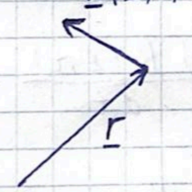
$$\nabla = \underline{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\underline{r} = \underline{e}_m x_m$$

$$\nabla\underline{r} = \underline{e}_k \underline{e}_m \overset{\delta_{km}}{\frac{\partial x_m}{\partial x_k}} = \underline{e}_k \underline{e}_k = \underline{\underline{E}}$$

$$\frac{\delta \underline{r}}{\delta t} = \underline{V} \quad \text{(это не определение, а просто тождество)}$$

Далее хотим расс-ть деф-ии; для этого необходимо ввести перемещения.



В материальном описании отсчётные радиус-векторы фиксированы, а в пр-ом описании в разные моменты времени в точке наблюдения оказываются разные частицы => $\underline{R}(\underline{r}, t)$, где $\underline{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения

есть зав-ть от времени

(т.к. у разных точек, которые бывают в данной точке в разл-ые моменты времени - разные отсчётные радиус-векторы)

5

Вводится определение

$$\frac{\delta \underline{u}(\underline{r},t)}{\delta t} = \underline{v}$$

Тогда:

$$\cancel{\frac{\delta(\underline{u}(\underline{r},t)+\underline{r})}{\delta t} = \underline{v}}$$

$$\cancel{\underbrace{\frac{\delta \underline{r}}{\delta t}}_{\underline{v}} + \frac{\delta \underline{u}(\underline{r},t)}{\delta t} = \underline{v} \Rightarrow \frac{\delta \underline{u}(\underline{r},t)}{\delta t}}$$

$$\underbrace{\frac{\delta \underline{u}(\underline{r},t)}{\delta t}}_{\underline{v}} + \cancel{\frac{\delta \underline{r}}{\delta t}} = \cancel{\underline{v}} \Rightarrow \cancel{\frac{\delta \underline{r}}{\delta t} = 0}$$

Тогда:

$$\frac{\delta(\underline{u}(\underline{r},t)+\underline{R}(\underline{r},t))}{\delta t} = \underline{v}$$

$$\underbrace{\frac{\delta \underline{u}(\underline{r},t)}{\delta t}}_{\underline{v}} + \frac{\delta \underline{R}(\underline{r},t)}{\delta t} = \underline{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\delta \underline{R}(\underline{r},t)}{\delta t} = 0$$

Распишем, чтобы понять, получили нормальный или странный рез-т:

6

1.4 Особенности при рассмотрении многокомпонентных сред

$$\underbrace{\frac{d\underline{R}}{dt}\Big|_{\underline{r}\text{-фикс}}}_{\substack{\text{говорит о том,}\\ \text{какой должен}\\ \text{быть радиус-вектор}\\ \text{отсчёта}\\ \text{точки, которая в}\\ \text{данный момент}\\ \text{нах-ся в (·) набл } \underline{r}}} + \underbrace{\underline{V}\cdot\nabla\underline{R}}_{\substack{\text{откуда точка может}\\ \text{попасть в (·) набл.}\\ \underline{r}}} = 0$$

Особенности, которые могут быть при рассмотрении многокомпонентных сред: переходы одних частиц в другие

Хим реакции или прилипание одних частиц к другим

Для двухкомп. сред:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2\ ;\ \underline{V} = \frac{1}{\rho}\left(\rho_1\underline{V_1} + \rho_2\underline{V_2}\right)$$

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla\left(\rho_1\underline{V_1}\right) = 0$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla\left(\rho_2\underline{V_2}\right) = 0$$

Но теперь хотим учесть, что частицы 1 могут превращаться в частицы 2 и наоборот, тогда

$$\frac{d}{dt}\int \rho_1 dV = -\int_{dV} \underline{n}\cdot(\underline{V_1}\rho_1)\, dV - \int_V \chi_{12}\, dV + \int_V \chi_{21}\, dV$$

2 Лекция 15.02.2022.

2.1 Осреднение скоростей и перемещений (геометрических и кинематических величин)

χ_{12} – ск-ть превращ-ия частиц 1 в частицы 2

$\left(\left[1\,\frac{кг}{м^3}\cdot\frac{1}{c}\right]\right)$

В локальной ф-ме получаем:

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla(\rho_1 \underline{V_1}) = \chi_{21} - \chi_{12}$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla(\rho_2 \underline{V_2}) = \chi_{12} - \chi_{21}$$

Но на макроуровне баланс массы не изм-ся:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla(\rho \underline{V}) = 0$$

15.02.2022

$$\frac{\delta_1 u_1}{\delta t} = \underline{V_1} \qquad \frac{\delta_2 u_2}{\delta t} = \underline{V_2}$$

$\rho:\ \rho_1 + \rho_2 = \rho$

(мы осреднили кинематич. хар-ки (ск-ти))

$\underline{V}:\ \rho \underline{V} = \rho_1 \underline{V_1} + \rho_2 \underline{V_2}$

Можно ли то же делать с геометрическими (перемещениями)?

$\rho \underline{u} = \rho_1 \underline{u_1} + \rho_2 \underline{u_2}$

$$\rho_1 \frac{\delta_1 u_1}{\delta t} + \rho_2 \frac{\delta_2 u_2}{\delta t} = \rho \cdot \frac{\delta u}{\delta t}$$

$$\rho_1 \frac{du_1}{dt} + \rho_1 \underline{V_1} \cdot \nabla \underline{u_1} + \rho_2 \frac{du_2}{dt} + \rho_2 \underline{V_2} \cdot \nabla \underline{u_2} = \rho \frac{du}{dt} + \rho \underline{V} \cdot \nabla \underline{u}$$

8

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_1\underline{u}_1+\rho_2\underline{u}_2-\rho\underline{u}\right)-\frac{d\rho_1}{dt}\underline{u}_1-\frac{d\rho_2}{dt}\underline{u}_2+\frac{d\rho}{dt}\underline{u}=$$

$$=\nabla\cdot\left(\rho\underline{V}\underline{u}-\rho_1\underline{V}_1\underline{u}_1-\rho_2\underline{V}_2\underline{u}_2\right)-\nabla\cdot(\rho\underline{V})\underline{u}+\nabla\cdot(\rho_1\underline{V}_1)\underline{u}_1+$$

$$+\nabla\cdot(\rho_2\underline{V}_2)\underline{u}_2$$

Из б.м. сл-не уходят

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_1\underline{u}_1+\rho_2\underline{u}_2-\rho\underline{u}\right)=\nabla\cdot\left(\rho_1\underline{V}_1\underline{u}+\rho_2\underline{V}_2\underline{u}-\rho_1\underline{V}_1\underline{u}_1-\rho_2\underline{V}_2\underline{u}_2\right)=$$

$$=\nabla\cdot\left(\rho_1\underline{V}_1(\underline{u}-\underline{u}_1)+\rho_2\underline{V}_2(\underline{u}-\underline{u}_2)\right)$$

След-но, р-во $\rho\underline{u}=\rho_1\underline{u}_1+\rho_2\underline{u}_2$ верно только, если $\underline{u}=\underline{u}_1=\underline{u}_2$, т.е. для однофазной среды, но для двухфазной – осреднение геометр. и кинемат. разные вещи.

9

2.2 Баланс количества движения для двухкомпонентной среды

Баланс кол-ва дв-ия (1-ый з-н динамики)

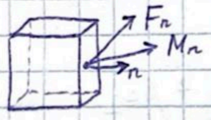
Сила – это причина изменения количества движения

$$\frac{d}{dt}(m\underline{V}) = \underline{F}$$ (для одной частицы) мат-ой точки

Экстенсивные вел-ны (масса, объём, т.д.)
Интенсивные вел-ны (тем-ра)

$\underline{V}$ – кол-во дв-ия, приходящееся на ед. массы

$\rho\underline{V}$ – кол-во дв-ия, приходящееся на ед. объёма



(моменты в дальнейшем не расс-ем)

$$\underline{F}_n = \lim_{d\to 0}\frac{F}{S}$$ – удельная х-ка силы на ед пов-ти [Па]

d – максимальный р-р пов-ти (Fn – поверхностные силы, к-ые действ на з-ый объём)

Для простр-ого объёма (спл-ая среда; i-ый комп-т):

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_i \underline{V}_i\, dV = \underbrace{\int_V \rho_i \underline{f}_i\, dV}_{} + \int_{\partial V} \underline{F}_{ni}\, dS - \int_{\partial V} \underline{n}\cdot\underline{V}\,\rho\underline{V}\, dS$$

уд-ая сила, приход на ед. массы

$\rho_i f_i$ – на ед-цу объёма

т.к. нормаль внешняя

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{n}_i \cdot \underline{F}_{ni}$ – тензор напр-ий (показывает, как конкретный м-л реагирует на внешн. нагрузку)

10

$$\underline{F}_{ni} = \underline{n}_i \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\int\limits_V \left[\frac{d\rho}{dt}\underline{V} + \rho\frac{d\underline{V}}{dt} - \rho\underline{f} - \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}} + \nabla\cdot(\rho\underline{V})\underline{V} + \rho\underline{V}\cdot\nabla\underline{V} \right] dV = 0$$

~~ из ЗСМ

$$\int\limits_V \left[\rho\frac{\delta\underline{V}}{\delta t} - \rho\underline{f} - \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}} \right] = 0$$

$$\rho\frac{\delta\underline{V}}{\delta t} = \rho\underline{f} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}$$ – для однокомпонентной среды

Для двухкомп-ой среды:

$$\rho_1\frac{\delta_1\underline{V}_1}{\delta t} = \rho_1\underline{f}_1 + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}_1 + \underline{f}_{12} + \rho_1\underline{\tilde{f}}_{12} + \rho f_{12}^{*} + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho}\underline{\bar{f}}_{12}$$

$\underline{f}_{12}$ – объёмная сила $\quad \underline{f}_{12} = -\underline{f}_{21}$

$\tilde{f}_{12}$ – массовая сила $\quad \rho_1\tilde{f}_{12} = -\rho_2\tilde{f}_{21}$

Для обеих фаз:

$$\frac{d\,\rho_1\underline{V}_1}{dt} = -\nabla\cdot\left(\rho_1\underline{V}_1\underline{V}_1\right) + \rho_1\underline{f}_1 + \rho\underline{f}_{12} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}_1$$

$$\frac{d\,\rho_2\underline{V}_2}{dt} = -\nabla\cdot\left(\rho_2\underline{V}_2\underline{V}_2\right) + \rho_2\underline{f}_2 - \rho\underline{f}_{12} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}_2$$

11

2.3 Переход к балансу количества движения на макроуровне

Внутренние силы не могут изм-ть кол-во дв-ия:

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\rho_1\underline{V_1}+\rho_2\underline{V_2}}_{\rho\underline{V}}\Big) = -\nabla\cdot\big(\overbrace{\rho_1\underline{V_1}\,\underline{V_1}+\rho_2\underline{V_2}\,\underline{V_2}-\rho\underline{V}\,\underline{V}}^{(*)}\big) -$$

$$-\nabla\cdot(\rho\underline{V}\,\underline{V}) + \underbrace{\rho_1\underline{f_1}+\rho_2\underline{f_2}}_{\rho f} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma_1}} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma_2}}$$

$$(*)\quad \rho_1\underline{V_1}\,\underline{V_1}+\rho_2\underline{V_2}\,\underline{V_2}-\rho_1\underline{V_1}\,\underline{V}-\rho_2\underline{V_2}\,\underline{V} =$$

$$=\rho_1\underline{V_1}(\underline{V_1}-\underline{V})+\rho_2\underline{V_2}(\underline{V_2}-\underline{V}) =$$

$$=\frac{1}{\rho}\Big[\rho_1\underline{V_1}\big(\cancel{\rho_1\underline{V_1}}+\rho_2\underline{V_1}-\cancel{\rho_1\underline{V_1}}-\rho_2\underline{V_2}\big) +$$

$$+\rho_2\underline{V_2}\big(\rho_1\underline{V_2}+\cancel{\rho_2\underline{V_2}}-\rho_1\underline{V_1}-\cancel{\rho_2\underline{V_2}}\big)\Big] =$$

$$=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho}(\underline{V_1}-\underline{V_2})(\underline{V_1}-\underline{V_2})$$ — здесь относительные ск-ти с приведён. массой

$$\parallel$$

$$-\rho(\underline{V}-\underline{V_1})(\underline{V}-\underline{V_2})$$ — дв-ие отн-но однородной среды

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma_1}}+\underline{\underline{\sigma_2}} + \underbrace{\rho(\underline{V}-\underline{V_1})(\underline{V}-\underline{V_2})}_{\text{дополнительные напр-ия, св-ые с отн. дв-ем (св-ны с вязкостью)}}$$ ← тут нужны реш-ия для каждой из фаз.

↑ показывает то, что нужно учитывать при переходе на макро-уровень (от двухфазного к однофазному)

12

3 Лекция 22.02.2022.

3.1 Балансы массы и количества движения двухкомпонентной среды с источниковыми членами

Осреднение теряет инф-ию, но даёт представление о том, как дв-ся среда как однофазн на макроуровне (вид опр-их соотн-ий)

Баланс массы:

22.02.2022

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla\cdot(\rho_1 \underline{V_1}) = \chi_{21} - \chi_{12}$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla\cdot(\rho_2 \underline{V_2}) = \chi_{12} - \chi_{21}$$

Баланс к-ва дв-ия:
(без учёта взаимопревращений, получили на прошлой паре)
Сейчас добавим взаимопревращения

$$\frac{d\rho_1}{dt}\underline{V_1} + \rho_1 \frac{d\underline{V_1}}{dt} = -\nabla\cdot(\rho_1\underline{V_1})\underline{V_1} - \rho_1\underline{V_1}\cdot\nabla\underline{V_1} + \rho_1\underline{f_1} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma_1}} + \chi_{21}\underline{V_2} - \chi_{12}\underline{V_1} + \rho\underline{f_{21}}$$

$$\rho_1\frac{\delta_1 \underline{V_1}}{\delta t} = \cancel{\chi_{12}\underline{V_1}} - \chi_{21}\underline{V_1} + \rho_1\underline{f_1} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma_1}} + \chi_{21}\underline{V_2} - \cancel{\chi_{12}\underline{V_1}} + \rho\underline{f_{21}}$$

$$\rho_1\frac{\delta_1 \underline{V_1}}{\delta t} = \rho_1\underline{f_1} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma_1}} + \underbrace{\chi_{21}(\underline{V_2}-\underline{V_1})}_{} + \rho\underline{f_{21}}$$

ост-сь только отн. ск-ть, т.к. рассматриваем именно изм-ие ск-ти в данном ур-ии, а не изм кол-ва дв-ия

Почему ушёл χ_{12}?

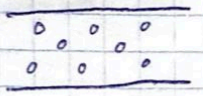
13

3.2 Постановка задачи: жидкость с пропантом

Для второй фазы:

$$\rho_2 \frac{\delta_2 \underline{V}_2}{\delta t} = \rho_2 \underline{f}_2 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2 + \chi_{12}\left(\underline{V}_1 - \underline{V}_2\right) + \rho \underline{f}_{12}$$

4 двухфазную среду: жид-ть с пропантом



$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{V}_1) = 0 \qquad \frac{d\rho_2}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho_2 \underline{V}_2) = 0$$

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{V}_1}{\delta t} = \rho_1 \underline{f}_1 + \rho \underline{f}_{21} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1$$

$$\rho_2 \frac{\delta_2 \underline{V}_2}{\delta t} = \rho_2 \underline{f}_2 - \rho \underline{f}_{21} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2$$

Необходимы определяющие (замыкающие) соотн-ия, которые опр-ют мат-л и характер сил взаимодействия (находим их обычно из эксперимента)

В системе не знаем: $\rho_1, \underline{V}_1, \rho_2, \underline{V}_2$

Знаем $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ (сила гравитации; объёмная)

$\underline{f}_1 = \underline{f}_2 = g$ (в этой задаче нельзя пренебрегать гравитацией, т.к. есть оседание)

$\underline{f}_{12}$ и $\underline{f}_{21}$ вычисляются вначале с помощью эксперимента – силы вз-ия (силы трения между фазами: эти силы уменьшают ск-ть)

Вязкое трение: $\underline{f}_{21} = \eta_{12}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1)$ (для некоторых сред бывает и кв-ат ск-ей)
(между фазами)

14

Сухое трение: $\underline{f}_{21} = \eta_{12}(\underline{u}_2 - \underline{u}_1)$, но тогда нужны доп. ур-ия на перемещ.
(Кулона)

$$\frac{\delta_1 u_1}{\delta t} = v_1; \quad \frac{\delta_2 u_2}{\delta t} = v_2$$

Можно взять трубку, создать в ней разность давлений, запустить чистую ж-ть без частиц, измерить ск-ть, а затем ж-ть с частицами

Нужно учесть, что ск-ть жид-ти увел-ся из-за того, что ей останется меньше места из-за частиц
(например, увеличить диаметр трубы)

Определяющие соотношения показывают как конкретный материал реагирует на внешние воздействия.

$\underline{\underline{\sigma}}_1$ реакция м-ла на приложенную нагрузку (специфика м-ла)

Другими сл-ми, $\underline{\underline{\sigma}}_1$ определяет, каким образом данный м-л реагирует на приложенную нагрузку

Ньютоновская ж-ть:

$$\underline{\underline{\sigma}}_f = -p\underline{\underline{E}} + 2\mu_f \underline{\underline{d}}$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{V} + \underline{V}\nabla\right)$$ - градиент ск-ти

$$\underline{\underline{d}} = \operatorname{dev} \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \underline{V}\, \underline{\underline{E}}$$

$\nabla \cdot \underline{V} = 0$ - усл-е несжим-ти жид-ти (из ЗСМ)

$\rho_1 = c\rho_1^*$ ← истинная пл-ть

ρ_1^* - несжимаемая

ρ_1 - сжимаемая

концентрация (доля ж-ти в объёме)

Эффективная пл-ть, которая может изм-ся за счёт изм-ия концентрации

Сл-но, напрямую не можем использовать усл-ие несжимаемости.

15.

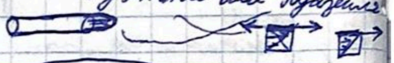
Неньютоновская ж-ть:

$$\underline{\underline{\sigma_1}} = -p\underline{\underline{E}} + 2\mu_f \underline{\underline{d}}^m$$

коэф-т вязкости (между слоями одной фазы)

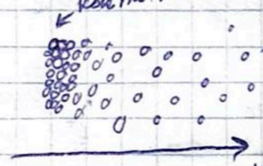
Пок-ль m зависит от типа ж-ти.

находят из экспери-ов по теч-ию Куэтта или Пуазейля



η_{12} – трение между фазами

кон. тв. тело



взвешенное состояние (ур-ие как для Ньютон-ой жид-ти)

n - пористость (в тв-ой ф-ие)

Для проппанта опр. ур-ия сложные

И в итоге, разрывные опр-ие соотн-ия, которые часто не удаётся нормально состыковать, поэтому в проппанте часто погрешность.

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ (физ-ки линейная теория)

напряжения - это линейная ф-ия деф-ий

Если $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u} + \underline{u}\nabla)$ – геометрически линейная теория (деф-ия есть первая пр-ая от перемещений)

Физически линейный закон всегда вып-ся для геом-ки линейной теории

Нач. и ГУ: какие и сколько?

16

4 Лекция 01.03.2022.

4.1 Постановка задачи: жидкость с пропантом (продолжение)

01.03.22

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{V_1}}{\delta t} = \rho_1 \underline{f_1} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma_1}} + \chi_{21}(\underline{V_2} - \underline{V_1}) + \rho \underline{f_{21}}$$

Почему ушёл χ_{12} (не вошёл)?

В это ур-ие входит изм-ие именно ск-ти (а не полного кол-ва дв-ия), поэтому некоторые частицы со ск-ью V_1 просто ушли (в другую фазу) и понятно, что при этом ск-ть ост-ся части не изменилась (просто убрали часть частиц со ск-тью V_1) ~ переориентировали в другую фазу.

Система ур-ий для двух-ой среды

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{V_1}) = 0$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla \cdot (\rho_2 \underline{V_2}) = 0$$

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{V_1}}{\delta t} = \rho_1 \underline{f_1} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma_1}} + \rho \underline{f_{21}}$$

$$\rho_2 \frac{\delta_2 \underline{V_2}}{\delta t} = \rho_2 f_2 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma_2}} - \rho \underline{f_{21}}$$

$$\frac{\delta_1 \underline{u_1}}{\delta t} = \underline{V_1}; \quad \frac{\delta_2 \underline{u_2}}{\delta t} = \underline{V_2}$$

$$\frac{\delta_1 \underline{u_1}}{\delta t} = \frac{d\underline{u_1}}{dt} + \underline{V_1} \cdot \nabla \underline{u_1}$$

Неизвестные: $\rho_1, \rho_2, \underline{V_1}, \underline{V_2}$

$$\underline{f_{12}} = \eta_{12}(\underline{V_2} - \underline{V_1})$$

или

$$\underline{f_{12}} = \mu_{12}(\underline{u_2} - \underline{u_1})$$

тогда сразу более сл-ая система

$$\underline{f_1} = \underline{f_2} = \underline{g}$$

$[Па \cdot с]$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{E}} + \nu \underline{\underline{d}}$$

разм-ть $\left[\frac{1}{с}\right]$ — $\underline{\underline{d}}$

$$\underline{\underline{d}} = \operatorname{dev} \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{V_1} + \underline{V_1} \nabla) - \frac{1}{3} \nabla \cdot \underline{V} \, \underline{\underline{E}}$$

17

Теория опр-их ур-ий (другая тема)

Нужны ГУ и НУ:

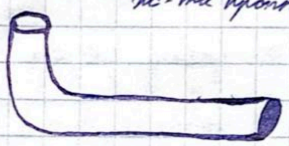
Сколько? Одно НУ

$\rho_1(\underline{r},0)$ $\rho_2(\underline{r},0)$

$v_1(\underline{r},0)$ $v_2(\underline{r},0)$

Могут быть неравномерны по пр-ву, поэтому $\underline{r}$ обязательно должно быть

Пример. Начало закачки ж-ти проппанта.

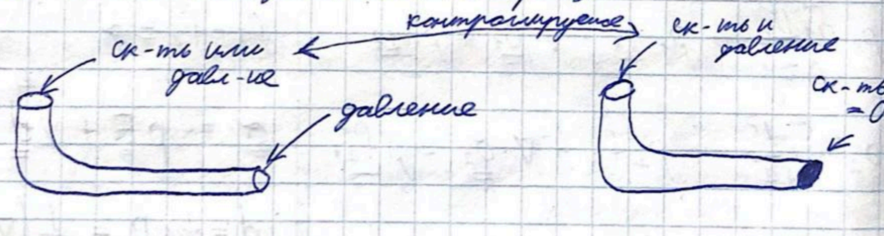


Изначально внутри материи нет, поэтому ставим все НУ = 0.

Два ГУ на $\underline{v}$ (т.к. $\sigma \sim \nabla \underline{v}$)

Можем задавать как силовые так и кинем-ие усл-ия. (но не сразу вместе; если только одни на верт. гр-е; другие на гр-ой)

Задаём ск-ть или давление на гр-це



На боковой границе для ж-ти: условие прилипания (не очень верно), конечная ск-ть на гр-це (которая на самом деле зависит от сил трения между ж-тью и поверх-тью) (новый к-т трения между ж-тью и породой)

18

сила меньше
Если силы трения ~~больше~~, то усл-ие прилипания
~~если меньше~~, то
если сила больше, то конечная ск-ть,
например.

Это с касательной компонентой

протекания
С норм-ой комп-ой усл-ие ~~проникания~~ жидкости через
горную породу. Например,
закон Дарси.

На боковой границе для проппанта:

касат. к-н: то же, что и с ж-тью (своеобр-ое
усл.-ие
прилипания)

Норм. сост-ая: усл.-ие непроницаемости, но есть
разница между нижней и верхней
границами (из-за силы тяжести)

Сверху задаём давление смыкания
горной породы

Снизу нулевая ск-ть

Рассмотрели постановку двухфазной задачи

Пишем ур-ие уравн-ия

св-в
И затем в зав-ти от м-ла и НУ, ГУ
(опр. соотн) (геометрия)

(ре ставим
полную
замкнутую
задачу.)

19

4.2 Баланс энергии в общем виде

Баланс энергии.

$$\underbrace{(E)^{\cdot}}_{\text{изм-ие полной энергии системы}} = \underbrace{N_e}_{\text{мощ-ность внеш-них воз-действий}} + \underbrace{Q}_{\text{ск-ть подвода энергии в систему}}$$

$E = K + U$ ← внутренняя (пот. энергия, зависит от взаимного расп-ия между частицами)

↑ кинетичес-кая (з-т от ск-ей)

Интуитивно понятный способ, но он не очень правильный.

Почему? Пытаемся постр. картину мира с помощью формул. Проблема в том, что не понятно, что вкл-ть в кин. энергию. Внутри тела есть мн-во разных дв-ий.

 $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega}$

Энергию кол-ий атомов не вкл-ем в модель.

В кин. энергию попадут те степени свободы, которые мы учитывали при записи других ур-ий (баланс кол-ва дв-ия и баланс момента)

Таким образом, весь остаток отправляется в U (т.е. U – та часть энергии, которая остаётся при вычитании K с учётом рассм.-ых ст. св.)

20

Несколько подходов описания газов: кин-ая теория газов
VS
классическая термодинамика

Что отн-ся к K и U зависит от выбранной нами модели.

Хотим ур-ия для объёма => нужны аддитивные по объёму величины

$$\left.\begin{aligned} &k = \frac{K}{V} = \frac{1}{2}\rho v^2 \text{ — аддитивна по объёму} \\ &\frac{1}{2} v^2 \text{ — аддитивна по массе} \end{aligned}\right\} \text{удельные х-ки}$$

U аддитивна по объёму? Принимаем за постулат попарную аддитивность.

$$u = \frac{U}{V}$$

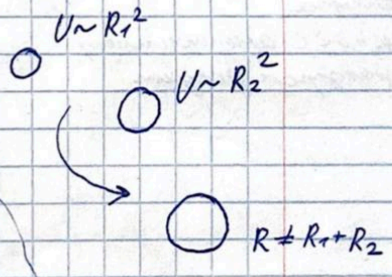
(можем суммировать по объёму)

Принимаем также, что U аддитивна по массе (постулат):

$$U = \int_V \rho u \, dV$$ — более серьёзное ограничение — не всегда верно

Правильнее говорить, что внутренняя энергия аддитивна по числу частиц.

∡ в конце курса



масса не изм-ся
а U изменилась

21

4.3 Баланс энергии для одной какой-либо фазы

Для какой-либо фазы:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho u\right)dV}_{\text{изменение полной энергии}} = \underbrace{\int_V \rho\,\underline{f}\cdot\underline{v}\,dV}_{\text{мощность от объёмных сил}} + \underbrace{\int_{\partial V} \overbrace{\underline{f}_n}^{\underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}}\cdot\underline{v}\,dS}_{\text{мощность от поверхностных сил}} +$$

$$+\underbrace{\int_V \rho q\,dV}_{\text{подвод энергии в систему (объёмный)}} - \underbrace{\int_{\partial V}\underline{n}\cdot\underline{h}\,dS}_{\text{подвод энергии через поверхность}} - \underbrace{\int_{\partial V}\underline{n}\cdot\overbrace{\underline{v}\,\rho\left(\frac{1}{2}v^2+u\right)}^{\text{поток частиц извне}}dS}_{\text{подвод энергии через поверхность за счёт притока частиц внутрь объёма}}$$

q - ск-ть подвода энергии в ед-цу массы ~~[illegible]~~

$\underline{h}$ - поток энергии через пов-ть

$\underline{n}$ - внешняя нормаль к пов-ти

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho}{dt}v^2+\rho\frac{d\underline{v}}{dt}\cdot\underline{v}+\boxed{\frac{d\rho}{dt}u}+\rho\frac{du}{dt} = \rho\,\underline{f}\cdot\underline{v}+$$

$$+(\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}})\cdot\underline{v}+\underline{\underline{\sigma}}\cdot\cdot(\nabla\underline{v})^s+$$

$$+\rho q-\nabla\cdot\underline{h}-\nabla\cdot(\underline{v}\rho)\left(\frac{1}{2}v^2\right)-\rho\underline{v}\cdot(\nabla\underline{v})\cdot\underline{v}-$$

$$\boxed{-\nabla\cdot(\underline{v}\rho)\,u}+\rho\underline{v}\cdot\nabla u$$

Двойное ск-ое с антисимметр. тензором уходит

22

5 Лекция 15.03.2022. Раздел 2. Среды с вращательными степенями свободы

5.1 Баланс энергии для двухкомпонентной среды

$$\rho \frac{\delta u}{\delta t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot\cdot (\nabla \underline{v})^s + \rho q - \nabla \cdot \underline{h}$$

(на след-ей паре для многокомп-ых сред)

15.03.22

Для многокомпонентных сред баланс энергии.

$$\cancel{\frac{d}{dt}\int_V (\rho_1 v_1^2 + \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2)\, dV = \int_V \rho_1 q_1\, dV + \int_V}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 u_1 + \overline{\rho u_{21}}\right) dV$$

т.к. есть потенциал-ная энергия вз-ия между частицами разных фаз

$$= \int_V \rho_1 q_1\, dV + \int_V \rho_1 \underline{f}_1 \cdot \underline{v}_1\, dV + \int_{\partial V} \underline{f}_n \cdot \underline{v}_1\, dS - \int_{\partial V} \underline{n} \cdot \underline{h}\, dS -$$

добавочные в двухфазном случае

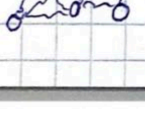
$$- \int_{\partial V} \underline{n} \cdot \underline{v}_1 \rho_1 \left(\frac{1}{2} v_1^2 + u_1\right) dS + \int_V \rho \underline{f}_{12} \cdot (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)\, dV +$$

в двухфазной среде объёмная сила вз-ия между фазами

тепло, кот. идёт от одной фазы к другой (от второй в первую)

$$+ \int_V Q_{21}\, dV$$

часть $\overline{u}_{12}$ должны отнести к одной фазе, другую часть – к другой фазе



$$\rho \overline{u}_{12} = k(\Delta x)^2$$

при суммировании двух фаз не должны уничтожаться, а должно получиться

23

это не коэф. теплопроводности одной фазы, а то, как одна фаза отдаёт тепло, а другая его воспринимает

$$Q_{21} = -\varkappa_{12}\,\Delta T \qquad ,\ д.б.\ \Delta T < 0$$

$$Q_{21} = -\varkappa_{12}\,(T_1 - T_2)$$

Можно разделить энергии $\rho \overline{u}_{12}$ поровну; а можно пропорционально массе каждой фазы: $\rho_1 \overline{u}_{12}$ и $\rho_2 \overline{u}_{21}$

При суммировании Q взаимоуничтожатся, а ρq – общий подвод тепла извне.

Выражение для эффективной u тоже будет непростым; и для потока $\underline{h}$ эффективного тоже непростым

Введём понятия температуры и энтропии

Возможный подход.

Разложим тензор напр-ий: $\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_e}_{\text{не зависит от ск-ей}} + \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_f}_{\text{диссипативная часть (зависит от ск-ей)}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\tau}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_e \cdot\cdot (\nabla \underline{V})^s = \underbrace{\frac{p}{\rho^2}\dot{\rho}}_{\text{(связано с изменением объёма/пл-ти)}} + \underbrace{(\quad)\cdot\cdot\dot{\underline{\underline{\Delta}}}}_{\text{(связано с изм-ем формы)}}$$

← тензор изм-ия формы

$$\underline{\underline{\sigma}}_f \cdot\cdot (\nabla \underline{V})^s + \rho q - \nabla\cdot\underline{h} = \rho T \dot{\eta}$$

← указывает на аддитивность энтропии

24

T – тем-ра
η – энтропия
} так вводим

Но как ввести эффективную темп-ру?

Если есть смесь горячих и холодных частиц (фаз)

Вопрос остаётся открытым; нет устоявшейся концепции.

Для большинства задач баланс энергии не рассматривается.

25

5.2 Различие между спинорным движением и вращением окрестности среды как твёрдого целого

(2) Среды с вращ-ными степенями св-ды. — 15.03.22 (продолжение)

Вспомнить ДТТ и среды с микростр-ой.

Основная идея всего курса: в мех-ке есть несколько основных балансовых соотношений — массы, кол-ва движения, момента, энергии + опр-ие ур-ия, которые должны быть сф-ны для конкретного заданного м-ла и замыкают систему ур-ий

Чтобы описывать более сл-ые процессы необходимо вводить дополнительные ст. свободы; в 1-ой части смотрели вз-ия фаз; во 2-ой части разрешим частицам вращаться дополнительно независимо.

Есть разные типы вр-ия:

1) трансляционное вращение (изм-е пол-я тела в пр-ве)

$$\nabla\cdot\underline{V} = (\nabla\cdot\underline{V})^S + \overbrace{(\nabla\cdot\underline{V})^A}$$

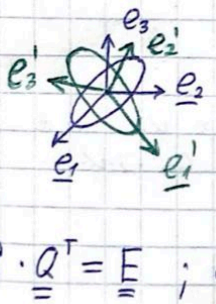
х-т вращение скр-ти точки как единого целого вокруг чего-то

$$(\nabla\cdot\underline{V})^A = \frac{1}{2}\left(\nabla\cdot\underline{V} - \underline{V}\cdot\nabla\right) = \underset{\uparrow}{\underline{\tilde{\omega}}}\times\underline{\underline{E}}$$

сопутствующий вектор антисимметричного тензора $(\nabla\cdot\underline{V})^A$

$\underline{\tilde{\omega}}$ — угл-ая ск-ть, связанная с перемещением

2) вращение вокруг своей оси (спинорное движ-ие, изм-ие ориентации)



$$\underline{\underline{Q}} = \underline{e}_k'\underline{e}_k \qquad \underline{a} = a_m\underline{e}_m$$

$\underline{\underline{Q}}$ - тензор поворота

$$\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{a} = \underline{e}_k'\underbrace{\underline{e}_k\cdot a_m\underline{e}_m}_{\delta_{km}} = a_k\underline{e}_k'$$

$\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{E}}$; $\det\underline{\underline{Q}} = 1$ (ортогональный тензор) 26

$\underline{\underline{Q}}^T$ поворот в обратном $\underline{\underline{Q}}$ направлении

Последовательно $\underline{\underline{Q}}$ и $\underline{\underline{Q}}^T$ даёт отсутствие поворота.

Продиф-ем рав-во $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{E}}$

$$\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T = 0$$

Левый тензор спина: $\underline{\underline{S}} = \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$

$$\underline{\underline{S}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T \Rightarrow \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{S}}^T = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S}}$$ - антисимметричный

$\Rightarrow$ 3 компоненты $\Rightarrow$ можно сопоставить 1 вектор

(в матрице на диагонали нули:
$$\begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}$$
)

$$\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{S}} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{E}} \Rightarrow \dot{\underline{\underline{Q}}} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}}$$ - ур-ие Пуассона

$\underline{\underline{S}}_r = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}$ - правый тензор спина

$\underline{\underline{S}}_r = \underline{\Omega} \times \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \times \underline{\Omega}$, где $\underline{\Omega}$ - правая угл-ая ск-ть

$$\Rightarrow \dot{\underline{\underline{Q}}} = \underline{\underline{Q}} \times \underline{\Omega}$$

27

$$\underline{\underline{S}} = \underbrace{\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{Q}}^{T}}_{\underline{\underline{E}}}\cdot\underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}}\cdot\underline{\underline{Q}}^{T}}_{\underline{\underline{S}}}\cdot\underbrace{\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{Q}}^{T}}_{\underline{\underline{E}}} = \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{S_r}}\cdot\underline{\underline{Q}}^{T}$$

$$\underline{\underline{Q}}\cdot\underbrace{\underline{\underline{Q}}^{T}\cdot\dot{\underline{\underline{Q}}}}_{\underline{\underline{S_r}}}\cdot\underbrace{\underline{\underline{Q}}^{T}\cdot\underline{\underline{Q}}}_{\underline{\underline{E}}}\cdot\underline{\underline{Q}}^{T}$$

Без док-ва: $\underline{\omega} = \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\Omega}$

$$\underline{\underline{S}}_{\times} = \left(\dot{\underline{\underline{Q}}}\cdot\underline{\underline{Q}}^{T}\right)_{\times} = \left(\underline{\omega}\times\underline{\underline{E}}\right)_{\times} = \left(\underline{\omega}\times\underline{e}_k\right)\times\underline{e}_k =$$

$$= -\underline{e}_k\times\left(\underline{\omega}\times\underline{e}_k\right) = -\underline{\omega}\,\underline{e}_k\cdot\underline{e}_k + \underline{e}_k\cdot\underline{\omega}\,\underline{e}_k =$$

$$= -3\underline{\omega} + \underline{\omega} = -2\underline{\omega}$$

$$\underline{\omega} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\underline{\underline{Q}}}\cdot\underline{\underline{Q}}^{T}\right)_{\times}$$

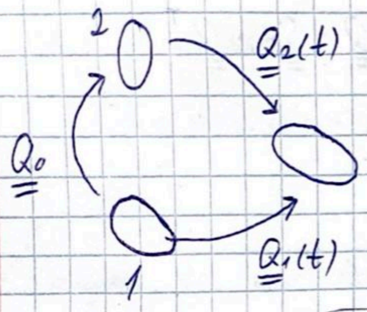
$$\underline{\Omega} = -\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{Q}}^{T}\cdot\dot{\underline{\underline{Q}}}\right)_{\times}$$

$\underline{\underline{Q}} = \underline{e}_k'\underline{e}_k$, e_k не зав-ит от t => дифф-ем только $\underline{e}_k'$

$$\underline{\omega} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\underline{e}}_k'\overbrace{\underline{e}_k\cdot\underline{e}_m}^{\delta_{km}}\underline{e}_m'\right)_{\times} = -\frac{1}{2}\,\dot{\underline{e}}_k'\times\underline{e}_m'$$

$$\underline{\Omega} = -\frac{1}{2}\left(\underline{e}_k\underline{e}_k'\cdot\dot{\underline{e}}_m'\underline{e}_m\right)_{\times} = -\frac{1}{2}\left(\underline{e}_k'\cdot\dot{\underline{e}}_m'\right)\overbrace{\underline{e}_k\times\underline{e}_m}^{=\varepsilon_{kms}\underline{e}_s}$$

28



1 и 2 - отсчётные положения

$$\underline{\underline{Q}}_1 = \underline{\underline{Q}}_2 \cdot \underline{\underline{Q}}_0$$

$$\underline{\omega}_1 = -\frac{1}{2}\left(\dot{\underline{\underline{Q}}}_2 \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}_0^{T}}_{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{Q}}_2^{T}\right)_\times = -\frac{1}{2}\left(\dot{\underline{\underline{Q}}}_2 \cdot \underline{\underline{Q}}_2^{T}\right)_\times = \underline{\omega}_2$$

$\underline{\underline{Q}}_0$ не зав-ит от t (это фикс. поворот)

Почему угл.-ая ск-ть $\underline{\omega}$ наз-ся истинной?

Потому что она не зависит от того, какое отсчётное положение выбрано.

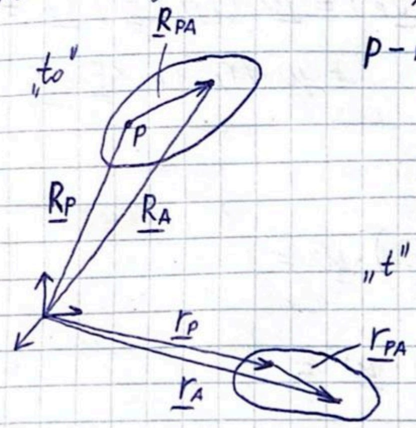
А $\underline{\Omega}$ будет разным в разных отсчётных положениях.

29

6 Лекция 22.03.2022.

6.1 Тензоры инерции твёрдого тела

Будем получать тензор инерции для абс. тв. тела | 22.03.22



P – полюс

$$\underline{r}_{PA} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{R}_{PA}$$

$$\underline{r}_A = \underline{r}_P + \underline{r}_{PA}$$

Сейчас рассм-ем обычное материальное описание

ск-ть поворота

$$\underline{v}_A = \underline{v}_P + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{R}_{PA} = \underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underbrace{\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{R}_{PA}}_{\underline{r}_{PA}}$$

$$\underline{v}_A = \underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}$$

Кинетич. энергия:

$$K = \int\limits_V \frac{1}{2} \rho v_A^2 dV = \frac{1}{2} \int\limits_V \rho (\underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) \cdot (\underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_V \rho\, \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P dV + \overbrace{\int\limits_V \rho\, \underline{v}_P \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) dV}^{1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \int\limits_V \rho (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) dV}_{2} \; =$$

30

$$(1):\ \underline{v}_P\cdot(\underline{\omega}\times\underline{r}_{PA}) = \underline{\omega}\cdot(\underline{r}_{PA}\times\underline{v}_P) = \underline{\omega}\cdot(\underline{r}_{PA}\times\underline{\underline{E}})\cdot\underline{v}_P =$$

$$= \underline{\omega}\cdot(\underline{r}_A-\underline{r}_P)\times\underline{\underline{E}}\cdot\underline{v}_P$$

$$(2):\ (\underline{\omega}\times\underline{r}_{PA})\cdot(\underline{\omega}\times\underline{r}_{PA}) =$$

$$= -\underline{\omega}\cdot(\underline{\underline{E}}\times\underline{r}_{PA})\cdot(\underline{r}_{PA}\times\underline{\underline{E}})\cdot\underline{\omega} =$$

$$= -\underline{\omega}\cdot(\underline{r}_{PA}\times\overbrace{\underline{\underline{E}}\cdot\underline{\underline{E}}}^{\underline{\underline{E}}}\times\underline{r}_{PA})\cdot\underline{\omega} =$$

$$= -\underline{\omega}\cdot(\underline{r}_{PA}\underline{r}_{PA}-(\underline{r}_{PA}\cdot\underline{r}_{PA})\underline{\underline{E}})\cdot\underline{\omega}$$

$$\ominus\ \frac{1}{2}Mv_P^2 + \underline{\omega}\cdot\left[\int_V\rho\underline{r}_A\,dV - \int_V\rho\,dV\cdot\underline{r}_P\right]\times\underline{\underline{E}}\cdot\underline{v}_P +$$

$$+\frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot\int_V\rho\left[(\underline{r}_{PA}\cdot\underline{r}_{PA})\underline{\underline{E}}-\underline{r}_{PA}\underline{r}_{PA}\right]dV\cdot\underline{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2}Mv_P^2 + \underline{\omega}\cdot\underbrace{\boxed{\left[M(\underline{r}_C-\underline{r}_P)\right]\times\underline{\underline{E}}}}_{=\underline{\underline{B}}}\cdot\underline{v}_P +$$

$$+\frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot\underbrace{\boxed{\int_V\rho\left[\underline{r}_{PA}\cdot\underline{r}_{PA}\,\underline{\underline{E}}-\underline{r}_{PA}\underline{r}_{PA}\right]dV}}_{=\underline{\underline{J}}}\cdot\underline{\omega}$$

31

$\underline{\underline{J}}$ - тензор инерции тв. тела (показывает распределение массы по телу)

$\underline{\underline{B}}$ - дополнительный тензор инерции (антисимметричный)
(возникает в тех случаях, когда полюс не совпадает с центром масс)
(грубо говоря, показывает доп. кин-ую энергию, которая возникает от вращения массы, сосредоточенной в центре масс, относительно полюса)

$$K = \underbrace{\frac{1}{2} M \underline{V}_P^2}_{\text{кин. эн-ия тела как мат-ой точки, когда вся масса помещена в полюс}} + \underbrace{\underline{V}_P \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\omega}}_{\text{плата за то, что полюс не совпадает с ц.м}} + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega}}_{\text{отвечает за вращение всего тела как единого целого}}$$

Видим, что кин-ая энергия K есть кв-ая форма ск-ей (теперь есть и трансляционные, и вращательные степени св-ды)

Теперь будем рассм-ть пр-ое тело, у которого

$K = K(\underline{V}, \underline{\omega})$ и это кв. форма:

$$K = \frac{1}{2} \rho \underline{V}^2 + \underline{V} \cdot (\rho \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\omega} + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot (\rho \underline{\underline{J}}) \cdot \underline{\omega}$$

Пусть теперь $\underline{\underline{B}}$ просто коэф-т КФ, т.е. он не обязан быть антисимметричным.

32

6.2 Движение неклассической частицы по инерции

Пример

Возьмём $\underline{\underline{B}} = q\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{J}} = j\underline{\underline{E}}$ – шаровые

(рассм-ем тело-точку)

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + q\underline{v}\cdot\underline{w} + \frac{1}{2} j w^2$$

Кол-во дв-я = производная от K по $\underline{v}$.

$$(1)\quad \underline{K}_1 = \frac{dK}{d\underline{v}} = m\underline{v} + q\underline{w} \underset{\text{сохр-ие кол-ва дв-ия}}{=} m\underline{v}_0 + q\underline{w}_0 = a\underset{\text{орт кол-ва дв-ия}}{\underline{e}}$$

Момент кол-ва дв-ия:

$$(2)\quad \underline{K}_r^o = \underline{r}\times\underline{K}_1 + \underbrace{\frac{dK}{d\underline{w}}}_{\text{динамический спин}} = \underbrace{\underline{r}\times(m\underline{v}+q\underline{w}) + q\underline{v} + j\underline{w}}_{(*)} \underset{\text{сохр-ие момента кол-ва дв-ия}}{=}$$

$\underline{r}(0)=0$

$$= q\underline{v}_0 + j\underline{w}_0$$

Теперь необходимо реш-ть полученную систему ур-ий и найти ск-ть и угл-ую ск-ть

из (2)

0 (из-за отс. ск.)

$$\text{Дифф-ем } (*):\quad \underline{v}\times(m\underline{v}+q\underline{w}) + \underline{r}\times\underset{\text{сохр-ие кол-ва дв-ия}}{(m\underline{v}+q\underline{w})^{\cdot}} + q\dot{\underline{v}} + j\dot{\underline{w}} = 0$$

33

$$q\underline{V}\times\underline{\omega} + q\dot{\underline{V}} + j\dot{\underline{\omega}} = 0 \quad (2*)$$

Из (1): $m\underline{V} + q\underline{\omega} = m\underline{V_0} + q\underline{\omega_0} = a\underline{e}$

$$\underline{V} = \frac{a}{m}\underline{e} - \frac{q}{m}\underline{\omega} \quad ; \quad \dot{\underline{V}} = -\frac{q}{m}\dot{\underline{\omega}}$$

Подставляем $\underline{V}$ и $\dot{\underline{V}}$ в (2*):

$$\frac{qa}{m}\underline{e}\times\underline{\omega} - \frac{q^2}{m}\underline{\omega}\times\underline{\omega} = \frac{q^2}{m}\dot{\underline{\omega}} - j\dot{\underline{\omega}} = \frac{q^2 - jm}{m}\dot{\underline{\omega}}$$, т.е

$$\dot{\underline{\omega}} = \alpha\,\underline{e}\times\underline{\omega}, \text{ где } \alpha = \frac{qa}{q^2 - jm} \quad (3*)$$

Будем искать реш-ие в виде:

$$\underline{\omega} = \underline{\underline{Q}}(\varphi(t)\underline{e})\cdot\underline{\omega_0}$$

(т.к. $\dot{\underline{\underline{Q}}}(\varphi(t)\underline{e}) = \dot{\varphi}(t)\underline{e}\times\underline{\underline{Q}}(\varphi(t)\underline{e})$)

Тогда
$$\dot{\underline{\omega}} = \dot{\varphi}(t)\underline{e}\times\underbrace{\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\omega_0}}_{=\underline{\omega}} \quad (3**)$$

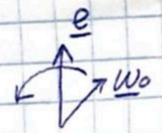
Тогда, приравнивая (3*) и (3**), получаем

$$\dot{\varphi}\,\underline{e}\times\underline{\omega} = \alpha\,\underline{e}\times\underline{\omega} \Rightarrow \varphi = \alpha t$$

Сл-но, $\underline{\omega} = \underline{\underline{Q}}(\alpha t\underline{e})\cdot\underline{\omega_0}$, т.е. угл.-ая ск-ть вращается вокруг орта кол-ва дв-ия $\underline{e}$

$\underline{\omega_0}$ — угл. ск-ть тела-точки в нач. момент времени

34



ось поворота не изменяется при повороте

Вернёмся к ск-ти:

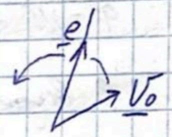
$$\underline{\underline{Q}}(\alpha t\underline{e})\cdot\underline{e} = \underline{e}$$

$$\underline{V} = \frac{a}{m}\underline{e} - \frac{q}{m}\underline{w} = \frac{1}{m}\left(a\underline{e} - q\underline{\underline{Q}}(\alpha t\underline{e})\cdot\underline{w_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\underline{\underline{Q}}(\alpha t\underline{e})\cdot\left(a\underline{e} - q\underline{w_0}\right) = \underline{\underline{Q}}(\alpha t\underline{e})\cdot\underline{V_0}$$

из (1)

Сл-но, для ск-ти верна та же картина:



Из (1): $$\underline{V} = \underbrace{\frac{a}{m}\underline{e}}_{\text{постоянная составляющая}} - \underbrace{\frac{q}{m}\underline{w}}_{\text{вращ-ая компонента}}$$

$\underline{V_0} \perp \underline{e}$ => дв-ие по окр-ти

$\underline{V_0}$ не $\perp \underline{e}$ => дв-ие по спирали

Тоже из (1): $$\underline{V} = \underline{V_0} + \frac{q}{m}\left(\underline{w_0} - \underline{w}\right)$$

35 Например, по спирали дв-ся электрон => теория даёт надежду успеха при описании более сложных (в частности, электромагнитных) явлений

7 Лекция 29.03.2022.

7.1 Баланс массы, количества движения и кинетического момента для микрополярной среды

Вернёмся к сплошным средам; будем ∡ такие среды, в которых частицы обладают и поступательными, и вращ-ными ст-ями свободы.

Как ввести инерционные и кинематические х-ки такой системы?

Инерционные = ρ, m и массовая пл-ть тензора инерции.

Кинематические = угл-ые и трансляционные ск-ти.

Выбор способа описания (мат-ое или пр-ое) зависит от рассматриваемой среды.

Материальное описание хорошо работает в тв. телах (т.е. когда соседние точки ост-ся соседями на протяжении всего времени дв-ия), когда искл-ся перемешивание, деление и слипание частиц.

В мат-ом описании можно переходить к частным производным; в отличие от пространственного, там всё равно будут конвективные сл-ые.

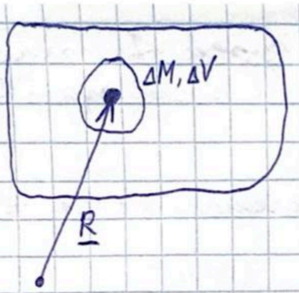
в м-ом описании (=> большое кол-во аналитических реш-ий в теории упругости)

$$\frac{d}{dt}\varphi(\underline{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi\Big|_{\underline{R}}$$

$\parallel$ ← в пр-ом описании (=> небольшое кол-во аналитических реш-ий в гидродинамике. Есть аналитика для течений Куэтта и Пуазейля – и это практически всё; всё остальное реш-ся численно)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \underline{V}\cdot\nabla\varphi$$

36



$$\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V} \qquad \rho = \lim_{d\to 0} \frac{M}{V}$$

d - хар-ный размер рассматриваемого объёма

$$\underline{\underline{J}} = \frac{\Delta \underline{\underline{J}}}{\Delta V} \qquad \underline{\underline{J}} = \lim_{d\to 0} \frac{\underline{\underline{J}}}{V}$$

Но $\Delta \underline{\underline{J}} \sim \underline{r}_{PA}^2$ $(r_{PA} \le d)$, т.е. $\dfrac{\Delta \underline{\underline{J}}}{\Delta V} \xrightarrow[d\to 0]{} \infty$

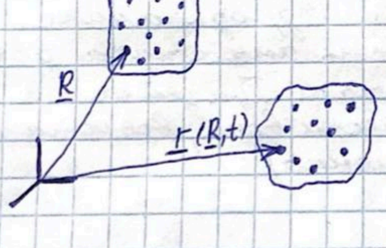
характерный размер

Таким образом, при матер-ом описании введение тензора инерции внутренне противоречиво, но закрывают на это глаза.

В теории микрополярных сред в МО всегда тензор инерции вводится аналогично твёрдому телу.

29.03.22 Сегодня получим балансовые соотношения в рамках мат-ого описания.

Все соотношения ф-ся для материального объёма



$$\frac{d\varphi(\underline{R},t)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\Big|_{\underline{R}}$$

37

Мат-ный объём всегда состоит из одних и тех же точек (сам объём деф-ся, дв-ся, поворач-ся)

некая удельная по объёму величина

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \varphi(\underline{r},t)\,dV \;\textcircled{=}$$

просто так производную под интеграл внести не можем (т.к. объём з-т от времени)

должна стоять ск-ть центра масс

$$\frac{d\varphi(\underline{r}(\underline{R},t))}{dt} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\underline{r}} + \underline{V}\cdot\nabla\varphi$$

(исп-ли только пр-ло диф-ия сложной ф-ии)

(действительно, в м-ом описании полная и материальная пр-ые совпадают)

используем транспортную теорему

$$\textcircled{=} \int\limits_{V(t)} \left[\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\underline{r}} + \nabla\cdot(\underline{V}\varphi)\right]dV =$$

$$= \int\limits_{V(t)} \Big[\underbrace{\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\underline{r}} + \underline{V}\cdot\nabla\varphi}_{\frac{d\varphi}{dt}} + \varphi\,\nabla\cdot\underline{V}\Big]dV$$

снова по транспортной теореме

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V}\rho\,dV = 0 \quad (\text{т.к. масса не изм-ся}) \Rightarrow \int\limits_{V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{V})\right] = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{V}) = 0 \quad ; \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\,\nabla\cdot\underline{V} = 0$$

(баланс массы)

38

Теперь попробуем получить ф-лу для величины, удельной по массе:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho\varphi\, dV \overset{\text{по транспортной теореме}}{=} \int\limits_{V(t)} \left[\frac{d(\rho\varphi)}{dt} + \nabla\cdot(\rho\varphi\underline{v}) \right] dV =$$

$$= \int\limits_{V(t)} \left[\frac{d\rho}{dt}\varphi + \rho\frac{d\varphi}{dt} + \nabla\cdot(\rho\underline{v})\varphi + \rho\underline{v}\cdot\nabla\varphi \right] dV =$$

баланс массы

$$= \int\limits_{V(t)} \rho\frac{d\varphi}{dt}\, dV$$

Хитрое выр-ие: производную можем перебрасывать через знак интеграла, если φ - это величина, удельная по массе. И при этом дифференцируется только φ.

Баланс кол-ва движения (будем рассматривать обычную ч-цу, бол-ую вращ. степенями свободы, но без перекрёстного сл-ого с $\underline{\underline{B}}$)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V} \rho\underline{v}\, dV = \int\limits_{V} \rho\underline{f}\, dV + \int\limits_{\partial V} \underline{f}_n\, dS$$

уд-ая х-ка по массе

поверхностные силы

$$\underline{f}_n = \underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}$$

~~новая теорема~~ $\downarrow$ по транспортной теореме

$\downarrow$ по т Г.-О.

$$\int\limits_{V} \rho\frac{d\underline{v}}{dt}\, dV = \int\limits_{V} \rho\underline{f}\, dV + \int\limits_{V} \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}\, dV$$

39

$$\int_V \left[\rho \frac{d\underline{V}}{dt} - \rho \underline{f} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right] dV = 0$$

$$\rho \frac{d\underline{V}}{dt} = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

уд-ая по объёму

уд-ая по массе

$$\rho K = \frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{1}{2} \underline{w} \cdot \rho \underline{\underline{J}} \cdot \underline{w}$$

Баланс момента кол-ва дв-ия:

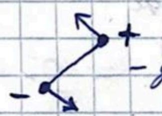
$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \left[\underline{r} \times \rho \underline{V} + \underbrace{\rho \underline{\underline{J}} \cdot \underline{w}}_{\text{собств-ый дин-ий спин}} \right] dV =$$

$$\rho \underline{K_2} = \frac{d(\rho K)}{d\underline{w}} = \rho \underline{\underline{J}} \cdot \underline{w}$$

(есть производная от кин-ой энергии по угл-ой ск-ти)

$$= \underbrace{\int_V \underline{r} \times \rho \underline{f} \, dV}_{\text{момент от объёмной силы (внешней)}} + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{r} \times \underline{f_n} \, dS}_{\text{от вн-ей пов-ой силы}} + \underbrace{\int_V \rho \underline{m} \, dV}_{\text{объёмный внешний момент}} + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{M_n} \, dS}_{\text{моменты (поверхностные), которые действуют от отброшенной части}}$$

$$\underline{r} \times (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) = - \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \times \underline{r}$$



$\underline{m}$ – момент, действующий внутри на точки, заставляя их вращ-ся

$\underline{M_n} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{M}}$, где $\underline{\underline{M}}$ – тензор моментных напряжений (хотим повернуть одну частицу отн. другой, но есть заметное сопротивление)

40

Тогда, по тр-ой теореме и теореме Г-О:

$$\cancel{\frac{d\underline{r}}{dt}}^{\underline{V}\;\to 0} \times \rho\underline{V} + \underline{r}\times\rho\frac{d\underline{V}}{dt} + \rho\frac{d(\underline{\underline{J}}\cdot\underline{\omega})}{dt} =$$

$$= \underline{r}\times\rho\underline{f} - \underbrace{\nabla\cdot(\underline{\underline{\sigma}}\times\underline{r})}_{-(\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}})\times\underline{r} - \underline{\underline{\sigma}}\times\cdot(\underline{r}\nabla) = \;= \underline{r}\times(\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\sigma}}_{\times}} + \rho\underline{m} + \nabla\cdot\underline{\underline{M}}$$

Заметки на полях:

$$-\underline{\underline{\sigma}}\times\cdot(\underline{r}\nabla) = -\underline{a}\,\underline{b}\times\cdot\underline{e}_k\underline{e}_k = -(\underline{b}\times\overbrace{\underline{e}_k)(\underline{e}_k}^{\underline{\underline{E}}}\cdot\underline{a}) = -\underline{b}\times\underline{a} =$$

$$= \underline{\underline{\sigma}}_{\times}$$

$$\underline{r}\times\rho\frac{d\underline{V}}{dt} + \rho\frac{d(\underline{\underline{J}}\cdot\underline{\omega})}{dt} = \underline{r}\times\rho\underline{f} + \underline{r}\times(\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\sigma}}_{\times} +$$

$$+ \rho\underline{m} + \nabla\cdot\underline{\underline{M}}$$

баланс кол-ва дв-ия

дин-ий спин

$$\rho\frac{d(\underline{\underline{J}}\cdot\underline{\omega})}{dt} = \underline{\underline{\sigma}}_{\times} + \rho\underline{m} + \nabla\cdot\underline{\underline{M}} \qquad (*)$$

(другими словами, баланс динамического спина)

$$\Downarrow$$

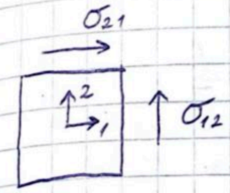
дин-ий спин может изм-ся по трём причинам:

$\rho\underline{m}$ - подвод внешнего момента; $\nabla\cdot\underline{\underline{M}}$ - воздействие окр-их точек;

(сопротивление окр-их частиц повороту данной частицы)

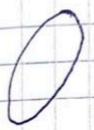
41

$\underline{\underline{\sigma}}_\times \neq 0 \Rightarrow$ тензор напряжений несимметричен



$\sigma_{12} \neq \sigma_{21}$, если $\underline{\underline{\sigma}}_\times \neq 0 \Rightarrow$ объект вращается

$$\frac{d(\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \frac{d\underline{\underline{J}}}{dt} \cdot \underline{\omega} + \underline{\underline{J}} \cdot \frac{d\underline{\omega}}{dt}$$



$\underline{\underline{J}}_0(\underline{R})$

частица не может деф-ся (только вращ-ся)

(сейчас мы рассматриваем теорию микрополярных сред/теорию Коссера)

феноменологически эквивалентна тв. телу

$$\underline{\underline{J}}(\underline{r}, t) = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{R}) \cdot \underline{\underline{Q}}^T$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{J}}(\underline{r}, t) = \frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{R}) \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{R}) \cdot \left(\frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt}\right)^T \ominus$$

Помним, что $\frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}}$, $\underline{\omega}$ - угл. ск-ть тела

$$(\underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}})^T = -\underline{\underline{Q}}^T \times \underline{\omega}$$

$$\ominus\ \underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T \times \underline{\omega} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}} \times \underline{\omega} \quad (**)$$

42

7.2 Баланс энергии для микрополярной среды

В итоге, из (*) получаем:

потерянная ранее плотность

$$\rho \underline{\underline{J}} \cdot \frac{d\underline{\omega}}{dt} = -\rho\underline{\omega} \times \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega} + \underline{\underline{\sigma}}_\times + \rho \underline{m} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}}$$

(ур-ие для нахождения угл-ой ск-ти) - (следствие из баланса динамического спина, если частицы (тела-точки) не могут деформироваться)

Баланс энергии.

$$\frac{d}{dt}\int_V \left[\frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot\rho\underline{\underline{J}}\cdot\underline{\omega} + \rho u \right] dV =$$

$$= \int_V \left[\rho \underline{f}\cdot\underline{V} + \rho\underline{m}\cdot\underline{\omega} \right] dV +$$

ск-ть подвода энергии в ед. массы

$$+ \int_{\partial V} \left[\underset{\underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}}{\underset{\shortparallel}{\underline{f}_n}} \cdot \underline{V} + \underset{\underline{n}\cdot\underline{\underline{M}}}{\underset{\shortparallel}{\underline{M}_n}} \cdot \underline{\omega} \right] dS + \int_V \rho q \, dV - \underbrace{\int_{\partial V} \underline{n}\cdot\underline{h}\, dS}_{\text{через границу}}$$

$$\rho \underline{V}\cdot\frac{d\underline{V}}{dt} + \frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot\rho \overset{0\ (\text{см. } (**))}{\cancel{\frac{d\underline{\underline{J}}}{dt}}}\cdot\underline{\omega} + \rho\frac{d\underline{\omega}}{dt}\cdot\underline{\underline{J}}\cdot\underline{\omega} + \rho\frac{du}{dt} =$$

$$= \rho\underline{V}\cdot\underline{f} + \rho\underline{\omega}\cdot\underline{m} + (\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}})\cdot\underline{V} + \underline{\underline{\sigma}}\cdot\cdot(\underline{V}\nabla) +$$

$$+ (\nabla\cdot\underline{\underline{M}})\cdot\underline{\omega} + \underline{\underline{M}}\cdot\cdot(\underline{\omega}\nabla) + \rho q - \nabla\cdot\underline{h}$$

43

Учитывая →, получаем

$$\underline{w}\cdot\underline{\underline{\sigma}}_\times + \rho\,\underline{w}\cdot\underline{m} + (\nabla\cdot\underline{\underline{M}})\cdot\underline{w} + \rho\frac{du}{dt} =$$

$$= \cancel{\rho\,\underline{w}\cdot\underline{m}} + \underline{\underline{\sigma}}^T\cdot\cdot(\nabla\underline{V}) + \cancel{(\nabla\cdot\underline{\underline{M}})\cdot\underline{w}} + \underline{\underline{M}}^T\cdot\cdot(\nabla\underline{w}) + \rho q - \nabla\cdot\underline{h}$$

Заметки на полях.

$$-\underline{w}\cdot\underline{\underline{\sigma}}_\times = -\underline{w}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = -\underline{a}\cdot\underline{b}\times\underline{w} = -\underline{a}\cdot(\underline{b}\cdot\underline{\underline{E}})\times\underline{w} =$$

$$= -\underline{a}\,\underline{b}\cdot\cdot\underline{\underline{E}}\times\underline{w} = -\underline{\underline{\sigma}}\cdot\cdot(\underline{\underline{E}}\times\underline{w}) = \underline{\underline{\sigma}}^T\cdot\cdot(\underline{\underline{E}}\times\underline{w})$$

(тр-ие T даст минус)

← антисимметр.-ий тензор

Подставляем в ур-ие.

$$\rho\frac{du}{dt} = \underline{\underline{\sigma}}^T\cdot\cdot\underbrace{(\nabla\underline{V} + \underline{\underline{E}}\times\underline{w})} + \underline{\underline{M}}^T\cdot\cdot\underbrace{(\nabla\underline{w})} + \rho q - \nabla\cdot\underline{h}$$

Получили баланс энергии.

мера деф-ии связанная искл-но с вращательными ст-ями свободы (2)

Все возникающие векторные произведения связаны с дополнительными поворотами.

мера деф-ии, связанная с трансляц. деф-ями, относительными поворотами одних частиц по отношению к другим (1)

44

8 Лекция 05.04.2022.

8.1 Линейная теория микрополярной среды

05.04.22

Упростим постановку задачи: рассмотрим случай малых изменений

$$\underbrace{|\underline{u}| \ll 1; \quad \|\nabla \underline{u}\| \ll 1}; \quad |\underline{\theta}| \ll 1; \quad \|\nabla \underline{\theta}\| \ll 1$$

$$\Longrightarrow \quad |\underline{V}| \ll 1 \qquad \nabla = \text{const}$$

$$\underline{V} = \dot{\underline{u}}; \quad \underline{\omega} = \dot{\underline{\theta}}$$

$$\nabla \underline{V} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\omega} = \nabla \dot{\underline{u}} + \underline{\underline{E}} \times \dot{\underline{\theta}} = \Big(\underbrace{\nabla \underline{u} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\theta}}_{\underline{\underline{e}}}\Big)^{\cdot}$$

(см (1) на пред-ей стр.)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = (\nabla \underline{u})^S$$

(в линейной теории упр-ти)

$$\underline{\underline{e}} = (\nabla \underline{u})^S + (\nabla \underline{u})^A + \underline{\underline{E}} \times \underline{\theta}$$

$$(\nabla \underline{u})^A = \frac{1}{2}\Big(\nabla \underline{u} - \underline{u}\nabla\Big) = \underline{\bar{\omega}} \times \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\bar{\omega}} = -\frac{1}{2} \nabla \times \underline{u}$$

(связано с вращ-ым дв-ем как тв-ого тела)

$(\nabla \underline{u})^S$ – классический тензор деф-ий

$\underline{\underline{E}} \times \underline{\theta}$ – собственное вращение тела-точки

$$\nabla \underline{\omega} = \nabla \dot{\underline{\theta}} = \Big(\underbrace{\nabla \underline{\theta}}_{\varkappa}\Big)^{\cdot}$$

(см (2) на пред-ей стр.)

$\varkappa$ (wireless tensor)

(показывает изменение поворота частиц по пр-ву)

45

Подставляем в ЗСЭ (баланс энергии):

трансля-ционная, крутиль-ная

$\underline{\underline{e}}$ и $\underline{\underline{\varkappa}}$ - это две меры деф-ий, которые получили на пред. предыдущ. стр.

$$\rho \dot{u} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{e}}}^T + \underline{\underline{M}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\varkappa}}}^T + \rho q - \nabla \cdot \underline{h}$$

Говорим, что $\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\underline{\underline{\sigma_e}}}_{\text{не з-т от ск-ей}} + \underbrace{\underline{\underline{\sigma_f}}}_{\text{диссипативная часть (зависит от ск-ей)}}$; $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M_e}} + \underline{\underline{M_f}}$

по определению

$$\underline{\underline{\sigma_f}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{e}}}^T + \underline{\underline{M_f}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\varkappa}}}^T + \rho q - \nabla \cdot \underline{h} = \rho T \dot{\eta}$$

В рез-те:

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma_e}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{e}}}^T + \frac{1}{\rho} \underline{\underline{M_e}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\varkappa}}}^T + T\dot{\eta}$$

Можем перейти к св-ой энергии: $f = u - T\eta$, тогда

$$\dot{f} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma_e}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{e}}}^T + \frac{1}{\rho} \underline{\underline{M_e}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\varkappa}}}^T - \eta \dot{T} \Rightarrow f = f(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\varkappa}}, T)$$

Чаще всего рассм-ют изотермические процессы ($T = const$):

$$w = w(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\varkappa}}) \qquad \frac{1}{\rho}\underline{\underline{\sigma_e}} = \frac{dw}{d\underline{\underline{e}}} ; \frac{1}{\rho} \underline{\underline{M_e}} = \frac{dw}{d\underline{\underline{\varkappa}}}$$

упругая энергия деф-ий

46

Наиболее общий вид упругой энергии деф-ий:

$$\rho w = \frac{1}{2}\underline{\underline{e}} \cdot\cdot \overset{4}{\underline{\underline{C}}} \cdot\cdot \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}} \cdot\cdot \overset{4}{\underline{\underline{B}}} \cdot\cdot \underline{\underline{\varkappa}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\varkappa}} \cdot\cdot \overset{4}{\underline{\underline{D}}} \cdot\cdot \underline{\underline{\varkappa}}$$

$[\underline{\underline{e}}] = [\nabla \underline{u} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\theta}]$ - безразм.

$[\underline{\underline{\varkappa}}] = [\nabla \underline{\theta}] = \frac{1}{м}$

$[\overset{4}{\underline{\underline{C}}}] = Па$, $[\overset{4}{\underline{\underline{D}}}] = Па \cdot м^2$

$\overset{4}{\underline{\underline{C}}}$ - жёсткость на трансляции;

$\overset{4}{\underline{\underline{D}}}$ - жёсткость на повороты.

$$[\underbrace{(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1})^{1/2}}_{= l_t}] = м$$ => возникает внутренняя разм-ть длины

⇓

возможность описать новые явления (например, улучшить р-т в задаче Кирша)

Полярные теории позволяют описать поля в окрестности каких-либо неоднородностей (дырок, трещин и т.д.):

$\sigma \sim a \exp\left(-b \frac{x}{l_t}\right)$ (поправка в поле напряжений для микрополярной теории)

47

Итак, полярная теория хорошо описывает поля в окрестности дефектов + ~~умеет~~ позволяет моделировать пограничные слои и поверхностные эффекты.

Если м-л изотропный, то $\overset{4}{\underline{\underline{C}}}$, $\overset{4}{\underline{\underline{B}}}$ и $\overset{4}{\underline{\underline{D}}}$ должны быть изотропны

Кроме того, из усл-ия материальной симметрии

$$\overset{4}{\underline{\underline{B}}} = 0$$

Распишем:

$$\overset{4}{\underline{\underline{C}}} = \lambda \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{E}} + \mu\, \underline{e}_m \underline{\underline{E}}\, \underline{e}_m + (\mu + \kappa)\, \underline{e}_m \underline{e}_n \underline{e}_m \underline{e}_n$$

$$\overset{4}{\underline{\underline{D}}} = \beta_1 \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{E}} + \beta_2\, \underline{e}_m \underline{\underline{E}}\, \underline{e}_m + \beta_3\, \underline{e}_m \underline{e}_n \underline{e}_m \underline{e}_n$$

$$2\rho w = \underbrace{\lambda (tr\, \underline{\underline{e}})^2}_{= (tr\, \underline{\underline{\varepsilon}})^2} + \mu \underbrace{\underline{\underline{e}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{e}}}_{= tr(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}})} + (\mu + \kappa) \underbrace{\underline{\underline{e}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{e}}^T}_{= tr(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}}^T)} +$$

(т.к. след антисимметричных тензоров равен нулю)

$$+ \beta_1 (tr\, \underline{\underline{\varkappa}})^2 + \beta_2\, \underline{\underline{\varkappa}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{\varkappa}} + \beta_3\, \underline{\underline{\varkappa}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{\varkappa}}^T$$

Заметки на полях

$$\underline{e}_m \underline{e}_n \underline{e}_n \underline{e}_m \cdot\cdot A_{ks} \underline{e}_k \underline{e}_s = \underline{e}_m \underline{e}_n A_{ks} (\underbrace{\underline{e}_m \cdot \underline{e}_k}_{\delta_{mk}})(\underbrace{\underline{e}_n \cdot \underline{e}_s}_{\delta_{ns}}) =$$

$$= \underline{e}_m \underline{e}_n A_{mn} = \underline{\underline{A}}$$

48

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(tr\,\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{E}} + \mu\underline{\underline{e}}^T + (\mu+\kappa)\underline{\underline{e}} = \lambda(tr\,\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{E}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \kappa\underline{\underline{e}}$$

(т.к. помним, что $\frac{1}{\rho}\underline{\underline{\sigma}} = \frac{dw}{d\underline{\underline{e}}}$)

↑ отражает связь между вращ-ыми ст.св. и трансляционными напряжениями

$$\underline{\underline{M}} = \beta_1(tr\,\underline{\underline{\varkappa}})\underline{\underline{E}} + \beta_2\underline{\underline{\varkappa}}^T + \beta_3\underline{\underline{\varkappa}}$$

(т.к. помним, что $\frac{1}{\rho}\underline{\underline{M}} = \frac{dw}{d\underline{\underline{\varkappa}}}$)

$[\beta] = Па \cdot м^2$

Разницу между классической и микрополярной теориями можно заметить, когда появляется зав-ть от размера

Пример. Стержень начинаем крутить; измеряем модуль жёсткости на кручение

В классической теории р-ты не будут зависеть от длины стержня (жёсткость = = коэф-т пропорциональности между приложенным моментом и углом поворота)

В полярной теории будет зав-ть от длины, а параметр l_t отражает характерный размер (начиная, с какого диаметра стержня будет расхождение в упругих модулях с классической теорией)

Для стальных стержней разница наблюдается при диаметрах стержня порядка 1 нм

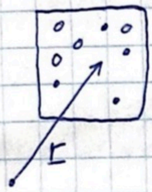
49 Для пен разница проявляется раньше (порядка 1 мкм)

8.2 Инерционные и кинематические характеристики микрочастицы при пространственном описании

Обсудили вид ур-ий при материальном описании.

Далее.

Пространственное описание.



$N(\underline{r}, t)$ - кол-во частиц в объёме, который в данный момент нах-ся в точке набл-ия.

У каждой частицы есть: $\hat{\underline{\underline{J}}}_i, \underline{V}_i, \underline{\omega}_i, m_i$

Как задать эффективные (общие) инерционные х-ки для пространственного объёма?

$m = \frac{1}{N} \sum m_i$ - средняя масса частицы

$\hat{\underline{\underline{J}}} = \frac{1}{N} \sum_i \hat{\underline{\underline{J}}}_i$ - хар-ет средний размер и форму частиц в объёме, а также ориентацию (тип анизотропии материала)

(в мат-ом описании тензор инерции хар-ет распределение массы по объёму, а в пр-ом описании геометрические хар-ки)

$n = \frac{N}{V}$ - пл-ть распр-ия числа частиц

$\rho = \frac{Nm}{V} = nm$

$\underline{\underline{J}} = \frac{1}{Nm} \sum_i \hat{\underline{\underline{J}}}_i$ - геометрический тензор инерции (приходящийся на единицу массы)

50

Тензор инерции на ед-цу объёма:

$$n\,\underline{\underline{\hat{J}}} = \rho\,\underline{\underline{J}}$$

средний тензор инерции, приходящийся на одну частицу

на ед-цу массы

Кол-во дв-ия:

$$\sum_i m_i \underline{V_i} = Nm\,\underline{V}$$ (суммарное кол-во дв-ия ~~вх~~ всех частиц совп-ет с эффективным кол-ом дв-ия)

$$\sum_i \rho_i \underline{V_i} = \rho\,\underline{V}$$ (так вводим определение ск-ти (эфф-ой) для многофазных сред)

Динам-ий спин (собственный кин-ий момент):

$$\sum_i \underline{\underline{\hat{J}_i}}\cdot\underline{\omega_i} = N\,\underline{\underline{\hat{J}}}\cdot\underline{\omega} \Rightarrow \underline{\omega} = \frac{1}{M}\,\underline{\underline{J}}^{-1}\cdot\sum \underline{\underline{\hat{J}_i}}\cdot\underline{\omega_i}$$

Nm (суммарная масса частиц)

Известно, что кол-во дв-ия есть производная кинетической энергии по ск-ти:

$$\underline{K_1} = \frac{\partial K}{\partial \underline{V}}$$

дин-ий спин есть производная кинетической энергии по угл-ой ск-ти:

$$\frac{\partial K}{\partial \underline{\omega}}$$

51

Могли бы ввести кин-ую энергию каждой ч-цы:

$$\hat{K}_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}_i \cdot \underline{\underline{\hat{J}}}_i \cdot \underline{\omega}_i$$

$$K_i = \frac{1}{2} \rho_i V_i^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}_i \cdot \underline{\underline{J}}_i \cdot \underline{\omega}_i$$

Трансляционную и угл-ую ск-ти можем найти:

1) усреднением кол-ва дв-ия и ~~кол.~~ момента кол-ва движ-ия (сделали выше);

2) усреднением кин-ой энергии

1) и 2) будут давать разные ответы в общем случае (ответы будут одинаковые при мат-ом описании)

Мат-ое описание: $\underline{\underline{J}}(\underline{r}, t) = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{R}) \cdot \underline{\underline{Q}}^T$

известный параметр

Пр-ое описание: $\underline{\underline{J}}$ - новая внутренняя переменная (изменяется при попадании в рассматриваемый объём других частиц)

поток инерции через границу

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{\underline{J}} \, dV = \underbrace{- \int_{\partial V} \underline{n} \times \underline{V} \rho \underline{\underline{J}} \, dS}_{\text{поток инерции через границу}} + \underbrace{\int_V \rho \underline{\underline{X}} \, dV}_{\text{источниковый член, описывающий структурные изменения, происходящие в материале}}$$

изм-ие, консолидация и т.д.

52

В лок-ой форме: $\frac{d\underline{\underline{J}}}{dt} = -\underline{v} \times \nabla \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{\chi}}$ - кинетическое ур-ие

$\underline{\underline{\chi}}$ - новый источниковый член, для которого необходимо сформулировать определяющее соотношение.

Кинетическое ур-ие показывает, как тензор инерции изменяется в рассматриваемой (·) пр-ва с течением времени.

$\underline{\underline{\chi}}$ зависит от (·) пр-ва и времени ($\underline{r}$ и t).

Также $\underline{\underline{\chi}}$ может зависеть от
1) температуры;
2) давления (при измельчении частиц);
3) температуры при фазовых переходах;
4) электрического поля для диэлектриков
5) .....

12.04.22

Напишем в простр-ом описании тензор инерции в виде, похожем на его представление в мат-ом описании:

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{Q}}(\underline{r},t) \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{r},t) \cdot \underline{\underline{Q}}^T(\underline{r},t)$$

$$\dot{\underline{\underline{Q}}}(\underline{r},t) = \frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{\underline{Q}} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}}$$

нах-им из осн-ой системы ур-ий (баланс массы, кол-ва дв-ия, дин-ого спина, энергии)

$$\dot{\underline{\underline{J}}} = \underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{J}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0 \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T}_{\underline{\omega} \times \underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}} \times \underline{\omega}} + \underbrace{\underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{J}}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{\chi}}}$$

$\underline{\underline{\chi}}$ - отв-ет за стр-ые изм-ия в среде

53

9 Лекция 12.04.2022.

9.1 Размышления о способах составления определяющих соотношений в различных ситуациях

В лок-ой форме: $\frac{d\underline{\underline{J}}}{dt} = -\underline{v} \times \nabla \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{\chi}}$ — кинетическое ур-ие

$\underline{\underline{\chi}}$ — новый источниковый член, для которого необходимо сформулировать определяющее соотношение.

Кинетическое ур-ие показывает, как тензор инерции изменяется в рассматриваемой (·) пр-ва с течением времени.

$\underline{\underline{\chi}}$ зависит от (·) пр-ва и времени ($\underline{r}$ и t).

Также $\underline{\underline{\chi}}$ может зависеть от
1) температуры;
2) давления (при измельчении частиц);
3) температуры при фазовых переходах;
4) электрического поля для диэлектриков
5) .....

12.04.22

Напишем в простр-ом описании тензор инерции в виде, похожем на его представление в мат-ом описании:

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{Q}}(\underline{r},t) \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{r},t) \cdot \underline{\underline{Q}}^T(\underline{r},t)$$

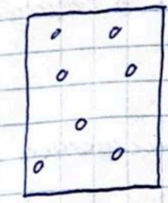
$$\dot{\underline{\underline{Q}}}(\underline{r},t) = \frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{\underline{Q}} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}}$$

нах-им из осн-ой системы ур-ий (баланс массы, кол-ва дв-ия, кин-ого спина, энергии)

$$\dot{\underline{\underline{J}}} = \underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{J}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0 \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T}_{\underline{\omega} \times \underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}} \times \underline{\omega}} + \underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \dot{\underline{\underline{J}}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{\chi}}}$$

$\underline{\underline{\chi}}$ — отв-ет за стр-ые изм-ия в среде

53



репрезентативный объём

(например, при нагреве гранулы расширяются)

$\underline{\underline{J}} = J\underline{\underline{E}}$ - шаровой тензор инерции на ед-цу массы.
(эффективная (средняя) х-ка при изотропном распределении гранул в материале)

Св-во мат-ой объективности: происходящие процессы не должны зав-ть от системы отсчёта, пр-ого или мат-ого описаний

<u>Нагрев:</u> $\underline{\underline{J}}(\underline{r},t) = \underline{\underline{J}}_0(\underline{r})\left(1+\alpha\left(T(\underline{r},t)-T_0\right)\right)^2$ (α - коэф.-т линейного расширения)

$$\underline{\underline{J}}_0(\underline{r}) = \underline{\underline{J}}_0$$

(нет зав-ти от r, т.к. ∃ однородное распр-ие)

Вспоминаем: $\dot{\underline{\underline{J}}} = \underline{\omega}\times\underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}}\times\underline{\omega} + \underline{\underline{\chi}}$

$$\underline{\underline{J}} = J\underline{\underline{E}}, \qquad \underline{\underline{J}} = J\underline{\underline{E}}$$

взаимоуничтожаются ($\underline{\omega}\times\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}\times\underline{\omega}$)

$$\dot{\underline{\underline{J}}} = \frac{dJ}{dt}\underline{\underline{E}} + \cancelto{0}{\underline{v}(\underline{r},t)\cdot\left(\nabla J(\underline{r},t)\right)}\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\chi}} = \chi\underline{\underline{E}}$$

0 (нет трансляц-ых ск-ей, только нагреваем)

$$\chi = 2J_0\left(1+\alpha\left(T(\underline{r},t)-T_0\right)\right)\frac{dT(\underline{r},t)}{dt}$$

54

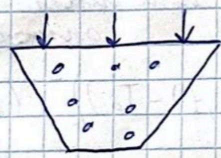
(Ист-ый член получили, исходя из представлений о микроструктуре)

Если частицы = диполи, то при их помещении в эл поле они начнут вращаться

$J \frac{d\omega}{dt} = \underline{m}$

Давление на м-л.

4 эксперимент: давим на мат-л => частицы измельчаются



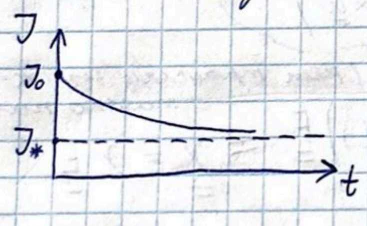
степень сдавления частиц зависит от тензора напряжений

$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{E}} + 2\underbrace{\mu(\underline{\underline{J}})}_{\text{существенно зав-т от размера частиц}}\underline{\underline{d}}$ ← девиатор градиента скорости

$\rho\dot{\underline{v}} = \rho\underline{g} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}$

$\underline{\underline{J}} = J\underline{\underline{E}}$ (ориентация не важна) => $\underline{\underline{\chi}} = \chi\underline{\underline{E}}$

$J_* \neq 0$ – при минимальном размере частицы, до которой м.б. измельчение



← нужно придумать опр-ее соотношение, чтобы реш-е имело такой вид

$\cancel{J = J_* + J_0 e^{\alpha t}}$

$J = J_* + (J_0 - J_*)e^{\alpha t}$

55

Помним, что $\frac{dJ}{dt} = \chi$

$$\chi = \alpha (J - J_*)$$

Пусть $\alpha = k\, tr\, \underline{\underline{\sigma}}$ k - жёсткость частиц.

Пр-ка: чем больше давл-ие, тем больше χ (быстрее измельчатся)

чем больше k, тем больше χ - нелогично!   логично

Пусть тогда $\alpha = \frac{1}{k}\left(tr\, \underline{\underline{\sigma}}\right)$ } есть ф-ия $f(p, I_1)$

Или

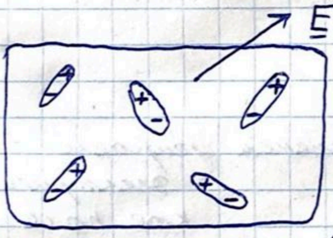
Например, $\alpha = \frac{1}{k}\overbrace{\left(\alpha_1\, tr\, \underline{\underline{\sigma}} + \alpha_2 I_2\right)}^{\text{есть ф-ия } f(p, I_1, I_2)}$; $I_2 = \underline{\underline{\sigma}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{\sigma}}$

(изотропная ф-ия может зав-ть только от инвариантов тензора)

I_1 - частицы хрупкие, надо давить;
I_2 - частицы легче разрушить трением.

Ориентационная поляризация.

$\underline{E} = E\underline{m}$



М-л, состоящий из заряженных диполей.

Внешнее электрическое поле выравнивает диполи, а температурное поле стремится разрушить эту однонаправленность

$$\underline{\underline{J}} = \frac{1}{N}\sum_i \underline{\underline{J}}_i$$

$\underline{\underline{J}}^{sh} = \frac{1}{N}\sum_i J_i^{sh}$ - шаровая часть (хар-ет средний размер частицы и не связана с её ориентацией)   56

$$\underline{\underline{J}}^{dev} = \frac{1}{N} \sum_i J_i^{dev}$$ – девиаторная часть

$$\underline{\underline{J}}^{sh} = \frac{1}{3}\left(tr\, \underline{\underline{J}}\right) \underline{\underline{E}}$$

Диполи жёсткие; меняют только ориентацию, поэтому шаровая часть не зависит от времени

$$\underline{\underline{J}} \sim \int_V \left[(\underline{r} \cdot \underline{r}) \underline{\underline{E}} - \underline{r}\underline{r} \right] dV \qquad tr\, \underline{\underline{J}} \sim 2r^2$$

$$\underline{\underline{J}}_i(t) = \underline{\underline{Q}}_i \cdot \overset{=ab}{\underline{\underline{J}}_i^o} \cdot \underline{\underline{Q}}_i^T; \quad \underbrace{\underline{\underline{Q}}_i^T \cdot \underline{\underline{Q}}_i}_{\underline{\underline{E}}} \overset{tr\, J_i}{\overset{\parallel}{\cdot\cdot}} \underline{\underline{J}}_i^o = tr\, \underline{\underline{J}}_i^o$$

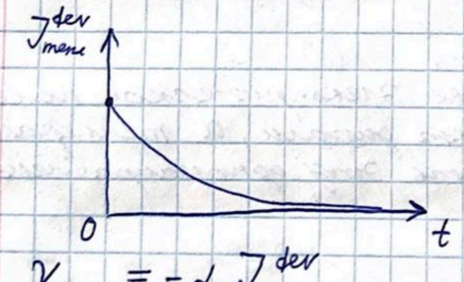
$\Downarrow$ след не зависит от t

Девиаторная часть зависит от того, как частица ориентирована

$\Downarrow$

в данном случае необходимо форм-ть кинетическое ур-ие только для девиатора.

Для теплового дв-ия:



Со временем убираем электрическое поле

$$J^{dev}_{тепл} \to 0$$

$$\underline{\underline{J}}^{dev}_{тепл} = \underline{A}\, e^{-\alpha t}$$

$$\chi_{тепл} = -\alpha J^{dev}_{тепл}$$

(помним, что $\frac{dJ}{dt} = \chi$)

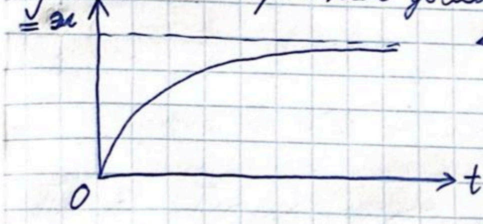
57

Пусть $\alpha = \dfrac{1}{t_r}$ (чем выше t_r, тем ~~б~~ медленнее убывает $\chi_{тепл}$)

t_r – время релаксации $\quad t_r = t_r(T)$ - убыв-ая ф-ия

(с ростом температуры время релаксации падает)

Со временем увеличиваем эл-ое поле



← предельное значение (с одинаковой ориентацией частиц)

равен нулю в изотр. сост (в нач. момент времени)

$$\underline{\underline{\chi}} = \frac{\underline{\underline{E}}}{t \cdot \alpha}\left(\underline{\underline{J}}^{dev}_{тепл} - \underline{\underline{J}}^{dev}_{эл}\right)$$

размерн-ть эл. поля (чтобы сокр-сь с E)

$$\underline{\underline{J}} = J_1(\underline{\underline{E}} - \underline{m}\underline{m}) + J_2\,\underline{m}\underline{m}$$

(после максимального приложения эл. поля получился трансверсально изотропный м-л)

Чтобы опр-ть t_1:

$$\frac{\partial \underline{\underline{J}}^{dev}}{\partial t} = \chi_{тепл} + \chi_{эл}$$

Параметры модели подбираем так, чтобы их можно было бы определить из экспериментов

Реш-ие ур-я – ф-ия $\underline{\underline{J}}(t_r, t_1)$

Далее из эксперимента опр-ем t_r и находим t_1.

58

10 Лекция 26.04.2022.

11 Лекция 17.05.2022.

12 Лекция 24.05.2022.