Муравцев Александр 5040103/10401
Email: muravtsev.aa@edu.spbstu.ru

Расчётное задание 1
Вариант: а

Задача (несвязанная динамическая задача термоупругости)

Рассматривается полубесконечный стержень с модулем Юнга E и плотностью ρ, для которого справедливо соотношение Дюамеля-Неймана. Объёмный источник в уравнении теплопроводности задан в виде

$$Q = J_0(H(t) - H(t-\tau))e^{-\gamma x},$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Пренебрегая теплопроводностью материала, получить термоупругий импульс на расстоянии, существенно превышающем глубину проникновения теплового источника.

Принять, что время действия теплового импульса τ много меньше времени пробега акустической волны до координаты, в которой производится регистрация сигнала.

Постановка задачи

По условию пренебрегаем теплопроводностью материала стержня (не учитываем распространение тепла вдоль стержня), поэтому уравнение теплопроводности можем записать в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = Q \Leftrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = J_0(H(t) - H(t-\tau))e^{-\gamma x} \tag{1}$$

Тогда распределение температуры по стержню (см. рис.1):

$$\theta = J_0\left(tH(t) - (t-\tau)H(t-\tau)\right)e^{-\gamma x} \tag{2}$$

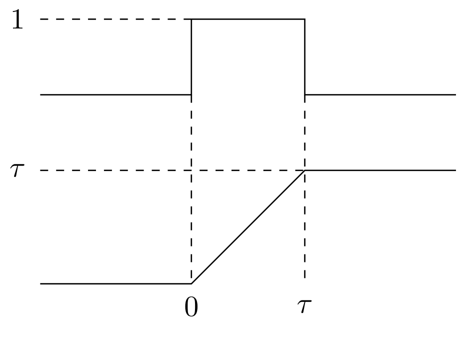

Рис. 1: Интегрирование ступенчатого импульса

Далее подключаем уравнение баланса импульса:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} = 0, \tag{3}$$

где $\sigma = E\left(\varepsilon - \alpha\theta\right)$ (соотношение Дюамеля-Неймана) и $\varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.
После подстановки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial \theta}{\partial x}, \tag{4}$$

где $c_0 = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ – скорость звука в стержне.
Далее подставляем выражение для распределения температуры (2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -J_0 \cdot \alpha \cdot (tH(t) - (t-\tau)H(t-\tau)) \cdot \gamma e^{-\gamma x} \tag{5}$$

Левый торец стержня свободен:

$$\sigma|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha \cdot J_0 \cdot (tH(t) - (t-\tau)H(t-\tau)) \cdot e^{-\gamma x} \tag{6}$$

На бесконечности ставим условие излучения:

$$u|_{x\to\infty} - \text{условие излучения} \tag{7}$$

Ставим нулевые начальные условия:

$$u(0,x) = 0 \text{ и } \dot{u}(0,x) = 0 \tag{8}$$

Таким образом, получаем постановку задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -J_0 \cdot \alpha \cdot (tH(t) - (t-\tau)H(t-\tau)) \cdot \gamma e^{-\gamma x} \\ \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha \cdot J_0 \cdot (tH(t) - (t-\tau)H(t-\tau)) \cdot e^{-\gamma x} \\ u|_{x\to\infty} - \text{условие излучения} \\ \\ u(0,x) = 0 \\ \dot{u}(0,x) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Преобразование Лапласа

В пространстве Лапласа постановка задачи перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u^L}{dx^2} - \dfrac{p^2}{c_0^2} u^L = -J_0 \cdot \alpha \cdot \dfrac{1 - e^{-\tau p}}{p^2} \cdot \gamma e^{-\gamma x} \\ \\ \left.\dfrac{du^L}{dx}\right|_{x=0} = \alpha \cdot J_0 \cdot \dfrac{1 - e^{-\tau p}}{p^2} \cdot e^{-\gamma x} \\ u^L|_{x\to\infty} - \text{условие излучения} \end{cases} \tag{10}$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения:

$$u^L = C_1 e^{px/c} + C_2 e^{-px/c} + \frac{J_0 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot (1 - e^{-\tau p})}{p^2 \left(\frac{p^2}{c^2} - \gamma^2\right)} e^{-\gamma x} \tag{11}$$

Из первого граничного условия: