

# Введение в механику пористых сред

2 марта 2022 г.

Лекция 05.02.2022.

## 1 Вывод закона сохранения энергии

Закон сохранения массы

$$\frac{\partial r_a}{\partial t} + \partial_i (v_i^a r_a) = j_{ab}$$

$j_{ab}$  - обменное слагаемое между фазами  $a$  и  $b$

Закон сохранения импульса

$$r_a \frac{\partial v_i^a}{\partial t} + r_a v_j^a \partial_j v_i^a = \partial_j T_{ij}^a + b_i^{int,a} + f_i^a$$

В законе сохранения энергии впервые появляются тепло и температура.

Приток тепла в некоторый объём:

$$\delta Q = \left[ \iiint_V (r_a Q^a + Q^{int,a}) dV - \oint_{\partial V} h_a dS \right] dt$$

$Q^a$  - массовые источники тепла (например, в ядерных реакциях),  $Q^{int,a}$  - обмен теплом между фазами,  $h_a = n_i q_i^a$  - поток тепла через границу

Первое начало термодинамики (выполняется):

$$\delta Q = \delta A_{\text{внутр}} + dU \Leftrightarrow dU = \delta Q + \delta A_{\text{внеш}}$$

Внутренняя энергия  $U = \iiint_V r_a e_a dV$ , где  $e_a = u_a + \frac{1}{2} v_i^a v_i^a$  - удельная плотность энергии (см. теорему Кёнига)

Полная производная внутренней энергии по времени:

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left( r_a \left( u_a + \frac{1}{2} v_i^a v_i^a \right) \right) dV + \oint_{\partial V} r_a \left( u_a + \frac{1}{2} v_i^a v_i^a \right) v_j n_j dS$$

Небольшое напоминание о работе и мощности сил:  $\delta A = \vec{F} \cdot \vec{dS} = (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt$

Работа внешних сил (объёмных+поверхностных; так как работа именно внешних сил, то внутренние взаимодействия  $b^{int}$  не учитываем):

$$\delta A_{\text{внеш}} = \left[ \iiint_V f_i^a v_i^a dV + \oint_{\partial V} v_i^a T_{ij}^a n_j dS \right] dt$$

Подставляем  $\frac{dU}{dt}$ ,  $\delta Q$  и  $\delta A_{\text{внеш}}$  в первое начало термодинамики:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left( r_a \left( u_a + \frac{1}{2} v_i^a v_i^a \right) \right) dV + \oint_{\partial V} r_a \left( u_a + \frac{1}{2} v_i^a v_i^a \right) v_j n_j dS = \\ & = \iiint_V f_i^a v_i^a dV + \oint_{\partial V} v_i^a T_{ij}^a n_j dS + \iiint_V (r_a Q^a + Q^{int,a}) dV - \oint_{\partial V} q_j^a n_j dS \end{aligned}$$

Преобразуем левую часть равенства (опуская тройной интеграл по лемме Римана, так как объём произвольный и подынтегральная ф-ия непрерывна):

$$e_a \frac{\partial r_a}{\partial t} + r_a \left( \frac{\partial u_a}{\partial t} + v_i^a \frac{\partial v_i^a}{\partial t} \right) + \partial_j (r_a e_a v_j^a) =$$

раскрывая последнюю производную произведения и вынося  $e_a$  за скобку

$$= e_a \left( \frac{\partial r_a}{\partial t} + \partial_j (r_a v_j^a) \right) + r_a \left( \frac{\partial u_a}{\partial t} + v_i^a \frac{\partial v_i^a}{\partial t} \right) + r_a v_j^a \partial_j e_a =$$

учитывая ЗСМ  $\left( \frac{\partial r_a}{\partial t} + \partial_i (v_i^a r_a) = 0 \right)$  и подставляя выражение для  $e_a$

$$= r_a \frac{\partial u_a}{\partial t} + r_a v_i^a \frac{\partial v_i^a}{\partial t} + r_a v_j^a \partial_j u_a + r_a v_j^a \partial_j \left( \frac{1}{2} v_i^a v_i^a \right) =$$

группируя первое и третье слагаемые в полную производную и вынося  $v_i$  во втором и четвёртом слагаемых за скобку

$$= r_a \frac{d_a u_a}{dt} + v_i^a \left( r_a \frac{\partial v_i^a}{\partial t} + r_a v_j^a \partial_j v_i^a \right)$$

Преобразуем правую часть равенства (опуская тройной интеграл по лемме Римана, так как объём произвольный и подынтегральная ф-ия непрерывна):

$$v_i^a f_i^a + \partial_j (T_{ij}^a v_i^a) + r_a Q^a + Q^{int,a} - \partial_j q_j^a =$$

раскрывая производную во втором слагаемом и вынося  $v_i^a$  за скобку

$$= v_i^a (f_i^a + b_i^{int,a} - b_i^{int,a} + \partial_j T_{ij}^a) + T_{ij}^a (\partial_j v_i^a) + r_a Q^a + Q^{int,a} - \partial_j q_j^a$$

Подставляем преобразованные части в исходное равенство (первое начало термодинамики), вычлняя при этом ЗСИ:

$$r_a \frac{d_a u_a}{dt} = T_{ij}^a \partial_j v_i^a + r_a Q^a + Q^{int,a} - \partial_j q_j^a - b_i^{int,a} v_i^a$$

Получили закон сохранения энергии (ЗСЭ) одной фазы. Суммируя по всем фазам получаем общий ЗСЭ:

$$\sum_a r_a \frac{d_a u_a}{dt} = \sum_a T_{ij}^a \partial_j v_i^a + rQ - \partial_j q_j - b_i^{int} W_i ; \quad rQ = \sum_a r_a Q^a ;$$

$$Q^{int,f} = -Q^{int,s} ; \quad b^{int} = b^{int,f} = -b^{int,s}$$

$q_j$  - общий поток тепла

Из ЗСЭ получим уравнение теплопроводности. Воспользуемся двумя замыкающими соотношениями: законом Фурье и связью между внутренней энергией и температурой.

Закон Фурье:  $q_i = -\kappa_{ij} \partial_j \theta$ , где  $\kappa_{ij}$  - тензор теплопроводности

Связь внутренней энергии и температуры:  $u_a = c_a \theta$ , где  $c_a$  - удельная теплоёмкость фазы (считаем, что  $\theta = \theta^s = \theta^f$ , т.е. на масштабе рассматриваемых сред (на микромасштабе) теплообмен мгновенный, происходит быстрее любых других процессов; в плазме это предположение не выполняется, но у нас не плазма)

Также считаем, что  $v_i^a = 0$  (т.е. происходит только теплообмен, среды находятся в механическом равновесии)

Учитывая замыкающие соотношения и поставленное условие, перепишем общий ЗСЭ:

$$\sum_a r_a c_a \frac{\partial \theta}{\partial t} = rQ + \partial_i (\kappa_{ij} \partial_j \theta)$$

предполагая однородность ( $\kappa_{ij} = \text{const}$ )

$$\sum_a r_a c_a \frac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa_{ij} \partial_i \partial_j \theta = rQ$$

предполагая изотропность ( $\kappa_{ij} = \kappa \delta_{ij}$ )

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\kappa}{rc} \Delta \theta = \frac{Q}{c} ; \quad rc = \sum_a r_a c_a$$

Получили уравнение теплопроводности ( $c$  - удельная теплоёмкость смеси;  $Q$  - удельный источник тепла)

## 2 Второе начало термодинамики. Вывод замы- кающих соотношений из неравенства Клаузиуса- Дюгема

Допустим у нас одна среда, тогда

5 скалярных уравнений: 1 из ЗСМ, 3 из ЗСИ, 1 из ЗСЭ. Есть ещё ЗСМИ, но он просто симметризует тензор напряжений (учитывается, когда говорим, что тензор напряжений симметричен)

неизвестных: 3 смещения в пространстве от времени, плотность материала, температура, внутренняя энергия (её связь с температурой не очевидна), 6 компонент тензора напряжений.

Видим, что неизвестных существенно больше, поэтому необходимо выбрать (ввести) замыкающие соотношения. Но произвольно это сделать не можем, так как есть ещё одно начало термодинамики (энтропия замкнутой системы может только увеличиваться со временем).

Энтропия:

$$H = \iiint_V \sum_a r_a \eta_a dV$$

$\eta_a$  - удельная плотность энтропии

Изменение энтропии в случае равновесного процесса:

$$\frac{\delta Q}{T} = \iiint_V \frac{rQ}{\theta} dV - \iint_{\partial V} \frac{hdS}{\theta}$$

Неравенство Клаузиуса-Дюгема (одна из форм второго начала термодинамики):

$$\iiint_V \frac{rQ}{\theta} dV - \iint_{\partial V} \frac{hdS}{\theta} \leq \frac{\partial H}{\partial t} + \iint_{\partial V} \left( \sum_a r_a \eta_a v_i^a \right) n_i dS$$

$\frac{\partial H}{\partial t}$  - изменение энтропии в объёме;  $\iint_{\partial V} \left( \sum_a r_a \eta_a v_i^a \right) n_i dS$  - отток энтропии наружу

Подставляем выражение для энтропии и переносим всё в одну часть неравенства, учитывая, что  $h = n_i q_i$ , и опуская при этом тройной интеграл по лемме Римана:

$$\sum_a \frac{\partial (r_a \eta_a)}{\partial t} + \partial_i \left( \sum_a r_a \eta_a v_i^a \right) - \frac{rQ}{\theta} + \partial_i \left( \frac{q_i}{\theta} \right) \geq 0$$

раскрывая производные и вынося  $\eta_a$  за скобку

$$\sum_a \left[ \eta_a \left( \frac{\partial r_a}{\partial t} + \partial_i (r_a v_i^a) \right) + r_a \frac{\partial \eta_a}{\partial t} + r_a v_i^a \partial_i \eta_a \right] - \frac{rQ}{\theta} + \frac{\partial_i q_i}{\theta} - q_i \frac{\partial_i \theta}{\theta^2} \geq 0$$

учитывая ЗСМ  $\left( \frac{\partial r_a}{\partial t} + \partial_i (v_i^a r_a) = 0 \right)$  и выделяя полную производную удельной плотности энтропии

$$\sum_a r_a \frac{d_a \eta_a}{dt} - \frac{rQ}{\theta} + \frac{\partial_i q_i}{\theta} - q_i \frac{\partial_i \theta}{\theta^2} \geq 0$$

Из ЗСЭ:

$$rQ - \partial_i q_i = \sum_a r_a \frac{d_a u_a}{dt} - \sum_a T_{ij}^a \partial_j v_i^a + b_i^{int} W_i$$

Подставляем в неравенство:

$$\sum_a r_a \frac{d_a \eta_a}{dt} - \sum_a r_a \frac{1}{\theta} \frac{d_a u_a}{dt} + \sum_a \frac{1}{\theta} T_{ij}^a (\partial_j v_i^a) - \frac{1}{\theta} b_i^{int} W_i - \frac{q_i \partial_i \theta}{\theta^2} \geq 0$$

умножая обе части неравенства на  $\theta$  ( $\theta > 0$ )

$$\sum_a r_a \left( \theta \frac{d_a \eta_a}{dt} - \frac{d_a u_a}{dt} \right) + \sum_a T_{ij}^a (\partial_j v_i^a) - b_i^{int} W_i - \frac{q_i \partial_i \theta}{\theta} \geq 0$$

В дальнейшем введём обозначение  $\delta_\theta = -\frac{q_i \partial_i \theta}{\theta}$  - термическая диссипация. Энтропия и её частные производные физически не совсем понятны, поэтому проще ввести термодинамический потенциал, у которого частные производные имеют определённый физический смысл.

Далее переходим на школьные обозначения (для краткости).

В равновесном процессе:

$$\delta Q = T dS = dU + dA$$

Введём свободную энергию (термодинамический потенциал):

$$\Psi = U - TS$$

Тогда

$$d\Psi = dU - T dS - S dT = -p dV - S dT$$

Следовательно,  $\Psi = \Psi(V, T)$  (т.е.  $\Psi$  - функция объёма и температуры, т.е. физически понятна)

Получили, что

$$T dS - dU = -d\Psi - S dT$$



Тогда, возвращаясь к исходным обозначениям, получаем

$$\theta \frac{d_a \eta_a}{dt} - \frac{d_a u_a}{dt} = - \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right)$$

Подставляем в неравенство:

$$- \sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + \sum_a T_{ij}^a (\partial_j v_i^a) - b_i^{int} W_i + \delta_\theta \geq 0$$

Лекция 19.02.2022.

$$- \sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij}^s \partial_j v_i^s + T_{ij}^f \partial_j v_i^f + b_i^{eq} W_i + b_i^{dis} W_i + \delta_\theta \geq 0$$

вспоминая, что  $W_i = v_i^f - v_i^s \Leftrightarrow v_i^f = W_i + v_i^s$

$$- \sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij}^s \partial_j v_i^s + T_{ij}^f \partial_j v_i^s + T_{ij}^f \partial_j W_i + b_i^{eq} W_i + b_i^{dis} W_i + \delta_\theta \geq 0$$

вынося  $\partial_j v_i^s$  за скобку, учитывая  $T_{ij}^s + T_{ij}^f = T_{ij}$  и разбивая  $T_{ij}^f = T_{ij}^{eq,f} + T_{ij}^{dis,f}$

$$- \sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij} \partial_j v_i^s + T_{ij}^{eq,f} \partial_j W_i + b_i^{eq} W_i + T_{ij}^{dis,f} \partial_j W_i + b_i^{dis} W_i + \delta_\theta \geq 0$$

вводя механическую диссипацию  $\delta_f = T_{ij}^{dis,f} \partial_j W_i + b_i^{dis} W_i$

$$- \sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij} \partial_j v_i^s + T_{ij}^{eq,f} \partial_j W_i + b_i^{eq} W_i + \delta_f + \delta_\theta \geq 0$$

Напоминание: закон Дарси можно напрямую получить из сил вязкого тре-

ния (вводя силу вязкого трения по закону Ньютона, автоматически получаем закон Дарси в пористых средах)

Вспомним тензор малых деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij}^s = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (\partial_j v_i^s + \partial_i v_j^s)$$

учитывая симметричность  $\varepsilon_{ij}$  преобразуем неравенство к следующему виду

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s + T_{ij}^{eq,f} \partial_j W_i + b_i^{eq} W_i + \delta_f + \delta_\theta \geq 0$$

Далее  $T_{ij}^{eq,f} = -\varphi p \delta_{ij}$  и  $b_i^{eq} = -p \partial_i \varphi$

$$T_{ij}^{eq,f} \partial_j W_i + b_i^{eq} W_i = -p (\varphi \delta_{ij} \partial_j W_i + W_i \partial_i \varphi) = -p (\varphi \partial_i W_i + W_i (\partial_i \varphi)) = -p \partial_i (\varphi W_i)$$

Подставляем в неравенство:

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s - p \partial_i (\varphi W_i) + \delta_f + \delta_\theta \geq 0$$

Вспомним ЗСМ:

$$\frac{\partial r_f}{\partial t} + \partial_i (r_f v_i^f) = \rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \rho_f \partial_i (\varphi v_i^f) + \varphi v_i^f \partial_i \rho_f = 0$$

вспоминая  $v_i^f = W_i + v_i^s$  и выделяя полную производную

$$\varphi \frac{d_f \rho_f}{dt} + \rho_f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \partial_i (\varphi W_i) + \partial_i (\varphi v_i^s) \right) = 0$$

раскрывая производную произведения

$$\varphi \frac{d_f \rho_f}{dt} + \rho_f \partial_i (\varphi W_i) + \rho_f \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_i^s \partial_i \varphi + \varphi \partial_i v_i^s \right) = 0$$

вспоминая, что  $\partial_i v_i^s = \dot{\varepsilon}_{ii}^s = \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s = \delta_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^s}{\partial t} = \delta_{ij} \frac{d_s \varepsilon_{ij}^s}{dt}$  (частная производная равна полной, т.к. тензор МАЛЫХ деформаций), выделяя ещё одну полную производную  $\left( \frac{d_s \varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_i^s \partial_i \varphi \right)$  и поделив обе части равенства на  $\rho_f$

$$\partial_i (\varphi W_i) = -\frac{\varphi}{\rho_f} \frac{d_f \rho_f}{dt} - \frac{d_s \varphi}{dt} - \varphi \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s$$

Видим, что  $\partial_i (\varphi W_i)$  распадается на сумму трёх полных производных. И именно из этой составляющей ”вылезут” все законы пороупругости.

Подставляем в неравенство:

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + T_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s + p \frac{\varphi}{\rho_f} \frac{d_f \rho_f}{dt} + p \frac{d_s \varphi}{dt} + p \varphi \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^s + \delta_f + \delta_\theta \geq 0$$

Достигли успеха: есть полная производная температуры, полная производная тензора малых деформаций (можно расписать как относительную производную плотностей скелета, но тензор деформаций более общий вид), полная производная плотности флюида, полная производная пористости.

Далее будем получать замыкающие соотношения.

$$-\sum_a r_a \left( \frac{d_a \Psi_a}{dt} + \eta_a \frac{d_a \theta}{dt} \right) + (T_{ij} + p \varphi \delta_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^s + \frac{p \varphi}{\rho_f} \frac{d_f \rho_f}{dt} + p \frac{d_s \varphi}{dt} + \delta_f + \delta_\theta \geq 0$$

Мы знаем, что пористость и свободная энергия должны зависеть от температуры, от давления флюида (связано ”намертво” неким замыкающим соот-

ношением с плотностью флюида) и от деформации скелета:

$$\Psi_a = \Psi_a(\theta, \varepsilon_{ij}, \rho_f)$$

$$\varphi = \varphi(\theta, \varepsilon_{ij}, \rho_f)$$

Тогда

$$\frac{d_f \Psi_f}{dt} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta} \frac{d_f \theta}{dt} + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d_f \varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f} \frac{d_f \rho_f}{dt}$$

$$\frac{d_s \Psi_s}{dt} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} \frac{d_s \theta}{dt} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d_s \varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \rho_f} \frac{d_s \rho_f}{dt}$$

$$\frac{d_s \varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d_s \theta}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d_s \varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f} \frac{d_s \rho_f}{dt}$$

Замыкающие соотношения для флюида.

\* Предполагаем, что производная  $\frac{d_f \varepsilon_{ij}}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$\frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0$$

\* Предполагаем, что производная  $\frac{d_f \theta}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$-r_f \frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta} - r_f \eta_f = 0 \Rightarrow \eta_f = -\frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta}$$

(получили факт из школьного курса: энтропия есть минус производная свободной энергии по температуре)

\* Предполагаем, что производная  $\frac{d_f \rho_f}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$-r_f \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f} + \frac{p \varphi}{\rho_f} = 0 \Rightarrow p = \rho_f^2 \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f}$$

Далее скелетные замыкающие соотношения.

\* Предполагаем, что производная  $\frac{d_s \theta}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$-r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} - r_s \eta_s + p \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \eta_s = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} + \frac{p}{\rho_s \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

(видим, что энтропия скелета уже зависит от пористости)

\* Предполагаем, что производная  $\frac{d_s \varepsilon_{ij}}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$-r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} + T_{ij} + p \varphi \delta_{ij} + p \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0$$

(если линеаризовать последнее равенство, то получим закон Гука)

\* Предполагаем, что производная  $\frac{d_s \rho_f}{dt}$  может быть любой, тогда для выполнения неравенства необходимо

$$-r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \rho_f} + p \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f} = 0$$

Нам не нравятся полученные замыкающие соотношения. Мы реально можем управлять температурой и давлением. А в полученных замыкающих соотношениях есть, например, плотность флюида, значениями которой напрямую мы не управляем. Нам нужно перейти к замыкающим соотношениям на давление. Но напрямую это сделать нельзя; нужно будет сделать 2 промежуточ-

ных трюка:

\* скажем, что пористость независимая переменная, а плотность флюида - зависящая от неё термодинамическая величина (можем сделать, так как есть связь между плотностью флюида и пористостью)

\* перейдём к другому термодинамическому потенциалу

Сделаем замену переменных:

$$f(\theta, \varepsilon_{ij}, \rho_f) \rightarrow \tilde{f}(\theta, \varepsilon_{ij}, \varphi(\theta, \varepsilon_{ij}, \rho_f))$$

Тогда

$$r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \rho_f} = r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f}$$

и последнее замыкающее соотношение

$$-r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \rho_f} + p \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f} = 0 \Leftrightarrow \left( -r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} + p \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f} = 0$$

Следовательно,

$$p = r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi}$$

С другой стороны, ранее получили

$$p = \rho_f^2 \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f} = \rho_f^2 \frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f}$$

Таким образом,

$$\varphi \rho_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} = \rho_f^2 \frac{\partial \tilde{\Psi}_f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_f}$$

(вывели просто так, не запоминаем)

После замены переменных распишем

$$r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} = r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varepsilon_{ij}} + r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

(так как  $\tilde{\Psi}_s$  двояко зависит от деформаций: напрямую и через пористость)

и предпоследнее замыкающее соотношение

$$-r_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} + T_{ij} + p\varphi\delta_{ij} + p \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0$$

равносильно

$$-r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varepsilon_{ij}} - r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} + T_{ij} + p\varphi\delta_{ij} + p \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0$$

вынося  $\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}}$  за скобку

$$-r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varepsilon_{ij}} + \left( p - r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} + T_{ij} + p\varphi\delta_{ij} = 0$$

Ранее получали, что

$$p = r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi}$$

поэтому замыкающее соотношение перепишется в виде

$$-r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varepsilon_{ij}} + T_{ij} + p\varphi\delta_{ij} = 0$$

Ранее получали первое скелетное замыкающее соотношение:

$$\eta_s = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} + \frac{p}{\rho_s \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

В новых переменных

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

и первое скелетное замыкающее соотношение перепишется в виде

$$\eta_s = -\frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{p}{r_s} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Ранее получали, что

$$p = r_s \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi}$$

поэтому замыкающее соотношение перепишется в виде

$$\eta_s = -\frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \theta}$$

Теперь осталось сделать последний шаг. Сделать так, чтобы это всё было в нормальных переменных: избавиться от пористости и получить давление.

Для этого перейдём к потенциалу Гиббса:

$$G = U - TS + pV = \Psi + pV$$

Рассмотрим его дифференциал:

$$dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp$$

Из первого начала термодинамики знаем, что

$$dU - TdS = -pdV$$

поэтому



$$dG = -SdT + Vdp$$

(таким образом, термодинамический потенциал Гиббса меняется/зависит только от температуры и давления - то, что нам нужно; а свободная энергия зависит только от температуры и объёма: из-за зависимости от объёма у нас и появлялась пористость)

Лирическое отступление: потенциал Гиббса сохраняется при фазовых переходах

Но сделаем не совсем потенциал Гиббса (а потенциал Гиббса с точки зрения флюида):

$$\Phi_s = \tilde{\Psi}_s - \frac{p\varphi}{r_s}$$

Распишем дифференциал свободной энергии скелета:

$$d\tilde{\Psi}_s = \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_s}{\partial \varphi} d\varphi$$

учитывая полученные ранее замыкающие соотношения

$$d\tilde{\Psi}_s = -\eta_s d\theta + \frac{T_{ij} + p\varphi\delta_{ij}}{r_s} d\varepsilon_{ij} + \frac{p}{r_s} d\varphi$$

Распишем дифференциал

$$-d\left(\frac{p\varphi}{r_s}\right) = -\frac{pd\varphi}{r_s} - \frac{\varphi dp}{r_s} + \frac{\varphi p}{r_s} \frac{dr_s}{r_s}$$

а относительное изменение плотности есть минус относительное изменение (деформация) объёма:

$$\frac{dr_s}{r_s} = -\delta_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

Распишем дифференциал введённого потенциала

$$d\Phi_s = d\tilde{\Psi}_s - d\left(\frac{p\varphi}{r_s}\right) = -\eta_s d\theta + \frac{T_{ij} + p\varphi\delta_{ij}}{r_s} d\varepsilon_{ij} + \frac{p}{r_s} d\varphi - \frac{pd\varphi}{r_s} - \frac{\varphi dp}{r_s} - \frac{\varphi p}{r_s} \delta_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

приводя подобные

$$d\Phi_s = -\eta_s d\theta + \frac{T_{ij}}{r_s} d\varepsilon_{ij} - \frac{\varphi}{r_s} dp$$

(видим, что потенциал  $\Phi$  зависит от температуры, деформации и давления)

Тогда получаем следующие замыкающие соотношения:

\* на пористость

$$\varphi = -r_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial p}$$

\* на энтропию скелета

$$\eta_s = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta}$$

\* на напряжение

$$T_{ij} = r_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Ещё в подобной форме необходимо замыкающее соотношение на энтропию флюида и замыкающее соотношение, которое покажет связь между давлением и плотностью флюида.

Введём потенциал для флюида:

$$\Phi_f = \Psi_f + \frac{p}{\rho_f}$$

Запишем его дифференциал:

$$d\Phi_f = d\Psi_f + \frac{dp}{\rho_f} - p \frac{d\rho_f}{\rho_f} \frac{1}{\rho_f} = -\eta_f d\theta + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f} d\rho_f + \frac{dp}{\rho_f} - p \frac{d\rho_f}{\rho_f} \frac{1}{\rho_f}$$

Перепишем первое слагаемое

$$d\Psi_f = \frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \rho_f} d\rho_f$$

учитывая ранее полученные замыкающие соотношения для флюида (первое, второе и третье)

$$d\Psi_f = -\eta_f d\theta + \frac{p}{\rho_f^2} d\rho_f$$

подставляем в выражение для дифференциала  $d\Phi_f$ :

$$d\Phi_f = -\eta_f d\theta + \frac{p}{\rho_f^2} d\rho_f + \frac{dp}{\rho_f} - p \frac{d\rho_f}{\rho_f} \frac{1}{\rho_f}$$

приводя подобные

$$d\Phi_f = -\eta_f d\theta + \frac{dp}{\rho_f}$$

Тогда получаем следующие замыкающие соотношения:

\* на энтропию флюида

$$\eta_f = -\frac{\partial \Phi_f}{\partial \theta}$$

\* на плотность флюида

$$\frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial \Phi_f}{\partial p}$$