

# Содержание

<b>1 Лекция 08.02.2022.</b>	<b>4</b>
1.1 Введение . . . . .	4
1.2 Уравнение сплошной среды . . . . .	7
1.3 Решение Д'Аламбера. Граничные условия . . . . .	9
1.3.1 Пример . . . . .	11
1.4 Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость . . . . .	12
1.4.1 Примеры . . . . .	15
<b>2 Лекция 15.02.2022.</b>	<b>17</b>
2.1 Использование преобразований Фурье и Лапласа. Введение . . . . .	17
2.2 Связь между $v$ и $\sigma$ . Изменение $v$ и $\sigma$ при отражении от свободной поверхности . . . . .	21
<b>3 Лекция 22.02.2022.</b>	<b>27</b>
3.1 Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия . . . . .	27
3.2 Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость . . . . .	33
3.3 Метод стационарной фазы . . . . .	37
<b>4 Лекция 01.03.2022.</b>	<b>40</b>
4.1 Повторение. Преобразование Лапласа. Теорема о вычетах. Ряд Лорана. Лемма Жордана . . . . .	40
4.2 Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа . . . . .	46
<b>5 Лекция 15.03.2022.</b>	<b>50</b>
5.1 Применение преобразования Лапласа. Трудности . . . . .	50
5.2 Несвязанная динамическая задача термоупругости . . . . .	53
5.3 Дельта-функция Дирака . . . . .	54
5.4 Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера . . . . .	55
5.5 Движущийся источник звука . . . . .	57
5.6 Влияние включений на волновой процесс. Смешанный спектр . . . . .	58
<b>6 Лекция 22.03.2022.</b>	<b>62</b>
6.1 Небольшое замечание к задаче . . . . .	62
6.2 О стационарных решениях . . . . .	63
6.3 Метод предельного поглощения . . . . .	65
6.3.1 Функция Грина статической задачи . . . . .	65
6.3.2 Функция Грина динамической задачи . . . . .	68
6.3.3 Применение метода предельного поглощения . . . . .	71
<b>7 Лекция 29.03.2022.</b>	<b>75</b>
7.1 Повторение метода предельного поглощения . . . . .	75
7.2 Примеры волн в различных средах . . . . .	79
7.2.1 Термоупругие волны . . . . .	79
7.2.2 Плазменные волны . . . . .	81
7.2.3 Прямоугольный волновод . . . . .	83

<b>8</b>	<b>Лекция 05.04.2022.</b>	<b>86</b>
8.1	Волны в акустических средах . . . . .	86
8.2	Поверхностные гравитационные волны . . . . .	94
<b>9</b>	<b>Лекция 12.04.2022.</b>	<b>97</b>
9.1	Краткое повторение материала о волнах в акустических средах . . . . .	97
9.2	Поверхностные гравитационные волны на границе между водой и воздухом . . . . .	98
<b>10</b>	<b>Лекция 19.04.2022.</b>	<b>104</b>
10.1	Продолжаем разговор о поверхностных волнах . . . . .	104
10.2	Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей . . . . .	105
10.3	Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей, которые движутся друг над другом . . . . .	107
10.4	Волны на границу между водой и воздухом без учёта силы тяжести (решение Эйлера) . . . . .	111
<b>11</b>	<b>Лекция 26.04.2022.</b>	<b>113</b>
11.1	Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле . . . . .	113
11.2	Наклонное падение волны . . . . .	117
<b>12</b>	<b>Лекция 17.05.2022.</b>	<b>120</b>
12.1	Повторение материала о волнах в сферической СК . . . . .	120
12.2	Энергия звуковых волн . . . . .	121

# Волны в деформируемых средах

## Конспект лекций

Вавилов Д.С.<sup>1</sup>      Муравцев А.А.<sup>2</sup>

6 июня 2022 г.

### Список вопросов по дисциплине «Волны в деформируемых средах», 2022

1. Уравнение сплошной среды. Решение Д'Аламбера. Границные условия.
2. Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость.
3. Связь между  $v$  и  $\sigma$ . Изменение  $v$  и  $\sigma$  при отражении от свободной поверхности.
4. Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия. Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость.
5. Метод стационарной фазы
6. Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа.
7. Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера.
8. Влияние включения на волновой процесс. Смешанный спектр.
9. Стационарные решения. Метод предельного поглощения. Функция Грина.
10. Волны в различных средах.
11. Волны в акустических средах
12. Поверхностные гравитационные волны на границу между водой и воздухом.
13. Поверхностные гравитационные волны на границу двух жидкостей.
14. Поверхностные гравитационные волны на границу двух жидкостей, который движутся друг над другом.
15. Волны на границу между водой и воздухом без учета силы тяжести (Решение Эйлера).
16. Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле.
17. Наклонное падение волны.
18. Энергия звуковых волн.

---

<sup>1</sup>лектор и составитель рукописного конспекта, Высшая школа теоретической механики, Санкт-Петербургский Политехнический университет. Дополнительные материалы к лекциям [доступны по ссылке](#).

<sup>2</sup>дополнил конспект и объединил файлы; email: almuravcev@yandex.ru

# 1 Лекция 08.02.2022.

## 1.1 Введение

Санкт-Петербургский университет

Бабинов Дмитрий Сергеевич

норма: londr@yandex.ru

### Литература

1. Н. В. Карлов, Н. А. Киряченко  
Колебания. Волны. Струи и туманы
2. «Физ. Узел. Линейные и  
нелинейные волны»
3. М.И. Радинович, Д.И. Трубецков  
Введение в теорию колебаний  
и волн
4. Ф. М. Морс, Г. Фейнбах  
Методы теоретической физики (2 том)
5. Г. Ардженте Математические  
методы в физике

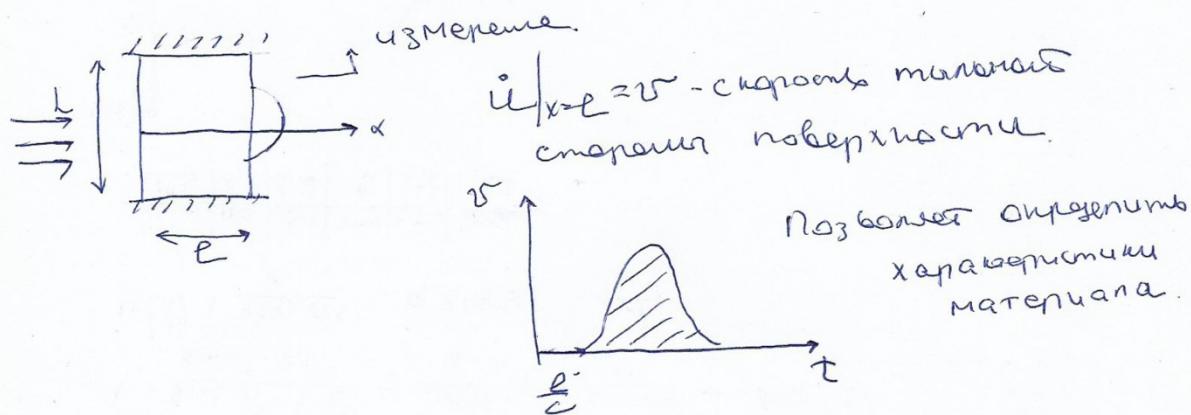
кафедра физики  
НПУ им. В.Г. Королёва



## Волны в деформируемых средах

08.02. Введение. Одномерные волны в деформируемом теле.

Волна - это распространение колебаний в сплошных средах. Исследование динамического процесса, когда необходимо установить как передаче возмущение от одной элементарной единицы к другой.



Предположим, что мы можем менять время взаимодействия. При этом у нас есть общий единица характеристическое время

$$\frac{F}{G} M \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{G}} \quad \text{Материал имеет}$$

одна и та же характеристика времени.

$$1. \text{ Макроуровень } T_1 = \frac{L}{c}$$

$c$  - скорость звука  $c = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$

$$J \quad L = 1 \text{ см} \Rightarrow T_1 = \frac{10^{-2} \cdot c}{5 \cdot 10^3 \text{ м/с}} = 2 \text{ мкс}$$

$$f = \frac{1}{T_1} = 5 \cdot 10^5 \text{ Гц}$$

(1)

2. Зёрна  $D \cdot (100 \div 200) \text{ мкм}$   
 $\tau_2 = \frac{D}{C} = \frac{10^2 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ с}, f \sim 10^7 \div 10^8 \text{ Гц}$

3. Межаморфные свидетельства омоложения

$$\tau_3 = T \sim \sqrt{\frac{G}{m}} \sim 10^{12} \div 10^{15} \text{ с}$$

Если мы хотим подтверждать влияние на азимут

$$\tau_{\text{турн}} \leq \tau_{1,2,3}$$

1.  $\frac{L}{\rho} \ll 1$  малозадачное течение среды мана  
 Нем. Влияние чисто

2. Одностороннее направляющее сопротивление.

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \sigma_x - \text{правильное напряжение}$$

Оценить время удара твёрдых  
 Тер., рассматривая столкновение  
 стекла, налетающего тортом на  
 неподвижную стекло.

Идеализация: упругий удар проходит  
 мгновенно  $dP = \frac{F dt}{\Delta t}$  или взаимодействие

беспрерывно велика

-  $t=0$  момент соприкосновения стекла  
 со стеклом

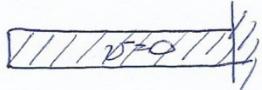
a)

глубина стекла за время  
 стекло равно  $v t$

(2)

## 1.2 Уравнение сплошной среды

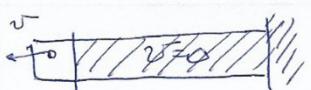
δ)



Весь стержень окажется деформированым

Кинетическая энергия начального стержня целиком превращается в потенциальную энергию упругой деформации

β)



Второй этап: стержень возвращается в исходное

положение. Этому процессу называется усадка тела и называется приближением к нейтрале.

Энергия упругой деформации стержня целиком переходит обратно в кинетическую энергию.

$$\tau = \frac{2E}{C} - \text{гипотенуза еволюции}$$

Базовые ур-я: баланс импульса,  
баланс момента импульса, баланс массы,  
баланс энергии (2 закона термодинамики)

$$\text{Баланс импульса } \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \rho \frac{d\vec{v}_x}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_x}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t} + \vec{v}_x \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_x}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t}$$

Второй порядок можно

$\frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t}$  - локальное производное

$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$  - конвективное производное

(3)

Баланс массы:  $\frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$

+ Определяющее ур-е (изотермический случай)

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

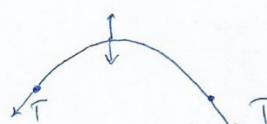
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = p \frac{d u_x}{d t} \\ \frac{dp}{dt} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\ \sigma = E \varepsilon \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{линейизируем уравнение} \\ \text{относительно равновесного} \\ \text{составления} \end{array}$$

$$p = p_0 + \tilde{p}, \quad u_x = 0 + u_x^*, \quad u_x^* = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Уз. второе уравнение  $\tilde{p} = -p_0 \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$   
 $p = p_0(1 - \varepsilon)$  - звуковое изменение плотности

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - p_0 \frac{\partial u_x^*}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ p = p_0(1 - \frac{\partial u}{\partial x}) \\ \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right. \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad \text{- скорость звука}$$



$$T \cdot u_{xx} - \rho_0 u_{ttt} = 0$$

В звуком спуске

$$c^2 = \frac{T}{\rho_0}$$

Уравнение стационарной среды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

(4)

### 1.3 Решение Д'Аламбера. Граничные условия

Решение Д'Аламбера

$\xi = x - ct$ ,  $\eta = x + ct$  - преобразование Галилея

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} c + \frac{\partial u}{\partial \eta} c$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c^2 = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} c^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} c^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} c^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} -$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f^*(\eta)$$

$$\begin{aligned} u &= \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \\ &= f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c}) \end{aligned}$$

(5)

Как определить функции  $f_1$  и  $f_2$ ?

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = -c_0 f_1'(x) + c_0 f_2'(x) = \psi(x)$$

Измак:  $f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \psi(d) dd + C$$

Система имеет решение (единственное)

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\alpha) d\alpha$$

Задача Дана

О роли граничных условий  
в решении

Краевое условие на бесконечности

- ① Ограничность на  $\infty$
- ② Условие излучение - узкое волно
- ③ и  $u_x$  независимо



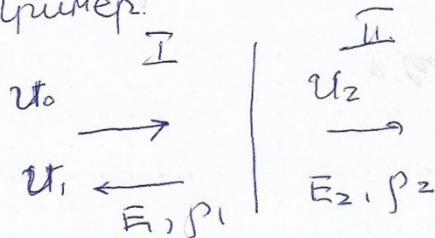
$$0 \leq x < \infty$$

$$u = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

- ③ Условие локализации  $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx < \infty$

## 1.3.1 Пример

Пример

 $u_0(x, t)$  - падающая волна $u_1(x, t)$  - отражённая волна $u_2(x, t)$  - проходящая волна

$$\begin{cases} u_0 + u_1 \Big|_{x=0} = u_2 \\ E_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_0 + u_1}{c_1} \right] \Big|_{x=0} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \end{cases}$$

$$u_0(x, t) = \tilde{u}_0(t - \frac{x}{c_1})$$

$$u_1(x, t) = \tilde{u}_1(t + \frac{x}{c_1})$$

$$u_2(x, t) = \tilde{u}_2(t - \frac{x}{c_2})$$

$$\begin{cases} u_0 + u_1 = u_2 \\ \frac{E_1}{G} \left( -u_0 + u_1' \right) = -\frac{E_2}{c_2} u_2' \end{cases} \quad (\text{после интегрирования})$$

$$u_0 + u_1 = u_2$$

$$\gamma(u_0 - u_1) = +u_2$$

$$\gamma = \frac{E_1 c_2}{E_2 G} = \frac{c_1^2 p_1 c_2}{c_2^2 p_2 G} = \frac{G p_1}{G p_2} \quad (\text{cp - баланс отражения})$$

$$\gamma(u_0 - u_1) = +u_0 + u_1$$

$$-\gamma u_1 = +u_0 - \gamma u_0$$

$$-u_1(\gamma + 1) = u_0(1 - \gamma)$$

$$u_1 = -\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} u_0 (t + \frac{x}{c_1})$$

$$u_2 = \frac{2\gamma}{1 + \gamma} u_0 (t - \frac{x}{c_2})$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 - \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} u_0 = \\ &= \frac{u_0(1 + \gamma - 1 + \gamma)}{1 + \gamma} = \\ &= \frac{2\gamma}{1 + \gamma} u_0 \end{aligned}$$

$$R = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad D = \frac{\gamma}{1 + \gamma}, \quad R + D = 1$$

(7)

## 1.4 Спектральные свойства оператора Д'Аламбера. Дискретный и непрерывный спектры. Фазовая скорость

$$\bar{E}_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0, \quad \bar{E}_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_0$$

напряженность электрического поля  
(аналогична с электродинамикой)

$$\frac{r_1}{r_2} = f \quad r - показатель преломления$$

$$\bar{E}_1 = -\frac{1-f}{1+f} E_0, \quad \bar{E}_2 = \frac{2f}{1+f} E_0$$

Сравнить с полученным результатом

### Спектральные свойства оператора Д'Аламбера

$$U_{xx} - \frac{1}{c^2} U_{tt} = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{не симметричные})$$

Спектр включает в себя свободные  
половинки (однозначные решения и зеркальные)

Ограничность на дисcretизации

Будем искать решение в виде

$$U(x,t) = A(x) e^{i\omega t} \Rightarrow A_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

$$L A = \Delta^2 A, \quad L = -\frac{d}{dx}, \quad \Delta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\omega = \pm \Delta c$$

$$[\omega] = \frac{pc}{c}, \quad [\Delta] = \frac{1}{M} \quad d - \text{вещественное}$$

$$A(x) = a e^{-i\Delta x} + b e^{i\Delta x}$$

$$A(x)_{x \rightarrow \pm\infty} - \text{существо}, \quad \text{т.е. } d - \text{вещественное}$$

(8)

$\omega$  - базовое частотное число  
 $\omega$  - наше частотное число!  $\Rightarrow$   
 непрерывный спектр.

Собственная форма (форма) колебаний

$$u_\omega(x, t, \omega) = a_\omega e^{i\omega t - i\omega x} + b_\omega e^{i\omega t + i\omega x} =$$

$$= a_\omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} + b_\omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})}$$

Занесем: где есть конечных размеров  
 спектр синхронизирован. Например,



$$u_k = \sin \frac{\pi k x}{L} e^{i\omega_k t}$$

$$\omega_k = \frac{\pi k c}{L}$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \frac{\pi k x}{L} e^{i\omega_k t}$$

Все частоты колебаний спектра

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_\omega e^{i\omega t - i\omega x} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} b_\omega e^{i\omega t + i\omega x} d\omega \quad (=)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_\omega e^{i\omega x} d\omega = f_1(\xi)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_\omega e^{i\omega x} d\omega = f_2(\eta)$$

$$f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c}) \quad (=)$$

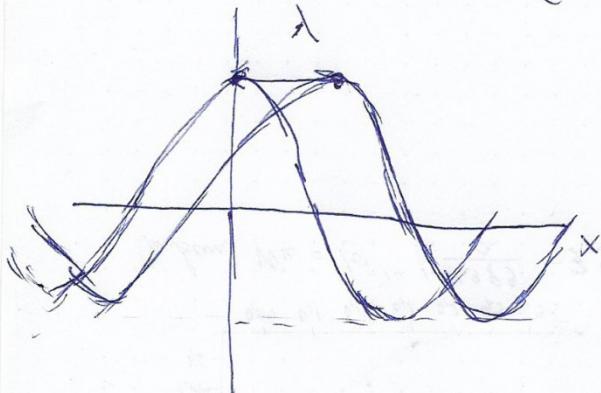
Решение Даламбера

(9)

$$e^{i\omega s} = e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \text{ - собственное колебание}$$

Возьмём вибрационную волну:

$$\operatorname{Re} e^{i\omega s} = \cos(\omega(t-\frac{x}{c})) = \cos(\omega t - dx)$$



$$\frac{\omega}{c} = d \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = d$$

Более ширина

изображение  
распространения

Умножим собственное волнение на волну — это  
сдвиговая волна. С — характеризует  
скорость перемещение гармонической  
волны. Если скорость волны  
гармоники равна с, то и скорость  
сдвиговой волны также равна с.

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_0 e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} d\omega = f(t - \frac{x}{c})$$

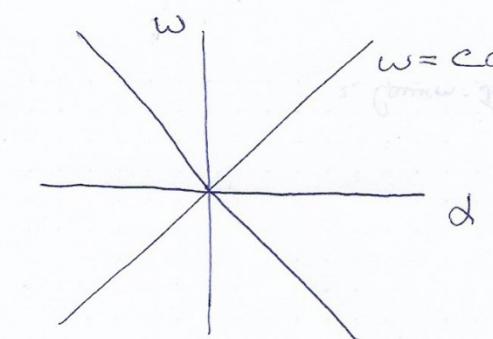
Разоблачение спроса — спрос на  
распространение гармонической волны

$$C_p = \frac{\omega}{d} \quad \text{В один и тот же } C_p = C_p(\omega)$$

Оператор Делоне: волна без  
суперции

(10)

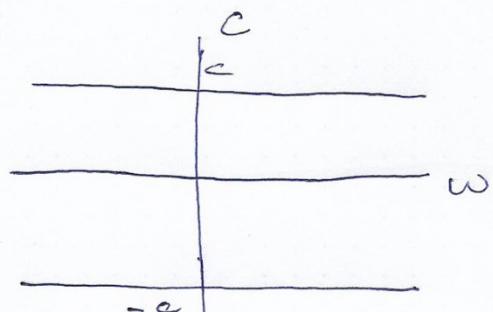
## 1.4.1 Примеры



Дисперсионные  
причины

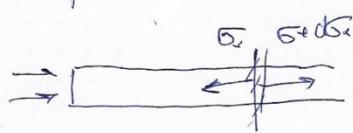
Однозначное соответствие  
между  $w$  и  $d$

One-to-one correspondence  
between  $w$  and  $d$



Зависимость  
передает скорость  
от времени

Пример



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} = 0 \\ \sigma_x|_{x=0} = \sigma_0(t) H(t-0) \end{array} \right.$$

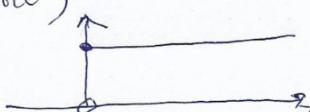
$\sigma_x|_{x \rightarrow \infty}$  — устойчивое излучение

Решение Дирака

$$\sigma_x = f_1(t - \frac{x}{c}) + f_2(t + \frac{x}{c})$$

$$\sigma_x = f(t - \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} d\omega$$

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$



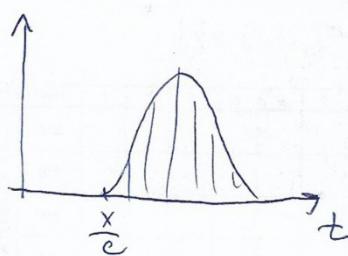
$$\sigma_x|_{x=0} = \sigma_0(t) H(t-0) \Rightarrow f(t - \frac{x}{c})|_{x=0} = \sigma_0(t) H(t-0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \sigma_0(t) H(t-0)$$

$$\sigma_x = f(t - \frac{x}{c}) = \sigma_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$\tau_x = \frac{x}{c}$  — время задержки

(11)



Случай дает решение вида  
очи  $\times$  для гипотетики  
 $w = \pm c \omega$

Дискретизация спектра

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u(t, 0) = 0 \\ u(t, e) = 0$$

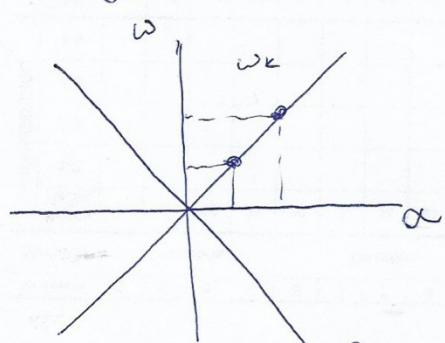
$$u(x, t) = A(x) e^{i \omega t} \Rightarrow A_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$$

$$A(x) = a e^{-i \omega x} + b e^{i \omega x}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a e^{-i \omega x} + b e^{i \omega x} = 0 \end{cases}$$

Случай имеет неприведенное решение, если  
это определено ограничено в коне.

$$e^{i \omega x} - e^{-i \omega x} = 0 \Rightarrow \sin \omega x = 0 \\ \omega_k = \pm \frac{i k \pi c}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$$



$$A_k(x) = b \sin \frac{\omega_k x}{L}$$

$$u_k(t, x) = b \left( e^{i \omega_k (t + \frac{x}{c})} - e^{-i \omega_k (t + \frac{x}{c})} \right)$$

$$u_k(t, x) = \tilde{b} e^{i \omega_k t} \sin \frac{\omega_k x}{L}$$

В спектре возможны только не бесконечные (сигарообразные спектры). Спектр может быть ограничен вдоль оси  $x$ .

(12)

## 2 Лекция 15.02.2022.

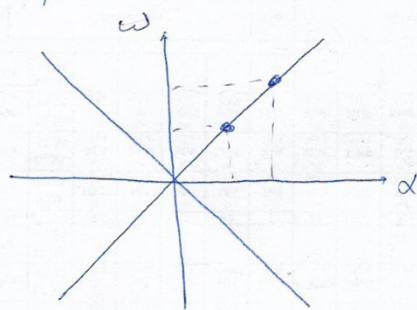
### 2.1 Использование преобразований Фурье и Лапласа. Введение

15.02 Лекция 2.

помага: londr@yandex.ru.

Оператор Данаудеря.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

$c = \frac{\omega}{d} = \text{const}$  - скорость с которой распространяется гармоническое колебание



$$\omega = \pm cd$$

Болиды

системы

$$f_1(t - \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} a \omega e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} d\omega$$

$$f_2(t + \frac{x}{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} b \omega e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} d\omega$$

$e^{i\omega t} e^{i\omega x} \Rightarrow e^{i\omega t}$  - колебание во времени

$e^{i\omega x}$  - регулярность по пространственным переменным

$d$  - вещественное число (модуль комплексного спектра)

$dk = \frac{\pi k}{c}$  - модуль спектрального спектра

$$A(x) = \sin \frac{\pi k x}{c} - \text{надолбь волны}$$

①

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(w) e^{iwt} dw$$

$e^{iwt}$  - начальная система звуковых

Система звуковая, которую можно представить  
составлять никакой непрерывной звуковой  
которая одна из ортогональных базисов  
из звуковой, выражая в эту систему

$$\text{затем } y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(w) e^{iwx} dw$$

Разложение в ряд Фурье:  $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{iwt}$   
периодической звуковой (спектральный анализ)

Верхняя формула называется  
интегралом Фурье. Она представляет собой

звуковую  $y(t)$  в виде суммы звуковых  
непрерывного множества колебаний,  
значения которых непрерывно зависят от

интервал

$$Y(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-iwt} dt \quad - \text{представление  
Фурье}$$

$$g(t) = y(t) H(t - \tau)$$

$$Y(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} y(t) e^{-iwt} dt$$

Как добить, если интеграл расходится?

(2)

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty y(t) e^{-xt} e^{-i\omega t} dt$$

Всегда сдвиги умножение множителем  
 $e^{-xt}$  при  $t \rightarrow \infty$ , интеграл выходит в  
 бесконечности

$$p = x + i\omega$$

$$Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \tilde{y}(t) dt \quad \text{интеграл Лапласа}$$

$\sim$   
оригинал

изложение

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} Y(p) dp, \quad t > 0$$

Теорема обратления.

Макер остатком  
 - это замкнутый  
 контур

Путь преобразование  
 - это контур преобразование

Лапласа ( $x=0$ )

Для Книги:

1. Г. Дэр Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразование

2. А.И. Пурье Операционное исчисление

(3)

Пример

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \\ \sigma|_{x=0} = \sigma_0(t) H(t) \\ \sigma|_{x \rightarrow \infty} = \text{затухающее колебание} \end{array} \right.$$

$$\sigma(t, x) = \sigma_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c})$$

$$\sigma^L(p, x) = \int_0^\infty \sigma_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty \sigma_0(\xi) H(\xi) e^{-p(\xi + \frac{x}{c})} d\xi =$$

$$= e^{-\frac{px}{c}} \int_0^\infty \underbrace{\sigma_0(\xi)}_{\sigma_0^L(p)} e^{-p\xi} d\xi$$

$$\sigma(x, t) = \sigma_0(t - \frac{x}{c}) H(t - \frac{x}{c}) \doteq e^{-\frac{px}{c}} \sigma_0^L(p)$$

$$e^{-pa} u(p) \doteq u(t-a) H(t-a), a > 0$$

Теорема смещения

Давно рассмотрим много аналогичных  
примеров, но для этого нужно  
определять частоты между  $\omega$  и  $\nu$   
(Измерять можно  $\omega$ , определить нужно  $\nu$ )

Как связать эти величины?

(4)

## 2.2 Связь между $v$ и $\sigma$ . Изменение $v$ и $\sigma$ при отражении от свободной поверхности

Вам не пытайтесь спросить распространение  
воздуха с материальной скоростью  $v^*$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} - \text{материальная скорость звука}$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad g = E - \frac{x}{c}$$

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\Rightarrow \epsilon = -\frac{v}{c} \quad \text{Две струны} \quad \sigma = E \epsilon = \rho c^2 \left( -\frac{v}{c} \right) \quad \epsilon = -\rho c v$$

$$\boxed{\sigma = -\rho c v} \quad (\text{одинаковая струна})$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \right.$$

$$\sigma|_{x=0} = \sigma_0(t) H(t-0)$$

$$\sigma|_{x=0} = 0 \quad \text{- начальное условие}$$

Начальное условие

$$u, u|_{t=0} = 0 \Rightarrow \sigma|_{t=0} = 0$$

$$\tilde{\sigma}^L = \int_0^\infty \sigma(x,t) e^{-pt} dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\sigma}^L}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} e^{-pt} dt = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}^L}{\partial t^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}^L}{\partial t^2} e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{\sigma}^L}{\partial t} e^{-pt} dt =$$

$$= -\dot{\sigma}(0) + p \left[ \tilde{\sigma}^L e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty \tilde{\sigma}^L e^{-pt} dt \right]$$

$$= -\dot{\sigma}(0) - p \tilde{\sigma}^L(0) + p^2 \tilde{\sigma}^L$$

(5)

$$\dot{f}(t) \doteq p F(p) - f(0)$$

$$\ddot{f}(t) \doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - p^{(n-2)} f^{(n-2)}(0) - f^{(n)}(0)$$

В общем случае

$$\frac{d^2\sigma^L}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} \sigma^L = 0$$

$$\sigma^L = A e^{-\frac{px}{c}} + B e^{\frac{px}{c}} \quad - \text{находим}$$

оператора  $c\partial_x$

$$\text{Зам. } \sigma^L = C \cosh \frac{px}{c} + D \sinh \frac{px}{c} \quad (\text{исследуем})$$

$$\sigma^L|_{x=0} = \{ \sigma_0(t) h(t-\omega) \}|^L = \sigma_0, \quad \sigma^L|_{x=e} = 0$$

$$\begin{cases} A + B = \sigma_0 \\ Ae^{-\frac{pe}{c}} + Be^{\frac{pe}{c}} = 0 \end{cases} \quad \Delta = e^{\frac{pe}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}}$$

$$A = \frac{\sigma_0 e^{\frac{pe}{c}}}{\Delta}, \quad B = -\frac{\sigma_0 e^{-\frac{pe}{c}}}{\Delta}$$

$$\sigma^L(p, x) = \frac{\sigma_0}{\Delta} \left( e^{\frac{pe}{c}} e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right)$$

$$= \frac{\sigma_0}{e^{\frac{pe}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}}} \left( e^{\frac{pe}{c}} e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right)$$

$$= \frac{\sigma_0}{1 - e^{-\frac{2pe}{c}}} \left( e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{3pe}{c}} e^{\frac{px}{c}} \right) \Theta$$

(6)

$$\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2 + \dots q^n$$

$$\Rightarrow \sigma_0^L \left( 1 + e^{-\frac{2l}{c}} \right) \left( e^{-\frac{x}{c}} - e^{-\frac{2l+x}{c}} \right) =$$

$$= \sigma_0^L e^{-\frac{2l}{c}} - \sigma_0^L e^{-\frac{2l}{c}} e^{-\frac{x}{c}} + \sigma_0^L e^{-\frac{2l}{c}} e^{-\frac{2l+x}{c}}$$

*противодействующая волна*      *отталкивающая волна*

Перейдём к оригиналу

$$\begin{aligned} \sigma(t, x) &= \sigma_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) H\left(t - \frac{x}{c}\right) - \\ &- \sigma_0 \left( t - \frac{2l-x}{c} \right) H\left(t - \frac{2l-x}{c}\right) + \\ \frac{2l-x}{c} &= \frac{l}{c} + \frac{l-x}{c} \quad \frac{x}{c} - \text{время запаздывания} \end{aligned}$$

При отталкивании от свободной поверхности

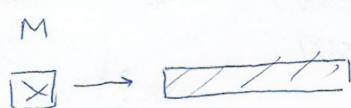
знак напряжения не меняется на  
противоположный, т.е. если причина волны  
сжатия, то отталкивание волна расширение

]  $\sigma_0(+)=\sigma_0 H(t-0)$  — сжимающее сжатие.



Знак напряжения

Слово: знак  
не меняется ⑦  
отталкиваний не дает

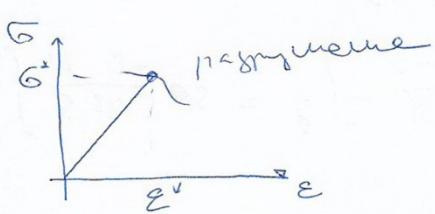


$$M \frac{d\sigma}{dx} = +\sigma$$

$$\sigma = -\rho c v \Rightarrow \frac{M}{\rho c} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sigma = 0$$

Как меняется напряжение - ?

Будут ли подъемные напряжения противоположны знака



Найти сечение отсечки

$$x^* - ?$$

(Расчетное значение)

$$\begin{aligned} \sigma^L &= -\frac{\sigma_0^L}{\rho c} \left[ e^{-\frac{px}{c}} + e^{\frac{px}{c}} \right] = \\ &= -\frac{1}{\rho c} \left[ \sigma_0 (t - \frac{x}{c}) + \sigma_0 (t + \frac{2x}{c}) \right] \end{aligned}$$

$$v(t, x) = 2\sigma_0(t)$$

Скорость на единой поверхности в 2

раза больше. Это необходимо учитывать при расчете напряженного состояния.

⑧

Запишем волновое уравнение для  
перемещений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\xi_0(t)}{E} H(t-\sigma) \quad - \text{загоре Кеймана} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

1. Находим собственные значения:  $u = A(x) e^{i\omega t}$

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0 \\ \frac{dA}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \\ \frac{dA}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$A(x) = a \cos \frac{\omega x}{c} + b \sin \frac{\omega x}{c}$$

$$b = 0$$

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \Rightarrow \frac{\omega l}{c} = \pi n$$

$$\omega_n = \frac{\pi n c}{l}$$

$$A_n = \cos \frac{\omega_n x}{c}, \quad n = 0, 1, \dots, n$$

$$u = \sum g_n(t) \cos \frac{\omega_n x}{c}$$

В этом случае  
мы не можем  
записать  
граничные  
условия.

Метод Грина

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\omega_n x}{c} dx - \frac{1}{c^2} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( u \cos \frac{\omega_n x}{c} \right) dx = 0$$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \frac{\omega_n x}{c} dx = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \frac{\omega_n x}{c} \Big|_0^l + \frac{\omega_n}{c} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \sin \frac{\omega_n x}{c} dx =$$

$$= - \frac{\xi_0(t)}{E} H(t-\sigma) + \frac{\omega_n}{c} \left[ u \sin \frac{\omega_n x}{c} \Big|_0^l - \frac{\omega_n}{c} \int_0^l u \cos \frac{\omega_n x}{c} dx \right]$$

$$= - \frac{\xi_0(t)}{E} H(t-\sigma) - \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 q_n \frac{l}{2}$$

(9)

$$-\frac{\sigma_0(\pm)}{E} H(\pm\omega) - \left(\frac{u_n}{e}\right)^2 q_n \frac{p}{2} - \frac{1}{c^2} \ddot{q}_n \frac{p}{2} = 0$$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{2c^2}{p} \frac{\sigma_0(\pm)}{E} H(\pm\omega), \quad \omega_n = \frac{u_n c}{e}$$

$$q_n + \omega_n^2 q_n = Q_m - \text{однократное сино. } q_m(\omega) = 0, \quad q_m(\omega) = 0 \Rightarrow$$

$$q_{nm}^L (p^2 + \omega_n^2) = Q_n^L \Rightarrow q_n^L = \frac{Q_n^L}{p^2 + \omega_n^2}$$

$$\frac{1}{p^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$f_1(p) f_2(p) = \int_0^\infty f_1(t) F_2(t-t) dt$$

тепрема о свертке

$$q_n(t) = -\frac{2\sigma_0 c^2}{E p \omega_n} \int_0^\infty \sin \omega_n t dt =$$

$$= -\frac{2\sigma_0 c^2}{E p \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t)$$

$$u(x,t) = -\frac{2\sigma_0 c^2}{E p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \cos \frac{u_n x}{p}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\sigma_0 c^2}{E p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{u_n}{p} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{u_n x}{p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{p}}{n} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{p}\right), \quad 0 < x \leq p$$

(10)

### 3 Лекция 22.02.2022.

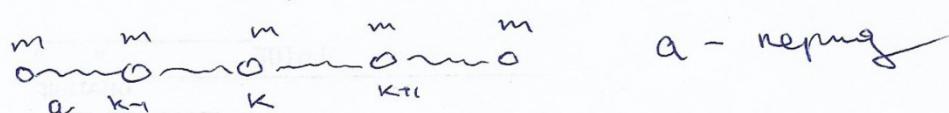
#### 3.1 Дискретное описание кристаллического тела. Дисперсия

22.02. Лекция 3

О дискретном описании  
кристаллического тела

Рассмотрим вопрос о совместных  
моделях статической среды дискретного  
описания

Одномерные структурные решётки  
(ячейка)



One k-ой замкнута

$$\ddot{m}_k = -g(u_k - u_{k-1}) + g(u_{k+1} - u_k)$$

Учитываясь взаимодействие между  
соседними атомами!

Литература:

1. Р.И. Мандельштам. Лекции по  
теории колебаний

2. Косяков Основы механики  
кристаллической решётки

$$\ddot{m}_k = g(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$$

(коэффициенты пружин)

①

$$u = A e^{i(\omega t - dx)} \quad - \text{сдвиг волны}$$

$$x_k = ka$$

$$\omega \rightarrow \omega \pm \frac{2\pi}{a} p \quad \text{результат не изменяется}$$

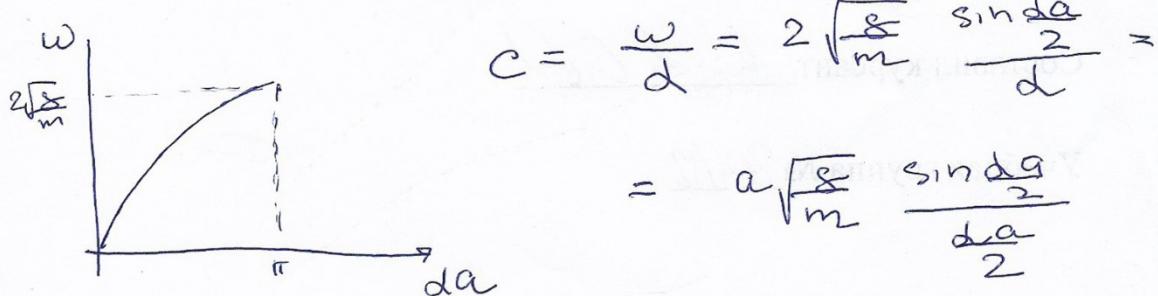
$$-\frac{\pi}{a} \leq \omega \leq \frac{\pi}{a} \quad - \text{зона Брильюэна}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \leq \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda \geq 2a \quad \text{ночес небольши!}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{m} \left( 2 - e^{ida} - e^{-ida} \right)$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{m} (1 - \cos da)$$

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{g}{m}} \frac{\sin da}{2}$$



Как называеме гибкое результат  
c можно сказать сразу?

Движко волны приближение  $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow c = a \sqrt{\frac{g}{m}}$$

(2)

$$c = a \sqrt{\frac{F}{m}} = a \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot a}} = \sqrt{\frac{F}{\rho}} !$$

$$g = \frac{F}{a} \quad \xrightarrow{\text{имеем } F} \quad G = \frac{E \cdot s}{l} = \frac{P}{S}$$

$$g = \frac{E \cdot s}{l}$$

Можно ли получить оператор Даламеде из дискретной модели?

$$\ddot{u}_{ik} = -g(u_k - u_{k-1}) + g(u_{k+1} - u_k)$$

$$u_{k-1} = u_k - u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2} + \dots$$

$$u_{k+1} = u_k + u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2}$$

$$\ddot{u}_{ik} = -g(u_k' a - \frac{u_k'' a^2}{2}) + g(u_k' a + \frac{u_k'' a^2}{2}) =$$

$$= g u_k'' a^2$$

Несколько произвольные сокращаются!

Концептуальная система

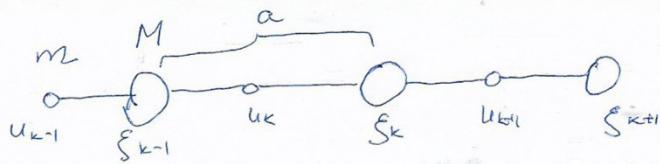
$$px'' = \frac{E u_k'' a^2}{a}$$

$$\boxed{u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0}$$

оператор Даламеде.

сразу же дискретизи.

(3)



$$\begin{cases} M \ddot{\xi}_k = g(u_k - 2\xi_k + u_{k+1}) \\ m \ddot{u}_k = g(\xi_{k-1} - 2u_k + \xi_k) \end{cases}$$

$$u_k = A e^{i(\omega t - k\alpha)} \\ \xi_k = B e^{i(\omega t - k\alpha)}$$

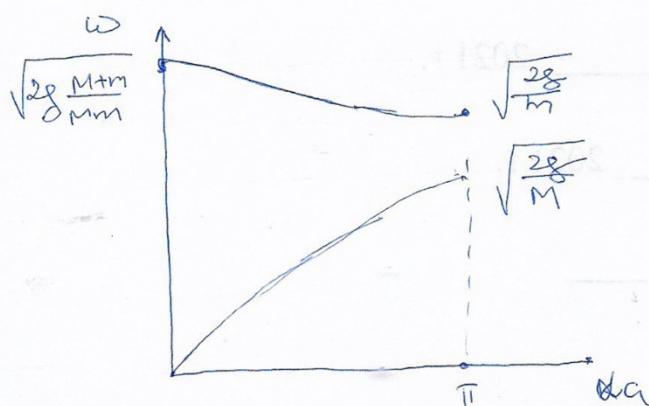
$$\begin{cases} (M\omega^2 - 2g)B + g(1 + e^{-i\alpha})A = 0 \\ g(1 + e^{i\alpha})B + (m\omega^2 - 2g)A = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow$$

$$Mm\omega^4 - 2g(M+m)\omega^2 + 2g^2(1 - \cos\alpha) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{Mm} \left( M + m \pm \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm\cos\alpha} \right)$$

Приемлемые значения!



Верхнее — оптическая  
премыкающая  
волна

нижнее —  
акустическая  
волна

(4)

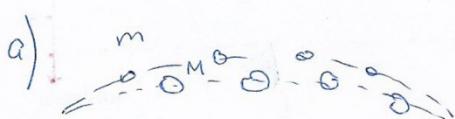
Масса  $\sigma$  (спинные волны)

$w_1$  меняется линейно в зависимости от

$A = B$  Согласно масса колебаний

в одинаковых газах.

Число может быть аппроксимировано  
одномерной моделью.



$w_2 = w_2(d)$ . При  $d \rightarrow 0$   $w_2$  не

стремится к нулю

Согласно атомы колеблются

в противоположных направлениях.



В трехмерной кристаллической решетке

существует 3S вибраций нормальных

колебаний (3 атомов в ячейке):

3 виброн - акустические

3S-3 - оптические

(излучающие однородные сдвиги)

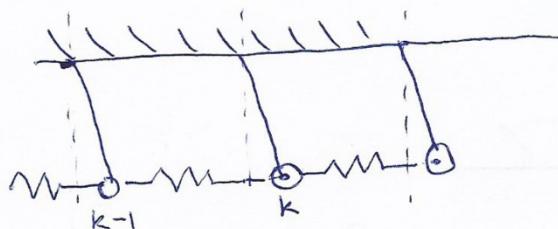
5

Вернёмся к дисперсионному возмущению

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{m}} \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$$

Дисперсия безважна начиная с временем пространственного масштаба, со временем пространственного масштаба, периодом решения  $a$ .  
Если  $\Delta \varphi \ll 1$  или  $a \ll \lambda$ , то дисперсия исчезает, и мы переходим к стационарной среде.

Возможна еще одна ситуация, когда дисперсия подавлена не пространственным, а временным масштабом?



$$\ddot{u}_k + \omega_0^2 u_k = -\frac{g}{m} (u_k - u_{k-1}) + \frac{g}{m} (u_{k+1} - u_k)$$

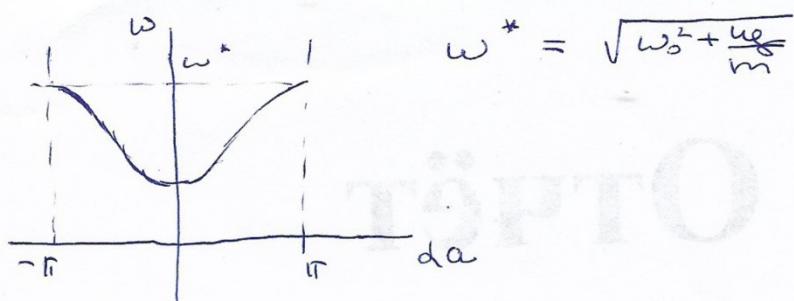
$$\ddot{u}_k + \omega_0^2 u_k = \frac{g}{m} (u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})$$

$$u_k = A e^{i(\nu t - \Delta x)}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4g}{m} \sin^2 \frac{\Delta \varphi}{2}$$

(6)

### 3.2 Уравнение Клейна-Гордона. Групповая скорость



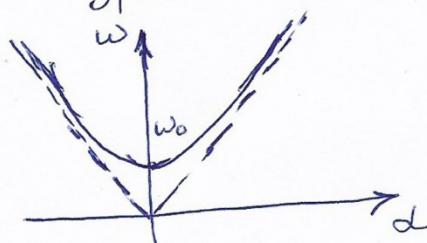
$$u_{k+1} = u_k + u_k' a + \frac{1}{2} u_k'' a^2 + \dots$$

$$u_{k-1} = u_k - u_k' a + \frac{1}{2} u_k'' a^2$$

$$u_k'' + \omega_0^2 u_k = \frac{g}{m} u_k'' a^2$$

$$\boxed{u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0}$$

Уравнение Клейна - Гордона



$\omega_0$  - расстояние от вершины

При  $\omega_0 \rightarrow 0$  бисперсия исчезает и сплющивание при k=0 переходит в широкое преломление

$$\omega = \pm c_s d$$

Примеры: струна на упругом основании

конедание плазмы, волноводы.  
P. Рейтман. "Лекции по физике" Т. 6  
Электродинамика

(7)

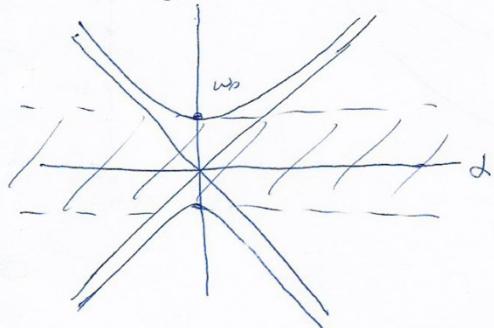
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0$$

$\int dx \quad \int dt$

$$u \sim e^{i\omega x} e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + c^2 \alpha^2$$

$$\text{if } \omega_0 = 0 \Rightarrow \omega = \pm c\alpha$$



$$0 < \omega < \omega_0$$

Способ не сработал  
Нет решения в конечном  
времени, потому что

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - k u = 0$$

$$u = v_0(x) e^{i\omega t}$$

$$v_{0,xx} + \alpha^2 v_0 = 0, \quad \alpha = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$1. \quad \alpha = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$$

$$v_0 = Ax + B$$

$$v_0 = B$$

решение не является общим

$$2. \quad \alpha > \text{без.} \quad \omega > \omega_0$$

$$v_0 = A e^{i\alpha x} e^{i\omega t} + B e^{-i\alpha x} e^{-i\omega t}$$

$$= A e^{i\omega(t + \frac{x}{c})} + B e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

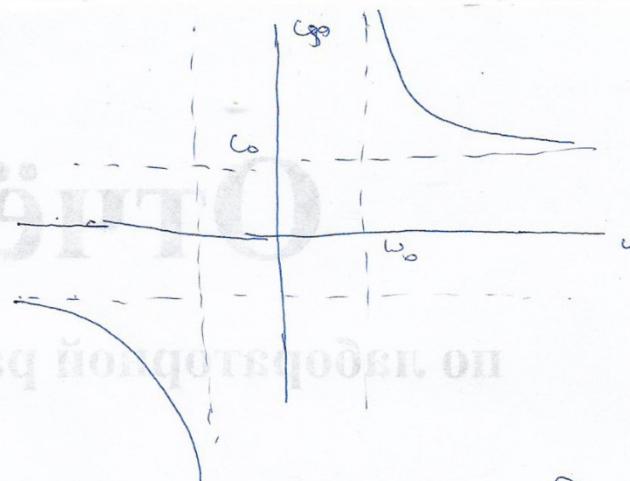
$$3. \quad \omega < \omega_0 \quad v_{0,xx} - \alpha^2 v_0 = 0$$

$$v_0 = A e^{-i\alpha x} + B e^{i\alpha x}$$

Также получается решение

(8)

$$C_{\phi} = \pm \frac{c_0 \omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$



Что такое скорость сигнала?  
 $\omega_1$  и  $\omega_2$  где гармоники  
 $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_{1,2}$

$$u(x, t) = u_0 \cos(\omega_1 t - d_1 x) + u_0 \cos(\omega_2 t - d_2 x) =$$

$$= 2u_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{d_2 - d_1}{2}x\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{d_1 + d_2}{2}x\right) =$$

$$= a(x, t) \cos(\omega_0 t - \phi_0 x)$$

несущая  
 $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ,  $\phi_0 = \frac{d_1 + d_2}{2}$   
 длина  
 освещенного  
 участка

$$a(x, t) = 2u_0 \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t - \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)x\right)$$

$$C_S = \frac{\omega_0}{d_0} - \text{нестационарное}$$

$$C_{S^m} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{d_2 - d_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta d}$$

$$\text{В однен. случае } C_{S^r} = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta d} = \frac{d\omega}{dd}$$

(9)

Три скорости:  $c_p$ ,  $c_{gr}$ ,  $v$ !

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\omega(\alpha)t - \alpha x)} d\alpha =$$

$$\omega(\alpha) = \omega_0 + \omega'(\omega_0) \Delta \alpha$$

$$= e^{i(\omega_0 t - \alpha x)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i\alpha(\omega'(\omega_0)t - x)} d(\alpha) =$$

$$= e^{i(\omega_0 t - \alpha x)} u(\omega'(\omega_0)t - x)$$

*это огибающая.*

*оч. близ.*

$$c_{gr} = \frac{dw}{d\alpha}$$

Как проследить за изменением волнового пакета?

Как изменяется интеграл?

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{it(\omega(\alpha) - \frac{\alpha x}{t})} d\alpha$$

$$\psi(\alpha) = \omega(\alpha) - \frac{\alpha x}{t}, \quad t \rightarrow \infty$$

*$\frac{x}{t}$  - начальное положение*

Метод стационарных фаз

1. Н. А. Островский, А. И. Романов

Введение в теорию мозулированных волн

2. А. Наигза Введение в методы возмущений

(10)

### 3.3 Метод стационарной фазы

$$I(t) = \int_a^b F(\alpha) e^{it\psi(\alpha)} \frac{d\alpha}{\psi'(\alpha)}, \quad t \rightarrow \infty$$

$$u = \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)}, \quad d\omega = e^{it\psi(\alpha)} \psi'(\alpha) d\alpha$$

$$\omega = \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{it}$$

$$I(t) = \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{it} - \frac{1}{it} \int_a^b e^{it\psi(\alpha)} \left[ \frac{F(\alpha)}{\psi'(\alpha)} \right] \frac{1}{t} d\alpha$$

$$= \frac{i}{t} \left[ F(\alpha) \frac{e^{it\psi(\alpha)}}{\psi'(\alpha)} - \frac{F(\alpha) e^{it\psi(\alpha)}}{\psi'(\alpha)} \right] + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$\psi' \neq 0$  !

Основной слагаемый в выражении для дифракции звуковых волн в пространстве времени  $t$  имеет окрестность конца смыкания волн  $\alpha = \alpha_c$ ,

$$\text{в которой } \left. \frac{d\psi}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_c} = 0$$

$$\psi(\alpha) \approx \psi(\alpha_c) + \psi'(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c) + \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2.$$

$$F(\alpha) \approx F(\alpha_c) + F'(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)$$

$$u(x, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_c) \exp \left( i \left( \psi(\alpha_c) + \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2 \right) t \right) d\alpha$$

$$= F(\alpha_c) e^{i[\psi(\alpha_c)t - \psi(\alpha_c)x]} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( i \left[ \frac{1}{2} \psi''(\alpha_c)(\alpha - \alpha_c)^2 \right] t \right) d\alpha$$

$$\frac{1}{2} \psi''(\alpha_c) t = s, \quad (\alpha - \alpha_c)^2 = z^2 \quad \psi''(\alpha_c) \neq 0,$$

(11)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isz^2} dz = \sqrt{\frac{u}{|s|}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4} \operatorname{sign}(s)\right)$$

В итоге:

$$u(x,t) \approx \frac{F(d_e)}{\sqrt{w''(d_e)t}} \exp\left\{i\left(\frac{u(d_e)}{d_e} t - d_e x - \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} w''(d_e)\right)\right\}$$

Если существует решение

стационарных волн, то конец у

бук ведет к тому, что  $u(x)$  не

имеет симметрии.

$$C_{S^r} = \frac{dw}{dd} = \frac{d(c_p d)}{dd} = c_p + d \frac{dc_p}{dd}$$

$$C_{S^r} = c_p + d \frac{dc_p}{dd}$$

запись на Ранее

$$c_{S^r} = c_p, \text{ если } \frac{dc_p}{dd} = 0$$

Дисперсия излучает нормаль

если  $c_{S^r} < c_p$

и является в противном случае

(12)



## 4 Лекция 01.03.2022.

### 4.1 Повторение. Преобразование Лапласа. Теорема о вычетах. Ряд Лорана. Лемма Жордана

01. 03. 22. Лекция 4

В предыдущий раз мы рассматривали  
систему с дисперсией, введенное понятие  
групповой спектрости (скорости отклика)

Сегодня мы поговорим о решении  
нестационарного задачи и рассмотрим  
теорему о том, что уравнение содержит  
аналитическое решение с помощью  
преобразования Лапласа

$$Y(p) = \int_0^\infty y(t) e^{-pt} dt$$

изобрание

$$1. \ddot{y} + \omega_0^2 y = g(t), \quad g(t) = F_0 \Theta(t - \tau)$$

беззатухающее приложение

$$y(t) = \underbrace{A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t}_\text{общее решение} + C$$

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

Сделаем преобразование Лапласа: (лекция 2)

$$(p^2 + \omega_0^2) Y^L = \frac{F_0}{p} \Rightarrow Y^L = \frac{F_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$\frac{1}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \underset{\text{таблица}}{\sim} \sin \omega_0 t$$

$$Y^L = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau = \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

①

Теорема об разрезе.

Если  $f(p)$  является изображением

кусочно-гладкой функции  $f(t)$ ,

$$|f(t)| \leq M e^{-at} \quad \text{для } t > a$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad \gamma > a$$

Как брать интеграл право мнимой оси.

Нумизматическая теорема о вычетах (ТФКП)

А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов

Теория функций комплексной переменной

Теорема. Если функция  $f(z)$  является аналитической (непрерывной) везде в замкнутой области за исключением конечного числа особых точек (полюсов или сущ. особых точек)

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч}(f(z, a_k))$$

(C) Чему равен вычет особой точки?

Это назначается при  $(z-a)^{-1}$  в

разложении в ряд Лорана

$\text{res}_a f(z)$  - обозначение

$$\text{полюс } m\text{-го порядка: } C_m = \lim_{m \rightarrow 1} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$$

$$m=1$$

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$$

(2)

Базовый результат следующий:  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$  --  
 $\psi'(z) \neq 0$ !  $\operatorname{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

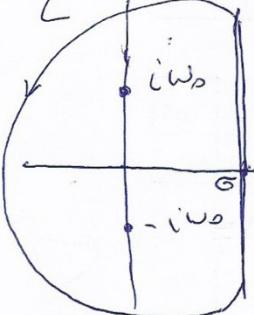
Вернемся к примеру с основой степени  $\omega_0$ .

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega_0^2} dp = \\ (\#) \quad &= \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{a_k} f(z) \quad f(z) = \frac{e^{pz}}{p^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

Очевидно:  $p_1 = -i\omega_0$ ,  $p_2 = i\omega_0$

$$\sum_{ak} \operatorname{res}_{a_k} = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2i\omega_0} - \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2i\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Возможность к имеющей асимптотике есть.

$$\begin{aligned} (\#) \quad &\int_C + \int_{G-i\infty}^{G+i\infty} \dots = 2\pi i \sum \operatorname{res}_{a_k} \\ &\int_C F(p) e^{pt} dp \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\text{at}} 0 \end{aligned}$$


Лемма Кошира:  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C F(z) e^{zt} dz \rightarrow 0$   
 если  $F(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $a > 0$ .

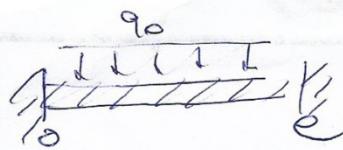
Рассмотрим  
систему  
линейную

затухающую в бесконечности  
наименее  
многим

затухающим.

меньшими!

(3)



См. лекция 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{q_0}{E} H(t) e^{-\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{P^2}{L^2} u = - \frac{q_0}{EP} e^{-\omega t}$$

$$u = A \sin \frac{px}{L} + B \cosh \frac{px}{C_0} + \frac{q_0}{P^3} C_0^2 e^{-\omega t}$$

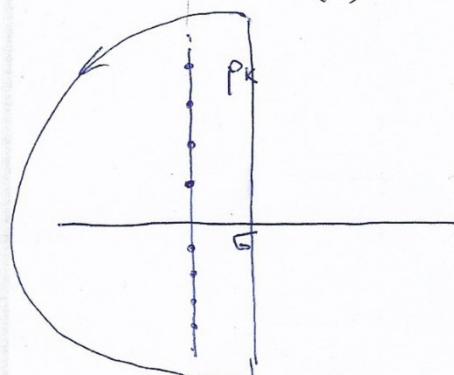
$$u(0, t) = 0, \quad u(e, t) = 0$$

$$u = \frac{q_0 \omega^2}{P^3} \left[ \frac{\sin \frac{pe}{L} - \cosh \frac{pe}{C_0} \sinh \frac{pe}{C_0} + (\cosh \frac{pe}{C_0} - 1) \sinh \frac{pe}{C_0}}{\sinh \frac{pe}{C_0}} \right]$$

Очевидно (чтобы)  $\sinh \frac{pe}{C_0} = 0 \Rightarrow p = i \omega k$   
 $\omega_k = \frac{\pi k C_0}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$

Соединим с выражением из 1 лекции.  
 Согласование коэффициентов.

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{\psi'(z)}, \quad \text{res}_{ak} f(z) = \frac{\psi(a)}{\psi'(a)}$$



$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R}^{G+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$+ \int_{C_R}^{G-i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=0}^{\infty} \text{res}_{ak} f(z)$$

Lemma скорогада

Решаем залогу, самосоединяясь!  
 Получим раз.

(4)

Теперь схему можно к употреблению  
использовать - Гоголя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0 \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{t=0} = f(t)H(t-0)$$

$u|_{x \rightarrow \infty}$  - gen. synapsen.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} u = \frac{\omega_0^2}{c^2} u = 0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{6^2}(p^2 + \omega_0^2) u = 0$$

$$dX^2 = -\frac{1}{6} \sqrt{P^2 + \omega_0^2} X$$

$$u^L = A e^{\sqrt{v_2^2 + w_2^2} A} f^L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = - \frac{C_0 F^L}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

$$u^L = - \frac{c_0 f^L e^{-\frac{1}{c_0} \sqrt{p^2 + \omega_0^2} x}}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}$$

Установление economy определение звук  
и гласные. Однозначное к магнит

$$\frac{e^{-k\sqrt{p^2+a^2}}}{\sqrt{p^2+a^2}} \stackrel{\sigma}{\longrightarrow} J_0(a\sqrt{t^2-k^2}) H(t-k)$$

Окончено новое заседание  
в зале заседаний

$$\text{negative answer} + \frac{x}{c}$$

$$u = -4 \int_0^s f(s) J_0 \left( a \sqrt{\left(t - \frac{x}{c} - s\right)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right) ds$$

Nonograms <sup>o</sup> međunarodni popravni te met  
nyacno.

6

Рассмотрим сначала  $x=0$ :

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \omega_0^2}}, \quad \text{так что } \omega_0 = 1.$$

Чтобы доказать след. теорему:

Если разложение в ряд  
разложения в ряд

$F(p)$  имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}}, \quad \text{то}$$

то простирается

разложения в ряд  
разложения в ряд

разложения в ряд  
разложения в ряд

$$\text{тогда } f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{n!} t^n$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^{1/2}} &= \frac{1}{p} (1 + p^{-2})^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{p} \left( 1 + mp^{-2} + \frac{m(m-1)}{2!} p^{-4} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!} p^{-2n} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{2} p^{-2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!} p^{-4} - \dots - \frac{(-1)^{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}}{2^n n!} p^{-2n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{1}{s^{2n+1}} \end{aligned}$$

теорема:

Тогда получим

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = J_0(t)$$

Видя, что первое член в ряду

М. А. Лаврентьев, С. В. Матвеев

Метод теории функций комплексной переменной

(6)

## 4.2 Уравнение теплопроводности. Комплексные волновые числа

Спомоще, погорие могут возникнуть при использовании теоремы однозначности, но рассмотрим ее более простым примером теплопроводности, но спомоще однозначности к упрощению

Будем  $\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial (PV)}{\partial x} = 0$  данное значение

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - P \frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{данное значение итоговое}$$

Однозначный ответ

Данное выражение: I заслон германическим спомоще ножкой ремня

$$\dot{W} = P + Q - \text{спомоще ножкой ремня} \quad \begin{cases} \text{нет однозначного} \\ \text{нет итогового} \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} P \left( \frac{1}{2} v^2 + u \right) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} P(v \dot{v} + \dot{u}) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial (P \cdot v)}{\partial x} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

$h$  - нотак ремня

$$Pv \dot{v} + Pv - v \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sigma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$v(P \dot{v} - \frac{\partial \sigma}{\partial x}) + Pv + \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma \dot{v}, \quad \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Данное значение

$$\boxed{P \dot{v} + \frac{\partial h}{\partial x} = \sigma \dot{v}}$$

Введем конечные температуры, как изменство физическая параметра, описание которого будущим спомоще:  $u = c_v \theta$

(7)

Закон Фурье:  $h = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$

Определение гр-е:  $\sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta)$

зачем Дюаре-Кестана попытка доказательства  
 $E_0 = \alpha \theta$  - это гипотеза, но мы не можем  
 доказать в рамках классической механики.  
 Но есть попытка:

$$\rho c_v \dot{\theta} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = E \alpha \theta \dot{\varepsilon}$$

$\theta$  - изменение температуры

$\theta_0$  - равновесие (нагрев) температура

Гр-е термопроводности, учитываемое  
 влияние волн теплопроведения (всплеск  
 волны) пока дает преисчисление  
 волны в рамках теории гр-е.

$$\rho c_v \dot{\theta} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

$\rho$  - масса,  $c_v$  - удельная теплоемкость  
 $\lambda$  - коэффициент термопроводности

$\lambda = \lambda_s + \lambda_e$  - движущийся и постоянный

$\lambda_e \gg \lambda_s$ , поэтому можно

хорошо пренебречь

$\lambda$  характеризует способ передачи  
 теплоты отдельных молекул

$\lambda$  и  $c_v$  зависят от температуры.

но мы будем считать

в рамках численной теории

Г.И. Енисеев. Рыжикова Г.Б. Термодинамика

(8)

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

$\theta \sim e^{idx} e^{int}$  - Roche постановка

$$\rho c i \omega + \lambda \omega^2 = 0 \quad (*)$$

Уп-е на градиентного типа:

- рефлексы прошлого и будущего  
- неоднозначность физического процесса  
"Темп передачи от зерна к зерну" - kleinе значение  
но х означает, что процесс  
единичен симметрическим.

Чт (\*) несложно, что  $\lambda$  - константа величина!

Что это означает?

$$\lambda = \lambda_R + i \lambda_I \quad \text{Вместе } \lambda^2 = \frac{\rho c}{\lambda} -$$

- но зернами температура определяется

Така

$$\lambda^2 i \omega + \lambda_R^2 + 2i \lambda_R \lambda_I - \lambda_I^2 = 0$$

$$\lambda_R^2 = \lambda_I^2 \Rightarrow \lambda_I = \pm \lambda_R$$

$$\lambda^2 \omega + 2 \lambda_R \lambda_I = 0 \Rightarrow \lambda^2 \omega = 2 \lambda_I^2$$

$$\lambda_I^2 = \frac{\lambda^2 \omega}{2}$$

$$\boxed{\lambda_I = \sqrt{\frac{\omega}{2}}}$$

(9)

Тогда

$$\Theta \sim e^{i\alpha x} e^{\text{int}} = e^{i(\alpha x + i\Delta I) \times \text{int}} e^{-i\Delta R x}$$

$\underbrace{e^{i\alpha x}}$      $\underbrace{e^{\text{int}}}$      $e^{-i\Delta R x}$   
 $\underbrace{e^{i(\alpha x + i\Delta I) \times \text{int}}}$

Более в упрощенном виде

$\Delta I$  характеризует зондом  
предназначение тенна будущих  
материалов, при этом  $\Delta I = a\sqrt{\frac{\omega}{2}}$   
запасное предназначение суживается  
зависит от назначения Технологичность  
 $\Delta R = -\frac{\rho Cr}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{2}}$

$$C_{sp} = \frac{\omega}{\Delta R} \sim \sqrt{\omega}$$

Чем выше  $\omega$ , тем выше  
и предыдущие характеристики, то  
есть при этом более сильные  
запасы по назначению  $x$

$$\Theta \sim e^{i\omega(t - \frac{x}{C_{sp}})} e^{-i\Delta I x}$$

Затем находим в силу неравенства  
закона Релея  $\lambda = -\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x}$   
тенна уходит из области

(10)

## 5 Лекция 15.03.2022.

### 5.1 Применение преобразования Лапласа. Трудности

15.03.22. Лекция 5.

На прошлой лекции мы обсудили применение преобразования Лапласа

$$Y(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \text{ где решение}$$

исследование первых задач. Основное здесь

стоит в том, чтобы перейти

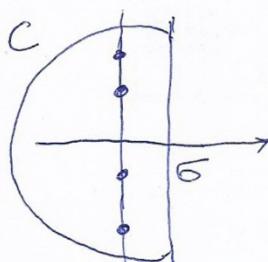
в пространство изображений, где решить

задачу проще. Тогда нужно

переводить из пространства оригиналов

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} f(z, a_k)$$



$$\oint_C = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} + \int_C$$

$$\int_C F(p) e^{pt} dp \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0 \quad \begin{matrix} \text{лемма} \\ \text{скорогоды} \end{matrix}$$

Обсудим некоторые трудности, но т.  
могут возникнуть при вычислении инт.

$$a^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} - \dot{\theta} = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda}{pCr} \quad \begin{matrix} \text{изобретение} \\ \text{так называемый} \end{matrix}$$

Ур. унг.: 
$$-\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=\infty} = J(t) \quad 0 \leq t < \infty$$

$\theta \xrightarrow{x \rightarrow \infty}$  опр.

①

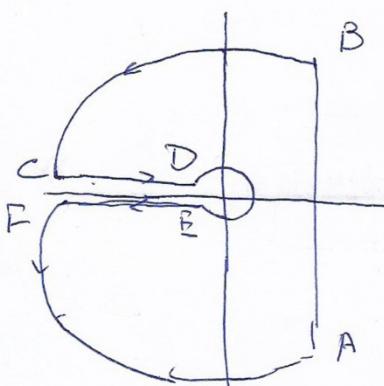
$$a^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} - p\theta = 0$$

$$\theta^L = A e^{-\sqrt{p}x/a}, \quad -\frac{\sqrt{p}}{a} A = -\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{x \sqrt{p}}$$

$$\theta^L = \frac{1}{x \sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}x/a}$$

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}}, \quad k = \frac{x}{a}, \quad k > 0$$



$\omega = \sqrt{p}$  - много значное  
значение  
Нужно сделать разрез,  
чтобы запретить однозначность

$$\sqrt{p} = \sqrt{z} e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Внутри полукружия нет особых точек  $\Rightarrow$

$$\oint_{\Gamma} F(p) e^{pt} dp = 0$$

$$\int_{AB} + \int_{CD} + \int_{EF} = 0 \quad \left( \int_{BCUF} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0 \text{ по лемме Коши} \right)$$

$$CD: p = xe^{it} = -x, \quad \sqrt{p} = i\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-k i \sqrt{x}} e^{-xt} dx = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt} e^{-\frac{k}{\sqrt{x}}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(2)

анализирую EF

$$EF: \sqrt{p} = -i\sqrt{x}$$

$$\int_{EF} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt + k\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int_{CD} + \int_{EF} = \frac{2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \left[ \frac{e^{ki\sqrt{x}} + e^{-ki\sqrt{x}}}{2} \right] \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \cos k\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\sqrt{x} = u$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos ku du$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} \sin ku du = 0 \quad (\text{как интеграл от нечетной функции})$$

$$\text{Тогда: } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \cos ku = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} (\cos ku + i \sin ku) du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2 t} e^{iku} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-t(u - \frac{ik}{2\pi})^2 - \frac{k^2}{4\pi t}} du$$

$$= \frac{e^{-\frac{k^2}{4\pi t}}}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-tu^2} du = \frac{e^{-\frac{k^2}{4\pi t}}}{\pi \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds$$

$$= \frac{e^{-\frac{k^2}{4\pi t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

(3)

## 5.2 Несвязанная динамическая задача термоупругости

Несвязанное динамическое звено  
термоупругости

Последнее ур-е баланса импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} = 0, \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

после подстановки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Преобразование Лапласа. (температура неизменна)

$$\frac{d^2 U}{d X^2} - \frac{1}{C^2} U'' = \alpha \frac{d \Theta}{d X}$$

Самостоятельно. (расчетное звено)

Литература:

1. В.И. Даниловская. Об одной динамической задаче термоупругости прил. мат. и мех. 1952г

2. В. Новакий. Динамические задачи термоупругости. 1970г

3. А.Д. Кобленко. Термоупругость, 1978г.

Ноутбук

о роли склонений (сегментов),  
как попадающее в зону понимания  
своего будущего Директора.

(4)

### 5.3 Дельта-функция Дирака

Преобразование  $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$  - спектральная плотность

$\boxed{f(t) = e^{-j(\omega - \omega_0)t}}$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - \omega_0)t} dt$$

и почему плюс?

Выводим правило  $\sum$  - суммы

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y) \delta(y - y_0) dy = h(y_0)$$

Следует в соответствии с правилом суммы  $h$  ее  
значение в т.  $y_0$  (Фурье-анализ)

Особенности суммы

1. B. C. Владимиров Ур - я математика

2. A. B. Омельченко Методы и средства

предупреждения в задачах математической

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

$$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

- спектральная плотность

Мне уже используется для  
описания плотности единичной  
массы или заряда

$$\rho = m \delta(x-a)$$

$$\int m \delta(x-a) dx = m$$

(5)

## 5.4 Функция Грина. Функция Грина для одномерного оператора Д'Аламбера

Вернёмся к примеру с одной степенью свободы:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = P_0 \delta(t-0) \quad (P_0 = 0.1 - \text{динамический импульс})$$

Нулевое начальное значение:

$$(\omega_0^2 + \omega_0^2) q^{(0)} = 1, \quad \int_0^\infty \delta(t-0) e^{-\rho t} dt = 1.$$

$$q^{(0)} = \frac{1}{\omega_0 \rho^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t =$$

$G$  — реальная система на  $\delta$ -затухание

$$q^{(0)} = \int_0^t F^{(0)}(c) G(t-c) dc$$

трансформированное выражение

Реальная система на промежуточном затухании при нулевых начальных условиях

Данное решение означает спредвентивное и где уравнение с начальными перенесениями

Найти дзумущину Грина для одномерного оператора Д'Аламбера

в бесконечной пр-ве ( $-\infty < x < \infty$ )

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(x-x')\delta(t-t')$$

Представление Фурье по направлению

(6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x^2} e^{-ixx'} dx = \frac{\partial G}{\partial x} e^{-ixx'} + i \omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x} e^{-ixx'} dx =$$

$$= i \omega [G e^{-ixx'} + i \omega \int_{-\infty}^{\infty} G e^{ixx'} dx]$$

$$\omega^2 G^F + \frac{1}{\omega^2} G_{tt}^F = e^{-ixx'} \delta(t-t')$$

$$G_{tt}^F + \omega^2 G^F = \omega^2 e^{-ixx'} \delta(t-t')$$

$$G^F = \frac{e^{-ixx'}}{\omega^2} \frac{\sin(\omega(t-t'))}{\cos}$$

Однако неподходящее выражение:

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixx'}}{\omega} \sin(\omega(t-t')) e^{i\omega d} dd =$$

$$= \frac{1}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixx'} \left( \frac{e^{i\omega(t-t')}}{2i\omega} - \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{2i\omega} \right) e^{i\omega d} dd$$

$$= \frac{1}{4\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\omega((x-x')+\omega(t-t'))}{i\omega}} - e^{\frac{i\omega((x-x')-\omega(t-t'))}{i\omega}} dd =$$

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{i\omega} dd$$

$$\text{таким образом } H((x-x')+\omega(t-t')) - H((x-x')-\omega(t-t')) =$$

$$\textcircled{E} \quad \frac{1}{2\omega} \left[ H((x-x')+\omega(t-t')) - H((x-x')-\omega(t-t')) \right], \quad t > t'$$

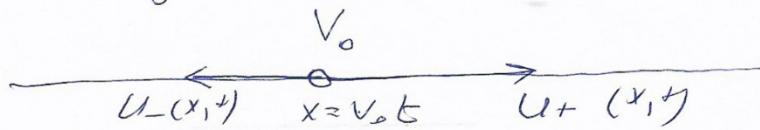
$$y = x - x', \quad \omega = t - t'$$

$$= \frac{1}{2\omega} \left[ H(y + \omega) - H(y - \omega) \right]$$

$$\textcircled{7}$$

## 5.5 Движущийся источник звука

Движущийся источник звука



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \varphi(t) \delta(x - V_0 t)$$

$$U(x, t) = \int_0^t dt' \varphi(t') \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x', t - t') \delta(x - V_0 t') =$$

$$= \int_0^t G(x - V_0 t', t - t') \varphi(t') e^{i k t'} =$$

$$= \frac{1}{2c} \int_0^t \{ H(x + V_0 t - (V_0 + c)t') - H(x - V_0 t + (c - V_0)t') \} \varphi(t') dt'$$

Неравенства:

$$\begin{aligned} x + V_0 t - (V_0 + c)t' &\geq 0 \\ x - V_0 t + (c - V_0)t' &\leq 0 \end{aligned}$$

Получим где больше, расщепление  
ом источника  $U_-$  и  $U_+$

One periodical wave zone

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t)$$

пропагострировано в зону

Донека (предыдущее условие)

(8)

## 5.6 Влияние включений на волновой процесс. Смешанный спектр

О Роль включений и их влияние на волновой процесс

В случае гладкого призела, включений (шерохов) в кристаллической решетке можно в сплошной форме представить с более простой спиралью. Начнем с более простого случая, когда имеющее значение расположение включений одинаково

$$M \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$\sigma = M \ddot{u}_0$ ,  $u_0$  - перемещение массы

Условие начальное - ?  
Установлено условие начальное  $u_0 = 4/x_{\max}$   
Возьмем единичный призел берут  $c_0 = 1/x_{\max}$   
Перемещение обозначают  
Нормировка задана

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{M \ddot{u}_0}{E} \\ u \Big|_{x=x_0} = u_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} u(0, t) = 0 \\ u(0, x) = 0 \end{array}$$

Начальное условие.

$$u = u_0 \left( t - \frac{x}{c_0} \right) H\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$$

Дополним начальную

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{c_0} \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow - \frac{1}{c_0} \dot{u}_0 = \frac{M \ddot{u}_0}{E}$$

$$\frac{M \ddot{u}_0}{E} + \frac{\dot{u}_0}{c_0} = 0 \quad (9)$$

$$\ddot{v}_0 + \frac{f_0}{M} v_0 = 0 \quad f_0 - \text{аэродинамическое сопротивление среды}$$

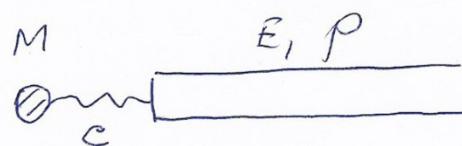
$- \frac{f_0}{M} t$

$$v_0(t) = V_0 e$$

$$u_0(t) = \frac{V_0}{\beta} \left( 1 - e^{-\beta t} \right), \quad \beta = \frac{f_0}{M}$$

Почему возникает нелинейное пронзование в консервативной системе?

Энергия переходит от массы в спортивную форму безумно больше.



$$E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = C(u - u_0)$$

перенесение к консервативной форме

Рассмотрим самовозбуждение (расчетное значение)

В замкнутом расчетном

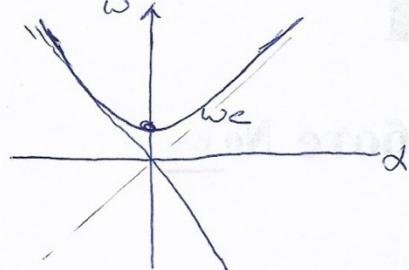
цикле - форма

(неравн. на узком основании)

(10)

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - \frac{\omega_c^2}{c^2} u = 0$$

Дисперсионное уравнение:  $\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_c^2}$



Расеяние

специальную задачу  
при напрямом методе

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{M \ddot{u}_0}{E}$$

$$\begin{aligned} u &= A(x) e^{i \omega t} \\ A_{xx} + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) A &= 0 \end{aligned}$$

Расеяние имеет  $\omega < \omega_c$

$$A_{xx} - \frac{1}{c^2} (\omega_c^2 - \omega^2) A = 0 \quad \text{ищем}$$

$$A_{xx} - \gamma^2 A = 0, \quad \gamma^2 = \frac{1}{c^2} (\omega_c^2 - \omega^2)$$

$$A = a e^{-\gamma x} + b e^{\gamma x} \cdot \begin{array}{l} \text{(условие} \\ \text{имеет} \\ \text{чтобы} \end{array}$$

$$u(x,t) = u_0 e^{-\gamma x} e^{i \omega t}$$

Данное решение имеет логарифмический  
характер

Если  $M \omega_0 \ll E$ , то имеем краткое  
решение

Из условия нейтральности

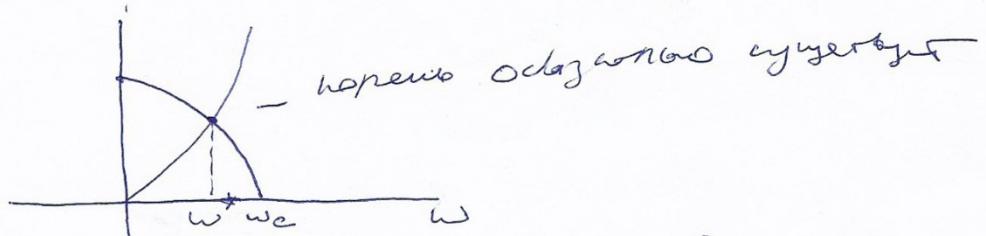
$$\frac{dA}{dx} = - \frac{M \omega^2 u_0}{E}$$

$$-\gamma u_0 + \frac{M \omega^2 u_0}{E} = 0$$

$$(-\gamma + \frac{M \omega^2}{E}) u_0 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{составляющая} \\ \text{однозначно } 0! \end{array}$$

11

$$-\frac{1}{c} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} = \frac{M\omega^2}{E}$$



$\Rightarrow$  Начинается однозначное существование  
при беге к существованию дисперсионной  
рекорд  $\omega^* < \omega_c$ . На оси спектра  
наиболее дисперсионное зерно

(смещанием склоняется)

Кообр. форма  $u(x, t, \omega^*) =$

$$= e^{i\omega^* t} e^{-\frac{x}{c} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} \quad - \text{ненулевое}$$

однозначная форма в месте, где

существует Решение

расщепление сдвиге. Конечное

нечастичное сдвиге. Решение

расщепление, пока нет.

12

## 6 Лекция 22.03.2022.

### 6.1 Небольшое замечание к задаче

Замечание по задаче!

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = F_0 \cos(\theta - \phi)$$

$$(p^2 + \omega_0^2) q^L = \frac{F_0}{p}, \quad f(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \quad \Phi'(\lambda) \neq 0$$

$$q^L = \frac{F_0}{p(p^2 + \omega_0^2)}, \quad f(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\Phi(\lambda)}$$

$$\Phi' = p^2 + \omega_0^2 + 2p^2 = 3p^2 + \omega_0^2$$

$$\text{Осение осин} \quad \lambda^2 = \pm i\omega_0, \quad p=0$$

$$q = \sum_{\lambda} \operatorname{Res}_{\lambda} f(\lambda) = \frac{F_0}{\omega_0^2} + \frac{F_0}{2\omega_0^2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) =$$

$$= \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t)$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{b} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -q}$$

$$u^L = \frac{c^2 q}{p^3} \left[ \left( \operatorname{ch} \frac{px}{c} - 1 \right) \operatorname{sh} \frac{px}{c} - \operatorname{ch} \frac{px}{c} \operatorname{sh} \frac{px}{c} + \operatorname{sh} \frac{px}{c} \right]$$

$$p = i\omega, \quad p = 0$$

$$\Phi'(p) = 3p^2 \operatorname{sh} \frac{px}{c} + p^3 \operatorname{ch} \frac{px}{c} \frac{e}{c}$$

В т.  $p=0$ . Поправление формулы (4) неиз

лучше результат улучшил в раз  $\approx$   
нужно смотреть при  $p \approx 0$ .

## 6.2 О стационарных решениях

22. 03. 22 Лекция 6

### О стационарных решениях

Система с одинаковой степенью свободы:

$$\ddot{q} + 2\eta \dot{q} + \omega_0^2 q = f_{\text{вн}}^{\text{int}}$$

$$q = A(\omega)e^{i(\omega t - \phi)}$$

- установившийся режим  
здесь для каждого уравнения

аналогично:

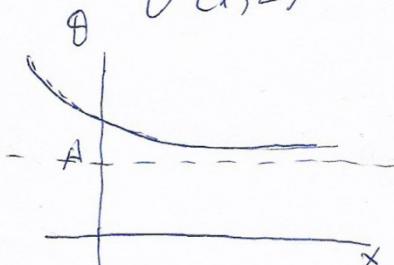
$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

$$\theta = f(x - vt) = f(\xi), \quad \xi = x - vt$$

$$-cvf' = kf'' \quad \text{Интегрируем}$$

$$f(\xi) = A + Be^{-\frac{cv}{k}\xi}$$

$$\theta(x, t) = A + Be^{-\frac{cv}{k}(x-vt)}$$



A - температура среды на  
дальнем расстоянии, когда  
тепло еще не было  
Решение такого вида

описывается, например, прогрев бензина,  
но некоторую со временем в распределении  
брюхов геометрическим законом, где  
реально поддерживается постоянная

$$f(x - vt) \Big|_{x=vt=0} = \theta_0$$

①

Также решим методом замиания в базе  
 $\Theta(x,t) = \Theta_\infty + (\Theta_0 - \Theta_\infty) e^{-\frac{C_0}{EJ}(x-2vt)}$

Еще один пример: Равномерное сжатие  
 пружины на длине, равной её длине  
 в покое

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = P(x,t)$$

$$P = P_0 \delta(x - vt) = P_0 \delta(s)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 y = \frac{P_0}{EI} \delta(s)$$

$$y = f(x - vt) = f(s)$$

$$f'_+ + 2\alpha v^2 f''_+ + b^2 f_+ = 0 \quad s > 0$$

$$f'_- + 2\alpha v^2 f''_- + b^2 f_- = 0 \quad s < 0$$

Пр. уч.: so  $f_+ = f_-$ ,  $f'_+ = f'_-$ ,  $f''_+ = f''_-$   
 $f'''_+ - f'''_- = \frac{P_0}{EI}$  (уч. корр.)

Расщемим зигзаг:

Дисперсионное соотношение для зигзага:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 y = 0$$

-id x int

$$y \sim e^{i \omega x}$$

$$c_0 = \frac{\omega}{2} - ?$$

(2)

### 6.3 Метод предельного поглощения

#### 6.3.1 Функция Грина статической задачи

После ножемановки:

$$\omega^2 - 2\alpha \omega^2 + b^2 = 0$$

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 = \frac{b^2 + d^2}{2\alpha d^2} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{b^2 + d^2}{2\alpha d^2}}$$

$$\frac{dc}{dd} = 0 \Rightarrow d^* = \sqrt{b}$$

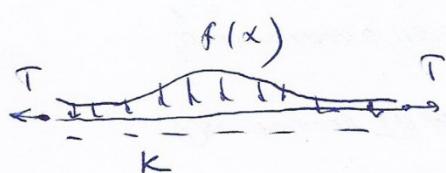
$$c_{\text{крит.}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{kb}}{P}}$$

При выполнении расчета  
значение определять приблизительно нагрузкой. Как оно связана  
с критической склонностью?

Метод предельного поглощения  
функции Грина

Рассмотрим статическую задачу  
о проникновении струи в неупругое  
основание:

$$Tu_{xx} - Ku = f(x)$$



$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty}$$

Сделаем интегрирование

предварительное  
представление

$$f^F = \int_{-\infty}^{\sigma} f e^{-idx} dx$$

Функция на конечном:

(3)

$$\begin{aligned}
 & T \left[ u(x) e^{\int_{-\infty}^{-idx} -\alpha dx} + i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-idx} \right] = \\
 & = T \left[ u(x) e^{\int_{-\infty}^{-idx} -\alpha dx} + i\alpha u(x) e^{\int_{-\infty}^{-idx} -\alpha dx} - \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-idx} \frac{dx}{i\alpha} \right] \\
 & (-T\alpha^2 - k) u^F = f^F \Rightarrow u^F = -\frac{f^F}{k + T\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Одноточечное преобразование Фурье:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^F(\alpha) e^{idx} d\alpha$$

$$u^F = -\frac{i}{T} \frac{f^F}{\alpha^2 + \alpha^2}, \quad \alpha^2 = \frac{k}{T}$$

$$\text{Если } \frac{1}{\alpha^2 + \alpha^2} = \varphi(x), \text{ то}$$

$$f^F \varphi^F = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) \varphi(s) ds$$

сверху

(Бесконечное преобразование Фурье)

$$u_\delta^F = -\frac{1}{\alpha^2 + \alpha^2} \frac{1}{T} - \text{преобразование Фурье}$$

или прямое

сигналы при получении  $\delta$ -функции

$$u_{\pi x} - \bar{K}u = \frac{\delta(x)}{T}, \quad \bar{K} = \frac{k}{T}$$

$$\text{Тогда: } u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) u_\delta(s) ds$$

Также очевидно  
реакции стимулов на релаксационные

(4)

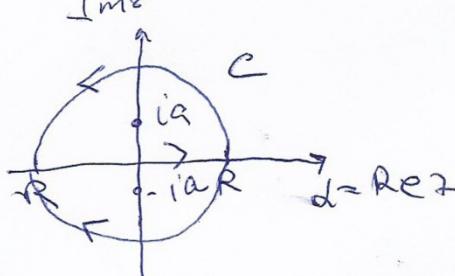
Её пришёл первый гипотетический Грина

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^F e^{ixz} dz = -\frac{i}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izx}}{z^2 + a^2} dz$$

Для вычисления интеграла

перенесём в комплексную плоскость.

$$\hat{J} = \int_C \frac{e^{izx}}{z^2 + a^2} dz, \quad C - \text{замкнутый контур}$$



при  $x > 0$  контур замкнут на

верхнюю полуплоскость,  
а при  $x < 0$  - на нижнюю.

$$\hat{J} = \int_{CR^+} F(z) dz + \int_{-R}^R F(z) dz \quad \text{при } x > 0$$

$$\hat{J} = \int_{CR^-} F(z) dz + \int_{-R}^R F(z) dz \quad \text{при } x < 0$$

Имеем при малом радиусе контура

$$\text{по теореме Коши} \quad \int_{CR^+} F(z) dz \xrightarrow[R \rightarrow 0]{=} 0$$

$$\hat{J} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=ia} F(z) = \frac{-2\pi i e^{ixa}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ax}$$

$x > 0$

$$\hat{J} = -2\pi i \operatorname{res}_{z=ia} F(z) = \frac{\pi}{a} e^{ax}$$

$x < 0$   $\Rightarrow$  остаток контура в реальной плоскости

$$\hat{J} = \frac{\pi}{a} e^{-ax}$$

(5)

## 6.3.2 Функция Грина динамической задачи

Изв:  $\psi(x) = -\frac{1}{\omega \tau} \hat{f} = -\frac{1}{2\omega \tau} e^{-\alpha|x|}$   
 - функция Грина  
 (статика)

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \psi(\xi) d\xi$$

Рассмотрим теперь динамическую задачу:

$$\Gamma u_{xx} - p(x) u_{tt} - k(x) u = 0$$

$p$  и  $k$  зависят от  $x$  и времени!

Рассмотрим стационарную задачу

$$u(x,t) = U_0(x) e^{int}$$

$$\text{Тогда: } U_{0xx} + \frac{\omega^2}{\Gamma} p(x) U_0 - \hat{k}(x) U_0 = 0$$

$$U_{0xx} + U_0 \left( \frac{\omega^2 p(x)}{\Gamma} - \hat{k}(x) \right) = 0$$

$$\boxed{p(x) = p_0 + \tilde{p}(x), \quad k(x) = k_0 + \tilde{k}(x)}$$

$$U_{0xx} + \frac{1}{\Gamma} [\omega^2 - \omega_c^2] U_0 = \frac{1}{\Gamma} [\tilde{k}(x) - p_0 \tilde{k}(x) \omega^2] U_0$$

$\uparrow$  неизвестно

Недавние струны.

Могут ли серии включать через роль источника небольшой?

⑥

Поставим в пределе есть  $\frac{1}{\pi} \delta(x-\xi)$

$\xi$  - тоже приложение

int

$$\frac{1 \cdot \delta(x-\xi)}{\pi} e$$

тогда получим

$$U_{0x} + \frac{1}{C_0} U_0 (\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{\pi} \delta(\omega - \xi)$$

Если мы зайдем в начальную форму

форму Грина, то решем исходное  
уравнение с неоднородным в предел

затем можно записать в виде:

$$U_0(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x, \xi, \omega) [k(\xi) - \omega^2 \rho(\xi)] U_0(\xi) d\xi$$

Интегрируем уравнение  $\Phi$  раздельно

II рода с исключением пределами

Интегрируем уравнение  $\Phi$  пределом имеем форму

$$y(t) = \lambda \int_a^b k(x, \xi) y(\xi) d\xi + g(x)$$

если  $g(x) = 0$ , то имеем однородное уравнение

Теорема: Либо однородное уравнение

имеет однозначное решение либо не имеет

затем  $g$ , либо однородное уравнение

имеет не единственное решение

имеет единственное решение ( $\lambda_n$  - собств.

значение,  $y_n$  - соответствующее значение) ⑦

Если  $K(x, \xi)$  - симметрическое ядро,  
то убеждаю, что спектр содержит лишь  
единственный действительный и вещественный,  
а собственное значение ортогонально  
решению момента представлена в виде

$$\text{решение } y = \sum g_k y_k$$

$$\text{равнение } y = \frac{1}{C^2} (w^2 - w_c^2) = \frac{\delta(x-\xi)}{T}$$

$$\text{Вернемся к } y^{n-10}: \quad U_{0xx} + \frac{1}{C^2} (w^2 - w_c^2) = \frac{\delta(x-\xi)}{T}$$

$$\text{Если } w < w_c, \text{ то борька норма,}$$

в противном случае решение - это дзиге  
Более  $U_0$  - комплексное

Нормируя значение Грина момента как  
вещественный, так и комплексный

$$\text{Берём преобразование Фурье, } \int_{-\infty}^{\infty} U_{0xx} e^{-idx} dx =$$

$$= U_{0x} e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + id \int_{-\infty}^{\infty} U_{0x} e^{-idx} dx =$$

$$= U_{0x} e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + id U_0 e^{-idx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - d^2 U_0^F$$

Мы же момент приравниваем нулю

Последнее выражение  $y$  нас  
консервативные задачи, более не  
занимаю.

(8)

### 6.3.3 Применение метода предельного поглощения

Используем метод предельного поглощения:

Введём такое выражение:

$$\text{Будо: } G_{xx} - \frac{1}{\omega^2} G_{tt} - kG = \frac{i}{T} \delta(x-\xi) e^{i\omega t}$$

$G$  — сумма Грина (консервативная форма)

$$\text{Генеря } G_{xx}^{(\varepsilon)} - \frac{1}{\omega^2} G_{tt}^{(\varepsilon)} - \varepsilon G_t - kG = \frac{i}{T} \delta(x-\xi) e^{i\omega t}$$

Мы видим на схеме явное выражение:

$$G^{(\varepsilon)}(x, t) = G_0^{(\varepsilon)} e^{i\omega t}$$

$$G_0^{(\varepsilon)} + \int \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega^2) - i\omega \varepsilon / G_0^{(\varepsilon)} = \frac{i}{T} \delta(x-\xi)$$

Определим другое представление:

$$-d^2 G_0^{(F(\zeta))} - p^2 G_0^{(F(\zeta))} = \frac{i}{T} e^{-i\omega \xi}$$

$$p^2 = i\omega \varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\text{или } -(\omega^2 + p^2) G_0^{(F(\zeta))} = \frac{i}{T} e^{-i\omega \xi}$$

$$G_0^{(F(\zeta))} = -\frac{i}{T} \frac{e^{-i\omega \xi}}{\omega^2 + p^2}$$

(9)

$$G_0^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-s)}}{\omega^2 + p^2} d\omega$$

Две формулы интеграла переданы

в монографии Плосковой:

$$z_{1,2} = \pm pi = \pm (A + iB)i$$

$$z_1 = -B + iA, \quad z_2 = B - iA$$

$$p^2 = A^2 - B^2 + 2iB = i\omega\varepsilon - \frac{1}{L^2}(\omega^2 - \omega_c^2)$$

Найдем виницые значения и вен. частоты, имеем:

$$\begin{cases} A^2 - B^2 = -\frac{1}{L^2}(\omega^2 - \omega_c^2) = a, \quad a < 0 \text{ при } \omega > \omega_c \\ 2AB = \omega\varepsilon \Rightarrow B = \frac{\omega\varepsilon}{2A} \end{cases}$$

Подставим в первое ур-е

$$A^2 - \frac{\omega^2\varepsilon^2}{4A^2} - a = 0 \Rightarrow A^4 - aA^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\omega^2 \approx 0$$

$$A_{1,2}^2 = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\omega^2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}|a|\left(1 + \frac{\varepsilon^2\omega^2}{2a^2}\right)$$

Рассмотрим случай  $\omega > \omega_c$ ,  $a < 0$

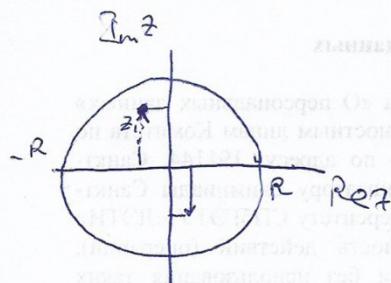
Тогда нас устроит только:

$$A^2 = -\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4a} \Rightarrow A = \frac{\varepsilon\omega}{2\sqrt{|a|}}, \quad B = \sqrt{|a|} =$$

$$= \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{6}$$

(10)

Изобразим  $z_1$  и  $z_2$  на плоск. комплексн.



Если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то полоса

лежит на бегущей оси  
их сумма отходит

Возможна и вариация:

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)

Бегущее менее граничное полоса

(Рисунок строен;  
и бегущей оси. (Рисунок строен;  
для симметрии не берутся успомянутые ранее)

При  $x > \xi$  бегущую ось замыкаем

на верхнюю полуокружность, а при

$x < \xi$  — на

нижнюю.

Используем

равенства, получим;

$$G_0^{(c)} = -\frac{1}{2\pi i} \begin{cases} 2\pi i \frac{e^{iz_1(x-\xi)}}{2z_1}, & x > \xi \\ \theta_{2\pi i} e^{\frac{iz_2(x-\xi)}{2z_2}}, & x < \xi \end{cases}$$

одног. по засечкам спрятано

11

Переход в предел  $\varepsilon \rightarrow 0$   $z_1 = -B$ ,  $z_2 = B$

$$G_{\phi} = -\frac{1}{T} \begin{cases} \frac{i e^{-iB(x-\xi)}}{-2B}, & x > \xi \\ \frac{i e^{iB(x-\xi)}}{2B}, & x < \xi \end{cases} \quad (1)$$

$$B = \sqrt{|k|} = \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \frac{1}{C_0}$$

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{i e^{-iB(x-\xi)}}{2B}, & x > \xi \\ \frac{i e^{iB(x-\xi)}}{2B}, & x < \xi \end{cases}$$

$$\text{Тогда } G_{\phi}(x, \xi, \omega) = \frac{i \cancel{\infty}}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \rho C_0} e^{-i|x-\xi| \frac{1}{\cancel{\infty}} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} =$$

$$= \frac{i e^{-i|x-\xi| \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\rho C_0}}}{2 \rho C_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

$$G(x, t, \omega) = \frac{e^{-i|x-\xi| \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\omega}}}{2 \rho C_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{i\omega t} =$$

$$= e^{i\omega(t - \frac{|x-\xi|}{\rho C_0})} \frac{i}{2 \rho C_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} - \text{нормированная величина}$$

$$G_p = \frac{\omega C_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

Следовательно  $\omega < \omega_c$  — самодоверенно!

(12)

## 7 Лекция 29.03.2022.

### 7.1 Повторение метода предельного поглощения

29.03.22. Лекция 7

Вспомним материал предыдущей лекции

$$G_{xx}^{(\varepsilon)} - \frac{1}{\omega^2} G_{yy} - \underline{\varepsilon G_t} - \tilde{K} G = \frac{i}{T} \delta(x-s) e^{i\omega t}$$

$$G_{xx}^{(\varepsilon)}(x,t) = G_{yo}^{(\varepsilon)} e^{i\omega t}$$

$$G_{yo}^{(\varepsilon)} = -\frac{1}{T} \frac{e^{-i\omega s}}{\omega^2 + p^2}, \quad p^2 = i\omega\varepsilon - \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

$$\omega > \omega_c$$

$$G(x,t,\omega) = e^{i\omega(t - \frac{|x-s|}{c_0})} \frac{i}{2\rho_0 c_0 \sqrt{\omega - \omega_c^2}}$$

$$c_0 = \frac{\omega c_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad - \text{зависимость групповой скорости от частоты}$$

- синтез синусоидальной волны с помощью касательного

Перейдём к случаю  $\omega < \omega_c$

$$G(x,t,\omega) = -\frac{1}{2\rho_0 c_0 \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} e^{-i|x-s|\sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{c_0}}} e^{i\omega t}$$

- синтез Грина (неконтинуированное решение)

Вернёмся к исходному ур-ию

с неоднородностью:

$$f(x) = f_o + \tilde{f}(x), \quad K(x) = K_o + \tilde{K}(x)$$

①

$$u_{xx} - \frac{1}{b^2} u_{tt} - k_0 u = \frac{1}{\rho b^2} [k(x)u + p(x)u_{tt}] \quad -\infty < x < \infty$$

Существует ли дисперсионный спектр для  
затухающих решений?

Рассмотрим спектральное зерно

$$u(x,t) = U_0(\omega) e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{0xx} + \frac{1}{b^2} (w^2 - w_c^2) U_0 = \frac{1}{\rho b^2} (k(x) - p(x)b^2) U_0$$

Если члены в граничных условиях Грина, то  
нахождение  $U_0$  сводится к пространству:

$$U_0(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, \xi, \omega) \Phi(\xi, \omega) U_0(\xi, \omega) d\xi$$

Вместо исходного дисперсионного  
уравнения с неоднородностью в превращении  
затухающих решений получим интегральное  
уравнение:  $y(x, \omega) = \omega \int_a^x K(x, \xi) y(\xi, \omega) d\xi$

Если ядро  $K(x, \xi)$  симметрическое и вещественное,  
то уравнение имеет характеристика  
вещественный дисперсионный спектр, а  
и вещественные корни сопровождающие  
им вещественные собственные значения.

(2)

При  $\omega > \omega_c$

$$G_{\alpha}(x, \xi, \omega) = -\frac{i}{2\rho_0 c_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} e^{-i \frac{|x-\xi|}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

Здесь элемент отдачи волн действует  
исключительно в виде излучения.

Для расчета отдачи  $\omega < \omega_c$

$$G_{\alpha}(x, \xi, \omega) = -\frac{1}{2\rho_0 c_0} e^{-i \frac{|x-\xi|}{c_0} \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

сюда волна

это поглощена

?!: Генерация прерывистая, генерация волны неизвестна  
(поглощение падающей)

Проверка: если у нас имеется  
непрерывное поле волны, то у нас  
есть наше выражение для генерации  
затемна:  $K(\omega) = \tilde{f}(\omega) = M\delta(\omega)$

$$\text{Тогда: } \mathcal{V}_0(x, \omega) = -\omega^2 G_{\alpha}(x, 0, \omega) M \underbrace{\mathcal{V}_0(0, \omega)}_{\text{помеха}} \text{ по излучению}$$

Фундаментальное свойство дельта-функции:

$$\int_a^b f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

③

Условие местного минимума  
массы со спиралью:



$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x, \omega) = U_0(\omega)$$

Положим в начальном решении  $x = 0$

$$U_0(0, \omega) [1 + \omega^2 G_0(0, 0, \omega) M] = 0$$

$$1 - \frac{\omega^2 M}{(2) \rho_0 G_0 \sqrt{w_c^2 - \omega^2}} = 0$$

Аналогичный результат уже  
был получен выше,  
но в этом рассмотриваемом  
случае для конечной спиральной  
массы на горизонте

Приближение 2 в  
значительной степени не применимо  
из-за конечной массы  
и конечного промежутка ( $-\infty < x < \infty$ )

(4)

## 7.2 Примеры волн в различных средах

### 7.2.1 Термоупругие волны

Примеры волн в различных средах

#### 1. Термоупругие волны

Баланс импульса

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} = 0, \quad \sigma = E(\varepsilon - \alpha \theta), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{или}$$

после выразив уравнение

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho c v \ddot{\theta} = E \alpha \dot{\varepsilon} \end{array} \right. \quad \text{где } \varepsilon \text{ в градусах}$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \ddot{\theta} = \frac{\rho c v}{K} \dot{\varepsilon} \quad \text{условие связности.}$$

После присоединения к дифференциальным уравнениям этого перенесем  $\ddot{\theta}$   
переменную в этом перенесем  $\ddot{\theta}$   
после малой величиной, и при  
рассмотрении звуков или звука преобразуют  
(Использование - получившееся выражение)

Если преобразовать связность, то  
температура определяется квадратично  
и имеет вид  $\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} \alpha \dot{\varepsilon} t^2$   
(Приемное значение, преобразованное  
а)

(5)

Что даёт уравнение длины перемены?

Какое значение оно имеет

Получим второе производное от  
перемены в первом уравнении

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} (\dot{\gamma} \dot{\xi} + \ddot{\theta})$$

Возможные первые производные по времени:  
Возможные первые производные по времени:  
заявление термодинамики изменяется.

Отметим, что зная производную  
перемены при наличии температуры  
можно

если производная  $a^2$ , то более

высокие производные  
изменяются

и высокие производные  
изменяются

соответствующими  
поправками

Причина: чем выше  
относительная  
изменение

(6)

## 7.2.2 Плазменные волны

## 2. Плазменные волны

Для описание распространение волн малой амплитуды используется метод сферичноческой гармоники, в рамках которого плазма представляется смесью электронов и ионов нулевой температуры с одинаковым давлением, имеющим вид:

$$\rho = n k_B T$$

Такое упрощение дает и ионов имеющих

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i = - \nabla \left( \frac{n_i k_B T_i}{m_i n_i} \right) - \frac{e}{m_i} \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla \vec{v}_e = - \nabla \left( \frac{n_e k_B T_e}{m_e n_e} \right) + \frac{e}{m_e} \nabla \Phi$$

+ упрощение непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0$$

непрерывность  
представляет  
рассмотренные  
и ионизированные

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0$$

$$+ \Delta \Phi = - \frac{e(n_i - n_e)}{k_B} - упрощение.$$

Рассмотрим одномерный случай.  
Так как  $m_i \gg m_e$ , то для ионов можно  
записать неподвижную и не  
изменяющуюся в пространстве

(7)

Две новых безразмеримости:

$$Pe = P_0 + p' \quad n_e = n_0 + n'$$

Число вихревое относительно нейтрального состояния.

$$Pe = P_0 + n_e m_e^2 \frac{\partial \varphi}{\partial P_0} \quad (Pe = f(Pe))$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P_0} = V_0^2$$

Также уравнение новых безразмеримостей имеет

виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{V_0^2}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{e}{m_e} n_e$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

представляется теперь в виде  
функции от  $x$ , а времена — от  $t$

с тем же борьбами уравнения:

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} - V_0^2 \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + w_p^2 n' = 0$$

$$w_p^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e e_0} - \text{называемая}$$

частота определения  $V_0$ , потому уравнение

составляется в виде (записано вправо)

$$p = n k_B T \quad \text{Две определеным способы } f = 3$$

(8)

## 7.2.3 Прямоугольный волновод

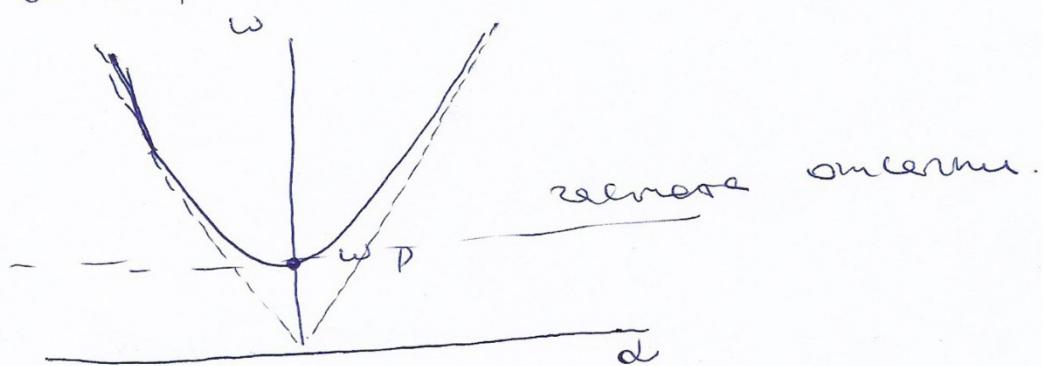
$$\text{Тогда } \frac{\partial \beta}{\partial \rho_0} = \frac{\partial \beta}{\partial (\epsilon n)} = \frac{1}{n \epsilon} \frac{\partial \beta}{\partial n} = j \frac{\beta}{n^2 \epsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial \rho_0} = \frac{3 k \epsilon T}{n \epsilon}$$

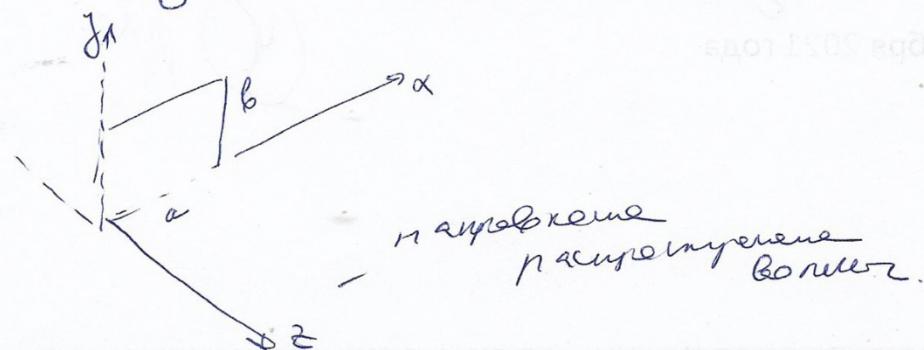
$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \omega_p^2 n^2 = 0$$

Оператор краев - Гарднера значит !  
оператор.

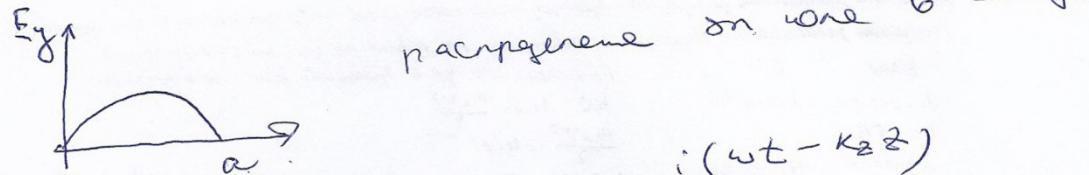
Дисперсионные кривые:



3. Прямоугольный волновод  
Рассмотрим вопрос о прохождении  
электромагнитных волн через  
трубу прямоугольного сечения



Задача №1  
 Задача №1  
 вибрации в струне  
 и она должна ограничиться в  
 концах



распределение волны в струне

$$:(\omega t - k_x z)$$

$$\text{Тогда } E_y = E_0 \sin k_x x e^{-j\omega t} - \text{проблема симметрии}$$

$$\omega = \frac{\pi}{a} - \text{первая форма.}$$

$$k_x a = n\pi \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a} - \text{первая форма}$$

Имеем для волну в струне

бесконечную форму:

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k_x^2 E_y \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -k_z^2 E_y$$

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0$$

$$\text{Однако } k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_c^2}{a^2}} \quad (\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k_z^2)$$

$$\omega_c = \frac{vc}{a}$$

(12)

$E_{cm} \omega < \omega_c$ , т.о

$$k_x = \pm i k^1, \quad k^1 = \sqrt{\frac{4}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$E_y = E_0 \sin kx e^{\pm k' z} e^{i\omega t}$$

При ~~застоях~~ ~~ниже~~  $\omega_c = \frac{eC}{a}$

Более ~~богат~~ труда не  
распределение

менее ~~застоя~~  $\Rightarrow$  замедление <sup>по</sup>  
~~времени~~

менее ~~богат~~ число  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  замедление по ~~нагружению~~.

(11)

## 8 Лекция 05.04.2022.

### 8.1 Волны в акустических средах

05.04.22. Лекция 8

#### Волны в акустических средах

Акустика в широком смысле слова -

- это наука о звуке, изучение поиска и волны в различных средах он сенсорных органах до предела и их взаимодействие с веществом.

Чтож из слов выше понимают изучение поиска и волны в различных средах, воспринимаемых генератором уха

( $16F_g = 80 \text{ дБ}$ )

Рассмотрим модель акустической среды

Это единичная среда, однородная и неизменная

Звук объема может генерировать и поглощать свет объема

Если в некотором объеме

зумрят среды вызвать нет

возмущение, то генератор

этого объема спровоцирует и придет в

этот объеме зумрят и генератор

зумрят между генератором, возникшее

взаимное действие называется переносимое

"сигналом", и возмущение будет распространяться

в среде

1

До сих пор рассматривали более в  
твёрдых материалах. Теперь поговорим о  
柔軟な材料と塑性力学。

При растяжении в плюсочку, волокна  
формируют касательное напряжение (Верхний)  
Если при этом не происходит, т.е. если они  
могут не сдвигаться с силой, то это называется  
изотропным, то иначе материал  
имеет анизотропию

Стекло (или же) неизотропные материалы, если  
они не могут в сдвиге, то  
и при растяжении отсутствуют касательные  
напряжения

$$I = -pE \quad \text{--- гидростатическое напряжение (гидростатический)}$$

(Изменение формы не реагирует)

① Упругое деформации

$\sigma_c$  - напряжение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\frac{\partial u}{\partial x}) = 0$$

есть закон сохранения объема

Если все внешние нагрузки, то  $p = m_2$

$$u \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p v) = 0 \quad \text{--- деформация}$$

и  $\frac{\partial p}{\partial t}$  изменяется так, чтобы превратить

材质

закон упругости.

②

(2) Ур-е давления

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\nabla p + \rho \bar{f} - \text{внешние силы на поверхности и гидростатическое давление}$$

Ур-е объемное напряжение:

консервативное давление,  $\sigma(p, v)$

В дополнением к в основной форме напряжения возмущение плотности и давления малыми (но неограниченном сопоставлении). В этом случае амплитуда волн стоячие незначительными, что их проникновение не влияет на область спектра

Замечание:  $I = \Theta P E$  здесь пишут

В первом месте не поддающееся напряжению расщепление. В втором нормальное напряжение меньше объемного давления незначительным сопоставлении. При этом нормальное напряжение не зависит от проникновения.

(3) Ур-е сопоставление:

$P = P(p)$  Баротропное проникновение

(3)

Таким образом, мы получим уравнение

для вектора скорости

$$\begin{cases} -\nabla p = p \frac{d\vec{v}}{dt} & \text{даное начальное} \\ & (\exists \text{ начальных } \vec{v}, \vec{r}) \end{cases}$$

$$p = p(r) \quad \vec{v} \text{ - вектор скорости}$$

( $\exists \vec{v}$ )

$$\frac{dp}{dt} + \vec{v} \cdot (\nabla p) = 0 \quad \text{данное начальное } \vec{v}$$

Начальные условия:  $p_0, \vec{v}_0$  — вектора

скорости и вектора

запишем начальную

запись аэродинамики, имея в виду что уравнение

найдено.

Следующее наблюдение — соединение

$(p_0, \vec{v}_0)$ . В этом соединении среди ненужных

$-\nabla p_0 = 0$ . Вектор скорости массы

воздуха можно исключить.

Выводимое изображение маневра

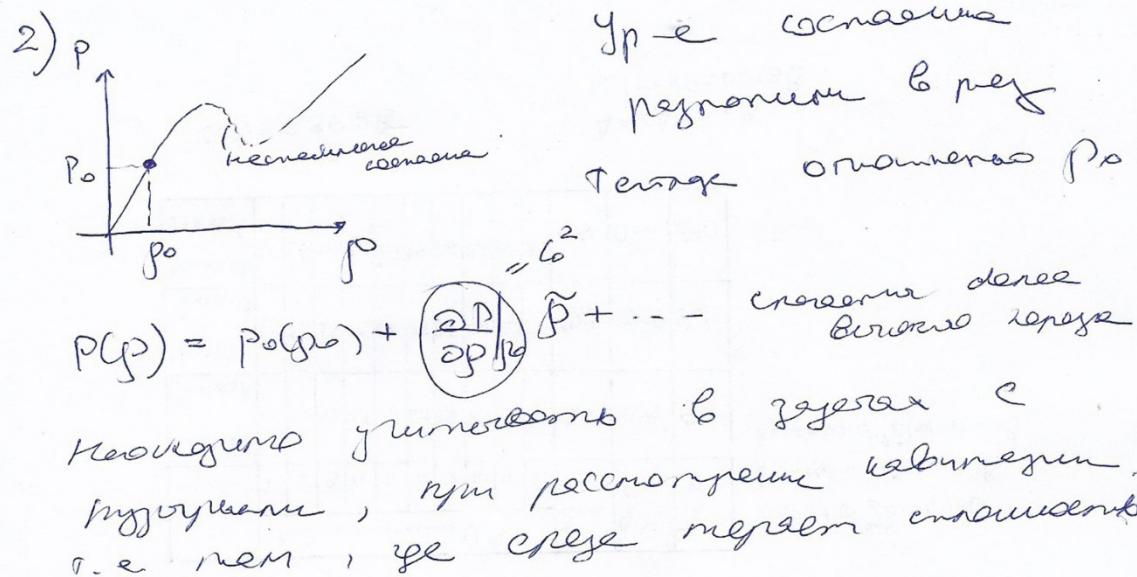
Предположим, что вложение маневра

близкое к  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}}$ ,  $p = p_0 + \tilde{p}$ ,  $\Sigma = \Sigma_0 + \tilde{\Sigma}$

$$1) \quad -\nabla(\tilde{p} + p_0) = (p_0 + \tilde{p}) \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{-\nabla \tilde{p} = p_0 \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{d\Sigma_0}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \Sigma \Rightarrow \frac{d\Sigma}{dt} = \frac{d\Sigma_0}{dt}$$

④



3) Упрощение задач:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + D(PV) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + P_0(D \cdot v) = 0$$

$D \cdot v$  - единство уравнения состояния

$\tilde{P} = -P_0 \varepsilon \theta$ ,  $\varepsilon \theta$  - обобщенное разрывное

$P = P_0(1 - \varepsilon \theta)$ . При расширении  $\varepsilon \theta > 0$

напряжение уменьшается, а при сжатии ( $\varepsilon \theta < 0$ ) - возрасает.

Таким образом,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \tilde{P} = P_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \text{давление сопротивления} \\ \tilde{P} = l_0^2 \tilde{P} - \text{упрощение} \end{array} \right.$$

износ  
линейное  
уравнение

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -P_0 D \cdot v - \text{давление сопротивления}$$

(5)

Для тела двухстепенное ур-е  
линейное (первое звено) и кинематическое  
Возможны гибридные от линейных и  
нелинейных звеньев первого звена

$$\nabla \cdot (-\tilde{p}) = p_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi \cdot \tilde{v}$$

С первым приведено уравнение

$$\Delta \tilde{p} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} \Rightarrow \text{линейное ур-е}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \tilde{p} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0} \quad \text{- линейное ур-е}$$

$$\tilde{p}_r = \text{запись Дарси}$$

кинематическое ур-е: Второе звено  
 $\tilde{v}$  - скорость перемещения, так что  $\tilde{v} = \nabla \Phi$

Теорема Генуя:  $\dot{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \underline{A}$

$\Phi$  - кинематический потенциал,  $\underline{A}$  - векторный  
потенциал, при этом  $\nabla \Phi$  однозначно

за исключением гибридного: сдвиги

и изменения объема  $\square \rightarrow \boxed{\square}$ , а

$\nabla \times \underline{A}$  совпадают с градиентом вектора

+ изменения формы  $\overbrace{\square}^{\square}$ .

⑥

В аэростатических средах  $\nabla \Phi$  неизм.  
 $\Sigma = \nabla \Phi$  и  $\rho_0$  балансе масы:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \Sigma \Rightarrow \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \Phi, \text{ и}$$

с учетом уравнения  $\frac{1}{C^2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\rho_0 \Delta \Phi$

$$\Delta \Phi + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = 0$$

из первого уравнения (данное из условия)

$$-\tilde{P} = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow \Delta \Phi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\Delta \Phi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0}$$

нинеинвариантное уравнение

Оператор Данаандрея

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$e^{int \ i \Delta}$  - волна в трехмерном пространстве

$d \cdot z = dx \cdot x + dy \cdot y + dz \cdot z$ ,  $d$  - вектор

вектор,  $z$  - радиус вектор точки.

$$\text{т.к. } \Sigma = \nabla \Phi, \text{ то } \Sigma_n = \Sigma \cdot n = \nabla \Phi \cdot n = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

$\Sigma_n = \nabla \Phi \cdot I$  - касательное напряжение

сопротивление мас не изменяется:  $\nabla \Phi = 0$

Следовательно уравнение  $\Sigma_n = 0 \Rightarrow$

закон Ньютона

(7)

$c_0 = \sqrt{\frac{2P}{\rho_0 P_0}}$  - скорость звука  
 Пронзившим прием звуками  
 где  $\rho_0$  - плотность  $\text{kg/m}^3$   
 $P$  - давление

$$PV\delta = \text{const}, \quad f = \frac{C_P}{C_V} - \text{отношение}\text{ теплоемкостей}$$

$$\downarrow \\ P = \text{const} \cdot \rho \delta \Rightarrow \frac{P}{\rho \delta} = \frac{P_0}{\rho_0 \delta}$$

$$\frac{dP}{\rho \delta} = \delta \frac{P_0}{\rho_0}$$

$$\text{Таким образом } c = \sqrt{\delta \frac{P_0}{\rho_0}} = \\ = \sqrt{\delta \frac{RT}{M}} \quad (\text{где } \begin{aligned} &\text{режима} \\ &\text{- начальная} \end{aligned})$$

В режимах с тем же соотношением  
 невозможно нахождение

Газ	$C_{sl, m/s}$
Водород	1265
Гелий	965
Азот	334
Водяной пар	331
Кислород	316
Temperatura $60^\circ C$	

Материал	$c, m/s$
Водя (20°C)	1480
Этилен спирт (20°C)	1180
Водя (-252°C)	1127
Азот (-156°C)	867
Гелий (-365°C)	180

(8)

## 8.2 Поверхностные гравитационные волны

Поверхностные гравитационные волны

При изучении волн в тихоходе неоднократно называлось гравитационные волны. (Скорость волн изучалась в зависимости от глубины волн.)

Давно если упрощая описание небесных тел, то можно применить метод теории, согласно распространению принципа размножения волнения где разрешимое для солнечных объектов решение.)

Изучая расстояние в гравитационной системе, в которой учитывается зависимость времени от времени от инициатором.

Однако спутник компьютерное значение зависит от глубины волн и времени спутника от глубины волн и

его изменение высоты.

Мы не будем учитывать различие времени. В качестве примера дадим волны на солнечном гравитирующим объекте солнечных гравитационных волн, где имеющие

(9)

которое определяемое взаимодействием  
между искривлением тумбами и её  
стремлением вернуться в первоначальное  
свойство тумбами в состоянии  
установленного равновесия.  
Возникнутые в тумбах напряжения, под действием  
которых в равновесном состоянии  
искривление уменьшается с увеличением  
воздушного - это будущее  
устанавливющееся состояние.  
Симметрические напряжения <sup>антидеревя</sup>  
<sup>(окна)</sup>

Симметрические состояния среди 6  
имеют и геометрических рядов равновесия  
группы из 3 (установленное равновесие),  
какие более менее среди  
находящиеся выше более позади  
также имеющие менение разницы в  
одном при переходе через изображение  
различных тумб и т.д. Возникновение  
данного равновесного состояния  
приводит в результате поверхностных  
установившихся волн, которые

(10)

не могут распространяться звено  
от извержения: они залегают не  
глубоко, так что распространение звена  
бывает.

Мы рассмотрим поверхностные  
извержения более в тесной  
связи между собой и воздушно-  
и водяные превращения сущности  
поверхностных извержений.

Картины извержения земли напоминают  
заслонки изогнувшись: земля дугой  
заслоняет изогнувшись от опускания.  
т.е. мы имеем землю со складами  
продолжения и концами боров.

Изогнута.

1. Днестровье Ланыхин. Волна в  
мигнации. 1928 г.
2. Греф Ламб. Гидрография, 1932 г.

(11)

## 9 Лекция 12.04.2022.

### 9.1 Краткое повторение материала о волнах в акустических средах

12.04.22 Лекция 9

Вспомним материал предыдущей лекции  
На основе базисных уравнений:

$$-\nabla p = p \frac{dV}{dt} \quad -\text{давление импульса}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + D(p, V) = 0 \quad -\text{давление массы}$$

$$+ \gamma p \cdot e \quad \text{сжатие}$$

$$P = P(p)$$

или получим классическое линейное  
упругое акустическое поле относительно  
исходного равновесия состояния  $P_0, P_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \tilde{p} = P_0 \frac{\partial V}{\partial t} \\ \tilde{p} = C^2 \tilde{V}, \quad C^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} |_{P=P_0} \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = -P_0 D \cdot \tilde{V} \end{array} \right.$$

Давление этого упругого сжатия  $\propto 10^{-10}$   
Основное из физ. понятий:

Скорость:  $\Delta \tilde{p} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0$

Гр. упр.  $\tilde{p}|_r = \Phi^{(\pm)} - \text{затухание}$  Движение

Кинематика:  $\Delta \tilde{V} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} = 0$

$V_r = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}|_r = \Phi^{(\pm)} - \text{затухание}$  Кинематика

Частота  $\omega = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} - \text{помощь для определения}$



## 9.2 Поверхностные гравитационные волны на границе между водой и воздухом

при условии отсутствия вихревого  
движения в среде.

На основе этих ур-й можно получить  
уравнение для поверхности волны  
на границе между водой и воздухом.  
Их движение определяется исключительно  
взаимодействием между инерцией жидкости  
и её стремлением вернуться  
в исходное состояние течения в  
новоупомянутом равновесии.  
Составление уравнения равновесия

Если движение неискаженное, то  
 $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ ,  $v = \nabla \varphi \Rightarrow$

$$\Delta \varphi = 0 \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$  - условие на непроницаемую  
поверхность

Чтобы найти условие на  
свободной поверхности в замкнутом  
и аэро координат на непроницаемой  
уровне и направлении оси  $dy$   
бермиксию вверх

(2)



$h$  - глубина ворёма

Запишем ур-е для гидростатического давления на вертикальную ось:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - g$$

Насл. интегрирование с учётом небольшой  $\Delta \psi = \nabla \varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - gy + C(t) \quad \text{начальное значение}$$

На поверхности:  $y = \eta$

$\eta$  - возведение поверхности над морем ( $x_0$ )

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - g\eta + \frac{P_0}{\rho} - \text{видор } C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \text{при } y = \eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \omega_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases}$$

После дифференцирования 1 ур-е по времени имеет

(3)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

*б) амплитуда*

*задачи ( $y$ -макс) начальное условие  
составлено на первом изученном  
периоде*

Так как при всех значениях  $x$  начальное  
условие одинаково, то будем  
использовать

$$y = f(y) \cos(\omega t - dx)$$

$$y \text{ устойчивое при } \omega: \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow f'' - d^2 f = 0$$

*Решение + начальное условие  
составлено в корене  
уравнение*

$$f = Ae^{dx} + Be^{-dx}$$

$$1. \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0 \Rightarrow$$

$$Ae^{-dh} - Be^{dh} = 0$$

$$\boxed{Ae^{-dh} - Be^{dh} = 0}$$

(4)

$$2. \quad \ddot{\varphi} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

$$-(A+B)\omega^2 + gd(A-B) = 0$$

$$\begin{cases} (gd - \omega^2)A - B(\omega^2 + gd) = 0 \\ e^{-\alpha h}A - Be^{\alpha h} = 0 \end{cases}$$

Полные динамические зависимости  
самоизменения в краевом уравнении

$$\Delta = 0 \Rightarrow (gd - \omega^2)e^{\alpha h} = (\omega^2 + gd)e^{-\alpha h}$$

$$\omega^2(e^{\alpha h} + e^{-\alpha h}) = gd(e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{gd} \sqrt{\tanh(2h)}$$

Если однозначно  $\sqrt{gd} = \omega_0$  - коэффициент, то

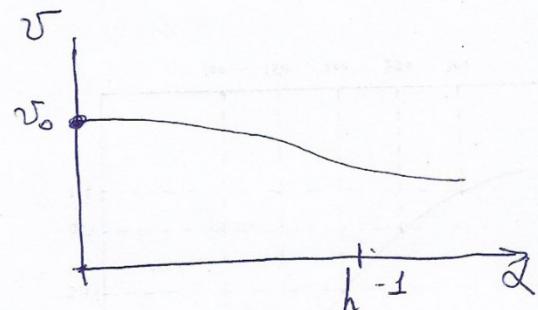
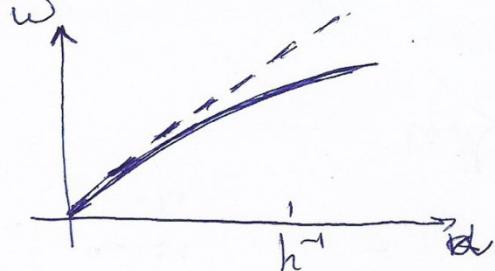
$$\omega = \omega_0 d \left( \frac{\tanh(2h)}{2h} \right)$$

$$\nu = \frac{\omega}{2} = \omega_0 \left( \frac{\tanh(2h)}{2h} \right)^{1/2}$$

- гравитационные коэффициенты

(5)

Графике зупинки:



Если угловое разд.  $\omega h < 1$ , то  
 $\sin \omega h \approx \omega h \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 d$$

Но разд. близ. гипербол  
отсюда итог

Другое выражение:

$2h \gg 1$  близк. разд. близ.

$$\omega = \sqrt{gd}$$

$$\sin 2h \approx 1$$

Близк. разд. близ. угл. разд.  
использ. гипербол.

⑥

Вернемся к определению  $f$ :

$$\text{Если однозначно } Ae^{-\alpha h} = Be^{\alpha h} = \frac{1}{2}C, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} f &= Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y} = \\ &= \frac{1}{2}C(e^{\alpha(h+y)} + e^{-\alpha(h+y)}) = C \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \end{aligned}$$

$$\varphi = C \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{g} C \omega \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \sin(\omega t - \alpha x) =$$

$$= a \sin(\omega t - \alpha x)$$

Вспомним  $C$  разд а, имеем:

$$C = \frac{ag}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{ag}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

Максимум находим:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{ag \alpha}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha(h+y)) \sin(\omega t - \alpha x)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{ag \alpha}{\omega \operatorname{ch}(\alpha h)} \operatorname{sh}(\alpha(h+y)) \cos(\omega t - \alpha x)$$

Запоминаем

(7)

## 10 Лекция 19.04.2022.

### 10.1 Продолжаем разговор о поверхностных волнах

19.04.22. Лекция 10.

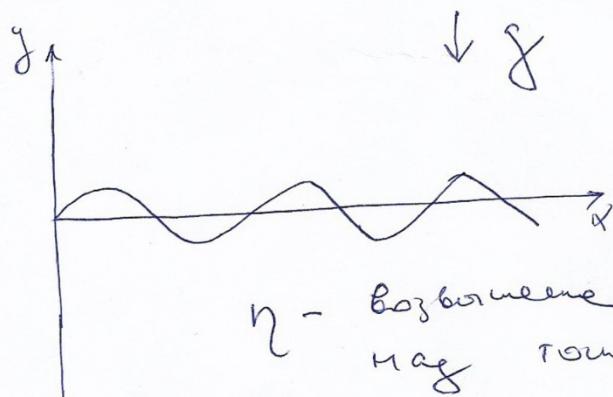
Продолжим разговор о поверхностных волнах на границе раздела  $\delta y$ .

Среды

Основные предположения

- 1. Несжимаемость
  - 2.  $\Delta \Sigma = \nabla \Psi$
- $\Delta \Psi = 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$



$\eta$  - возмущение поверхности  
на границе  $(x, 0)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$\Psi = C e^{i k y} e^{i(kt - \alpha x)}$$

Глубина тихоокеанская

①

## 10.2 Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей

Рассмотрим колебание поверхности раздела двух расположенных друг другом жидкостей

$$\varphi = C e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\varphi' = C' e^{-ikx} e^{i(\omega t - kx)}$$

штрихи относятся к верхней жидкости.

$$\eta = a e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow i\omega a = \partial C = -\partial C'$$

Ур-я Эйлера после интегрирования по оси  $y$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{\rho} - g y \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = -\frac{P'}{\rho'} - g y \end{cases}$$

На поверхности:

$$\begin{cases} P = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g \eta \\ P' = -\rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - g \eta \end{cases}$$

Принимив граничные условия, получим:

(2)

$$-\rho C i\omega - \rho g a = -\rho' C' i\omega - \rho' g a$$

$$\rho (C i\omega + g a) = \rho' (C' i\omega + g a)$$

$C$  чётом условие  $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow i\omega a = dC = -dC'$

$$-\rho \frac{\omega^2 a}{2} + \rho g a = \rho' \frac{\omega^2 a}{2} + \rho' g a$$

$$\frac{\omega^2}{2} (\rho' + \rho) = g(\rho - \rho')$$

$$\omega^2 = \frac{g a (\rho - \rho')}{\rho + \rho'}$$

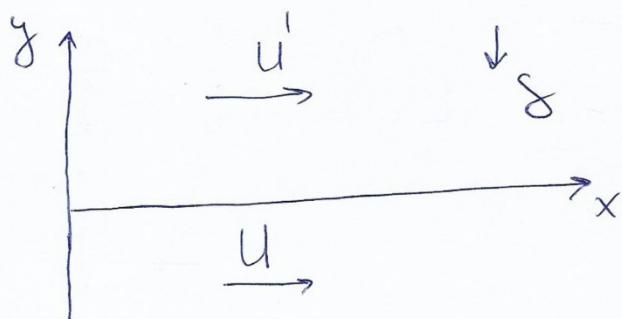
$$C_o^2 = \frac{\omega^2}{\rho^2} = \frac{g}{\rho} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$$

Таким образом, присутствие верхней эмульсии вызывает уменьшение скорости распространения волн.

(3)

### 10.3 Поверхностные гравитационные волны на границе раздела двух жидкостей, которые движутся друг над другом

Предположим, что две турбулентные пластики  $\rho$  и  $\rho'$  движутся друг над другом со скоростями  $u$  и  $u'$  параллельными оси  $x$



Нужно учесть начальную производную

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{условие не извращения}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}$$

$$\varphi = ux + \varphi_1, \quad \varphi' = u'x + \varphi'_1$$

и при  $\eta=0$

$$\frac{P}{\rho} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \sigma y$$

аналогично для верхней пластики

(4)

Из непрерывности давления на поверхности.

$$\begin{aligned} & p \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + g \eta \right] = \\ & = p' \left[ \frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + u' \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} + g \eta \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C e^{i \omega t - i a x} \\ \varphi'_1 &= C' e^{-i \omega t} e^{i (u t - a x)} \\ \eta &= a e^{i (u t - a x)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} i \omega a - u i a d = dC \\ i \omega a - u' i a d = -dC' \end{cases}$$

$$\begin{cases} i a (\omega - u) = dC \\ i a (\omega - u') = -dC' \end{cases}$$

Возвращаем к симметрии уравнения

(5)

$$\rho [i(\omega - \alpha u) c + g a] = \rho' [i(\omega - \alpha u') c' + g a]$$

Несколько выражение где  $c$  и  $c'$

$$\rho [i(\omega - \alpha u) \frac{i\alpha(\omega - \alpha u)}{\alpha} + g a] =$$

$$= \rho' [-i(\omega - \alpha u') i\alpha(\omega - \alpha u') + g a]$$

$$\rho \left[ -(\omega - \alpha u)^2 \frac{a}{\alpha} + g a \right] =$$

$$= \rho' [(\omega - \alpha u')^2 \frac{a}{\alpha} + g a]$$

$$g \alpha (\rho - \rho') = \rho (\omega - \alpha u)^2 + \rho' (\omega - \alpha u')^2$$

Можно привести к виду  
относительно  $\omega$  и нелинейные  
суперпозиции зависимости

$$(\rho' + \rho) \omega^2 - 2 \omega \alpha [\rho u + \rho' u'] + \alpha^2 (u'^2 + u^2) - g \alpha (\rho - \rho') = 0$$

6

$$C_p = \frac{\omega}{d} = \frac{pu + p'u'}{p+p'} + \left\{ \underbrace{\frac{g(p-p')}{dp+p'}}_{C_0^2} - \frac{pp'}{(p+p')^2} (u-u')^2 \right\}^{1/2}$$

$$C_0 = \bar{C} \pm d$$

$$C^2 = C_0^2 - \frac{pp'}{(p+p')^2} (u-u')^2$$

$C_0$  — скорость волны в отсутствие магнита

Значение  $\omega$  будем считать

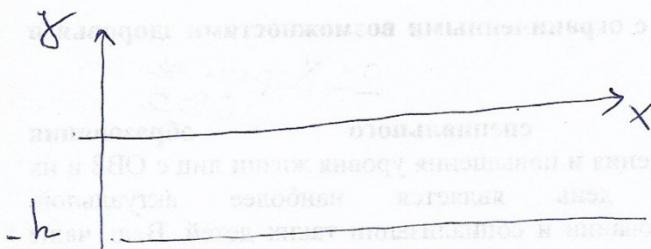
$$\text{если } (u-u')^2 > \frac{g(p-p')(p+p')}{pp'} = \\ = \frac{g(p^2-p'^2)}{2pp'}$$

Согласно при достаточно больших  $d$  или при достаточно малых длинах волны граница будет склоняться. Если  $p=p'$  то волна граница будет склоняться в обе стороны.



## 10.4 Волны на границу между водой и воздухом без учёта силы тяжести (решение Эйлера)

Возбраний к исходной по сплошные зерни.



$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad \psi = \nabla U$$

Не обен учитывать силу тяжести.

$$\psi = f(y) e^{i(kt - \omega x)}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y} - \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad \text{уравнение Эйлера}$$

но не учитывание:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{на свободной поверхности } \rho = \rho_0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

$$1. \quad \text{на свободной поверхности: } \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \Rightarrow f_y = 0$$

$$2. \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -h = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -h = 0$$

$$f'' + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \omega^2 \right) f = 0 \quad \text{или}$$

$$f'' - \frac{\omega^2}{c^2} f = 0, \quad f'' = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega^2)$$

$$f = A \sin \omega y + B \cos \omega y$$

$$f|_{y=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

(8)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow \sin j h = 0$$

Если  $j$  - нечетное, то решений нет

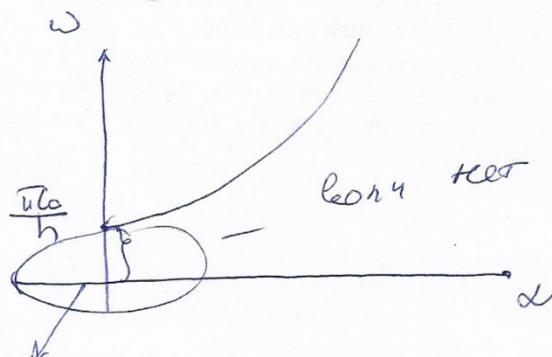
Следовательно

$$j = \frac{1}{\pi} \sqrt{d^2 - \omega^2}$$

$$j - \text{нечетное} \quad \cos j h = 0 \Rightarrow j h = \frac{\pi}{2} (2n+1)$$

$$j^* = \frac{1}{\pi} \sqrt{\omega^2 - d^2}$$

$$\omega^2 = \left( \frac{\pi(2n+1)}{h} c_0 \right)^2 + d^2$$



Небережимостное состояние

$$\omega = \sqrt{gd}$$

Дисперсионное поле  
всегда выше



(9)

## 11 Лекция 26.04.2022.

### 11.1 Волны в сферической СК. Дальнее и ближнее поле

26.04.22 Лекция 11

Для типа уравнений

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad - \text{силовое ур-е}$$

$$P|_r = \psi(t) \quad - \text{запись Дирихле}$$

$$\nabla^2 = \Delta \psi \quad - \text{кинемат. ур-е}$$

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad - \text{кинемат. ур-е}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}|_r = \psi(t) \quad - \text{запись Неймана}$$

перейдём в сферическую систему координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad - \text{оператор Планка}$$

оставим зависимость только от радиуса

$$\text{Тогда } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2}$$

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} \psi_1 \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \psi_2 \left( t + \frac{r}{c} \right)$$

Амплитуда убывает пропорционально расстоянию, что вызвано расширением поверхности фронта.

(1)

$$\varphi = \frac{1}{Z} \varphi_1 (t - \frac{Z}{c})$$

$$P = -P \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{P}{Z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{P}{Z} \varphi_1'$$

$$S = t - \frac{Z}{c}$$

$$V = D\varphi = \frac{1}{Z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{1}{Z^2} \varphi_1' =$$

$$= -\frac{1}{Z} \frac{\varphi_1'}{c} - \frac{1}{Z^2} \varphi_1' =$$

$$= + \frac{1}{Z} \frac{P}{c\rho} + \frac{1}{Z\rho} \int P dt =$$

$$= \frac{P}{Zc} + \frac{1}{Z\rho} \int_1^t P dt$$

занесе none

другое none

$$\sigma = -Pcv - \text{другие потери}$$

Нет бок сплошное определение энергии  
затраты в гидравлике none, которые  
обеспечиваются за передачу энергии.  
Второй член, убывающий с расстоянием  
как  $1/Z^2$  доминирует вблизи источника  
и преодолевает малые потери в  
расстояниях

(2)

Несколько источников создают гармоническую волну

$$\varphi_F = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - d\varphi)}$$

$$p = -p \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\omega p \varphi$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{(1 + idz) \varphi}{z}$$

$$\frac{p}{v} = \frac{zi\omega p}{1 + idz} = \frac{zcd\varphi i}{1 + idz}$$

Самоизменение вектора единичное коэффициент

$$\tilde{z} = \frac{i}{1 + idz} = \frac{i(1 - idz)}{1 + d^2 z^2} = \frac{dz + i}{1 + d^2 z^2}$$

$$|\tilde{z}| = \frac{\sqrt{d^2 z^2 + 1}}{d^2 z^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2 z^2}}$$

$$\frac{p}{v} = \frac{zcd\varphi e}{\sqrt{1 + d^2 z^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{dz} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2az}$$

$dz \gg 1$  коэффициент между

между  $p$  и  $v$  самоизменяется

меньше  $p$  и  $v$  (единица ноль)

меньше единица (единица ноль)

(3)

$z = pc -$  акустическое сопротивление  
среды (акустический импеданс)

$$z = pc \frac{d^2 z^2}{1 + d^2 z^2} + i pc \frac{d^2}{1 + d^2 z^2}$$

В отличие от массы  $m$

импеданс имеет комплексный вид,  
что указывает на наличие фазового  
угла между  $p$  и  $z$

Следуя за правилу сопротивления и  
скорости звука в среде, то  
единственное исключение кроме волокна  
границы имеет значение времени проникновения  
импеданса звуков в среду.

Инверсионное сопротивление  
волокна сопротивление

$$x = \operatorname{Im} z = w m_s, \text{ где}$$

$$m_s = \frac{pc}{1 + (dM)^2} \quad \begin{array}{l} \text{масса на ед.} \\ \text{площади вол.} \\ \text{на единице длины} \end{array}$$

Инверсионное сопротивление  
среды (присоединенная масса)

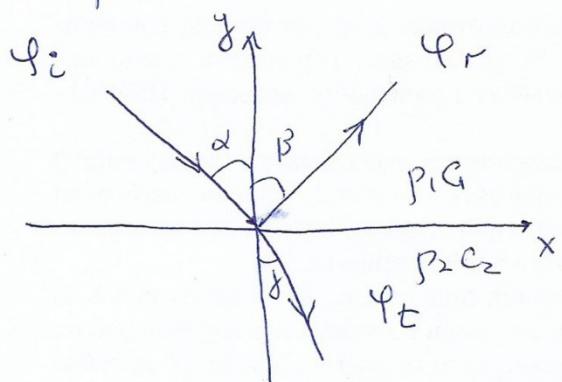
(4)

## 11.2 Наклонное падение волны

### Наклонное падение волн

Если акустическая волна попадает на неподвижную преграду, то звук отраженный волна отраженная и проходит по вторую сторону.

Таким образом образуются три волны: падающая, отраженная и преломленная.



Процесс волна падает на плоскую поверхность  $y=0$ . При этом образуются отраженные  $\varphi_r$  и преломленные  $\varphi_t$  волны.

$$\varphi = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\varphi_i = A_i e^{i(\omega t - d_1 (x \sin \alpha - y \cos \alpha))}$$

$$\varphi_r = A_r e^{i(\omega t - d_1 (x \sin \beta + y \cos \beta))}$$

$$\varphi_t = A_t e^{i(\omega t - d_2 (x \sin \gamma - y \cos \gamma))}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\Sigma} = d_x x + d_y y = d (x n_x + y n_y)$$

$$\vec{k} = \frac{\omega \vec{n}}{c} \quad d_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad d_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

(5)

На плоскости  $y=0$  должны  
быть выполнены граничные условия

$$\beta_1 (\varphi_i + \varphi_r) \Big|_{y=0} = \beta_2 \varphi_t \Big|_{y=0} \quad \begin{matrix} \text{непрерывность} \\ \text{значения} \end{matrix}$$

$$\frac{\partial (\varphi_i + \varphi_r)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Непрерывность нормальной компоненты

Нормальное выражение ненесущих  
и промежуточных конструкций  
называем системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 A_i e^{-id_1 x \sin \alpha} + \beta_1 A_r e^{-id_1 x \sin \beta} = \beta_2 A_t e^{-id_2 x \sin \gamma} \\ d_1 \cos \alpha A_i e^{-id_1 x \sin \alpha} - d_1 \cos \beta A_r e^{-id_1 x \sin \beta} = \cancel{d_2 \cos \gamma A_t e^{-id_2 x \sin \gamma}} \end{array} \right.$$

Умножим обе части на единицу  
и обеим уравнениям приложим  
коэффициент при  $x$  сопостав-  
ляя основаниями.

Получим систему нормальных  
уравнений нахождения параметров

$$d_1 \sin \alpha = d_1 \sin \beta = d_2 \sin \gamma \Rightarrow$$

$$\boxed{d = \beta, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}}$$

(6)

Условие б отсече зону  
отрёкание и преломление  
С учётом данных соотнош  
системе уп-я принципом Бю

$$\begin{cases} p_1(A_i + A_r) = p_2 A_t \\ k_{d_1}(A_i - A_r) \cos \alpha = d_2 A_t \cos \beta \end{cases}$$

$$r_\varphi = \frac{A_r}{A_i} = \frac{p_2 c_2 \cos \alpha - p_1 c_1 \cos \beta}{p_2 c_2 \cos \alpha + p_1 c_1 \cos \beta}$$

$$t_\varphi = \frac{A_t}{A_i} = \frac{2 p_2 c_2 \cos \alpha}{p_2 c_2 \cos \alpha + p_1 c_1 \cos \beta}$$

В случае нормального падения:

$$r_h = \frac{p_2 c_2 - p_1 c_1}{p_2 c_2 + p_1 c_1} = -\frac{1-q}{1+q}, \quad q = \frac{p_2 c_2}{p_1 c_1}$$

$$t_n = \frac{2 p_2 c_2}{p_2 c_2 + p_1 c_1} = \frac{2q}{1+q}$$

Эти соотношения получены  
из условия нормального падения.

(7)

## 12 Лекция 17.05.2022.

### 12.1 Повторение материала о волнах в сферической СК

17. 05. 22. Лекция 12

Сферические системы координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\partial}{r\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

- оператор Лапласа

$$\text{Если } \Psi = \Psi(r, \theta, \varphi), \text{ то } \Psi \text{ ПД}$$

Движение имеет вид

$$\frac{\partial^2(\Psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\Psi)}{\partial t^2}$$

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{r} \Psi_1(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r} \Psi_2(t + \frac{r}{c})$$

В сущности гармонический волну

$$\Psi = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

$$P = -P \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i \omega P \Psi$$

$$V = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\left(\frac{1+ikr}{2}\right) \Psi$$

$$\frac{P}{V} = \rho c \cos \Psi e^{i\Psi} = \rho c \frac{dM}{\sqrt{1+k^2r^2}} e^{i\Psi}$$

$$\Psi = \arctan \frac{1}{kr}$$

$\omega k \gg 1 \Rightarrow$  близкое зоне

$P = \rho c V$  дальше соотношение

составляем и получаем волну

(1)

## 12.2 Энергия звуковых волн

Энергия звуковых волн

При распространении звуковых волн в упругой среде каждое единиц время

среди содержит определенным количеством энергии. Покажем, что эта энергия равна сумме кинетической энергии колебательной волны и потенциальной энергии, обусловленной упругой деформацией среды.

$$\rho_0 \Sigma \frac{\partial v}{\partial t} = -\Sigma \cdot \nabla P$$

Вспомним о работе

$$\nabla \cdot (\rho \Sigma) = \rho \nabla \cdot \Sigma + \Sigma \cdot \nabla \rho$$

$$\rho_0 \Sigma \frac{\partial v}{\partial t} - \rho \nabla \cdot \Sigma = -\nabla \cdot (\rho \Sigma) \quad (*)$$

Ур-е баланс масс:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \Sigma$$

$$\text{Ур-е соотношения: } \rho = c_0^2 \rho_0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \Sigma = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Тогда ур-е (\*) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{\Sigma^2}{2} + \frac{\rho^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) = -\nabla \cdot (\rho \Sigma)$$

(2)

Чтобы упростить формулу второго следствия, рассмотрим работу, затрачиваемую избыточным давлением  $\Delta p$  при разборьемке обеих  $V_0$  на величину  $dV$

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{dV}{V_0} \Rightarrow dV = -V_0 \frac{dp}{p_0} = -\frac{V_0 dp}{6^2 p_0}$$

$$dA = p dV = -\frac{V_0}{6^2 p_0} p dp$$

$$A = - \int_0^p \frac{V_0}{6^2 p_0} p dp = -\frac{V_0}{26^2 p_0} p^2$$

Следовательно, второе следствие есть моментальная энергия обеих обеих.

Тогда  $W = p_0 \frac{\pi r^2}{2} + \frac{p^2}{2p_0 c^2}$  - производство звуковой энергии

Для этого выражения  $p = p_0 \cos \varphi$  и

$$W = p_0 r^2 = \frac{p^2}{p_0 b^2}$$

$$\int_V W dV = E - \text{исходная энергия в обеих } V$$

$p b \varphi = Q$  - величина потока энергии через единую поверхность (площадь нормаль единой поверхности называемой величиной Умоля энергии), называемой величиной Умоля

$$\frac{dE}{dt} = - \oint_S Q_n dS$$

- величина потока  $Q$  через замкнутое изображение

(3)

Поток звуковых волн означает  
с некоторыми начальными, на  
интенсивность

$$J = \frac{1}{T} \int Q dt \quad \left( \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right)$$

One гармонический волну

$$P = P_m \cos \omega t, \quad v = v_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$Q = P v = \frac{1}{2} P_m v_m \cos \varphi + \frac{1}{2} P_m v_m \cos(2\omega t - \varphi)$$

Найдем в интеграле ищем  
нужное и интегрируем

$$J = \frac{1}{2} P_m v_m \cos \varphi$$

Интенсивность звука в волне:  $(\varphi=0, \frac{P_m}{v_m} = P_0 c)$

$$J = \frac{1}{2} \frac{P_m}{P_0 c} = \frac{1}{2} P_0 c v_m^2$$

В сферической волне:

$$P_m = \frac{\omega \rho_0 A}{r} = \frac{\rho_0 c \omega A}{r}$$

$$v_m = \frac{dA}{r \cos \varphi}$$

$$J = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 \frac{d^2 A^2}{r^2}$$

Однако упрощение квадрата величины

$$J = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 v_m^2 \cos^2 \varphi$$

интенсивности можно и упростить  
использованием при  $\cos \varphi \rightarrow 1$ ,

волну сферической при  $\varphi \rightarrow 1$ ,

t.e. в зоне

④