Муравцев Александр 3630103/70101
Email: muravtsev.aa@edu.spbstu.ru

Контрольная работа 1
Вариант: 23

Задача 23
В шаре радиуса a происходит объёмное тепловыделение постоянной плотности $Q_0 e^{-\alpha\tau}$, а с поверхности тепло отводится потоком постоянной плотности q_0, начальная температура равна 0.
Найти распределение температуры в шаре.

Постановка задачи

$$\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{Q_0 e^{-\alpha\tau}}{k}, \;\; 0 \le r \le a, \;\; \tau \ge 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{Q_0 e^{-\alpha\tau}}{k}; \;\; T|_{r=0} < \infty; \;\; \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{q_0}{k}; \;\; T|_{\tau=0} = 0.$$

Преобразование Лапласа

$$\overline{T}(r,p) = \int\limits_0^\infty T(r,\tau)\, e^{-p\tau} d\tau$$

Задача нахождения трансформанты

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\overline{T}}{dr}\right) - p\overline{T} = -\frac{Q_0}{k}\frac{1}{p+\alpha}, \;\; \overline{T}|_{r=0} < \infty, \;\; \left.\frac{\partial \overline{T}}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{q_0}{kp}$$

Решение уравнения для образа

$$\overline{T}(r,p) = C_1 \frac{e^{-\sqrt{p}r}}{r} + C_2 \frac{e^{\sqrt{p}r}}{\sqrt{p}r} + \frac{Q_0}{kp(p+\alpha)}$$

$$T|_{r=0} < \infty \Rightarrow C_1\sqrt{p} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1\sqrt{p} \Rightarrow \overline{T}(r,p) = -\frac{2C_1}{r}\operatorname{sh}\sqrt{p}r + \frac{Q_0}{kp(p+\alpha)}$$

$$\left.\frac{\partial \overline{T}}{\partial r}\right|_{r=a} = -2C_1 \frac{\sqrt{p}a\operatorname{ch}\sqrt{p}a - \operatorname{sh}\sqrt{p}a}{a^2} = -\frac{q_0}{kp} \Rightarrow C_1 = \frac{q_0 a^2}{2kp\left(\sqrt{p}a\operatorname{ch}\sqrt{p}a - \operatorname{sh}\sqrt{p}a\right)}$$

$$\overline{T}(r,p) = -\frac{q_0 a^2 \operatorname{sh}\sqrt{p}r}{kp\left(\sqrt{p}a\operatorname{ch}\sqrt{p}a - \operatorname{sh}\sqrt{p}a\right) r} + \frac{Q_0}{kp(p+\alpha)}$$

$$\overline{T}(r,p) = -\frac{q_0 a^2 \operatorname{sh}\sqrt{p}r}{kp\left(\sqrt{p}a\operatorname{ch}\sqrt{p}a - \operatorname{sh}\sqrt{p}a\right) r} + \frac{Q_0}{k\alpha}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\alpha}\right)$$

Обратное преобразование Лапласа

Обращение с использованием интеграла Римана-Меллина даёт

$$T = \frac{Q_0}{k\alpha}\left(1 - e^{-\alpha\tau}\right) - \frac{q_0 a^2}{2\pi i \cdot kr}\int\limits_L \frac{e^{p\tau}\operatorname{sh}\sqrt{p}r}{p\left(\sqrt{p}a\operatorname{ch}\sqrt{p}a - \operatorname{sh}\sqrt{p}a\right)} dp$$

Обозначим подынтегральную функцию

$$F(p)=\frac{e^{p\tau}\operatorname{sh}\sqrt{p}r}{p\left(\sqrt{p}a\operatorname{ch}\sqrt{p}a-\operatorname{sh}\sqrt{p}a\right)}$$

и будем исследовать её поведение в особых точках.

Используются формулы

$$\operatorname{sh}\sqrt{p}a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{p}a\right)^{1+2n}}{(1+2n)!}=\sqrt{p}a+\frac{p\sqrt{p}a^3}{6}+\frac{p^2\sqrt{p}a^5}{120}+\dots,$$

$$\operatorname{ch}\sqrt{p}a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{p}a\right)^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{pa^2}{2}+\frac{p^2a^4}{24}+\dots.$$

$$F(p)\underset{p\to 0}{=}\frac{(1+p\tau+\dots)\left(\sqrt{p}r+\dfrac{p\sqrt{p}r^3}{6}+\dfrac{p^2\sqrt{p}r^5}{120}+\dots\right)}{p\left(\sqrt{p}a+\dfrac{p\sqrt{p}a^3}{2}+\dfrac{p^2\sqrt{p}a^5}{24}+\dots-\sqrt{p}a-\dfrac{p\sqrt{p}a^3}{6}-\dfrac{p^2\sqrt{p}a^5}{120}\right)}=$$

$$=\frac{(1+p\tau+\dots)\left(r+\dfrac{pr^3}{6}+\dfrac{p^2r^5}{120}+\dots\right)}{p^2\left(\dfrac{a^3}{3}+\dfrac{pa^5}{30}+\dots\right)}=\frac{A_{-2}}{p^2}+\frac{A_{-1}}{p}+\dots$$

$p=0$ – полюс второго порядка.
Вычет при $p=0$ равен коэффициенту при A_{-1}, который можно найти, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в левой и правой частях последнего равенства.
Получаем

$$(1+p\tau+\dots)\left(r+\frac{pr^3}{6}+\frac{p^2r^5}{120}+\dots\right)=(A_{-2}+pA_{-1})\left(\frac{a^3}{3}+\frac{pa^5}{30}+\dots\right)$$

$$\frac{a^3}{3}\cdot A_{-2}=r\Rightarrow A_{-2}=\frac{3r}{a^3};$$

$$\frac{a^5}{30}\cdot A_{-2}+\frac{a^3}{3}\cdot A_{-1}=r\tau+\frac{r^3}{6}\Rightarrow\frac{a^3}{3}\cdot A_{-1}=r\tau+\frac{r^3}{6}-\frac{ra^2}{10}\Rightarrow A_{-1}=\frac{3r\tau}{a^3}+\frac{r^3}{2a^3}-\frac{3r}{10a}.$$

$\sqrt{p}a\operatorname{ch}\sqrt{p}a-\operatorname{sh}\sqrt{p}a=0$. Обозначим $\sqrt{p}a=i\gamma$

$$i\gamma\operatorname{ch}i\gamma-\operatorname{sh}i\gamma=0;\quad i\gamma\cos\gamma-i\sin\gamma=0;\quad \operatorname{tg}\gamma=\gamma$$

Пусть γ_n – корни этого трансцендентного уравнения, отличные от нуля, причём $\gamma_n=-\gamma_{-n}$. Получим бесконечное множество простых полюсов

$$p_n=-\frac{\gamma_n^2}{a^2}\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

Вычисление вычетов в этих особых точках осуществляется по правилам ТФКП:

$$Res(F(p), p = p_n) = \lim_{p \to p_n} \frac{e^{p\tau} \operatorname{sh} \sqrt{p} r \cdot (p - p_n)}{p \left(\sqrt{p} a \operatorname{ch} \sqrt{p} a - \operatorname{sh} \sqrt{p} a \right)} = -\frac{2e^{-\gamma_n^2 \tau / a^2} \sin \frac{\gamma_n r}{a}}{\gamma_n^2 \sin \gamma_n}$$

$$\int\limits_L \frac{e^{p\tau} \operatorname{sh} \sqrt{p} r}{p \left(\sqrt{p} a \operatorname{ch} \sqrt{p} a - \operatorname{sh} \sqrt{p} a \right)} dp = 2\pi i \left(Res(F(p), p = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} Res(F(p), p = p_n) \right)$$

$$T = \frac{Q_0}{k\alpha} \left(1 - e^{-\alpha\tau} \right) - \frac{q_0 a^2}{2\pi i \cdot kr} \int\limits_L \frac{e^{p\tau} \operatorname{sh} \sqrt{p} r}{p \left(\sqrt{p} a \operatorname{ch} \sqrt{p} a - \operatorname{sh} \sqrt{p} a \right)} dp =$$

$$= \frac{Q_0}{k\alpha} \left(1 - e^{-\alpha\tau} \right) - \frac{q_0 a^2}{kr} \left(Res(F(p), p = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} Res(F(p), p = p_n) \right)$$

Ответ:

$$T(r, \tau) = \frac{Q_0}{k\alpha} \left(1 - e^{-\alpha\tau} \right) - \frac{q_0}{k} \left(\frac{3\tau}{a} + \frac{r^2}{2a} - \frac{3a}{10} \right) + \frac{2q_0 a^2}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 \tau / a^2} \sin \dfrac{\gamma_n r}{a}}{\gamma_n^2 \sin \gamma_n},$$

где γ_n – корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \gamma$ $\left(n = \overline{1, \infty} \right)$.