

Содержание

1 Лекция 08.02.2022.	4
1.1 Введение	4
1.2 Уравнение сплошной среды	7
1.3 Решение Д'Аламбера. Граничные условия	9
1.3.1 Пример	11
1.4 Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость	12
1.4.1 Примеры	15
2 Лекция 15.02.2022.	17
2.1 Использование преобразований Фурье и Лапласа. Введение	17
2.2 Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности	21
3 Лекция 22.02.2022.	27
3.1 Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия	27
3.2 Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость	33
3.3 Метод стационарной фазы	37
4 Лекция 01.03.2022.	40
4.1 Повторение. Преобразование Лапласа. Теорема о вычетах. Ряд Лорана. Лемма Жордана	40
4.2 Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа	46
5 Лекция 15.03.2022.	50
5.1 Применение преобразования Лапласа. Трудности	50
5.2 Несвязанная динамическая задача термоупругости	53
5.3 Дельта-функция Дирака	54
5.4 Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера	55
5.5 Движущийся источник звука	57
5.6 Влияние включений на волновой процесс. Смешанный спектр	58
6 Лекция 22.03.2022.	62
6.1 Небольшое замечание к задаче	62
6.2 О стационарных решениях	63
6.3 Метод предельного поглощения	65
6.3.1 Функция Грина статической задачи	65
6.3.2 Функция Грина динамической задачи	68
6.3.3 Применение метода предельного поглощения	71
7 Лекция 29.03.2022.	75
7.1 Повторение метода предельного поглощения	75
7.2 Примеры волн в различных средах	79
7.2.1 Термоупругие волны	79
7.2.2 Плазменные волны	81
7.2.3 Прямоугольный волновод	83

8	Лекция 05.04.2022.	86
8.1	Волны в акустических средах	86
8.2	Поверхностные гравитационные волны	94
9	Лекция 12.04.2022.	97
9.1	Краткое повторение материала о волнах в акустических средах	97
9.2	Поверхностные гравитационные волны на границе между водой и воздухом	98
10	Лекция 19.04.2022.	104
10.1	Продолжаем разговор о поверхностных волнах	104
10.2	Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей	105
10.3	Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей, которые движутся друг над другом	107
10.4	Волны на границу между водой и воздухом без учёта силы тяжести (решение Эйлера)	111
11	Лекция 26.04.2022.	113
11.1	Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле	113
11.2	Наклонное падение волны	117
12	Лекция 17.05.2022.	120
12.1	Повторение материала о волнах в сферической СК	120
12.2	Энергия звуковых волн	121

Волны в деформируемых средах

Конспект лекций

Вавилов Д.С.¹ Муравцев А.А.²

12 июня 2022 г.

Список вопросов по дисциплине «Волны в деформируемых средах», 2022

1. Уравнение сплошной среды. Решение Д'Аламбера. Границные условия.
2. Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость.
3. Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности.
4. Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия. Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость.
5. Метод стационарной фазы
6. Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа.
7. Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера.
8. Влияние включения на волновой процесс. Смешанный спектр.
9. Стационарные решения. Метод предельного поглощения. Функция Грина.
10. Волны в различных средах.
11. Волны в акустических средах
12. Поверхностные гравитационные волны на границу между водой и воздухом.
13. Поверхностные гравитационные волны на границу двух жидкостей.
14. Поверхностные гравитационные волны на границу двух жидкостей, который движутся друг над другом.
15. Волны на границу между водой и воздухом без учета силы тяжести (Решение Эйлера).
16. Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле.
17. Наклонное падение волны.
18. Энергия звуковых волн.

¹лектор и составитель рукописного конспекта, Высшая школа теоретической механики, Санкт-Петербургский Политехнический университет. Дополнительные материалы к лекциям [доступны по ссылке](#).

²дополнил конспект и объединил файлы; email: almuravcev@yandex.ru

1 Лекция 08.02.2022.

1.1 Введение

Бабилов Дмитрий Сергеевич

норма: Londer@yandex.ru

Литература

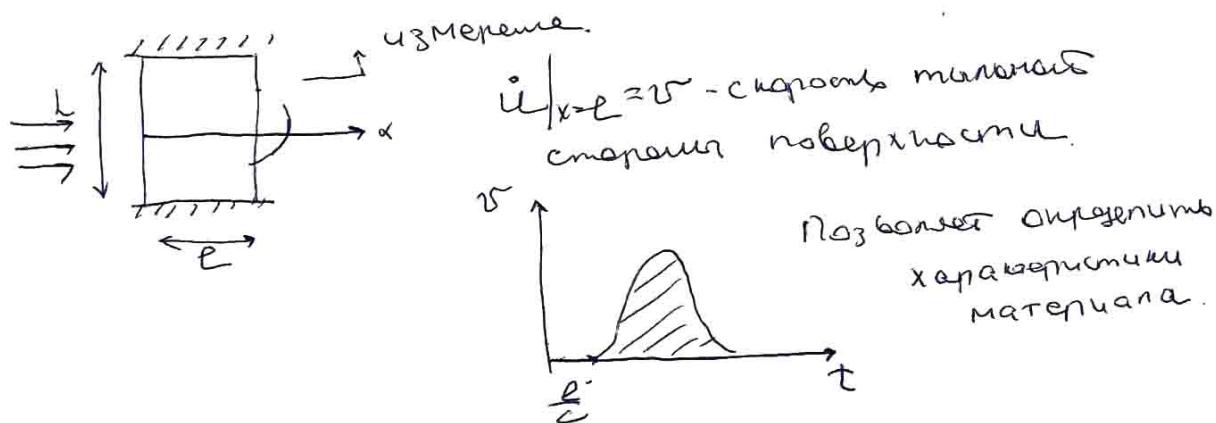
1. Н.В. Карлов, Н.А. Киряченко
Колебания. Волны. Струи и туманы
2. Дм. Чудин. Линейные и
нелинейные волны
3. М.И. Радинович, Д.И. Трубецков
Введение в теорию колебаний
и волн
4. Ф.М. Морс, Г. Фейнбах
Методы теоретической физики (2 том)
5. Г. Арджекея Математические
методы в физике



Волны в деформируемых средах

08.02. Введение. Одномерные волны
в деформируемом теле.

Волна - это распространение колебаний в сплошных средах. Исследование динамического процесса, когда необходимо установить как передача возмущения от одной элементарной единицы к другой.



Предположим, что мы можем менять время взаимодействия. При этом у нас есть общее время характеристическое времени

$$\frac{M}{G} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{G}} \quad \text{Материал имеет}$$

однаслеем характеристич. врем.

1. Макроуровень $T_1 = \frac{L}{c}$

c - скорость звука $c = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$

$\Rightarrow L = 1 \text{ см} \Rightarrow T_1 = \frac{10^{-2} \cdot c}{5 \cdot 10^3 \text{ м/с}} = 2 \text{ мкс}$

$f = \frac{1}{T_1} = 5 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ ①

2. Зерна $D \cdot (100 \div 200) \text{ мкм}$
 $\tau_2 = \frac{D}{C} = \frac{\omega^2 \cdot \omega^{-6}}{5 \cdot \omega^3} = 2 \cdot \omega^{-8} \text{ с}, f \sim \omega^7 \div \omega^8 \text{ Гц}$

3. Межаморфные свижи основания

$$\tau_3 = T \sim \sqrt{\frac{G}{m}} \sim 10^{12} \div 10^{15} \text{ с}$$

Если мы хотим подавить всплеск на сдвиг
 $\tau_{\text{ширины}} \leq \tau_{1,2,3}$

1. $\frac{L}{\lambda} \ll 1$ малыне пластинки средь меня
 Нем всплеск чужой

2. Одностороннее напротяжное сопротивление

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \sigma_x - \text{главное напряжение}$$

Оценка времени упругого удара + всплеск
 Тер, рассматривая столкновение
 спермиев, находящихся торцом на
 неподвижной спермине.

Идеализация: упругий удар проходит
 мгновенно $dP = \frac{F dt}{\sigma - 0}$ или взаимодействие

бесконечно быстра

$t=0$ момент соприкосновения спермии
 со спермином

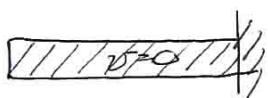


граница спермии за счет
 спермии равна ct

(2)

1.2 Уравнение сплошной среды

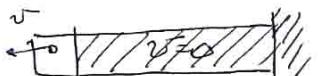
δ)



Весь стержень сжатое деформировано в едином

Кинетическая энергия начального стержня целиком превращается в потенциальную энергию упругой деформации

б)



Второй этап. стержень возвращается в исходное

составление. Этот процесс называется усадкой тела и наземлено приближением к нейтрале.

Энергия упругой деформации стержня целиком переходит обратно в кинетическую энергию.

$$\gamma = \frac{2l}{c} - \text{гнительность естественная}$$

Базовое ур-я: баланс импульса,
баланс момента импульса, закон массы
баланс энергии (и наука термодинамики)

$$\text{Баланс импульса} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \rho \frac{d\bar{v}_x}{dt}$$

$$\frac{d\bar{v}_x}{dt} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{d\bar{v}_x}{dt} \approx \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}$$

Второй порядок малости

$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}$ - локальная производная

$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}$ - конвективная производная

(3)

Баланс массы: $\frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$

+ Определяющее ур-е (изотермический случай)

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = p \frac{du}{dt} \\ \frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \sigma = E \varepsilon \end{array} \right.$$

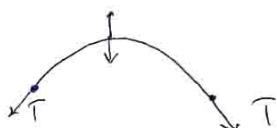
линейное уравнение
относительно равновесного
составления

$$p = p_0 + \tilde{p}, \quad u_x = 0 + u_x, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Уг. второго уравнение $\tilde{p} = -p_0 \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$
 $p = p_0(1 - \varepsilon)$ - знако изменение плотности

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - p_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ p = p_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right. \quad c^2 = \frac{E}{p_0} - \text{скорость звука}$$



$$T \cdot u_{xx} - p_0 u_{tt} = 0$$

В самом случае

$$c^2 = \frac{T}{p_0}$$

Уравнение сложной среды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

(4)

1.3 Решение Д'Аламбера. Граничные условия

Решение Д'Аламбера

$\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ - преобразование Галилея

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} c + \frac{\partial u}{\partial \eta} c$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c^2 = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \\ &- \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f'(\eta)$$

$$\begin{aligned} u &= \int f'(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \\ &= f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c}) \end{aligned} \quad (5)$$

Как определить функции f_1 и f_2 ?

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = -c_0 f_1'(x) + c_0 f_2'(x) = \psi(x)$$

$$\text{Измак: } f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$$

Система имеет решение (~~единственное~~)

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\alpha) d\alpha$$

формула Данаудена

О роли граничных условий
Краевое условие на бесконечности

① Ограничность на ∞

② Условие излучения - weg волн

и u_x неограничен



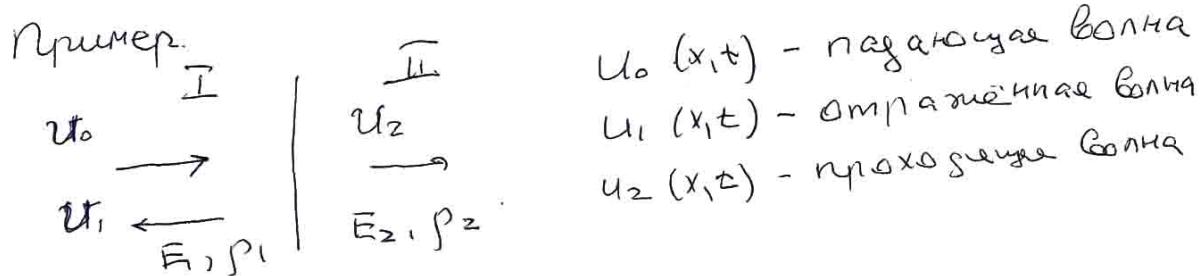
$$0 \leq x < \infty$$

$$u = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

③ Условие локализации $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx < \infty$

⑥

1.3.1 Пример



$$u_0(x,t) = \tilde{u}_0(t - \frac{x}{c_1})$$

$$u_1(x,t) = \tilde{u}_1(t + \frac{x}{c_1})$$

$$u_2(x,t) = \tilde{u}_2(t - \frac{x}{c_2})$$

$$\begin{cases} u_0 + u_1 = u_2 \\ \frac{E_1}{G} \left(-u_0 + u_1' \right) = -\frac{E_2}{c_2} u_2' \end{cases}$$

(после интегрирования)

$$u_0 + u_1 = u_2$$

$$\gamma(u_0 - u_1) = +u_2$$

$$\gamma = \frac{E_1 c_2}{E_2 G} = \frac{c_1^2 p_1 c_2}{c_2^2 p_2 G} = \frac{G p_1}{c_2 p_2} \quad (\text{cp - балльное упрощение})$$

$$(u_0 - u_1) = +u_0 + u_1$$

$$-\gamma u_1 = +u_0 - \gamma u_0$$

$$-u_1(\gamma + 1) = u_0(1 - \gamma)$$

$$u_1 = -\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} u_0(t + \frac{x}{c_1})$$

$$u_2 = \frac{2\gamma}{1 + \gamma} u_0(t - \frac{x}{c_2})$$

$$R = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad D = \frac{2\gamma}{1 + \gamma}, \quad R + D = 1$$

7.

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 - \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} u_0 = \\ &= u_0 \left(\frac{1 + \gamma - 1 + \gamma}{1 + \gamma} \right) = \\ &= \cancel{\frac{2\gamma}{1 + \gamma}} u_0 \end{aligned}$$

1.4 Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость

$$\bar{E}_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0, \quad \bar{E}_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_0$$

напряженность электрического поля
(аналогична с электродинамикой)

$$\frac{n_1}{n_2} = f \quad n - показатель преломления$$

$$\bar{E}_1 = -\frac{1-f}{1+f} E_0, \quad \bar{E}_2 = \frac{2f}{1+f} E_0$$

Сравнить с полученным результатом

Спектральные свойства оператора Д'Аламбера

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{не симм. о членах } x)$$

Спирт закон в форме свободных
половинок (составление генома и групп)

Ограничность на дисперсии

Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = A(x) e^{i\omega t} \Rightarrow A_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

$$A'' = \frac{d^2 A}{dx^2}, \quad \lambda = -\frac{d}{dx}, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\omega = \pm \lambda c$$

$$[\omega] = \frac{pc}{c}, \quad [\lambda] = \frac{1}{M} \quad \lambda - \text{вещественное число}$$

$$A(x) = a e^{-i\lambda x} + b e^{i\lambda x}$$

$$A(x)_{x \rightarrow \pm\infty} - \text{ ограничен}, \quad \text{т.о. } \lambda - \text{ вещественное число}$$

(8)

ω - базовое частотное число
 ω - полное частотное число!
 непрерывный спектр.

Собственная форма (форма) колебаний

$$u_\omega(x, t, \omega) = a_\omega e^{i\omega t - i\omega x} + b_\omega e^{i\omega t + i\omega x} = \\ = a_\omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} + b_\omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})}$$

Зарезонанс: где меня колеблют разные
 частоты синхронизируются. Например,



$$u_k = \frac{\sin \frac{u_k x}{l}}{e} e^{i\omega_k t}$$

$$\omega_k = \frac{u_k c}{l}$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \frac{u_k x}{l} e^{i\omega_k t}$$

Все частоты колебаний считаются

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_\omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} b_\omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} d\omega \quad (\text{---})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_\omega e^{i\omega s} d\omega = f_1(s)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_\omega e^{i\omega y} d\omega = f_2(y)$$

$$f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c}) \quad (\text{---})$$

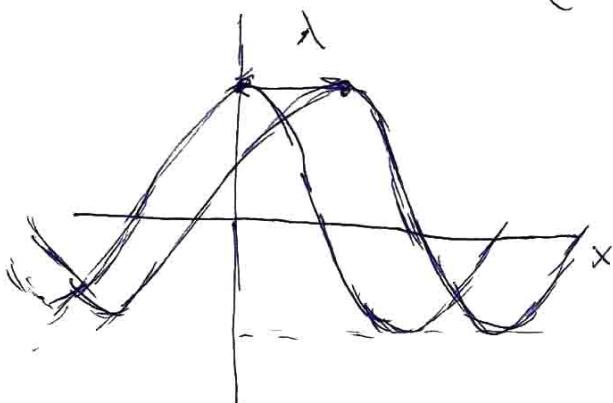
Решение Даламбера

(9)

$$e^{i\omega s} = e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \text{ - собственное колебание}$$

Возьмём вещественную часть:

$$\operatorname{Re} e^{i\omega s} = \cos(\omega(t-\frac{x}{c})) = \cos(\omega t - \alpha x)$$



$$\frac{\omega}{c} = d \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = d$$

Большое число

направление распространения

Умножим собственное решение на константу — это же любое решение. C — характеристика спектра — преобразование гармонических волн. Если скорость распространения гармоники равна c , то и скорость любой волны также равна c .

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \omega e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} d\omega = f(t - \frac{x}{c})$$

Разоблачение спектра — спектральное распространение гармонических волн

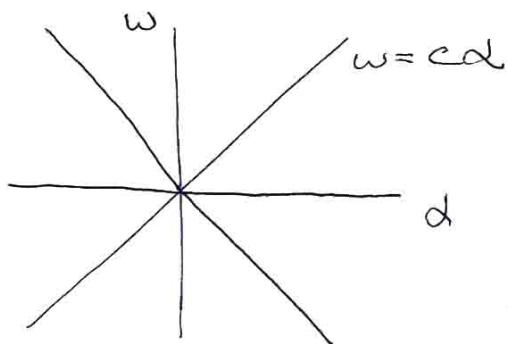
$$C_p = \frac{\omega}{d} \quad \text{В одн. единицах } C_p = C_p(\omega)$$

Оператор Дирака: волна есть

суперпозиция

(10)

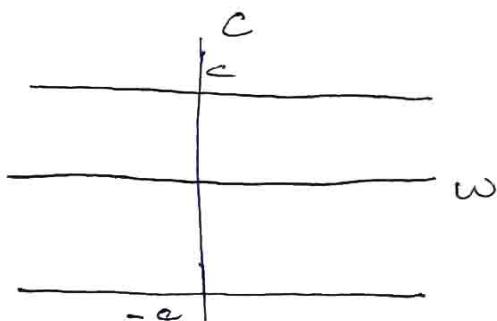
1.4.1 Примеры



Дисперсионные
причины

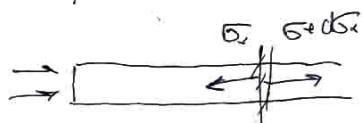
Однозначное соответствие
между ω и d

Две модели d можно
найти ω и наоборот



Зависимость
скорости света
от расстояния

Пример



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_x}{\partial t^2} = 0 \\ G|_{x=0} = G_0(t) H(t-0) \\ G|_{x \rightarrow \infty} - \text{затухание излучения} \end{array} \right.$$

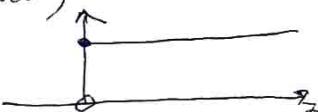
Решение Даренберга

$$G_x = f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c})$$

$$\int a w e^{i \omega(t - \frac{x}{c})} d\omega$$

$$G_x = f(t - \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} a w e^{i \omega(t - \frac{x}{c})} d\omega$$

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$



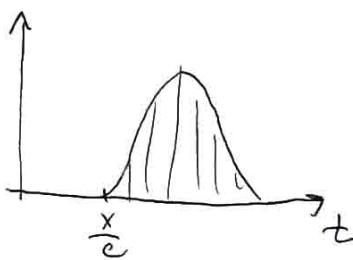
$$G|_{x=0} = G_0(t) H(t-0) \Rightarrow f(t - \frac{x}{c})|_{x=0} = G_0(t) H(t-0) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = G_0(t) H(t-0)$$

$$G_x = f(t - \frac{x}{c}) = G_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$\tau_x = \frac{x}{c}$ - время затухания

11



Синусоиды дают решение на
осн. \times для гиперболы
 $w = \pm c \omega$

Дискретное спектр

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u(t=0) = 0 \\ u(t, x) = 0$$

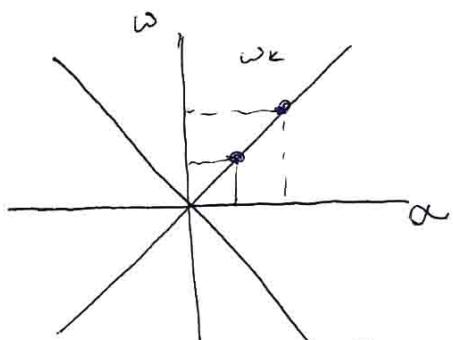
$$u(x, t) = A(x) e^{i \omega t} \Rightarrow A_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

$$A(x) = a e^{-i \omega x} + b e^{i \omega x}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a e^{-i \omega x} + b e^{i \omega x} = 0 \end{cases}$$

Система имеет неприводимое решение, если
эта система ортогональна в норме.

$$e^{i \omega x} - e^{-i \omega x} = 0 \Rightarrow \sin \omega x = 0 \\ \omega_k = \frac{\pi k c}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$$



$$A_k(x) = b \sin \frac{\omega_k x}{L}$$

$$u_k(t, x) = b \left(e^{i \omega_k (t + \frac{x}{c})} - e^{i \omega_k (t - \frac{x}{c})} \right)$$

$$u_k(t, x) = \tilde{b} e^{i \omega_k t} \sin \frac{\omega_k x}{L}$$

В системе возможны гармоники не в бесконечном (дискретном спектре). Система гармоник - это прямое отображение гармоник.

(12)

2 Лекция 15.02.2022.

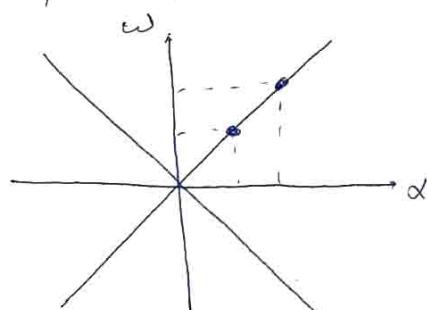
2.1 Использование преобразований Фурье и Лапласа. Введение

15.02 Лекция 2.

Пома. londr@yandex.ru.

Оператор Данаандря. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

$c = \frac{\omega}{d} = \text{const}$ - скорость с которой распространяется гармоническое колебание



$$\omega = \pm cd$$

Болта Бех

исследование

$$f_1(t - \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} a \omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} d\omega$$

$$f_2(t + \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} b \omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} d\omega$$

$$e^{int} e^{idx} \Rightarrow e^{int} - \text{константа в времени}$$

e^{idx} - периодичность по пространственным переменным

d - бесконечное число (множество непрерывных спектров)

$dk = \frac{\pi k}{L}$ - же бесконечное множество спектров

$$R(x) = \sin \frac{\pi k x}{L} - \text{надо же конечное множество}$$

(1)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$e^{i\omega t}$ - частота изменения

Система размножает, но только неизвестные
составляющие никакой кеплеровской размножения,
которые делятся пропорционально каждой
из размножающихся, бывая в это время

$$\text{затем: } y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

Разложение в ряд Фурье: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{i\omega_k t}$
размножающиеся (периодически меняющиеся)

Верхнее разложение представляется
интервалом Фурье. Она представляется
разложением $y(t)$ в виде суммы размножающихся
периодических частотных колебаний,
значения которых разлагаются
на интервал

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{- преобразование Фурье}$$

$$g(t) = y(t) H(t - \tau)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt$$

Как обновить, если интервал различен?

(2)

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty y(t) e^{-xt} e^{-i\omega t} dt$$

Всегда симметричное убывание множества
 e^{-xt} при $t \rightarrow \infty$, интеграл сходится для
 всех ограчненных сумм

$$p = x + i\omega$$

$$Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \tilde{y}(t) dt \quad \text{интеграл Лапласа}$$

\sim
ограничен

условие

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} Y(p) dp, \quad t > 0$$

Теорема обратима.

Макаров обяснил
 - это замкнут
 Лапласа ($x=0$)

Для Книги:

Пурье преобразование -
 сконцентрированное

1. Г. Дэр. Руководство к практическому
 применению преобразования Лапласа
 и Z-преобразование.

2. А. В. Пурье Операционное
 исследование

(3)

Пример

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \\ \xi|_{x=0} = \xi_0(t) H(t) \\ \xi|_{x \rightarrow \infty} - \text{члены нуля} \end{array} \right.$$

$$\xi(t) = \xi_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$$\begin{aligned} \xi^L(p, x) &= \int_0^\infty \xi_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^\infty \xi_0(\xi) H(\xi) e^{-p(\xi + \frac{x}{c})} d\xi = \\ &= e^{-\frac{px}{c}} \int_0^\infty \underbrace{\xi_0(\xi)}_{\xi_0^L(p)} e^{-p\xi} d\xi \\ \xi(x, t) &= \xi_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) \doteq e^{-\frac{px}{c}} \xi_0^L(p) \end{aligned}$$

$$e^{-pa} u(p) \doteq \psi(t-a) H(t-a), a > 0$$

Теорема смещения

Дано рассмотрим много членов
размера , но для этих членов
определено число между a и b
(Число между a , определено выше b)
Как изменяется эти величины?

4

2.2 Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности

Вам не пожалуйста спросить распространение
излучения с начальной скоростью v^0

$v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ - начальная скорость излучения

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \epsilon = -\frac{v^2}{c^2} \quad \text{One спутник} \quad \sigma = E \epsilon = \rho c^2 (-\frac{v^2}{c^2})$$

$$\epsilon = -\rho c v^2$$

$$\boxed{\sigma = -\rho c v^2} \quad (\text{один спутник})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \\ \sigma|_{x=0} = \sigma_0(t) H(t-0) \end{array} \right.$$

$$\sigma|_{x=0} = 0 \quad \text{- condition нарез}$$

Начальное условие

$$\text{и, } \dot{\sigma}|_{t=0} = 0 \Rightarrow \dot{\sigma}|_{t=0} = 0$$

$$\hat{\sigma}^L = \int_0^\infty \sigma(x, t) e^{-pt} dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\sigma}^L}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} e^{-pt} dt = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial \sigma}{\partial t} e^{-pt} \Big|_0^\infty + P \int_0^\infty \frac{\partial \sigma}{\partial t} e^{-pt} dt =$$

$$= -\dot{\sigma}(0) + P \left[\sigma e^{-pt} \Big|_0^\infty + P \int_0^\infty \sigma e^{-pt} dt \right]$$

$$= -\dot{\sigma}(0) - P \sigma(0) + P^2 \hat{\sigma}^L$$

(5)

$$\dot{f}(t) \doteq p F(p) - f(0)$$

$$\ddot{f}(t) \doteq p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - p^{(n-2)} f^{(n-2)}(0) - f^{(n)}(0)$$

В общем случае

$$\frac{d^2\sigma^L}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} \sigma^L = 0$$

$$\sigma^L = A e^{-\frac{px}{c}} + B e^{\frac{px}{c}} \quad - \text{наличие}$$

однозначно обеих

$$\text{Зад: } \sigma^L = C \cosh \frac{px}{c} + D \sinh \frac{px}{c} \quad (\text{ненулево})$$

$$\sigma^L \Big|_{x=0} = \left\{ \sigma_0 \right\} \text{ и } \left. \sigma^L \right|_{x=e} = 0$$

$$\begin{cases} A + B = \sigma_0 \\ A e^{-\frac{pe}{c}} + B e^{\frac{pe}{c}} = 0 \end{cases} \quad \Delta = e^{\frac{pe}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}}$$

$$A = \frac{\sigma_0 e^{\frac{pe}{c}}}{\Delta}, \quad B = -\frac{\sigma_0 e^{-\frac{pe}{c}}}{\Delta}$$

$$\sigma^L(p, x) = \frac{\sigma_0}{\Delta} \left(e^{\frac{pe}{c}} e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right)$$

$$= \frac{\sigma_0}{e^{\frac{pe}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}}} \left(e^{\frac{pe}{c}} e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right)$$

$$= \frac{\sigma_0}{1 - e^{-\frac{2pe}{c}}} \left(e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{2pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right) \Theta$$

(6)

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\dots+q^n$$

$$\Leftrightarrow \sigma_0 \left(1 + e^{-\frac{xp^x}{c}} \right) \left(e^{-\frac{p^x}{c}} - e^{-\frac{xp^x}{c}} \right) =$$

$$= \sigma_0 e^{-\frac{p^x}{c}} - \sigma_0 e^{-\frac{xp^x}{c}} + \sigma_0 e^{-\frac{xp^x}{c} - \frac{p^x}{c}}$$

погодяющая волна

отражение волна

вернем к оригиналу

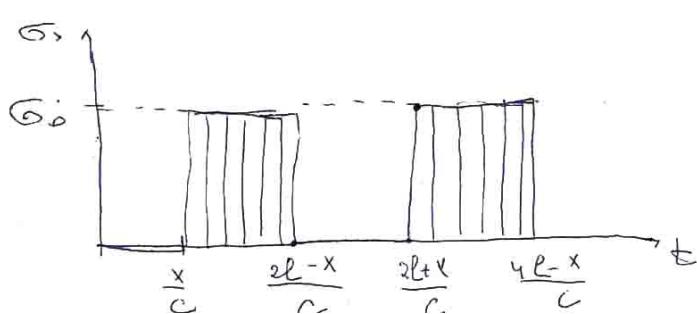
$$\sigma(t, x) = \sigma_0 (t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) -$$

$$- \sigma_0 (t - \frac{2p-x}{c}) H(t - \frac{2p-x}{c}) + \dots$$

$$\frac{2p-x}{c} = \frac{p}{c} + \frac{p-x}{c} \quad \frac{x}{c} - \text{время задержки}$$

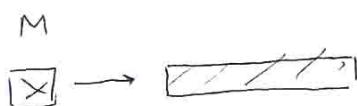
При отражении от плоской поверхности
знак напряжения не меняется на
противоположный, т.е. если пущена волна
сжатия, то отражение волна расширение

$$\sigma_0(t) = \sigma_0 H(t) - \text{стационарное сжатие.}$$



Знак напряжения!

Сжатие: знак не меняется
растяжение противоположно

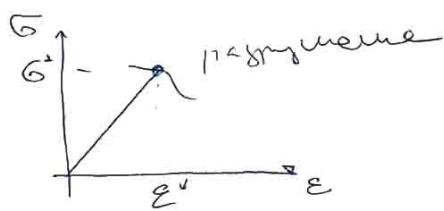


$$M \frac{d\varphi}{dt} = +\sigma$$

$$\sigma = -\rho c \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{M}{\rho c} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0$$

Как меняется напряжение - ?

Будут ли подъемные напряжения
противоположны знака



Найти середину отрезка
 $x^* - ?$
(Паремное зерно)

$$\begin{aligned}\sigma^L &= -\frac{\sigma_0}{\rho c} \left[e^{-\frac{px}{c}} + e^{\frac{p(2L-x)}{c}} \right] \doteq \\ &= -\frac{1}{\rho c} \left[\sigma_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \sigma_0 \left(t - \frac{2L-x}{c} \right) \right]\end{aligned}$$

$$v(t, \rho) = 2\omega_0(t)$$

Скорость на единой поверхности в 2 раза больше. Это необходимо учитывать при расчете напряженного состояния.

(8)

Запишем волновое уравнение для
перемещений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{E_0(+) H(t-\sigma)}{F} \quad - \text{загоре Неймана} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

1. Наиболее однозначные решения: $u = A(x) e^{i\omega t}$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0 \\ \frac{dA}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{dA}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad A(x) = a \cos \frac{\omega x}{c} + b \sin \frac{\omega x}{c}$$

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \Rightarrow \frac{\omega l}{c} = n\pi$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

$$A_n = \frac{\cos \frac{\omega_n x}{c}}{c}, \quad n = 0, 1, \dots, n$$

$$u = \sum g_n(t) \cos \frac{\omega_n x}{c} \quad \text{В этом случае}$$

мы не можем выполнить

граничную условие.

2. Метод Грина

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\omega_n x}{c} dx - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l u \cos \frac{\omega_n x}{c} dx = 0 \\ & \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\omega_n x}{c} dx = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \frac{\omega_n x}{c} \Big|_0^l + \frac{\omega_n}{c} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \sin \frac{\omega_n x}{c} dx = \\ & = - \frac{E_0(+) H(t-\sigma)}{F} + \frac{\omega_n}{c} \left[u \sin \frac{\omega_n x}{c} \Big|_0^l - \frac{\omega_n}{c} \int_0^l u \cos \frac{\omega_n x}{c} dx \right] \\ & = - \frac{E_0(+) H(t-\sigma)}{F} - \left(\frac{\pi n}{c} \right)^2 q_n \frac{l}{2} \end{aligned}$$

(9)

$$-\frac{\sigma_0(+)}{E} H(+\infty) - \left(\frac{u_n}{e}\right)^2 q_n \frac{e}{2} - \frac{1}{c^2} \ddot{q}_n \frac{e}{2} = 0$$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{2}{e} c^2 \frac{\sigma_0(+)}{E} H(+\infty), \quad \omega_n = \frac{u_n e}{e}$$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = Q_m - \text{однократная сингулярность } q_m(\omega) = 0, \quad q_m(\omega) = 0$$

$$q_{mk}^L (p^2 + \omega_n^2) = Q_m^L \Rightarrow q_n^L = \frac{Q_m^L}{p^2 + \omega_n^2}$$

$$\frac{1}{p^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$f_1(p) f_2(p) = \int_0^+ f_1(t) f_2(t) dt \quad \text{тeorema o сeртике}$$

$$q_m(t) = -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e \omega_m} \int_0^+ \sin \omega_m t dt =$$

$$= -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e \omega_m^2} (1 - \cos \omega_m t)$$

$$u(x,t) = -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \cos \frac{u_n x}{e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\sigma_0 c^2}{E e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{u_n}{e} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{u_n x}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{e}}{n} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right), \quad 0 < x \leq e$$

(10)

3 Лекция 22.02.2022.

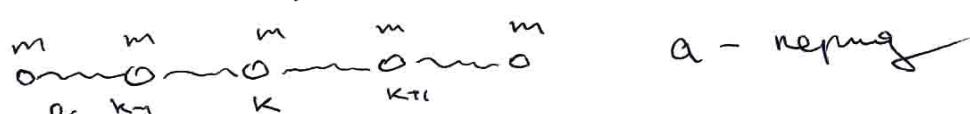
3.1 Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия

22.02. Лекция 3

О дискретном описании
кристаллического тела

Рассмотрим вопрос о совместных
моделях единичной ячейки дискретного
описания

Одномерные структурные решётки
(ячейка)



One knot regular

$$m \ddot{u}_k = -g(u_k - u_{k-1}) + g(u_{k+1} - u_k)$$

учитываем взаимодействие между
соседними атомами!

Литература:

1. Р.И. Мандельштам. Лекции по
теории колебаний

2. Коевский Основы механики
кристаллической решётки

$$m \ddot{u}_k = g(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$$

(конечные разности) ①

$$u = A e^{i(\omega t - dx)} \quad - \text{девиация волны}$$

$$x_k = ka$$

$$\omega \rightarrow \omega \pm \frac{2\pi}{a} p \quad \text{результат не изменяется}$$

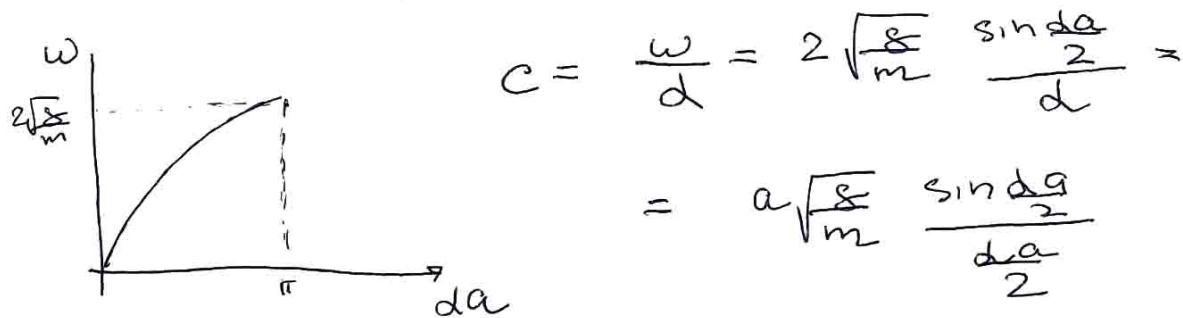
$$-\frac{\pi}{a} \leq \omega \leq \frac{\pi}{a} \quad - \text{зона бриллюэна}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \leq \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda \geq 2a \quad \text{ночё носенбергки!}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{m} \left(2 - e^{ida} - e^{-ida} \right)$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{m} (1 - \cos da)$$

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{g}{m}} \frac{\sin da}{2}$$



Как называется самий результат
с возможной ошибкой спер?

Движени волни приближение $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow c = a \sqrt{\frac{g}{m}}$$

(2)

$$c = a \sqrt{\frac{g}{m}} = a \sqrt{\frac{E}{\rho g a}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} !$$

$$g = \frac{E}{a} \quad \xrightarrow{\text{имо}} \quad \sigma = \frac{E \frac{s}{l}}{l} = \frac{F}{s}$$

$$\delta = \frac{E s}{l}$$

Можно ли получить оператор Данацеле
из гибкостной модели?

$$m \ddot{u}_k = -g(u_k - u_{k-1}) + g(u_{k+1} - u_k)$$

$$u_{k-1} = u_k - u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2} + \dots$$

$$u_{k+1} = u_k + u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2}$$

$$m \ddot{u}_k = -g(u_k' a - \frac{u_k'' a^2}{2}) + g(u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2}) =$$

$$= g u_k'' a^2$$

Несимметричные производные скрываются!

Консервативная система

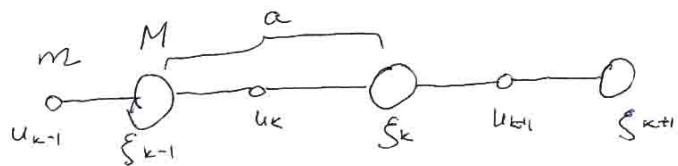
$$p \dot{u} = \frac{E}{a} u'' a^2$$

$$\boxed{u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0}$$

оператор Данацеле.

сравнить с δg гибкости.

(3)



$$\begin{cases} M \ddot{\xi}_k = g(u_k - 2\xi_k + u_{k+1}) \\ m \ddot{u}_k = g(\xi_{k-1} - 2u_k + \xi_k) \end{cases}$$

$$u_k = A e^{i(\omega t - \delta k a)} \\ \xi_k = B e^{i(\omega t - \delta k a)}$$

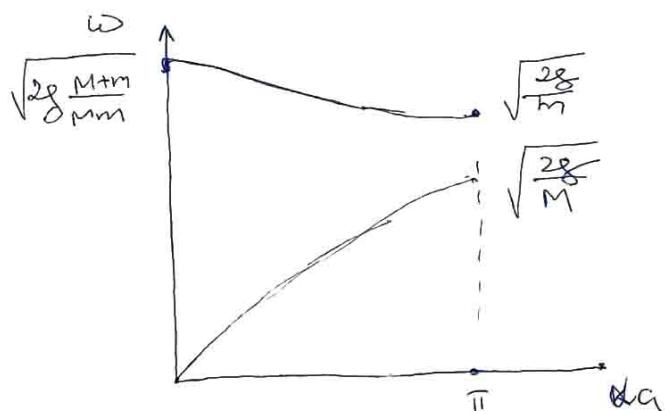
$$\begin{cases} (M\omega^2 - 2g)B + g(1 + e^{-i\delta a})A = 0 \\ g(1 + e^{i\delta a})B + (m\omega^2 - 2g)A = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow$$

$$Mm\omega^4 - 2g(M+m)\omega^2 + 2g^2(1 - \cos\delta a) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{Mm} \left(M + m \pm \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm\cos\delta a} \right)$$

Приемлемые значения!



Верхнее —
однозвездное
помехи

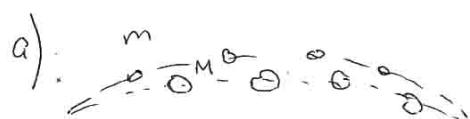
нижнее —
— акустическое
помехи

(4)

Масса α (спинные волны)
 w_1 меняется линейно в зависимости от α

$A = B$ Согласно масса колебаний
 в основных группах.

Число может быть аппроксимировано
 с помощью одномерной модели.



$w_2 = w_2(\alpha)$. При $\alpha \rightarrow 0$ w_2 не

стремится к нулю

Согласно атомам колебаний
 в противоположных группах.



В трехмерной кристаллической решетке
 существует 3S борбы нормальных
 колебаний (3 атома в ячейке):

3 борбы - акустические

3S - 3 - оптические

(изображение основной структуры)

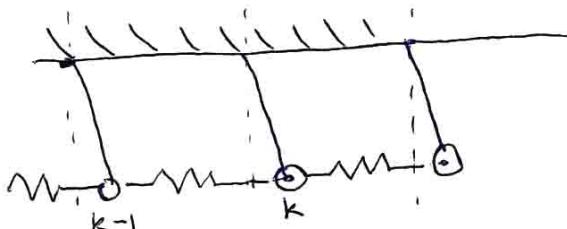
5

Вернёмся к дисперсионному выражению

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{m}} \sin \frac{d\alpha}{2}$$

Дисперсия Вендела назначена
среди величин пространственного масштаба,
периодом решётки a
Если $d\alpha \ll 1$ или $a \ll \lambda$, то
дисперсия исчезает, и мы переходим
к стационарной среде.

Возможно ли такое суждение, когда
дисперсия порождается не
пространственным, а временным масштабом?



$$\ddot{u}_k + \omega_0^2 u_k = -\frac{g}{m} (u_k - u_{k-1}) + \frac{g}{m} (u_{k+1} - u_k)$$

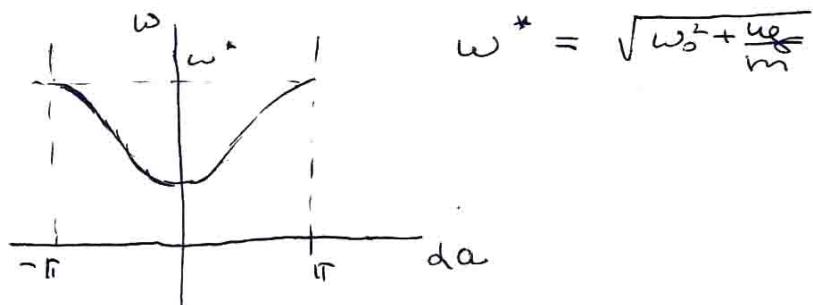
$$\ddot{u}_k + \omega_0^2 u_k = \frac{g}{m} (u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$$

$$u = A e^{-(\nu t - dx)}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4g}{m} \sin^2 \frac{d\alpha}{2}$$

(6)

3.2 Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость



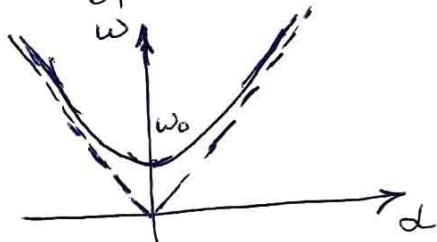
$$u_{k+1} = u_k + u_k' a + \frac{1}{2} u_k'' a^2 + \dots$$

$$u_{k-1} = u_k - u_k' a + \frac{1}{2} u_k'' a^2$$

$$u_k + \omega_0^2 u_k = \frac{q}{m} u_k'' a^2$$

$$u'' - \frac{1}{c_0^2} \ddot{u} - \frac{\omega_0^2}{c_0^2} u = 0$$

Уравнение Клейна-Гордона



ω_0 — расстояние от оси

При $\omega_0 \rightarrow 0$ гипербола изогнута и симметрия приблизительно переходит в квадратичное приближение

$$\omega = \pm c_0 d$$

Приимеры: Струна на упругом основании

— колебание плазмы, биологический
P. Рейтман. "Лекции по физике" Т. 6

(7)

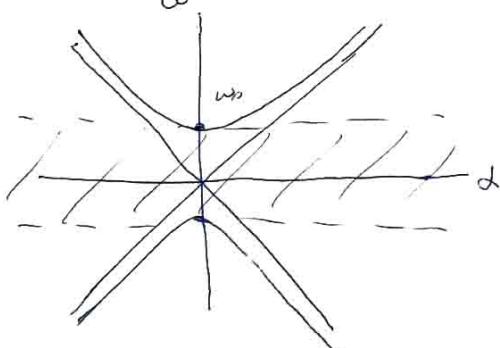
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0$$

if $\omega = c\omega_0$

$$u \sim e^{i\omega_0 t} e^{i\omega x}$$

$$-\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + c^2 \omega_0^2$$

$$\omega = \pm c\omega_0$$



$$0 < \omega < \omega_0$$

Спектр нуля
Нет решения в базе
заряжен. частиц

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - K u = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

$u(x \rightarrow \pm\infty) = 0$

$$u = v_0(x) e^{i\omega t}$$

$$v_{0,xx} + \gamma^2 v_0 = 0, \quad \gamma = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$$

1. $\gamma = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$ $v_0 = Ax + B$
 $v_0 = B$
 решение некорректно

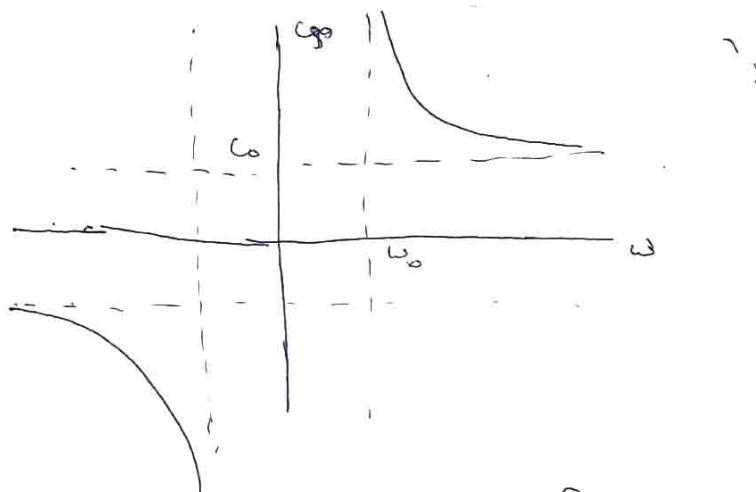
2. $\gamma > \text{баз. } \omega > \omega_0$
 $v_0 = Ae^{i\gamma x} e^{i\omega t} + Be^{-i\gamma x} e^{-i\omega t}$
 $= Ae^{i\omega(t + \frac{x}{c})} + Be^{i\omega(t - \frac{x}{c})}$

$$C_0 = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

3. $\omega < \omega_0$ $v_{0,xx} - \gamma^2 v_0 = 0$
 $v_0 = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$ о.п.
 Толькоtributaneous решение

(8)

$$C_\phi = \pm \frac{Co \omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$



Что такое спектральная сингулярность?
 ω_1 и ω_2 где разница
 $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_{1,2}$

$$u(x, t) = u_0 \cos(\omega_1 t - d_1 x) + u_0 \cos(\omega_2 t - d_2 x) =$$

$$= 2u_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{d_2 - d_1}{2}x\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{d_1 + d_2}{2}x\right) =$$

$$= a(r, t) \cos(\omega_0 t - \phi_0 x)$$

несущая
 $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\phi_0 = \frac{d_1 + d_2}{2}$
 длина волны
 осцилляции
 константа

$$a(r, t) = 2u_0 \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t - \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)x\right)$$

$$C_\phi = \frac{\omega_0}{\phi_0} - \text{несущая константа.}$$

$$C_{\phi m} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta \phi}$$

В однозначном смысле
 $C_{\phi m} = \lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta \phi} = \frac{d\omega}{d\phi}$

(g)

Три скорости: c_p , c_{gr} , v !

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\omega(\alpha)t - \alpha x)} d\alpha =$$

$$\omega(\alpha) = \omega_0 + \omega'(d_0) \Delta \alpha$$

$$= e^{i(\omega_0 t - \alpha_0 x)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i\alpha(d_0 t - x)} d(\Delta \alpha) =$$

$$= e^{\underbrace{i(\omega_0 t - \alpha_0 x)}_{\text{св. волны}}} u(w'(d_0)t - x)$$

и ортогональные.

$c_{gr} = \frac{dw}{d\alpha}$

Как прослежим за изменением волнового пакета?

Как辦имо за изменениями?

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{it(\omega(\alpha) - \frac{\alpha x}{t})} d\alpha$$

$$\psi(\alpha) = \omega(\alpha) - \frac{\alpha x}{t}, \quad t \rightarrow \infty$$

$\frac{x}{t} - \text{поправка}$

Метод стационарных фаз

1. Н. А. Островский, А. И. Романов

Введение в теорию мозульированных волн

2. А. Науѓа Введение в методы
излучения

10

3.3 Метод стационарной фазы

$$I(t) = \int_a^b F(\alpha) e^{it\psi(\alpha)} \frac{d\alpha}{\psi'(\alpha)}, \quad t \rightarrow \infty$$

$$u = \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)}, \quad d\alpha = e^{it\psi(\alpha)} \psi'(\alpha) d\alpha$$

$$v = \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{it}$$

$$I(t) = \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{it} - \frac{1}{it} \int_a^b e^{it\psi(\alpha)} \left[\frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \right] \frac{d\alpha}{it}$$

$$= \frac{i}{t} \left[F(\alpha) \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{\psi'(\alpha)} - \frac{F(\alpha) e^{it\psi(\alpha)}}{\psi'(\alpha)} \right] + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$\psi' \neq 0$!

Основной слагаемый в выражении не зависит от времени t имеет окрестность

близи сингулярных точек $\alpha = \alpha_c$,

$$\text{вокруг } \frac{d\psi}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_c} = 0$$

$$\psi(\alpha) \approx \psi(\alpha_c) + \psi'(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c) + \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2.$$

$$F(\alpha) \approx F(\alpha_c) + F'(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)$$

$$u(x, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_c) \exp\left(i(\psi(\alpha_c) + \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2)t\right) d\alpha$$

$$= F(\alpha_c) e^{i[\omega(\alpha_c)t - \alpha_c x]} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\left[\frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2\right]t\right) d\alpha$$

$$\frac{1}{2} \omega''(\alpha_c)t = s, \quad (\alpha - \alpha_c)^2 = z^2 \quad \omega''(\alpha_c) \neq 0!$$

(11)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{|s|}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4} \operatorname{sign}(s)\right)$$

В итоге:

$$u(x,t) \approx \frac{F(d_c)}{\sqrt{w'(d_c)t}} \exp\left\{i\left(\frac{w(d_c)}{2}t - d_c x - \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} w''(d_c)\right)\right\}$$

Если существует решение

сингулярных волн, то конец их
будет звуком буны, и их него
не симметрично.

$$C_{sr} = \frac{dw}{dd} = \frac{d(c_p d)}{dd} = c_p + d \frac{dc_p}{dd}$$

$$C_{sr} = c_p + d \frac{dc_p}{dd}$$

запись на заня

$$C_{sr} = C_p, \text{ если } \frac{dc_p}{dd} = 0$$

Диаграмма изображает нормальную

если $C_{sr} < C_p$

и аномальную в противном случае

(12)

~~

4 Лекция 01.03.2022.

4.1 Повторение. Преобразование Лапласа. Теорема о вычетах. Ряд Лорана. Лемма Жордана

01. 03. 22. Лекция 4

В прошлый раз мы рассматривали
среды с дисперсией, введя понятие
групповой спросности (скорости откликов)

Сегодня мы поговорим о решении
нестационарных задач и рассмотрим
несколько примеров, где удаётся построить
аналитическое решение с помощью
преобразования Лапласа

$$Y(p) = \int_0^\infty y(t) e^{-pt} dt$$

уравнение

$$1. \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = g(t), \quad g(t) = F_0 H(t - \tau)$$

введение приложенной нагрузки

$$y(t) = \underbrace{A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t}_\text{общее решение} + C$$

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

Сделаем преобразование Лапласа (лекция 2)

$$(p^2 + \omega_0^2) Y = \frac{F_0}{p} \Rightarrow Y = \frac{F_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$\frac{1}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{p^2 + \omega_0^2} \sin \omega_0 t \quad (\text{таблица})$$

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 (t-\tau) d\tau = \frac{F_0}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t)$$

(обратка)

(1)

Теорема об разложении

Если $f(p)$ является изображением

кислотно-щелочной функции $f(t)$,

$|f(+)| \leq M e^{-at}$. Тогда

$$f(+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad \sigma > a$$

Как видим интеграл проходит чистой оси.

Нумерация теоремы о выражениях (Γ^{Φ} кнп)

А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов

Теорема о выражении комплексной переменной

Теорема. Еслі $f(z)$ является
аналитической (изолированной) в любой
в замкнутой области за исключением
конечного числа особых точек (полюсов
или огн. особых точек)

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_k(f(z, a_k))$$

(c) Чему равно выражение орудий матки?

Это называется при $(z-a)^{-1}$ в

разложении в ряд Пуассона

$\text{res}_a f(z)$ - обозначение

$$\text{полюс } m\text{-го порядка. } C_m = \lim_{m \rightarrow 1} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$$

$$m=1$$

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$$

②

Базовый результат формулы. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ --
 $\psi(a) \neq 0!$ $\operatorname{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

Вернемся к примеру с однократным полюсом.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega_0^2} dp = \\ (\#) \quad &= \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{p_k} f(z) \quad f(z) = \frac{e^{pz}}{z^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Очевидные полюсы: $p_1 = -i\omega_0$, $p_2 = i\omega_0$

$$\operatorname{res}_{p_k} = \frac{e^{ip_k t}}{2i\omega_0} - \frac{e^{-ip_k t}}{2i\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

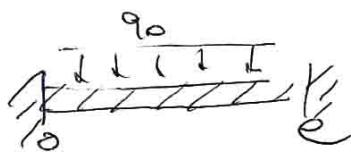
Возьмем замкнутую контурную окружность.

$$\begin{aligned} (\#) \quad &\text{Diagram: } C \text{ - контур, } C \text{ - окружность, } C \text{ - замкнутая окружность.} \\ &\int_C + \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \dots = 2\pi i \sum \operatorname{res}_{p_k} \quad \text{по формуле Коши} \\ &\int_C F(p) e^{pt} dp \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\text{at}} 0 \end{aligned}$$

Лемма Коши: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C F(z) e^{az} dz \rightarrow 0$
если $F(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $a > 0$.

Рассмотрим
однократный
полюс
в точке z_0 .
Значение
функции
в точке
 z_0 не
имеет
смысла!

(3)



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{q_0}{E} H(t) \quad (1)$$

см. лекция 2

$$\frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} - \frac{p^2}{c_0^2} u^L = - \frac{q_0}{E p}$$

$$u^L = A \sin \frac{px}{c_0} + B \cosh \frac{px}{c_0} + \frac{q_0}{p^3} c_0^2$$

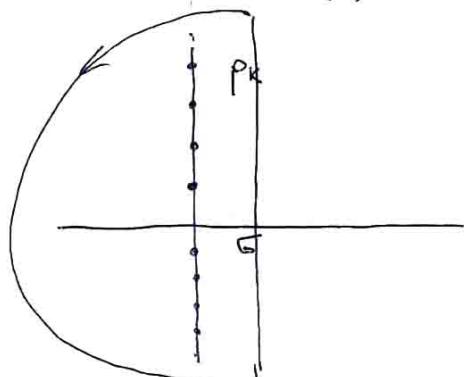
$$u(0, t) = 0, \quad u(e, t) = 0$$

$$u^L = \frac{q_0 c_0^2}{p^3} \left[\frac{\sin \frac{pe}{c_0}}{c_0} - \frac{\cosh \frac{pe}{c_0} \sinh \frac{pc_0}{c_0}}{\sinh \frac{pc_0}{c_0}} + \left(\cosh \frac{pe}{c_0} - 1 \right) \frac{\sinh \frac{px}{c_0}}{\sinh \frac{pc_0}{c_0}} \right]$$

Однако можно (чтобы) $\sinh \frac{pc_0}{c_0} = 0 \Rightarrow p = i \omega_k$
 $\omega_k = \frac{\pi k c_0}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$

Следовательно с дополнением к I результату
 получим

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}, \quad \text{res}_a f^{(k)} = \frac{\psi(a)}{\varphi'(a)}$$



$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G+i\infty}^{G-i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$= 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \text{res}_{ak} f^{(k)}$$

лемма скончалась

Рассмотрим зону самосогласованности.
 Получим результат.

(4)

Теперь ограничимся к уравнению
Коэффициенты - Гармоника

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0 \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = f(t) H(t-0)$$

$u \Big|_{x=\infty}$ - начальное значение.

$$\frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} - \frac{p^2}{c^2} u^L - \frac{\omega_0^2}{c^2} u^L = 0$$

$$\frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} (p^2 + \omega_0^2) u^L = 0$$

$$u^L = A e^{-\frac{1}{c} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} x}$$

$$\text{При этом: } -\frac{1}{c} A \sqrt{p^2 + \omega_0^2} A = f^L \Rightarrow$$

$$A = -\frac{c f^L}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

$$u^L = -\frac{c f^L e^{-\frac{1}{c} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} x}}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

Учитывая что $f(t)$ определяет звук
и не является. Определимся к машине.

$$\frac{e^{-k\sqrt{t^2 + c^2}}}{\sqrt{t^2 + c^2}} = J_0(a \sqrt{t^2 - k^2}) H(t-k)$$

Окончательно звук может быть
выражен через

$$u = -c \int_0^{+\infty} f(s) J_0\left(a \sqrt{(t-\frac{x}{c}-s)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}\right) ds H(t-\frac{x}{c})$$

Получим машину возвращающую к месту

(5)

Рассмотрим синус $x=0$:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}, \quad j \omega_0 = 1.$$

Чтобы доказать след. теорему:

Если выражение

известно для

известного коэффициента перехода к присущим

известных коэффициентов, то система уравнение

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^{1/2}} &= \frac{1}{p} (1 + p^{-2})^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 + mp^{-2} + \frac{m(m-1)}{2!} p^{-4} + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-(n-1))}{n!} p^{-2n} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{2} p^{-2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!} p^{-4} - \dots - \frac{(-1)^{n/2} 1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} p^{-2n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{1}{s^{2n+1}} \end{aligned}$$

Тогда согласно

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = \mathcal{J}_0(t)$$

Видим группировка можно начать в конце.

M. A. Набиев, S. B. Шадрин

Метод теории суммаций комплексной

переменной

(6)

4.2 Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа

Спомоще, которые могут возникнуть при использовании теоремы однозначности, мы рассмотрим ее более простой пример применения гипотезы о постоянстве коэффициентов, но сначала обсудим ее применение к упрощенным задачам.

Будем:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0 \quad \text{баланс массы}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{баланс импульса}$$

Основной метод

Баланс энергии: \dot{E} — полная генерация и потери

$$\dot{W} = \dot{P} + \dot{Q} \quad \begin{array}{l} \text{изменение энтропии} \\ \text{изменение времени} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{нет отрицательных} \\ \text{нет положительных} \end{array}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho (v \dot{v} + \dot{u}) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial (G - u)}{\partial x} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial x} dx$$

h — поток тепла

$$\rho v \dot{v} + \dot{p}u - v \frac{\partial G}{\partial x} - G \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$v \left(\rho \dot{v} - \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \dot{p}u + \frac{\partial h}{\partial x} = G \dot{e}, \quad \dot{e} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Баланс импульса

$$\boxed{\dot{p}u + \frac{\partial h}{\partial x} = G \dot{e}}$$

Введем новое значение температуры, так называемую изотермическую температуру, определяющую будущее значение температуры в зависимости от времени: $u = c_v \theta$

(7)

Закон Фурье: $h = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$

Определение ур-е. $\sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta)$

закон Дюлане-Клемана помеха дробления
 $E_0 = \alpha \theta$ — это первоначальная, иначе не может
 оно быть в рамках классической механики.

После подстановки:

$$\rho c v \dot{\theta} + \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = E \alpha \theta \dot{e} \quad \text{одномерное течение}$$

θ — изменение температуры

\dot{e} — производная (изменение) температуры

Ур-е термопроводности, учитываемое
 влияние теплопроводности (вспомогательное
 звено). После этого получаем уравнение
 вибрации в пределах теории ур-е.

$$\rho c v \dot{\theta} + \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

ρ — масса, c_v — удельная теплоемкость

λ — коэффициент термопроводности

$\lambda = \lambda_s + \lambda_e$ — зависимость теплопроводности

$\lambda_e \gg \lambda_s$, поэтому можно

согласно приближению тепло

λ выражается сквозь перегородку

которую имеет соединение атомов

λ и c_v зависят от температуры,

но это делает описание

в рамках пульсации течения

Г.И. Енисеев. «Физика первого рода»

(8)

$$\rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

$\theta \sim e^{i\omega t} e^{-\alpha x}$. Решение называется

$$\rho c_v i\omega + \lambda \alpha^2 = 0 \quad (*)$$

Число α называемое тунд,
 решение называемое всплеском -
 - неоднозначное выражение процесса
 "Тепло передается от зонера к зоне
 к холдингу". Число называемое
 по X означает, что процесс
 является симметричным.

Что это означает?
 Число α называемое коэффициентом всплеска.

Что это означает?

$$\alpha = \alpha_R + i\alpha_I \quad \text{Всплеск } \alpha^2 = \frac{\rho c_v}{\lambda} -$$

- неизотропно температурные всплески

Тогда

$$\alpha^2 i\omega + \alpha_R^2 + 2i\alpha_R \alpha_I - \alpha_I^2 = 0$$

$$\alpha_R^2 = \alpha_I^2 \Rightarrow \alpha_I = \pm \alpha_R$$

$$\alpha^2 \omega + 2\alpha_R \alpha_I = 0 \Rightarrow \alpha^2 \omega = 2\alpha_I^2$$

$$\alpha_I^2 = \frac{\alpha^2 \omega}{2}$$

$$\boxed{\alpha_I = \sqrt{\frac{\omega}{2}}}$$

(9)

Тогда

$$\Theta \sim e^{i\omega x} e^{\text{int}} = e^{i(\Delta R + i\Delta I) x} e^{i\omega t}$$

$$= \underbrace{e^{-i\Delta I x}}_{\text{Банка}} \underbrace{e^{\text{int} - i\Delta R x}}_{\text{Банка в неподвижном тене}}$$

$i\Delta I$ характеризует энтропийное превышение тене бегущих материалов, при этом $\Delta I = \alpha \sqrt{\frac{\omega}{2}}$ энтропийное превышение сужающего зазора при неподвижной Тенометрической установке

$$\Delta R = - \frac{\rho c_r}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

$$C_{Df} = \frac{\omega}{\Delta R} \sim \sqrt{\omega}$$

Чем выше ω , тем величина C_{Df} и погрешность, но при этом банка движется сильнее

Затем имеем на выходе x

$$\Theta \sim e^{i\omega(t - \frac{x}{c_f})} e^{-i\Delta I x}$$

Затем находим в силу неравенства

$$\text{закон Пифагора } h = -\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

Также получим u_f оснастки

(10)

5 Лекция 15.03.2022.

5.1 Применение преобразования Лапласа. Трудности

15.03.22. Лекция 5.

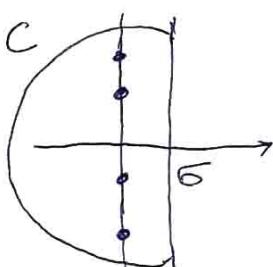
На прошлой лекции мы обсуждали применение преобразования Лапласа

$\mathcal{Y}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ для решения нестационарных задач. Основное идея состоит в том, что для найти решение в пространстве исходя из условия, что решение задачи приведено. Решение

возвращается в пространство оригиналов.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{\gamma} F(p) e^{pt} dp$$

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res} f(z, a_k)$$



$$\oint_{\gamma} = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} + \int_C$$

$$\int_C F(p) e^{pt} dp \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0 \quad \begin{matrix} \text{лемма} \\ \text{скорогоды} \end{matrix}$$

Обсудим некоторые трудности, но т. м. могут возникнуть при вычислении инт.

$$a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \dot{\theta} = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda}{\rho C_v} - \text{изолированная температурная}$$

ур. явл:
$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = J(t)$$

$\theta \xrightarrow{x \rightarrow \infty}$ опр.

$0 \leq x < \infty$

①

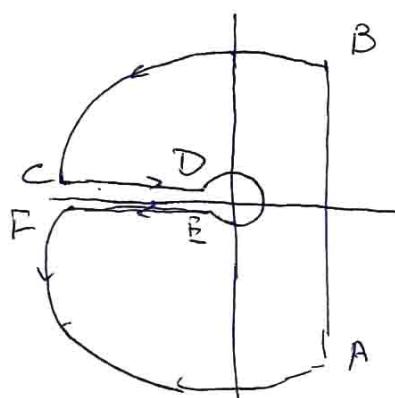
$$a^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} - p\theta = 0$$

$$\theta = A e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}, \quad -\sqrt{p}A = -\frac{J}{x} \Rightarrow$$

$$A = \frac{J}{\lambda \sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}$$

$$\theta = \frac{J}{\lambda \sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}\frac{x}{a}}$$

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}}, \quad k = \frac{x}{a}, \quad k > 0$$



$\omega = \sqrt{p}$ - много значное
значение
Нужно сделать разные,
разные запрещенные оценки

$$\sqrt{p} = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Внешние нагрузки нет однотипных \Rightarrow

$$\oint_{\Gamma} F(p) e^{pt} dp = 0$$

$$\int_{AB} + \int_{CD} + \int_{EF} = 0 \quad \left(\int_{BCUF} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0 \text{ (BCUF не имеет корней)} \right)$$

$$CD: p = x e^{it} = -x, \quad \sqrt{p} = i\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-k i \sqrt{x}} e^{-xt} dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt} e^{-k i \sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

(2)

анализирую EF

$$EF: \sqrt{p} = -i\sqrt{x}$$

$$\int_{EF} = -\frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-xt + k i \sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int_{CD} + \int_{ER} = \frac{2}{2i} \int_0^\infty e^{-xt} \left[\frac{e^{ki\sqrt{x}} + e^{-ki\sqrt{x}}}{2} \right] \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ = \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{-xt} \cos k\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\sqrt{x} = u$$

$$= \frac{2}{i} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos ku du$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} \sin ku du = 0 \quad (\text{как интеграл от нечетной функции})$$

$$\text{Тогда: } \frac{2}{i} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos ku = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} (\cos ku + i \sin ku) du$$

$$= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} e^{iku} du = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^\infty e^{-t(u - \frac{ik}{2t})^2 - \frac{k^2}{4t}} du$$

$$= \frac{e^{-\frac{k^2}{4t}}}{i} \int_{-\infty}^\infty e^{-tu^2} du = \frac{e^{-\frac{k^2}{4t}}}{i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds$$

$$= \frac{e^{-\frac{k^2}{4t}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{t}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-ku\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

(3)

5.2 Несвязанная динамическая задача термоупругости

Несвязанное динамическое звено
термоупругости

Последнем уравнение баланса импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - p \ddot{u} = 0, \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

после подстановки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Преобразование Лапласа (термодинамические
коэффициенты)

$$\frac{d^2 U^L}{dx^2} - \frac{p^2}{G^2} U^L = \alpha \frac{d \Theta^L}{dx}$$

Самостоятельно (расчетное звено)

Литература:

1. В.И. Даниловский. ОД одной динамической задаче термоупругости прикл. мат. и мех. 1952г
2. В. Новакий. Динамические задачи термоупругости. 1970г
3. А.Д. Коваленко. Термоупругость, 1978г.

Перед тем как перейти к вопросу
о роли вложений (сегментов),
нам понадобится ввести понятие
сегмента-сущности Дирака.

(4)

5.3 Дельта-функция Дирака

Преобразование Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt - \text{спектральная плотность}$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{j(\omega - \omega_*)t}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - \omega_*)t} dt \quad \text{чтобы погасить?}$$

Было понятие δ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y) \delta(y - y_0) dy = h(y_0)$$

Следовательно значение h ее
затемнение в т. y_0 (Фурье-спектр)

Особенности функции

1. B. C. Владимиров. Ур-е математика
сигналов
2. A. B. Омельченко. Методы и устройства

преобразований в задачах математических
сигналов

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_*) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_* t}$$

$$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_*) - \text{спектральная плотность}$$

Мне уже использую ее
описание прототипа сопровождений
массы или заряда

$$p = m \delta(x - a)$$

$$\int m \delta(x - a) dx = m$$

(5)

5.4 Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера

Вернемся к примеру с одной степенью свободы,

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = P_0 \delta(t-0) \quad (P_0 = 0.1 - \text{запишите})$$

Нулевое начальное условие,

$$(\rho^2 + \omega_0^2) q^L = 1, \quad \int_0^\infty \delta(t-0) e^{-\rho t} dt = 1.$$

$$q^L = \frac{1}{\omega_0 \rho^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

G — реальная система на δ -функции

$$q^L = \int_0^t F^L(c) G(t-c) dc$$

(разложение на сумму)

Реальная система на правильной
считается при нулевых начальных
условиях

Данное решение означает спредупреждение
и где уравнение в исходных
переменных

Найти функцию Грина для
одномерного оператора Д'Аламбера
в областях $(-\infty < x < \infty)$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(x-x')\delta(t-t')$$

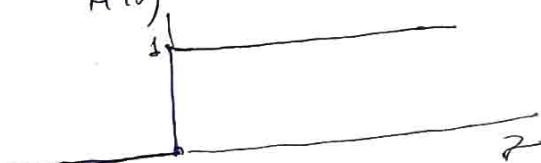
Представление функции на картинке:

⑥

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} e^{-i\omega x} dx &= \frac{\partial G}{\partial x} e^{-i\omega x} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x} e^{-i\omega x} dx = \\
 &= i\omega \left[G e^{-i\omega x} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} G e^{i\omega x} dx \right] \\
 \omega^2 G^F + \frac{1}{\omega^2} G_{tt}^F &= e^{-i\omega x} \delta(t-t') \\
 G_{tt}^F + \omega^2 G^F &= \omega^2 e^{-i\omega x} \delta(t-t') \\
 G^F &= \frac{e^{-i\omega x'} \sin(\omega \delta(t-t'))}{\omega^2}
 \end{aligned}$$

Оператор распространения Пуанкаре:

$$\begin{aligned}
 G(x, t) &= \frac{1}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x'} \sin(\omega \delta(t-t')) e^{i\omega dd} = \\
 &= \frac{1}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x'} \left(\frac{e^{i\omega \delta(t-t')}}{2i\omega} - \frac{e^{-i\omega \delta(t-t')}}{2i\omega} \right) e^{i\omega dd} = \\
 &= \frac{1}{4\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\omega((x-x')+\omega(t-t'))}{i\omega}} - e^{\frac{i\omega((x-x')-\omega(t-t'))}{i\omega}} dd = \\
 H(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\omega x}{i\omega}} dd
 \end{aligned}$$

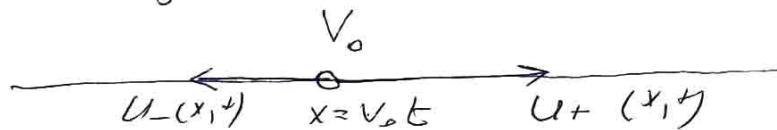


$$\begin{aligned}
 \textcircled{(6)} \quad & \frac{1}{2\omega} \left[H((x-x')+\omega(t-t')) - H((x-x')-\omega(t-t')) \right], \quad t > t' \\
 & y = x-x', \quad \tau = t-t' \\
 & = \frac{1}{2\omega} \left[H(y+\omega\tau) - H(y-\omega\tau) \right]
 \end{aligned}$$

7

5.5 Движущийся источник звука

Движущийся источник звука



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \varphi(t) \delta(x - v_0 t)$$

$$u(x, t) = \int_0^t dt' \varphi(t') \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x', t - t') \delta(x - v_0 t') =$$

$$= \int_0^t G(x - v_0 t', t - t') \varphi(t') e^{ict'} =$$

$$= \frac{1}{2i\omega} \int_0^t \left\{ H(x + \omega t - (v_0 + \omega)t') - H(x - \omega t + (\omega - v_0)t') \right\} \varphi(t') dt'$$

Неравенства: $x + \omega t - (v_0 + \omega)t' \geq 0$
 $x - \omega t + (\omega - v_0)t' \leq 0$

Получив где можно, распределение
 от источника u_- и u_+

One периодически возбуждение

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t)$$

принцип строения волны дает

Доплера (расчетное задание)

(8)

5.6 Влияние включений на волновой процесс. Смешанный спектр

О Роль включений и их влияния
на волновой процесс

В случае поглощения прихода, включений (заготовок) в кристаллической решётке можно в смешанном волновом спектре, начиная с более простого случая, когда излучение включено в кристалл на границе областей



$$0 \leq x < \infty$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$u = M \ddot{u}_0, \quad \text{и } \ddot{u} - \text{перемещение массы}$$

Установим начальные условия - ?
Возьмём симметрическую краевую $u_0 = U_0 / x^{1/2}$
перемещение вблизи края
Нормировка загорелась

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{M \ddot{u}_0}{E} \\ u \Big|_{x=0} = U_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \ddot{u}(0) = 0, \quad u(0,0) = 0 \\ u(0, x) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Начальное} \\ \text{условие.} \end{array}$$

$u(x, 0)$ - лучше изображение.

$$u = U_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) H(t - \frac{x}{c})$$

$$\begin{aligned} \text{Достижено} & \quad \text{но} \quad \frac{U_0}{c} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad - \frac{1}{c} \frac{\ddot{u}_0}{c} = \frac{M \ddot{u}_0}{E} \quad \text{и } M \\ \frac{M \ddot{u}_0}{E} + \frac{U_0}{c} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\ddot{v}_0 + \frac{p_0}{M} v_0 = 0 \quad p_0 - \text{пунктное сопротивление среды}$$

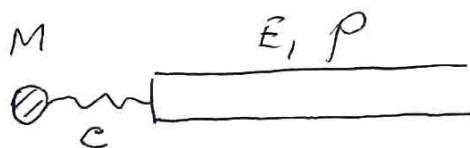
$-\frac{p_0}{M} t$

$$v_0(t) = V_0 e$$

$$u_0(t) = \frac{V_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}), \quad \beta = \frac{p_0}{M}$$

Почему возникло нелинейное
пронесение в консервантной
системе?

Энергия переходит от массы
в энергию в виде тепла
или из.



$$E \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x) = c(u - u_0)$$

перенесение в консервант

рассмотрим самосогласованное
(расщепленное) решение

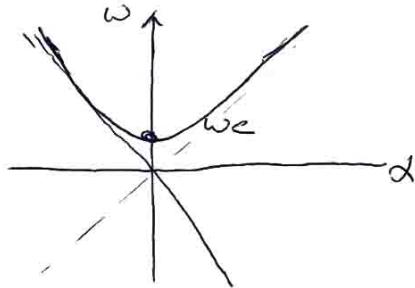
В задаче рассмотрим
оператор Края - Бордса.

(согласно на чистом основании)

⑩

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} utt - \frac{w_c^2}{c^2} u = 0$$

Дисперсионное уравнение: $\omega = \sqrt{c^2 k^2 + w_c^2}$



Распространение

специальная задача
при начальном значении

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{M \ddot{u}_0}{E}$$

$$\begin{aligned} u &= A(x) e^{iwt} \\ Ax_x + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - w_c^2) A &= 0 \end{aligned}$$

Распространение сдвиг $\omega < \omega_c$

$$Ax_x - \frac{1}{c^2} (w_c^2 - \omega^2) A = 0 \quad \text{или}$$

$$A_{xx} - \gamma^2 A = 0, \quad \gamma^2 = \frac{1}{c^2} (w_c^2 - \omega^2)$$

$$A = a e^{-\gamma x} + b e^{\gamma x} \cdot \begin{array}{l} \text{(затухающее} \\ \text{излучение)} \end{array}$$

$$u(x,t) = u_0 e^{-\gamma x} e^{iwt}$$

Данное решение имеет затухающий
характер

Если massa нет, то имеем нулевое
решение

Уз гидравлическое значение.

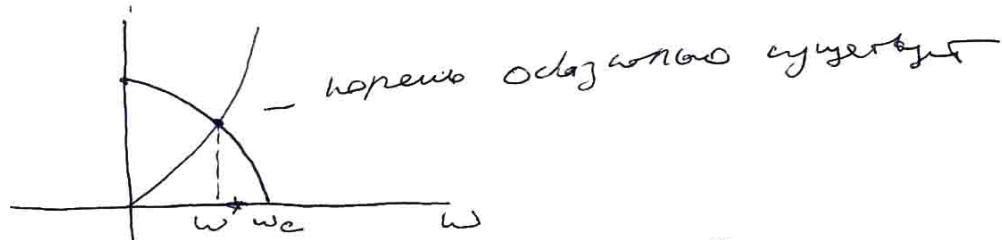
$$\frac{dA}{dx} = - \frac{M \omega^2 u_0}{E}$$

$$-\gamma u_0 + \frac{M \omega^2 u_0}{E} = 0$$

$$\left(-\gamma + \frac{M \omega^2}{E} \right) u_0 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{смущающее} \\ \text{излучение} \rightarrow 0! \end{array}$$

11

$$-\frac{1}{c} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} = \frac{M\omega^2}{E}$$



\Rightarrow Наличие штучного включения
результату к существованию дисперсионной
рекорд $\omega^* < \omega_c$. На оси спектра
наличие дискретное рекорда
(стационарный спектр)

Состр. форма $u(x, t, \omega^*) =$

$e^{i\omega^* t} e^{-\frac{x}{c} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$ — концептуальная
форма в месте, где
включение. Рекордные
рекорды. Конечные
рекорды, они нет.

12

6 Лекция 22.03.2022.

6.1 Небольшое замечание к задаче

Замечание по задаче:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = F_0 \cos(\varphi - \alpha)$$

$$q^L = \frac{F_0}{p(p^2 + \omega_0^2)} \cdot f(z), \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{\dot{\varphi}(z)}, \quad \dot{\varphi}'(z) \neq 0$$

$$\text{тогда } f(z) = \frac{\varphi(z)}{\dot{\varphi}(z)} \quad (\dagger)$$

$$\dot{\varphi}' = p^2 + \omega_0^2 + 2p^2 = 3p^2 + \omega_0^2$$

$$\text{Одна из корней } p = \pm i\omega_0, \quad p = 0$$

$$q = \sum_{p \in \text{корни}} f(z) = \frac{F_0}{\omega_0^2} \cdot \frac{F_0}{2\omega_0^2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) =$$

$$= \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

$$\text{Для } \ddot{q} - \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -q$$

$$q^L = \frac{c_1 q}{p^3} \left[\frac{(ch \frac{p\omega}{\omega_0} - 1) sh \frac{p\omega}{\omega_0} - ch \frac{p\omega}{\omega_0} sh \frac{p\omega}{\omega_0} + sh \frac{p\omega}{\omega_0}}{sh \frac{p\omega}{\omega_0}} \right]$$

$$p = i\omega_0, \quad p = 0$$

$$\dot{\varphi}'(p) = 3p^2 sh \frac{p\omega}{\omega_0} + p^3 ch \frac{p\omega}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0}$$

В т. $p^2 > 0$. Понижение порядка (у) неиз

Линейный дифференциальный уравнение вида u'
имеет общее решение при $p = 0$.

6.2 О стационарных решениях

22. 03. 22 Лекция 6

О стационарных решениях

Система с одинаковой степенью свободы

$$\ddot{q} + 2\eta \dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 e^{int}$$

$$q = A(\omega) e^{int} \quad \begin{array}{l} \text{- установившееся решение} \\ \text{здесь для начальных условий} \end{array}$$

аналогично:

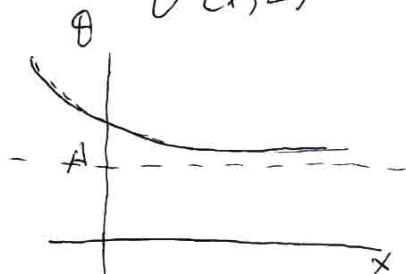
$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

$$\theta = f(x - vt) = f(\xi), \quad \xi = x - vt$$

$$-cvf' = kf'' \quad \text{уравнение}$$

$$f(\xi) = A + Be^{-\frac{cv\xi}{k}} \quad -\frac{cv\xi}{k}$$

$$\theta(x, t) = A + Be^{-\frac{cv(x-vt)}{k}}$$



A - температура среды на
дистанции, когда
тепло еще не стало
решением такого вида

описывается, например, прачечной Венесуэлы,
но потому что со временем в производственных
целях заменили бензин, это
прочее называемое постоянной
температурой

$$f(x - vt) \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

(1)

Такое решение можно записать в виде
 $\Theta(x,t) = \Theta_\infty + (\Theta_0 - \Theta_\infty) e^{-\frac{C_0}{L}(x-2vt)}$

Еще один пример: Гавногорное движение
 груза по доске, находящейся в движении
 основания



$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ky = P(x, t)$$

$$P = P_0 \delta(x - vt) = P_0 \delta(s)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta^2 y = \frac{P_0}{EI} \delta(s)$$

$$y = f(x - vt) = f(s)$$

$$f''''_+ + 2\alpha v^2 f''_+ + \beta^2 f_+ = 0 \quad s > 0$$

$$f''''_- + 2\alpha v^2 f''_- + \beta^2 f_- = 0 \quad s < 0$$

Пример: если $f_+'''' = f_-''''$, $f'_+ = f'_-$, $f''_+ = f''_-$
 $f'''_+ - f'''_- = \frac{P_0}{EI}$ (здесь $c_0 = 0$)

Приемное значение:

Дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta^2 y = 0$$

-idx int

$$y \sim e^{i\omega t} - ?$$

$$c_0 = \frac{\omega}{2} - ?$$

(2)

6.3 Метод предельного поглощения

6.3.1 Функция Грина статической задачи

После подстановки:

$$\lambda^4 - 2\alpha\omega^2 + \beta^2 = 0$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{\beta^2 + d^2}{2\alpha\lambda^2} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{\beta^2 + d^2}{2\alpha\lambda^2}}$$

$$\frac{d\lambda}{dd} = 0 \Rightarrow d^* = \sqrt{\beta}$$

$$\lambda_{\text{крит.}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{K\beta J}}{\rho}}$$

При выполнении предельного
затухания определим предельную
нагрузку. Как она связана
с критической? Сколько?

Метод предельного поглощения
функции Грина

Рассмотрим статическую задачу
о проникновении струи в породу
с обрывом!

$$T u_{xx} - k u = f(x)$$



$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty}$$

Сделаем интегрирование

предупреждение: функция не ограничена!

$$f^F = \int_{-\infty}^{\sigma} f e^{-i\sigma x} dx$$

(3)

$$\begin{aligned}
 & T \left[u(x) e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} + i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\alpha x} \right] = \\
 & = T \left[u(x) e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} + i\alpha u(x) e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} - \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\alpha x} dx \right] \xrightarrow{u^F} \\
 & (-T\alpha^2 - k) u^F = f^F \Rightarrow u^F = -\frac{f^F}{k + T\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Однозначное преобразование Фурье:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

$$u^F = -\frac{i}{T} \frac{f^F}{\alpha^2 + k^2}, \quad \alpha^2 = \frac{k^2}{T}$$

$$\text{Если } \frac{1}{\alpha^2 + k^2} = \varphi(x), \text{ то}$$

$$f^F \varphi^F = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \varphi(\xi) d\xi$$

единица

(Бесконечное преобразование Фурье)

$$u^F = -\frac{1}{\alpha^2 + k^2} \frac{1}{T} - \text{преобразование Фурье}$$

или интеграл

связь между температурой и -спектром

$$u_{xx} - \tilde{\kappa} u = \frac{\tilde{\kappa}(x)}{T}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{k}{T}$$

$$\text{Тогда: } u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) u^F(\xi) d\xi$$

Температурное распределение
расчитано с помощью ядерно-спектральной

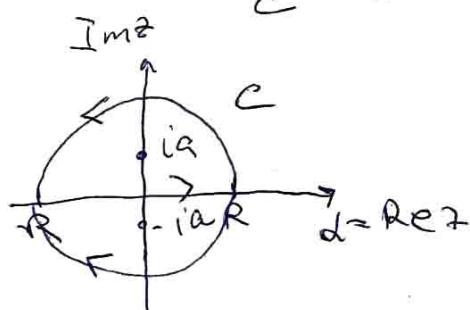
(4)

Этот принцип называется синусной формулы

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^F e^{ixz} dz = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izx}}{z^2 + a^2} dz$$

Для вычисления интеграла
перенесем в комплексную плоскость.

$$\tilde{J} = \int_C \frac{e^{izx}}{z^2 + a^2} dz, \quad C - \text{замкнутый контур}$$



при $x > 0$ бер. обв
замыкают на
верхнюю полуплоскость,
а при $x < 0$ - на нижнюю.

$$\tilde{J} = \int_{C_R^+} F(z) dz + \int_{-R}^R F(z) dz \quad \text{при } x > 0$$

$$\tilde{J} = \int_{C_R^-} F(z) dz + \int_R^R F(z) dz \quad \text{при } x < 0$$

Имеем при малом радиусе
наименее изограничения

$$\int_{C_R^+} F(z) dz \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\tilde{J} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=a} f(z) = 2\pi i \frac{e^{iax}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ax}$$

$$\tilde{J} = \frac{\pi}{a} e^{-ax}$$

$$\tilde{J} = \begin{cases} \frac{\pi}{a} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

we receive answer

$$\therefore \tilde{J} = \frac{\pi}{a} e^{-|ax|} \quad (5)$$

6.3.2 Функция Грина динамической задачи

Итак: $\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int = -\frac{1}{2\pi i} e^{-ax} -$
 - функция Грина
 (статика)

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \psi(\xi) d\xi$$

Рассмотрим теперь динамическую задачу:

$$\Gamma u_{xx} - p(x) u_{tt} - k(x) u = 0$$

p и k зависят от x и времени!

Рассмотрим стационарную задачу

$$u(x, t) \approx U_0(x) e^{int}$$

$$\text{Тогда: } U_{0xx} + \frac{\omega^2}{\Gamma} p(x) U_0 - \hat{k}(x) U_0 = 0$$

$$U_{0xx} + U_0 \left(\frac{\omega^2 p(x)}{\Gamma} - \hat{k}(x) \right) = 0$$

$$\boxed{p(x) = p_0 + \tilde{p}(x)}, \quad k(x) = k_0 + \tilde{k}(x)$$

$$U_{0xx} + \frac{1}{\Gamma^2} [\omega^2 - \omega_c^2] U_0 = \frac{1}{\Gamma} [\tilde{k}(x) - p_0 \tilde{\omega}^2] U_0$$

\uparrow несогласие

недавние ступни.

Могут ли сеи включе ить роль
 источника небольшой?

(6)

Поставим в пребуда земь $\frac{1}{\pi} \delta(x-\xi)$

ξ - тоже применение
закону группии

$$\frac{1 \cdot \delta(x-\xi) e^{int}}{\int_0^\xi}$$

$$U_{0xx} + \frac{1}{C_L} U_0 (\omega^2 - \omega_c^2) = \frac{1}{\pi} \delta(\omega - \xi)$$

Если мы знаем динамическую
функцию Грина, то решение исходной
уравнения с неоднородностью в пребуде
земли можно заменить в базе:

$$U_0(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x, \xi, \omega) [k(\xi) - \omega^2 \rho(\xi)] U_0(\xi) d\xi$$

Интегральное уравнение Прогноза
II рода с однородным предиктором

Интегральное уравнение Прогноза имеет вид,

$$y(t) = \lambda \int_a^b k(t, s) y(s) ds + g(t)$$

если $g(t) = 0$, то именем оно называется уравнение

Теорема: Абсолютно интегральное уравнение

имеет однозначное решение для моделей

сигары δ , либо однородное уравнение

имеет не единственное, но однозначное

неприводимое решение (λ_n - собств.

значение, y_n - единственная сигары) ⑦

Если $K(x, \xi)$ - симметричное ядро, то убеждено, что спектр содержит вещественные значения дисперсии и квадратичных, а вещественное значение определение

решение можно представить в виде

$$\text{разложение } y = \sum g_k y_k$$

$$\text{Переименуем к } y^{(1)}: \quad U_{0xx} + \frac{1}{C^2} (\omega^2 - \omega_c^2) = \frac{\delta(x-\xi)}{T}$$

Если $\omega < \omega_c$, то можно сказать,

в противном случае решение - это дзета-функция

Более U_0 - комплексное

Нормированные гранича моментом как вещественными, так и комплексными

$$\text{Берём преобразование Фурье, } \int_{-\infty}^{\infty} U_{0xx} e^{-idx} dx =$$

$$= U_{0x} e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + id \int_{-\infty}^{\infty} U_{0x} e^{-idx} dx =$$

$$= U_{0x} e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + id U_0 e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - d^2 U_0^F$$

Мы не можем приравнить нуль

последнее слагаемое. У нас

консервативное ядро, более не

заряженное.

(8)

6.3.3 Применение метода предельного поглощения

Используем метод предельного поглощения:

введем малое время:

$$\text{формо: } G_{xx} - \frac{1}{\ell_0^2} G_{tt} - \hat{k} G_t = \frac{i}{T} \delta(x-\xi) e^{i\omega t}$$

G - сумма гранич (консервативные ядра)

$$\text{Теперь } G_{xx}^{(\varepsilon)} - \frac{1}{\ell_0^2} G_{tt}^{(\varepsilon)} - \varepsilon G_t - \hat{k} G = \frac{i}{T} \delta(x-\xi) e^{i\omega t}$$

Мыши поглощают зерно: $G_t^{(\varepsilon)} \Big|_{x \rightarrow \pm \infty} = 0$

$$G_t^{(\varepsilon)}(x, t) = G_0^{(\varepsilon)} e^{i\omega t}$$

$$G_{xx}^{(\varepsilon)} + \int \frac{1}{\ell_0^2} (\omega^2 - \omega_c^2) - i\omega \varepsilon / G_0^{(\varepsilon)} = \frac{i}{T} \delta(x-\xi)$$

Определим другое преобразование:

$$-\alpha^2 G_0^{(F(\varepsilon))} - p^2 G_0^{(F(\varepsilon))} = \frac{i}{T} e^{-i\omega \xi}$$

$$p^2 = i\omega \varepsilon - \frac{1}{\ell_0^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\text{или } -(\alpha^2 + p^2) G_0^{(F(\varepsilon))} = \frac{i}{T} e^{-i\omega \xi}$$

$$\boxed{G_0^{(F(\varepsilon))} = -\frac{i}{T} \frac{e^{-i\omega \xi}}{\alpha^2 + p^2}}$$

(9)

$$G_0^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{2\omega T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-s)}}{\omega^2 + p^2} dd$$

Дне выражение интеграла переанже

в комплексную плоскость:

$$z_{1,2} = \pm pi = \pm (A + iB)i$$

$$z_1 = -B + iA, \quad z_2 = B - iA$$

$$p^2 = A^2 - B^2 + 2iB = i\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

Приравнивая члены в лев. части, имеем:

$$\begin{cases} A^2 - B^2 = -\frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2) = a, \quad a < 0 \text{ при } \omega > \omega_c \\ 2AB = \omega\varepsilon \Rightarrow B = \frac{\omega\varepsilon}{2A} \end{cases}$$

Получаем в нервее ур-

$$A^2 - \frac{\omega^2\varepsilon^2}{4A^2} - a = 0 \Rightarrow A^4 - aA^2 - \frac{\varepsilon^2\omega^2}{4} \approx 0$$

$$A_{1,2}^2 = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{\varepsilon^2\omega^2}{4}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}|a|\left(1 + \frac{\varepsilon^2\omega^2}{2a^2}\right)$$

Рассмотрим случай $\omega > \omega_c$, $a < 0$

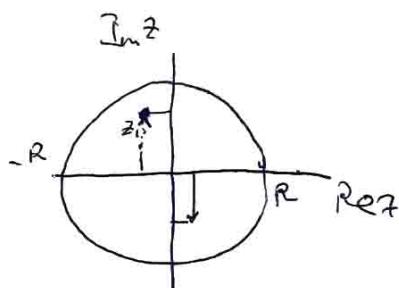
Тогда нас устроит только:

$$A^2 = -\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4a} \Rightarrow A = \frac{\varepsilon\omega}{2\sqrt{|a|}}, \quad B = \sqrt{|a|} =$$

$$= \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{\omega}$$

(10)

Изображим z_1 и z_2 на компл. плоскости



Если $\xi = \infty$, то полюс лежит на бесконечной оси и их сумма отходит

Возможна 4 варианта:

- 1) $Re z_1 + Re z_2$ Какой из этих
- 2) $Re z_2$ возможен?
- 3) $Re z_1$ возможно?
- 4) $Re z_2$

Более многое означает наличие сингулярности на оси симметрии (Рисунок строен: для случая неограниченного ряда)

При $x > \xi$ бесконечную ось замыкаем на верхнюю полуокружность, а при

$x < \xi$ — на нижнюю. Используем

формулу $\theta_{2\pi i} e^{i z_2(x-\xi)}$, $x < \xi$

также

$G_o^{(c)} = -\frac{1}{2\pi i} \begin{cases} 2\pi i \frac{e^{i z_1(x-\xi)}}{2z_1}, & x > \xi \\ \theta_{2\pi i} e^{i z_2(x-\xi)} \frac{1}{2z_2}, & x < \xi \end{cases}$

однозначно сводят к одному выражению

11

Переход в предел $\varepsilon \rightarrow 0$ $z_1 = -B$, $z_2 = B$

$$G_{\rho} = -\frac{i}{T} \begin{cases} \frac{ie^{-iB(x-\xi)}}{-2B}, & x > \xi \\ \frac{ie^{iB(x-\xi)}}{2B}, & x < \xi \end{cases} \quad (1)$$

$$\beta = \sqrt{|\alpha|} = \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{c_0}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{ie^{-iB(x-\xi)}}{2\beta}, & x > \xi \\ \frac{ie^{iB(x-\xi)}}{2\beta}, & x < \xi \end{cases}$$

$$\text{Тогда } G_{\rho}(x, \xi, \omega) = \frac{i \chi_{\rho}}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} T p c_0} e^{-i|x-\xi| \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} =$$

$$= \frac{i e^{-i|x-\xi| \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c_0}}}{2 p c_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

$$G(x, t, \omega) = \frac{e^{-i|x-\xi| \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c_0}}}{2 p c_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{i \omega t} =$$

$$= e^{i \omega (t - \frac{|x-\xi|}{c_0})} \frac{i}{2 p c_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} - \text{импульсное} \\ \text{рассеяние}$$

$$G_p = \frac{\omega c_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} /$$

Следовательно $\omega < \omega_c$ - симметрическое рассеяние!

(12)

7 Лекция 29.03.2022.

7.1 Повторение метода предельного поглощения

29.03.22. Лекция 7

Вспомним материал предыдущей лекции.

$$G_{xx}^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\omega^2} G_{yy} - \underline{\varepsilon} G_t - \tilde{K} G = \frac{i}{T} \delta(x-s) e^{i\omega t}$$

$$G_t^{(\varepsilon)}(x,t) = G_0^{(\varepsilon)} e^{i\omega t}$$

$$G_0^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{T} \frac{e^{-i\omega s}}{\omega^2 + p^2}, \quad p^2 = i\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\omega > \omega_c$$

$$G(x,t,\omega) = e^{i\omega(t - \frac{|x-s|}{c_0})} \frac{1}{2\rho_0 c_0 \sqrt{\omega - \omega_c^2}}$$

$c_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$ - зависимость групповой
скорости от частоты
и оператор холм-Горюш

Перейдём к случаю $\omega < \omega_c$

$$G(x,t,\omega) = -\frac{1}{2\rho_0 c_0 \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} e^{-i|x-s|\sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{c_0}}} e^{i\omega t}$$

- сигнум Грина (неконтинуальное
решение)

Вернёмся к исходному ур-ию

с неоднородными:

$$p(x) = p_0 + \tilde{p}(x), \quad K(x) = K_0 + \tilde{K}(x)$$

①

$$(L_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - k_0 u = \frac{1}{\rho c^2} (\tilde{k}(x)u + \tilde{\rho}(x)u_{tt}) \quad -\infty < x < \infty),$$

Существует ли дисперсионный спектр для
затухающих отсечек?

Рассмотрим спектральную задачу

$$u(x,t) = U_0(x) e^{int} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{0xx} + \frac{1}{c^2} (w^2 - w_0^2) U_0 = \frac{1}{\rho c^2} (\tilde{k}(x) - \tilde{\rho}(x) w^2) U_0$$

Если извлечь гипотезу Грина, то
нахождение U_0 сводится к уравнению:

$$U_0(x, w) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, \xi, w) \varphi(\xi, w) U_0(\xi, w) d\xi$$

Вместо исходного гипотезы начального
уравнения с неоднородностью в правой
стороне мы можем решить исходенное
уравнение: $y(x, w) = w \int_a^b k(x, \xi) y(\xi, w) d\xi$

Если это уравнение симметрическое и бандевине,
то уравнение Реджонльта всегда имеет
бандевинеющий спектр, а
если всегда неоднородность
имеет симметрическое значение гипотеза.

(2)

При $\omega > \omega_c$

$$G_{\alpha}(x, \xi, \omega) = -\frac{i}{2\rho_0 c \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{-i \frac{|x-\xi| \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}}$$

- это минимум

Затемнение отражения волн не зависит от изменения ω и имеет экспоненциальный характер.

Для расчета отражения $\omega < \omega_c$

$$G_{\alpha}(x, \xi, \omega) = -\frac{1}{2\rho_0 c} e^{-i \frac{|x-\xi| \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c} / \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

смешение волн.

это генерация

? Генерация независима, генерация входит в генерацию (выделение поглощения)

Проверим: если у нас имеется неоднородность в виде равного волнения то у нас должна быть генерация: $K(\omega) \approx \tilde{J}(\omega) = M\delta(\omega)$

$$\text{Тогда: } V_0(x, \omega) = -\omega^2 G_{\alpha}(x, 0, \omega) M \underbrace{U_0(0, \omega)}_{\text{последний член поглощения}}$$

последний член

Фундаментальное свойство генерации:

$$\int_a^b f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

(3)

Условие местного минимума
массы со спуртом:



$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x, \omega) = U_0(\omega)$$

Приложим в начальном решении $x = 0$

$$U_0(0, \omega) [1 + \omega^2 G_0(0, 0, \omega) M] = 0$$

$$1 - \frac{\omega^2 M}{(2) \rho_0 c_0 \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} = 0$$

Аналогичный результат уже
был полученearlier,
но в это рассмотрение
введен дополнительный спурт с массой
на горизонте



Приложение 2 б

значимое значение в нем, что
меньше, чем
дополнительное (отрицательное)
деление на горизонте ($-\infty < x < \infty$)

(4)

7.2 Примеры волн в различных средах

7.2.1 Термоупругие волны

Примеры волн в различных средах

1. Термоупругие волны

Баланс импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho v^2 = 0, \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{или}$$

после дифференцирования

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x^2} \\ K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho c_v \dot{\theta} = E \alpha \dot{\varepsilon} \end{array} \right. \quad \text{уравнения в узких} \quad \text{условиях}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho c_v \dot{\theta} = E \alpha \dot{\varepsilon} \\ \text{согласно условиям} \end{array} \right.$$

$$a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \dot{\theta} = \gamma \dot{\varepsilon} \quad \text{переход к сводимости.}$$

После приведение к дифференциальному

перемещению в этом перенесут $\dot{\varepsilon}$

все остальные величины, и при решении этого уравнения получим

(Исключение - получившиеся величины)

Если преодолеть сводимость, то

температура определяется квадратично

и далее решите это уравнение

(распространение волны, преодолеть переход к а)

(5)

Что даёт учёт данных переменных?

Каналы излучения определяются

Насыщением второго производного от температуры в первом приближении:

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial t^2} = \frac{d}{a^2} (\eta \dot{\varepsilon} + \dot{\theta})$$

Возможна первая производная по времени:
загорание термодинамического импульса.

Однако, это в свою очередь возникает
возможно при наличии теплоизбыточности

Если пренебречь a^2 , то второе

производное по времени
и производное по времени

сохраняется и с неизмененной
коэффициентом пропорциональности.

При этом нет отношения между
импульсами

(6)

7.2.2 Плазменные волны

2. Плазменные волны

Для описание распространение волн малой амплитуды используется модель однородной плазмы, в рамках которой плазма представляет собой смесь электронов и ионов неравных давления которых можно задать в виде упр-е состояния Ченкока 1932:

$$\rho = n k_B T$$

Такое упр-е удобно для расчета и электронное напряжение имеет вид

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_i \cdot \nabla \bar{v}_i = - \nabla \left(\frac{n_i k_B T_i}{m_i n_i} \right) - \frac{e}{m_i} \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \bar{v}_e \cdot \nabla \bar{v}_e = - \nabla \left(\frac{n_e k_B T_e}{m_e n_e} \right) + \frac{e}{m_e} \nabla \Phi$$

+ упр-е непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \bar{v}_i) = 0$$

Непрерывное
пространство
рекомбинации
и излучения

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \bar{v}_e) = 0$$

$$+ \Delta \Phi = - \frac{e(n_i - n_e)}{m_e} - \text{упр-е Кулонов.}$$

Рассмотрим одномерный случай.

Так как $m_i \gg m_e$, то будем считать, что ион. неподвижны и все взаимодействия происходят с электронами

(7)

Две метки, возмущение:

$$p_e = p_0 + p', \quad n_e = n_0 + n'$$

Число нейтронов относится к невозмущенному
составу.

$$p_e = p_0 + m_e n' \frac{\partial p}{\partial p_0} \quad (p_e = f(p_0))$$

$$\frac{\partial p}{\partial p_0} = v_0^2$$

Также имеем две метки, возмущение имеет

вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{v_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \psi'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} n_e$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

представляем первое уравнение
видею по x , а второе — по t

с учетом борозды видею:

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + w_p^2 n' = 0$$

$$w_p^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e \epsilon_0} - \text{называемое}$$

частота

Число определяет v_0 , число видею

состава $p \sim n^{\delta}$ (затухание гранич)

$p = n_0 \omega T$ Две определяемые $f = 3$

(8)

7.2.3 Прямоугольный волновод

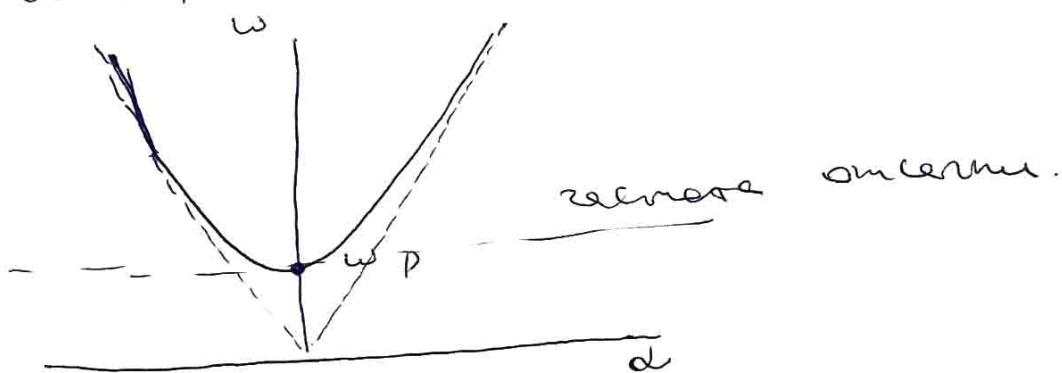
$$\text{Тогда } \frac{\partial \phi_e}{\partial p_0} = \frac{\partial \phi_e}{\partial (\lambda n)} = \frac{1}{n_e} \frac{\partial \phi_e}{\partial n} = j \frac{\rho_e}{n_m e}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi_e}{\partial p_0} = \frac{3 k_B T_e}{n_e}$$

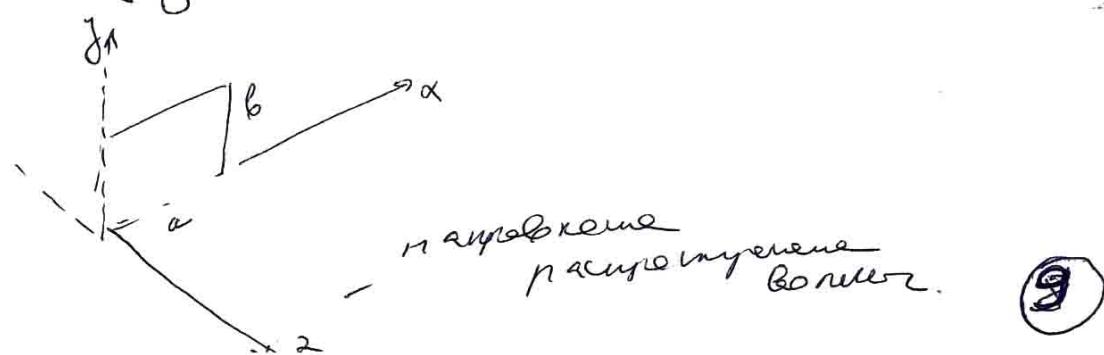
$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \omega^2 n' = 0$$

Оператор краев - Гурвич значит
оператор!

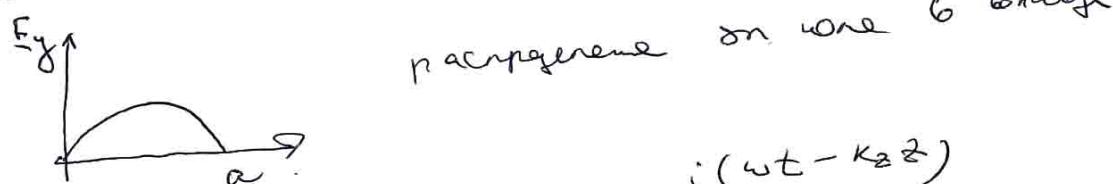
Дисперсионное уравнение:



3. Прямоугольный волновод
 Рассмотрим вопрос о прохождении
 электромагнитных волн через
 тело прямоугольного сечения



Для м. волн по времени
дл. волны перпендикулярна z
и она должна ограничиться 0 на
стенах $x = a$!



Тогда $E_y = E_0 \sin K_x X e^{-(\omega t - K_z z)}$
 $\omega = \frac{u}{K_z}$ — продольные амплитуды.
 $K_x a = n\pi \Rightarrow K_x = \frac{n\pi}{a}$ — первые гармоники.
 Имеем для нормированных коэффициентов:

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -K_x^2 E_y \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -K_z^2 E_y$$

$$K_x^2 E_y + K_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0$$

$$\text{Однако } K_x^2 + K_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$K_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{u^2}{a^2}} \quad (\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k^2)$$

$$\omega_c = \frac{uc}{a}$$

(ω)

Если $\omega < \omega_c$, то

$$k_z = \pm i k^1, \quad k^1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{\omega_c^2}{c^2}}$$

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{\pm k^1 z} e^{i \omega t}$$

При достаточно низкой $\omega_c = \frac{aC}{a}$

Большой волны могут не

распространяться

Минимум ω_c \Rightarrow замедление \rightarrow
время

минимум большей частоты \Rightarrow

\Rightarrow замедление не излучение.

(11)

8 Лекция 05.04.2022.

8.1 Волны в акустических средах

05.04.22. Лекция 8

Волны в акустических средах

Акустика в широком смысле слова -

- это наука о звуке, изучающая явления и волны в различных средах от сотовых телефонов до предметов и их взаимодействия с веществом.

Чтобы из собственных интересов понять явление падения и волн в различных средах, воспользуемся гравитацией земли

($16F_g \approx 80 \text{ кг}$)

Рассмотрим модель акустической среды это сплошная среда, однородная и изотропная

Звуковая волна может распространяться и менять свойства среды

Если в некотором месте

упругая среда выходит наружу

разрушение, то звуковая

эта область становится и приходит в движение. Вокруг упругого места, движение передается между частичками, возникает движение другим по направлению передаваемое "соседям", и разрушение другим распространяется в среде

в среде

1

До этого мы рассматривали только в
твёрдых телах. Теперь поговорим о
среде в газе и жидкости.

При затяжии в жидкости, вдоль звёзды
формируется касательное напряжение (вспомог.)

Если для тела пренебр., т.е. если она
может не сопротивляться сдвигу, то это называется
независимой жидкостью

Сколько (или ν_2) требуется натянуть, если
бы мы хотели в состоянии покоя, то
и при затяжении отсутствующим касательным
напряжением

$$\underline{I} = -pE \quad \text{- гидростатическое давление}$$

(Угловое сопротивление не рассматривается)

① Упругие среды

v_c - угловое сопротивление

Если все внешние гравитационные, то $p = m g$

и $\frac{\partial p}{\partial t} + D \cdot (p v) = 0$ - действие наружу

Немногим отличается среда в гравитации

затем упр-е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + D \cdot (v \underline{E}) = 0$$

насе определяется обеими

сторонами

②

(2) Уп-е давления

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\nabla p + \rho \bar{f} -$$

нагревание
охлаждение

воздействие
силы грав.

нагревание
охлаждение

Уп-е является непрерывным:

консервативное свойство, $\nabla \cdot (\rho \bar{v})$

В дополнением к оно входит эффект нагревания/охлаждения плотности и давления молекул (но не влияет на неизмененное содержание). В этом случае амплитуда волн стоящих колебаний молекул, что их амплитуда не влияет на общее давление

Запись: $I = \rho E$ звуковая

В реальности не непрерывное непрерывное изменение. В турбулентном излучении непрерывное течение имеет более сложную форму. При этом непрерывное излучение не зависит от непрерывного изменения.

(3) Уп-е

$$P = P(\rho)$$

Быстроходное излучение

(3)

Таким образом, мы сформулировали
две общие уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{- давление изменяется} \\ \qquad \qquad \qquad (\text{вследствие упругости}) \\ p = p(\rho) \quad \text{- упругое сжатие} \\ \qquad \qquad \qquad (\text{и упругость}) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{давление неизменяется в упругом} \end{array} \right.$$

Несбалансированное. p, ρ, \vec{v} — в следующих
условиях и в упругом. Имеем
записывающую систему
Задано акустическое, т.е. оно определяется
давлением

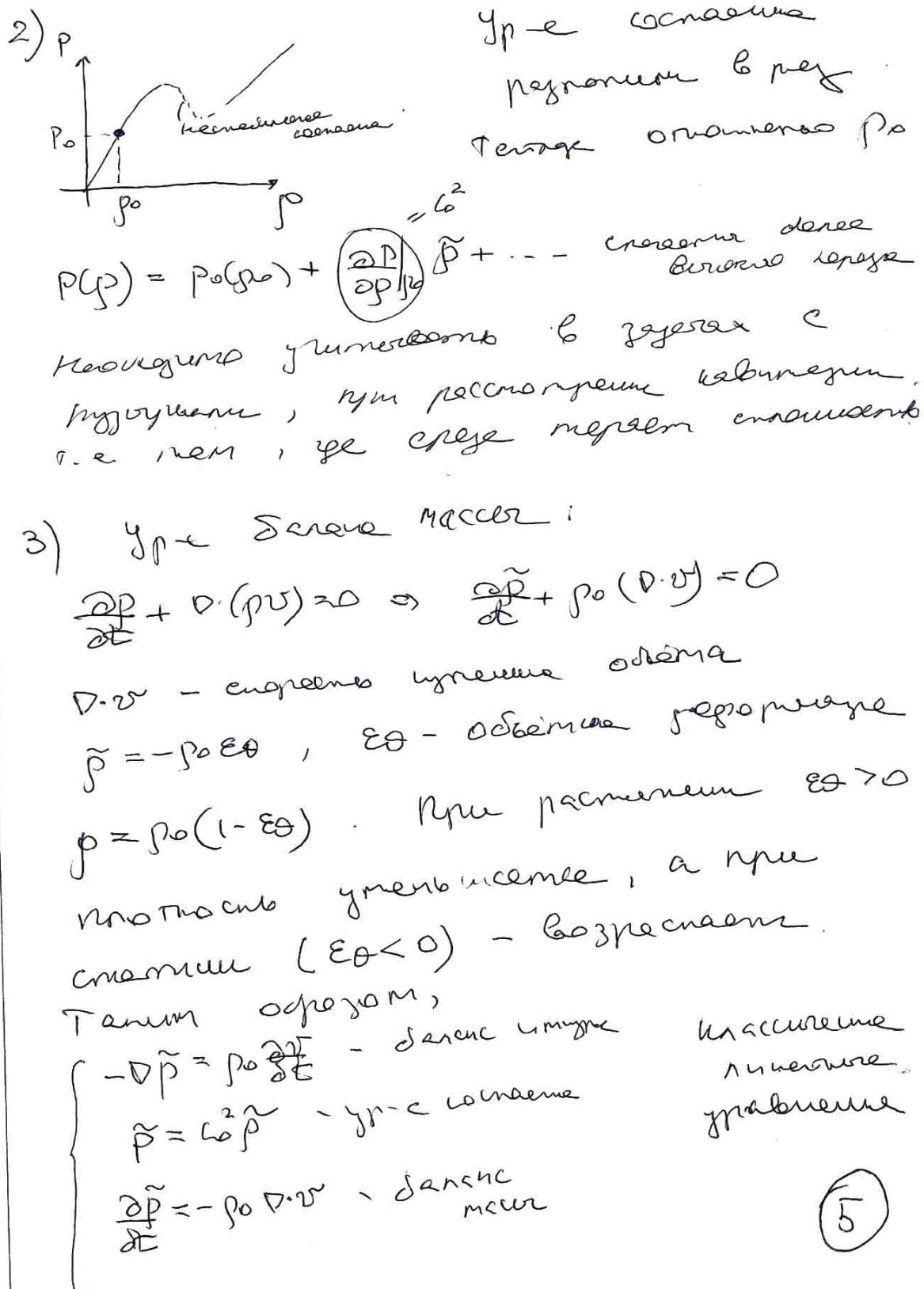
Составляющее давление сжатия
(p_0, ρ_0). В этом состоянии есть нейтральное
 $-\nabla p_0 = 0$. Упругое давление массы
изменяется независимо.

Вспомним, что балансовое давление
изотропного состояния, это балансовое давление
сжатия $\tilde{p} = p_0 + \tilde{\rho}$, $p = p_0 + \tilde{p}$, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}}$

$$1) \quad -\nabla(p_0 + \tilde{p}) = (p_0 + \tilde{p}) \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{-\nabla \tilde{p} = p_0 \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

$$\cancel{\frac{d\vec{v}}{dt}} = \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

(4)



Для тела двухстесна ур-е:
 синтетическое (сумма сил) и кинематическое
 Воздействие гидростатика от тел в
 пределах зоны нелинейного уравнения

$$\nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{v}) = \rho_0 \frac{d}{dt} \Phi \cdot \tilde{v}$$

С учетом первого уравнения

$$\Delta \tilde{p} = \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Rightarrow \text{Базисное ур-е}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \tilde{p} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = 0} \quad - \text{синтетическое ур-е}$$

$$\tilde{p}|_r = \text{зажатое давление}$$

Кинематическое ур-е: Введено времена
 τ - начальный момент, так что $\tilde{v} = \nabla \Phi$

Теорема Реномонга: $u = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi$

Φ - начальный момент, Ψ - векторный
 момент, при этом $\nabla \Phi$ является
 за поступательное движение: следствие
 из изменения аксиомы $\square \rightarrow \boxed{\square}$, а
 $\nabla \times \Psi$ соответствует вращению: из аксиомы
 + изменение порядка $\square \rightarrow \diamond$.

(6)

В аэростатических средах $\nabla \Phi$ неизм.,
 $\Sigma = \nabla \Phi$ и в балансе масс:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \Sigma \Rightarrow \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \Phi, \text{ и}$$

$$\text{с учетом уравнения } \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \Phi$$

$$\Delta \Phi + \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = 0$$

и в первом приближении (данное упрощение)

$$-\tilde{p} = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0}$$

нелинейное ур.

Оператор Даренберга

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и \underline{z} - вектор в трёхмерном пространстве

$$\underline{d} \cdot \underline{z} = d_x \cdot x + d_y \cdot y + d_z \cdot z, \quad \underline{d} - вектор$$

вектор, z - падение вектор нормали.

$$\text{т.к. } \Sigma = \nabla \Phi, \text{ то } \Sigma_n = \Sigma \cdot \underline{n} = \nabla \Phi \cdot \underline{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

$\Sigma_n = \nabla \Phi \cdot \underline{n}$ - касательное напряжение

соприкосновения не пересекают: $\nabla \Phi = 0$

Следовательно касательное напряжение \Rightarrow

закон Ньютона.

(7)

$$c_v = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial V} P_0} - \text{средство звука}$$

Произведение на единицу изобарии звука

или выражено как γ

Упр-е соглашение

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} - \text{отношение теплоемкостей}$$



$$P = \text{const} \cdot P_0^\gamma \Rightarrow \frac{P}{P_0} = \frac{P_0}{P_0^\gamma}$$

$$\frac{dP}{dP_0} \Big|_{P=P_0} = \gamma \frac{P_0}{P_0^\gamma}$$

$$\text{Таким образом } c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{P_0^\gamma}} =$$

$$= \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} \quad (\text{упр-е Менделеева - Клапейrona})$$

В выражении с тем же соотношением
неизбежно вспомогательное выражение.

Газ	$c_{sl, m/s}$
Водород	1265
Гелий	965
Азот	334
Водяной пар	331
Кислород	316
Температура ($^{\circ}\text{C}$)	

Материал	$c, m/s$
Водя (20 °C)	1490
Свинец (20 °C)	1180
Бронза (-262 °C)	1127
Азот (-156 °C)	867
Гелий (-365 °C)	180

(8)

8.2 Поверхностные гравитационные волны

Поверхностные гравитационные волны

При излучении волн в туманости
предсказано расширение гравитационных
волн (скорость волн уменьшается
в зависимости от звуковой скорости).

Даже если допустить основное предположение,
что помимо притяжения любых
телород, согласно распространению принципа
различие давления где различия
составляющих объекта решения.)

Чтобы рассмотреть гравитационные
системы, в которых учитывается
зависимость акселерации от времени
и от интенсивности.

Однако сейчас, когда уже заложены
составляющие от времени от скорости волн и
от интенсивности

Мы не будем учитывать различия
взаимодействий. В качестве примера
гравитационных волн рассмотрим
гравитационные волны, являющиеся

(9)

которых определение будущего времени
переходит в настоящее и его
сопровождается вероятностью будущего
своих темпов в сознании

~~установка~~ ~~результат~~
Более ~~становки~~ будущее, ~~последовательность~~
которое в будущем сознании
изменяется с увеличением
периодов времени с увеличением
времени - это будущее
затемненное более
сопротивляющееся времени

Существование склонов сразу в
один и воспринимают группами
групп или учащихся результативные
или более менее сразу
находится выше более позади
также появляются изменения результативных
образов при переходе через поверхность
различных материалов и т.д. Быть может
затемненное будущее склонов
превращается в будущие поверхности
затемненных более, которые

(10)

не могут распространяться само
им избирательно: они удаляют не
одинаково, так как расстояние между ячейками
больше.

Мы рассмотрим избирательные
установления более ищущих
ячейок между ячейками в зависимости
от того, преодолевают ли ячейки
избирательное напряжение.

Картина изменяется сильно при изменении
степени избирательности: если ячейки будут
избирательно приспособлены к определенным
т.е. мы имеем дело со стабильными
продолжительными и непрерывными ячейками.

Изображение:

1. Диссертация Лайхиль. Волны в
нейтронах. 1928 г.

2. Гарри Ламб. Гидродинамика, 1932 г.

(11)

9 Лекция 12.04.2022.

9.1 Краткое повторение материала о волнах в акустических средах

12.04.22 Лекция 9

Вспомним материал предыдущей лекции.

На основе базисных уравнений:

$$-\nabla p = p \frac{dV}{dt} \quad - \text{закон импульса}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (pV) = 0 \quad - \text{закон massa}$$

$$+ \gamma p \cdot e \quad \text{составление}$$

$$P = P(p)$$

Мы получим классическое линейное
уравнение вибраций среды относительно
исходного равновесного состояния P_0, ρ_0

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \tilde{p} = P_0 \frac{\partial V}{\partial t} \\ \tilde{p} = C^2 \tilde{V}, \quad C^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} / \rho_0 \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = -P_0 D \cdot \nabla \end{array} \right.$$

Далее звуки уп-е обозначаются к \sim $\gamma^{1/10}$

Основные физ. велич.

$$\text{Скорость: } \Delta \tilde{p} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0$$

Гр. упр. $\tilde{p}|_{r=0} = \Phi(t)$ - звуковая динамика

Кинематическое

$$\Delta \Phi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{r=0} = \Phi'(t) \quad \text{звуковая скорость}$$

и $\nabla \Phi - \text{нормальная звуковая скорость}$



9.2 Поверхностные гравитационные волны на границе между водой и воздухом

при условии отсутствие сихревого
движения в среде.

На основе этих урн можно получить
один тип волн, а именно,
поверхностные гравитационные волны
на границе между водой и воздухом.
Их движение определяется изменением
взаимодействия между поверхностью воды
и её стремлением вернуться
в исходное состояние течения в
новом состоянии равновесия.
составление устойчивого равновесия.

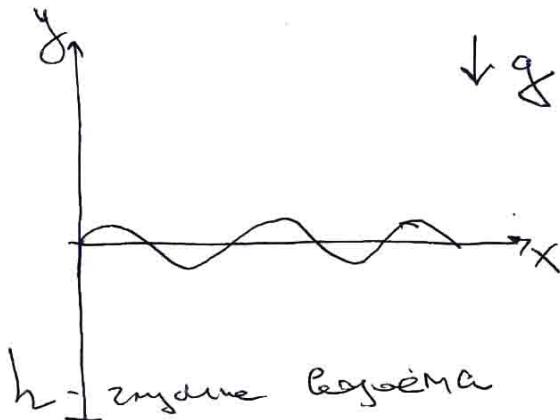
Если движение неизменное, то
 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad v = \nabla \varphi \Rightarrow$

$$\Delta \varphi = 0 \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ - условие на неприводимость
поверхности

Чтобы найти условие на
однородность поверхности возьмём
нашую координату на невозмущённом
уровне и направим ось Oz
вертикально вверх

(2)



h - глубина волны

Задачем ур-е длине волны на
вертикальную ось:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - g$$

После интегрирования с учётом
равенства $\nabla P = \nabla \varphi$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - gy + C(t) \quad \text{- начальное изображение}$$

На поверхности: $y = \eta$

η - возмущение поверхности над
момом $(x_0, 0)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - gy + \frac{P_0}{\rho} \cdot \text{Видор } C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \text{при } y = \eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \eta_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

После дифференцирования 1 ур-е по
времени имеет

(3)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

в ачу начальности
задачи ($y=0$) чешущее условие
составляе на небо знующим
небрежности

Так как же всех знаящих & чешущих
условие ограничено, то зная
одно из

$$y = f(y) \cos(\omega t - dx)$$

$$y \text{ подставляем } y = 0: \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow f'' - d^2 f = 0$$

Решение + чешущее условие
самоизменяется в касание
уравнение

$$f = A e^{dy} + B e^{-dy}$$

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{A} e^{-dh} - \cancel{B} e^{dh} = 0$$

$$\boxed{A e^{-dh} - B e^{dh} = 0}$$

(4)

$$2. \quad \ddot{\varphi} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

$$-(A+B)\omega^2 + gd(A-B) = 0$$

$$\begin{cases} (gd - \omega^2)A - B(\omega^2 + gd) = 0 \\ e^{-\alpha h}A - Be^{\alpha h} = 0 \end{cases}$$

Несколько гипотез о зависимости
самоизменения θ от него уравнение

$$\Delta = 0 \Rightarrow (gd - \omega^2)e^{\alpha h} = (\omega^2 + gd)e^{-\alpha h}$$

$$\omega^2(e^{\alpha h} + e^{-\alpha h}) = gd(e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{gd} \sqrt{\tanh(2h)}$$

Если одновременно $\sqrt{gh} = \omega_0$ — константа, то

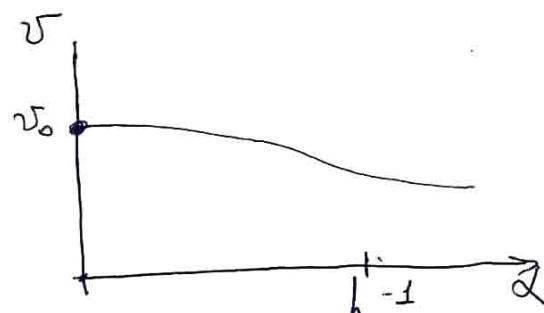
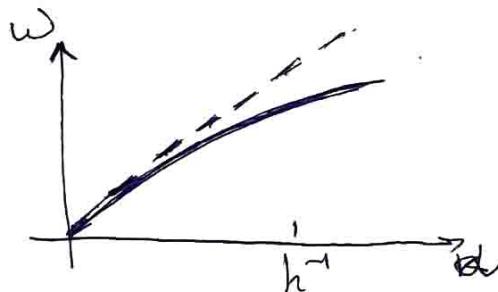
$$\omega = \omega_0 d \left(\frac{\tanh(2h)}{2h} \right)^{1/2}$$

$$\omega = \frac{\omega}{2} = \omega_0 \left(\frac{\tanh(2h)}{2h} \right)^{1/2} -$$

— связь синусов

(5)

График синуса:



Если угловое колесо $\omega \Delta h < 1$, то
 $\sin \omega \Delta h \approx \omega \Delta h \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = v_0 \Delta$$

Но можно брать гиперболу
 омнисимметрическую

Другое выражение:

$$\Delta h \gg 1 \quad \text{тогда} \quad \sin \omega \Delta h \approx \omega \Delta h \approx 1$$

$$\omega = \sqrt{g \Delta}$$

В общем случае брать наилучшее
 выражение гиперболы.

⑥

Вернемся к определению f :

$$\text{Если подождем} \quad Ae^{-\alpha h} = Be^{\alpha h} = \frac{1}{2} C, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} f &= Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y} = \\ &= \frac{1}{2} C (e^{\alpha(h+y)} + e^{-\alpha(h+y)}) = C \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} C \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{g} C \omega \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \sin(\omega t - \alpha x) =$$

$$= \alpha \sin(\omega t - \alpha x)$$

Вспомним C разы а, имеем:

$$C = \frac{\alpha g}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{\alpha g}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

Максимум достигнут

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\alpha g d}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \sin(\omega t - \alpha x)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\alpha g d}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{sh}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

затухание

(7)

10 Лекция 19.04.2022.

10.1 Продолжаем разговор о поверхностных волнах

19.04.22. Лекция 10.

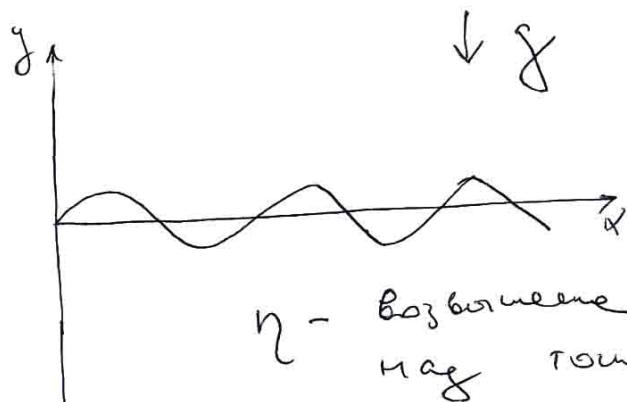
Продолжим разговор о поверхностных волнах на границе раздела δy .

Схема

Основное предположение

1. Несжимаемое тело
 2. $\Delta \Sigma = \nabla \Psi$
- $\Delta \Psi = 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$



η - возмущение поверхности
на граничном слое $(x, 0)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$\Psi = C e^{i k y} e^{i(\omega t - a x)}$$

Глубина тихоокеанская

①

10.2 Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей

Рассмотрим колебание поверхности раздела двух расположенных друг за другом жидкостей.

Движение

$$\varphi = C e^{\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

$$\varphi' = C' e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

сущих относится к верхней жидкости.

$$\eta = a e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Rightarrow i\omega a = \alpha C = -\alpha C'$$

Пр-е Эйлера после интегрирования по оси y

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - g y \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = -\frac{P'}{\rho'} - g y \end{cases}$$

На поверхности:

$$\begin{cases} P = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g \eta \\ P' = -\rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - g \eta \end{cases}$$

Приравниваем давление, получаем:

(2)

$$-\rho C i\omega - \rho g a = -\rho' C' i\omega - \rho' g a$$

$$\rho (C i\omega + g a) = \rho' (C' i\omega + g a)$$

C учётом условия $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow i\omega a = dC = -dC'$$

$$-\rho \frac{\omega^2 a}{2} + \rho g a = \rho' \frac{\omega^2 a}{2} + \rho' g a$$

$$\frac{\omega^2}{2} (\rho' + \rho) = g (\rho - \rho')$$

$$\omega^2 = \frac{g(\rho - \rho')}{\rho + \rho'}$$

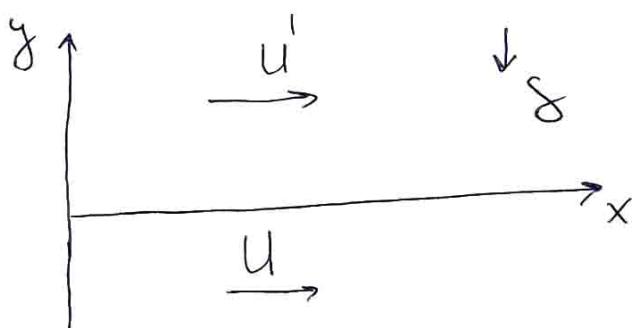
$$C_o^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} = \frac{g}{2} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$$

Таким образом, присутствие верхней эмульсии вызывает уменьшение скорости распространения волн.

(3)

10.3 Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей, которые движутся друг над другом

Предположим, что две турбулентные
плотности ρ и ρ' движутся
одна над другой со скоростями u и u'
параллельными оси x



Нужно решить краевую задачу

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{условие}$$

на непроницаемый

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}$$

$$\eta = ux + \varphi_1, \quad \varphi' = u'x + \varphi'_1$$

Ур-е дна

$$\frac{P}{\rho} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - gy$$

Аналогично для верхней турбулентности

(4)

Из непрерывности φ в точке на
поверхности.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + g \eta \right] = \\ = P' \left[\frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + U' \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} + g \eta \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C e^{i(\omega t - \alpha x)} \\ \varphi'_1 &= C' e^{-i\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha x)} \\ \eta &= a e^{i(\omega t - \alpha x)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + U' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i \omega a - U i \alpha d = dC \\ i \omega a - U' i \alpha d = -dC' \end{cases}$$

$$\begin{cases} i \alpha (\omega - U) = dC \\ i \alpha (\omega - U') = -dC' \end{cases}$$

\Rightarrow Видимо к сильному уравнению

(5)

$$\rho [i(\omega - \alpha u) c + g a] = \rho' [i(\omega - \alpha u') c' + g a]$$

Приравнение вида $c = c'$

$$\rho [i(\omega - \alpha u) \frac{i\alpha(\omega - \alpha u)}{\alpha} + g a] =$$

$$= \rho' [-i(\omega - \alpha u') \frac{i\alpha(\omega - \alpha u')}{\alpha} + g a]$$

$$\rho \left[-(\omega - \alpha u)^2 \frac{g}{\alpha} + g a \right] =$$

$$= \rho' [(\omega - \alpha u')^2 \frac{g}{\alpha} + g a]$$

$$g \alpha (\rho - \rho') = \rho (\omega - \alpha u)^2 + \rho' (\omega - \alpha u')^2$$

Можно написать квадратное ур-е
относительно ω и находит
корни симметричного уравнения

$$(\rho' + \rho) \omega^2 - 2 \omega \alpha [\rho u + \rho' u'] + \alpha^2 (u'^2 + u^2) - g \alpha (\rho - \rho') = 0$$

(6)

$$C_0 = \frac{\omega}{d} = \frac{pu + p'u'}{p+p'} = \left\{ \underbrace{\frac{g}{d} \frac{p-p'}{p+p'}}_{c^2} - \frac{pp'}{(p+p')^2} (u-u')^2 \right\}^{1/2}$$

$$C_0 = \bar{c} \pm d$$

$$c^2 = c_0^2 - \frac{pp'}{(p+p')^2} (u-u')^2$$

c_0 — скорость волн в отсутствие течения

Значение ω ~~для~~ минимально,

$$\text{если } (u-u')^2 > \frac{g}{2} \frac{(p-p')(p+p')}{pp'} = \\ = \frac{g}{2} \frac{(p^2-p'^2)}{pp'}$$

Согласно при достижении допыных d или при достижении максимумов конца границе ~~для~~ ~~всех~~ ~~одинаковых~~ волн $p=p'$ то наше значение ω ~~настолько~~ ~~же~~ ~~одинаково~~ для ~~всех~~ ~~одинаковых~~ волн.



10.4 Волны на границу между водой и воздухом без учёта силы тяжести (решение Эйлера)

Возьмёмся к исходной постановке задачи



$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \varphi = \nabla v$$

Но это учитывает силу тяжести.

$$\varphi = f(y) e^{i(t - \omega x)}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y} - \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{уравнение Эйлера}$$

но не учитывает:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad \text{На свободной поверхности } \rho = \rho_0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$1. \quad \text{На свободной поверхности: } \frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{y=0} = 0 \Rightarrow f|_{y=0} = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}|_{y=-h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}|_{y=-h} = 0$$

$$f'' + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - \omega^2 \right) f = 0 \quad \text{или}$$

$$f'' - j^2 f = 0, \quad j^2 = \frac{1}{c_0^2} (\omega^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2})$$

$$f = A \sin jy + B \cos jy$$

$$f|_{y=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

(8)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial j} \Big|_{j=0} = 0 \Rightarrow \operatorname{ch} j h = 0$$

Если j - вещественное, то решения нет

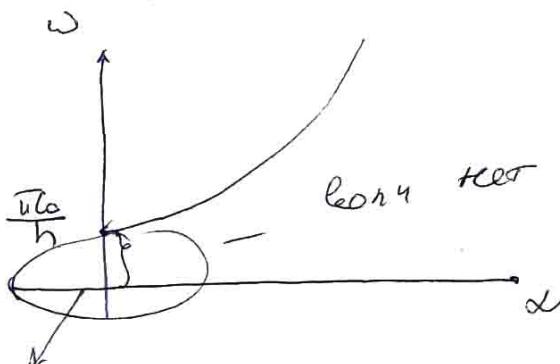
Сложн. число

$$j = \frac{1}{Co} \sqrt{dCo^2 - \omega^2}$$

$$j - \text{макс} \quad \cos j h = 0 \Rightarrow j h = \frac{\pi}{2} (2\pi n)$$

$$j^* = \frac{1}{Co} \sqrt{\omega^2 - dCo^2}$$

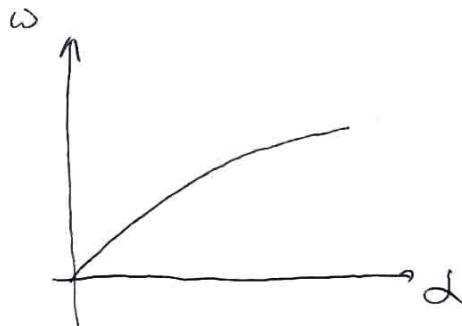
$$\omega^2 = \left(\frac{\pi(2\pi n)}{h} Co \right)^2 + dCo^2$$



Без теч / без учета сопротивления ω_0

$$\omega = \sqrt{gd}$$

Динамическое давление в потоке



(9)

11 Лекция 26.04.2022.

11.1 Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле

26.04.22 Лекция 11

Для типа уравнений

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad - \text{силовое ур-е}$$

$$P|_r = \varphi(t) \quad - \text{здесь Дирихле}$$

$$\underline{U} = \nabla \varphi \quad - \text{кинемат. ур-е}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad - \text{кинемат. ур-е}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}|_r = \varphi(t) \quad - \text{здесь Нейман}$$

перейдём в сферическую систему координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad - \text{оператор Планка}$$

оставим зависимость только от r

$$\text{Тогда } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}$$

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \varphi_1(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r} \varphi_2(t + \frac{r}{c})$$

Амплитуда убывает пропорционально расстоянию, чтоivozvano расширением поверхности фронта.

(1)

$$\varphi = \frac{1}{2} \varphi_1 (t - \frac{\xi}{c})$$

$$\rho = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\rho}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\rho}{c} \varphi_1'$$

$$\xi = t - \frac{\xi}{c}$$

$$v = \nabla \varphi = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi_1 =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\varphi_1'}{c} - \frac{1}{r^2} \varphi_1 =$$

$$= +\frac{1}{2} \frac{\rho \xi}{c \rho} + \frac{1}{2\rho} \int \rho dt =$$

$$= \frac{\rho}{2c} + \frac{1}{2\rho} \int_1^t \rho dt$$

значение none

другое none

$$\sigma = -\rho c v - \text{две сортующие одна другую равны}$$

теплое среднее определяет скорость
распространения в газовом none, которое
определяется за единицу времени.
Второй газ, убывающий с расширением
как $1/r^2$ занимает близких источников
и преобразуется так на дополнительных
расширениях

(2)

Несколько источников создают гармоническую волну

$$\varphi_F = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - dr)}$$

$$\rho = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\omega \rho \varphi$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{(1 + i\alpha z)}{z} \varphi$$

$$\frac{\rho}{v} = \frac{zi\omega\rho}{1 + i\alpha z} = \frac{zcd\rho i}{1 + i\alpha z}$$

Самоизменение вектора звукового давления

$$\tilde{z} = \frac{i}{1 + i\alpha z} = \frac{i(1 - i\alpha z)}{1 + \alpha^2 z^2} = \frac{dz + i}{1 + \alpha^2 z^2}$$

$$|\tilde{z}| = \frac{\sqrt{d^2 z^2 + 1}}{d^2 z^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 z^2}}$$

$$\frac{\rho}{v} = \frac{zcd\rho e}{\sqrt{1 + \alpha^2 z^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1}{\alpha z} = \arctan \frac{1}{2az}$$

$\alpha z \gg 1$ соотношение между

мощью P и v соотвествует

мощной волне (запасное нажим)

Иногда это называют волновой зоной.

(3)

$z = pc -$ акустическое сопротивление
среды (акустический импеданс)

$$z = pc \frac{d^2 z^2}{1 + d^2 z^2} + i \frac{pc}{1 + d^2 z^2}$$

В общем он показывает

импеданс имеет комплексный вид,
что указывает на наличие фазового

угла между p и z

Слово же z означает сопротивление и
скорее отображает нее, что
было итогом кроме волокна
гидравлическое сопротивление
импеданса является также

импеданса сопротивления среды.

Инерционное сопротивление
представляет собой

$$x = Im z = w m_s, \text{ где}$$

$$m_s = \frac{p^2}{1 + (d\Gamma)^2}$$

масса на ед.
площади в см.
нормальности

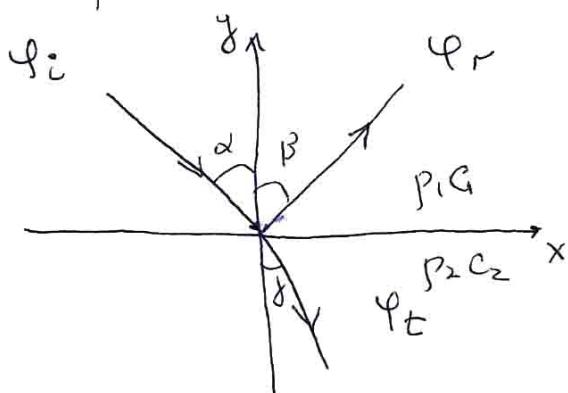
Инерционное сопротивление
среды (присущая масса)

(4)

11.2 Наклонное падение волны

Наклонное падение волн

Если акустическая волна встречает на пути распространения преломляющее и зеркальное зеркало волна отражается и проходит во вторую среду таким образом однозначно при этом: падающие, отраженные и преломленные.



Прямое зеркало падает на плоскую поверхность $y=0$. При этом однозначно отражаются Φ_r и преломленные Φ_t волны.

$$\Phi = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\Phi_i = A_i e^{i(\omega t - k_1(x \sin \alpha - y \cos \alpha))}$$

$$\Phi_r = A_r e^{i(\omega t - k_1(x \sin \beta + y \cos \beta))}$$

$$\Phi_t = A_t e^{i(\omega t - k_2(x \sin \gamma - y \cos \gamma))}$$

$$k_1 \cdot \vec{k}_1 = \omega x + \omega y = \omega (x n_x + y n_y)$$

$$\vec{k} = \frac{\omega \vec{n}}{c}$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

(5)

На плоскости $y=0$ должны
выполняться граничные условия

$$P_2 (\varphi_i + \varphi_r) \Big|_{y=0} = P_2 \varphi_t \Big|_{y=0} \quad \text{непрерывность}\newline \text{закономерности}$$

$$\frac{\partial (\varphi_i + \varphi_r)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Непрерывность нормальной комп. скорости

Нормальное выражение начальных
и граничное выражение начальных
нормалей системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} P_2 A_i e^{-id_1 x \sin \alpha} + P_2 A_r e^{-id_1 x \sin \beta} = P_2 A_t e^{-id_2 x \sin \gamma} \\ d_1 \cos \alpha A_i e^{-id_1 x \sin \alpha} - d_1 \cos \beta A_r e^{-id_1 x \sin \beta} = d_2 \cos \gamma A_t e^{-id_2 x \sin \gamma} \end{array} \right.$$

Умножим обе части на $e^{id_2 x \sin \gamma}$
и решим борьбие при $d_2 x \sin \gamma$
 α , коэффициент при x сократим
делим остаток.

Решением является место такого при
условии равенства неравенств

$$d_1 \sin \alpha = d_1 \sin \beta = d_2 \sin \gamma \Rightarrow$$

$$\boxed{d = \beta, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{c_1}{c_2}}$$

(6)

Условие б отсече зону
ограничение и преодоление
С учётом данных соотношений
системе уп-я принципом Бю

$$\begin{cases} \rho_1 (A_i + A_r) = \rho_2 A_t \\ k \rho_1 (A_i - A_r) \cos \alpha = d_2 A_t \cos \beta \end{cases}$$

$$r_\phi = \frac{A_r}{A_i} = \frac{\rho_2 c_2 \cos \alpha - \rho_1 c_1 \cos \beta}{\rho_2 c_2 \cos \alpha + \rho_1 c_1 \cos \beta}$$

$$t_4 = \frac{A_t}{A_i} = \frac{2 \rho_2 c_2 \cos \alpha}{\rho_2 c_2 \cos \alpha + \rho_1 c_1 \cos \beta}.$$

В случае нормального нагрева:

$$r_h = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = -\frac{1-q}{1+q}, \quad q = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$$

$$t_n = \frac{2 \rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{2q}{1+q}$$

Эти соотношения дают значение
для полученного параллеле.

(7)

12 Лекция 17.05.2022.

12.1 Повторение материала о волнах в сферической СК

17. 05. 22. Лекция 12

Сферическая система координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\partial}{r\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

- оператор Лапласа

Если $\psi = \psi(r, t)$, то $\nabla^2 =$

Дивергенция имеет вид

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2}$$

$$\psi(z, t) = \frac{1}{r} \psi_1(t - \frac{z}{c}) + \frac{1}{r} \psi_2(t + \frac{z}{c})$$

В сферической гармонической волне

$$\psi = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - dr)}$$

$$P = -P \frac{\partial \psi}{\partial r} = -i \omega P \psi$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\left(\frac{1+idz}{2}\right) \psi$$

$$\frac{P}{v} = \rho c \cos \varphi e^{i\varphi} = \rho c \frac{dr}{\sqrt{1+d^2r^2}} e^{i\varphi}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1}{dr}$$

$\omega_2 \gg \omega_1 \Rightarrow$ большее зоне

$P = \rho c v$ дальше соотношение
коэффициентов между волнами

①

12.2 Энергия звуковых волн

Энергия звуковых волн

При распространении звуковой волны в упругой среде каждая единица объема среды содержит определенное количество энергии. Покажем, что эта энергия равна сумме кинетической энергии колебательной волны и потенциальной энергии, обусловленной упругим деформированием среды.

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = - \nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

Вспоминаем關係式

$$\nabla \cdot (\rho \nabla \varphi) = \rho \nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \rho \nabla \cdot \nabla \varphi = - \nabla \cdot (\rho \nabla \varphi) \quad (*)$$

Упрощение задачи:

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = - \rho_0 \nabla \cdot \nabla \varphi$$

$$\text{Упрощение: } \rho = c^2 \rho_0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \nabla \varphi = - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$$

Тогда упрощение (*) применимо

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{\nabla^2 \varphi}{2} + \frac{\boldsymbol{P}^2}{2 \rho_0 c^2} \right) = - \nabla \cdot (\rho \nabla \varphi)$$

(2)

Чтобы упростить формулу второго слагаемого, рассчитаем работу, затрачиваемую изотермическим сжатием газа при разогреве объема V_0 на величину dV

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{dV}{V_0} \Rightarrow dV = -V_0 \frac{dp}{p_0} = -\frac{V_0 dp}{6^2 p_0}$$

$$dA = p dV = -\frac{V_0}{6^2 p_0} p dp$$

$$A = - \int_0^P \frac{V_0}{6^2 p_0} p dp = -\frac{V_0}{26^2 p_0} P^2$$

Следовательно, второе членение есть изменение энергии при общей

формуле $W = p_0 \frac{\Delta V^2}{2} + \frac{P^2}{26^2 p_0}$ - площадь заложенной энергии

Для малой поверхности $p = p_0 \cos \varphi$ и

$$W = p_0 \Delta V^2 = \frac{P^2}{p_0 6^2}$$

$$\int_V W dV = E - \text{нормальная энергия в объеме } V$$

$p \Delta V = Q$ - величина нормальной энергии через единичную поверхность (площадь нормальной единичной поверхности), максимальная величина тепла

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int_S Q_n dS$$

- величина тепла Q через замкнутую поверхность

(3)

Исток энергии звука волна означает
с некоторыми начальными величинами, на которые
интенсивность

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T Q dt \quad \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right)$$

Две гармонические волны

$$p = p_m \cos \omega t, \quad v = v_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$Q = p v = \frac{1}{2} p_m v_m \cos \varphi + \frac{1}{2} p_m v_m \cos(2\omega t - \varphi)$$

Несущая и несущая волны

$$J = \frac{1}{2} p_m v_m \cos \varphi$$

Интенсивность звука в момент времени $\varphi = 0$, $\frac{p_m}{v_m} = p_0 c_0$

$$J = \frac{1}{2} \frac{p_m}{p_0 c_0} = \frac{1}{2} p_0 c_0 v_m^2$$

В спрессованной зоне:

$$p_m = \frac{w p_0 A}{r} = \frac{p_0 c_0 d A}{r}$$

$$v_m = \frac{dA}{r \cos \varphi}$$

$$J = \frac{1}{2} p_0 c_0 \frac{d^2 A}{r^2}$$

Однако пропорционально квадрату расстояния

$$J = \frac{1}{2} p_0 c_0 v_m^2 \cos^2 \varphi$$

Интенсивность падает и уменьшается

при $\cos \varphi \rightarrow 1$,

волна сбивающим при

t.e. в конической зоне.

(4)