

Содержание

1 Лекция 08.02.2022.	4
1.1 Введение	4
1.2 Уравнение сплошной среды	7
1.3 Решение Д'Аламбера. Граничные условия	9
1.3.1 Пример	11
1.4 Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость	12
1.4.1 Примеры	15
2 Лекция 15.02.2022.	17
2.1 Использование преобразований Фурье и Лапласа. Введение	17
2.2 Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности	21
3 Лекция 22.02.2022.	27
3.1 Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия	27
3.2 Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость	33
3.3 Метод стационарной фазы	37
4 Лекция 01.03.2022.	40
4.1 Повторение. Преобразование Лапласа. Теорема о вычетах. Ряд Лорана. Лемма Жордана	40
4.2 Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа	46
5 Лекция 15.03.2022.	50
5.1 Применение преобразования Лапласа. Трудности	50
5.2 Несвязанная динамическая задача термоупругости	53
5.3 Дельта-функция Дирака	54
5.4 Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера	55
5.5 Движущийся источник звука	57
5.6 Влияние включений на волновой процесс. Смешанный спектр	58
6 Лекция 22.03.2022.	62
6.1 Небольшое замечание к задаче	62
6.2 О стационарных решениях	63
6.3 Метод предельного поглощения	65
6.3.1 Функция Грина статической задачи	65
6.3.2 Функция Грина динамической задачи	68
6.3.3 Применение метода предельного поглощения	71
7 Лекция 29.03.2022.	75
7.1 Повторение метода предельного поглощения	75
7.2 Примеры волн в различных средах	79
7.2.1 Термоупругие волны	79
7.2.2 Плазменные волны	81
7.2.3 Прямоугольный волновод	83

8	Лекция 05.04.2022.	86
8.1	Волны в акустических средах	86
8.2	Поверхностные гравитационные волны	94
9	Лекция 12.04.2022.	97
9.1	Краткое повторение материала о волнах в акустических средах	97
9.2	Поверхностные гравитационные волны на границе между водой и воздухом	98
10	Лекция 19.04.2022.	104
10.1	Продолжаем разговор о поверхностных волнах	104
10.2	Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей	105
10.3	Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей, которые движутся друг над другом	107
10.4	Волны на границу между водой и воздухом без учёта силы тяжести (решение Эйлера)	111
11	Лекция 26.04.2022.	113
11.1	Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле	113
11.2	Наклонное падение волны	117
12	Лекция 17.05.2022.	120
12.1	Повторение материала о волнах в сферической СК	120
12.2	Энергия звуковых волн	121

Волны в деформируемых средах

Конспект лекций

Вавилов Д.С.¹ Муравцев А.А.²

8 июня 2022 г.

Список вопросов по дисциплине «Волны в деформируемых средах», 2022

1. Уравнение сплошной среды. Решение Д'Аламбера. Границные условия.
2. Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость.
3. Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности.
4. Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия. Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость.
5. Метод стационарной фазы
6. Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа.
7. Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера.
8. Влияние включения на волновой процесс. Смешанный спектр.
9. Стационарные решения. Метод предельного поглощения. Функция Грина.
10. Волны в различных средах.
11. Волны в акустических средах
12. Поверхностные гравитационные волны на границу между водой и воздухом.
13. Поверхностные гравитационные волны на границу двух жидкостей.
14. Поверхностные гравитационные волны на границу двух жидкостей, который движутся друг над другом.
15. Волны на границу между водой и воздухом без учета силы тяжести (Решение Эйлера).
16. Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле.
17. Наклонное падение волны.
18. Энергия звуковых волн.

¹лектор и составитель рукописного конспекта, Высшая школа теоретической механики, Санкт-Петербургский Политехнический университет. Дополнительные материалы к лекциям [доступны по ссылке](#).

²дополнил конспект и объединил файлы; email: almuravcev@yandex.ru

1 Лекция 08.02.2022.

1.1 Введение

Вавилов Дмитрий Сергеевич

норма: londr@yandex.ru

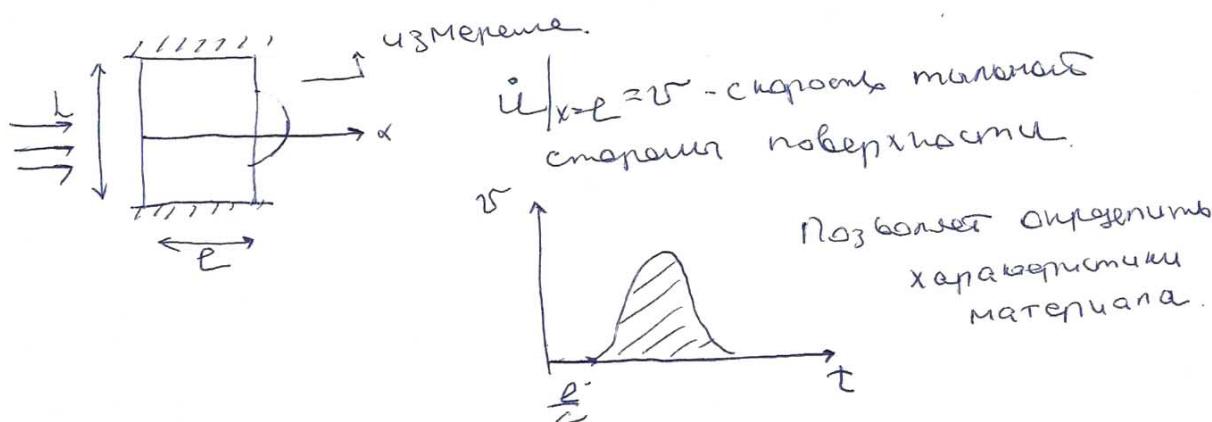
Литература

1. Н. В. Карлов, Н. А. Киряченко
Колебания. Волны. Струны и
волны
2. Дм. Узден. Линейные и
нелинейные волны
3. М.И. Рабинович, Д.И. Трудесюков
Введение в теорию колебаний
и волн
4. Ф. М. Морс, Г. Фейнбах
Методы теоретической физики (2 том)
5. Г. Арджеке Математические
методы в физике

Волны в деформируемых средах

08.02. Введение. Одномерные волны в деформируемом теле.

Волна - это распространение колебаний в сплошных средах. Исследование динамического процесса, когда необходимо установить как передача возмущения от элементарного объема к другому.



Предположим, что мы можем менять время взаимодействия. При этом у нас есть общее время характеристическое времени

$$\frac{G}{M} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{G}} \quad \text{Материал имеет}$$

однасле характеристич. врем.

$$1. \text{ Макроуровень } T_1 = \frac{L}{c}$$

c - скорость звука $c = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$

$$\exists \quad L = 1 \text{ см} \Rightarrow T_1 = \frac{10^{-2} \cdot c}{5 \cdot 10^3 \text{ м/с}} = 2 \text{ мкс}$$

$$f = \frac{1}{T_1} = 5 \cdot 10^5 \text{ Гц} \quad (1)$$

2. Зеркало $D \cdot (100 - 200) \text{ мкм}$
 $\tau_2 = \frac{D}{C} = \frac{\omega^2 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ с} , f \sim 10^7 - 10^8 \text{ Гц}$

3. Механические связи основные

$$\tau_3 = T \sqrt{\frac{C}{m}} \sim 10^{12} - 10^{15} \text{ с.}$$

Если мы хотим получше выделить влияние на сигнал

$$\tau_{\text{ширина}} \leq \tau_{1,2,3}$$

1. $\frac{L}{\rho} \ll 1$ малине частоты звука
 Нем. Влияние изгиба

2. Основное направление сжатия.

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \sigma_{xy} \sigma_{xz} \\ \sigma_y \sigma_z \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \sigma_{yz} \sigma_z \end{pmatrix} \quad \sigma_x - \text{главное напряжение}$$

Одесимо время удара $t_{удара}$
 Тер., рассматривая столкновение
 сферу, находящую торцом на
 неподвижную стекло.

Изменение упругого удара происходит
 мгновенно $dP = \frac{F dt}{\Delta t}$ или взаимодействие

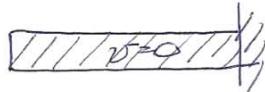
единства вспышка

$t=0$ момент соприкосновения сферы
 со стеклом.



1.2 Уравнение сплошной среды

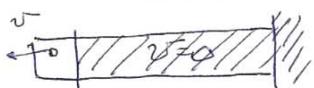
δ)



Весь стержень окажется деформирован в единицу

Кинетическая энергия начального стержня целиком превращается в потенциальную энергию упругой деформации

б)



Второй элар. стержень возвращается в исходное

состоиние. Этому процессу назначается у свободного торца и постепенно приближается к нулю.

Энергия упругой деформации стержня в упругом переходе обратно в кинетическую энергию.

$$\Sigma = \frac{2E}{C} - \text{гнительность сплошной среды}$$

Базовые ур-я: Баланс импульса,
Баланс момента импульса, Баланс массы
Баланс энергии (в теплофизике)

$$\text{Баланс импульса} \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = p \frac{dV_x}{dt}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{dV_x}{dt} \approx \frac{\partial V_x}{\partial t}$$

Второй член это ненулевое

$\frac{\partial V_x}{\partial t}$ - локальное производное

$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x}$ - конвективное производное

(3)

Баланс массы: $\frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$

+ Определяющее ур-е (изотермический случай)

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

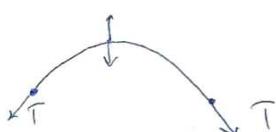
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = p \frac{d u_x}{d t} \\ \frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\ \sigma = E \varepsilon \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{линейизируем уравнение} \\ \text{относительно равновесного} \\ \text{составления} \end{array}$$

$p = p_0 + \tilde{p}$, $u_x = 0 + u_x'$, $u_x' = \frac{\partial u}{\partial t}$

Уз первое уравнение $\tilde{p} = -p_0 \varepsilon$, $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$
 $\rho = \rho_0(1 - \varepsilon)$ - звукное изменение плотности

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right. \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad \text{- скорость звука}$$



$$T \cdot u_{xx} - \rho_0 u_{ttt} = 0$$

В звуком случае

$$c^2 = \frac{T}{\rho_0}$$

Уравнение стационарных волн

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

(4)

1.3 Решение Д'Аламбера. Граничные условия

Решение Д'Аламбера

$\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ - преобразование Галилея

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2 \partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} c + \frac{\partial u}{\partial \eta} c$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c^2 = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 - \frac{2 \partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \\ &- \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f^*(\eta)$$

$$\begin{aligned} u &= \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \\ &= f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c}) \end{aligned} \quad (5)$$

Как определить движущий f_1 и f_2 - ?

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = -c_0 f_1'(x) + c_0 f_2'(x) = \psi(x)$$

Умножим: $f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(d) dd + C$$

Система имеет решение (единственное)

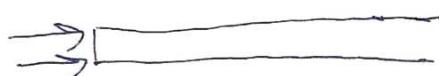
$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\lambda) d\lambda$$

Справедлива Данамедова

О родах граничных условий
Краевые условия на бесконечности

① Ограничность на ∞

② Условие непрерывности u и u_x на ∞



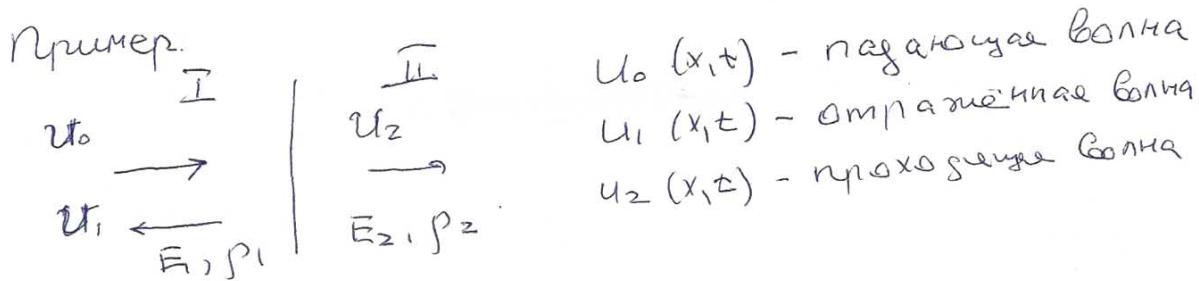
$$0 \leq x < \infty$$

$$u = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

③ Условие локализации $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx < \infty$

⑥

1.3.1 Пример



$$\begin{cases} u_0 + u_1 \Big|_{x=0} = u_2 \\ E_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_0 + u_1}{c_1} \right] \Big|_{x=0} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \end{cases}$$

$$u_0(x, t) = \tilde{u}_0(t - \frac{x}{c_1})$$

$$u_1(x, t) = \tilde{u}_1(t + \frac{x}{c_1})$$

$$u_2(x, t) = \tilde{u}_2(t - \frac{x}{c_2})$$

$$\begin{cases} u_0 + u_1 = u_2 \\ \frac{E_1}{c_1} \left(-u_0 + u_1 \right) = -\frac{E_2}{c_2} u_2 \end{cases} \quad (\text{после интегрирования})$$

$$u_0 + u_1 = u_2$$

$$\gamma(u_0 - u_1) = +u_2$$

$$\gamma = \frac{E_1 c_2}{E_2 c_1} = \frac{G^2 P_1 c_2}{G^2 P_2 c_1} = \frac{G P_1}{G P_2} \quad (\text{cp - балльное соотношение})$$

$$\gamma(u_0 - u_1) = +u_0 + u_1$$

$$-\gamma u_1 = +u_0 - \gamma u_0$$

$$-u_1(\gamma + 1) = u_0(1 - \gamma)$$

$$u_1 = -\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} u_0(t + \frac{x}{c_1})$$

$$u_2 = \frac{2\gamma}{1 + \gamma} u_0(t - \frac{x}{c_2})$$

$$R = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad D = \frac{2\gamma}{1 + \gamma}, \quad R + D = 1$$

(7)

1.4 Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость

$$\bar{E}_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0, \quad \bar{E}_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_0$$

напоминание о физике
(аналогия с электродинамикой)

$$\frac{n_1}{n_2} = f \quad n - показатель преломления$$

$$\bar{E}_1 = -\frac{1-f}{1+f} E_0, \quad \bar{E}_2 = \frac{2f}{1+f} E_0$$

Сравнение с полученным результатом

Спектральные свойства оператора Д'Аламбера

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{не симметрическое})$$

Спектр частот и форм свободных колебаний (составляющие частоты и формы)

Ограничение на дисперсию

Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = A(x) e^{i\omega t} \Rightarrow A_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

$$L A = \Delta^2 A, \quad L = -\frac{d}{dx^2}, \quad \Delta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\omega = \pm \Delta c$$

$$[\omega] = \frac{pc}{c}, \quad [\Delta] = \frac{1}{M} \quad \Delta - \text{базовое число}$$

$$A(x) = a e^{-i\Delta x} + b e^{i\Delta x}$$

$$A(x)_{x \rightarrow \pm\infty} - \text{ограничено}, \quad \text{т.к. } \Delta - \text{вещественное число}$$

8

ω - базовое число
 ω - новое базовое число! \Rightarrow
 непрерывный спектр.

Собственная моя (форма) колебаний

$$u_\omega(x, t, \omega) = a_\omega e^{i\omega t - i\frac{\omega x}{c}} + b_\omega e^{i\omega t + i\frac{\omega x}{c}} =$$

$$= a_\omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} + b_\omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})}$$

Зарезонансные колебания размежеваны
 пример синусоиды Наприимер,



$$u_k = \sin \frac{\pi k x}{L} e^{i\omega_k t}$$

$$\omega_k = \frac{\pi k c}{L}$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k x}{L} e^{i\omega_k t}$$

В случае гармонического колебания

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_\omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} b_\omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} d\omega \quad (\text{---})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_\omega e^{i\omega \xi} d\omega = f_1(\xi)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_\omega e^{i\omega \eta} d\omega = f_2(\eta)$$

$$\text{---} \quad f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c})$$

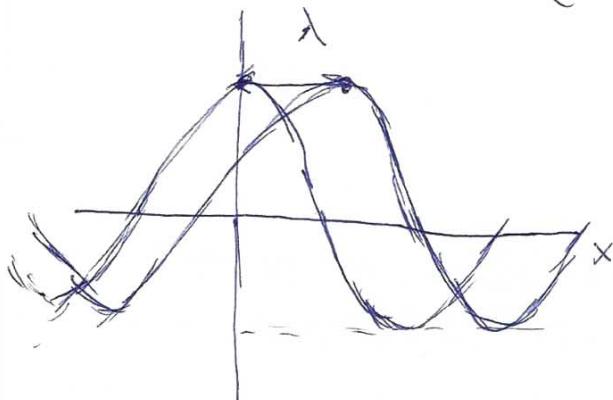
Решение Даламбера

(9)

$$e^{i\omega s} = e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \text{ - собственная мода}$$

Разберем волнистую волну

$$\operatorname{Re} e^{i\omega s} = \cos(\omega(t - \frac{x}{c})) = \cos(\omega t - \alpha x)$$



$$\frac{\omega}{c} = d \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = d$$

Большое число

изображение
распространения

Умножим собственную волну на единицу — это
единичная волна. С — характеристика
скорости распространения гармонических
волн. Если скорость распространения
гармоники равна с, то и скорость
единичной волны равна с.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} d\omega = f(t - \frac{x}{c})$$

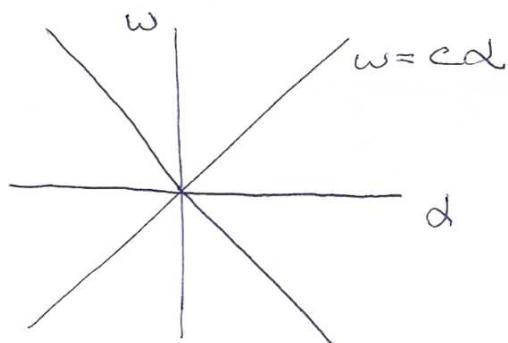
Равное единице — скорость
распространения гармонических волн

$$C_F = \frac{\omega}{d} \quad \text{В один единица } C_F = C_F(\omega)$$

Оператор Дирака: волна без
суперции

(10)

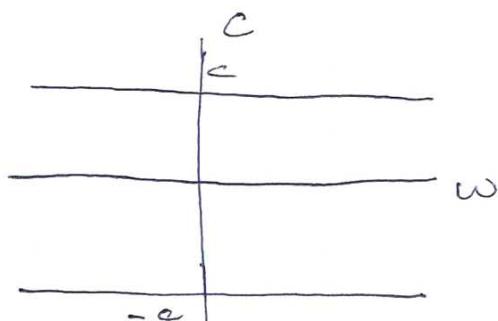
1.4.1 Примеры



Дисперсионные
приливы

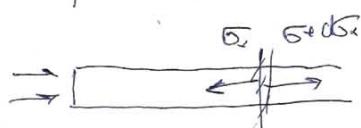
Однозначное соответствие
между ω и d

Две модели d имеют
различные ω на одном



Зависимость
передаваемой частоты
от режимов

Пример



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_x}{\partial t^2} = 0 \\ G|_{x=0} = G_0(t) H(t-0) \\ G|_{x \rightarrow \infty} - \text{граничные условия} \end{array} \right.$$

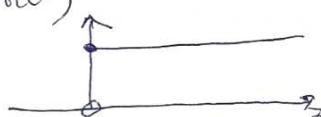
Решение Радамера

$$G_x = f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c})$$

$$\int a w e^{i \omega (t - \frac{x}{c})} d\omega$$

$$G_x = f(t - \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} a w e^{i \omega (t - \frac{x}{c})} d\omega$$

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$



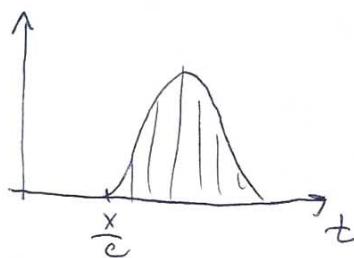
$$G_x|_{x=0} = G_0(t) H(t-0) \Rightarrow f(t - \frac{x}{c})|_{x=0} = G_0(t) H(t-0) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = G_0(t) H(t-0)$$

$$G_x = f(t - \frac{x}{c}) = G_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$\tau_x = \frac{x}{c}$ - время задержки

11



Синусоиды дают сдвиги на
оси x для гиперболы
 $\omega = \pm c\alpha$

Дисперсионный спектр

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u(t, 0) = 0 \\ u(t, x) = A(x) e^{i\omega t}, \quad u(t, 0) = 0$$

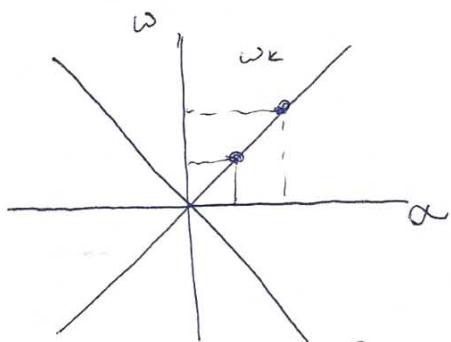
$$u(x, t) = A(x) e^{i\omega t} \Rightarrow A_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

$$A(x) = a e^{-i\omega x} + b e^{i\omega x}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a e^{-i\omega x} + b e^{i\omega x} = 0 \end{cases}$$

Существует ненулевое решение, если
это ортогональное условие в кон.

$$e^{i\omega x} - e^{-i\omega x} = 0 \Rightarrow \sin \omega x = 0 \\ \omega x = \pm \frac{\pi k c}{\ell}, \quad k = 1, 2, \dots$$



$$A_k(x) = b \sin \frac{\omega_k x}{\ell}$$

$$u_k(t, x) = b \left(e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t} \right) \sin \frac{\omega_k x}{\ell}$$

$$u_k(t, x) = \tilde{b} e^{i\omega_k t} \sin \frac{\omega_k x}{\ell}$$

В спектре возможны только те же волны
с одинаковыми (дисперсионными спектрами). Существуют
— неизменные дисперсионные волны.

(12)

2 Лекция 15.02.2022.

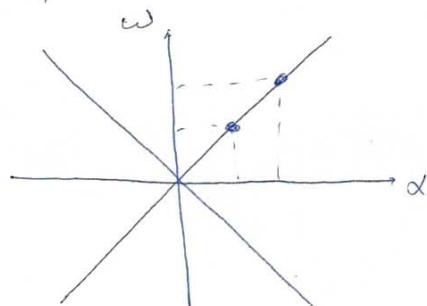
2.1 Использование преобразований Фурье и Лапласа. Введение

15.02 Лекция 2.

норма: londr@yandex.ru

Оператор Данаудера. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

$c = \frac{\omega}{d} = \text{const}$ - скорость с которой распространяется гармоническое колебание



$$\omega = \pm cd$$

Банка для

использования

$$f_1(t - \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} a \omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} d\omega$$

$$f_2(t + \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} b \omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} d\omega$$

$$e^{i\omega t} e^{i\omega x} \Rightarrow e^{i\omega t} - \text{коэффициент по времени}$$

$e^{i\omega x}$ - регулярность по пространственным переменным

d - вещественное число (модуль спектра квадратичного спектра)

$d_k = \frac{\pi k}{c}$ - где π - гипотенуза спектра

$$R(x) = \sin \frac{\pi k x}{c} - \text{надом волнистое колебание}$$

①

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$e^{i\omega t}$ - частота системы ω

Система ω имеет, которую назовем
спектрометрическим спектром $S(\omega)$,
которое дает об огибающей $A(\omega)$
и фазой, выраженной в радианах

$$\text{зат: } y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

Разложение в ряд. Тогда: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{ikt}$
периодическая функция (периодичность единиц)

Верхнее выражение называется
интегралом Фурье. Она представляет
функцию $y(t)$ в виде суммы гармоник
периодического множества неподавленных,
значения которых определяются
интервалом

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-int} dt \quad - \text{представление
Фурье}$$

$$g(t) = y(t) H(t - \tau)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} y(t) e^{-int} dt$$

Как думай, если интеграл неограничен?

(2)

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty y(t) e^{-xt} e^{-i\omega t} dt$$

Всегда сильное действие множителя
 e^{-xt} при $t \rightarrow \infty$, что делает экспоненту
 бесконечных сумм нулем

$$p = x + i\omega$$

$$Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \tilde{y}(t) dt \quad \text{интеграл Лапласа}$$

\sim
определен

изображение

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} Y(p) dp, \quad t > 0$$

Теорема обратима.

Макарс одним
 - это замкнут
 Лапласа ($x=0$)

Для Книги:

Пурье предполагает
 сложное преобразование

1. Г. Дэр. Руководство к практическому применению преобразование Лапласа и Z-преобразование.

2. А. В. Пурье Операционное исследование

(3)

Пример

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \\ \sigma|_{x=0} = \sigma_0(t) H(t) \\ \sigma|_{x \rightarrow \infty} - \text{затухающее} \end{array} \right.$$

$$\sigma(t) = \sigma_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$$\begin{aligned} \sigma^L(p, x) &= \int_0^\infty \sigma_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^\infty \sigma_0(\xi) H(\xi) e^{-p(\xi + \frac{x}{c})} d\xi = \\ &= e^{-\frac{px}{c}} \underbrace{\int_0^\infty \sigma_0(\xi) e^{-p\xi} d\xi}_{\sigma_0^L(p)} \end{aligned}$$

$$\sigma(x, t) = \sigma_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) \doteq e^{-\frac{px}{c}} \sigma_0^L(p)$$

$$e^{-pa} u(p) \doteq \psi(t-a) H(t-a), a > 0$$

Теорема смещения

Дано рассмотрим тепло конвекции
радиации, но для этого нужно
ограничить область между v и b
(изменять можно v , ограничено b)

Как изменяется величина?

4

2.2 Связь между v и σ . Изменение v и σ при отражении от свободной поверхности

Вам не пожалуйста спросить распространение
воздуха с материальной скоростью v и с материальной скоростью σ

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} - \text{материальная скорость звука}$$

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial \xi}$$

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \xi}{\partial \xi}$$

$$\Rightarrow \epsilon = -\frac{v}{c} \quad \text{Две струны} \quad \sigma = E \epsilon = pc^2 (-\frac{v}{c})$$

$$v = -pc\epsilon$$

$$\boxed{\sigma = -pcv^2} \quad (\text{одинаковая струна})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \\ \sigma|_{x=0} = \sigma_0(t) H(t-0) \end{array} \right.$$

$$\sigma|_{x=0} = 0 \quad \text{- начальное условие}$$

Начальное условие

$$u, u|_{t=0} = 0 \Rightarrow \sigma|_{t=0} = 0$$

$$\dot{\sigma}|_{t=0} = 0$$

$$\tilde{\sigma}^L = \int_0^\infty \sigma(x,t) e^{-pt} dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\sigma}^L}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} e^{-pt} dt = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial \sigma}{\partial t} e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty \frac{\partial \sigma}{\partial t} e^{-pt} dt =$$

$$= -\dot{\sigma}(0) + p \left[\sigma e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty \sigma e^{-pt} dt \right]$$

$$= -\dot{\sigma}(0) - p \sigma(0) + p^2 \tilde{\sigma}^L$$

(5)

$$\begin{aligned}\dot{f}(t) &= p F(p) - f(0) \\ \ddot{f}(t) &= p^2 F(p) - p f(0) - f'(0) \\ f^{(n)}(t) &= p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

В однор. случае

$$\frac{d^2 \tilde{\sigma}^L}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} \tilde{\sigma}^L = 0$$

$$\tilde{\sigma}^L = A e^{-\frac{px}{c}} + B e^{\frac{px}{c}} \quad \text{- находим } A \text{ и } B$$

однородная форма

$$\text{Зад: } \tilde{\sigma}^L = C \cosh \frac{px}{c} + D \sinh \frac{px}{c} \quad (\text{нуждам})$$

$$\tilde{\sigma}^L \Big|_{x=0} = \left\{ \tilde{\sigma}_0 (+) \right. \text{ при } t=0 \left. \right\} = \tilde{\sigma}_0, \quad \tilde{\sigma}^L \Big|_{x=e} = 0$$

$$\begin{cases} A + B = \tilde{\sigma}_0 \\ A e^{-\frac{pe}{c}} + B e^{\frac{pe}{c}} = 0 \end{cases} \quad \Delta = e^{\frac{pe}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}}$$

$$A = \frac{\tilde{\sigma}_0 e^{\frac{pe}{c}}}{\Delta}, \quad B = -\frac{\tilde{\sigma}_0 e^{-\frac{pe}{c}}}{\Delta}$$

$$\tilde{\sigma}^L(p, x) = \frac{\tilde{\sigma}_0}{\Delta} \left(e^{\frac{pe}{c}} e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right)$$

$$= \frac{\tilde{\sigma}_0}{e^{\frac{pe}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}}} \left(e^{\frac{pe}{c}} e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right)$$

$$= \frac{\tilde{\sigma}_0}{1 - e^{-\frac{2pe}{c}}} \left(e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{2pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right) \Theta$$

(6)

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\dots q^n$$

$$\Leftrightarrow \sigma_0 \left(1 + e^{-\frac{2l}{c}} + \dots \right) \left(e^{-\frac{p_x}{c}} - e^{-\frac{2l}{c} - \frac{p_x}{c}} \right) =$$

$$= \sigma_0 e^{-\frac{p_x}{c}} - \sigma_0 e^{-\frac{2l}{c} - \frac{p_x}{c}} + \sigma_0 e^{-\frac{2l}{c} - \frac{p_x}{c}}$$

пухлодревесная волна

отрицательная волна

вернемся к оригиналу

$$\sigma(t, x) = \sigma_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) H \left(t - \frac{x}{c} \right) -$$

$$- \sigma_0 \left(t - \frac{2l-x}{c} \right) H \left(t - \frac{2l-x}{c} \right) + \dots$$

$$\frac{2l-x}{c} = \frac{l}{c} + \frac{c-x}{c} \quad \frac{x}{c} \leftarrow \text{Время захвата}$$

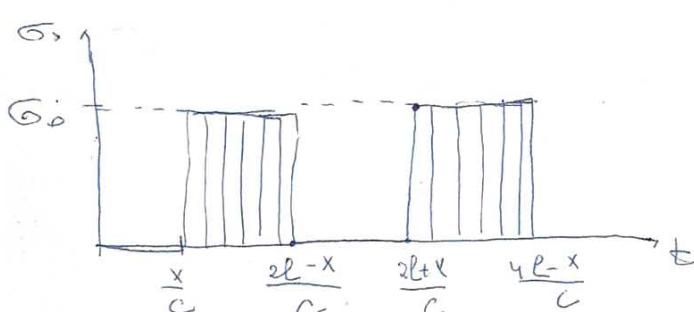
При отражении от плоской поверхности

знак напряжения не меняется на

противоположный, т.е. если пущена волна

сжатия, то отражение волна расширения

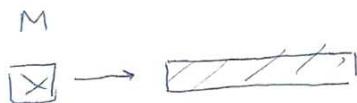
] $\sigma_0(t) = \sigma_0 H(t) -$ сжимающее сжатие.



Знак напрочем!

Слово: знак
не меняется

(7)
точнее: приходит не дает

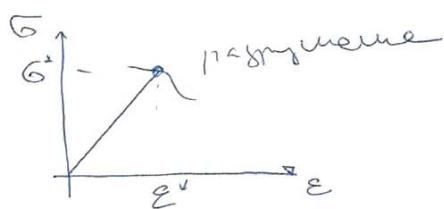


$$M \frac{d\sigma}{dt} = +\sigma$$

$$\sigma = -\rho c \dot{\epsilon} \Rightarrow \frac{M}{\rho c} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0$$

Как меняется напряжение - ?

Будут ли подавлять напряжение
противоположного знака



Найти сечение отсечки
 $x^* - ?$
(Параллельное зеркало)

$$\begin{aligned}\sigma^L &= -\frac{\sigma_0}{\rho c} \left[e^{-\frac{\rho x}{c}} \oplus e^{\frac{\rho x - \rho \epsilon_0}{c}} \right] \doteq \\ &= -\frac{1}{\rho c} \left[\sigma_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) + \sigma_0 \left(t - \frac{\epsilon_0 - x}{c} \right) \right]\end{aligned}$$

$$v(t, \epsilon) = 2\sigma_0(t)$$

Следует на единой поверхности № 2
последовательно. Это необходимо
учитывать при расчете напротивоположных
составляющих.

(8)

Запишем волновое уравнение для
перемещений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{E_0(+) H(t-\sigma)}{E} \quad - \text{загоре Неймана} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

1. Находим обобщение задачи: $u = A(x) e^{int}$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0 \\ \frac{dA}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{dA}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$A(x) = a \cos \frac{\omega x}{c} + b \sin \frac{\omega x}{c}$$

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \Rightarrow \frac{\omega l}{c} = n\pi$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

$$A_n = \cos \frac{\omega_n x}{c}, \quad n = 0, 1, \dots, n$$

В этом случае

$$u = \sum q_n(t) \cos \frac{\omega_n x}{c}$$

мы не можем выбрать первичное

граничное условие.

2. Метод Грина

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\omega_n x}{c} dx - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l u \cos \frac{\omega_n x}{c} dx = 0 \\ & \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\omega_n x}{c} dx = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \frac{\omega_n x}{c} \Big|_0^l + \frac{\omega_n}{c} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \sin \frac{\omega_n x}{c} dx = \\ & = - \frac{E_0(+) H(t-\sigma)}{E} + \frac{\omega_n}{c} \left[u \sin \frac{\omega_n x}{c} \Big|_0^l - \frac{\omega_n}{c} \int_0^l u \cos \frac{\omega_n x}{c} dx \right] \\ & = - \frac{E_0(+) H(t-\sigma)}{E} - \left(\frac{\omega_n}{c} \right)^2 q_n \frac{l}{2} \end{aligned}$$

(9)

$$-\frac{\sigma_0(+)}{E} H(+\omega) - \left(\frac{u_n}{e}\right)^2 q_n \frac{e}{2} - \frac{1}{c^2} \ddot{q}_n \frac{e}{2} = 0$$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{2}{e} c^2 \frac{\sigma_0(+)}{E} H(+\omega), \quad \omega_n = \frac{u_n e}{c}$$

$$q_n + \omega_n^2 q_n = Q_m - \text{однократная сингулярность } q_m(\omega) = 0, \quad q_m(\omega) = 0$$

$$q_n \frac{L}{(p^2 + \omega_n^2)} = Q_n \Rightarrow q_n \frac{L}{p^2 + \omega_n^2} = \frac{Q_n}{p^2 + \omega_n^2}$$

$$\frac{1}{p^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$f_1(p) f_2(p) = \int_0^{\infty} f_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau$$

Теорема о свертке

$$q_m(t) = -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e \omega_m} \int_0^t \sin \omega_m \tau d\tau =$$

$$= -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e \omega_m^2} (1 - \cos \omega_m t)$$

$$u(x,t) = -\frac{2\sigma_0 c^2}{E e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \cos \frac{u_n x}{e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\sigma_0 c^2}{E e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{u_n}{e} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{u_n x}{e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{e}}{n} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right), \quad 0 < x \leq e$$

(10)

3 Лекция 22.02.2022.

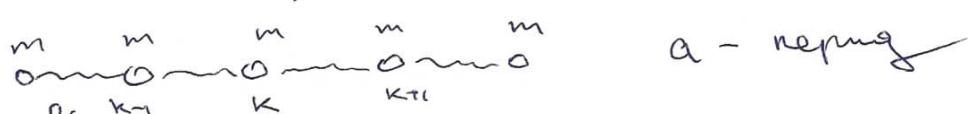
3.1 Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия

22.02. Лекция 3

О дискретном описании
кристаллического тела

Рассмотрим вопрос о совместных
моделях единичной ячейки дискретного
описания

Одномерные структурные решётки
(ячейка)



One коэффициент частички

$$\ddot{m}_{ik} = -g(u_k - u_{k-1}) + g(u_{k+1} - u_k)$$

Учитываемые взаимодействия
соседних атомов!

Литература:

1. Р.И. Мандельштам. Лекции по
теории колебаний

2. Коев В.И. Основы механики
кристаллической решётки

$$\ddot{m}_{ik} = g(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$$

(конечные разности)

①

$$u = A e^{i(\omega t - dx)} \quad - \text{девиация волны}$$

$$x_k = ka$$

$$\lambda \rightarrow \lambda \pm \frac{2\pi}{a} p \quad \text{результат не изменяется}$$

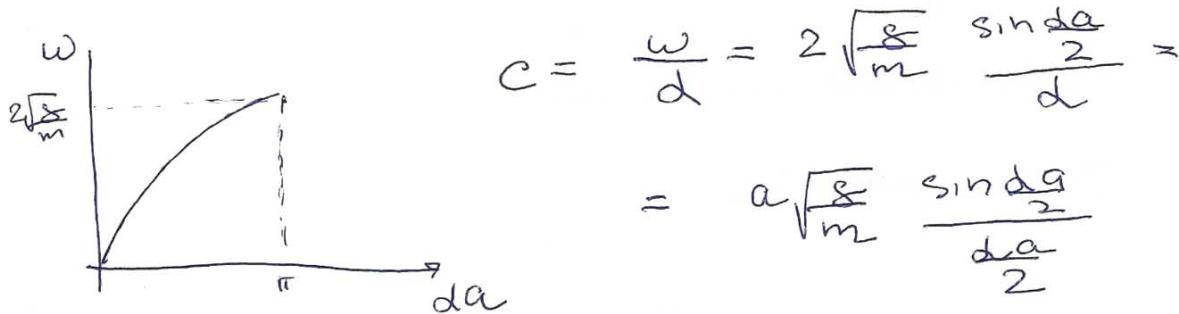
$$-\frac{\pi}{a} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{a} \quad - \text{зона брэлюэна}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \leq \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda \geq 2a \quad \text{ночес носеновки!}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{m} \left(2 - e^{ida} - e^{-ida} \right)$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{m} (1 - \cos da)$$

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{g}{m}} \sin \frac{da}{2}$$



Как называем данный результат?
c можно сплошной строкой?

Длино волны приближение $d \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow c = a \sqrt{\frac{g}{m}}$$

(2)

$$c = a \sqrt{\frac{g}{m}} = a \sqrt{\frac{E}{\rho a}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} !$$

$$g = \frac{E}{a} \quad \xrightarrow{\text{имо}} \quad \sigma = \frac{E \frac{sl}{l}}{l} = \frac{\rho}{s}$$

$$\sigma = \frac{E s}{l}$$

Можно ли получить оператор Деламеде из дисcreteйной модели?

$$m u_k'' = -g(u_k - u_{k-1}) + g(u_{k+1} - u_k)$$

$$u_{k-1} = u_k - u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2} + \dots$$

$$u_{k+1} = u_k + u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2}$$

$$m u_k'' = -g(u_k' a - \frac{u_k'' a^2}{2}) + g(u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2}) = \\ = g u_k'' a^2$$

Нечётные производные скрываются!

Консервативная система

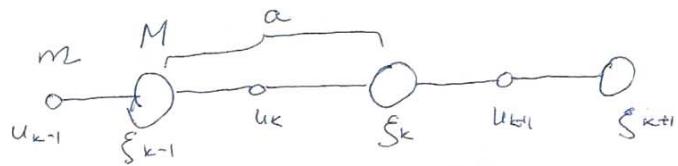
$$p u_k'' = \frac{E}{a} u_k'' a^2$$

$$\boxed{u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0}$$

оператор Деламеде.

сравнить с дисcreteйной.

(3)



$$\begin{cases} M \ddot{\xi}_k = g(u_k - 2\xi_k + \xi_{k+1}) \\ m \ddot{u}_k = g(\xi_{k-1} - 2u_k + \xi_k) \end{cases}$$

$$u_k = A e^{i(\omega t - ka)} \\ \xi_k = B e^{i(\omega t - ka)}$$

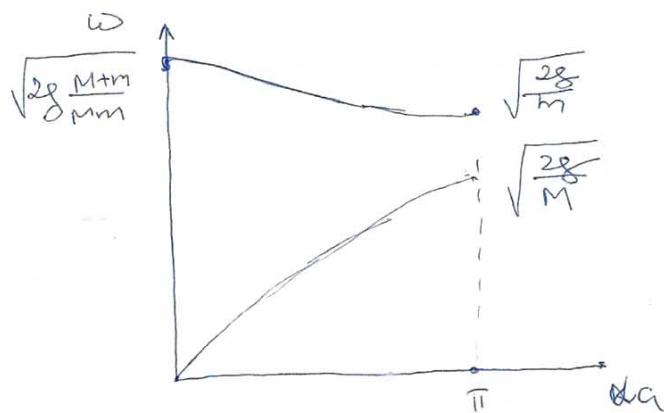
$$\begin{cases} (M\omega^2 - 2g)B + g(1 + e^{-i\omega a})A = 0 \\ g(1 + e^{i\omega a})B + (m\omega^2 - 2g)A = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow$$

$$Mm\omega^4 - 2g(M+m)\omega^2 + 2g^2(1 - \cos\omega a) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{Mm} \left(M+m \pm \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm \cos\omega a} \right)$$

Две бемблю различны!



Первая -
однозначная
бембл

вторая -
- ахроматическая
бембл

(4)

Малое d (спиральное волны)
 w_1 меняется линейно в зависимости от d .

$A = B$ Сечение массы колеблющие
 в основном газах.

Число может быть аппроксимировано
 спиральной огибающей можно.



a) $w_2 = w_2(d)$. При $d \rightarrow 0$ w_2 не

ограничимся к газу

Сечение атомов колеблющие
 в противоположных направлениях.



В трехмерной кристаллической решетке
 акустическим звуком будет нормальные
 колебания (с амплитудой в одинаковом):

3 звуков - акустические

3S - 3 - оптические

(изображение одномерной схемы)

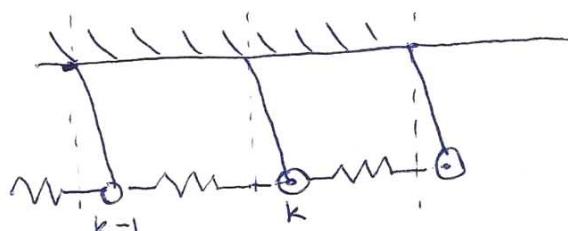
5

Вернёмся к дисперсионному возмущению

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{m}} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Дисперсия возбуждения назначем
одномерного пространственного масштаба,
периодом решётки a
Если $\alpha a \ll 1$ или $a \ll \lambda$, то
дисперсия исчезает, и мы переходим
к сплошной среде.

Возможно ли такое сближение, когда
дисперсия подразделяется не
пространственным, а временным масштабом?



$$\ddot{u}_k + \omega_0^2 u_k = -\frac{g}{m} (u_k - u_{k-1}) + \frac{g}{m} (u_{k+1} - u_k)$$

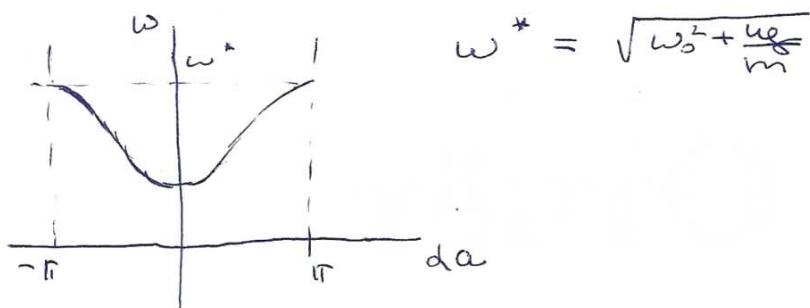
$$\ddot{u}_k + \omega_0^2 u_k = \frac{g}{m} (u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$$

$$u = A e^{i(\omega t - \Delta x)}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4g}{m} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

⑥

3.2 Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость



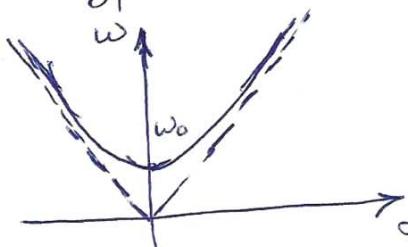
$$u_{k+1} = u_k + u_k' a + \frac{1}{2} u_k'' a^2 + \dots$$

$$u_{k-1} = u_k - u_k' a + \frac{1}{2} u_k'' a^2$$

$$u_k'' + \omega_0^2 u_k = \frac{q}{m} u_k'' a^2$$

$$\boxed{u'' - \frac{1}{c_0^2} \ddot{u} - \frac{\omega_0^2}{c_0^2} u = 0}$$

Уравнение Клейна-Гордона



ω_0 — рабочая
частота

При $\omega_0 \rightarrow 0$ бисперсия исчезает и
сплошное приводит в шумовое
приведение

$$\omega = \pm c_0 d$$

Примеры: струна на упругом
основании

когезионная пластика, болтовые
пружины. "Лекции по физике" Т. Б.
Рейтингер.

(7)

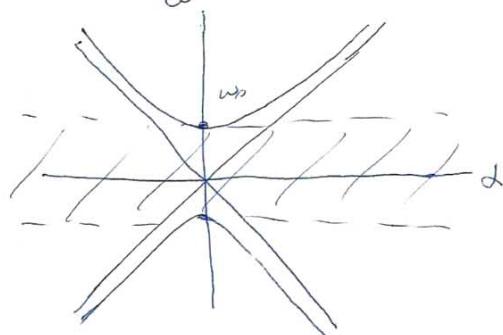
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0$$

*i*dx int

$$u \sim e^{i\omega x} e^{-i\omega t}$$

$$-\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + c^2 \omega^2$$

if $\omega_0 = 0 \Rightarrow \omega = \pm c\omega$



$$0 < \omega < \omega_0$$

Спектр ньст
Негр решения в быве
заряж. частиц

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - Ku = 0$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$u = V_0(x) e^{i\omega t}$$

$$u(x \rightarrow \pm\infty) = 0$$

$$V_{0xx} + \gamma^2 V_0 = 0, \quad \gamma = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$1. \quad \gamma = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$$

$$V_0 = Ax + B$$

$$V_0 = B$$

однозначное нач. условия

$$2. \quad \gamma > \text{без.} \quad \omega > \omega_0$$

$$V_0 = Ae^{i\gamma x} e^{i\omega t} + Be^{-i\gamma x} e^{i\omega t}$$

$$= Ae^{i\omega(t + \frac{x}{c})} + Be^{i\omega(t - \frac{x}{c})}$$

$$C_0 = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

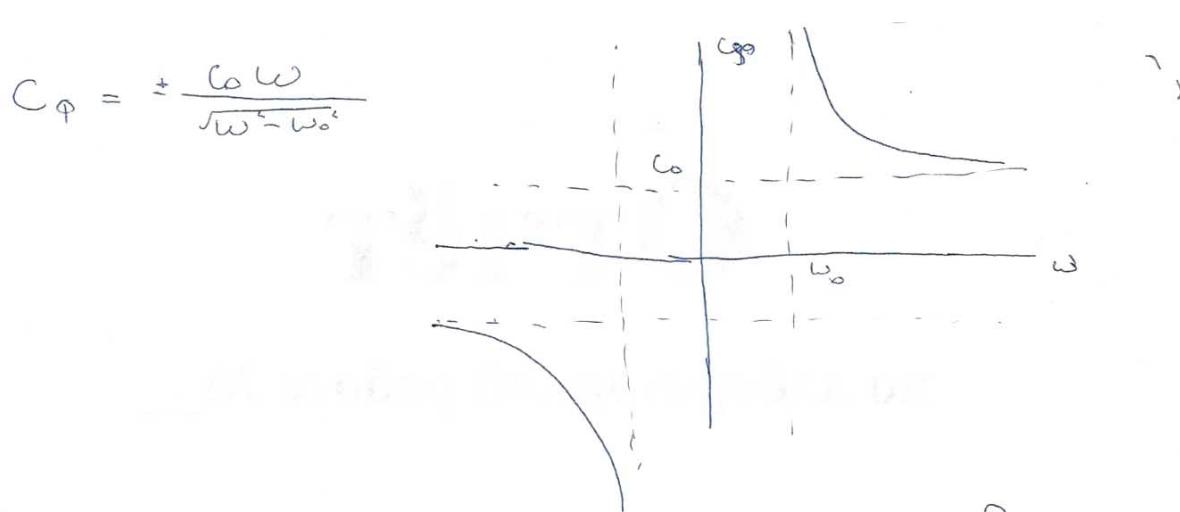
$$3. \quad \omega < \omega_0$$

$$V_{0xx} - \gamma^2 V_0 = 0$$

$$V_0 = Ae^{-i\gamma x} + Be^{i\gamma x}$$

Таким образом решение

(8)



Чему равна скорость сигнала?
 $\omega_1 \approx \omega_2$ при $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_{1,2}$

$$u(x,t) = u_0 \cos(\omega_1 t - d_1 x) + u_0 \cos(\omega_2 t - d_2 x) =$$

$$= 2u_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{d_2 - d_1}{2}x\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{d_1 + d_2}{2}x\right) =$$

$$= a(r,t) \cos(\omega_0 t - \alpha_0 x)$$

нечуюе
другій
осцилляційний
контакт

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \alpha_0 = \frac{d_2 - d_1}{2}$$

$$a(r,t) = 2u_0 \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t - \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)x\right)$$

$$C_S = \frac{\omega_0}{\alpha_0} - \text{не супер блюз.}$$

$$C_{S^r} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{d_2 - d_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta d}$$

В однієм. супер

$$C_{S^r} = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta d} = \frac{d\omega}{dd}$$

(9)

Три скорости: c_p , c_{gr} , v !

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\omega(\alpha)t - \alpha x)} d\alpha =$$

$$\omega(\alpha) = \omega_0 + \omega'(\alpha_0) \Delta \alpha$$

$$= e^{i(\omega_0 t - \alpha_0 x)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i\alpha(\omega'(\alpha_0)t - x)} d(\alpha) =$$

$$= e^{i(\omega_0 t - \alpha_0 x)} u(\omega'(\alpha_0)t - x)$$

это огибающая.
ося бегущая.

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{d\alpha}$$

Как проследить за изменением
волновой пачки?

Как воссчитать интеграл?

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{it(\omega(\alpha) - \frac{\alpha x}{t})} d\alpha$$

$$\Psi(\alpha) = \omega(\alpha) - \frac{\alpha x}{t}, \quad t \rightarrow \infty$$

$\frac{x}{t}$ - начальное положение

Метод стационарных фаз

1. Н. А. Островский, А. И. Романов

Бегение в теории модулированных волн

2. А. Маига Бегение в методах
размножения

10

3.3 Метод стационарной фазы

$$I(t) = \int_a^b F(\alpha) e^{it\psi(\alpha)} \frac{d\alpha}{\psi'(\alpha)}, \quad t \rightarrow \infty$$

$$u = \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)}, \quad d\omega = e^{it\psi(\alpha)} \psi'(\alpha) d\alpha$$

$$\omega = \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{it}$$

$$I(t) = \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{it} - \frac{1}{it} \int_a^b e^{it\psi(\alpha)} \left[\frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \right] \frac{1}{t} d\alpha$$

$$= \frac{i}{t} \left[F(\alpha) \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{\psi'(\alpha)} - \frac{F(\alpha) e^{it\psi(\alpha)}}{\psi'(\alpha)} \right] + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$\psi' \neq 0$!

Основной результат в интеграле где дифференциал
записан времеми t имеет окрестность

близких соответствующих точек $\alpha = \alpha_c$,

$$\text{в которой } \left. \frac{d\psi}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_c} = 0$$

$$\psi(\alpha) \approx \psi(\alpha_c) + \psi'(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c) + \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2.$$

$$F(\alpha) \approx F(\alpha_c) + F'(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)$$

$$u(x, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_c) \exp \left(i (\psi(\alpha_c) + \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2) t \right) d\alpha$$

$$= F(\alpha_c) e^{i [\omega(\alpha_c)t - \alpha_c x]} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(i \left[\frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2 \right] t \right) d\alpha$$

$$\frac{1}{2} \omega''(\alpha_c) t = S, \quad (\alpha - \alpha_c)^2 = z^2 \quad \omega''(\alpha_c) \neq 0,$$

(11)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isz^2} dz = \sqrt{\frac{u}{|s|}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4} \operatorname{sign}(s)\right)$$

В итоге:

$$u(x,t) \approx \frac{F(d_e)}{\sqrt{w''(d_e)t}} \exp\left\{i\left(\frac{u}{w''(d_e)t}x - \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} w''(d_e)\right)\right\}$$

Если гушеобразные волны

стационарных волн, то конец их
имеет один форму, и их назо-
вут симметрическими.

$$C_{sr} = \frac{dw}{dd} = \frac{d(c_p d)}{dd} = c_p + d \frac{dc_p}{dd}$$

$$C_{sr} = c_p + d \frac{dc_p}{dd}$$

запись на экран

$$c_{sr} = c_p, \text{ если } \frac{dc_p}{dd} = 0$$

Дисперсия излучения нормальная

$$\text{если } c_{sr} < c_p$$

и аномальная в противном случае

(12)

4 Лекция 01.03.2022.

4.1 Повторение. Преобразование Лапласа. Теорема о вычетах. Ряд Лорана. Лемма Жордана

01. 03. 22. Лекция 4

В прошлой лекции мы рассматривали
среди с дисперсией, введя понятие
групповой спросности (скорости синхронии)

Сегодня мы поговорим о решении
нестационарных задач и рассмотрим
технологию групп, где удастся построить
аналитическое решение с помощью
преобразования Лапласа

$$Y(p) = \int_0^\infty y(t) e^{-pt} dt$$

изобрание

$$1. \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = g(t), \quad g(t) = F_0 H(t-0)$$

всегда приложимая нагрузка

$$y(t) = \underbrace{A \sin \omega_0 t}_{\text{однократн.}} + \underbrace{B \cos \omega_0 t}_{\text{однократн.}} + C$$

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

Сделаем преобразование Лапласа: (лекция 2)

$$(p^2 + \omega_0^2) Y = \frac{F_0}{p} \Rightarrow Y = \frac{F_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$\frac{1}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sin \omega_0 t} \quad (\text{таблица})$$

$$y(t) = \frac{-F_0}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 t dt = \frac{F_0}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t) \quad (\text{для } t > 0)$$

(1)

Теорема об разложении

Если $f(p)$ является изображением

какого-либо гиперфункции $f(t)$,

$|f(+)| < M e^{\sigma t}$. Тогда

$$f(+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad \sigma > a$$

Как видно из формулы, $F(p)$ есть

Нужна теорема о вычетах ($\tilde{\Gamma}^{\Phi}$ кр.)

А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов

Теория гиперфункций комплексной переменной

Теорема. Если гиперфункция $f(z)$ является аналитической (изолированной) в любой замкнутой области за исключением конечного числа особых точек (полюсов или изол. особых точек)

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч}(f(z, a_k))$$

(c) Чему равно вычет около полюса?

Это называется при $(z-a)^{-1}$ в

разложении в ряд Лорана

$\text{Res}_a f(z)$ - обозначение

$$\text{если } m-\text{го порядка. } C_1 = \lim_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$$

$$m=1$$

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$$

②

Besides recursive copies. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$
 $\psi(a) \neq 0!$ ~~regarding~~ $f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$

Венгеме к примеру с оной связана ^{стри} _{ст} ^{чалыр}.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega_0^2} dp =$$

(*)

$$= \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$$

$$f(z) = \frac{e^{pz}}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$\text{Oscilat. mode: } P_1 = -i\omega_0, \quad P_2 = i\omega_0$$

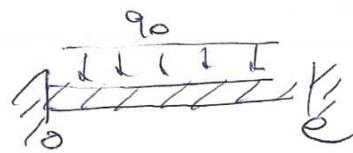
$$E_{\text{RF}} = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2i\omega_0} - \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2i\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Lemma (Kongra): $\lim_{R \rightarrow \infty} \int F(z) e^{-dt} dz \xrightarrow{a>0} 0$
 even $F(z) \rightarrow 0$ npr $z \rightarrow \infty$, $a > 0$

Рассмотрим
следующим
методом

Заяц с беконом
на бору не ест!
закон.

3



См. лекция 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{q_0}{E} H(t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} - \frac{P^2}{C_0^2} u^L = - \frac{q_0}{EP}$$

$$u^L = A \sin \frac{Px}{C_0} + B \cos \frac{Px}{C_0} + \frac{q_0}{P^3} C_0^2$$

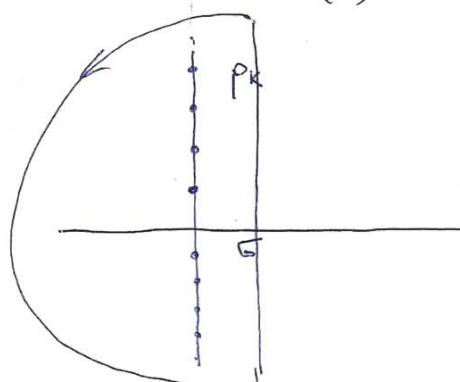
$$u(0, t) = 0, \quad u(e, t) = 0$$

$$u^L = \frac{q_0 C_0^2}{P^3} \left[\frac{\sin \frac{Pe}{C_0} - \cos \frac{Pe}{C_0} \sin \frac{Pe}{C_0} + (\cos \frac{Pe}{C_0} - 1) \sin \frac{Pe}{C_0}}{\sin \frac{Pe}{C_0}} \right]$$

Однако можно (чтобы) $\sin \frac{Pe}{C_0} = 0 \Rightarrow P = i \omega_k$
 $\omega_k = \frac{\pi k C_0}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$

Сравним с выражением из I лекции.
 Согласно

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \text{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$



$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R}^{G+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$= 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \text{res}_{p_k} f(z)$$

лемма Skorogrod

Решение зоны самосогласовано!
 Получим выраж.

(4)

Теперь ограничимся к уравнению
Кошто - Годона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0 \quad 0 \leq x < \infty$$

$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = f(t) H(t)$

$u|_{x \rightarrow \infty}$ - граничное значение.

$$\frac{d^2 u^L}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} u^L - \frac{\omega_0^2}{c^2} u^L = 0$$

$$\frac{d^2 u^L}{dx^2} - \frac{1}{c^2} (p^2 + \omega_0^2) u^L = 0$$

$$u^L = A e^{-\frac{1}{c} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} x}$$

$$\text{При гранич. } -\frac{1}{c} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} A = f^L \Rightarrow$$

$$A = -\frac{c f^L}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

$$u^L = -\frac{c f^L e^{-\frac{1}{c} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} x}}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

Учитывая что f^L определяет звук
не зависит. Ограничимся к машине.

$$\frac{e^{-k \sqrt{p^2 + \omega^2}}}{\sqrt{p^2 + \omega^2}} = J_0(a \sqrt{t^2 - k^2}) H(t-k)$$

Окончательно звук может быть
представлен в виде

$$u = -c \int_0^{+\infty} f(s) J_0\left(a \sqrt{\left(t - \frac{x}{c} - s\right)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}\right) ds H(t - \frac{x}{c})$$

Получим машину нормирующую не мак
нило.

(5)

Рассмотрим случай $x=0$:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}, \quad \Rightarrow \omega_0 = 1.$$

Черезлага ссып. теорема:

Если выражение $F(p)$ можно представить в виде
разложения в ряд по p , то выражение $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$
получает значение через ряд вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^{1/2}} &= \frac{1}{p} (1 + p^{-2})^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 + mp^{-2} + \frac{m(m-1)}{2!} p^{-4} + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-(n-1)) p^{-2n}}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{2} p^{-2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!} p^{-4} - \dots - \frac{(-1)^{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} p^{-2n}}{2^n n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{1}{s^{2n+1}} \end{aligned}$$

Также получим теорему:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = J_0(t)$$

Видяя группу можно писать в виде.

M. A. Набиев, S. B. Мадатов

Метод теории суммаций комплексной переменной

(6)

4.2 Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа

Сложности, которые могут возникнуть при использовании теории отражения, не рассмотрены в более простом примере теплопроводности, но схожи с описанными к упрощенным задачам.

Будем $\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial (PV)}{\partial x} = 0$ данное значение

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - P \frac{dV}{dt} = 0 \quad \begin{matrix} \text{данное} \\ \text{значение} \end{matrix}$$

Одномерный случай

Бесконечная среда: I зону герптическим способом можно считать

$$W = P + Q \quad \begin{matrix} \text{данное значение} \\ \text{состоит из двух частей} \end{matrix}$$

одинаковых частей (как одномерных)

$$W = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} P \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} P (v \dot{v} + \dot{u}) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial (P \cdot v)}{\partial x} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial x} dx$$

h — поток тепла

$$P \dot{v} v + P \dot{u} - v \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sigma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$v \left(P \dot{v} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + P \dot{u} + \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma \dot{e}, \quad \epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Баланс импульса

$$\boxed{P \dot{u} + \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma \dot{e}}$$

Введем полезные температуры, так называемые физическая направляемая, измеряемые

описывающую формулу: $u = c_v \theta$

(7)

Закон Фурье: $\lambda = -\frac{\partial \theta}{\partial x}$

Определение ур-е. $\sigma = E(\epsilon - \alpha \theta)$

заря Дюалера-Клемана помеха температуре
 $E_0 = \alpha \theta$ — ма генератор, но т. мб не может
 он работать в рамках интегралов теплопроводности.
 Но же подстановки:

$$\rho c v \dot{\theta} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = E \alpha \theta \dot{\epsilon}$$

θ — изменение температуры

$\dot{\epsilon}$ — поглощаемое (излучаемое) излучение

Ур-е теплопроводности, учитывающее
 влияние полей генератора (излучающие
 зажигание). Но же для простоты предположим
 что зажигание в рамках зоны ур-е.

$$\rho c v \dot{\theta} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

ρ — масса, c_v — удельная теплоемкость

λ — коэффициент теплопроводности

$\lambda = \lambda_s + \lambda_e$ — зависимость теплопроводности от

λ_s , постоянный

коэффициент пропорциональный

λ_e характеризует способность
 вещества передавать теплоту

λ и c_v зависят от температуры.

но это дает осложнение.

в рамках численной теории

Г.И. Енисеев. Физика первого рода

(8)

$$\rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

$\theta \sim e^{i\omega t} e^{i\alpha x}$ Roche постановка

$$\rho c_v i\omega + \lambda \alpha^2 = 0 \quad (*)$$

ЧП - е неподвижного типа:

- рабочее пространство не ограничен
- недорогимо для изучения
- Термоизолировано от зон горения топлива.
к химической "чистоте" рабочего пространства
не возникает, это требует
стабильности температуры.

ЧП (*) неэнергетичен, это d - константа времени!

Что это означает?

$$d = d_R + i d_I \quad \text{Вместе } a^2 = \frac{\rho c_v}{\lambda} -$$

- неизменен Температура постоянна

Также

$$a^2 i\omega + d_R^2 + 2id_R d_I - d_I^2 = 0$$

$$d_R^2 = d_I^2 \Rightarrow d_I = \pm d_R$$

$$a^2 \omega + 2d_R d_I = 0 \Rightarrow a^2 \omega = 2d_I^2$$

$$d_I^2 = \frac{a^2 \omega}{2}$$

$$\boxed{d_I = a \sqrt{\frac{\omega}{2}}}$$

(3)

Тогда

$$\Theta \sim e^{i\alpha x} e^{i\omega t} = e^{i(\alpha x + \omega t)} = e^{-dIx} e^{i\omega t} e^{idRx}$$

e^{-dIx} $e^{i\omega t}$ e^{idRx}
 e^{-dIx} $e^{i\omega t}$ e^{idRx}
 1 $e^{i\omega t}$ e^{idRx}
 $e^{i\omega t}$ e^{idRx}
 $e^{i\omega t}$ e^{idRx}

Более в чистом виде

dI характеризует зондом
применение тенна биумык
матрица, при этом $dI = a\sqrt{\frac{\omega}{2}}$
здесь применение сужения
зависит от коэффициента Тенородности

$$dR = -\frac{p_c r}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

$$C_{sp} = \frac{\omega}{dR} \sim \sqrt{\omega}$$

Увеличение ω , при увеличении
и рабочего расстояния, то
при этом более дешево синтез
затемнения по координате x

$$\Theta \sim e^{i\omega(t - \frac{x}{c_s})} e^{-dIx}$$

Затемнение настолько в сию исконное

$$\text{закон Релея } h = -\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

Тенна уходит из обнаружения

(10)

5 Лекция 15.03.2022.

5.1 Применение преобразования Лапласа. Трудности

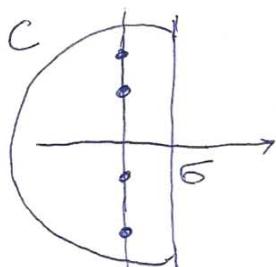
15.03.22. Лекция 5.

На прошлой лекции мы обсудили применение преобразования Лапласа

$Y(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ где решение нестационарных задач. Основное идея состоят в том, чтобы перейти в пространство изображений, где решить задачу проще. План: нужно перенести изображение в пространство оригинал.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res} f(z, a_k)$$



$$\oint_C = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} + \int_C$$

$$\int_C F(p) e^{pt} dp \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0 \quad \begin{matrix} \text{лемма} \\ \text{скобка} \end{matrix}$$

Обсудим некоторые трудности, которые могут возникнуть при вычислении интеграла.

$$a^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} - \dot{\theta} = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda}{pCr} \quad \begin{matrix} \text{недифференцируемая} \\ \text{функция} \end{matrix}$$

Ур. инг.:
$$-\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=\infty} = J(t)$$

$0 \leq x < \infty$

$\theta \xrightarrow{x \rightarrow \infty}$ опр.

①

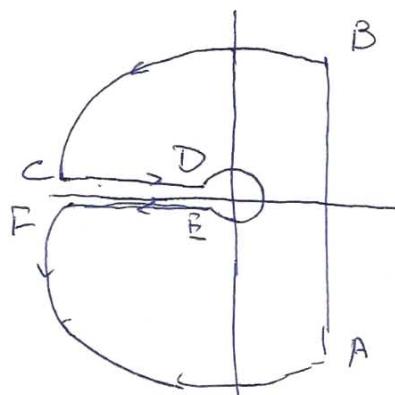
$$a^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} - p \theta = 0$$

$$\theta = A e^{-\sqrt{p} \frac{x}{a}}, \quad -\frac{d}{dx} A = -\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{x \sqrt{p}}$$

$$\theta = \frac{1}{x \sqrt{p}} e^{-\sqrt{p} \frac{x}{a}}$$

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k \sqrt{p}}, \quad k = \frac{x}{a}, \quad k > 0$$



$\omega = \sqrt{p}$ - много значное
значение
Нужно сделать распределение
закон запрещено однозначно

$$\sqrt{p} = \sqrt{z} e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Внутри пологие нет однозначных молек \Rightarrow

$$\oint_{\Gamma} F(p) e^{pt} dp = 0$$

$$\int_{AB} + \int_{CD} + \int_{EF} = 0 \quad (\int_{BCUF} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0 \text{ потому что } z \text{ конечные})$$

$$CD: p = x e^{i\pi} = -x, \quad \sqrt{p} = i\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-k i\sqrt{x}} e^{-xt} dx = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt} e^{-\frac{1}{4} \frac{dx}{x}} \end{aligned}$$

(2)

анализирую EF

$$EF: \sqrt{p} = -i\sqrt{x}$$

$$\int_{EF} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt + k i \sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int_{CD} + \int_{EF} = \frac{2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \left[\frac{e^{ki\sqrt{x}} + e^{-ki\sqrt{x}}}{2} \right] \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \cos k\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\sqrt{x} = u$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos ku du$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} \sin ku du = 0 \quad (\text{как интеграл от нечетной функции})$$

$$\text{Тогда: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos ku = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} (\cos ku + i \sin ku) du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} e^{iku} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-t(u - \frac{ik}{2t})^2 - \frac{k^2}{4t}} du$$

$$= \frac{e^{-\frac{k^2}{4t}}}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-t u^2} du = \frac{e^{-\frac{k^2}{4t}}}{\pi \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds$$

$$= \frac{e^{-\frac{k^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-ku\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

(3)

5.2 Несвязанная динамическая задача термоупругости

Несвязанное динамическое описание
термоупругости

Поскольку уравнение баланса импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - p_i^i = 0, \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

после подстановки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Пространственное уравнение (температура уменьшается)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x}$$

Самостоятельно (расчетное решение)

Литература:

1. В.И. Даниловский. Об одной динамической задаче термоупругости. Прикл. мат. и мех. 1952г.
2. В. Новакий. Динамические задачи термоупругости. 1970г.
3. А.Д. Коваленко. Термоупругость, 1978г.

Перевод тем как перейти к вопросу о роли склонений (сегментов), нам попадаются известные понятия генота-структуры Дирака.

(4)

5.3 Дельта-функция Дирака

Преобразование Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt - \text{спектральная плотность}$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{i\omega_* t}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_*)t} dt$$

и почему погреш?

Важное значение δ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y) \delta(y - y_0) dy = h(y_0)$$

Следует в сомнительном
значении в т. y_0 функции h ее

однозначные значения

1. B.C. Владимиров. Ур-е математика
функций

2. A.B. Олейник. Методы и результаты

преобразований в задачах математической
физики.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_*) e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega_* t}$$

$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_*)$ - спектральная плотность

Мне уже использую ее
описание плотности единого момента
массы или заряда

$$p = m \delta(x-a)$$

$$\int m \delta(x-a) dx = m$$

(5)

5.4 Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера

Вернемся к примеру с одной степенью свободы:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = P_0 \delta(t-0) \quad (P_0 = 0.1 - \text{динамический импульс})$$

Наиболее нахождение гравии.

$$(P_0^2 + \omega_0^2) q'' = 1, \quad \int_0^\infty \delta(t-0) e^{-P_0 t} dt = 1.$$

$$q'' = \frac{1}{\omega_0 P_0^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t =$$

G — реальная система на δ -затухание

$$q'' = \int_0^t F''(t') G(t-t') dt'$$

известное из упражнения

Реальная система на промежуточный затухание при наивысших начальных условиях

Данное решение основное спредвентивное и где уравнение в недопустимых перегибах

Найти дзинкну Грина для одномерного оператора Д'Аламбера в бесконечном пр-ве ($-\infty < x < \infty$)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(x-x')\delta(t-t')$$

Приблизительно
Приближение

⑥

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x^2} e^{-ixx'} dx = \frac{\partial G}{\partial x} e^{-ixx'} + i \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} G e^{ixx'} dx = \\
 &= i \partial_x [G e^{-ixx'} + i \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} G e^{ixx'}] \\
 & \partial_x^2 G^F + \frac{1}{c^2} G^F_{ttt} = e^{-ixx'} \delta(t-t') \\
 & G^F_{ttt} + c^2 \partial_x^2 G^F = c^2 e^{-ixx'} \delta(t-t') \\
 & G^F = \frac{e^{-ixx'}}{c \sin(\omega d(t-t'))}
 \end{aligned}$$

Однако неподходящее Понятие:

$$\begin{aligned}
 G(x,t) &= \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixx'} \sin(\omega d(t-t')) e^{idx} dd = \\
 &= \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixx'} \left(\frac{e^{i\omega d(t-t')}}{2id} - \frac{e^{-i\omega d(t-t')}}{-2id} \right) e^{idx} dd \\
 &= \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega((x-x')+d(t-t'))}}{id} - \frac{e^{i\omega((x-x')-d(t-t'))}}{id} dd
 \end{aligned}$$

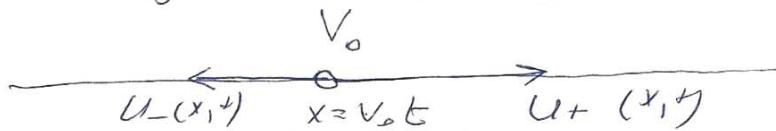
$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{id} dx$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{(6)} \quad & \frac{1}{2\omega} \left[H((x-x') + \omega(t-t')) - H((x-x') - \omega(t-t')) \right], \quad t > t' \\
 & y = x-x', \quad z = t-t' \\
 & = \frac{1}{2\omega} \left[H(y + \omega z) - H(y - \omega z) \right]
 \end{aligned}$$

(7)

5.5 Движущийся источник звука

Движущийся источник звука



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \varphi(t) \delta(x - V_0 t)$$

$$u(x, t) = \int_0^t dt' \varphi(t') \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x', t - t') \delta(x - V_0 t')$$

$$= \int_0^t G(x - V_0 t', t - t') \varphi(t') e^{i k t'} =$$

$$= \frac{1}{2 \pi} \int_0^t \left\{ H(x + V_0 t - (V_0 + c)t') - H(x - V_0 t + (c - V_0)t') \right\} \varphi(t') dt'$$

Неравенства:

$$\begin{aligned} x + V_0 t - (V_0 + c)t' &\geq 0 \\ x - V_0 t + (c - V_0)t' &\leq 0 \end{aligned}$$

Получим две волны, расходящиеся от источника u_- и u_+

One periodic wave is obtained

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t)$$

причиностроение звука

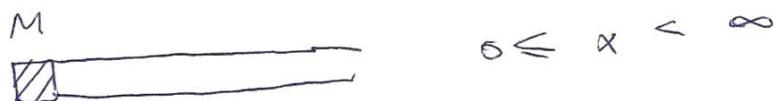
Доплера (расчетное задание)

(8)

5.6 Влияние включений на волновой процесс. Смешанный спектр

О Роль включений искажений
на волновой процесс

В случае поглощения прихода, включений
(заготовок) в кристаллической решётке
изменение ρ стимулирует гармоники.
Начнем с более простого случая,
когда излучение входит в кристалл
изнутри с границы обнаружения



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$u = M \ddot{u}_0$, u_0 — начальное значение

Установите начальную задачу?
Возьмём единичный импульс в виде $u_0 = U_0 \delta(x)$
перемещение всплеск имеет
характер загорания

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{M \ddot{u}_0}{E} \\ u \Big|_{t=0} = u_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} u(0, t) = 0 \\ u(0, x) = 0 \end{array}$$

Начальное
условие.

$u \Big|_{t=0}$ — задано из условия.

$$u = u_0 (t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$$\text{Достаточно} \quad \text{найти} \quad u_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow - \frac{1}{c} u_0 = \frac{M \ddot{u}_0}{E} \quad \text{и} \quad \frac{M \ddot{u}_0}{E} + \frac{u_0}{c} = 0$$

(9)

$$\ddot{v}_0 + \frac{p_0}{M} v_0 = 0 \quad p_0 - \text{аэродинамическое сопротивление среды}$$

$-\frac{p_0}{M} t$

$$v_0(t) = V_0 e$$

$$v_0(t) = \frac{V_0}{\beta} \left(1 - e^{-\beta t} \right), \quad \beta = \frac{p_0}{M}$$

Почему возникает нелинейное пронизывание в консервативной системе?

Энергия переходит от массы в энергию в виде тепла и волны.

$$M \quad E, P$$

Orn
c

$$E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = c(u - u_0)$$

перенесение в сферу

Рассмотрим самовознесение
(последнее значение)

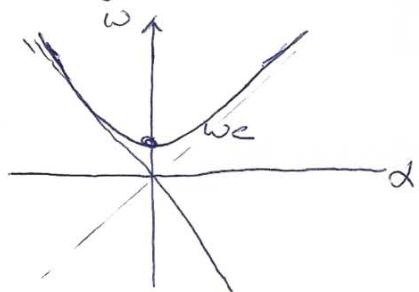
В замороженном
операторе Края - Родона.

(Симметрия на широком основании)

(10)

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - \frac{\omega_c^2}{c^2} u = 0$$

Дисперсионное уравнение: $\omega = \sqrt{c\omega^2 + \omega_c^2}$



Распространение

специального звена
при напрямом методе

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{M \ddot{u}_0}{E}$$

$$\begin{aligned} u &= A(x) e^{i\omega t} \\ A_{xx} + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) A &= 0 \end{aligned}$$

Распространение симметрии $\omega < \omega_c$

$$A_{xx} - \frac{1}{c^2} (\omega_c^2 - \omega^2) A = 0 \quad \text{или}$$

$$A_{xx} - \gamma^2 A = 0, \quad \gamma^2 = \frac{1}{c^2} (\omega_c^2 - \omega^2)$$

$$A = a e^{-\gamma x} + b e^{\gamma x} \cdot \begin{array}{l} \text{(запись)} \\ \text{изменяется} \end{array}$$

$$u(x,t) = u_0 e^{-\gamma x} e^{i\omega t}$$

Данное решение имеет логарифмический
характер

Если мы это не хотим, то ищем другое
решение

Из условия ненулевое

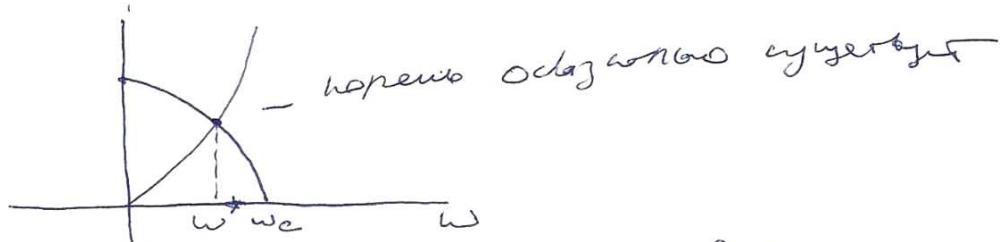
$$\frac{dA}{dx} = -\frac{M\omega^2 u_0}{E}$$

$$-\gamma u_0 \neq \frac{M\omega^2 u_0}{E} = 0$$

$$(-\gamma + \frac{M\omega^2}{E}) u_0 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{сумма} \\ \text{одинакова с 0!} \end{array}$$

11

$$-\frac{1}{c} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} = \frac{M\omega^2}{E}$$



\Rightarrow Наружу выпущенное вихрь
также к существованию дисперсионных
решений $\omega^* < \omega_c$. На оси спектра
наружу дисперсионные решения
(смещанный спектр)

коэф. форма $u(x, t, \omega^*) =$
 $e^{i\omega^* t} e^{-\frac{x}{c} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$ — концептуальная
 форма в месте, где
 существует вихрь. Решение
 сдвигом. Конечные
 решения не могут быть.

(12)

6 Лекция 22.03.2022.

6.1 Небольшое замечание к задаче

Замечание по задаче:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = F_0 \sin(t - \phi)$$

$$(p^2 + \omega_0^2) q^L = \frac{F_0}{P}, \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \psi'(z) \neq 0$$

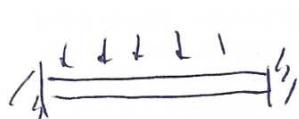
$$q^L = \frac{F_0}{P(p^2 + \omega_0^2)}, \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} \quad (\#)$$

$$\varphi' = p^2 + \omega_0^2 + 2p^2 = 3p^2 + \omega_0^2$$

$$\text{Очевидно } p = \pm i\omega_0, \quad \underline{p=0}$$

$$q = \sum_{p \in \mathbb{R}} \exp(p) f(z) = \frac{F_0}{\omega_0^2} + \frac{F_0}{2\omega_0^2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) =$$

$$= \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -q$$

$$u^L = \frac{\omega^2 q}{P^3} \left[\frac{(ch \frac{px}{\omega} - 1) sh \frac{px}{\omega} - ch \frac{px}{\omega} sh \frac{px}{\omega} + sh \frac{px}{\omega}}{sh \frac{px}{\omega}} \right]$$

$$p = i\omega k, \quad P = \underline{0}.$$

$$q'(p) = 3p^2 sh \frac{px}{\omega} + p^3 ch \frac{px}{\omega} \frac{e}{\omega}$$

Вт. $p^2 > 0$. Поможемая соруда (и) не имеется

Аджея регрессия получит в разуме и
богатство симметрии при $P = \underline{-1}$.

6.2 О стационарных решениях

22. 03. 22 Лекция 8

О стационарных решениях

Система с одной степенью свободы:

$$\ddot{q} + 2\eta \dot{q} + \omega_0^2 q = f_{\text{вн}} e^{\text{int}}$$

$q = A(\omega) e^{i(\omega t - \phi)}$

- установившееся решение
здесь для ненулевых ω и $f_{\text{вн}}$

аналогично:

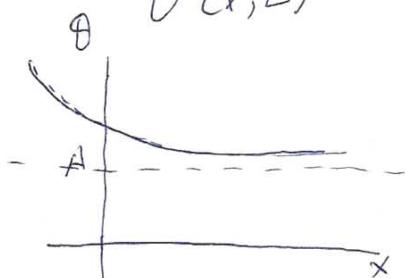
$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

$$\theta = f(x - vt) = f(\xi), \quad \xi = x - vt$$

$$-cvf' = kf'' \quad \text{уравнение}$$

$$f(\xi) = A + Be^{-\frac{cv\xi}{k}}, \quad -\frac{cv}{k}\xi$$

$$\theta(x, t) = A + Be^{-\frac{cv(x-vt)}{k}}$$



A - температура среды на
дистанции, куда
тепло еще не дошло
Решение такого вида

описывается, например, прогрев бензина,
но потолку со стороны v расположенного
близко генераторного бенза, где
реально наблюдается постоянная
температура

$$f(x - vt) \Big|_{x=vt} = \theta_0$$

①

Такое решение можно записать в виде
 $\Theta(x,t) = \Theta_\infty + (\Theta_0 - \Theta_\infty) e^{-\frac{C_0}{EJ}(x-2vt)}$

Еще один пример: одномерное движение
 пружи на диске, лежащей на жестком
 основании



$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ky = P(x, t)$$

$$P = P_0 \delta(x - vt) = P_0 \delta(s)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta^2 y = \frac{P_0}{EI} \delta(s)$$

$$y = f(x - vt) = f(s)$$

$$f''''_+ + 2\alpha v^2 f''_+ + \beta^2 f_+ = 0 \quad s > 0$$

$$f''''_- + 2\alpha v^2 f''_- + \beta^2 f_- = 0 \quad s < 0$$

Пример: если $f_+ = f_-$, $f'_+ = f'_-$, $f''_+ = f''_-$
 $f'''_+ - f'''_- = \frac{P_0}{EI}$ (это корень)

Расщепление решения:

Дисперсионное соотношение для диска:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta^2 y = 0$$

-диск идет

$$y \sim e^{\pm i \omega t}$$

$$c_s = \frac{\omega}{2} - ?$$

(2)

6.3 Метод предельного поглощения

6.3.1 Функция Грина статической задачи

Начало поглощением:

$$d^4 - 2\alpha w^2 + b^2 = 0$$

$$c^2 = \left(\frac{w}{d}\right)^2 = \frac{b^2 + d^4}{2\alpha d^2} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{b^2 + d^4}{2\alpha d^2}}$$

$$\frac{dc}{dd} = 0 \Rightarrow d^* = \sqrt{b}$$

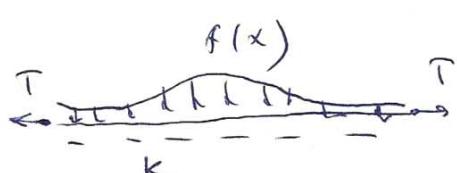
$$c_{\text{крит.}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{K\sigma J}}{P}}$$

При выполнении предельного загружения определим предельную нагрузку. Как она связана с критической?

Метод предельного поглощения
Функция Грина

Рассмотрим статическую задачу о проникновении струи в неупругое основание:

$$T u_{xx} - k u = f(x)$$



$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty}$$

Сделаем интегрирование

преобразование

$$f^F = \int_{-\infty}^{\sigma} f e^{-idx} dx$$

Функция на конечное:

(3)

$$\begin{aligned}
 & T \left[u(x) e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\omega x} \right] = \\
 & = T \left[u(x) e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} + i\omega u(x) \int_{-\infty}^{\infty} - \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\omega x} \right] \frac{u^F}{u^F} \\
 & (-T\omega^2 - k) u^F = f^F \Rightarrow u^F = -\frac{f^F}{k + T\omega^2}
 \end{aligned}$$

Однозначное преобразование Фурье:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$u^F = -\frac{1}{T} \frac{f^F}{\omega^2 + \alpha^2}, \quad \alpha^2 = \frac{k}{T}$$

$$\text{Если } \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2} = \varphi(x), \text{ то}$$

$$f^F \varphi^F = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) \varphi(s) ds$$

единица

(Бесконечное преобразование Фурье)

$$u^F = -\frac{1}{\omega^2 + \alpha^2} \frac{1}{T} \quad - \text{ преобразование Фурье}$$

или периодическая

сигналов при синтезе фильтров

$$u_{nx} - \bar{K}u = \frac{\varphi(x)}{T}, \quad \bar{K} = \frac{k}{T}$$

$$\text{Тогда: } u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) u^F(s) ds$$

Также получим
результаты синтеза на основе - фильтров

(4)

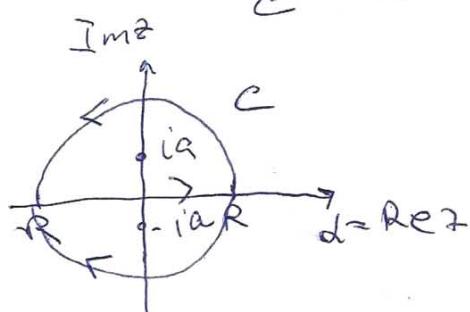
Её принципа нейтров сигнатура Грина

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^F e^{idx} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izx}}{z^2 + a^2} dz$$

Для вычисления интеграла

перенесём в комплексную плоскость.

$$\tilde{J} = \int_C \frac{e^{izx}}{z^2 + a^2} dz, \quad C - \text{замкнутая путь}$$



при $x > 0$ бер. об

замыкают на

верхнюю полуплоскость,

а при $x < 0$ - на нижнюю.

$$\tilde{J} = \int_{CR^+} F(z) dz + \int_{-R}^R F(z) dz \quad \text{при } x > 0$$

$$\tilde{J} = \int_{CR^-} F(z) dz + \int_{-R}^R F(z) dz \quad \text{при } x < 0$$

имеем при малом радиусе погоне
и замыкаем контура $\int_{CR^+} F(z) dz \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0$

$$\tilde{J} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=a} F(z) = 2\pi i \frac{e^{iax}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ax}$$

$x > 0$

$$\tilde{J} = -2\pi i \operatorname{res}_{z=a} F(z) = \frac{\pi}{a} e^{ax}$$

$x < 0$ $\operatorname{однозначное}$ \Rightarrow вывод симметрии

$$\therefore \tilde{J} = \frac{\pi}{a} e^{-ax}$$

(5)

6.3.2 Функция Грина динамической задачи

Извл: $\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax} = -\frac{1}{2\pi i} e^{-ax} -$
 - функция Грина
 (статика)

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \psi(\xi) d\xi$$

Рассмотрим теперь динамическую задачу:

$$T u_{xx} - p(x) u_{tt} - k(x) u = 0$$

p и k зависят от x и времени!

Рассмотрим специальную задачу

$$u(x,t) = U_0(x) e^{int}$$

$$\text{Тогда: } U_0_{xx} + \frac{\omega^2}{T} p(x) U_0 - \hat{k}(x) U_0 = 0$$

$$U_0_{xx} + U_0 \left(\frac{\omega^2 p(x)}{T} - \hat{k}(x) \right) = 0$$

$$\exists p(x) = p_0 + \tilde{p}(x), \quad k(x) = k_0 + \tilde{k}(x)$$

$$U_0_{xx} + \underbrace{\frac{1}{T^2} [\omega^2 - \omega_0^2]}_{\text{неравенство}} U_0 = \frac{1}{T} [\tilde{k}(x) - p_0 \omega^2] U_0$$

исходящие структуры.

Могут ли они включать члены порядка

источника ненесущий?

(6)

Поставим в пребуд змін $\frac{1}{T} \delta(x-\xi)$

$$\frac{1 \cdot \delta(x-\xi) e^{\text{int}}}{\int_0^\xi}$$

ξ - точка приложенія зусилля

$$U_{0xx} + \frac{1}{C_0} U_0 (\omega^2 - \omega_c^2) = \frac{1}{T} \delta(\omega - \xi)$$

Если мы знаем гомогенное

рівняння Грина, то рішення исходного
уравнения с непрервностью в пребуді
змін можна замінити в багато:

$$U_0(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, \omega) [k(\xi) - \omega^2 \rho(\xi)] U_0(\xi) d\xi$$

Інтеграле ур-е Φ рагональна

І друга с диференціальним преведанням

Інтеграле ур-е Φ рагональне имеет ви

$$y(t) = \lambda \int_a^b k(t, s) y(s) ds + g(t)$$

Задача $g(t) = 0$, то имеет однозначне ур-е

Теорема: Абсолютно однозначне ур-е

имеет однозначне рішення якщо модуль

згубки g , таємо однозначне ур-е

имеет на певному інтервалі однозначне

рішення $(\lambda_n$ - однозначн.

згубки, y_n - однозначні згубки) ⑦

Если $K(x, \xi)$ - симметрическое ядро, то убеждено, что спектр содержит только вещественные и кратные нулю собственные значения, а вещественные орбиты ортогональны. Решение можно представить в виде

$$\text{разложение } y = \sum g_k y_k$$

$$\text{Решение } u_{0xx} + \frac{1}{c^2} (w^2 w_c^2) = \frac{\delta(x-\xi)}{l}$$

Переходим к $y^{1/2}$: $U_{0xx} + \frac{1}{c^2} (w^2 w_c^2) = \frac{\delta(x-\xi)}{l}$

Если $w < w_c$, то борька кратна, в противном случае решение - это дзета

Более U_0 - комплексное

Нормируя сужение граница момента как вещественное, так и комплексное

$$\begin{aligned} \text{Берём преобразование Фурье, } \int_{-\infty}^{\infty} U_{0xx} e^{-idx} dx &= \\ &= U_{0x} e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + id \int_{-\infty}^{\infty} U_{0x} e^{-idx} dx = \\ &= U_{0x} e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + id U_0 e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - d^2 U_0^F \end{aligned}$$

Мы не можем привлечь этого

Возможно сложнее. У нас комплексное значение, значит не концептуальное загоря, более не

затруднений.

(8)

6.3.3 Применение метода предельного поглощения

Используем метод предельного поглощения:
введем малое время:

$$\text{Базо: } G_{xx} - \frac{1}{\omega^2} G_{tt} - \hat{K} G = \frac{i}{T} \delta(x-\xi) e^{i\omega t}$$

G - сумма Грина (консервативное поле)

$$\text{Теперь } G_{xx} - \frac{1}{\omega^2} G_{tt}^{(\varepsilon)} - \varepsilon G_{tt} - \hat{K} G = \frac{i}{T} \delta(x-\xi) e^{i\omega t}$$

Мышико называет условие: $G^{(\varepsilon)} \Big|_{x \rightarrow \pm \infty} = 0$

$$G^{(\varepsilon)}(x, t) = G_0^{(\varepsilon)} e^{i\omega t}$$

$$G_{0xx}^{(\varepsilon)} + \int \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2) - i\omega \varepsilon / G_0^{(\varepsilon)} = \frac{i}{T} \delta(x-\xi)$$

Определим другое преобразование:

$$-\alpha^2 G_0^{(F(\varepsilon))} - p^2 G_0^{(F(\varepsilon))} = \frac{i}{T} e^{-i\omega \xi}$$

$$p^2 = i\omega \varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\text{или } -(\alpha^2 + p^2) G_0^{(F(\varepsilon))} = \frac{i}{T} e^{-i\omega \xi}$$

$$\boxed{G_0^{(F(\varepsilon))} = -\frac{i}{T} \frac{e^{-i\omega \xi}}{\alpha^2 + p^2}}$$

⑨

$$G_0^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-s)}}{\omega^2 + p^2} d\omega$$

Дне формуление интеграла переанже
в комплексную плоскость:

$$z_{1,2} = \pm pi = \pm (A + iB)i$$

$$z_1 = -B + iA, \quad z_2 = B - iA$$

$$p^2 = A^2 - B^2 + 2iB = i\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

Нуриавнивые числа и венг. заслу, имеем:

$$\begin{cases} A^2 - B^2 = -\frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2) = a, \quad a < 0 \text{ при } \omega > \omega_c \\ 2AB = \omega\varepsilon \Rightarrow B = \frac{\omega\varepsilon}{2A} \end{cases}$$

Погематиум ве нервое ур-е

$$A^2 - \frac{\omega^2\varepsilon^2}{4A^2} - a = 0 \Rightarrow A^4 - aA^2 - \frac{\varepsilon^2\omega^2}{4} = 0$$

$$A_{1,2}^2 = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \varepsilon^2\omega^2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}|a|\left(1 + \frac{\varepsilon^2\omega^2}{2a^2}\right)$$

Расмотрим случай $\omega > \omega_c$, $a < 0$

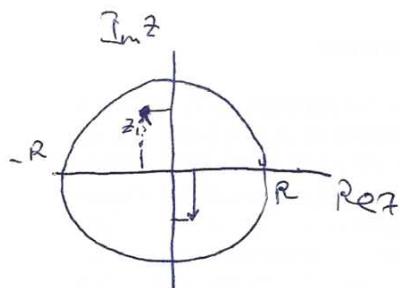
Тогда нас устроит монбю:

$$A^2 = -\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4a} \Rightarrow A = \frac{\varepsilon\omega}{2\sqrt{|a|}}, \quad B = \sqrt{|a|} =$$

$$= \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{\omega}$$

(10)

Умножаем z_1 и z_2 на конк. плоскость



Если $\theta = 0$, то получается
произведение оси.
Их сумма отходит

Возможна и вариация:

- 1)  $\rightarrow \text{Re } z$ Какой же элла
- 2)  $\rightarrow \text{Re } z$ Вариант?
- 3)  $\rightarrow \text{Re } z$ Вариант?
- 4)  $\rightarrow \text{Re } z$

Возможно менее громко скажет наше
впечатление оце. (Причина этого:
оце впечатление оси. (Причина этого:
так как существует неограниченное количество

при $x > \xi$ впечатление ось замыкаем

на верхнюю полуокружность, а при

$x < \xi$ — на нижнюю. Используя

точку $x=0$, можем

$$G_0^{(c)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{contour}} \frac{2\pi i e^{iz_1(x-\xi)}}{2z_1}, \quad x > \xi$$

$$\Theta_{2\pi i} e^{\frac{iz_2(x-\xi)}{2z_2}}, \quad x < \xi$$

одно и то же выражение

(11)

Переход в предел $\varepsilon \rightarrow 0$ $z_1 = -B$, $z_2 = B$

$$G_{\rho} = -\frac{i}{T} \begin{cases} \frac{i e^{-iB(x-\xi)}}{-2B}, & x > \xi \\ \frac{i e^{iB(x-\xi)}}{2B}, & x < \xi \end{cases} \quad (1)$$

$$B = \sqrt{|\rho|} = \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{C_0}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{i e^{-iB(x-\xi)}}{2B}, & x > \xi \\ \frac{i e^{iB(x-\xi)}}{2B}, & x < \xi \end{cases}$$

$$\text{Тогда } G_{\rho}(x, \xi, \omega) = \frac{i \frac{\rho}{C_0}}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{-i|x-\xi| \frac{1}{C_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} =$$

$$= \frac{i e^{-i|x-\xi| \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{C_0}}}{2 \rho C_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

$$G(x, t, \omega) = \frac{e^{-i|x-\xi| \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{C_0}}}{2 \rho C_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{i\omega t} =$$

$$= e^{i\omega(t - \frac{|x-\xi|}{C_0})} \frac{i}{2\rho C_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} - \text{нормированная}$$

$$G = \frac{\omega C_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

Следовательно! $\omega < \omega_c$ — самодиректно!

(12)

7 Лекция 29.03.2022.

7.1 Повторение метода предельного поглощения

29.03.22. Лекция 7

Вспомним математ преобразующий поглощ.

$$G_{xx}^{(\varepsilon)} - \frac{1}{\omega^2} G_{yy} - \underline{\varepsilon G_t} - \hat{k} G = \frac{i}{T} \delta(x-s) e^{i\omega t}$$

$$G_t^{(\varepsilon)}(x,t) = G_0^{(\varepsilon)} e^{i\omega t}$$

$$G_0^{(\varepsilon)} = -\frac{i}{T} \frac{e^{-i\omega s}}{\omega^2 + p^2}, \quad p^2 = i\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\omega > \omega_c$$

$$G(x,t,\omega) = e^{i\omega(t - \frac{|x-s|}{c_0})} \frac{i}{2\rho_0 c_0 \sqrt{\omega - \omega_c^2}}$$

$c_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$ - звуковая скорость в материале
известна от звука
же оператор холм-Гюнде

Перейдём к случаю $\omega < \omega_c$

$$G(x,t,\omega) = -\frac{1}{2\rho_0 c_0 \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} e^{-i|x-s|\sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{c_0}}} e^{i\omega t}$$

- звук Грина (неконтрольное решение)

Вернёмся к исходному ур-ию

с неоднородностями:

$$p(x) = p_0 + \tilde{p}(x), \quad K(x) = K_0 + \tilde{K}(x)$$

①

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - k_0 u = \frac{1}{\rho c^2} (\tilde{k}(x)u + \tilde{\rho}(x)u_{tt}) \quad -\infty < x < \infty$$

Существует ли дисперсионный спектр для
затухающих решений?

Рассмотрим спектральную задачу

$$u(x,t) = U_0(\omega) e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{0xx} + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_e^2) U_0 = \frac{1}{\rho c^2} (\tilde{k}(x) - \tilde{\rho}(x)\omega^2) U_0$$

Если извлечь граничные условия, то
нахождение U_0 сводится к уравнению:

$$U_0(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, \xi, \omega) \varphi(\xi, \omega) U_0(\xi, \omega) d\xi$$

Вместо исходного дифференциального
уравнения с неизвестной в правой
стороне мы можем решить обратное
уравнение: $y(x, \omega) = \omega \int_a^b K(x, \xi) y(\xi, \omega) d\xi$

Если это уравнение симметрическое и бандитическое,
то уравнение имеет характеристика
бандитический дисперсионный спектр, а
и наоборот, если уравнение
имеет характеристику бандитического спектра.

(2)

При $\omega > \omega_c$

$$G_0(x, \xi, \omega) = -\frac{i}{2\rho_0 c \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{-i \frac{|x-\xi| \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}}$$

- это минимум

Затемнение отражения волн несет им
исключение и имеет определенное значение.

Для расчета отражения $\omega < \omega_c$

$$G_0(x, \xi, \omega) = -\frac{1}{2\rho_0 c} e^{-i \frac{|x-\xi| \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c}} \frac{1}{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

смешанная волна.

это генерация

? Генерация низкочастотная, генерация высокочастотная
(высокочастотные колебания)

Проверка: если у нас имеется
изодромное поле вибрации
то у нас имеется изодромное
затемнение: $K(\omega) = \omega$ $\tilde{J}(\omega) = M\tilde{\Sigma}(\omega)$

Тогда: $v_e(x, \omega) = -\omega^2 G_0(x, 0, \omega) M \frac{v_0(0, \omega)}{\omega}$
 (проверка вибрации)
 под наименьшее

Фундаментальное свойство генера-фильтра:

$$\int_a^b f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

③

Условие местного равновесия
массы со спиралью:



$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x, w) = U_0(\omega)$$

Положим в начале реверсивное $x=0$

$$U_0(0, \omega) [1 + \omega^2 G_0(0, 0, \omega) M] = 0$$

$$1 - \frac{\omega^2 M}{(2\beta \rho_0 \omega \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2})} = 0$$

Аналогичный результат у нас
был полученearlier, но для
того же рассмотрения
некоторому спиралю с массой
на горизонте

Приложение 2 б
значение χ есть ненулевое
менее, рассмотриваемое
деление на конечное $(-\infty < x < \infty)$

(4)

7.2 Примеры волн в различных средах

7.2.1 Термоупругие волны

Примеры волн в различных средах

1. Термоупругие волны

Баланс импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} = 0, \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{или}$$

после гипотермирования

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x^2} \\ K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho c_v \ddot{\theta} = E \alpha \dot{\varepsilon} \end{array} \right. \quad \text{где } \varepsilon \text{ в градусах}$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \ddot{\theta} = \gamma \dot{\varepsilon} \quad \text{уравнение связности.}$$

После приведения к дифференциальным

переменным этот оператор \tilde{D}
переменных этом оператор \tilde{D}
меньше может вспомогательных, и при
решении задач им заслуга приводится.
(Использование - получившие название)
(Использование - получившие название)

Если привести связность, то
температура определяется квадратично
и задача решается более просто
(Приложение задача, приведена на странице
a)

(5)

Что даёт учёт данной переменной?

Какое описание оно даёт?

Помимо второго производного от температуры в первое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} (\eta \dot{\varepsilon} + \dot{\theta})$$

входит первое производное по времени:
Возможна первая производная по времени
запаса тепловой энергии изменяется.

Отмечим, что зоне охлаждения температура может при наличии

стремиться к нулю, то второе

известно, что температура изменяется

и температура изменяется

с изменением скорости

изменяется

поправки можно

принять. Их относительная

6

7.2.2 Плазменные волны

2. Плазменные волны

Две описание распространение волн
малой амплитуды используются методы
сферичностей гармонических, в первых
которых плазма представляется сферой
с постоянной и малой турбулентной
давлением которой можно пользоваться
уравнение состояния идеальной газа:

$$\rho = n k_B T$$

Такое упрощение удобно и
постоянное давление имеет вид

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i = - \nabla \left(\frac{n_i k_B T_i}{m_i n_e} \right) - \frac{e}{m_i} \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla \vec{v}_e = - \nabla \left(\frac{n_e k_B T_e}{m_e n_e} \right) + \frac{e}{m_e} \nabla \Phi$$

+ упрощение непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0$$

Принцип непрерывности

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0$$

Принцип непрерывности
и нейтральности

$$+ \Delta \Phi = - \frac{e(n_i - n_e)}{m_e} - \text{упрощение}$$

Рассмотрим одномерный случай.

Так как $m_i \gg m_e$, то оно можно
записать в виде

одномерного уравнения вида

(7)

Две первых балансовых:

$$p_e = p_0 + p', \quad n_e = n_0 + n'$$

Число ноль относится к неизмененному
составу.

$$p_e = p_0 + m e^{\gamma} \frac{\partial p}{\partial p_0} \quad (p_e = f(p_0))$$

$$\frac{\partial p}{\partial p_0} = v_0^2$$

Тогда имеем две первых балансовых уравнений

Будем:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{v_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} n_e$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

предполагаем, что все остальные
уравнения по x , а изменение — по t

с величиной вектора v :

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + w_p^2 n' = 0$$

$$w_p^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e \epsilon_0} - \text{называемая}$$

частота

Число определяется v_0 , т.к. имеем уравнение

$p \sim n^{\gamma}$ (закономерность пропорциональности)

$p = n k_B T$ Две первых уравнения $f = 3$

(8)

7.2.3 Прямоугольный волновод

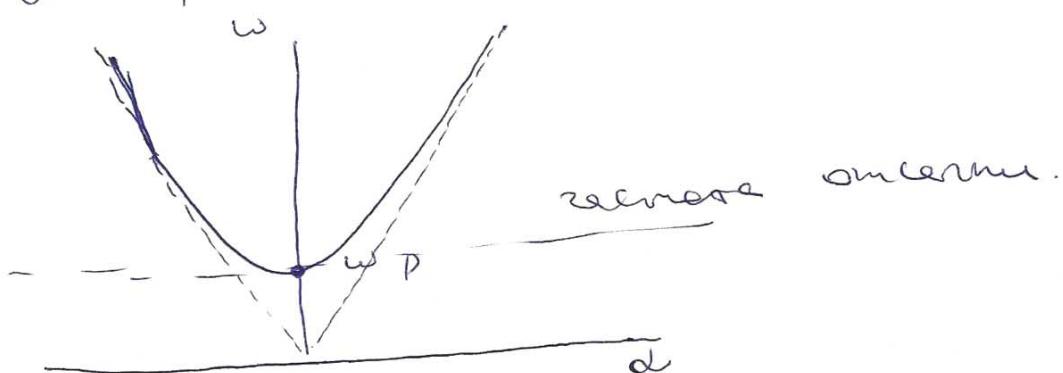
$$\text{Тогда } \frac{\partial \beta}{\partial \rho_0} = \frac{\partial \beta}{\partial (\epsilon_0 n_e)} = \frac{1}{n_e} \frac{\partial \beta}{\partial n} = j \frac{\beta}{n n_e}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial \rho_0} = \frac{3 k_B T_e}{n e}$$

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \omega_p^2 h' = 0$$

Оператор краев - Гармонический оператор.

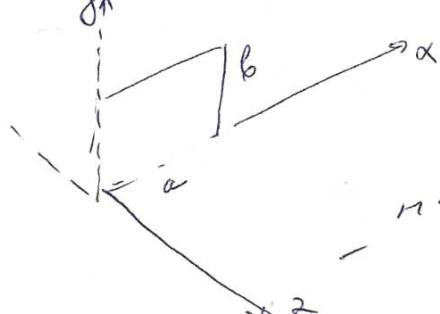
Дисперсионное уравнение:



3. Прямоугольный волновод

Рассмотрим вопрос о прохождении
электромагнитных волн через
прямоугольный волновод

Изображение



направление распространения волн.



Для волн поперечных
две волны поперечные z
и одна солито ограниченная b на
стене линейка!



Тогда $E_y = E_0 \sin K_x x e^{i(\omega t - k_z z)}$
 $\omega = \frac{u}{K_z}$ — первые спектр
 $K_x a = n\pi \Rightarrow K_x = \frac{n\pi}{a}$ — первые спектр.
 Имеем две солито ограниченные
линейки уравнения:

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k_x^2 E_y \quad \underline{\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0.}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -k_z^2 E_y$$

$$K_x^2 E_y + K_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0$$

$$\text{Очевидно } K_x^2 + K_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$K_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{u^2}{a^2}} \quad (\omega^2 = \omega_c^2 + \text{const})$$

$$\omega_c = \frac{uc}{a}$$

$E_{cm} \omega < \omega_c$, то

$$k_x = \pm i k^1, k^1 = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$E_y = E_0 \sin kx e^{\pm k' z} e^{i \omega t}$$

При замкнутом кольце $\omega_c = \frac{aC}{2}$

Более быстрое движение
распространяется

менее замкнутое \Rightarrow замкнутое \rightarrow
время

менее замкнутое \Rightarrow

\Rightarrow замкнутое не распространяется.

(11)

8 Лекция 05.04.2022.

8.1 Волны в акустических средах

05.04.22 Лекция 8

Волны в акустических средах

Акустика в широком смысле слова -

- это наука о звуке, изучение явлений и волн в различных средах от сотовых телефонов до космоса. Важнейшее значение в акустике имеет вибрация и ее воздействие на организм.

Изучение звука и волн в различных средах называется акустикой, восприятием звуков, распространением звуков, (16 Гц - 20 кГц)

Рассмотрим модель акустической среды это сплошная среда, состоящая из частиц. Две частицы среды могут приблизиться и начать сдвигаться относительно

Если в некотором объеме упругая среда вызвана механическим возмущением, то генерируемые волны распространяются в этом объеме спиралью и приходят в

дальнейшем. Благодаря упругим связям, возникает взаимодействие между частицами, возникает обратное движение объема по первоначальным направлениям "возвращение", и возмущение объема распространяется в среде

в среде

1

До этого мы рассматривали только в
трёхмерных телах. Теперь поговорим о
тканях в ткани и тканях ткани

При растяжении в направлении, параллельном
волокнам возникает максимальное напряжение (вертикаль)
Если при этом происходит, т.е. если одна
кошка не справляется с ситуацией, то другая кошка
затемнит, то иначе лучше всего
использовать ткань

Стрессом (σ или σ_{xy}) называется изменение, если
форма не изменяется в состоянии покоя, то
и при растяжении отсутствующим является
напряжение

$I = -pE$ - ткань напрягает ткань
(Уменьшение формы не рассматривается)

Однонаправленное
 $\frac{\partial u}{\partial t} + D \cdot (\nabla u) = 0$
 u_c - напряженное напряжение
Если все зернистые гранулы, то $p = mn$
и $\frac{\partial p}{\partial t} + D \cdot (p \nabla) = 0$ - зернистое напряжение
Несколько зернистых гранул в превыс
заряд u

(2)

(2) Уп-е давления

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\nabla p + \rho \bar{f} -$$

небольшое
изменение
давления

воздействие
на насос

небольшое
изменение
давления

Уп-е является неприменимым:

конвективное сопротивление, $\nabla(pv)$

В дополнением к основным формулам возникшие плотности и давления малы (но превышают величину сопротивления). В этом случае амплитуда волн становится ненесущими, что их параметры не влияют на общую сумму

Запись: $I = \rho p E$ где E —

В реальности не всегда выполняется условие. В турбулентном движении напряжение меньше единицы. При этом напряжение не зависит от производных

ориентации

составляющих

(3) Уп-е

$$P = P(p)$$

Барометрическое давление

(3)

Таким образом, мы получим уравнение

для давления в гидростатике:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla p = \rho \frac{d\tilde{v}}{dt} \quad \text{давление неизменяется} \\ p = p(p) \quad \text{гидростатическое давление} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p\tilde{v}) = 0 \quad \text{давление неизменяется} \end{array} \right.$$

Несколько слов о гидростатике: p, ρ, \tilde{v} — это складные величины

и в гидростатике имеются

запасы гидростатической

энергии, т.е. энергия гидростатическая,

давление

и масса

взаимодействуют

взаимодействие массы

и давления называется гидростатическим

давлением.

Предположим, что вязкость малая

и пренебрежим, то есть

$$p = p_0 + \tilde{p}, \quad \tilde{v} = \tilde{v}_0 + \tilde{\tilde{v}}$$

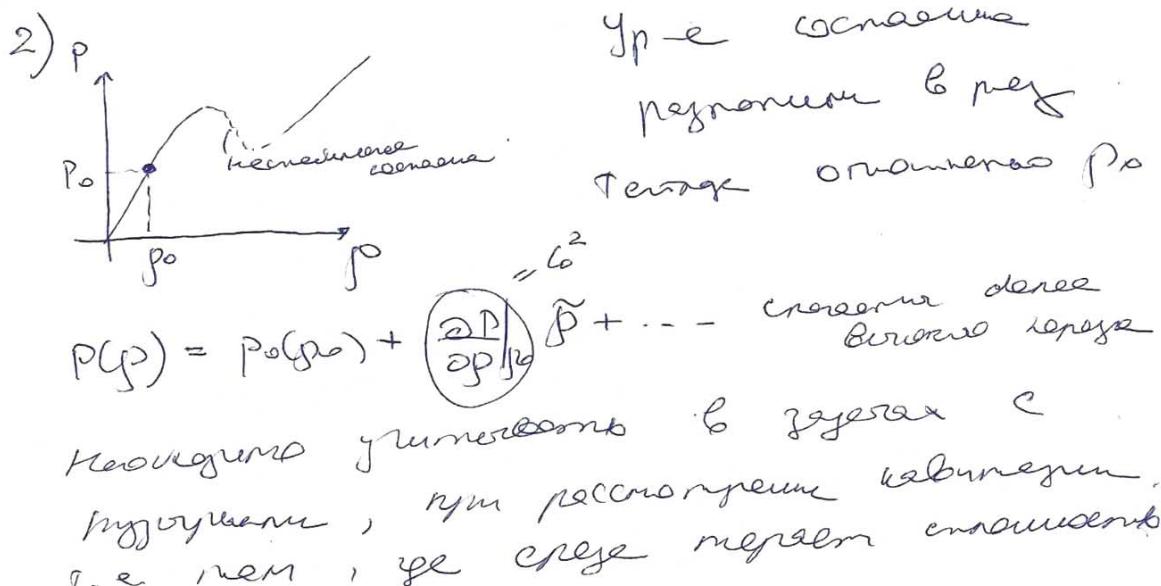
взаимодействие

$$-\nabla(\tilde{p} + p_0) = (\tilde{p}_0 + \tilde{\tilde{p}}) \frac{d\tilde{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{-\nabla \tilde{p} = p_0 \frac{d\tilde{v}}{dt}}$$

$$1) \quad -\nabla(\tilde{p} + p_0) = (\tilde{p}_0 + \tilde{\tilde{p}}) \frac{d\tilde{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{-\nabla \tilde{p} = p_0 \frac{d\tilde{v}}{dt}}$$

$$\cancel{\frac{d\tilde{v}}{dt}} = \frac{d\tilde{v}}{dt} + (\tilde{v} \cdot \nabla) \tilde{v} \Rightarrow \frac{d\tilde{v}}{dt} = \frac{d\tilde{v}}{dt}$$

(4)



3) Уп-е сжатие массы:

$$\frac{dp}{dt} + D(pv) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} + p_0(D \cdot v) = 0$$

$D \cdot v$ - единство уравнение одома

$\tilde{\rho} = -p_0 \varepsilon \theta$, $\varepsilon \theta$ - общий коэффициент

$p = p_0(1 - \varepsilon \theta)$. При расширении $\varepsilon \theta > 0$

растягиваются, а при
сжатии ($\varepsilon \theta < 0$) - сжимаются.

Таким образом,

$$-\nabla \tilde{\rho} = p_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{- сжатие и тяжкое}$$

$$\tilde{\rho} = c_0^2 \tilde{p} \quad \text{- уп-е сжатия}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -p_0 \nabla \cdot v \quad \text{- сжатие и тяжкое}$$

классическое
линейное
уравнение

(5)

Для тела двухчлесного уп-бс:
одинаков (через склонение) и поперечное

Возможен гидравлический отрыв и
поперечный затор непосредственного управления

$$\nabla \cdot (-\tilde{p}) = p_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \tilde{v}$$

С учетом принципа управления

$$\Delta \tilde{p} = p_0 \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} \Rightarrow \text{базисное упр-е}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \tilde{p} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0} \quad - \text{одинаковое упр-е}$$

$$\tilde{p}|_r = \text{заторможенное давление}$$

кинематическое упр-е: введен времена
 τ спиральной переменной, так что $\tau^2 = \Delta \Phi$

$$\text{Теорема Рено Монгайя: } u = \nabla \Phi + \nabla \times \underline{\Psi}$$

Φ - спиральный потенциал, $\underline{\Psi}$ - базовый
потенциал, при этом $\nabla \Phi$ является
заторможенным градиентом: сдвиги
 u изменяются однажды $\square \rightarrow \boxed{\square}$, а
 $\nabla \times \underline{\Psi}$ комбинацией градиента, изогнутого
+ изгибающегося $\square \curvearrowright \diamond$.

(6)

В аэростатических средах $\nabla \Phi$ неизменна, т.к.
 $\underline{v} = \nabla \Phi$ и v даны масштабом:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \underline{v} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \Phi, \text{ и}$$

с учетом уравнения $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \Phi$

$$\Delta \Phi + \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = 0$$

v первое уравнение (дано в импульсе)

$$-\tilde{p} = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0}$$

нинеизменяющее уравнение

Оператор Δ называется

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$e^{int i \underline{d} \cdot \underline{z}}$ - форма в трехмерном пространстве

$$\underline{d} \cdot \underline{z} = d_x \cdot x + d_y \cdot y + d_z \cdot z, \underline{d} - вектор$$

вектор, z - путь линии

$$\text{т.к. } \underline{v} = \nabla \Phi, \text{ то } \underline{v}_n = \underline{v} \cdot \underline{n} = \nabla \Phi \cdot \underline{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

$\underline{v}_t = \nabla \Phi \cdot \underline{t}$ - касательное компоненте

сплошной массы не пересекают: $\nabla \Phi = 0$

Следовательно $v_t = 0 \Rightarrow$

Задача Неймана.

(7)

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho_0}} \quad \text{— скорость звука}$$

Произведен первым евроскии звука

один из основных законов

Упр. с изменением

$$PV\delta = \text{const}, \quad f = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{— отношение температур}$$



$$P = \text{const} \cdot P_0^\delta \Rightarrow \frac{P}{P_0^\delta} = \frac{P_0}{P_0^\delta}$$

$$\frac{dP}{P_0^\delta} = \delta \frac{P_0}{P_0^\delta}$$

$$\text{Таким образом } c = \sqrt{\delta \frac{P_0}{P_0^\delta}} =$$

$$= \sqrt{\delta \frac{RT}{M}} \quad \text{с гр. переносом - начальной}$$

В результате этого соотношения получается зависимость.

Газ	$C_{ab, m/c}$
Водород	1265
Гелий	965
Азот	334
Водяной пар	331
Кислород	316
Температура 60°C	

Материал	$c, \text{м/с}$
Воздух (20°C)	1490
Этилен спирт (20°C)	1180
Водяной пар (-262°C)	1127
Азот ($\sim 156^{\circ}\text{C}$)	867
Гелий (-365°C)	180

(8)

8.2 Поверхностные гравитационные волны

Поверхностные гравитационные волны

При изучении волн в туманости необходимо различать туманные и гравитационные волны. (Слово волна употреблено в зависимости от типа волн.)

Давно уже известно основное положение, что можно применить любую теорию, сколько распространение приводит различие значений для различных (сопутствующих) величин решения.)

Итака рассматриваемое гравитационное поле, в некоторой упрощенности является сферически симметричным и не имеет вспомогательных.

Однако сразу же становится ясно, что вспомогательные величины определяются в зависимости от типа волн и его изменения.

Мы не будем учитывать гравитационное поле. В качестве примера рассмотрим гравитационные волны, называемые гравитационными волнами, зависящими от времени.

(9)

которых определяемое вспомогательное
переходит между тонусом и его
супротивным. Верхнее из состояний
свободного тонуса в сознании
является ~~затем~~ равновесие.
Второе ~~затем~~ тонуса, ~~известное~~
которое в равновесии сознания
непрерывно уменьшается с увеличением
волнения — это будущее
уравновешенное волнение.
Супротивные тонусы ~~известны~~
(оценки)

Существование стоящего в
единстве и согласованности групп
групп или единства равновесия
насаждает ~~меняющее~~ равновесие
насаждает более ~~меняющее~~ нечто
находящее ~~имеющее~~ более нечто
также ~~принадлежащее~~ нечто различного
одного при переходе через поверхность
изделия между ним и ее. Возникновение
данного равновесного состояния
данного равновесия в виде поверхности
превращение в будущую поверхность
уравновешенных волн, которые

(10)

не могут распределиться зоной
ом нейросомы: она делится на
зоны, так же называемые зоны гипокор-
тизма.

Мы рассмотрим нейрохордные
гравитационные зоны на том
примере между собой и взаимо-
действии преобразование синапс
нейрохордного гипокортизма.

Картина зонных нейрохорд
головного мозга: зоны будут
зонально приспособлены по определению
т.е. мы имеем зоны со синапсами
продолговатого и спинного мозга.

Литература:

1. Джефф Лайтхилл. Волны в
нейрохордах. 1928 г.

2. Гарри Ламб. Гидродинамика, 1932г.

(ii)

9 Лекция 12.04.2022.

9.1 Краткое повторение материала о волнах в акустических средах

12.04.22 Лекция 9

Вспомним материал предыдущей лекции.

На основе базисных уравнений:

$$-\nabla p = \rho \frac{dv}{dt} \quad - \text{закон импульса}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \cdot (\rho v) = 0 \quad - \text{закон massa}$$

$$+ \gamma p \cdot e \quad \text{сжатие}$$

$$P = P(p)$$

мы получим классическое линейческое уравнение для среды относительно исходного давления P_0, p_0

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \tilde{p} = P_0 \frac{\partial v}{\partial t} \\ \tilde{p} = C^2 \tilde{v}, \quad C^2 = \frac{\partial P}{\partial P_0} / \rho_0 P_0 \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -P_0 \nabla \cdot v \end{array} \right.$$

Далее звук уп-е сжатия $\propto 1/\gamma^{1/2}$

Основные звуковые числа:

$$\text{Скорость: } \Delta \tilde{p} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0$$

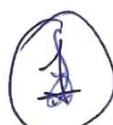
$$\text{Гр. ул} \quad \tilde{P}|_r = \Phi(t) \quad - \text{затухание}$$

Кинематическое

$$\Delta \varphi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$V_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_r = \Phi(n) \quad - \text{затухание}$$

зг $\nabla \cdot \varphi$ - нормальная звуковая скорость



9.2 Поверхностные гравитационные волны на границе между водой и воздухом

при условии отсутствие вихревого
движения в среде.

На основе этих узких приближений
оказалось что волна, а именно,
поверхностные гравитационные волны
на границе между водой и воздухом
их движение определяется исключительно
изменением между ними давления
и её спротивлением берущим
из-за сопротивления движению в
согласии с их равновесием.

Если движение нестационарное, то

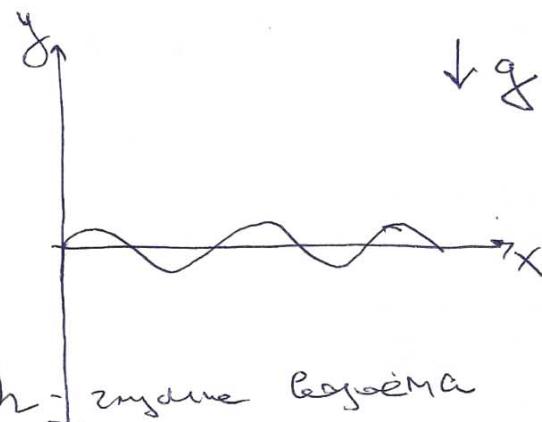
$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad v = \nabla \varphi \Rightarrow$$

$$\Delta \varphi = 0 \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ - условие на непроницаемую
поверхность

Чтобы найти условие на
однородную поверхность
используя координаты на непроницаемой
границе и направление оси dz
берущим

(2)



h - глубина воли
запишем ур-е для φ в координатах вертикальных осей

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - g$$

После интегрирования с учётом наведённой $\varphi = \nabla \psi$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - gy + C(t) \quad \text{- начальное значение}$$

На поверхности: $y = \eta$

η - возведение поверхности над морем (x_0)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - g\eta + \frac{P}{\rho} \cdot \text{видор } C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \text{при } y = \eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

После интегрирования 1 ур-е по времени имеем

(3)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

б ачу писалости
зати (y=0) уравнение уравнение
составляе на квадратурах
неберности

Так как же все засечки к уравнению
уравнение означаю, то оно
некоторое

$$y = f(y) \cos(\omega t - dx)$$

$$y \text{ неберности } y = \infty: \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow f'' - d^2 f = 0$$

Решение + уравнение уравнение
самоизменяю б квадрате
уравнение

$$f = Ae^{dy} + Be^{-dy}$$

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0 \Rightarrow$$

$$Ae^{-dh} - Be^{dh} = 0$$

$$\boxed{Ae^{-dh} - Be^{dh} = 0}$$

(4)

$$2. \quad \ddot{\varphi} + g \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 0$$

$$-(A+B)\omega^2 + gd(A-B) = 0$$

$$\begin{cases} (gd - \omega^2)A - B(\omega^2 + gd) = 0 \\ e^{-\alpha h}A - Be^{\alpha h} = 0 \end{cases}$$

Найдем характеристическое уравнение
самоизменяется в первое уравнение

$$\Delta = 0 \Rightarrow (gd - \omega^2)e^{\alpha h} = (\omega^2 + gd)e^{-\alpha h}$$

$$\omega^2(e^{\alpha h} + e^{-\alpha h}) = gd(e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{gd} \sqrt{th(2h)}$$

Если однозначно $\sqrt{gh} = \omega_0$ - константа, то

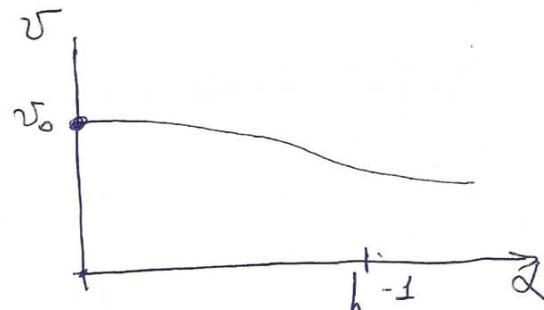
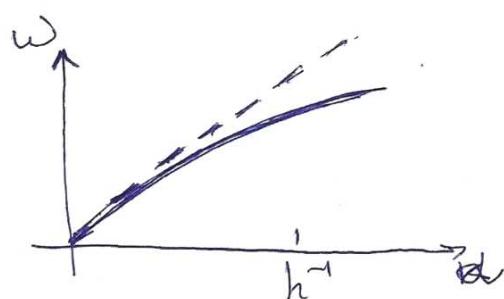
$$\omega = \omega_0 d \left(\frac{th(2h)}{2h} \right)^{1/2}$$

$$v = \frac{\omega}{2} = \omega_0 \left(\frac{th(2h)}{2h} \right)^{1/2} -$$

- связь с константой

(5)

Граничные условия:



Если угловое колесо $\omega h \ll 1$, то
 $\sin \omega h \approx \omega h \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 \alpha t$$

Но можно более грубые
оценки времени

Для времени:

$\omega h \gg 1$ более правильный

$$\omega = \sqrt{gd}$$

$$\sin \omega h \approx 1$$

Более правильный результат получается

с помощью грубых оценок.

⑥

Вернемся к определению f :

$$\text{Если подожечь } Ae^{-\alpha h} = Be^{\alpha h} = \frac{1}{2} C, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} f &= Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y} = \\ &= \frac{1}{2} C (e^{\alpha(h+y)} + e^{-\alpha(h+y)}) = C \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} C \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{g} C \omega \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \sin(\omega t - \alpha x) =$$

$$= a \sin(\omega t - \alpha x)$$

Будем C звать амплитудой.

$$C = \frac{ag}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{ag}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

Максимумы и минимумы

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{ag \alpha}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \sin(\omega t - \alpha x)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{ag \alpha}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{sh}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

Запоминай

(7)

10 Лекция 19.04.2022.

10.1 Продолжаем разговор о поверхностных волнах

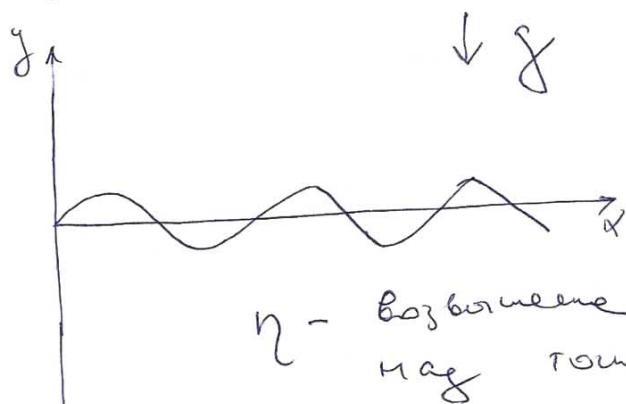
19.04.22. Лекция 10.

Продолжим разговор о поверхностных волнах на границе раздела γ_x .
Следуя

Основные предположения

- | | | |
|--|---|----------------------|
| 1. Несжимаемое тело
$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ | } | $\Delta \varphi = 0$ |
| 2. $\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi$ | | |

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$



η - возмущение поверхности
на гл. точке $(x, 0)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\varphi = C e^{i k y} e^{i(\omega t - dx)}$$

Глубина тихоокеана неограничена

①

10.2 Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей

Рассмотрим колебание поверхности раздела двух расположенных друг над другом жидкостей

$$\varphi = C e^{\alpha y} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\varphi' = C' e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - kx)}$$

считая что φ' относится к верхней жидкости.

$$\eta = a e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow i\omega a = \alpha C = -\alpha C'$$

Уравнение Эйлера после интегрирования по оси y

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - gy \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = -\frac{P'}{\rho'} - gy \end{cases}$$

На поверхности:

$$\begin{cases} P = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy \\ P' = -\rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - gy \end{cases}$$

Приравнивав давление, получаем:

(2)

$$-\rho C i\omega - \rho g a = -\rho' C' i\omega - \rho' g a$$

$$\rho (C i\omega + g a) = \rho' (C' i\omega + g a)$$

C учётом условия $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow$
 $\Rightarrow i\omega a = dC = -dC'$

$$-\rho \frac{\omega^2 a}{2} + \rho g a = \rho' \frac{\omega^2 a}{2} + \rho' g a$$

$$\frac{\omega^2}{2} (\rho + \rho') = g (\rho - \rho')$$

$$\omega^2 = \frac{g(\rho - \rho')}{\rho + \rho'}$$

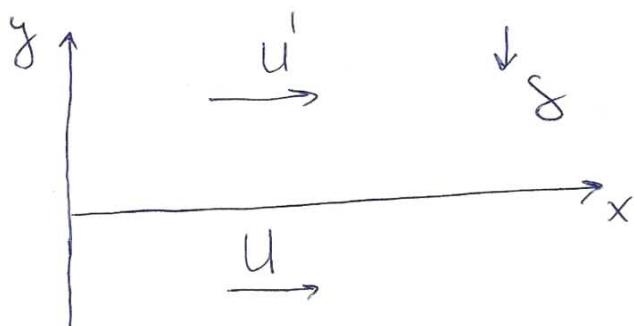
$$C_0^2 = \frac{\omega^2}{\rho^2} = \frac{g}{\rho} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$$

Таким образом, присутствующее верхней границе вибрации уменьшение скорости распространение волн.

(3)

10.3 Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей, которые движутся друг над другом

Предположим, что две тицестые с плотостями ρ и ρ' движутся друг над другом со скоростями u и u' параллельными оси x



Нужно учесть конвективное проницание

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

условие
на поверхности

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}$$

$$\varphi = ux + \varphi_1, \quad \varphi' = u'x + \varphi'_1$$

и п-е дифференциал

$$\frac{\rho}{\rho'} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - g y$$

аналогично для верхней тицести

(4)

Из непрерывности $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi_1'}{\partial x}$

$$\begin{aligned} & P \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + g \eta \right] = \\ & = P' \left[\frac{\partial \varphi_1'}{\partial t} + u' \frac{\partial \varphi_1'}{\partial x} + g \eta \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C e^{i \omega t - i \alpha x} \\ \varphi_1' &= C' e^{-i \omega t} e^{i (\omega t - \alpha x)} \\ \eta &= a e^{i (\omega t - \alpha x)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u' \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1'}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i \omega a - u i \alpha d = \alpha C \\ i \omega a - u' i \alpha d = - \alpha C' \end{cases}$$

$$\begin{cases} i \alpha (\omega - \alpha u) = \alpha C \\ i \alpha (\omega - \alpha u') = - \alpha C' \end{cases}$$

Возвращение к симметрии уравнения

(5)

$$\rho [i(\omega - \alpha u) c + g a] = \rho' [i(\omega - \alpha u') c' + g a]$$

Приравнение выражение где $c \neq c'$

$$\rho [i(\omega - \alpha u) \frac{i\alpha(\omega - \alpha u)}{\alpha} + g a] =$$

$$= \rho' [-i(\omega - \alpha u') \frac{i\alpha(\omega - \alpha u')}{\alpha} + g a]$$

$$\rho \left[-(\omega - \alpha u)^2 \frac{a}{\alpha} + g a \right] =$$

$$= \rho' [(\omega - \alpha u')^2 \frac{a}{\alpha} + g a]$$

$$g \alpha (\rho - \rho') = \rho (\omega - \alpha u)^2 + \rho' (\omega - \alpha u')^2$$

Можно написать квадратное ур-е
относительно ω и находит
дискриминанта зависимость

$$(\rho' + \rho) \omega^2 - 2 \omega \alpha [\rho u + \rho' u'] + \alpha^2 (u'^2 + u^2) - g \alpha (\rho - \rho') = 0$$

(6)

$$C_0 = \frac{\omega}{d} = \frac{pu + p'u'}{p+p'} + \left\{ \underbrace{\frac{g(p-p')}{d(p+p')}}_{C_0^2} - \frac{pp'}{(p+p')^2} (u-u')^2 \right\}^{1/2}$$

$$C_0 = \bar{c} \pm c$$

$$C^2 = C_0^2 - \frac{pp'}{(p+p')^2} (u-u')^2$$

C_0 — скорость волн в отсутствие магнитного поля

Значение ω будем считать

$$\text{если } (u-u')^2 > \frac{g(p-p')(p+p')}{pp'} = \\ = \frac{g(p^2-p'^2)}{pp'}$$

Соответственно при достаточно больших d и не при достаточно малых d волны в отсутствии магнитного поля

если $p=p'$ то наше уравнение будем

находить вибрации волнистые



10.4 Волны на границу между водой и воздухом без учёта силы тяжести (решение Эйлера)

Возвращаясь к исходной постановке задачи



$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \varphi = \nabla \psi$$

Но здесь учитывается сила тяжести.

$$\varphi = f(y) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \text{уравнение Эйлера}$$

но имеем ограничение:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{на свободной поверхности } p = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$1. \quad \text{на свободной поверхности: } \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow f \Big|_{y=0} = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0$$

$$f'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) f = 0 \quad \text{уравнение}$$

$$f'' - k^2 f = 0, \quad k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - c^2)$$

$$f = A \sin ky + B \cos ky$$

$$f \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

(8)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_{y=-h} = 0 \Rightarrow \sin j h = 0$$

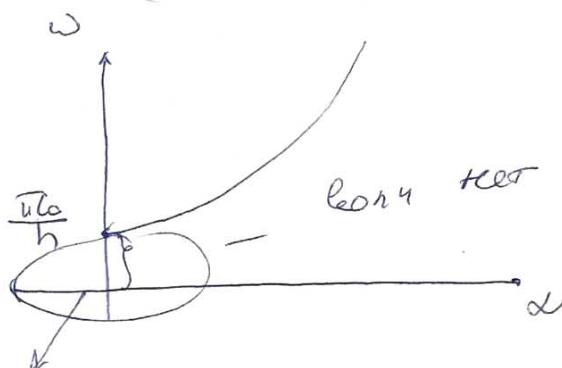
Если j - нечетное, то имеет место
срыв волн

$$j = \frac{1}{L} \sqrt{dC_0^2 - \omega^2}$$

$$j - \text{макс} \quad \cos j h = 0 \Rightarrow j h = \frac{\pi}{2} (2n+1)$$

$$j^* = \frac{1}{L} \sqrt{\omega^2 - dC_0^2}$$

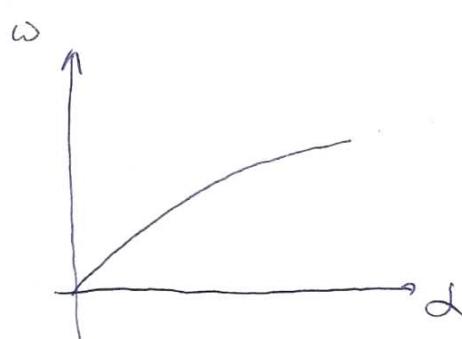
$$\omega^2 = \left(\frac{\pi(2n+1) C_0}{L} \right)^2 + dC_0^2$$



Побережное волнистое

$$\omega = \sqrt{gd}$$

Дисперсионные волны
уединяющие



(9)

11 Лекция 26.04.2022.

11.1 Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле

26.04.22 Лекция 11

Δ вида уравнений

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad - \text{силовое ур-е}$$

$$P|_r = \varphi(t) \quad - \text{здесь } \varphi \text{ - врем.}$$

$$\underline{U} = \nabla \varphi \quad - \text{кинемат. ур-е}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad - \text{кинемат. ур-е}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}|_r = \varphi(t) \quad - \text{здесь } \varphi \text{ - врем.}$$

Перейдём в сферическую систему координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad - \text{оператор Планка}$$

Оставим зависимость только от радиуса

$$\text{Тогда } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}$$

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \varphi_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \varphi_2 \left(t + \frac{r}{c} \right)$$

Амплитуда зависит пропорционально расстоянию, что означает расширением поверхности фронта.

(1)

$$\varphi = \frac{1}{Z} \varphi_1 (t - \frac{Z}{c})$$

$$P = -P \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{Z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{P}{Z} \varphi_1'$$

$$S = t - \frac{Z}{c}$$

$$V = \nabla \varphi = \frac{1}{Z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{1}{Z^2} \varphi_1' =$$

$$= -\frac{1}{Z} \frac{\varphi_1'}{c} - \frac{1}{Z^2} \varphi_1' =$$

$$= +\frac{1}{Z} \frac{P}{cP} + \frac{1}{ZP} \int P dt =$$

$$= \frac{P}{Zc} + \frac{1}{ZP} \int_1^P dt$$

значее none

другое none

$$\sigma = -P c V - \text{для других срн}
получе ранее.$$

Несколько спорных определений скорости
затухания в единицах none, которые
отвечают за передачу энергии.
Второй залог, убывающий с расстоянием
как $1/Z^2$ доминирует вблизи источника
и преодолевает малые на дистанциях

(2)

Несколько источников создают гармоническую волну

$$\varphi_F = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - d\varphi)}$$

$$\rho = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\omega \rho \varphi$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{(1 + idz)}{z}$$

$$\frac{\rho}{v} = \frac{zi\omega\rho}{1 + idz} = \frac{zcd\rho i}{1 + idz}$$

Самоизлучение в векторной форме

$$\tilde{z} = \frac{i}{1 + idz} = \frac{i(1 - idz)}{1 + d^2 z^2} = \frac{dz + i}{1 + d^2 z^2}$$

$$|\tilde{z}| = \sqrt{\frac{d^2 z^2 + 1}{d^2 z^2 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + d^2 z^2}}$$

$$\frac{\rho}{v} = \frac{2cd\rho e}{\sqrt{1 + d^2 z^2}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{1}{dz} = \arctg \frac{1}{2az}$$

$dz \gg 1$ в отдалении между

межу $\rho \approx$ со временем

меняется \sim (затухание волн)

иначе это называется волновой зоной

(3)

$z = pc -$ аэродинамическое сопротивление
среzi (аэродинамический импеданс)

$$z = pc \frac{d^2 z^2}{1 + d^2 z^2} + i pc \frac{d^2}{1 + d^2 z^2}$$

В отличие от плоского потока

импеданс имеет комплексный вид,
что указывает на наличие гидравлического
阻力 R и индуктивного
阻抗 X

Следовательно, сопротивление в
форме однородной массы, что
близко к исходному кроме дополнительного
сопротивления из-за притяжения
и индуктивного сопротивления среzi.

Инерционное сопротивление в форме
плоского сопротивления

$$x = \operatorname{Im} z = w m_s, \text{ где}$$

$$m_s = \frac{\rho z}{1 + (dI)^2}$$

масса на единицу
площади боковой
поверхности

Инерционное сопротивление
среzi (присоединенная масса)

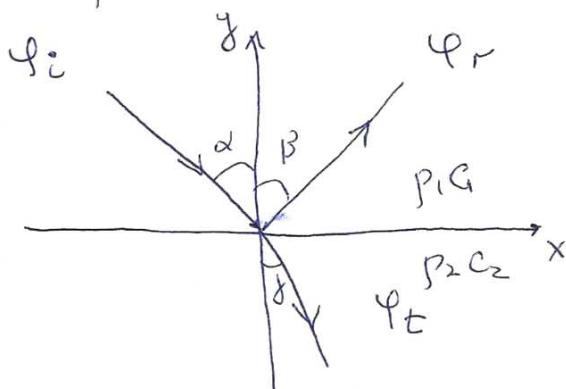
(4)

11.2 Наклонное падение волны

Наклонное падение волн

Если акустическая волна встречает на пути распространения преломляющее и зеркальные зеркала волна отражается и проходит во вторую среду

таким образом образуются три волны: падающие, отраженные и преломленные.



Прямая волна падает на плоскую поверхность $y=0$. При этом образуются отраженные Ψ_r и преломленные Ψ_t волны.

$$\Psi = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\Psi_i = A_i e^{i(\omega t - k_1(x \sin \alpha - y \cos \alpha))}$$

$$\Psi_r = A_r e^{i(\omega t - k_1(x \sin \beta + y \cos \beta))}$$

$$\Psi_t = A_t e^{i(\omega t - k_2(x \sin \gamma - y \cos \gamma))}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\Sigma} = k_x x + k_y y = \omega (x n_x + y n_y)$$

$$\vec{k} = \frac{\omega \vec{n}}{c}$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

(5)

На плоскости $y=0$ должны
бесположительные граничные условия

$$p_1 (\varphi_i + \varphi_r) \Big|_{y=0} = p_2 \varphi_t \Big|_{y=0} \quad \text{непрерывность давления}$$

$$\frac{\partial (\varphi_i + \varphi_r)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Непрерывность нормальной компоненты

Нормальное выражение momentumов

и производное гидравлическое сопротивление

нормальному движению

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 A_i e^{-id_1 x \sin \delta} + p_1 A_r e^{-id_1 x \sin \beta} = p_2 A_r e^{-id_2 x \sin \gamma} \\ d_1 \cos \delta A_i e^{-id_1 x \sin \delta} - d_1 \cos \beta A_r e^{-id_1 x \sin \beta} = d_2 \cos \gamma A_r e^{-id_2 x \sin \gamma} \end{array} \right.$$

Умножим эти равенства

и сложим вспомогательные признаки засечек
 x , координатных при x сопротив-
ления определены.

Равенства имеют место только при
одинаковых параметрах непротив-

$$d_1 \sin \delta = d_1 \sin \beta = d_2 \sin \gamma \Rightarrow$$

$$\boxed{d = \beta, \quad \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} = \frac{c_1}{c_2}}$$

(6)

Изменение боковой зоны в
отношении к приложению
С учётом данных коэффициентов
системе упругих пружин заменяется

$$\begin{cases} \rho_2(A_i + A_r) = \rho_2 A_t \\ k_{d_2}(A_i - A_r) \cos \alpha = d_2 A_t \cos \gamma \end{cases}$$

$$r_q = \frac{A_r}{A_i} = \frac{\rho_2 c_2 \cos \alpha - \rho_1 c_1 \cos \gamma}{\rho_2 c_2 \cos \alpha + \rho_1 c_1 \cos \gamma}$$

$$t_4 = \frac{A_t}{A_i} = \frac{2 \rho_2 c_2 \cos \alpha}{\rho_2 c_2 \cos \alpha + \rho_1 c_1 \cos \gamma}$$

В связи с нормальным напряжением:

$$r_h = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = -\frac{1-q}{1+q}, \quad q = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$$

$$t_n = \frac{2 \rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{2q}{1+q}$$

Эти соотношения дали получение
распределения

(7)

12 Лекция 17.05.2022.

12.1 Повторение материала о волнах в сферической СК

17. 05. 22. Лекция 12

Сферическая система координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\partial}{r\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

- оператор Лапласа

Если $\varphi = \varphi(r, t)$, то $\nabla^2 e$

Движение имеет вид

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}$$

$$\varphi(z, t) = \frac{1}{r} \varphi_1(t - \frac{z}{c}) + \frac{1}{r} \varphi_2(t + \frac{z}{c})$$

В сферической гармонической волне

$$\varphi = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - dk)}$$

$$P = -P \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i \omega P \varphi$$

$$V = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\left(\frac{1+idz}{2}\right) \varphi$$

$$\frac{P}{V} = \rho c \cos \varphi e^{i\varphi} = \rho c \frac{dk}{\sqrt{1+d^2r^2}} e^{i\varphi}$$

$$\varphi = \arctan \frac{1}{dr}$$

$dz \gg 1 \Rightarrow$ волновая зона

$P = \rho c V$ дальше соотношение

$\rho c V m \ll 1$ называют волне

①

12.2 Энергия звуковых волн

Энергия звуковых волн

При распространении звуковой волны в упругой среде каждые единицы объема среды обладают определенным количеством энергии. Покажем, что эта энергия равна сумме кинетической энергии колебательной вынужденной и потенциальной энергии, обусловленной упругим деформационным сопротивлением.

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = - \nabla \cdot \nabla P$$

Вспоминаем關係式

$$\nabla \cdot (\rho \nabla \Sigma) = \rho \nabla \cdot \nabla \Sigma + \nabla \cdot \nabla P$$

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial t} - \rho \nabla \cdot \nabla \Sigma = - \nabla \cdot (\rho \nabla \Sigma) \quad (*)$$

Упр-е Sance mass:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \rho_0 \nabla \cdot \nabla \Sigma$$

$$Упр-е вспомог: \rho = c^2 \rho_0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \nabla \Sigma = - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial P}{\partial t}$$

Тогда упр-е (*) применим к ней

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{\nabla^2 \Sigma}{2} + \frac{P^2}{2 \rho_0 c^2} \right) = - \nabla \cdot (\rho \nabla \Sigma)$$

(2)

Чтобы уменьшить время второго спуска, рассчитаем работу, затрачиваемую изолированной системой при разогреве объема V_0 на величину dV

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{dV}{V_0} \Rightarrow dV = -V_0 \frac{dp}{p_0} = -\frac{V_0 dp}{6^2 p_0}$$

$$dA = p dV = -\frac{V_0}{6^2 p_0} p dp$$

$$A = - \int_0^P \frac{V_0}{6^2 p_0} p dp = -\frac{V_0}{26^2 p_0} P^2$$

Следовательно, второе спускное время меньше начального времени разогрева

Также $W = p_0 \frac{\Sigma V^2}{2} + \frac{P^2}{2p_0 c_s^2}$ - количество звуковой энергии

Для этого времени $p = p_0 \cos \varphi$ и

$$W = p_0 \varphi^2 = \frac{P^2}{p_0 c_s^2}$$

$$\int_V W dV = E - \text{начальное значение в объеме } V$$

$P \varphi = Q$ - величина потока энергии через единичную поверхность (площадь нормаль к направлению теплового потока), максимальная величина теплового потока

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int_S Q_n dS$$

- величина потока Q через замкнутую поверхность

(3)

Неток зерни з бука волнах стендіст
е по мажаң наңа величина, кале
интенсивность

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T Q dt \quad \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right)$$

Дане гармоническіе величина

$$p = p_m \cos \omega t, \quad v = v_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$Q = p v = \frac{1}{2} p_m v_m \cos \varphi + \frac{1}{2} p_m v_m \cos(2\omega t - \varphi)$$

Номенклатура и интегралы шеелі

$$J = \frac{1}{2} p_m v_m \cos \varphi$$

Интенсивность звука в москі единицах: $(\varphi=0, \frac{p_m}{v_m} = \rho_0 c)$

$$J = \frac{1}{2} \frac{p_m}{\rho_0 c} = \frac{1}{2} \rho_0 c v_m^2$$

В спрощеній формі:

$$p_m = \frac{w \rho_0 A}{r} = \frac{\rho_0 c \omega A}{r}$$

$$v_m = \frac{dA}{r \cos \varphi}$$

$$J = \frac{1}{2} \rho_0 c \frac{d^2 A}{r^2}$$

Однако продолжение квадрата несправедливо

$$J = \frac{1}{2} \rho_0 c v_m^2 \cos^2 \varphi$$

Интенсивность может и уменьшаться

Волна сбивающим при $\cos \varphi \rightarrow 1$,

волна сбивающим при $\cos \varphi \rightarrow -1$,
т.е. в концентрат зоне.

④