Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Теоретическая механика»

РАСЧЁТНОЕ ЗАДАНИЕ

Исследование напряжённо-деформированного состояния составной толстостенной сферы, части которой выполнены из упругих материалов
по дисциплине «Теория упругости»

Выполнил А.А. Муравцев

Преподаватель Р.А. Филиппов

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Концептуальная постановка задачи

В рамках линейной теории упругости рассмотреть напряженно-деформированное состояние составной толстостенной сферы, внутренняя и внешняя части которой выполнены из упругих материалов.

Внутренняя поверхность ($R = a$) нагружается перемещением; на границе частей сферы ($R = b$) идеальный контакт слоёв; внешняя поверхность ($R = c$) свободна.

Построить графики зависимости перемещений и напряжений, возникающих при деформации, от координат.

Задачу решить аналитически и численно с помощью конечно-элементного пакета.

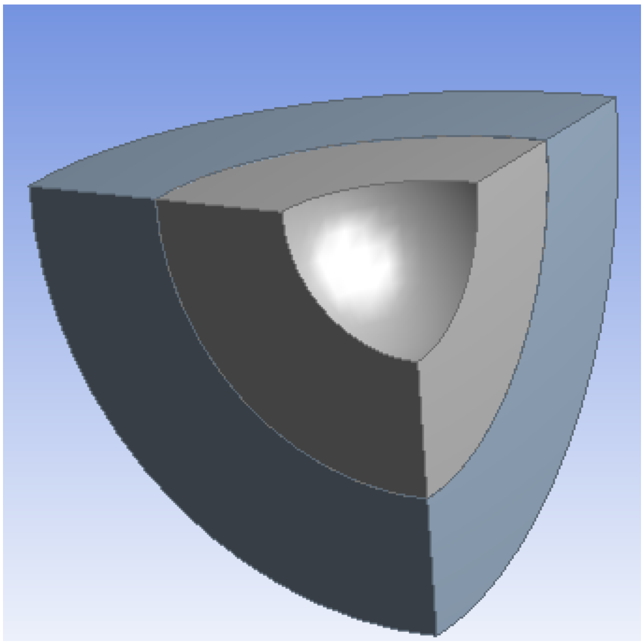

Рис. 1: Восьмая часть двухслойной полой сферы.

1.2 Математическая постановка задачи

Обозначим

$u_1 = u_r(r,\theta,\varphi)$, $u_2 = u_\theta(r,\theta,\varphi)$, $u_3 = u_\varphi(r,\theta,\varphi)$ – компоненты вектора перемещений;

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{rr}$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{\varphi\varphi}$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{r\theta}$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{\theta\varphi}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{r\varphi}$ – компоненты тензора малых деформаций;

$\sigma_{11} = \sigma_{rr}$, $\sigma_{22} = \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{33} = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{r\theta}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{\theta\varphi}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{r\varphi}$ – компоненты тензора напряжений.

Граничные условия:

1) $u_1^i|_{r=a} = u_0$ – нагружение внутренней поверхности внезапно возникшим перемещением;

2) $\sigma_{11}^i|_{r=b} = \sigma_{11}^e|_{r=b}$ – первое условие идеального контакта слоёв (равенство нормальных составляющих напряжений);

3) $u_1^i|_{r=b} = u_1^e|_{r=b}$ – второе условие идеального контакта слоёв (равенство радиальных перемещений);

4) $\sigma_{11}^e|_{r=c} = 0$ – внешняя поверхность свободна.

При заданных параметрах (модуль Юнга и коэффициент Пуассона) упругих материалов внутренней и внешней частей сферы найти зависимость компонент вектора перемещений и тензора напряжений от r, θ, φ и построить соответствующие графики.

Решить задачу аналитически, воспользовавшись соотношениями линейной теории упругости, и численно методом конечных элементов.

2 Решение поставленной задачи

2.1 Аналитическое решение

Удобно применять сферические координаты. В силу центральной симметрии напряженного и деформированного состояний толстостенной сферы все её точки могут перемещаться только в радиальном направлении. Следовательно, ожидаемые деформированное и напряженное состояния не будут зависеть от переменных θ и φ.

Общие выражения для компонентов тензора малых деформаций:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \frac{du(r)}{dr}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{u(r)}{r}, \qquad \varepsilon_{33} = \frac{u(r)}{r} \\ &\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0, \qquad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0, \qquad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Относительное изменение объёма (объёмное расширение) имеет вид:

$$\Theta = \frac{du(r)}{dr} + \frac{2u(r)}{r} \tag{2}$$

Выражения напряжений из закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{11} = \lambda\left(\frac{du(r)}{dr} + \frac{2u(r)}{r}\right) + 2\mu\frac{du(r)}{dr}, \\ \sigma_{22} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{22} = \lambda\left(\frac{du(r)}{dr} + \frac{2u(r)}{r}\right) + 2\mu\frac{u(r)}{r}, \\ \sigma_{33} &= \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{33} = \lambda\left(\frac{du(r)}{dr} + \frac{2u(r)}{r}\right) + 2\mu\frac{u(r)}{r}, \end{aligned} \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение равновесия без учёта массовых сил запишется в следующем виде:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma_{11}}{dr} + \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{r} = 0. \tag{4}$$

Подставляя выражения σ_{11}, σ_{22} и σ_{33} из (3) в уравнение равновесия (4), получаем:

$$\lambda\left(\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2\left(\frac{du(r)}{dr}\right)}{r} - \frac{2u(r)}{r^2}\right) + 2\mu\left(\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2\left(\frac{du(r)}{dr}\right)}{r} - \frac{2u(r)}{r^2}\right) = 0. \tag{5}$$

Решения полученного дифференциального уравнения равновесия в перемещениях

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2\left(\frac{du(r)}{dr}\right)}{r} - \frac{2u(r)}{r^2} = 0 \tag{6}$$

для внутренней и внешней частей составной сферы запишутся в виде:

$$u^i(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \qquad u^e(r) = C_3 r + \frac{C_4}{r^2}. \tag{7}$$

Подставим найденные решения (7) в выражение для σ_{11} из (3):

$$\sigma_{11}^i = 3\lambda^i C_1 + 2\mu^i \left(C_1 - \frac{2C_2}{r^3} \right), \qquad \sigma_{11}^e = 3\lambda^e C_3 + 2\mu^e \left(C_3 - \frac{2C_4}{r^3} \right). \tag{8}$$

Подставим полученные выражения (7) и (8) в граничные условия:

$$\begin{cases} u^i(a) = C_1 a + \dfrac{C_2}{a^2} = u_0, \\ \sigma_{11}^i(b) = \sigma_{11}^e(b) \Leftrightarrow 3\lambda^i C_1 + 2\mu^i \left(C_1 - \dfrac{2C_2}{b^3} \right) = 3\lambda^e C_3 + 2\mu^e \left(C_3 - \dfrac{2C_4}{b^3} \right), \\ u^i(b) = u^e(b) \Leftrightarrow C_1 r + \dfrac{C_2}{b^2} = C_3 r + \dfrac{C_4}{b^2}, \\ \sigma_{11}^e(c) = 3\lambda^e C_3 + 2\mu^e \left(C_3 - \dfrac{2C_4}{c^3} \right) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Решая полученную систему четырёх алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными в системе символьных вычислений Maple, находим постоянные интегрирования:

```
> sol := simplify(solve({eqna, eqnb1, eqnb2, eqnc}, {C1, C2, C3, C4})); assign(sol) :
```

$$sol := \Bigg\{ C1 = \frac{8 u_0 a^2 \left((b^3 - c^3)\mu_e^2 + \left(\left(2\mu_i + \frac{3\lambda_e}{2}\right) b^3 + c^3 \left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2}\right) \right)\mu_e + \frac{3 c^3 \lambda_e \mu_i}{2} \right)}{\left(-8b^6 + (8a^3 + 8c^3) b^3 - 8a^3c^3\right)\mu_e^2 + \left((8\mu_i - 12\lambda_e + 12\lambda_i) b^6 + \left((4\mu_i + 12\lambda_e + 6\lambda_i) c^3 + 16a^3 \left(\mu_i + \frac{3\lambda_e}{4}\right) \right) b^3 + 8\left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2}\right) c^3 a^3 \right)\mu_e + 12\lambda_e c^3 \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3\lambda_i}{4}\right) b^3 + a^3\mu_i \right)},$$

$$C2 = -\frac{8 b^3 \left((b^3 - c^3)\mu_e^2 + \left(\left(-\mu_i + \frac{3\lambda_e}{2} - \frac{3\lambda_i}{2}\right) b^3 - \frac{c^3 \left(\mu_i + 3\lambda_e + \frac{3\lambda_i}{2}\right)}{2} \right)\mu_e - \frac{3\left(\mu_i + \frac{3\lambda_i}{2}\right)\lambda_e c^3}{4} \right) u_0 a^2}{\left(-8b^6 + (8a^3 + 8c^3) b^3 - 8a^3c^3\right)\mu_e^2 + \left((8\mu_i - 12\lambda_e + 12\lambda_i) b^6 + \left((4\mu_i + 12\lambda_e + 6\lambda_i) c^3 + 16a^3 \left(\mu_i + \frac{3\lambda_e}{4}\right) \right) b^3 + 8\left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2}\right) c^3 a^3 \right)\mu_e + 12\lambda_e c^3 \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3\lambda_i}{4}\right) b^3 + a^3\mu_i \right)},$$

$$C3 = \frac{24 b^3 u_0 \left(\frac{\lambda_i}{2} + \mu_i\right) a^2 \mu_e}{\left(-8b^6 + (8a^3 + 8c^3) b^3 - 8a^3c^3\right)\mu_e^2 + \left((8\mu_i - 12\lambda_e + 12\lambda_i) b^6 + \left((4\mu_i + 12\lambda_e + 6\lambda_i) c^3 + 16a^3 \left(\mu_i + \frac{3\lambda_e}{4}\right) \right) b^3 + 8\left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2}\right) c^3 a^3 \right)\mu_e + 12\lambda_e c^3 \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3\lambda_i}{4}\right) b^3 + a^3\mu_i \right)},$$

$$C4 = \frac{3 u_0 a^2 b^3 c^3 (\lambda_i + 2\mu_i)(2\mu_e + 3\lambda_e)}{\left(-8b^6 + (8a^3 + 8c^3) b^3 - 8a^3c^3\right)\mu_e^2 + \left((8\mu_i - 12\lambda_e + 12\lambda_i) b^6 + \left((4\mu_i + 12\lambda_e + 6\lambda_i) c^3 + 16a^3 \left(\mu_i + \frac{3\lambda_e}{4}\right) \right) b^3 + 8\left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2}\right) c^3 a^3 \right)\mu_e + 12\lambda_e c^3 \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3\lambda_i}{4}\right) b^3 + a^3\mu_i \right)} \Bigg\}$$

Рис. 2: Постоянные интегрирования.

Подставляя найденные константы в (8), находим σ_{11}^i и σ_{11}^e:

```
> sigma[i, r] := simplify(sigma[i, r]);
```

$$\sigma_{i,r} := \left(4\left((b-c)(b^2+bc+c^2)\left(b^3\mu_i + \frac{\left(\mu_i + \frac{3\lambda_i}{2}\right) r^3}{2}\right)\mu_e^2 + \left(-\mu_i\left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2} + \frac{3\lambda_i}{2}\right) b^6 + \left(\left(-\frac{c^3}{2} + r^3\right)\mu_i^2 + \left(\left(-\frac{3\lambda_e}{2} - \frac{3\lambda_i}{4}\right) c^3 + \frac{3r^3(\lambda_e + 2\lambda_i)}{4}\right)\mu_i + \frac{9r^3\lambda_e\lambda_i}{8}\right) b^3 + \frac{\left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2}\right)\left(\mu_i + \frac{3\lambda_i}{2}\right) r^3 c^3}{2}\right)\mu_e - \frac{3(b-r)\mu_i\left(\mu_i + \frac{3\lambda_i}{2}\right)(b^2 + br + r^2) c^3 \lambda_e}{4}\right) a^2 u_0\right) \Bigg/ \left(r^3\left((-b^6 + (a^3+c^3) b^3 - a^3c^3)\mu_e^2 + \left(\left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2} + \frac{3\lambda_i}{2}\right) b^6 + \left(\left(2a^3 + \frac{c^3}{2}\right)\mu_i + \left(\frac{3\lambda_e}{2} + \frac{3\lambda_i}{4}\right) c^3 + \frac{3a^3\lambda_e}{2}\right) b^3 + \left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2}\right) c^3 a^3\right)\mu_e + \frac{3\lambda_e c^3\left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3\lambda_i}{4}\right) b^3 + a^3\mu_i\right)}{2}\right)\right)$$

```
> sigma[e, r] := simplify(sigma[e, r]);
```

$$\sigma_{e,r} := -\frac{3a^2b^3\mu_e u_0(\lambda_i + 2\mu_i)(3c^3\lambda_e + 2c^3\mu_e - 3r^3\lambda_e - 2\mu_e r^3)}{2r^3\left((-b^6 + (a^3+c^3)b^3 - a^3c^3)\mu_e^2 + \left(\left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2} + \frac{3\lambda_i}{2}\right) b^6 + \left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3\lambda_e}{2} + \frac{3\lambda_i}{4}\right) c^3 + 2a^3\left(\mu_i + \frac{3\lambda_e}{4}\right)\right) b^3 + \left(\mu_i - \frac{3\lambda_e}{2}\right) c^3 a^3\right)\mu_e + \frac{3\lambda_e c^3\left(\left(\frac{\mu_i}{2} + \frac{3\lambda_i}{4}\right) b^3 + a^3\mu_i\right)}{2}\right)}$$

Рис. 3: Компонента σ_{11} тензоров напряжений для внутренней и внешней частей сферы.

Аналогично находим оставшиеся диагональные компоненты тензоров напряжений и радиальные перемещения точек внутренней и внешней частей составной сферы:

```
> sigma[i, phi] := simplify(subs(sigma[i, phi]));
  sigma[e, phi] := simplify(subs(sigma[e, phi]));
  sigma[i, theta] := simplify(subs(sigma[i, theta]));
  sigma[e, theta] := simplify(subs(sigma[e, theta]));
```

$$\sigma_{i,\phi} := -\left(2\left((b-c)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(b^3\mu_i-\left(\mu_i+\frac{3\lambda_i}{2}\right)r^3\right)\mu_e^2+\left(-\mu_i\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}+\frac{3\lambda_i}{2}\right)b^6+\left(\left(-\frac{c^3}{2}-2r^3\right)\mu_i^2+\left(\left(-\frac{3\lambda_e}{2}-\frac{3\lambda_i}{4}\right)c^3-\frac{3r^3\left(\lambda_e+2\lambda_i\right)}{2}\right)\mu_i-\frac{9r^3\lambda_e\lambda_i}{4}\right)b^3-\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}\right)\left(\mu_i+\frac{3\lambda_i}{2}\right)r^3c^3\right)\mu_e-\frac{3\left(\mu_i+\frac{3\lambda_i}{2}\right)\mu_i c^3\left(b^3+2r^3\right)\lambda_e}{4}\right)a^2u_0\right)\Bigg/\left(r^3\left(\left(-b^6+\left(a^3+c^3\right)b^3-a^3c^3\right)\mu_e^2+\left(\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}+\frac{3\lambda_i}{2}\right)b^6+\left(\left(2a^3+\frac{c^3}{2}\right)\mu_i+\left(\frac{3\lambda_e}{2}+\frac{3\lambda_i}{4}\right)c^3+\frac{3a^3\lambda_e}{2}\right)b^3+\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}\right)c^3a^3\right)\mu_e+\frac{3\lambda_e c^3\left(\left(\frac{\mu_i}{2}+\frac{3\lambda_i}{4}\right)b^3+a^3\mu_i\right)}{2}\right)\right)$$

$$\sigma_{e,\phi} := \frac{3b^3u_0\left(\lambda_i+2\mu_i\right)a^2\mu_e\left(c^3+2r^3\right)\left(2\mu_e+3\lambda_e\right)}{4r^3\left(\left(-b^6+\left(a^3+c^3\right)b^3-a^3c^3\right)\mu_e^2+\left(\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}+\frac{3\lambda_i}{2}\right)b^6+\left(\left(\frac{\mu_i}{2}+\frac{3\lambda_e}{2}+\frac{3\lambda_i}{4}\right)c^3+2a^3\left(\mu_i+\frac{3\lambda_e}{4}\right)\right)b^3+\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}\right)c^3a^3\right)\mu_e+\frac{3\lambda_e c^3\left(\left(\frac{\mu_i}{2}+\frac{3\lambda_i}{4}\right)b^3+a^3\mu_i\right)}{2}\right)}$$

$$\sigma_{i,\theta} := -\left(2\left((b-c)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(b^3\mu_i-\left(\mu_i+\frac{3\lambda_i}{2}\right)r^3\right)\mu_e^2+\left(-\mu_i\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}+\frac{3\lambda_i}{2}\right)b^6+\left(\left(-\frac{c^3}{2}-2r^3\right)\mu_i^2+\left(\left(-\frac{3\lambda_e}{2}-\frac{3\lambda_i}{4}\right)c^3-\frac{3r^3\left(\lambda_e+2\lambda_i\right)}{2}\right)\mu_i-\frac{9r^3\lambda_e\lambda_i}{4}\right)b^3-\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}\right)\left(\mu_i+\frac{3\lambda_i}{2}\right)r^3c^3\right)\mu_e-\frac{3\left(\mu_i+\frac{3\lambda_i}{2}\right)\mu_i c^3\left(b^3+2r^3\right)\lambda_e}{4}\right)a^2u_0\right)\Bigg/\left(r^3\left(\left(-b^6+\left(a^3+c^3\right)b^3-a^3c^3\right)\mu_e^2+\left(\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}+\frac{3\lambda_i}{2}\right)b^6+\left(\left(2a^3+\frac{c^3}{2}\right)\mu_i+\left(\frac{3\lambda_e}{2}+\frac{3\lambda_i}{4}\right)c^3+\frac{3a^3\lambda_e}{2}\right)b^3+\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}\right)c^3a^3\right)\mu_e+\frac{3\lambda_e c^3\left(\left(\frac{\mu_i}{2}+\frac{3\lambda_i}{4}\right)b^3+a^3\mu_i\right)}{2}\right)\right)$$

$$\sigma_{e,\theta} := \frac{3b^3u_0\left(\lambda_i+2\mu_i\right)a^2\mu_e\left(c^3+2r^3\right)\left(2\mu_e+3\lambda_e\right)}{4r^3\left(\left(-b^6+\left(a^3+c^3\right)b^3-a^3c^3\right)\mu_e^2+\left(\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}+\frac{3\lambda_i}{2}\right)b^6+\left(\left(\frac{\mu_i}{2}+\frac{3\lambda_e}{2}+\frac{3\lambda_i}{4}\right)c^3+2a^3\left(\mu_i+\frac{3\lambda_e}{4}\right)\right)b^3+\left(\mu_i-\frac{3\lambda_e}{2}\right)c^3a^3\right)\mu_e+\frac{3\lambda_e c^3\left(\left(\frac{\mu_i}{2}+\frac{3\lambda_i}{4}\right)b^3+a^3\mu_i\right)}{2}\right)}$$

Рис. 4: Компоненты σ_{22} и σ_{33} тензоров напряжений для внутренней и внешней частей сферы.

```
> u[i] := unapply(u[i](r), r);
```

$$u_i := r \mapsto \left(8\cdot u_0\cdot a^2\cdot\left(\left(b^3-c^3\right)\cdot\mu_e^2+\left(\left(2\cdot\mu_i+\frac{3\cdot\lambda_e}{2}\right)\cdot b^3+c^3\cdot\left(\mu_i-\frac{3\cdot\lambda_e}{2}\right)\right)\cdot\mu_e+\frac{3\cdot c^3\cdot\lambda_e\cdot\mu_i}{2}\right)\cdot r\right)\Bigg/\left(\left(-8\cdot b^6+\left(8\cdot a^3+8\cdot c^3\right)\cdot b^3-8\cdot a^3\cdot c^3\right)\cdot\mu_e^2+\left(\left(8\cdot\mu_i-12\cdot\lambda_e+12\cdot\lambda_i\right)\cdot b^6+\left(\left(4\cdot\mu_i+12\cdot\lambda_e+6\cdot\lambda_i\right)\cdot c^3+16\cdot a^3\cdot\left(\mu_i+\frac{3\cdot\lambda_e}{4}\right)\right)\cdot b^3+8\cdot\left(\mu_i-\frac{3\cdot\lambda_e}{2}\right)\cdot c^3\cdot a^3\right)\cdot\mu_e+12\cdot\lambda_e\cdot c^3\cdot\left(\left(\frac{\mu_i}{2}+\frac{3\cdot\lambda_i}{4}\right)\cdot b^3+a^3\cdot\mu_i\right)\right)-\left(8\cdot b^3\cdot\left(\left(b^3-c^3\right)\cdot\mu_e^2+\left(\left(-\mu_i+\frac{3\cdot\lambda_e}{2}-\frac{3\cdot\lambda_i}{2}\right)\cdot b^3-\frac{c^3\cdot\left(\mu_i+3\cdot\lambda_e+\frac{3\cdot\lambda_i}{2}\right)}{2}\right)\cdot\mu_e-\frac{3\cdot\left(\mu_i+\frac{3\cdot\lambda_i}{2}\right)\cdot\lambda_e\cdot c^3}{4}\right)\cdot u_0\cdot a^2\right)\Bigg/\left(\left(\left(-8\cdot b^6+\left(8\cdot a^3+8\cdot c^3\right)\cdot b^3-8\cdot a^3\cdot c^3\right)\cdot\mu_e^2+\left(\left(8\cdot\mu_i-12\cdot\lambda_e+12\cdot\lambda_i\right)\cdot b^6+\left(\left(4\cdot\mu_i+12\cdot\lambda_e+6\cdot\lambda_i\right)\cdot c^3+16\cdot a^3\cdot\left(\mu_i+\frac{3\cdot\lambda_e}{4}\right)\right)\cdot b^3+8\cdot\left(\mu_i-\frac{3\cdot\lambda_e}{2}\right)\cdot c^3\cdot a^3\right)\cdot\mu_e+12\cdot\lambda_e\cdot c^3\cdot\left(\left(\frac{\mu_i}{2}+\frac{3\cdot\lambda_i}{4}\right)\cdot b^3+a^3\cdot\mu_i\right)\right)\cdot r^2\right)$$

```
> u[e] := unapply(u[e](r), r);
```

$$u_e := r \mapsto \left(24\cdot b^3\cdot u_0\cdot\left(\frac{\lambda_i}{2}+\mu_i\right)\cdot a^2\cdot\mu_e\cdot r\right)\Bigg/\left(\left(-8\cdot b^6+\left(8\cdot a^3+8\cdot c^3\right)\cdot b^3-8\cdot a^3\cdot c^3\right)\cdot\mu_e^2+\left(\left(8\cdot\mu_i-12\cdot\lambda_e+12\cdot\lambda_i\right)\cdot b^6+\left(\left(4\cdot\mu_i+12\cdot\lambda_e+6\cdot\lambda_i\right)\cdot c^3+16\cdot a^3\cdot\left(\mu_i+\frac{3\cdot\lambda_e}{4}\right)\right)\cdot b^3+8\cdot\left(\mu_i-\frac{3\cdot\lambda_e}{2}\right)\cdot c^3\cdot a^3\right)\cdot\mu_e+12\cdot\lambda_e\cdot c^3\cdot\left(\left(\frac{\mu_i}{2}+\frac{3\cdot\lambda_i}{4}\right)\cdot b^3+a^3\cdot\mu_i\right)\right)+\left(3\cdot u_0\cdot a^2\cdot b^3\cdot c^3\cdot\left(\lambda_i+2\cdot\mu_i\right)\cdot\left(2\cdot\mu_e+3\cdot\lambda_e\right)\right)\Bigg/\left(\left(\left(-8\cdot b^6+\left(8\cdot a^3+8\cdot c^3\right)\cdot b^3-8\cdot a^3\cdot c^3\right)\cdot\mu_e^2+\left(\left(8\cdot\mu_i-12\cdot\lambda_e+12\cdot\lambda_i\right)\cdot b^6+\left(\left(4\cdot\mu_i+12\cdot\lambda_e+6\cdot\lambda_i\right)\cdot c^3+16\cdot a^3\cdot\left(\mu_i+\frac{3\cdot\lambda_e}{4}\right)\right)\cdot b^3+8\cdot\left(\mu_i-\frac{3\cdot\lambda_e}{2}\right)\cdot c^3\cdot a^3\right)\cdot\mu_e+12\cdot\lambda_e\cdot c^3\cdot\left(\left(\frac{\mu_i}{2}+\frac{3\cdot\lambda_i}{4}\right)\cdot b^3+a^3\cdot\mu_i\right)\right)\cdot r^2\right)$$

Рис. 5: Радиальные перемещения точек внутренней и внешней частей сферы.

Зададим конкретные значения параметров задачи (Рис. 6). В аналитическом решении все численные значения задаём в СИ. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона внутренней части сферы, выполненной из стали, равны соответственно $E^i = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па и $\nu^i = 0.3$, а модуль Юнга и коэффициент Пуассона внешней части сферы, выполненной из меди, $E^e = 1.3 \cdot 10^{11}$ Па и $\nu^e = 0.34$.

> $E[i] := 2.1e11 : \mathrm{nu}[i] := 0.3 : a := 0.1 : b := 0.2 : c := 0.3 : \mathrm{mu}[i] := \dfrac{E[i]}{2\cdot(1+\mathrm{nu}[i])} : \mathrm{lambda}[i] := \dfrac{2\cdot\mathrm{mu}[i]\cdot\mathrm{nu}[i]}{1-2\cdot\mathrm{nu}[i]} :$

> $E[e] := 1.3e11 : \mathrm{nu}[e] := 0.34 : \mathrm{mu}[e] := \dfrac{E[e]}{2\cdot(1+\mathrm{nu}[e])} : \mathrm{lambda}[e] := \dfrac{2\cdot\mathrm{mu}[e]\cdot\mathrm{nu}[e]}{1-2\cdot\mathrm{nu}[e]} : u[0] := 0.001 :$

Напряжения и радиальное перемещение представляются в виде:

> *evalf*(sigma[i, r], 3); *evalf*(sigma[i, phi], 3); *evalf*(sigma[i, theta], 3); *evalf*(u[i](r), 3);

$$\frac{4.76\ 10^{-24}\left(-2.98\ 10^{29}-2.40\ 10^{30}\ r^3-4.44\ 10^{31}\ (0.2-1.\ r)\ (r^2+0.2\ r+0.04)\right)}{r^3}$$

$$-\frac{2.38\ 10^{-24}\left(-6.54\ 10^{29}-8.38\ 10^{31}\ r^3\right)}{r^3}$$

$$-\frac{2.38\ 10^{-24}\left(-6.54\ 10^{29}-8.38\ 10^{31}\ r^3\right)}{r^3}$$

$$0.000382\ r+\frac{9.68\ 10^{-6}}{r^2}$$

> *evalf*(sigma[e, r], 3); *evalf*(sigma[e, phi], 3); *evalf*(sigma[e, theta], 3); *evalf*(u[e](r), 3);

$$-\frac{0.000196\left(-4.06\ 10^{11}\ r^3+1.10\ 10^{10}\right)}{r^3}$$

$$\frac{4.00\ 10^{7}\left(2.\ r^3+0.027\right)}{r^3}$$

$$\frac{4.00\ 10^{7}\left(2.\ r^3+0.027\right)}{r^3}$$

$$0.000196\ r+\frac{0.0000111}{r^2}$$

Рис. 6: Числовые значения параметров задачи.

Построим графики зависимости радиальных, тангенциальных напряжений и радиальных перемещений от r (Рис. 7, Рис. 8 и Рис. 9):

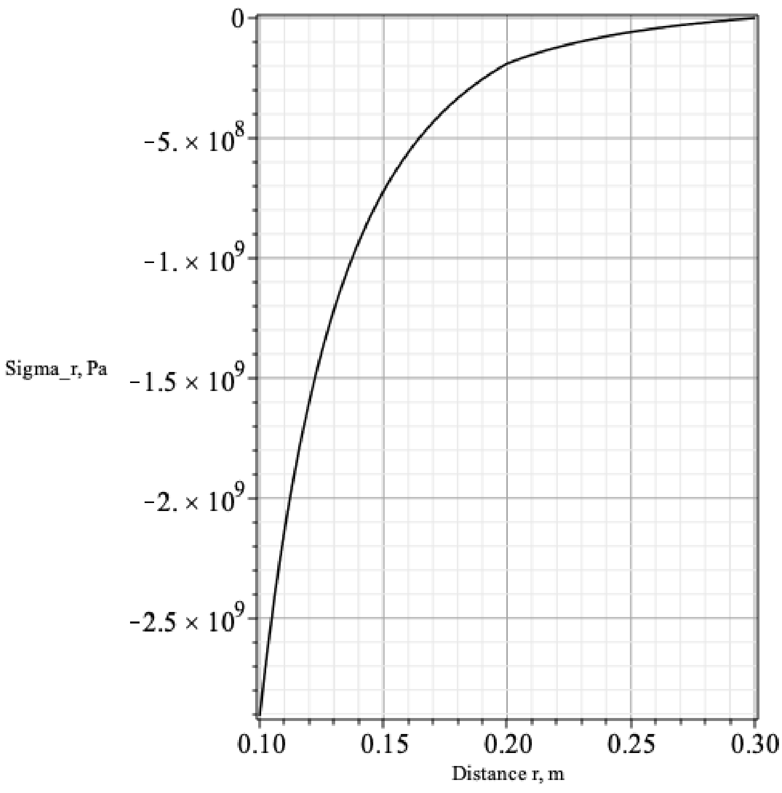

Рис. 7: График зависимости σ_{11} от r.

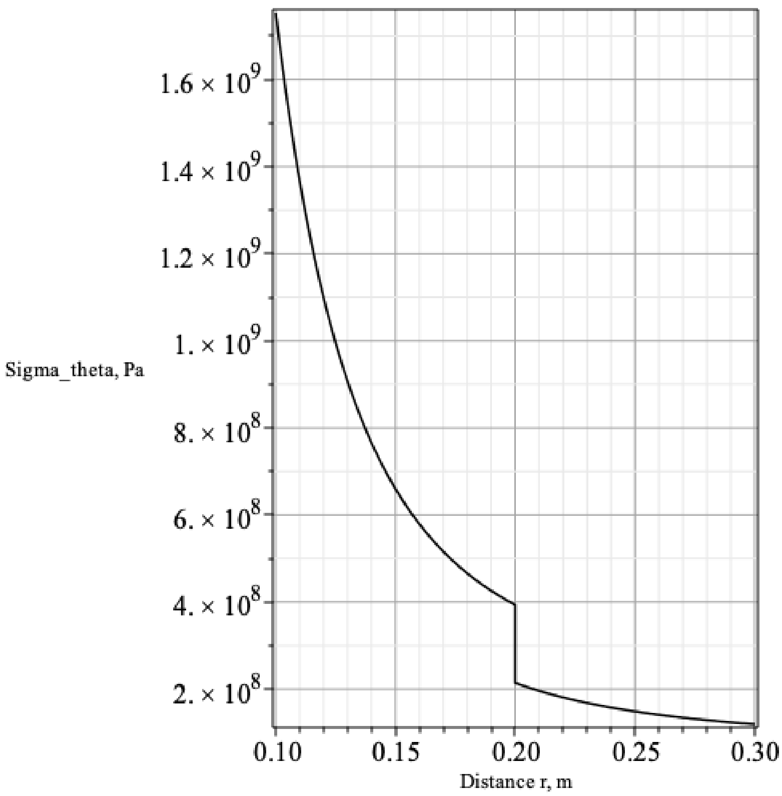

Рис. 8: График зависимости σ_{22} от r.

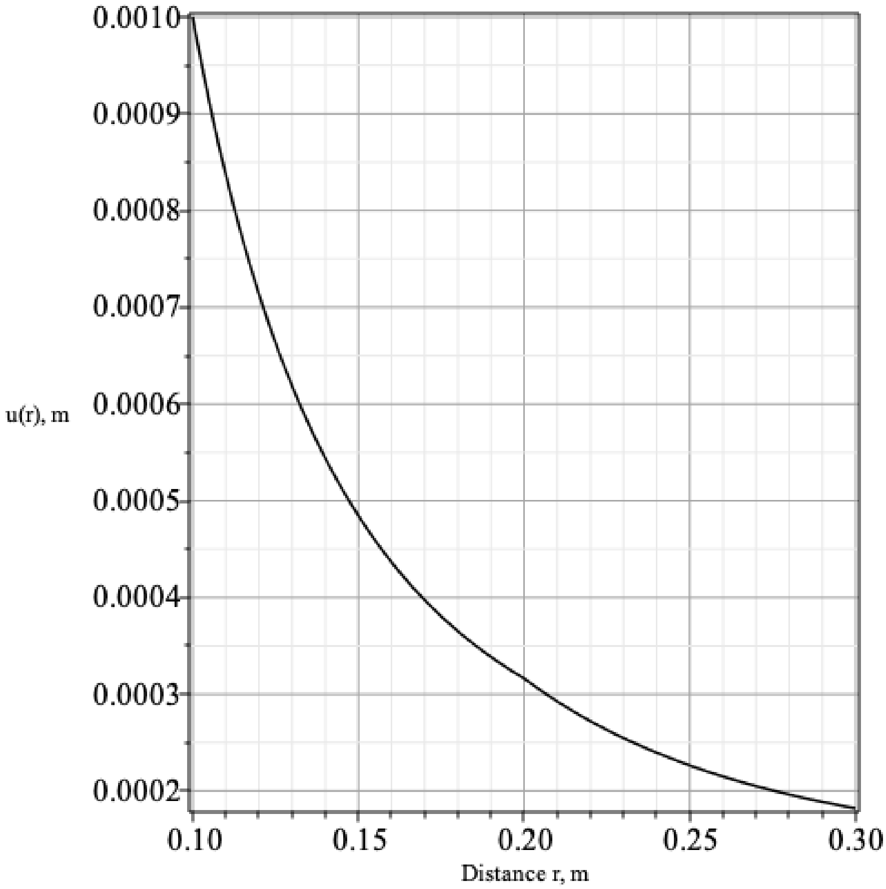

Рис. 9: График зависимости радиальных перемещений от r.

Видим, что графики зависимостей радиальных напряжений $\sigma_{11}(r)$ и радиальных премещений $u(r)$ состыкуются на границе слоёв (условия идеального контакта слоёв выполнены), однако испытывают разрыв первой производной. Графики зависимостей тангенциальных напряжений $\sigma_{22}(r)$ и $\sigma_{33}(r)$ испытывают разрыв на границе слоёв, так как параметры (коэффициенты Ламе) внутреннего и внешнего материалов разные.

2.2 Решение в конечно-элементном пакете ANSYS

В КЭМ-пакете рассматривается одна восьмая составной полой сферы (Рис. 1). Расчёты производятся для одной восьмой части сферы, чтобы существенно сократить количество конечных элементов и время расчёта. Сетка представлена на Рис. 10.

Внутренний слой (модуль Юнга $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$) и внешний слой (модуль Юнга $E = 1.3 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$) составной сферы выполнены из упругих материалов.

Внутренняя поверхность нагружается перемещением 1 мм в радиальном направлении, т.е. по нормали к поверхности (Рис. 11).

Для того, чтобы перемещения были только по радиусу, для каждой из трёх граней одной восьмой части сферы задаётся нулевое перемещение вдоль оси, перпендикулярной к этой грани. В частности, для грани, лежащей в плоскости xOz, задали нулевое перемещение по оси Oy (Рис. 12).

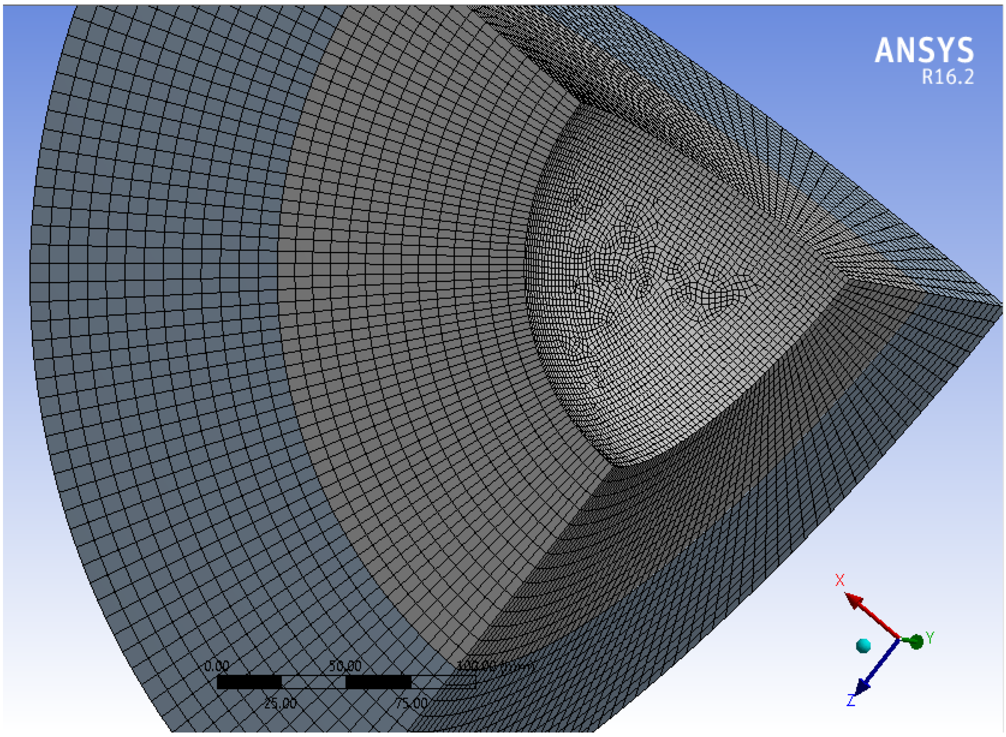

Рис. 10: Сетка.

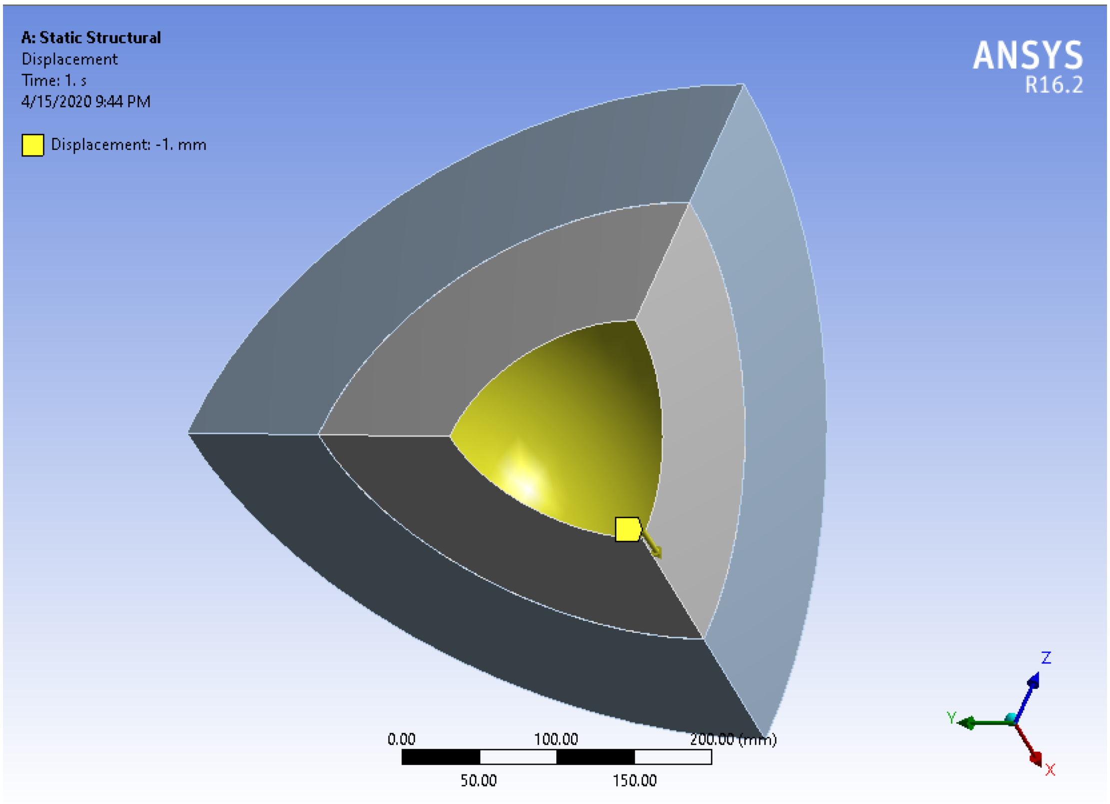

Рис. 11: Граничное условие на внутреннюю поверхность.

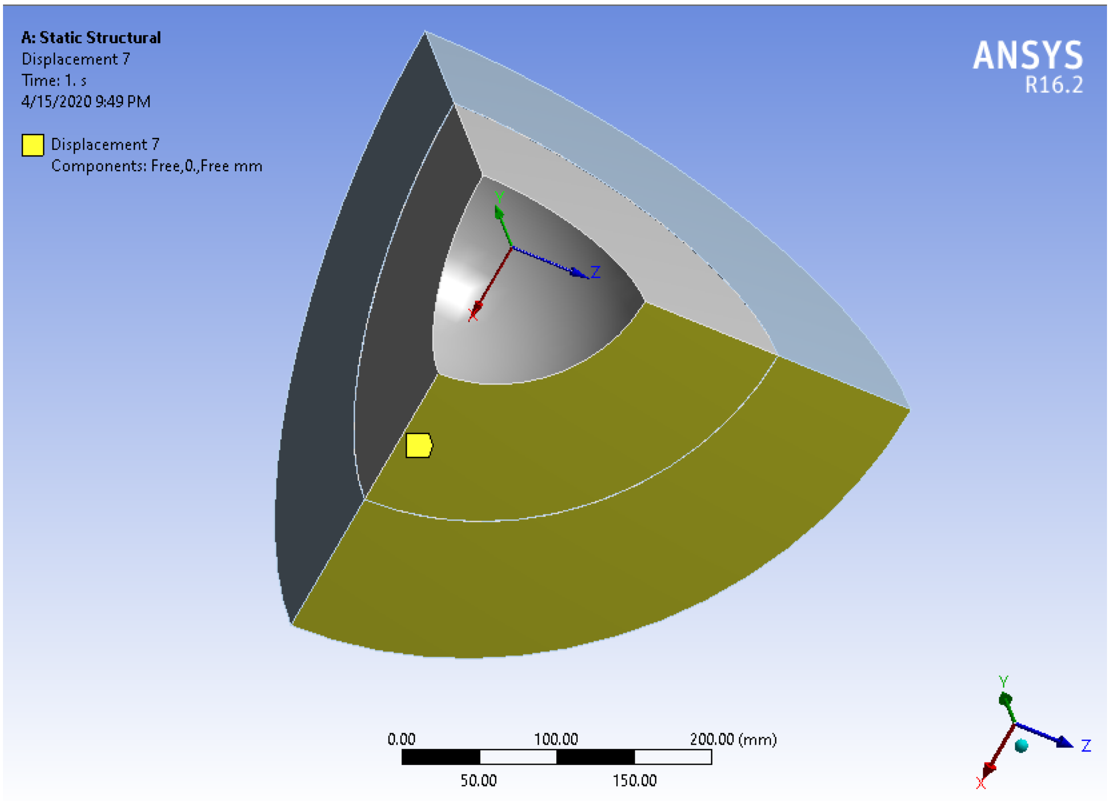

Рис. 12: Граничное условие на грань (две другие грани - аналогично).

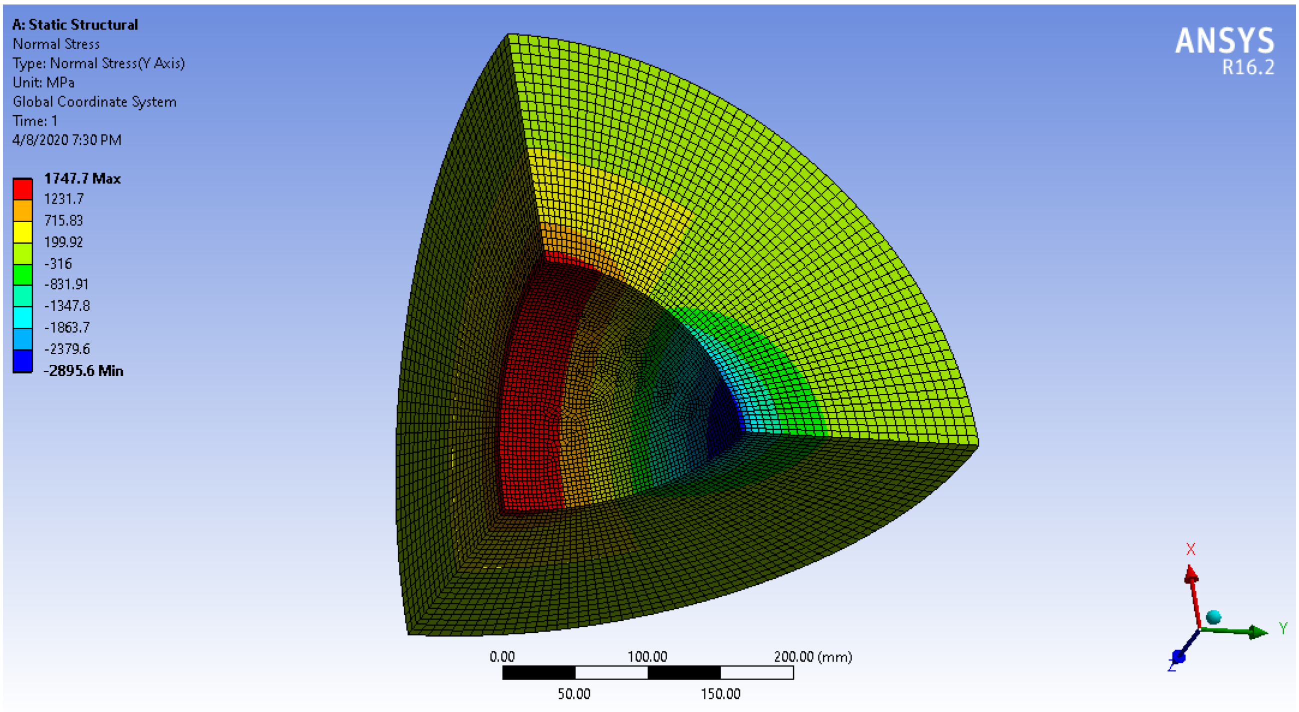

Рис. 13: Распределение напряжений, направленных вдоль оси Оу.

На Рис. 13 построено распределение напряжений, направленных вдоль оси Оу. Следовательно, значения вдоль радиуса по ребру, лежащему на оси Оу, представляют собой радиальные напряжения σ_{11}, а значения вдоль радиуса по ребру, лежащему на оси Ох, есть тангенциальные напряжения σ_{22} и σ_{33}. Соответственно, на Рис. 13 синим цветом обозначено максимальное (по модулю) радиальное напряжение, а красным цветом – максимальные (по модулю) тангенциальные напряжения. Значения этих напряжений из colorbar $\max(|\sigma_{11}(r)|) \approx 2.9 \cdot 10^9$ Па и $\max(|\sigma_{22}(r)|) = \max(|\sigma_{33}(r)|) \approx 1.75 \cdot 10^9$ Па совпадают (с относительной погрешностью, не превышающей 6%) со значениями, полученными аналитически (Рис. 7 и Рис. 8).

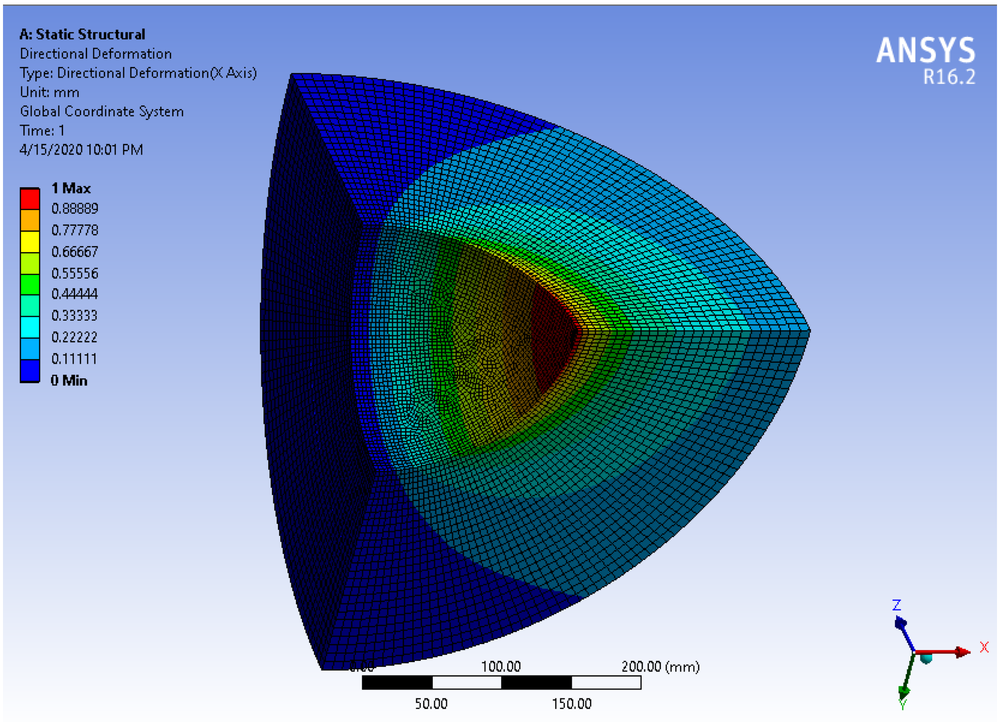

Рис. 14: Распределение деформаций, направленных вдоль оси Ох.

На Рис. 14 построено распределение перемещений, направленных вдоль оси Ох. Следовательно, значения вдоль радиуса по ребру, лежащему на оси Ох, представляют собой радиальные перемещения $u(r)$. Видим, что максимальное радиальное перемещение равно 1 мм (граничное условие выполнено). Также на Рис. 14 отображено отсутствие тангенциальных перемещений.

В MS Excel построим графики зависимостей $\sigma_{11}(r)$, $\sigma_{22}(r)$ и $u(r)$. Значения функций получены в ANSYS.

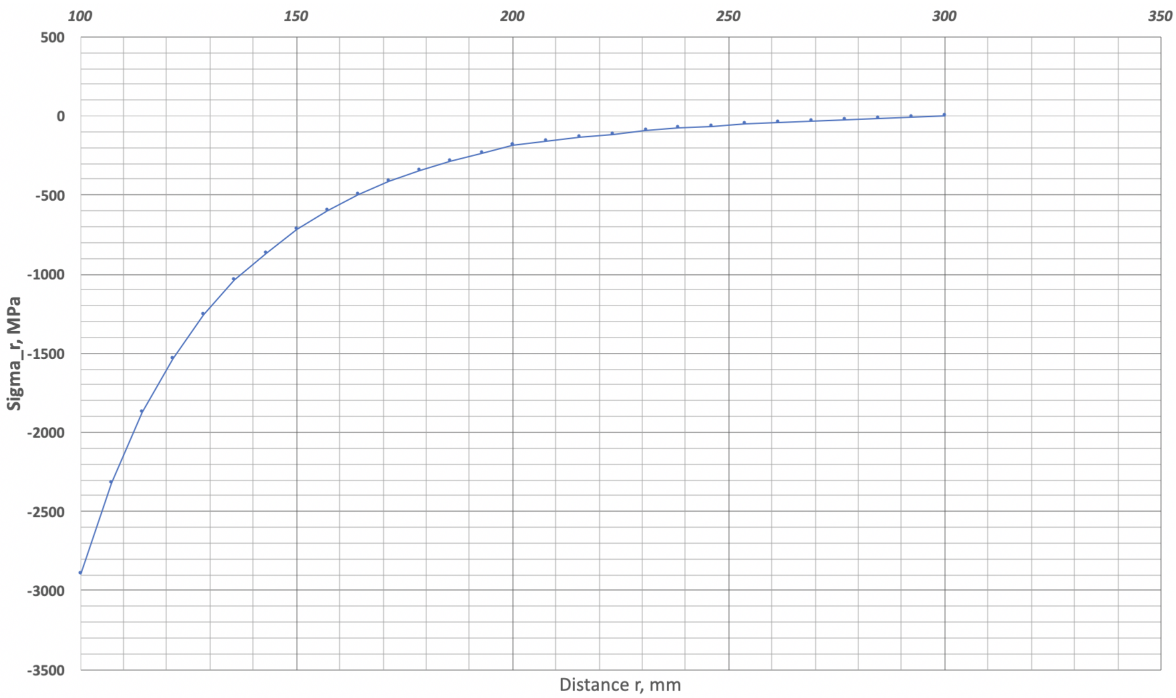

Рис. 15: Зависимость радиальных напряжений от радиуса.

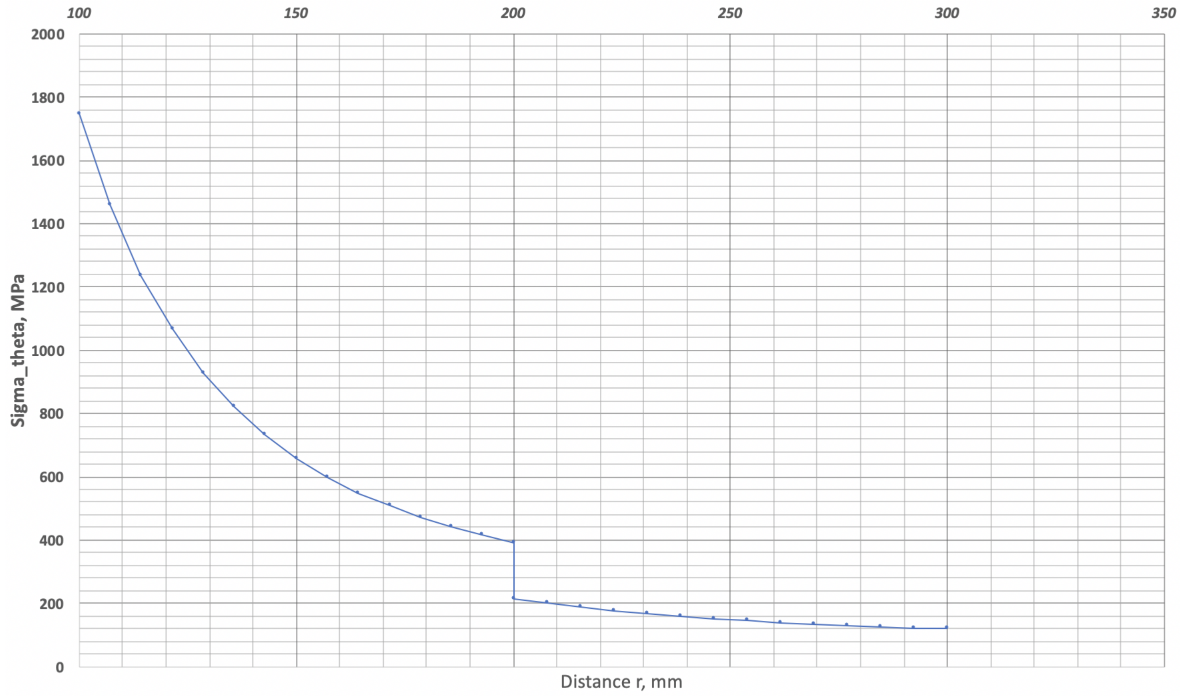

Рис. 16: Зависимость тангенциальных напряжений от радиуса.

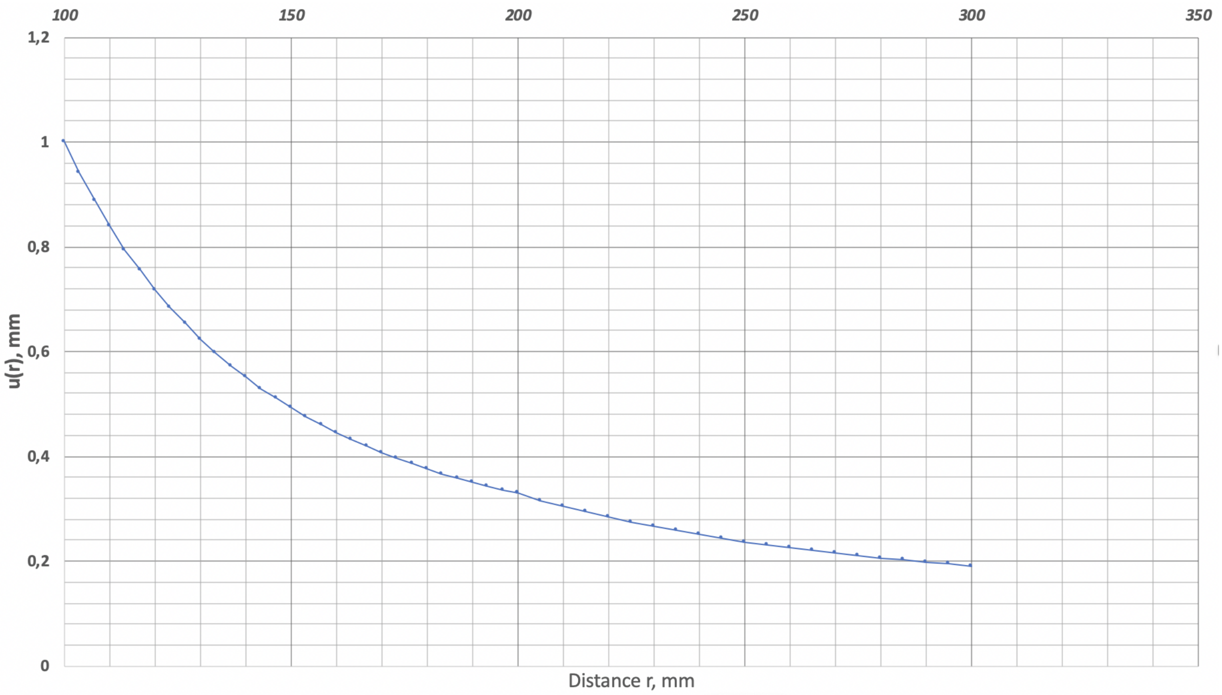

Рис. 17: Зависимость радиальных перемещений от радиуса.

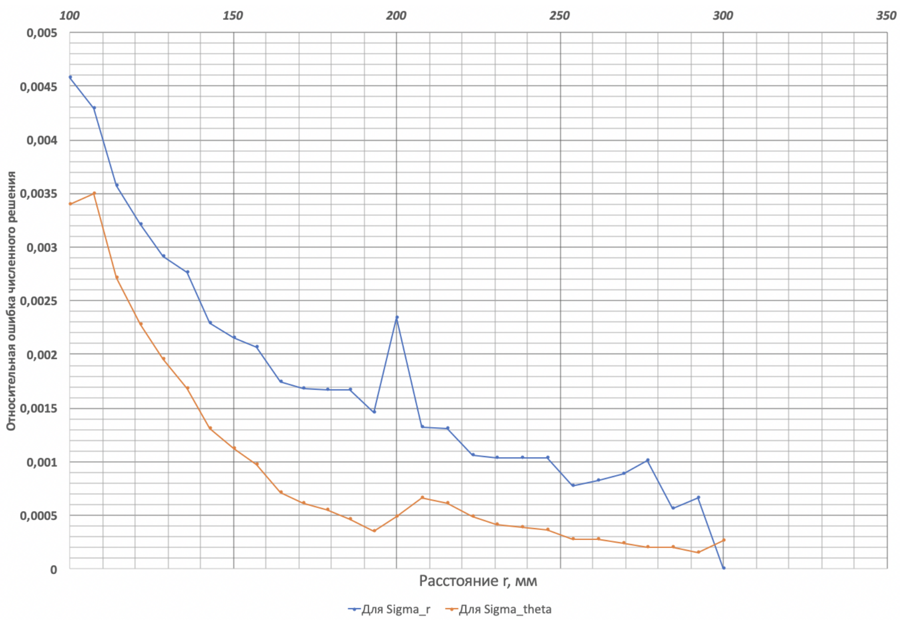

Рис. 18: Зависимость относительной ошибки численного решения для σ_{11} и σ_{22} от r.

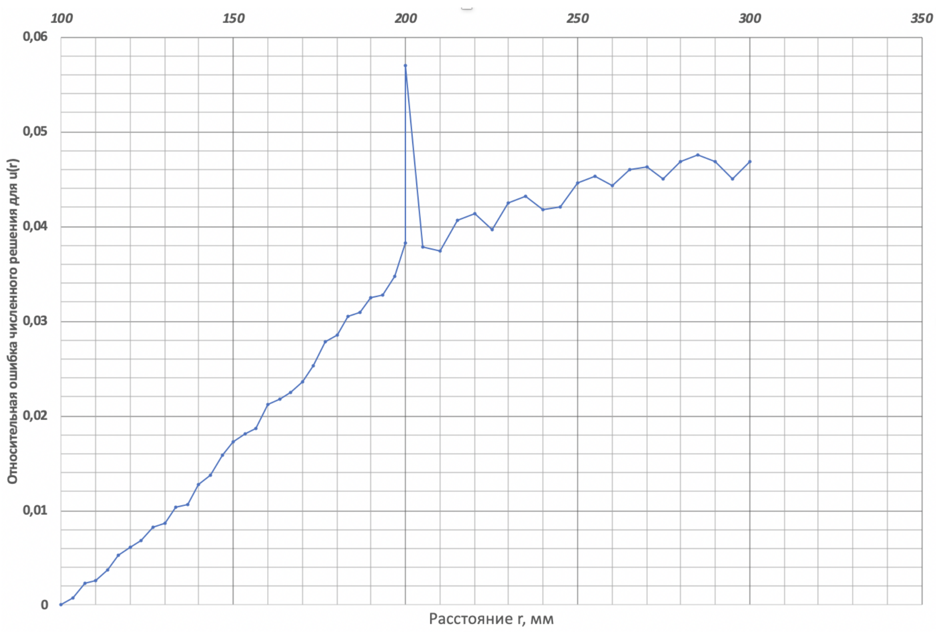

Рис. 19: Зависимость относительной ошибки численного решения u_1 от r.

3 Выводы

В рамках линейной теории упругости получено аналитическое решение для задачи о напряжённо-деформированном состоянии составной толстостенной сферы, внутренняя и внешняя части которой выполнены из двух разных упругих материалов. Построены графики напряжений и перемещений при заданных параметрах материалов внешней и внутренней частей сферы.

Средствами конечно-элементного пакета ANSYS построены распределения напряжений и перемещений по сфере. Аналитические результаты были подтверждены расчётами в КЭМ-пакете ANSYS. Относительная ошибка численных решений не превышает 6%.

Полученное в рамках линейной теории упругости максимальное растягивающее напряжение стального слоя возникает на внутренней поверхности сферы и примерно равно 1750 МПа, что больше предела текучести (240 МПа) и предела прочности (820 МПа) стали. Максимальное растягивающее напряжение медного слоя возникает на границе двух слоёв и примерно совпадает с пределом прочности меди (210 МПа). Следовательно, при заданных граничных условиях сфера разрушится.

Максимальная разница в аналитическом и КЭМ решениях для напряжений достигается при $r = 0$, так как в этой области производная аналитического решения максимальна, а дискретизация величины в области, где она меняется быстро, ведёт к большей ошибке, чем дискретизация в области, где величина меняется медленно. Максимальная разница в аналитическом и КЭМ решениях для перемещений достигается на границе слоёв, так как дискретизация области с резко меняющимися параметрами (модулем Юнга, коэффициентом Пуассона) ведёт к большей ошибке, и на внешней границе, так как она наиболее удалена от внутренней границы, на которую наложено условие на перемещение.