

Задача (несвязанная динамическая задача термоупругости)

Рассматривается полубесконечный стержень с модулем Юнга E и плотностью ρ , для которого справедливо соотношение Дюамеля-Неймана. Объёмный источник в уравнении теплопроводности задан в виде

$$Q = J_0(H(t) - H(t - \tau))e^{-\gamma x},$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Пренебрегая теплопроводностью материала, получить термоупругий импульс на расстоянии, существенно превышающем глубину проникновения теплового источника.

Принять, что время действия теплового импульса τ много меньше времени пробега акустической волны до координаты, в которой производится регистрация сигнала.

Постановка задачи

По условию пренебрегаем теплопроводностью материала стержня (не учитываем распространение тепла вдоль стержня), поэтому уравнение теплопроводности можем записать в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = Q \Leftrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = J_0(H(t) - H(t - \tau))e^{-\gamma x} \quad (1)$$

Тогда распределение температуры по стержню (см. рис.1):

$$\theta = J_0(tH(t) - (t - \tau)H(t - \tau))e^{-\gamma x} \quad (2)$$

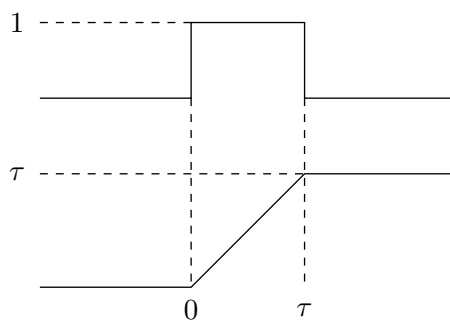


Рис. 1: Интегрирование ступеньки

Далее подключаем уравнение баланса импульса:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \ddot{u} = 0, \quad (3)$$

где $\sigma = E(\varepsilon - \alpha\theta)$ (соотношение Дюамеля-Неймана) и $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$.

После подстановки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (4)$$

где $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость звука в стержне.

Далее подставляем выражение для распределения температуры (2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -J_0 \cdot \alpha \cdot (tH(t) - (t - \tau)H(t - \tau)) \cdot \gamma e^{-\gamma x} \quad (5)$$

Левый торец стержня свободен:

$$\sigma|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha \cdot J_0 \cdot (tH(t) - (t - \tau)H(t - \tau)) \cdot e^{-\gamma x} \quad (6)$$

На бесконечности ставим условие излучения:

$$u|_{x \rightarrow \infty} - \text{условие излучения} \quad (7)$$

Преобразование Лапласа