

**Общая информация.**Видеолекции курса доступны по ссылке: [GO TO HYDRAULIC FRACTURING](#).Решение для радиальной трещины ГРП: [GO TO CLOSED-FORM SOLUTION IN MATLAB](#).**Содержание**

<b>1 Лекция 16.02.2021 (Донцов Е.В.)</b>	<b>3</b>
1.1 Из чего состоит любая модель ГРП? Основные компоненты . . . . .	4
1.1.1 Модель утечки по Картеру . . . . .	5
1.1.2 Течение жидкости в трещине ГРП . . . . .	8
1.1.3 Равновесие (упругость) горной породы. Уравнение упругости . . . . .	9
<b>2 Лекция 02.03.2021 (Донцов Е.В.)</b>	<b>11</b>
2.1 Из чего состоит любая модель ГРП? Продолжение . . . . .	11
2.1.1 Равновесие (упругость) горной породы. Уравнение упругости . . . . .	11
2.1.2 Условие распространения трещины ГРП . . . . .	13
2.2 Модель плоской трещины ГРП (= модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-де Клерка = KGD модель) . . . . .	15
2.3 Возможные геометрии (модели) трещины ГРП. Краткий обзор . . . . .	16
2.3.1 Полубесконечная трещина (semi-infinite модель) и плоская трещина (KGD модель) . . . . .	16
2.3.2 Модель Перкинса-Керна-Нордгрена (PKN модель) . . . . .	16
2.3.3 Модель радиальной трещины ГРП, псевдо-3D модель и модель планар-3D	17
2.3.4 Multi-fracture и multi-well модели . . . . .	17
2.3.5 Более сложные модели . . . . .	18
2.4 Промежуточная систематизация материала лекций . . . . .	18
2.5 Математическая модель плоской трещины ГРП . . . . .	19
2.6 Математическая модель полубесконечной трещины ГРП . . . . .	20
<b>3 Лекция 09.03.2021 (Донцов Е.В.)</b>	<b>23</b>
3.1 Математическая модель полубесконечной трещины ГРП. Продолжение . . . . .	23
3.2 Математическая модель плоской трещины ГРП. Продолжение . . . . .	27
<b>4 Лекция 16.03.2021 (Донцов Е.В.)</b>	<b>33</b>
4.1 Математическая модель радиальной трещины ГРП . . . . .	33
4.2 Математическая модель Перкинса-Керна-Нордгрена (модель PKN) . . . . .	37
<b>5 Лекция 23.03.2021 (Донцов Е.В.)</b>	<b>45</b>
5.1 Математическая модель EP3D (Enhanced pseudo-3D model) . . . . .	45
5.2 Краткое повторение рассмотренных моделей . . . . .	49
<b>6 Лекция 02.04.2021 (Валов А.В.)</b>	<b>52</b>
6.1 Модель Planar3D ILSA: основные уравнения, классификация элементов . . . . .	52

---

<b>7 Лекция 08.04.2021 (Валов А.В.)</b>	<b>53</b>
7.1 Модель Planar3D ILSA: дискретизация, поиск фронта, алгоритм . . . . .	53
<b>8 Лекция 13.04.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>54</b>
8.1 Модель Planar3D Biot: постановка задачи, перенос граничных условий . . . . .	54
<b>9 Лекция 20.04.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>55</b>
9.1 Модель Planar3D Biot: слабая постановка, штраф, пороупругие эффекты . . . . .	55
<b>10 Лекция 27.04.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>56</b>
10.1 Перенос проппанта: постановка задачи, обезразмеривание, оседание . . . . .	56
<b>11 Лекция 30.04.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>57</b>
11.1 Перенос проппанта: осреднение, численный алгоритм, бриджинг . . . . .	57
<b>12 Лекция 11.05.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>58</b>
12.1 Моделирование течения жидкости в скважине . . . . .	58
12.2 Разделение потоков между трещинами . . . . .	64
12.3 Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине . . . . .	64
<b>13 Лекция 18.05.2021 (Байкин А.Н.)</b>	<b>65</b>
13.1 Модели инициации трещины гидроразрыва . . . . .	65

# Гидроразрыв пласта

## Конспект лекций и семинаров

Муравцев А.А.<sup>1</sup>      Донцов Е.В.<sup>2</sup>      Валов А.В.<sup>3</sup>      Байкин А.Н<sup>4</sup>

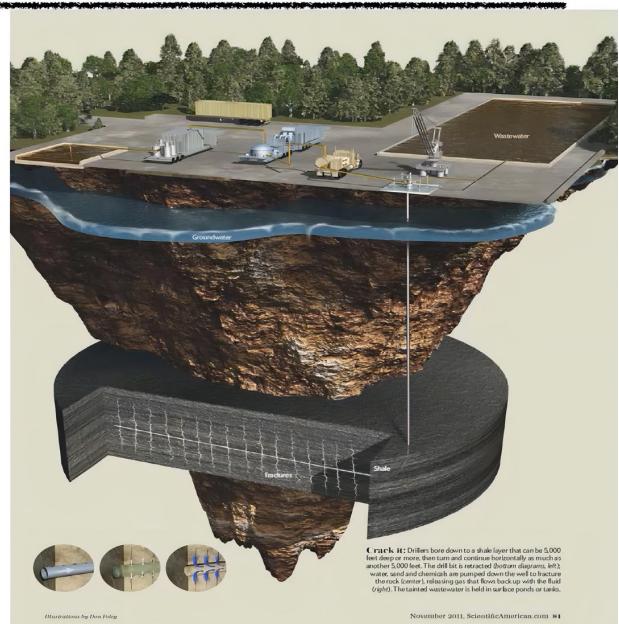
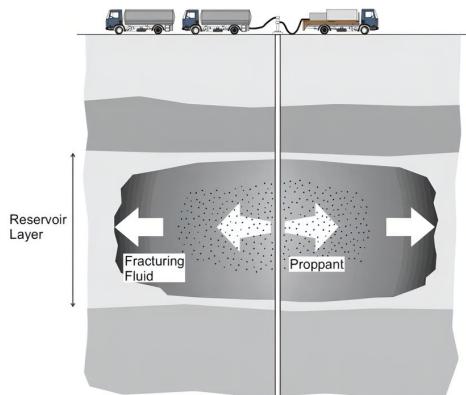
10 февраля 2023 г.

### 1 Лекция 16.02.2021 (Донцов Е.В.)

План на сегодня: рассказать про основные компоненты моделирования ГРП (HF = hydraulic fracturing), про основные используемые уравнения и основные геометрии.

#### Hydraulic fracturing (HF)

- ▶ Essential components of HF modeling
- ▶ Governing equations
- ▶ Basic HF model geometries



В двух словах разница между conventional и unconventional:

- 1) conventional – то, что было, грубо говоря, до 2000-х годов – вертикальная скважина, пласт, рвём гидроразрывом пласта, обычно одна трещина;
- 2) unconventional – когда сланцы, например, то бурится горизонтальная скважина, проводится многостадийный ГРП (за одну стадию можем сделать несколько трещин (несколько портов),

<sup>1</sup>конспектирует; email: almuravcev@yandex.ru

<sup>2</sup>W.D. Von Gonten Laboratories, Houston, USA

<sup>3</sup>Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН

<sup>4</sup>Новосибирский государственный университет, Россия

затем поставить перегородку, сделать ещё несколько трещин (портов) и так далее); можем также сделать несколько скважин.

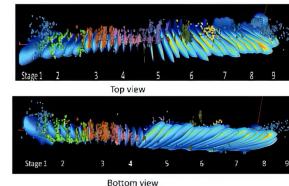
Концептуально с точки зрения математики разницы между conventional и unconventional практически нет. У нас либо одна трещина (conventional) или множество трещин (unconventional), т.е. с точки зрения моделирования unconventional моделировать дольше, сложнее. Но повторюсь, что концептуально основная физика везде одинакова.

## 1.1 Из чего состоит любая модель ГРП? Основные компоненты

Essential pieces of a hydraulic fracture model

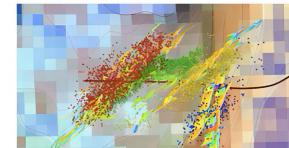
**1. Volume balance of the injected fluid (incompressible):**

$$\text{Volume injected} = \text{Fracture volume} + \text{leak-off}$$



**2. Fluid flow equations:**

Viscous pressure drop inside the fracture

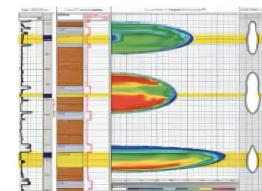


**3. Rock equilibrium (elasticity):**

$$\text{Fluid pressure} = \text{Stress} + \text{Stiffness} * \text{FracWidth}$$

**4. Propagation condition:**

Some parameter reaches a critical value near the front



**5. Proppant transport (not covered):**

Particles flow with fluid + gravitational settling

Основные компоненты любой модели гидроразрыва пласта:

- 1) закон сохранения жидкости; в 99% случаев предполагается, что жидкость несжимаема, тогда выполняется закон сохранения объёма; но бывают случаи сжимаемых жидкостей (например, когда ГРП делают газом или делают пенный ГРП), тогда выполняется закон сохранения массы, т.е. закачиваемый объём жидкости равен объёму жидкости в трещине плюс утечки (трещину ГРП делаем в пористом резервуаре, поэтому есть утечки из трещины в резервуар – в зависимости от пористости и других параметров утечки могут либо доминировать, либо нет: например, 90% закачиваемой жидкости может утекать в пласт или наоборот оставаться в трещине);
- 2) уравнение течения жидкости в трещине; допустим мы уже создали трещину в резервуаре (обычно она очень узкая и длинная: например, 1 сантиметр в ширину и порядка сотни метров в длину) и закачиваем в неё жидкость (которая часто бывает довольно вязкой), тогда у нас может быть существенное падение давления от скважины до кончика трещины (так как грубо говоря, всю эту жидкость нужно пропихнуть по всей трещине); необходимы уравнения течения жидкости в зависимости от реологии жидкости;
- 3) равновесие (упругость) горной породы; когда мы открываем трещину в упругом материале, то мы предполагаем, что порода линейно упругая (по крайней мере в первом приближении); чтобы открыть трещину (т.е. просто открыть (как надуть шарик), а не распространить), нам

необходимо приложить какое-то давление на стенки трещины (это давление и есть давление жидкости внутри трещины); у нас получается некое распределение давления внутри трещины, и оно как-то неравномерно открывает эту трещину; чем сильнее мы хотим открыть трещину, тем больше должно быть давление жидкости внутри;

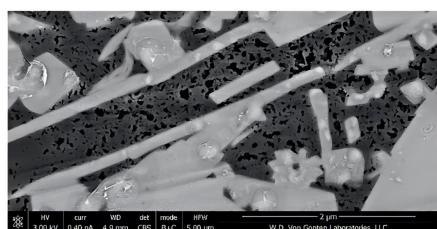
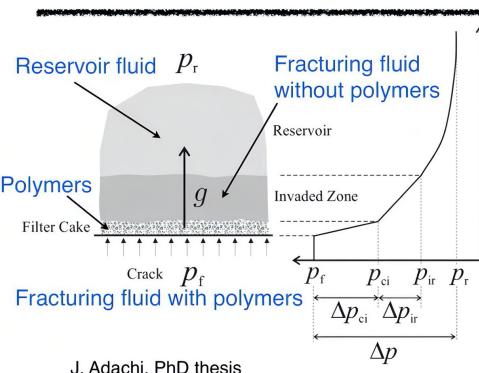
концептуальное уравнение: Fluid Pressure = Stress + Stiffness \* FracWidth – давление жидкости должно превысить напряжение в породе + жёсткость трещины (которая напрямую зависит от модуля Юнга породы), умноженную на среднее открытие трещины; но большую часть составляет именно напряжение в породе, а дополнительное слагаемое с жёсткостью обычно много меньше (но тем не менее очень важно для моделирования);

4) условие распространения трещины; грубо говоря, продолжая аналогию с шариком – это критерий, при котором шарик лопнет; при достижении критического значения некого параметра около кончика трещины начнётся распространение трещины;

5) транспорт проппанта; это тоже очень важный компонент физики модели ГРП; высокопроводимый проппант нужен для того, чтобы при смыкании трещины ГРП остались проводимые каналы; с точки зрения моделирования внутри жидкости течёт суспензия; обычно частицы проппанта (часто используется песок или керамический проппант с примерной плотностью 2.65 г/см<sup>3</sup>) тяжелее жидкости (у воды плотность приблизительно 1 г/см<sup>3</sup>), поэтому интересно моделировать процесс оседания проппанта.

### 1.1.1 Модель утечки по Картеру

Carter's leak-off model



#### Flow through filter cake:

$$g_c = \alpha \frac{dh_c}{dt}$$

this equation says that the growth rate of the filter cake is linearly proportional to the amount of fluid leaked from the fracture (the constant of proportionality is related to the content of polymers)

$$g_c = \frac{\kappa_c \Delta p_{ci}}{\mu} \frac{dh_c}{h_c}$$

this is Darcy's law (quasi-static flow)

$$\text{Solution: } g_c = \frac{C_c}{\sqrt{t}} \quad C_c = \sqrt{\frac{\alpha \kappa_c \Delta p_{ci}}{2 \mu_b}}$$

#### Flow through invaded zone:

$$g_i = \frac{\kappa}{\mu_{\text{filt}}} \frac{\Delta p_{ir}}{h_i}$$

this is Darcy's law (quasi-static flow)  
this is volume balance that states that the volume of fluid leaked into the formation determines the size of the invasion zone

$$\text{Solution: } g_i = \frac{C_i}{\sqrt{t}} \quad C_i = \sqrt{\frac{\phi \kappa_r \Delta p_{ir}}{2 \mu_b}}$$

Давайте рассмотрим модель утечки по Картеру. Эта модель является доисторической для рассматриваемой области (для моделирования ГРП), её развил Картер ещё в 1956-1957 годах (тогда ещё только зарождался ГРП). Первый коммерческий ГРП был сделан примерно в 1950-х годах. Но тем не менее модель Картера и сейчас очень часто (почти повсеместно) используется при моделировании ГРП, потому что она очень простая и очень много физики в себе несёт.

В левом верхнем углу на слайде изображен рисунок (из PhD диссертации J. Adachi), на котором

изображена область вблизи трещины. Обычно жидкость ГРП состоит из основной жидкости (base fluid) и полимеров (их добавляют, чтобы химия или реология совпадала с той, которая нужна для дизайна ГРП, например, для нужной длины трещины или нужного транспорта проппанта и так далее). Идея в том, что есть жидкость с полимерами. Когда эта жидкость начинает фильтроваться в породу, то происходит следующее: в классической модели считаем, что полимеры большие, длинные и с трудом залезают в поровое пространство, т.е. полимеры в основном осаждаются на стенке трещины. В итоге, образуется Filter Cake, который состоит из полимеров, добавляемых в жидкость ГРП.

Далее идёт Invaded Zone, в которой жидкость ГРП без полимеров затекает в породу и вымешивает жидкость резервуара.

Далее идёт сам резервуар, в котором давление поднялось (так как мы вытеснили часть жидкости из Invaded Zone в резервуар).

Таким образом, концептуально график зависимости давления от вертикальной координаты  $y$  выглядит следующим образом: на стенке трещины давление равно давлению жидкости, на бесконечности – давление резервуара; давление жидкости больше, чем давление резервуара (иначе не смогли бы сгенерировать трещину ГРП); есть падение давления на корке Filter Cake (предполагается, что оно линейное); есть падение давления в Invaded Zone (тоже предполагается, что оно линейное); и дальше есть падение давления в резервуаре.

Итак, есть три характерных падения давления. Может быть так, что какое-то из них много меньше, чем другое; какое-то давление доминирует; может быть отсутствие Filter Cake (если в жидкости ГРП нет полимеров). Но мы рассмотрим более общий случай и пройдёмся по уравнениям. На слайде в левом нижнем углу представлена картина пористости сланца, полученная с помощью электронного микроскопа (маленькие поры, различные минералы и видно, что через эти поры жидкость утекает).

Первым делом рассмотрим течение через корку Filter Cake.

Первое уравнение

$$g_c = \alpha \frac{dh_c}{dt} \quad (1.1)$$

говорит нам о том, что скорость роста корки Filter Cake линейно пропорциональна количеству жидкости, утекающему из трещины за единицу времени (или другими словами, линейно пропорциональна скорости утечки), а константа пропорциональности определяется экспериментально. По сути  $\alpha$  связана с концентрацией полимеров.

Второе уравнение

$$g_c = \frac{\kappa_c}{\mu} \frac{\Delta p_{ci}}{h_c} \quad (1.2)$$

это закон Дарси для течения жидкости через корку Filter Cake (полагаем, что падение давления на корке связано со скоростью утечек по линейному закону Дарси).

Приравнивая уравнения (1.1) и (1.2) и решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, получаем

$$g_c = \frac{C_c}{\sqrt{t}} \quad C_c = \sqrt{\frac{\alpha \kappa_c \Delta p_{ci}}{2\mu}} \quad (1.3)$$

т.е. скорость утечек обратно пропорциональна  $\sqrt{t}$ .

Далее рассмотрим следующую зону Invaded Zone.

Опять же предполагаем, что распределение давления линейное (довольно тонкая зона Invaded Zone) и выполняется линейный закон Дарси

$$g_i = \frac{\kappa_r}{\mu} \frac{\Delta p_{ir}}{h_i} \quad (1.4)$$

В качестве второго уравнения возьмём закон сохранения объёма

$$g_i = \varphi \frac{dh_i}{dt} \quad (1.5)$$

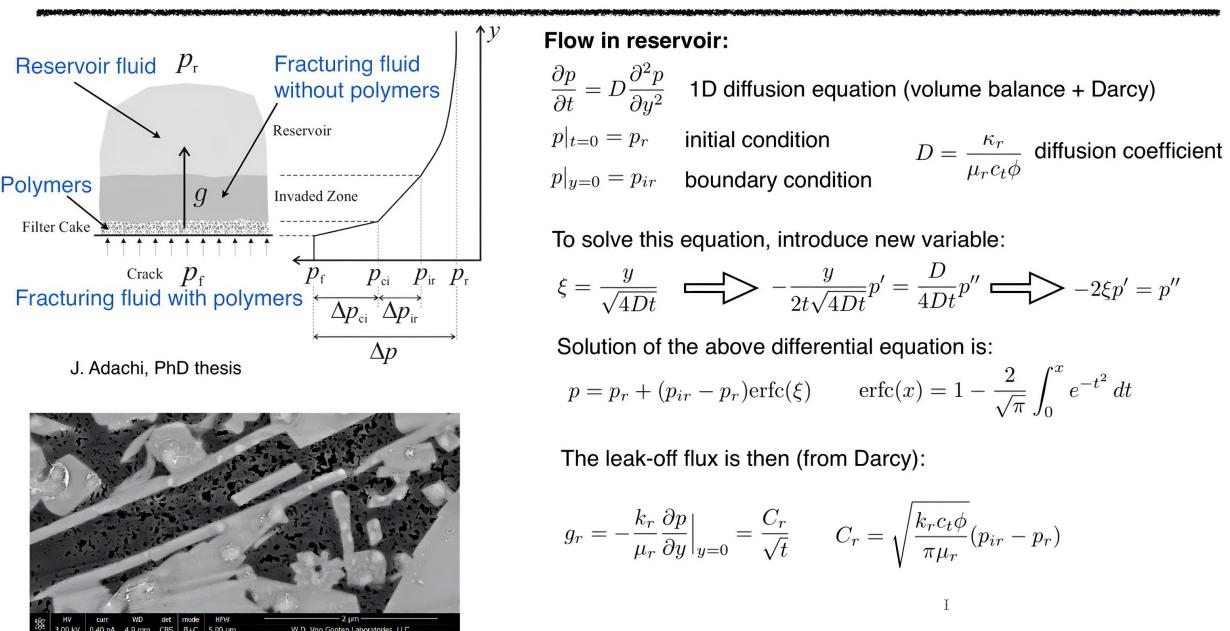
(т.е. объём жидкости, утекающей из корки Filter Cake, определяет размер зоны Invaded Zone)

Приравнивая уравнения (1.4) и (1.5) и решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, получаем

$$g_i = \frac{C_i}{\sqrt{t}} \quad C_i = \sqrt{\frac{\varphi \kappa_r \Delta p_{ir}}{2\mu}} \quad (1.6)$$

(подобно корке Filter Cake в Invaded Zone скорость утечек обратно пропорциональна  $\sqrt{t}$ ).

### Carter's leak-off model



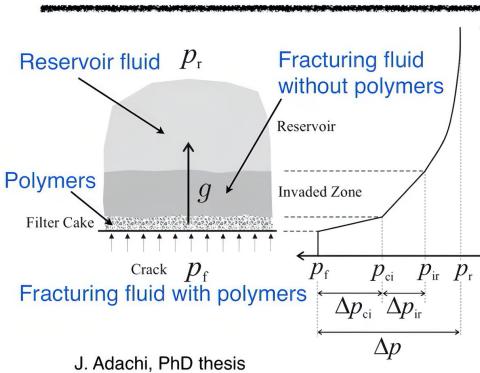
Последний аспект физики здесь – это поведение жидкости в резервуаре. Одно из главных предположий модели Картера: предполагаем, что диффузия одномерная и перпендикулярная стенке трещины (т.е. рассматриваем изменение давления только по оси  $y$ ). Но на самом деле это не совсем так: если вы представите себе кончик трещины, то у него будет некая двумерная диффузия (или даже трёхмерная диффузия) вокруг кончика.

При каких условиях мы можем использовать предположение одномерности модели Картера? Тогда, когда характерное расстояние, на котором осуществляется падение давления много меньше, чем длина трещины. Вблизи кончика модель может не выполняться, но в где-то в середине

трещины модель вполне себе применима.

Итак, рассматриваем одномерную модель, т.е. решаем уравнение одномерной диффузии, перпендикулярной стенке трещины. Уравнение диффузии (диффузия в пороупругом материале) – это опять таки закон Дарси плюс закон сохранения объёма.

### Carter's leak-off model



**Combined result if all the mechanisms are present:**

$$g = \frac{C_l}{\sqrt{t}}, \quad C_l = \frac{2\bar{C}_c \bar{C}_i \bar{C}_r}{\bar{C}_c \bar{C}_i + \sqrt{\bar{C}_c^2 \bar{C}_i^2 + 4C_r^2(\bar{C}_c^2 + \bar{C}_i^2)}},$$

In the above result, the individual leak-off coefficients are computed by using the total pressure drop, i.e.

$$\bar{C}_c = \sqrt{\frac{\alpha \kappa_c \Delta p}{2 \mu_b}}, \quad \bar{C}_i = \sqrt{\frac{\phi \kappa_i \Delta p}{2 \mu_b}}, \quad \bar{C}_r = \sqrt{\frac{\kappa_r c_t \phi}{\pi \mu_r} \Delta p}.$$

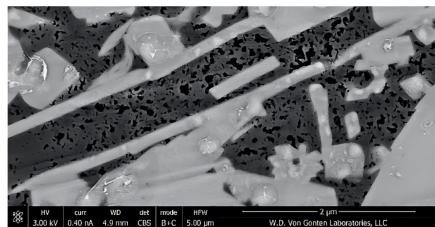
**Recall the main assumptions of the model:**

1D diffusion, i.e. the diffusion length scale should be much smaller than the fracture size

The net pressure is often neglected, whereby  $\Delta p = \sigma_0 - p_r$

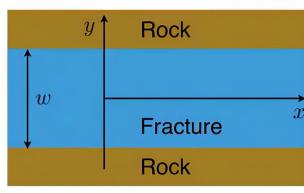
It is implicitly assumed that one type of fracturing fluid is used

More reading: Economides&Nolte 2000, section 6-4.



### 1.1.2 Течение жидкости в трещине ГРП

#### Fluid flow



$$v = v_x(y)$$

given the geometry, we have only one component of the velocity vector that varies only across the channel

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

this comes from Navier-Stokes equations or equilibrium equations

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

this states that the rheology is Newtonian

$$\text{Herschel-Bulkley } \tau = \tau_0 + k \dot{\gamma}^n$$

$$v|_{y=\pm w/2} = 0$$

I

$$\text{Power-law } \tau = k \dot{\gamma}^n$$

this is no-slip boundary condition at the fracture walls

$$\text{Newtonian } \tau = \mu \dot{\gamma}$$

General solution:

Actual solution:

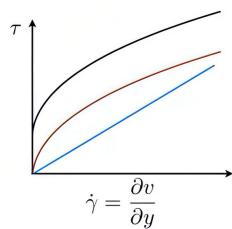
$$v = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + A y + B$$

$$v = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{w^2 - 4y^2}{8\mu}$$

$$\text{Total flux is: } q = \int_{-w/2}^{w/2} v(y) dy = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\text{HB fluid: } q_{\text{HB}} = -\frac{w^{2+1/n}}{M'^{1/n}} \frac{\partial p}{\partial x} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{1/n-1} \left( 1 - \frac{2\tau_0}{w} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1} \right)^{1+1/n} \left( 1 + \frac{2\tau_0}{w} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1} \frac{n}{n+1} \right)$$

$$M' = \frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} k,$$

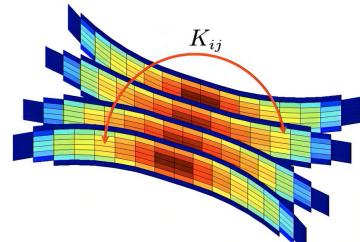


Каждая модель ГРП должна включать в себя течение жидкости. Обычно рассматривается следующая проблема. Допустим мы открыли трещину, есть некое открытие трещины  $w$  и течение вдоль оси  $x$  (допустим, что она одномерное). Открытие трещины обычно измеряется в миллиметрах, а длина трещины обычно составляет десятки или сотни метров. Т.е. получается очень

узкая трещина и именно поэтому мы предполагаем, что в каждой точке трещины течение стационарно. Т.е. необходимо решить стационарное уравнение Навье-Стокса.

### 1.1.3 Равновесие (упругость) горной породы. Уравнение упругости

#### Elasticity



Elasticity equation ensures that rock surrounding open fracture(s) is in equilibrium.

Every open element induces a stress change (all components) in the whole space.

The interaction coefficient (induced stress divided by aperture) depends on the elastic properties and the distance from the element and generally decays quickly  $\sim 1/r^3$  for 3D geometry.

For a plane strain fracture, the elasticity equation reads:

$$p = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s) ds}{(x-s)^2} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}$$

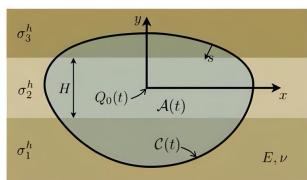
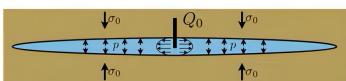
1

For a planar fracture, the elasticity equation reads:

$$p(x, y, t) = \sigma^h(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{\mathcal{A}(t)} \frac{w(x', y', t) dx' dy'}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]^{3/2}},$$

For general expressions in 3D, see Crouch and Starfield, 1983

For expressions in layered materials, see Peirce and Siebrits, 2000



Уравнение упругости. Почему это сложно? Потому что мы решаем уравнение упругости вокруг всей трещины. Т.е. мы решаем уравнение упругости в 3D (или как минимум в 2D) вокруг трещины. До этого у нас всё было одномерное: одномерные утечки Картера, одномерное течение жидкости в трещине. А всё что одномерное, то просто. Здесь же упругость как минимум двухмерная (а в большинстве случаев трёхмерная). А в большинстве случаев решать трёхмерные задачи (особенно аналитически) не сильно весело, но можно.

В двух словах: пусть у нас есть несколько трещин (может быть одна трещина) и есть некоторое количество численных элементов, в которых трещина открыта. Если приоткроем один из элементов ещё больше, то изменим поле напряжений везде в материале. Т.е. у нас есть коэффициенты взаимодействия: как открытие любого из рассматриваемых элементов влияет на сжимающие напряжения в каждом другом элементе.

Аналогия с шариками: есть несколько тесно соединённых друг с другом шариков; мы надуваем один из шариков и в это же время все остальные сжимаются.

Т.е. суть уравнения упругости – это посчитать коэффициенты взаимодействия (коэффициенты влияния) между элементами. Ясно, что эти взаимодействия угасают с расстоянием, но тем не менее формально каждый элемент меняет поле напряжений во всём трёхмерном пространстве. Обычно уравнение упругости относительно сложное (нелокальное) и оно обычно относительно медленно считается (в некоторых случаях по крайней мере).

Но я покажу вывод для плоской трещины (plain strain) – предполагаем, что у нас двухмерная модель с некоторым открытием трещины. Есть некое давление распределённое по оси  $x$ . Есть сжимающие напряжения. Мы выведем связь между распределением давления вдоль оси  $x$ , сжимающими напряжениями снаружи  $\sigma_0$  и формой открытия трещины  $w(x)$ . Нелокальная связь в

том, что давление в точке зависит от интеграла открытия по всей трещине. Т.е. изменение давления в произвольной ячейке приведёт к изменению давления по всей трещине. Важная особенность в том, что интеграл в формуле гиперсингулярный и его нужно понимать в смысле главного значения.

Для планарной трещины аналогично.

## 2 Лекция 02.03.2021 (Донцов Е.В.)

### 2.1 Из чего состоит любая модель ГРП? Продолжение

Давайте вспомним предыдущую лекцию.

В модели ГРП есть **несколько основных концепций**, несколько основных физических процессов, которые необходимо описать и которые любой симулятор ГРП описывает (не важны тип геометрии, количество трещин, способ решения явный/неявный – главное: учесть правильную физику/механику).

**Первое:** закон сохранения жидкости. Предполагается, что она несжимаемая: закачиваем некий объём жидкости в скважину, часть этого объёма генерирует трещину и плюс часть жидкости утекает в виде утечек

**Второе:** градиент давления внутри трещины, который образуется из-за вязкого течения жидкости.

**Третье:** уравнение упругости. Мы деформируем породу вокруг трещины; считаем породу линейно-упругим материалом; после деформаций должно выполняться условие равновесия.

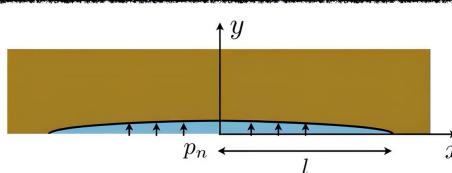
**Четвёртое:** критерий распространения. Аналогия с шариком: уравнение упругости показывает соотношение давления в шарике с его объёмом, а критерий распространения – это условие при котором шарик лопнет. То же самое с трещиной: упругость даёт нам соотношение между давлением жидкости внутри и открытием трещины, а критерий распространения позволяет найти условие, при котором трещина будет распространяться.

**Пятое:** транспорт проппанта.

В прошлый раз мы подробно остановились на модели утечек Картера и на уравнениях течения жидкости в трещине. Сейчас продолжим говорить про упругость и критерии распространения.

#### 2.1.1 Равновесие (упругость) горной породы. Уравнение упругости

##### Derivation of elasticity equation (plane strain)



Hooke's law

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= 2\mu\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}), \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\epsilon_{xy}\end{aligned}$$

Equilibrium equations

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Normal stress continuity

$$\sigma_{yy}|_{y=0} = -p_n = -(p - \sigma_0)$$

Boundary conditions

$$u_y|_{y=0} = \frac{w}{2} \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = 0$$

Need to solve for

$$\sigma_{yy}|_{y=0} - ?$$

Governing equations in terms of displacements

$$\begin{aligned}(2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &= 0, \\ (2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} &= 0\end{aligned}$$

System of ODEs

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} &= \hat{d}_x, \\ \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} &= \hat{d}_y, \\ \frac{\partial \hat{d}_x}{\partial y} &= \frac{2\mu + \lambda}{\mu} k^2 \hat{u}_x - \frac{\lambda + \mu}{\mu} ik \hat{d}_x + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} k^2 \hat{u}_y, \\ \frac{\partial \hat{d}_y}{\partial y} &= -\frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} ik \hat{d}_x + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} k^2 \hat{d}_x + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} k^2 \hat{u}_y,\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}}$$

Apply Fourier transform

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g) &= \hat{g}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ikx} dx, \\ \mathcal{F}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) &= ik\mathcal{F}(g), \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) = -k^2 \mathcal{F}(g),\end{aligned}$$

Упругость: порода вокруг трещины должна быть в равновесии в зависимости от того, какое у трещины открытие или сдвиговое смещение в каждом элементе трещины.

В чём сложность расчёта теории упругости? В том, что этот процесс очень нелокальный. Например, если у нас есть несколько трещин, несколько элементов (множество элементов в каждой трещине), то изменение открытия в каждом элементе влечёт за собой изменение поля напряжений во всём пространстве. Т.е. если мы немного изменим степень открытости одного из элементов, то у нас будет влияние на все элементы. С практической точки зрения коэффициент взаимодействия уменьшается довольно быстро с расстоянием ( $\sim 1/r^3$  для трёхмерной геометрии). Т.е. с точки зрения практики можем задать некий радиус, после которого будем обрезать взаимодействия. Но тем не менее всё равно взаимодействие будет нелокальным. В этом сложность упругости.

Для плоской трещины у нас есть довольно простое выражение.

Если рассматриваем плоскую трещину и двухмерную задачу, то давление в трещине равно сжимающему напряжению на бесконечности и плюс дополнительный интеграл от открытия трещины (как функции координаты) с сингулярным ядром.

Т.е. открытие в любой точке трещины влияет на давление по всей трещине.

Для планарной трещины есть более сложное выражение, которое выводится абсолютно аналогично выражению для плоской трещины.

Далее выведем выражение для плоской трещины; для планарной – вывод такой же.

Я буду давать относительно простые примеры и относительно простые геометрии, но все рассматриваемые задачи решены и для сложных геометрий, и для полностью трёхмерных геометрий.

Вы можете найти все эти коэффициенты взаимодействия между элементами (интегральные ядра) для полностью трёхмерной задачи.

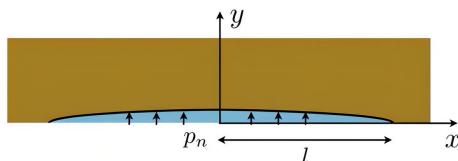
Всё, что я Вам покажу, верно для однородного по упругим свойствам материала. Но в реальности могут быть геологические слои и модули упругости Юнга и коэффициенты Пуассона могут меняться от слоя к слою.

Если Вам не страшна жёсткая математика и Вы хотите посчитать коэффициенты взаимодействия между элементами в слоистой среде, то можете посмотреть статью Pierce и Siebrits.

Но нам в рамках курса важна общая концепция: откуда берутся выражения и что описывают с точки зрения физики/механики.

Давайте выведем уравнение упругости. Что такое уравнение упругости? Это условие того, что порода вблизи трещины находится в равновесии. Мы рассматриваем плоскую трещину и вследствие симметрии рассматриваем половину задачи (только верхнюю часть трещины, например).

## Derivation of elasticity equation (plane strain)



$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A} \mathbf{Y}$$

Eigenvalues of  $A$ :  $k, k, -k, -k$ .

Solution (resonance)

$$\mathbf{Y} = c_1 \mathbf{v}_1 e^{-|k|y} + c_2 (\mathbf{v}_1 y + \mathbf{v}_2) e^{-|k|y}$$

Boundary conditions

$$\hat{\sigma}_{xy}|_{y=0} = 0, \\ \hat{u}_y|_{y=0} = \hat{w}(k)/2,$$

$$p = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s) ds}{(x-s)^2}$$

Solution in frequency domain

$$\hat{p}_n = \frac{\hat{w}|k|}{4} E' = \frac{i k \hat{w} E'}{4} \frac{|k|}{ik} = -\frac{i E'}{4} \text{sgn}(k) \widehat{\frac{dw}{dx}},$$

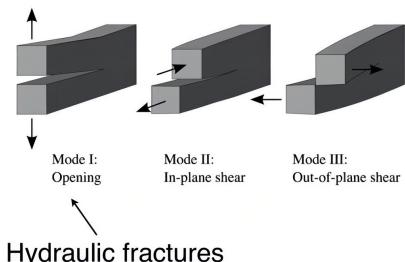
I

$$\widehat{\frac{dw}{dx}} = ik \hat{w}$$

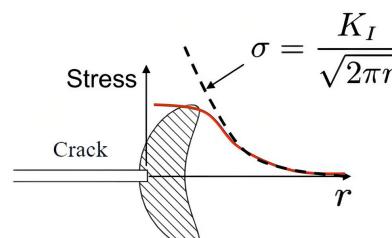
$$p_n(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{i E'}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(k) \frac{dw}{ds} e^{ik(x-s)} ds dk.$$

## 2.1.2 Условие распространения трещины ГРП

## Propagation condition



Hydraulic fractures



$K_I$  - Stress Intensity Factor (SIF)

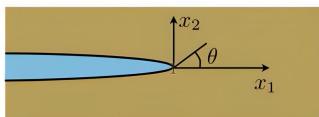
Propagation condition:  $K_I = K_{Ic}$

$K_{Ic}$  - fracture toughness



[https://en.wikipedia.org/wiki/Fracture\\_mechanics](https://en.wikipedia.org/wiki/Fracture_mechanics)

### Mode I solution near the tip



#### Solution methodology:

- Write elasticity equations via Airy stress function
- Solve the equations assuming stress-free crack and finite displacement at the tip
- See lecture notes on fracture mechanics for more info: <http://www.mate.tue.nl/~piet/edu/frm/pdf/frmsyl1213.pdf>

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [\cos(\frac{1}{2}\theta) \{1 - \sin(\frac{1}{2}\theta) \sin(\frac{3}{2}\theta)\}]$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [\cos(\frac{1}{2}\theta) \{1 + \sin(\frac{1}{2}\theta) \sin(\frac{3}{2}\theta)\}]$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} [\cos(\frac{1}{2}\theta) \sin(\frac{1}{2}\theta) \cos(\frac{3}{2}\theta)]$$

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\cos(\frac{1}{2}\theta) \{\kappa - 1 + 2\sin^2(\frac{1}{2}\theta)\}]$$

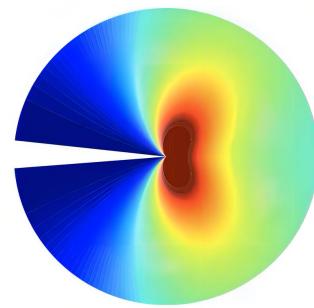
$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\sin(\frac{1}{2}\theta) \{\kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)\}]$$

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Fracture width around the crack tip:

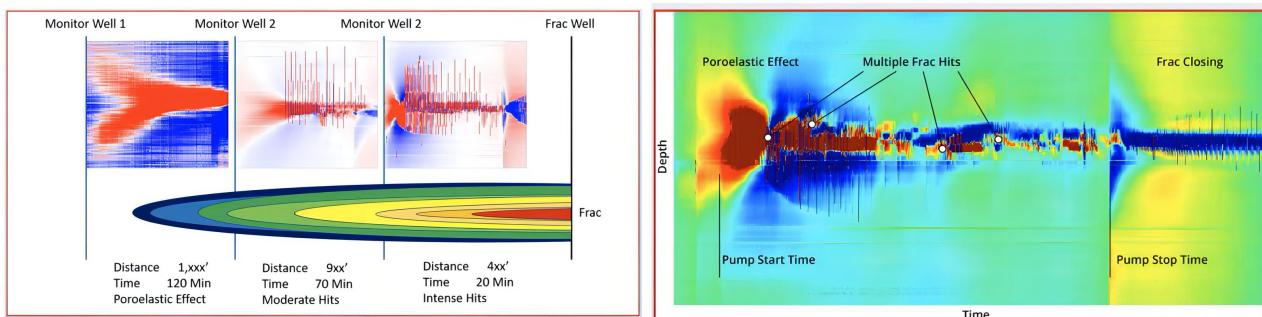
$$w = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \frac{K_I(1-\nu^2)}{E} \sqrt{r}$$

Stress field around the crack tip:



### Observation of the crack tip stress in the field

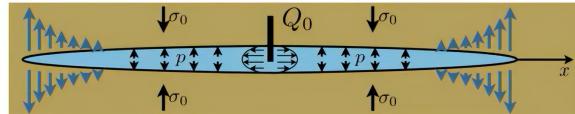
- Fiber optic cables are used to measure stretch versus time along the cable length
- A cable is often placed in a neighboring horizontal well, while the primary well is being fractured
- The characteristic lobes of the approaching crack are clearly visible



Silixa.com Richter et al. 2020

## 2.2 Модель плоской трещины ГРП (= модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-де Клерка = KGD модель)

Volume balance for a plane strain HF



Leak-off

New volume      Flux in      Leak-off

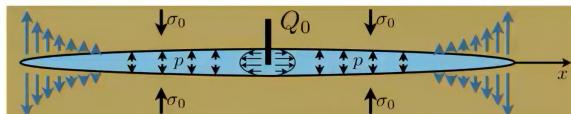
$$w(t+dt)dx = w(t)dx + q(x) - q(x+dx) - g_1 dt dx + Q_0 dt \int \delta(x) dx$$

Previous volume      Flux out      Source

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = Q_0 \delta(x)$$

Fracture width  
Leak-off  
Source

Mathematical model for a plane strain HF



Scaled quantities

$$C' = 2C_L \quad \mu' = 12\mu \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$$

Volume balance of fluid

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = Q_0 \delta(x)$$

Fracture width  
Leak-off  
Source

Elasticity      Fracture length

$$p = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s) ds}{(x-s)^2}$$

Fluid pressure

Laminar fluid flow flux

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}$$

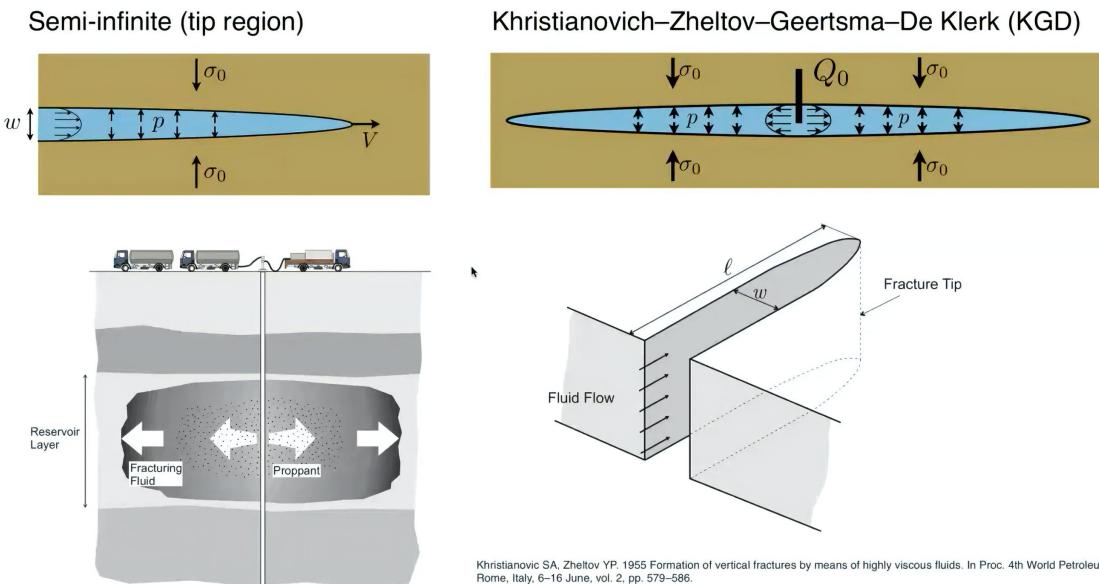
Propagation condition (LEFM)

$$w \rightarrow \frac{K'}{E'} \sqrt{l-x} \quad (K_I = K_{Ic})$$

## 2.3 Возможные геометрии (модели) трещины ГРП. Краткий обзор

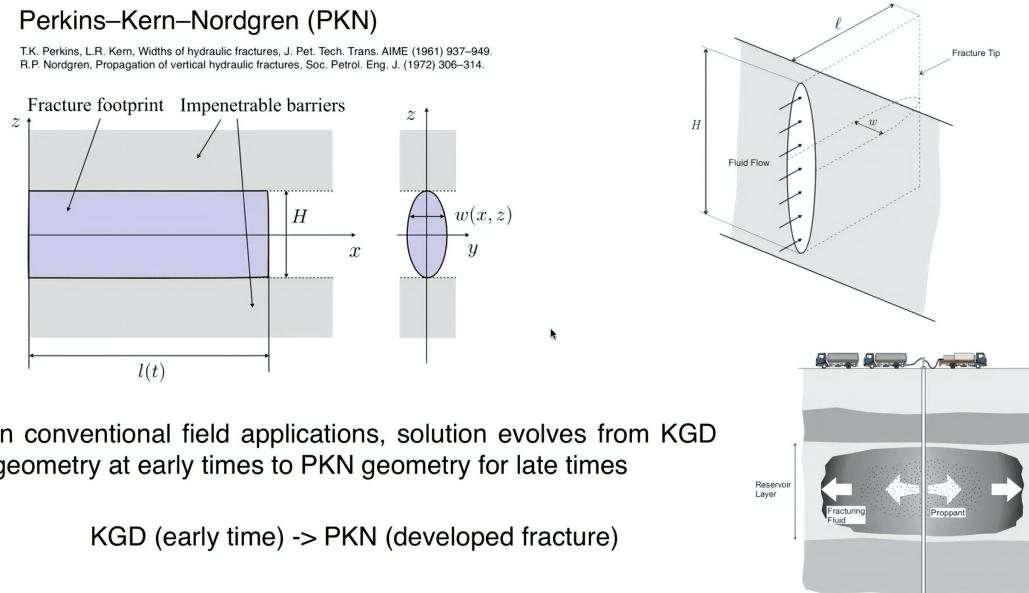
### 2.3.1 Полубесконечная трещина (semi-infinite модель) и плоская трещина (KGD модель)

HF geometries - the simplest



### 2.3.2 Модель Перкинса-Керна-Нордгрена (PKN модель)

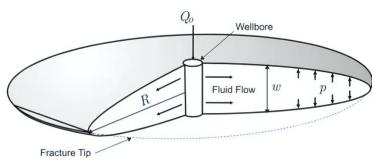
HF geometries



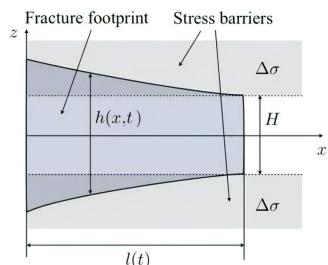
### 2.3.3 Модель радиальной трещины ГРП, псевдо-3D модель и модель планар-3D

#### HF geometries

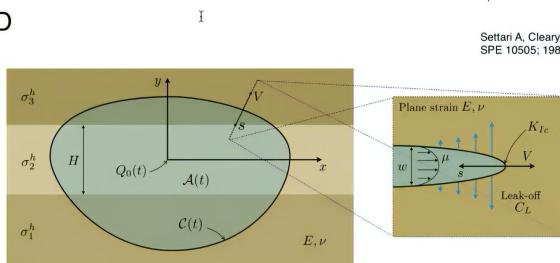
Radial



Pseudo-3D



Planar-3D

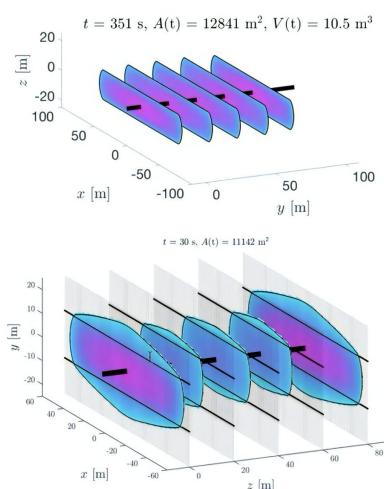


Settari A, Cleary M. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry (P3DH). SPE 10505, 1982. p. 185–214.

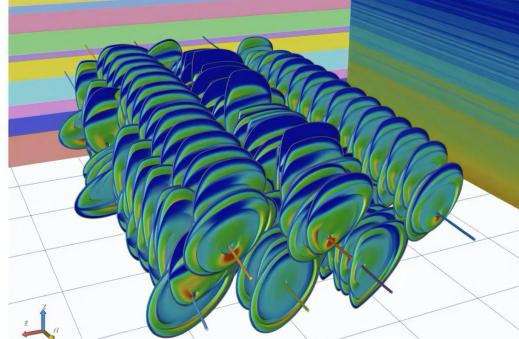
### 2.3.4 Multi-fracture и multi-well модели

#### HF geometries

Multi-fracture



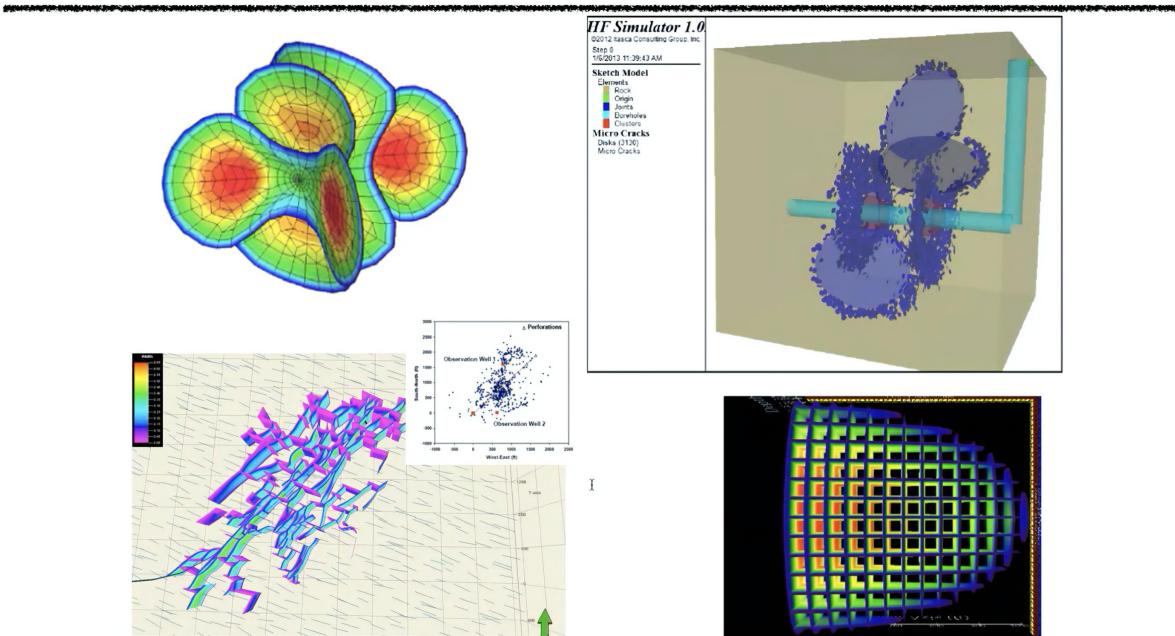
Multi-well



Natural fractures, curved fractures, etc.

### 2.3.5 Более сложные модели

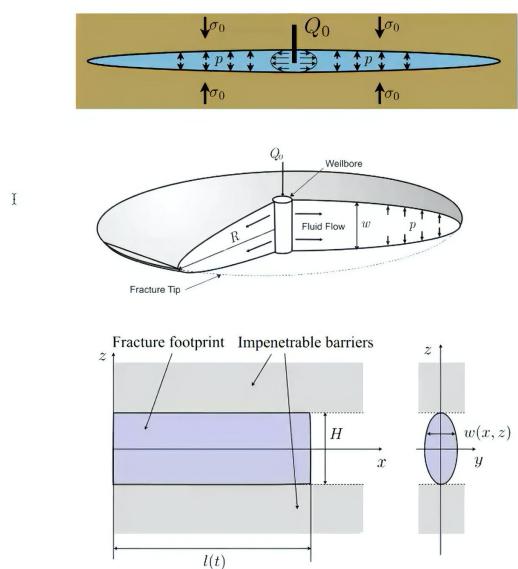
HF geometries - other complex



## 2.4 Промежуточная систематизация материала лекций

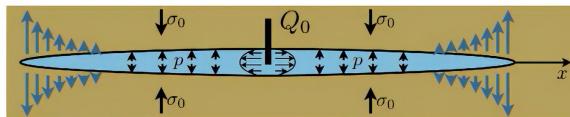
Recall from lecture 1

- **Essential pieces of HF model**
  - Volume balance and leak-off
  - Fluid flow
  - Elasticity
  - Propagation condition
  - Proppant transport
- **Various fracture geometries**
  - Semi-infinite
  - KGD (plane strain)
  - PKN
  - Radial
  - Pseudo-3D
  - Planar 3D
  - Complex
- **Governing equations**
  - KGD (plane strain)
- **Derivation of elasticity equation**



## 2.5 Математическая модель плоской трещины ГРП

Mathematical model for plane strain HF



Scaled quantities

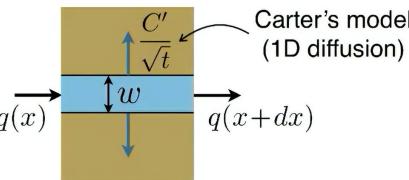
$$C' = 2C_L \quad \mu' = 12\mu$$

Volume balance of fluid

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0 \delta(x)$$

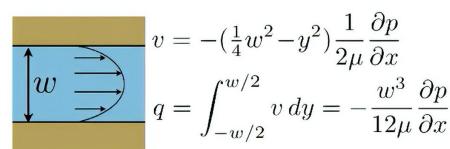
I

Fracture width  
Leak-off  
Source

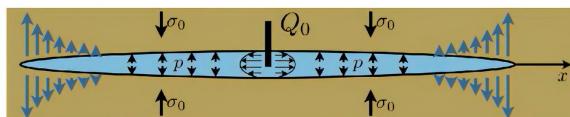


Laminar fluid flow flux

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}$$



Mathematical model for plane strain HF



Scaled quantities

$$C' = 2C_L \quad \mu' = 12\mu$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$$

Volume balance of fluid

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0 \delta(x)$$

Fracture width  
Leak-off  
Source

I

Elasticity  
Fluid pressure

$$p = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s) \, ds}{(x - s)^2}$$

Fracture length

Laminar fluid flow flux

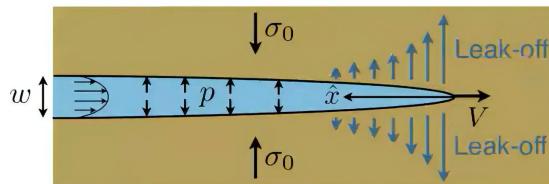
$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Propagation condition (LEFM)

$$w \rightarrow \frac{K'}{E'} \sqrt{l-x} \quad (K_I = K_{Ic})$$

## 2.6 Математическая модель полубесконечной трещины ГРП

### Tip asymptotics: semi-infinite hydraulic fracture



**Material parameters**

$$C' = 2C_L \quad \mu' = 12\mu$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$$

**Fluid volume balance**

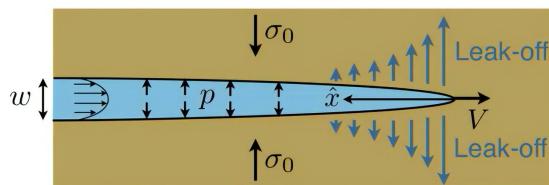
$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Traveling wave}} \quad \frac{w(Vt-x)}{w} = V + 2C'V^{1/2}\frac{\hat{x}^{1/2}}{w}$$

**Elasticity**

$$p = \sigma(\hat{x}) + \frac{E'}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dw(\hat{s})}{d\hat{s}} \frac{d\hat{s}}{\hat{x}-\hat{s}}$$

I

### Tip asymptotics: semi-infinite hydraulic fracture



**Material parameters**

$$C' = 2C_L \quad \mu' = 12\mu$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}}$$

**Fluid volume balance**

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Traveling wave}} \quad \frac{q}{w} = V + 2C'V^{1/2}\frac{\hat{x}^{1/2}}{w}$$

**Elasticity**

$$w = \frac{K'}{E'}\hat{x}^{1/2} + \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty K(\hat{x}, \hat{s})(p(\hat{s}) - \sigma(\hat{s})) d\hat{s} \quad K(\hat{x}, \hat{s}) = \ln \left| \frac{\hat{x}^{1/2} + \hat{s}^{1/2}}{\hat{x}^{1/2} - \hat{s}^{1/2}} \right| - 2\frac{\hat{x}^{1/2}}{\hat{s}^{1/2}}$$

**Fluid flow**

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad q = \frac{w^3}{\mu'} \frac{dp}{d\hat{x}}$$

**LEFM propagation condition**

$$w = \frac{K'}{E'}\hat{x}^{1/2}, \quad \hat{x} \rightarrow 0$$

## Non-singular formulation

---

### 1. Integrate elasticity equation by parts

$$w = \frac{K'}{E'} x^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(x, s) \frac{dp}{ds} ds \quad F(x, s) = (s - x) \ln \left| \frac{x^{1/2} + s^{1/2}}{x^{1/2} - s^{1/2}} \right| - 2x^{1/2}s^{1/2}$$

### 2. Substitute pressure gradient into the result

$$w(x) = \frac{K'}{E'} x^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(x, s) \frac{\mu'}{w(s)^2} \left[ V + 2C'V^{1/2} \frac{s^{1/2}}{w(s)} \right] ds$$

### 3. Apply scaling

$$\tilde{w} = \frac{E' w}{K' x^{1/2}}, \quad \chi = \frac{2C'E'}{V^{1/2} K'}, \quad \tilde{x} = (x/l)^{1/2}, \quad \tilde{s} = (s/l)^{1/2}, \quad l = \left( \frac{K'^3}{\mu' E'^2 V} \right)^2$$

### 4. Final result

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G(\tilde{s}/\tilde{x}) \left[ \frac{1}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} \right] d\tilde{s} \quad G(t) = \frac{1-t^2}{t} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + 2$$

Non-singular

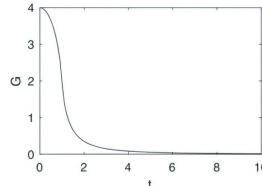
w = “toughness” + “viscosity” + “leak-off”

## Limiting vertex solutions

---

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G(\tilde{s}/\tilde{x}) \left[ \frac{1}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} \right] d\tilde{s}$$

w = “toughness” + “viscosity” + “leak-off”



Toughness dominates

$$\tilde{w}_k = 1, \quad \longrightarrow \quad w_k = \frac{K'}{E'} x^{1/2}$$

Viscosity dominates

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(\tilde{s}/\tilde{x})}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} d\tilde{s} \quad \longrightarrow \quad \tilde{w}_m = \beta_m \tilde{x}^{1/3} \quad \longrightarrow \quad w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} x^{2/3}$$

Desroches et al 1994

I

Leak-off dominates

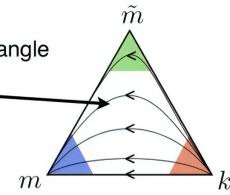
$$\tilde{w}(\tilde{x}) = \frac{8\chi}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(\tilde{s}/\tilde{x})}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} d\tilde{s} \quad \longrightarrow \quad \tilde{w}_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \chi^{1/4} \tilde{x}^{1/4} \quad \longrightarrow \quad w_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} x^{5/8}$$

Lenoah 1995

## Order of limiting solutions

$$w \propto x^{1/2} \quad w \propto x^{5/8} \quad w \propto x^{2/3}$$

Parametric triangle



## Toughness

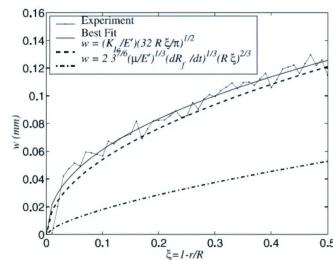
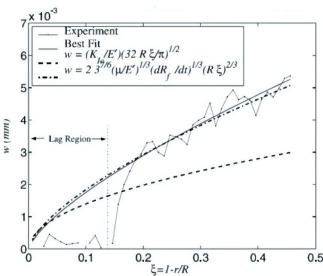
$$w_k = \frac{K'}{E'} x^{1/2},$$

## Leak-off

$$w_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} x^{5/8},$$

## Viscosity

$$w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} x^{2/3}$$

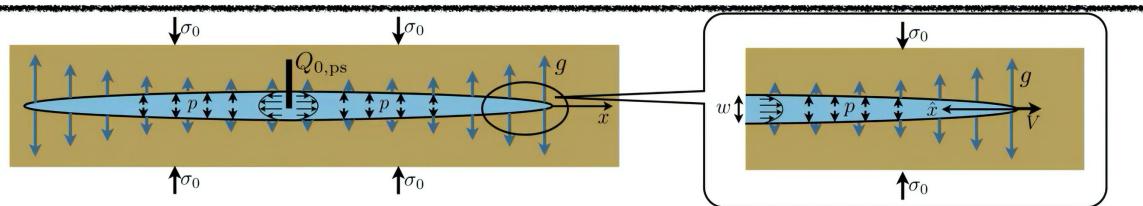


Bunger&amp;Jeffrey

### 3 Лекция 09.03.2021 (Донцов Е.В.)

#### 3.1 Математическая модель полубесконечной трещины ГРП. Продолжение

Governing equations for a semi-infinite hydraulic fracture



Volume balance and flow

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = Q_{0,ps}(t)\delta(x),$$

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x},$$

Use moving coordinate  
 $\hat{x} = Vt - x$

$$V \frac{dw}{d\hat{x}} - \frac{dq}{d\hat{x}} + \frac{C'}{\sqrt{\hat{x}/V}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{w^2}{\mu'} \frac{dp}{d\hat{x}} = V + 2C' \frac{\sqrt{V\hat{x}}}{w}$$

Substitute flux and integrate

Elasticity and propagation

$$p(x, t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{w(s)ds}{(x-s)^2},$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'}{E'}, & \text{if } V > 0, \\ \frac{K'_I}{E'}, & \text{if } V = 0. \end{cases}$$

$$w(\hat{x}) = \frac{K'}{E'} \hat{x}^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(\hat{x}, \hat{s}) \frac{d(p - \sigma_0)}{d\hat{s}} d\hat{s},$$

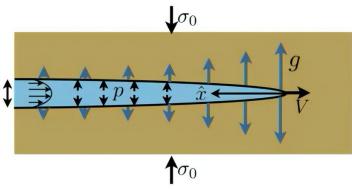
$$F(\hat{x}, \hat{s}) = (\hat{s} - \hat{x}) \ln \left| \frac{\hat{x}^{1/2} + \hat{s}^{1/2}}{\hat{x}^{1/2} - \hat{s}^{1/2}} \right| - 2\hat{x}^{1/2}\hat{s}^{1/2}.$$

#### Non-singular formulation

Substitute pressure gradient

$$w(\hat{x}) = \frac{K'}{E'} \hat{x}^{1/2} - \frac{4}{\pi E'} \int_0^\infty F(\hat{x}, \hat{s}) \frac{d(p - \sigma_0)}{d\hat{s}} d\hat{s},$$

$$\frac{w^2}{\mu'} \frac{dp}{d\hat{x}} = V + 2C' \frac{\sqrt{V\hat{x}}}{w}$$



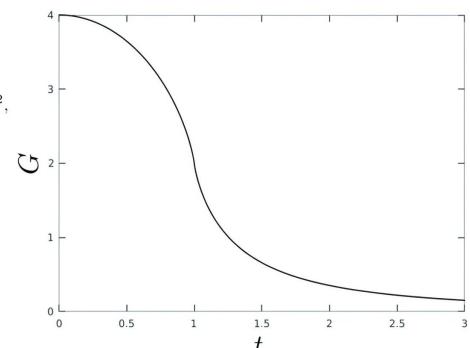
Scaling

$$\tilde{w} = \frac{E'w}{K'\hat{x}^{1/2}}, \quad \chi = \frac{2C'E'}{V^{1/2}K'}, \quad \tilde{x} = (\hat{x}/l)^{1/2},$$

$$\tilde{s} = (\hat{s}/l)^{1/2}, \quad l = \left( \frac{K'^3}{\mu'E'^2V} \right)^2,$$

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G(\tilde{s}/\tilde{x}) \left[ \frac{1}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} \right] d\tilde{s}, \quad \text{Non-singular formulation}$$

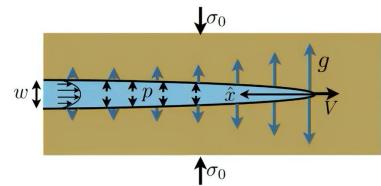
$$G(t) = \frac{1-t^2}{t} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + 2, \quad \text{Non-singular kernel}$$



### Non-singular formulation

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G(\tilde{s}/\tilde{x}) \left[ \frac{1}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} \right] d\tilde{s},$$

w = "toughness" + "viscosity" + "leak-off"



Toughness dominates

$$\tilde{w}_k = 1, \quad \Rightarrow \quad w_k = \frac{K'}{E'} \tilde{x}^{1/2},$$

Viscosity dominates

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(\tilde{s}/\tilde{x})}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} d\tilde{s} \quad \Rightarrow \quad \tilde{w}_m = \beta_m \tilde{x}^{1/3}$$

$$\beta_m = 2^{1/3} 3^{5/6} \quad \Rightarrow \quad w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} \tilde{x}^{2/3}$$

Desroches et al 1994

Leak-off dominates

$$\tilde{w}(\tilde{x}) = \frac{8\chi}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(\tilde{s}/\tilde{x})}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} d\tilde{s} \quad \Rightarrow \quad \tilde{w}_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \chi^{1/4} \tilde{x}^{1/4}$$

$$\beta_{\tilde{m}} = \frac{4}{15^{1/4} (\sqrt{2}-1)^{1/4}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{w}_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} \tilde{x}^{5/8},$$

Lenoah 1995

### Derivation of the viscosity solution

Governing integral equation

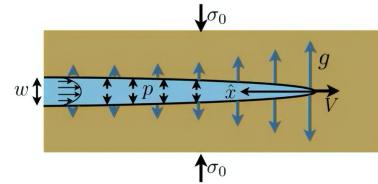
$$\tilde{w}(\tilde{x}) = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(\tilde{s}/\tilde{x})}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} d\tilde{s}$$

↓

$$\beta_m \tilde{x}^{\alpha_m} = \frac{8\tilde{x}^{2\alpha_m-1}}{\pi\beta_m^2} \int_0^\infty \frac{G(t)}{t^{2\alpha_m}} dt$$

Form of the solution

$$\tilde{w} = \beta_m \tilde{x}^{\alpha_m}$$



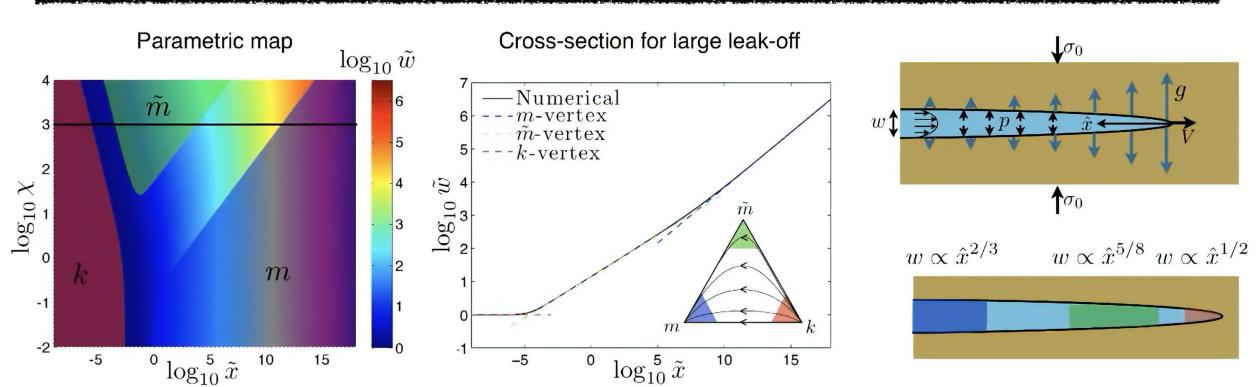
$$\alpha_m = 1/3 \quad \beta_m = 2^{1/3} 3^{5/6},$$



$$\tilde{w}_m = \beta_m \tilde{x}^{1/3}$$

Leak-off dominated solution can be derived in a similar way.

### Structure of the solution



Vertex solutions:

$$\tilde{w}_k = 1, \quad \tilde{w}_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \chi^{1/4} \tilde{x}^{1/4}, \quad \tilde{w}_m = \beta_m \tilde{x}^{1/3},$$

I

Solution transitions gradually from one limiting solution to another starting from toughness, then passing through leak-off (for large leak-off), and then reaching viscosity vertex.

### Approximate solution

$$\bar{w}(\tilde{x}) = 1 + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G(\tilde{s}/\tilde{x}) \left[ \frac{1}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} \right] d\tilde{s},$$

Numerical solution of this equation is time consuming and can be a limiting factor for some applications, such as using it as a propagation condition for a planar fracture. So, need to construct an efficient approximation.

↓  
Differentiate

$$\frac{d\bar{w}(\tilde{x})}{d\tilde{x}} = -\frac{8}{\pi} \int_0^\infty G'(\tilde{s}/\tilde{x}) \frac{\tilde{s}}{\tilde{x}^2} \left[ \frac{1}{\tilde{w}(\tilde{s})^2} + \frac{\chi}{\tilde{w}(\tilde{s})^3} \right] d\tilde{s}, \quad \bar{w}(0) = 1.$$

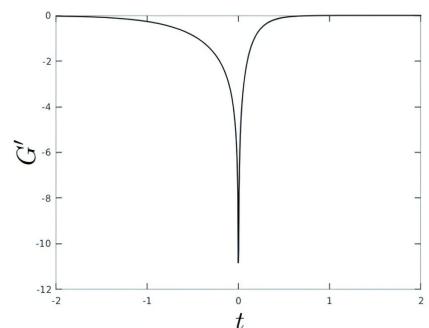
↓  
Assume that  $\tilde{w} \propto \tilde{x}^\delta$

$$\frac{d\bar{w}(\tilde{x})}{d\tilde{x}} = -\frac{8}{\pi} \int_0^\infty G'(\tilde{s}/\tilde{x}) \frac{\tilde{x}^{2\delta-1}}{\tilde{s}^{2\delta-1}} \frac{d\tilde{s}}{\tilde{x}} \left[ \frac{\tilde{s}^{2\delta}}{\tilde{w}(\tilde{s})^2 \tilde{x}^{2\delta}} \right] - \frac{8}{\pi} \int_0^\infty G'(\tilde{s}/\tilde{x}) \frac{\tilde{x}^{3\delta-1}}{\tilde{s}^{3\delta-1}} \frac{d\tilde{s}}{\tilde{x}} \left[ \frac{\chi \tilde{s}^{3\delta}}{\tilde{w}(\tilde{s})^3 \tilde{x}^{3\delta}} \right].$$

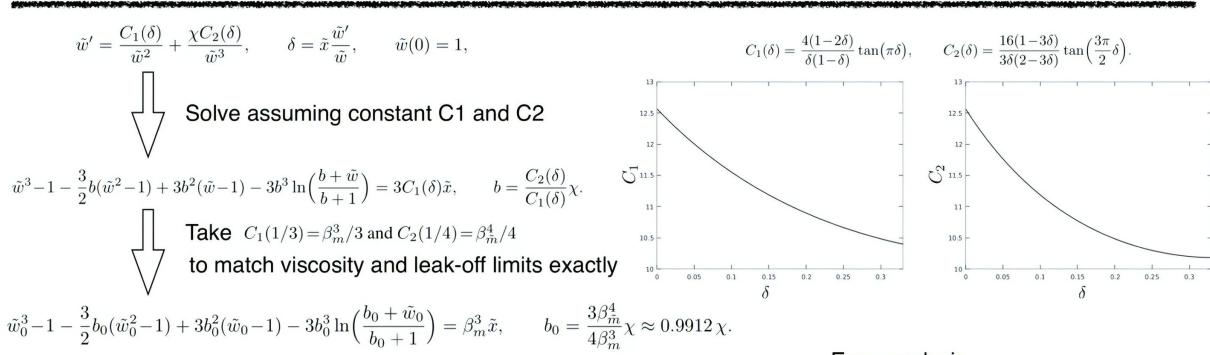
↓  
Replace G' with Delta function

$$\tilde{w}' = \frac{C_1(\delta)}{\tilde{w}^2} + \frac{\chi C_2(\delta)}{\tilde{w}^3}, \quad \delta = \tilde{x} \frac{\tilde{w}'}{\tilde{w}}, \quad \tilde{w}(0) = 1,$$

$$C_1(\delta) = \frac{4(1-2\delta)}{\delta(1-\delta)} \tan(\pi\delta), \quad C_2(\delta) = \frac{16(1-3\delta)}{3\delta(2-3\delta)} \tan\left(\frac{3\pi}{2}\delta\right).$$



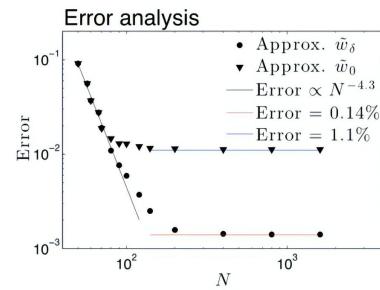
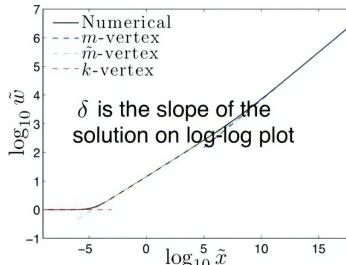
### Approximate solution



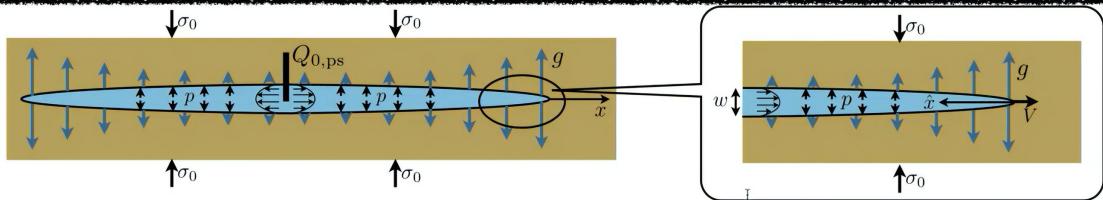
The above is an implicit zeroth order solution for the problem, to get a better approximation, compute

$$\delta = \frac{\beta_m^3 \tilde{x}(\tilde{w}_0)}{3\tilde{w}_0^3} \left(1 + \frac{b_0}{\tilde{w}_0}\right),$$

and re-evaluate the solution.

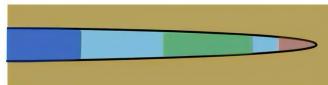


### Things to remember for the semi-infinite hydraulic fracture

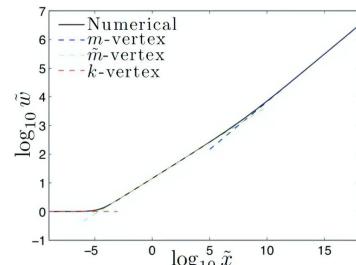


- Semi-infinite geometry describes tip region of a finite hydraulic fracture
- There are three limiting analytic solutions: toughness, viscosity, and leak-off
- The global solution gradually transitions from one limiting case to another
- There is computationally efficient approximate solution for the problem that can be used as a propagation condition for finite fractures

$$w \propto \hat{x}^{2/3} \quad w \propto \hat{x}^{5/8} \quad w \propto \hat{x}^{1/2}$$

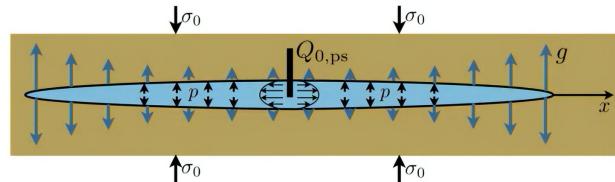


$$w_k = \frac{K'}{E'} \hat{x}^{1/2}, \quad w_{\bar{m}} = \beta_{\bar{m}} \left( \frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} \hat{x}^{5/8}, \quad w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} \hat{x}^{2/3}.$$



### 3.2 Математическая модель плоской трещины ГРП. Продолжение

Plane strain hydraulic fracture



Governing equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} &= Q_{0,ps}(t)\delta(x), \\ q &= -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_n}{\partial x}, \\ p_n(x) &= -\frac{E'}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{w(s)ds}{(x-s)^2}, \\ w &\rightarrow \frac{K'}{E'} \sqrt{l-x}, \quad x \rightarrow l. \end{aligned}$$

Scales

$$\begin{aligned} \frac{w_*}{t} &= \frac{q_*}{l_*} = \frac{C'}{t^{1/2}} = \frac{Q_{0,ps}}{l_*}, \\ q_* &= \frac{w_*^3 p_*}{\mu' l_*}, \\ p_* &= \frac{E' w_*}{l_*}, \\ w_* &= \frac{K'}{E'} l_*^{1/2}. \end{aligned}$$

6 equations, 4 unknowns

## Scaling for viscosity-storage solution

Viscosity-storage =&gt; no toughness, no leak-off

$$\begin{aligned} \frac{w_*}{t} &= \frac{q_*}{l_*} = \cancel{\frac{C'}{t^{1/2}}} = \frac{Q_{0,ps}}{l_*}, \\ q_* &= \frac{w_*^3 p_*}{\mu' l_*}, \\ p_* &= \frac{E' w_*}{l_*}, \\ w_* &\cancel{=} \frac{K'}{E'} l_*^{1/2}. \end{aligned}$$

Scaling solution

$$\longrightarrow \quad l_* = \left( \frac{Q_{0,ps}^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/6}, \quad w_* = \left( \frac{\mu' Q_{0,ps}^3 t^2}{E'} \right)^{1/6}, \quad p_* = \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3}$$

## M-vertex solution

$$\begin{aligned} w_m(\xi, t) &= 1.1265 \left( \frac{\mu' Q_0^3 t^2}{E'} \right)^{1/6} (1+\xi)^{0.588} (1-\xi)^{2/3}, \\ p_m(\xi, t) &= 2.7495 \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3} \mathcal{F}\left(\xi, 0.588, \frac{2}{3}\right), \\ l_m(t) &= 0.6159 \left( \frac{Q_0^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/6}, \end{aligned}$$

### Scaling for toughness-storage solution

---

Toughness-storage => no viscosity, no leak-off

$$\begin{aligned} \frac{w_*}{t} &= \frac{q_*}{l_*} = \cancel{\frac{C'}{t^{1/2}}} = \frac{Q_{0,ps}}{l_*}, \\ q_* &\cancel{=} \frac{w_*^3 p_*}{\mu' l_*}, \\ p_* &= \frac{E' w_*}{l_*}, \\ w_* &= \frac{K'}{E'} l_*^{1/2}. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{Scaling solution}$$

$$l_* = \left( \frac{E' Q_{0,ps} t}{K'} \right)^{2/3}, \quad w_* = \left( \frac{K'^2 Q_{0,ps} t}{E'^2} \right)^{1/3}, \quad p_* = \left( \frac{K'^4}{E'^2 Q_{0,ps} t} \right)^{1/3}$$

I

$$\begin{aligned} w_k(\xi, t) &= 0.6828 \left( \frac{K'^2 Q_{0,t}}{E'^2} \right)^{1/3} (1 - \xi^2)^{1/2}, \\ p_k(\xi, t) &= 0.1831 \left( \frac{K'^4}{E' Q_{0,t}} \right)^{1/3}, \\ l_k(t) &= 0.9324 \left( \frac{E' Q_{0,t}}{K'} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

### Toughness-viscosity transition

---

Use either

$$l_m \sim l_k$$

$$w_m \sim w_k$$

$$p_m \sim p_k$$

Dimensionless toughness

$$\Rightarrow K_m = \left( \frac{K'^4}{\mu' E'^3 Q_{0,ps}} \right)^{1/4}$$

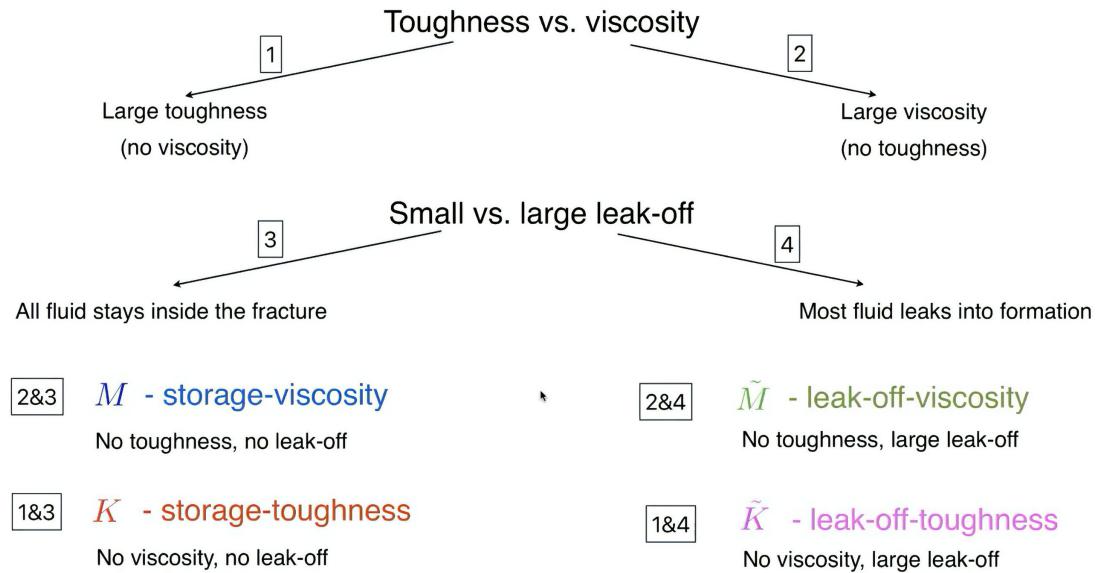
$K_m \ll 1$  M vertex (viscosity dominated)

$K_m \gg 1$  K vertex (toughness dominated)

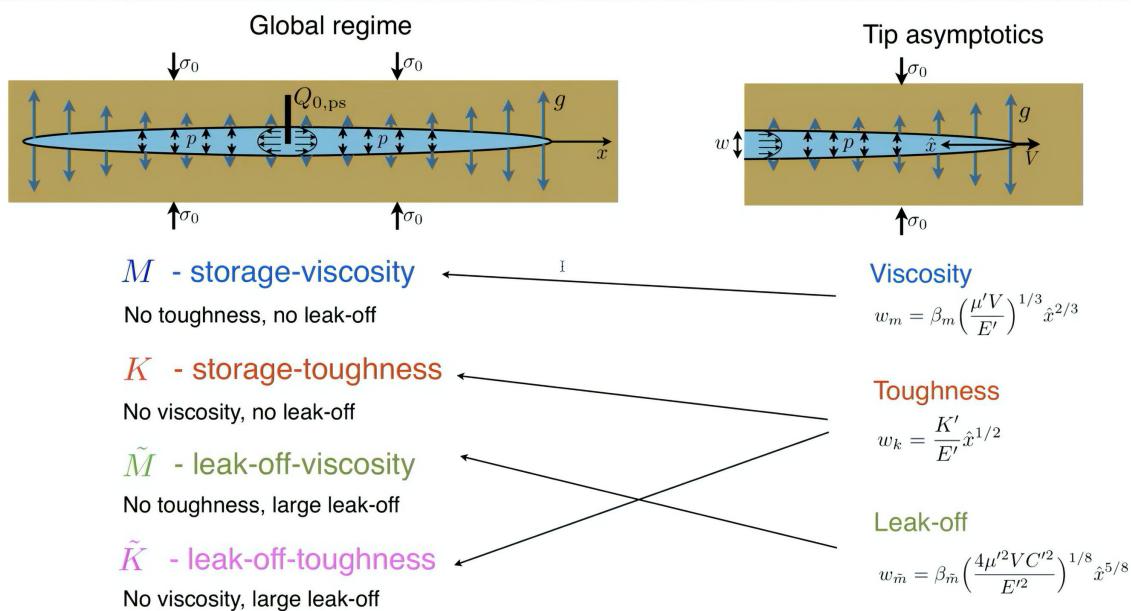
$K_m \sim 1$  M-K transition

**This is only part of the story, how about leak-off?**

### Hydraulic fracture regimes of propagation



### Tip asymptotics vs. regime



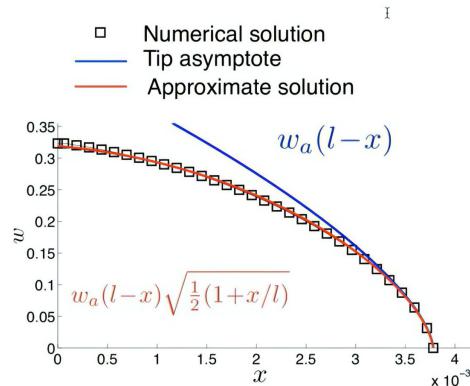
### Solution for the problem

- Numerical solution**

- Discretize governing equations using finite differences, see Dontsov, 2017

- Approximate solution**

- Global volume balance
- Approximate solution for width based on the tip asymptote



Global volume balance

$$\int_0^l \left( w(x, t) + 2C' \sqrt{t - t_0(x)} \right) dx = \frac{Q_{0,ps} t}{2},$$

$$l(t) \propto t^\alpha \implies x/l = (t_0/t)^\alpha$$

Approximate solution for width

$$w(x, t) = \left( \frac{l+x}{2l} \right)^\lambda w_a(l-x),$$

$\lambda$  - fitting parameter

### Regimes of propagation for a plane strain hydraulic fracture

**$M$  - storage-viscosity**

No toughness, no leak-off

**$K$  - storage-toughness**

No viscosity, no leak-off

**$\tilde{M}$  - leak-off-viscosity**

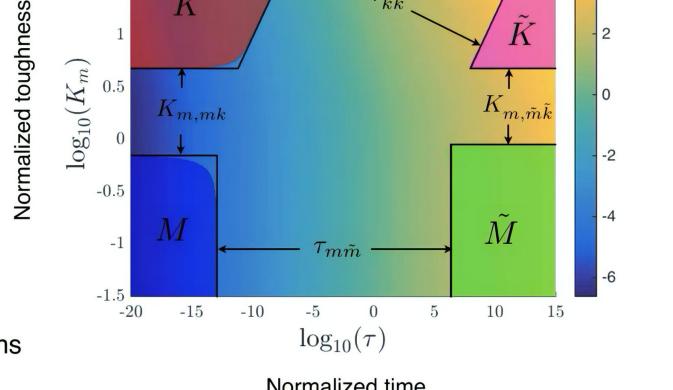
No toughness, large leak-off

**$\tilde{K}$  - leak-off-toughness**

No viscosity, large leak-off

Zones of applicability of limiting solutions  
are defined to within 1% of error

Bounds for these zones (solid black  
lines) are known



$$K_m = \left( \frac{K'^4}{\mu'E'^3 Q_{0,ps}} \right)^{1/4} \quad \tau = \frac{t}{t_{m\bar{m}}} \quad t_{m\bar{m}} = \frac{\mu' Q_{0,ps}^3}{E'C'^6}$$

## Limiting solutions for a plane strain hydraulic fracture

 $M$  - storage-viscosity

$$\begin{aligned} w_m(\xi, t) &= 1.1265 \left( \frac{\mu' Q_{0,ps}^3 t^2}{E'} \right)^{1/6} (1+\xi)^{0.588} (1-\xi)^{2/3}, \\ p_m(\xi, t) &= 2.7495 \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3} \mathcal{F}(\xi, 0.588, \frac{2}{3}), \\ l_m(t) &= 0.6159 \left( \frac{Q_{0,ps}^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/6}, \end{aligned}$$

 $\tilde{M}$  - leak-off-viscosity

$$\begin{aligned} w_{\tilde{m}}(\xi, t) &= 0.8165 \left( \frac{\mu' Q_{0,ps}^3 t}{E' C'^2} \right)^{1/4} (1+\xi)^{0.520} (1-\xi)^{5/8}, \\ p_{\tilde{m}}(\xi, t) &= 3.6783 \left( \frac{C'^2 \mu' E'^3}{Q_{0,ps} t} \right)^{1/4} \mathcal{F}(\xi, 0.520, \frac{5}{8}), \\ l_{\tilde{m}}(t) &= 0.3183 \frac{Q_{0,ps} t^{1/2}}{C'}, \end{aligned}$$

 $K$  - storage-toughness

$$\begin{aligned} w_k(\xi, t) &= 0.6828 \left( \frac{K'^2 Q_{0,ps} t}{E'^2} \right)^{1/3} (1-\xi^2)^{1/2}, \\ p_k(\xi, t) &= 0.1831 \left( \frac{K'^4}{E' Q_{0,ps} t} \right)^{1/3}, \\ l_k(t) &= 0.9324 \left( \frac{E' Q_{0,ps} t}{K'} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

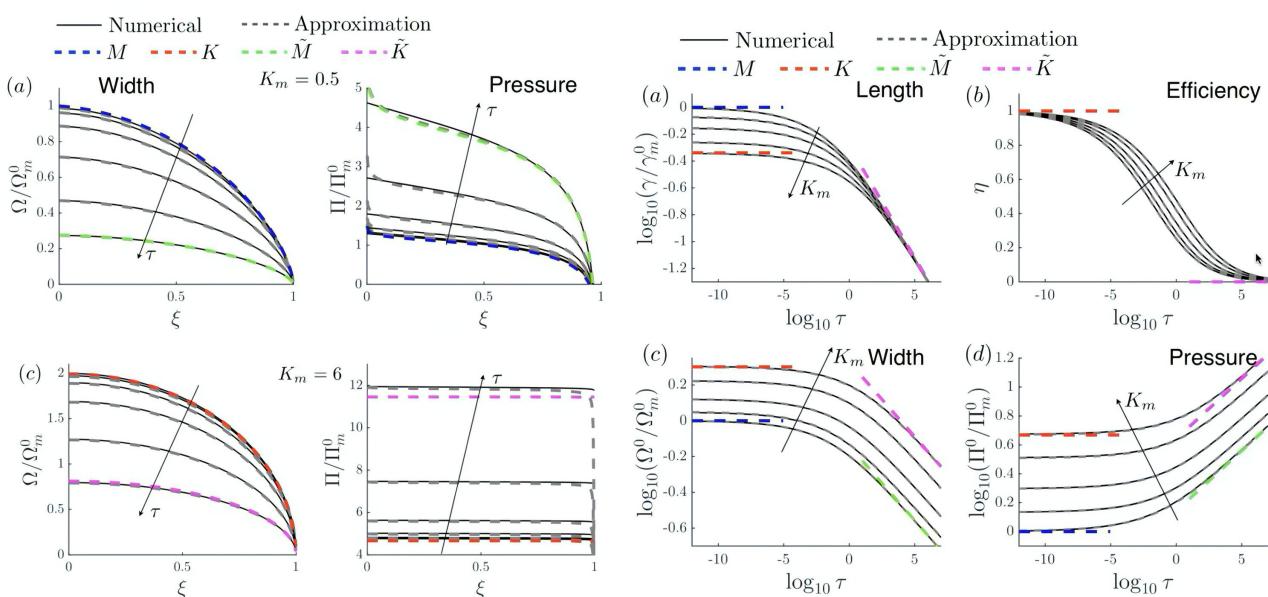
 $\tilde{K}$  - leak-off-toughness

$$\begin{aligned} w_{\tilde{k}}(\xi, t) &= 0.3989 \left( \frac{K'^4 Q_{0,ps}^2 t}{E'^4 C'^2} \right)^{1/4} (1-\xi^2)^{1/2}, \\ p_{\tilde{k}}(\xi, t) &= 0.3133 \left( \frac{K'^4 C'^2}{Q_{0,ps}^2 t} \right)^{1/4}, \\ l_{\tilde{k}}(t) &= 0.3183 \frac{Q_{0,ps} t^{1/2}}{C'}, \end{aligned}$$

Elasticity function:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi, \lambda, \delta) &= \frac{1}{2^{1+\lambda} \pi} \int_0^1 \frac{\partial M(\xi, s)}{\partial s} (1+s)^\lambda (1-s)^\delta ds, \\ M(\xi, s) &= \frac{\xi}{\xi^2 - s^2}, \end{aligned}$$

## Numerical vs. approximate solutions



### Things to remember for the plane strain hydraulic fracture

- Estimation of the solution based on scaling
- Definition of fracture regimes
- The relationship between the regimes for a finite fracture and tip asymptote
- The existence of approximate solution constructed using global volume balance and tip asymptote
- The existence of explicit expressions for limiting or vertex cases
- Parametric space for the problem, two dimensionless parameters, dimensionless toughness and dimensionless time

$M$  - storage-viscosity

No toughness, no leak-off

Viscosity

$$w_m = \beta_m \left( \frac{\mu' V}{E'} \right)^{1/3} \dot{x}^{2/3}$$

$K$  - storage-toughness

No viscosity, no leak-off

Toughness

$$w_k = \frac{K'}{E'} \dot{x}^{1/2}$$

$\tilde{M}$  - leak-off-viscosity

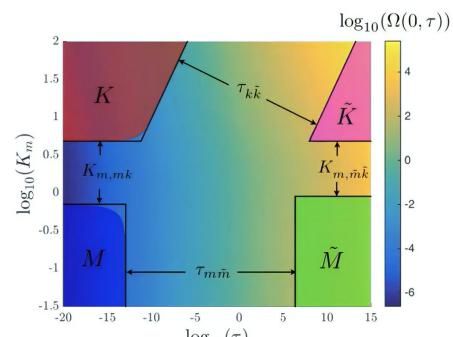
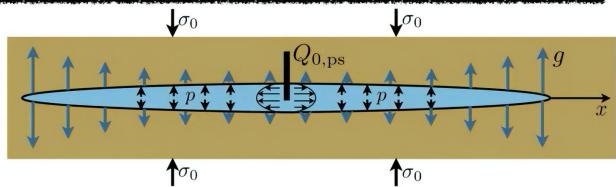
No toughness, large leak-off

Leak-off

$$w_{\tilde{m}} = \beta_{\tilde{m}} \left( \frac{4\mu'^2 V C'^2}{E'^2} \right)^{1/8} \dot{x}^{5/8}$$

$\tilde{K}$  - leak-off-toughness

No viscosity, large leak-off

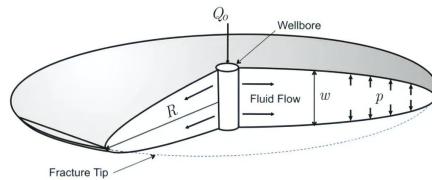


E.V. Dontsov. An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *Int. J. Fract.*, 205:221–237, 2017.

## 4 Лекция 16.03.2021 (Донцов Е.В.)

### 4.1 Математическая модель радиальной трещины ГРП

Radial hydraulic fracture



Governing equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq) + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}} &= Q_0 \delta(r), \\ q &= -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p_n}{\partial r}, \\ p_n(r, t) &= -\frac{E'}{2\pi R} \int_0^R M\left(\frac{r}{R}, \frac{r'}{R}\right) \frac{\partial w(r', t)}{\partial r'} dr', \\ w \rightarrow \frac{K'}{E'}(R-r)^{1/2}, \quad r \rightarrow R. \end{aligned}$$

Scales

$$\begin{aligned} \frac{w_*}{t} &= \frac{q}{R_*} = \frac{C'}{t^{1/2}} = \frac{Q_0}{R_*^2}, \\ q &= \frac{w_*^3 p_*}{\mu' R_*}, \\ p_* &= \frac{E' w_*}{R_*}, \\ w &= \frac{K' R_*^{1/2}}{E'}. \end{aligned}$$

6 equations, 4 unknowns

### Scaling for viscosity-storage solution

Viscosity-storage => no toughness, no leak-off

$$\begin{aligned} \frac{w_*}{t} &= \frac{q}{R_*} = \cancel{\frac{C'}{t^{1/2}}} = \frac{Q_0}{R_*^2}, \\ q &= \frac{w_*^3 p_*}{\mu' R_*}, \\ p_* &= \frac{E' w_*}{R_*}, \\ w &\cancel{=} \frac{K' R_*^{1/2}}{E'}. \end{aligned}$$

Scaling solution

$$R_* = \left( \frac{Q_0^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/9}, \quad w_* = \left( \frac{\mu'^2 Q_0^3 t}{E'^2} \right)^{1/9}, \quad p_* = \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3}$$

M-vertex solution

$$\begin{aligned} w_m(\rho, t) &= 1.1901 \left( \frac{\mu'^2 Q_0^3 t}{E'^2} \right)^{1/9} (1+\rho)^{0.487} (1-\rho)^{2/3}, \\ p_m(\rho, t) &= 2.4019 \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3} \mathcal{F}(\rho, 0.487, \frac{2}{3}), \\ R_m(t) &= 0.6944 \left( \frac{Q_0^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/9}, \end{aligned}$$

### Regimes of propagation for a radial hydraulic fracture

**$M$  - storage-viscosity**

No toughness, no leak-off

**$K$  - storage-toughness**

No viscosity, no leak-off

**$\tilde{M}$  - leak-off-viscosity**

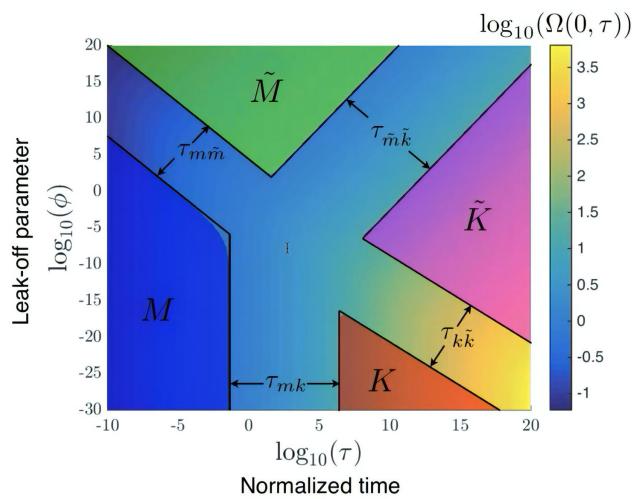
No toughness, large leak-off

**$\tilde{K}$  - leak-off-toughness**

No viscosity, large leak-off

Zones of applicability of limiting solutions  
are defined to within 1% of error

Bounds for these zones (solid black  
lines) are known



$$\phi = \frac{\mu'^3 E'^{11} C'^4 Q_0}{K'^{14}} \quad \tau = \frac{t}{t_{mk}} \quad t_{mk} = \left( \frac{\mu'^5 E'^{13} Q_0^3}{K'^{18}} \right)^{1/2}$$

### Regimes of propagation for radial HF

**$M$  - storage-viscosity**

$$\begin{aligned} w_m(\rho, t) &= 1.1901 \left( \frac{\mu'^2 Q_0^3 t}{E'^2} \right)^{1/9} (1+\rho)^{0.487} (1-\rho)^{2/3}, \\ p_m(\rho, t) &= 2.4019 \left( \frac{\mu' E'^2}{t} \right)^{1/3} \mathcal{F}(\rho, 0.487, \frac{2}{3}), \\ R_m(t) &= 0.6944 \left( \frac{Q_0^3 E' t^4}{\mu'} \right)^{1/9}, \end{aligned}$$

**$K$  - storage-toughness**

$$\begin{aligned} w_k(\rho, t) &= 0.6537 \left( \frac{K'^4 Q_0 t}{E'^4} \right)^{1/5} (1-\rho^2)^{1/2}, \\ p_k(\rho, t) &= 0.3004 \left( \frac{K'^6}{E' Q_0 t} \right)^{1/5}, \\ R_k(t) &= 0.8546 \left( \frac{E' Q_0 t}{K'} \right)^{2/5}. \end{aligned}$$

**$\tilde{M}$  - leak-off-viscosity**

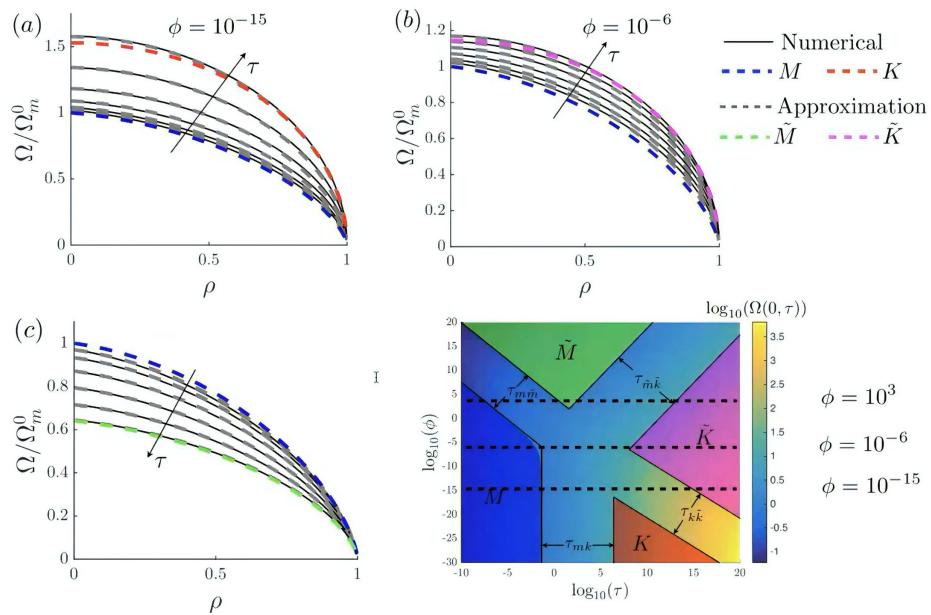
$$\begin{aligned} w_{\tilde{m}}(\rho, t) &= 1.0574 \left( \frac{\mu'^4 Q_0^6 t}{E'^4 C'^2} \right)^{1/16} (1+\rho)^{0.397} (1-\rho)^{5/8}, \\ p_{\tilde{m}}(\rho, t) &= 3.0931 \left( \frac{\mu'^4 E'^{12} C'^6}{Q_0^2 t^3} \right)^{1/16} \mathcal{F}(\rho, 0.397, \frac{5}{8}), \\ R_{\tilde{m}}(t) &= 0.4502 \left( \frac{Q_0^2 t}{C'^2} \right)^{1/4}, \end{aligned}$$

**$\tilde{K}$  - leak-off-toughness**

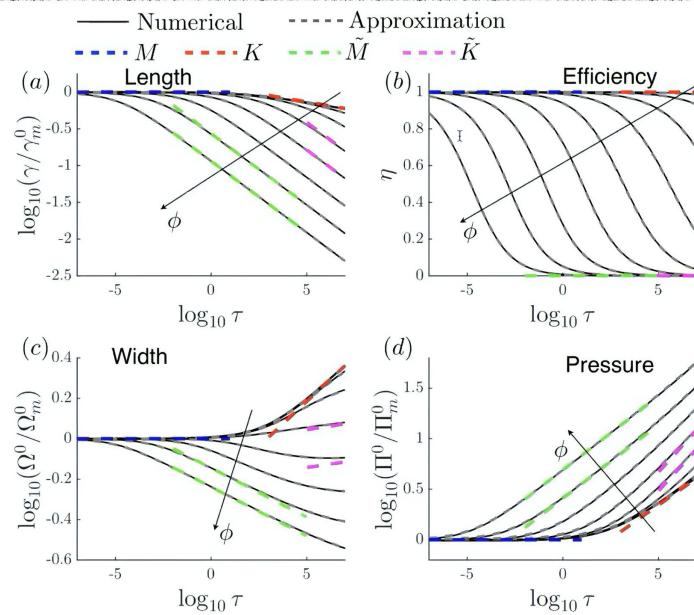
$$\begin{aligned} w_{\tilde{k}}(\rho, t) &= 0.4744 \left( \frac{K'^8 Q_0^2 t}{E'^8 C'^2} \right)^{1/8} (1-\rho^2)^{1/2}, \\ p_{\tilde{k}}(\rho, t) &= 0.4139 \left( \frac{K'^8 C'^2}{Q_0^2 t} \right)^{1/8}, \\ R_{\tilde{k}}(t) &= 0.4502 \left( \frac{Q_0^2 t}{C'^2} \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Elasticity function:  $\mathcal{F}(\rho, \lambda, \bar{\delta}) = \frac{1}{2^{1+\lambda}\pi} \int_0^1 \frac{\partial M(\rho, s)}{\partial s} (1+s)^\lambda (1-s)^{\bar{\delta}} ds,$

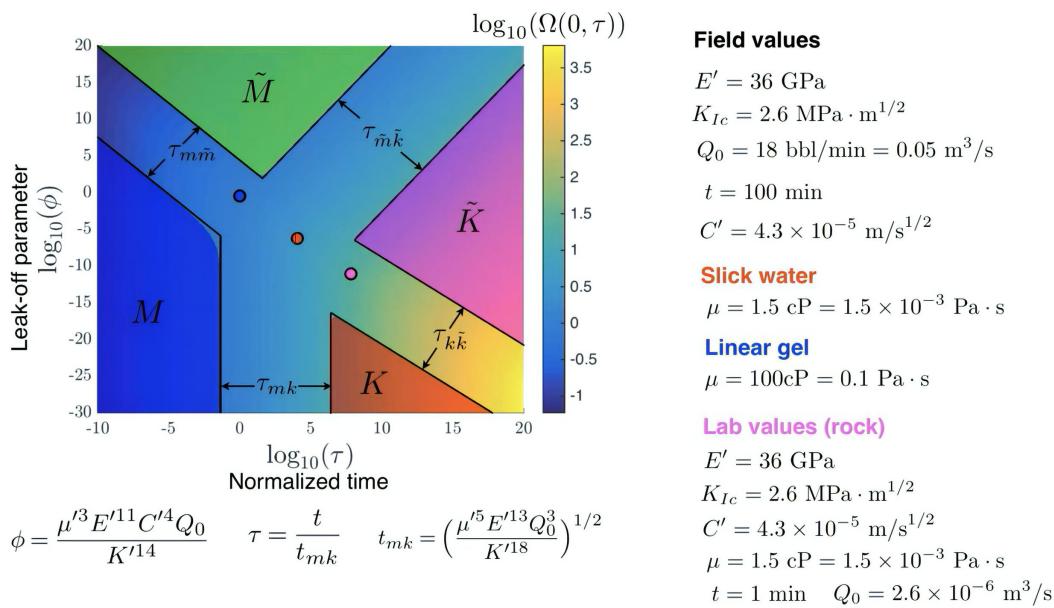
## Comparison with numerical solution



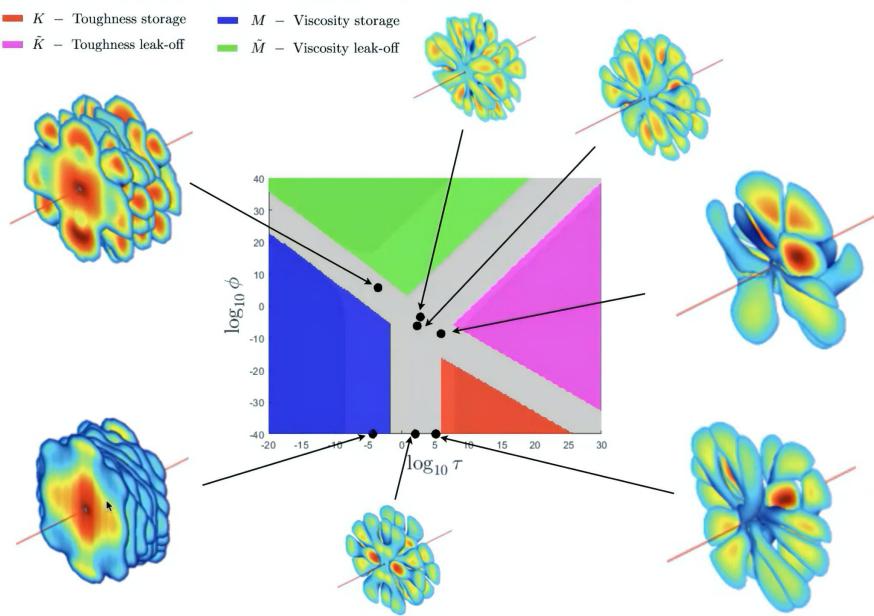
## Comparison with numerical solution



### Radial hydraulic fracture: examples

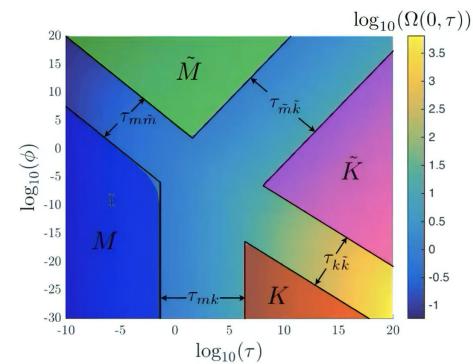
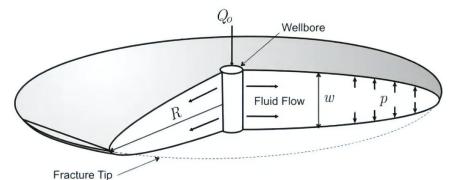
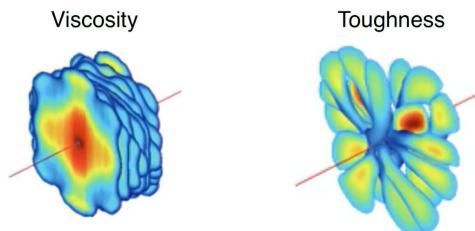


### Application to multiple fractures



### Things to remember for radial hydraulic fracture

- Estimation of the solution based on scaling
- Definition of fracture regimes
- The relationship between the regimes for a finite fracture and tip asymptote (the same as for plane strain)
- The existence of approximate solution constructed using global volume balance and tip asymptote (similar to plane strain)
- The existence of explicit expressions for limiting or vertex cases
- Parametric space for the problem, two dimensionless parameters, dimensionless leak-off and dimensionless time
- Fracture regimes affect morphology of multiple hydraulic fractures

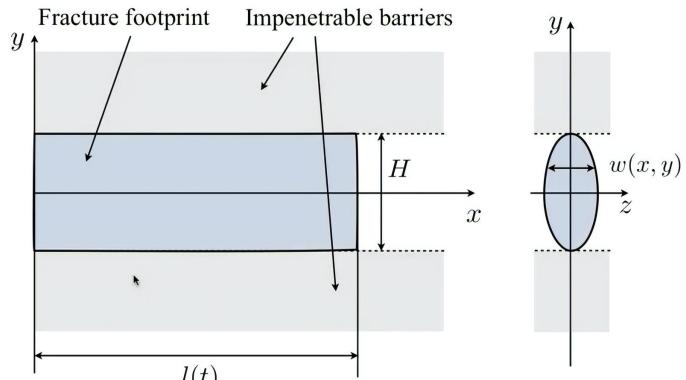


E.V. Donstov. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *R. Soc. open sci.*, 3:160737, 2016.

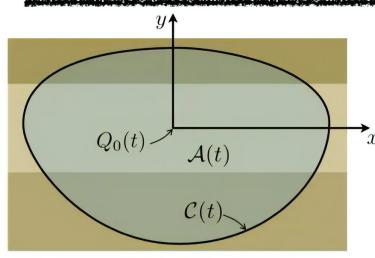
## 4.2 Математическая модель Перкинса-Керна-Нордгрена (модель PKN)

### PKN or constant height hydraulic fracture

- Fracture height is assumed to be constant
- Length  $\gg$  height (long time solution)
- Flux is predominantly horizontal
- Pressure is assumed to be constant in the vertical cross-section
- Far away from the tip, local elasticity applies. That is the pressure is determined by the width at the particular point (as opposed to non-local relation for which the pressure depends on the integral of the width with some kernel)
- Fracture width is elliptical in each cross-section
- These assumptions allow to reformulate the two-dimensional fracture problem as one-dimensional, effectively solving the solution in the vertical direction analytically



### Governing equations for PKN geometry



$$\text{Scaling} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \mu' = 12\mu, \quad K' = \sqrt{\frac{32}{\pi}} K_{Ic}, \quad C' = 2C_l,$$

Apply vertical averaging

$$w(x, y) = \frac{4}{\pi} \bar{w}(x) \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{H}\right)^2}, \quad \bar{w}(x) = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} w(x, y) dy,$$

$$\text{Volume balance} \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x, y)}} = Q_0(t) \delta(x, y),$$

$$\text{Fluid flow} \quad \mathbf{q} = -\frac{w^3}{\mu'} \nabla p,$$

$$\text{Elasticity} \quad p(x, y, t) = \sigma_0(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{A(t)} \frac{w(x', y', t) dx' dy'}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{3/2}}, \quad \xrightarrow{1}$$

$$\text{Propagation} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'}{E'}, & \text{if } V > 0, \\ \frac{K'_I}{E'}, & \text{if } V = 0. \end{cases} \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x),$$

$$\bar{q}_x = -\frac{1}{H \mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-H/2}^{H/2} w^3 dy = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$p(x) = -\frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-l(t)}^{l(t)} \bar{w}(x') \frac{dG(2(x'-x)/H)}{dx'} dx'$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \frac{K'}{E'}$$

### Elasticity equation for PKN fracture

$$p(x) = -\frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-l(t)}^{l(t)} \bar{w}(x') \frac{dG(2(x'-x)/H)}{dx'} dx'$$

$$G(s) = \frac{\sqrt{1+s^2}}{s} E\left(\frac{1}{1+s^2}\right), \quad G(s) \approx \frac{\pi}{2} \text{sign}(s), \quad |s| \gg 1, \quad G(s) \approx \frac{1}{s}, \quad s \ll 1,$$

Far away from the tip ( $x \gg H$ )

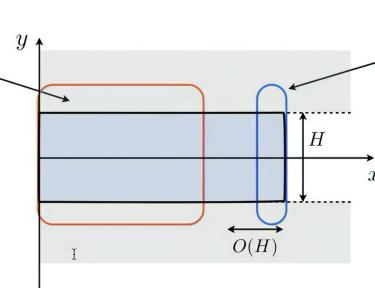
$$p(x) = \frac{2E' \bar{w}(x)}{\pi H},$$

Local elasticity equation

Near the tip ( $x \sim H$ )

$$p(x, t) = \sigma_0 - \frac{E'}{4\pi} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{w(s) ds}{(x-s)^2},$$

Plane strain elasticity equation



## Two options for the solution

---

Local elasticity + special toughness boundary condition

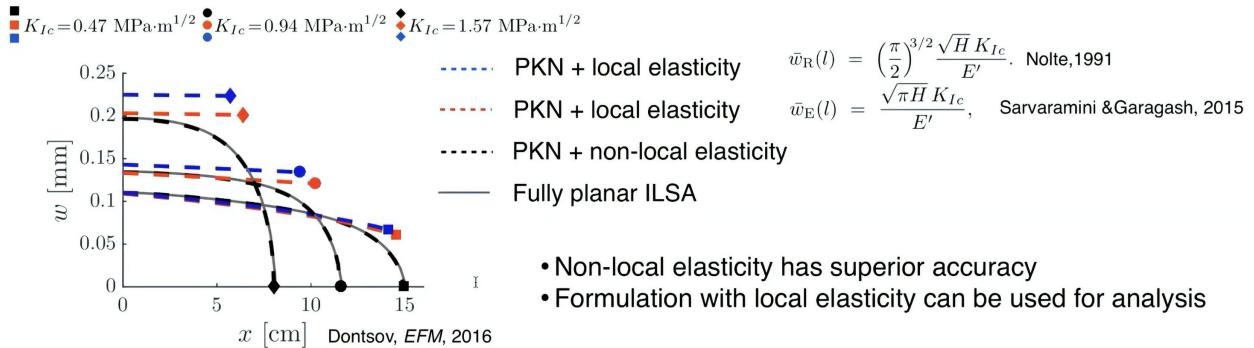
$$p(x) = \frac{2E'\bar{w}(x)}{\pi H},$$

$$\bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}.$$

Non-elasticity + standard toughness boundary condition

$$p(x) = -\frac{2E'}{\pi^2 H} \int_{-l(t)}^{l(t)} \bar{w}(x') \frac{dG(2(x'-x)/H)}{dx'} dx'$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \frac{K'}{E'}$$



## Tip region of PKN fracture

---

Equations for finite fracture

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x),$$

$$\bar{q}_x = -\frac{1}{H\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-H/2}^{H/2} w^3 dy = -\frac{\bar{w}^3}{\pi^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$p(x) = \frac{2E'\bar{w}(x)}{\pi H},$$

$$\bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}.$$

Semi-infinite PKN fracture

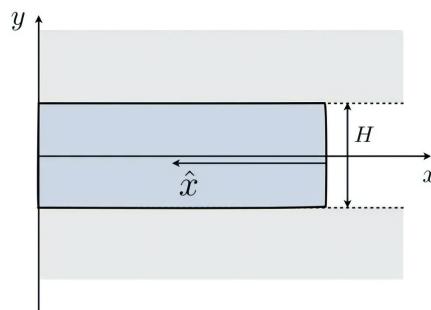
Use moving coordinate

$$\hat{x} = Vt - x$$



$$\frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{d\bar{w}^4}{d\hat{x}} = V\bar{w} + 2C' \sqrt{V\hat{x}},$$

$$\bar{w}(0) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}.$$



### Known solutions for the tip region

$$\frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{d\bar{w}^4}{d\hat{x}} = V\bar{w} + 2C'\sqrt{V\hat{x}}, \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Limiting solutions} \\ \bar{w}_k = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}, \quad \bar{w}_m = \left(\frac{3\pi^3 \mu H V}{2E'}\right)^{1/3} \hat{x}^{1/3}, \quad \bar{w}_{\tilde{m}} = \left(\frac{8\pi^3 \mu H C' V^{1/2}}{3E'}\right)^{1/4} \hat{x}^{3/8}, \\ \text{Toughness} \qquad \qquad \qquad \text{Viscosity} \qquad \qquad \qquad \text{Leak-off} \end{array}$$

### Exact edge solutions

$$\bar{w}_{km} = (\bar{w}_k^3 + \bar{w}_m^3)^{1/3}, \quad \bar{w}_{k\tilde{m}} = (\bar{w}_k^4 + \bar{w}_{\tilde{m}}^4)^{1/4}.$$

I

Less accurate, but simple approximation

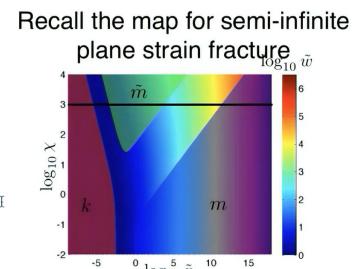
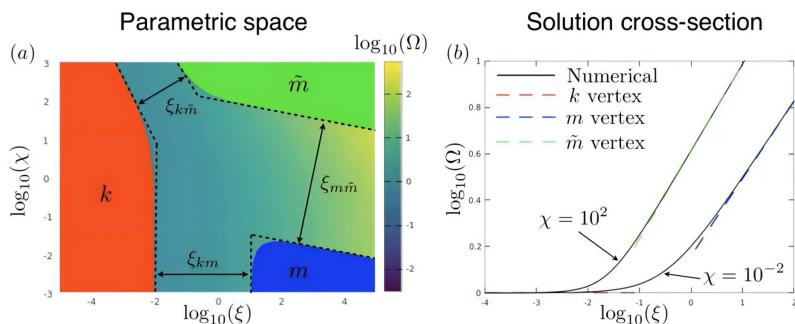
$$\bar{w}_{m\tilde{m}k} = (\bar{w}_k^p + \bar{w}_m^p + \bar{w}_{\tilde{m}}^p)^{1/p}, \quad p = 3.4,$$

More accurate approximation

$$\bar{w}_{m\tilde{m}k} = [w_{km}(\bar{w}_{km}^4 + \bar{w}_{\tilde{m}}^4)^{1/4} + w_{k\tilde{m}}(\bar{w}_{k\tilde{m}}^3 + \bar{w}_m^3)^{1/3}] [w_{km} + w_{k\tilde{m}}]^{-1},$$

### Parametric space

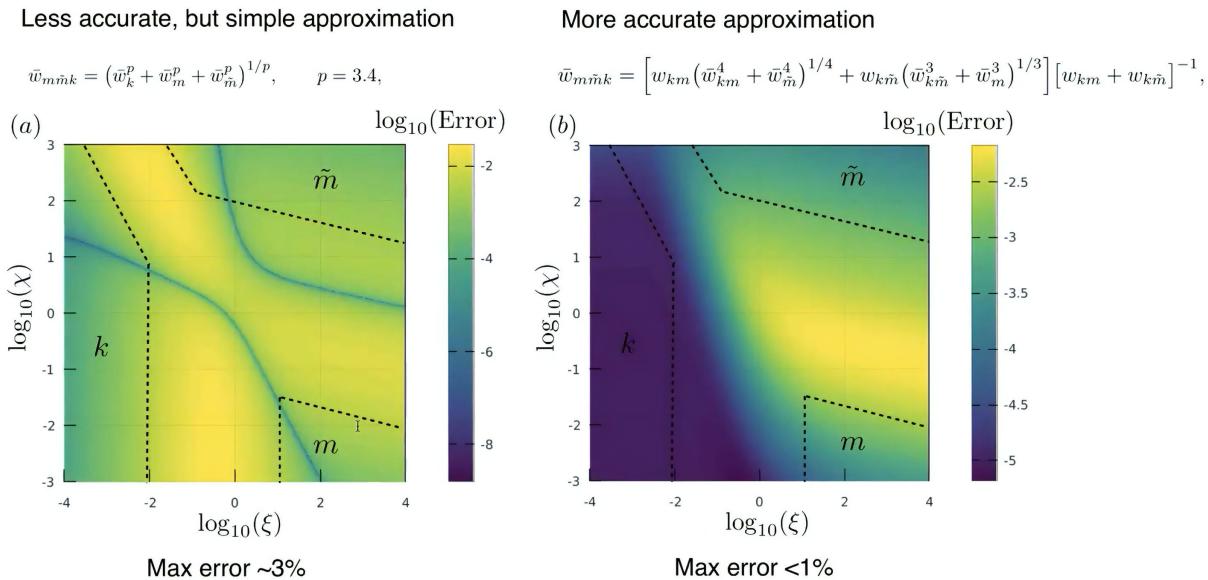
<b>Original equation</b> $\frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{d\bar{w}^4}{d\hat{x}} = V\bar{w} + 2C'\sqrt{V\hat{x}},$ $\bar{w}(0) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'},$ $\Omega = \frac{\bar{w}}{\bar{w}_k} = \frac{E'\bar{w}}{(\pi H)^{1/2} K_{Ic}}, \quad \xi = \frac{\pi^{3/2} \mu V E'^2 \hat{x}}{2K_{Ic}^3 H^{1/2}}, \quad \chi = \left(\frac{8C'^2 K_{Ic}}{\pi^{5/2} \mu H^{1/2} V^2}\right)^{1/2}.$	<b>Scaling</b> $\rightarrow$ $\frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{1}{\Omega^2} + \frac{\chi \xi^{1/2}}{\Omega^3}, \quad \Omega(0) = 1.$ $\rightarrow$ $\Omega_k = 1, \quad \Omega_m = (3\xi)^{1/3}, \quad \Omega_{\tilde{m}} = \left(\frac{8\chi}{3}\right)^{1/4} \xi^{3/8},$	<b>Vertex solutions</b> Recall the map for semi-infinite plane strain fracture
--	---	---



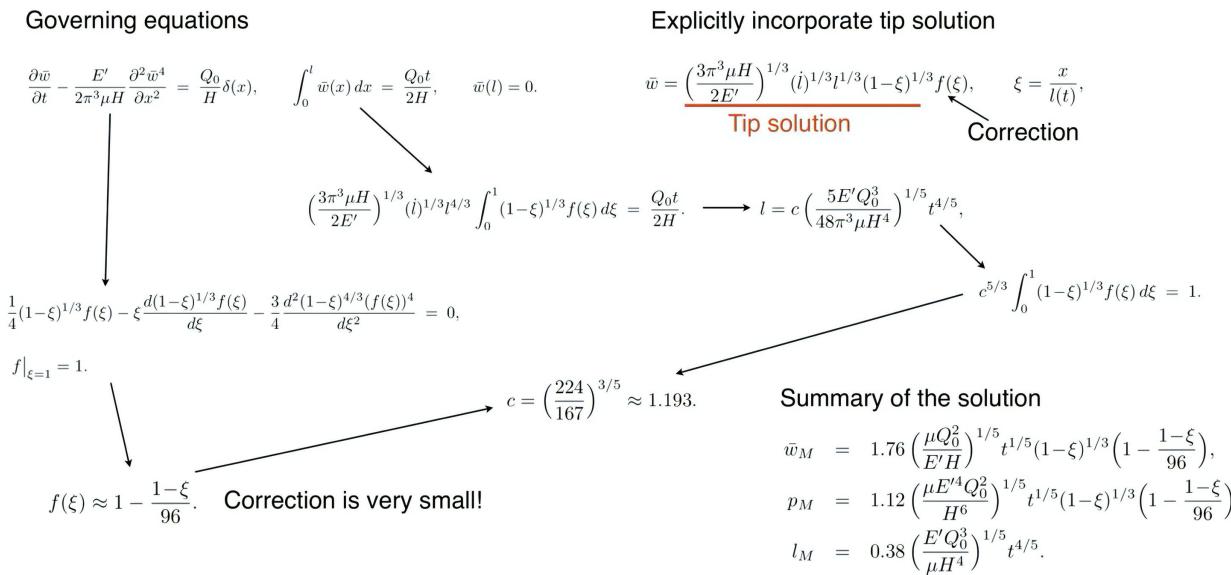
### Transition zones

$$\begin{aligned} \xi_{km} &= \xi, & \xi_{km,1} &\approx 0.010, & \xi_{km,2} &\approx 11, \\ \xi_{k\tilde{m}} &= \xi \chi^{2/3}, & \xi_{k\tilde{m},1} &\approx 0.062, & \xi_{k\tilde{m},2} &\approx 4.4, \\ \xi_{m\tilde{m}} &= \xi \chi^6, & \xi_{m\tilde{m},1} &\approx 1.85 \times 10^{-8}, & \xi_{m\tilde{m},2} &\approx 2.1 \times 10^{12}. \end{aligned}$$

### Accuracy of the approximations



### Vertex solutions for the finite fracture: storage viscosity



## Vertex solutions for the finite fracture: leak-off viscosity

### Governing equations

$$-\frac{E'}{2\pi^3\mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad 2C' \int_0^l \sqrt{t-t_0(x)} dx = \frac{Q_0 t}{2H}, \quad \bar{w}(l) = 0.$$

$\downarrow$

$$l \propto t^\alpha \quad t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$$

$$2C't^{1/2}l \int_0^1 \sqrt{1-\xi^{1/\alpha}} d\xi = \frac{Q_0 t}{2H} \xrightarrow{\alpha=1/2} l = \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}.$$

$$-\frac{E'}{2\pi^3\mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t}\sqrt{1-(x/l)^2}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x), \quad \bar{w}(l) = 0,$$

$\downarrow$

$$\bar{w} = \left( \frac{2\pi\mu Q_0^2}{E'C'H} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi), \quad g(\xi) = \left[ \xi \left( \sin^{-1}(\xi) - \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{1-\xi^2} \right]^{1/4}, \quad \xi = \frac{x}{l}.$$

$\downarrow$

$$g(\xi) \approx \left( \frac{8}{9} \right)^{1/8} \frac{(1-\xi)^{3/8}}{C'} \left[ 1 - \left( 1 - \left( \frac{9}{8} \right)^{1/8} \right) (1-\xi) \right].$$

**Tip solution**

**Correction**

Correction is very small!

### I Summary of the solution

$$\bar{w}_M = \left( \frac{2\pi\mu Q_0^2}{E'C'H} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi),$$

$$p_M = \left( \frac{32\mu E'^3 Q_0^2}{\pi^3 C' H^5} \right)^{1/4} t^{1/8} g(\xi),$$

$$l_M = \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}.$$

## Vertex solutions for the finite fracture: storage and leak-off toughness

No viscosity implies no pressure gradient  $\Rightarrow$

Width is spatially constant and is determined by the boundary condition at the tip

### Storage toughness

$$\int_0^l \bar{w}(x) dx = \frac{Q_0 t}{2H}, \quad \bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}.$$

### Leak-off toughness

$$\int_0^l 2C' \sqrt{t-t_0(x)} dx = \frac{Q_0 t}{2H}, \quad \bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{Ic}}{E'}.$$

$\downarrow$

$$l \propto t^\alpha \quad t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$$

$$2C't^{1/2}l \int_0^1 \sqrt{1-\xi^{1/\alpha}} d\xi = \frac{Q_0 t}{2H} \xrightarrow{\alpha=1/2} l = \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}.$$

### Summary of the solution

$$\bar{w}_K = \frac{K_{Ic} \sqrt{\pi H}}{E'},$$

$$p_K = \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}},$$

$$l_K = \frac{E' Q_0 t}{\sqrt{4\pi} K_{Ic} H^{3/2}}.$$

### I Summary of the solution

$$\bar{w}_{\tilde{K}} = \frac{K_{Ic} \sqrt{\pi H}}{E'},$$

$$p_{\tilde{K}} = \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}},$$

$$l_{\tilde{K}} = \frac{Q_0 t^{1/2}}{\pi C' H}.$$

## Fast approximate solution for a finite PKN fracture

We saw earlier that all the vertex solutions are approximated accurately by the tip solution. Therefore, the solution is sought in the following form:

$$\bar{w} = \bar{w}_a(1-\xi)^\delta, \quad \bar{w}_a = \bar{w}_{m\tilde{m}k}(x=l, V=\dot{l}) \quad \delta = \frac{d \log(\bar{w}_{m\tilde{m}k})}{d \log(\hat{x})}, \quad \xi = \frac{x}{l},$$

Full solution      Spatial behavior from asymptote  
Tip asymptote

I                          Global volume balance

$$\int_0^l [\bar{w}(x) + 2C' \sqrt{t-t_0(x)}] dx = \frac{Q_0 t}{2H}.$$

$$\downarrow \quad l \propto t^\alpha \quad t_0(x) = t(x/l)^{1/\alpha}$$

$$\frac{\bar{w}_a(l, \alpha l/t)l}{1+\delta} + \sqrt{\pi} C' t^{1/2} l \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha + \frac{3}{2})} = \frac{Q_0 t}{2H},$$

$$\delta = \frac{d \log(\bar{w}_{m\tilde{m}k})}{d \log(\hat{x})}, \quad \alpha = \frac{d \log(l)}{d \log(t)},$$

This system of equations can be solved quickly

## Scaling

### Original system of equations

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{E'}{2\pi^3 \mu H} \frac{\partial^2 \bar{w}^4}{\partial x^2} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H} \delta(x),$$

$$\bar{w}(l) = \frac{\sqrt{\pi H} K_{lc}}{E'},$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\bar{q}_x(l)}{\bar{w}(l)} = -\frac{2E'}{3\pi^3 \mu H} \frac{\partial \bar{w}^3}{\partial x} \Big|_{x=l},$$

### Dimensionless system of equations

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} - \frac{\xi \lambda}{\lambda} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \Omega^4}{\partial \xi^2} + \frac{\phi}{\sqrt{\tau-\tau_0(\xi)}} = \delta(\xi),$$

$$\Omega(1) = 1, \quad \text{I}$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{4}{3\lambda} \frac{\partial \Omega^3}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}.$$

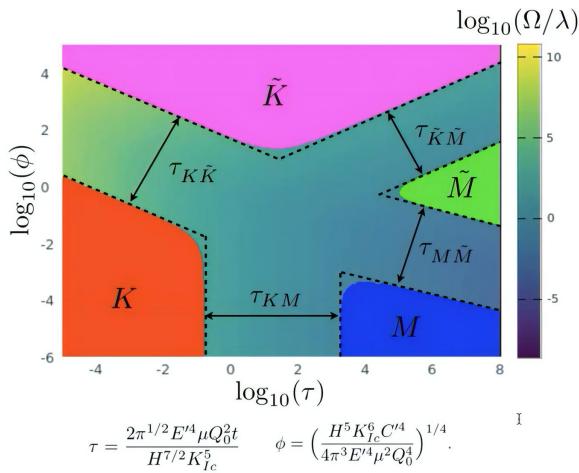
Scaling

$\Omega = \frac{\bar{w}}{w_*}, \quad \lambda = \frac{l}{l_*}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad \xi = x/l(t)$	$\phi = \left( \frac{H^5 K_{lc}^6 C'^4}{4\pi^3 E'^4 \mu^2 Q_0^4} \right)^{1/4}.$
$w_* = \frac{(\pi H)^{1/2} K_{lc}}{E'}, \quad l_* = \frac{H^2 K_{lc}^4}{2\pi E'^3 \mu Q_0}, \quad t_* = \frac{H^{7/2} K_{lc}^5}{2\pi^{1/2} E'^4 \mu Q_0^2}.$	

The dimensionless system of equations can be solved numerically using standard finite difference technique.

## Parametric space

- Parametric space is computed using the fast solution
- Zones of applicability of the vertex solutions are indicated
- The zone boundaries are quantified



**M** - storage-viscosity

No toughness, no leak-off

**K** - storage-toughness

No viscosity, no leak-off

**M-tilde** - leak-off-viscosity

No toughness, large leak-off

**K-tilde** - leak-off-toughness

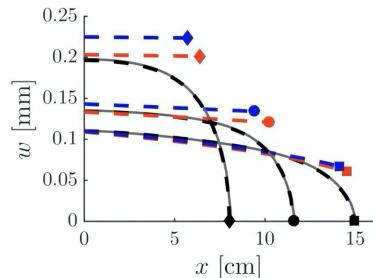
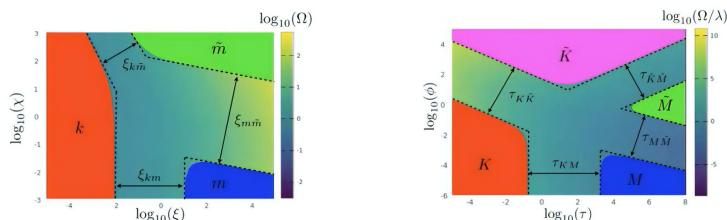
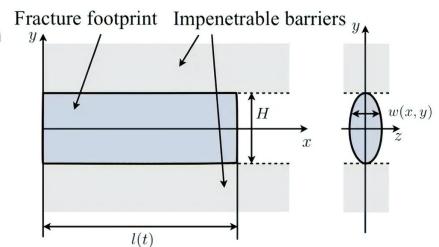
No viscosity, large leak-off

### Transitions

$$\begin{aligned}
 \tau_{MK} &= \tau, & \tau_{MK,1} &= 0.16, & \tau_{MK,2} &= 1.6 \times 10^3, \\
 \tau_{K\bar{K}} &= \tau\phi^2, & \tau_{K\bar{K},1} &= 5.6 \times 10^{-5}, & \tau_{K\bar{K},2} &= 2.8 \times 10^3, \\
 \tau_{\bar{K}\tilde{M}} &= \tau\phi^{-2}, & \tau_{\bar{K}\tilde{M},1} &= 0.18, & \tau_{\bar{K}\tilde{M},2} &= 6.6 \times 10^4, \\
 \tau_{M\tilde{M}} &= \tau\phi^{10/3}, & \tau_{M\tilde{M},1} &= 2.3 \times 10^{-7}, & \tau_{M\tilde{M},2} &= 2.8 \times 10^3.
 \end{aligned}$$

## Things to remember

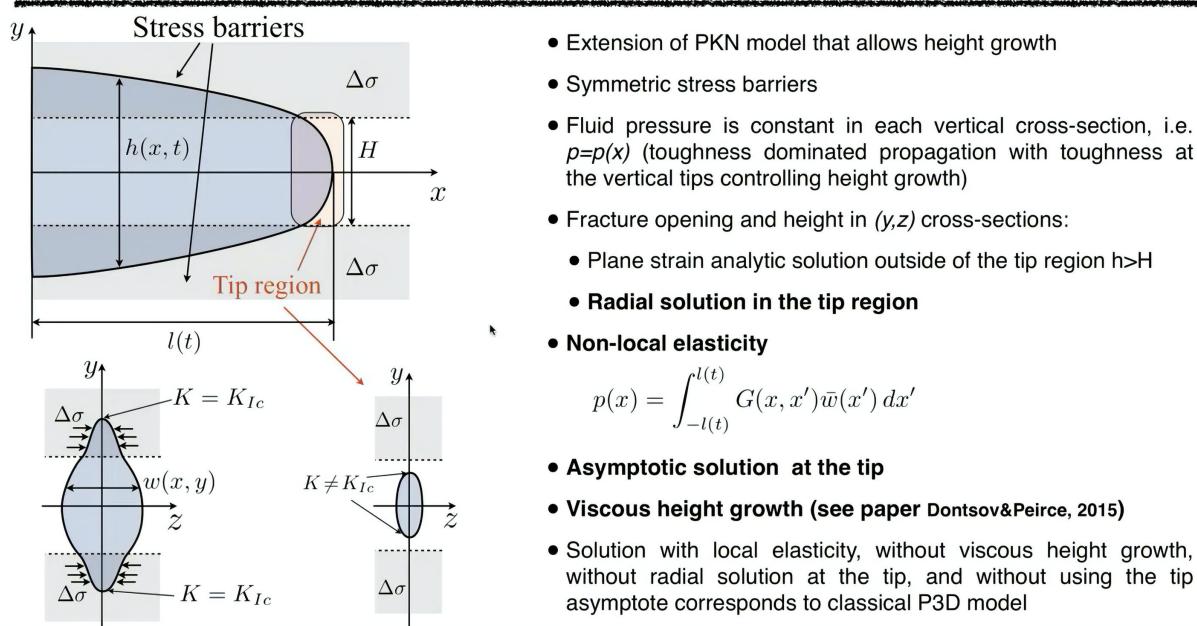
- Assumptions of PKN model, including constant height, length  $\gg$  height, horizontal flux, constant pressure in each vertical cross-section, elliptical width in each vertical cross-section
- There are two approaches to solve the problem:
  - Use non-local elasticity, which is good for numerical scheme and leads to superior accuracy
  - Use local elasticity with a specific boundary condition at the tip, which is less accurate, but easier for analysis
- PKN fracture has its own formulation for the tip region, which is different from that for a semi-infinite plane strain fracture, approximate solution exists
- Parametric space for the finite fracture is evaluated
- Limiting vertex solutions exist, as well as the global approximate solution



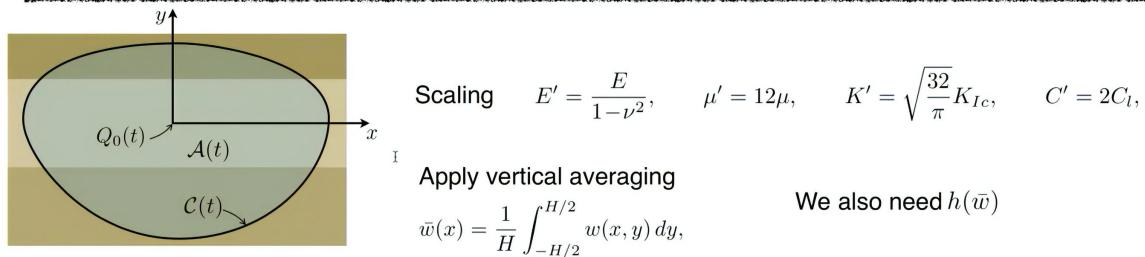
## 5 Лекция 23.03.2021 (Донцов Е.В.)

### 5.1 Математическая модель EP3D (Enhanced pseudo-3D model)

Enhanced pseudo-3D (EP3D) model

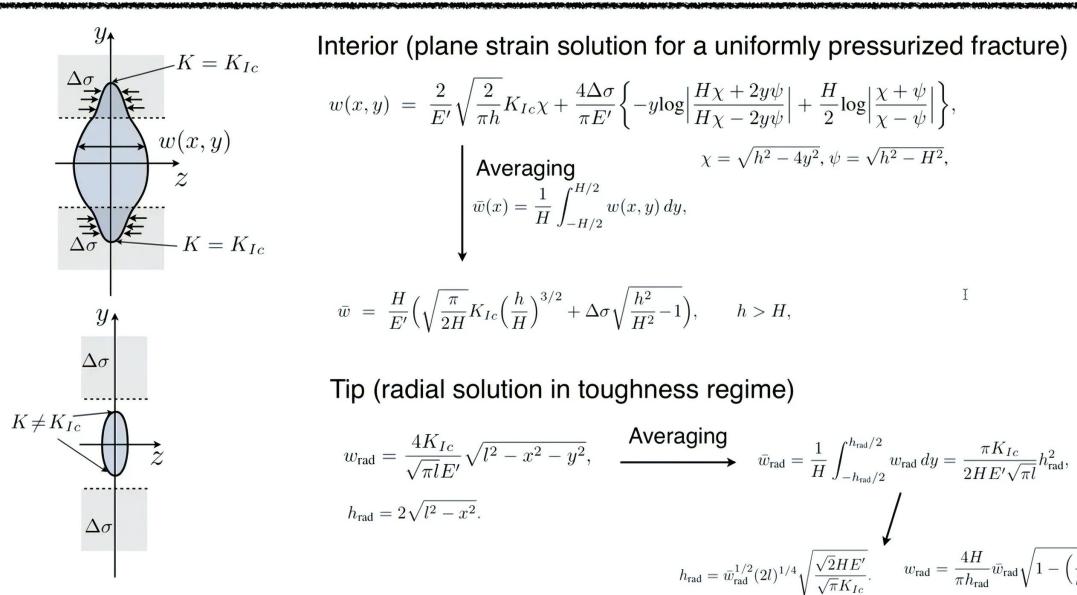


Governing equations

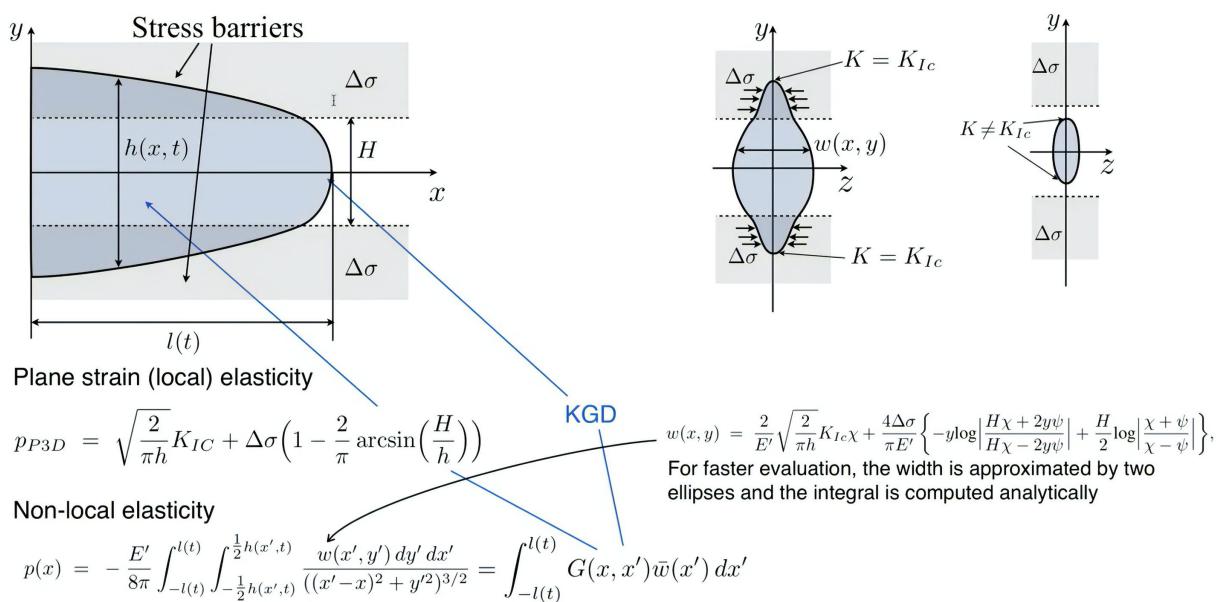


Volume balance	$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x, y)}} = Q_0(t)\delta(x, y),$	$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t-t_0(x)}} = \frac{Q_0}{H}\delta(x),$
Fluid flow	$\mathbf{q} = -\frac{w^3}{\mu'} \nabla p,$	$\bar{q}_x = -\frac{1}{H\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} w^3 dy,$
Elasticity	$p(x, y, t) = \sigma_0(y) - \frac{E'}{8\pi} \int_{\mathcal{A}(t)} \frac{w(x', y', t) dx' dy'}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]^{3/2}},$	$\Rightarrow$
Propagation	$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \begin{cases} \frac{K'}{E'}, & \text{if } V > 0, \\ \frac{K'_l}{E'}, & \text{if } V = 0. \end{cases}$	$p(x) = \int_{-l(t)}^{l(t)} G(x, x') \bar{w}(x') dx'$
		$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{w}{s^{1/2}} = \frac{K'}{E'}$

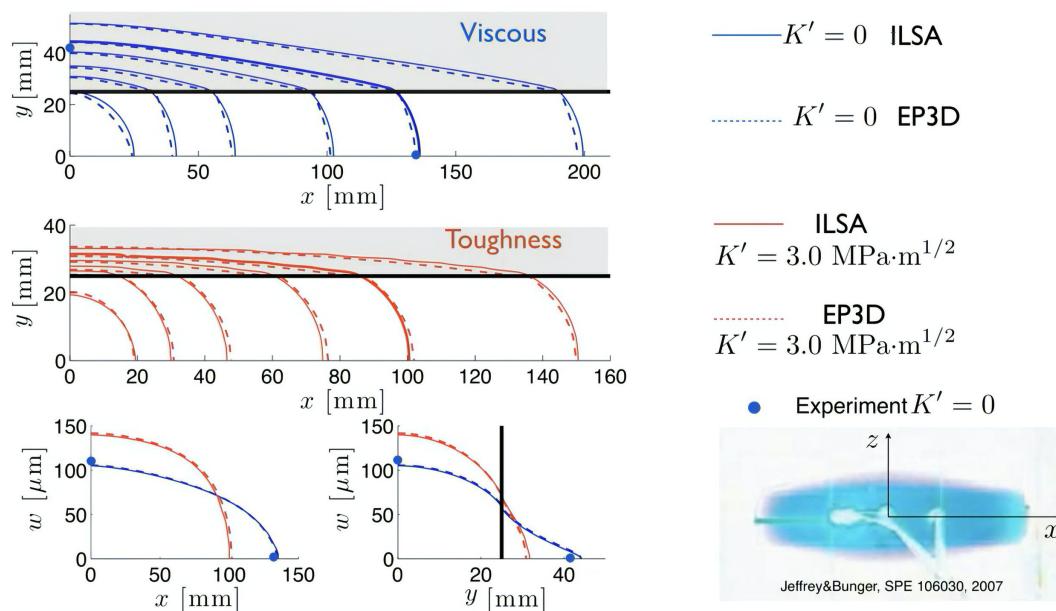
### Width solution



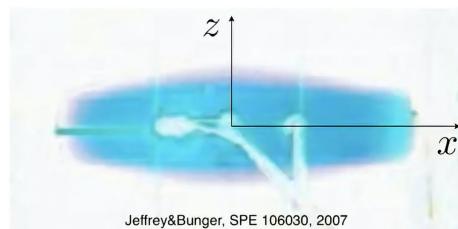
### Non-local elasticity



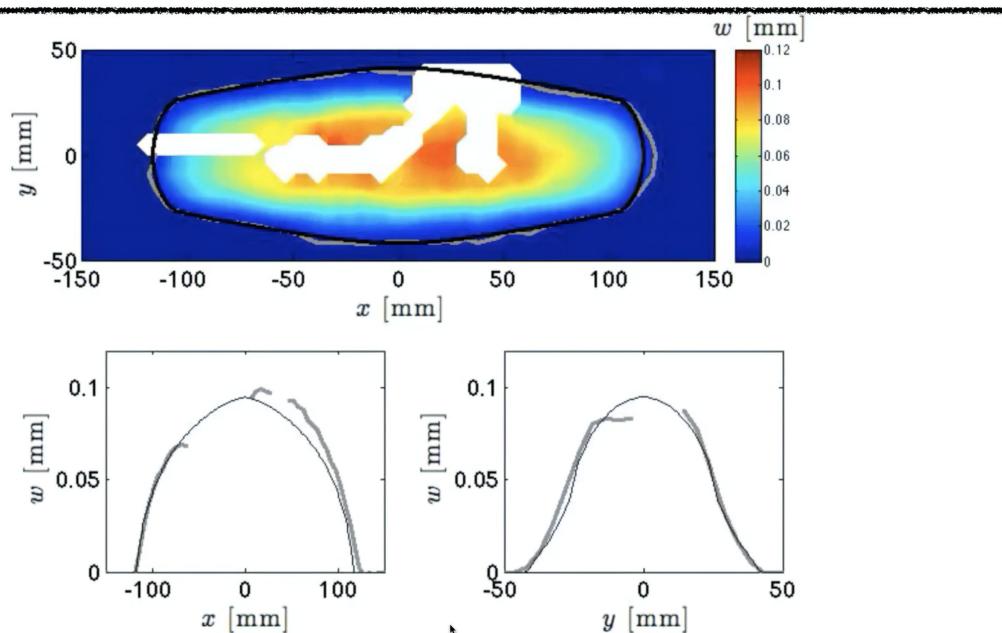
## Enhanced P3D (EP3D) vs. ILSA



Comparison with experiment

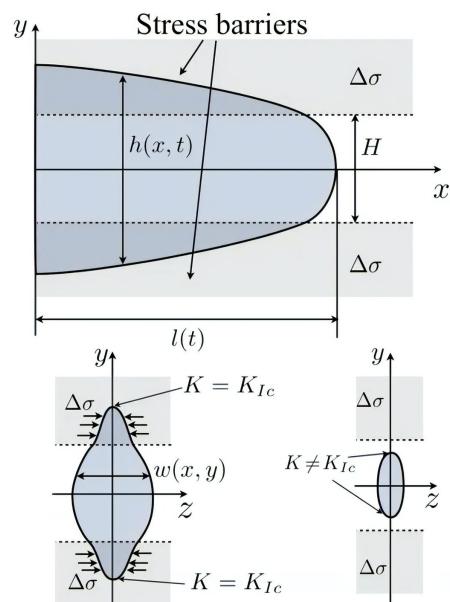
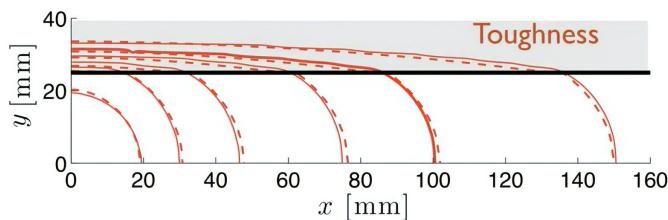


## Comparison with experiment



## Things to remember

- Assumptions of P3D model, including equilibrium height growth model, length  $\gg$  height, horizontal flux, constant pressure in each vertical cross-section, plane strain solution for width in each vertical cross-section
- Non-local elasticity and other corrections allow to significantly improve accuracy of the model
- There are extensions for asymmetric stress layers as well as multiple layers
- This model is suited more for numerical calculations, rather than analysis. However, analysis of the classical P3D model can be found in Adachi et. al, 2010.



## 5.2 Краткое повторение рассмотренных моделей

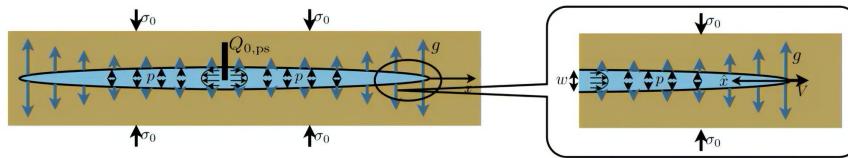
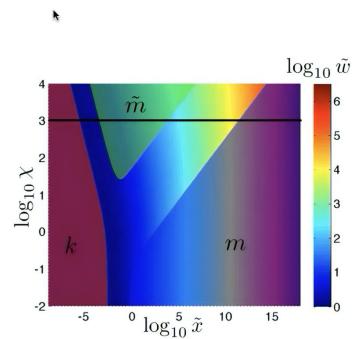
Recall main learnings: fundamentals and semi-infinite fracture

- Work towards a balanced life and invest in your knowledge!

An investment in knowledge pays the best interest.

-Benjamin Franklin

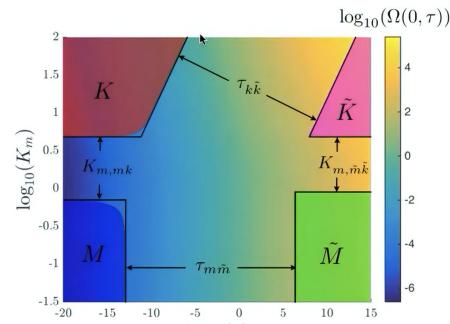
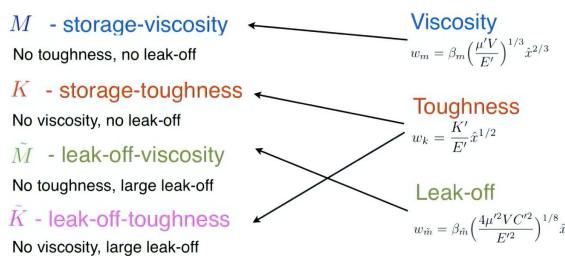
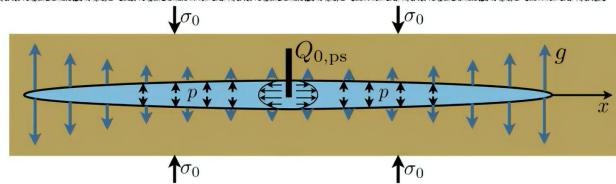
- Essential pieces of a hydraulic fracture model: volume balance, fluid flow, elasticity, propagation, proppant transport
- Derivation of the governing equations for planar and plane strain fracture geometries
- Semi-infinite hydraulic fracture as a model for the tip region
  - There are three limiting analytic solutions: toughness, viscosity, and leak-off
  - The global solution gradually transitions from one limiting case to another
  - There is computationally efficient approximate solution for the problem that can be used as a propagation condition for finite fractures



$$w \propto \hat{x}^{2/3} \quad w \propto \hat{x}^{5/8} \quad w \propto \hat{x}^{1/2}$$

Recall main learnings: plane strain fracture

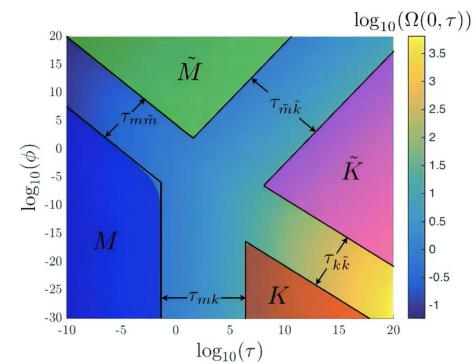
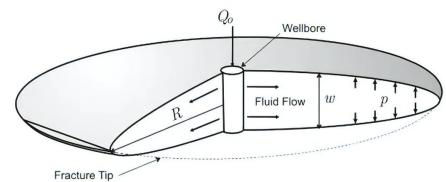
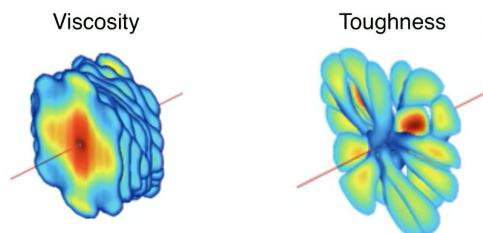
- Estimation of the solution based on scaling
- Definition of fracture regimes
- The relationship between the regimes for a finite fracture and tip asymptote
- The existence of approximate solution constructed using global volume balance and tip asymptote
- The existence of explicit expressions for limiting or vertex cases
- Parametric space for the problem, two dimensionless parameters, dimensionless toughness and dimensionless time



E.V. Dontsov. An approximate solution for a plane strain hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *Int. J. Fract.*, 205:221–237, 2017.

### Recall main learnings: radial fracture

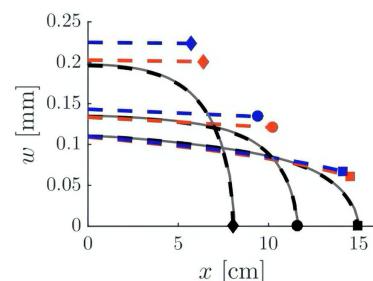
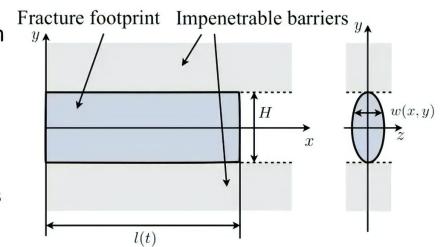
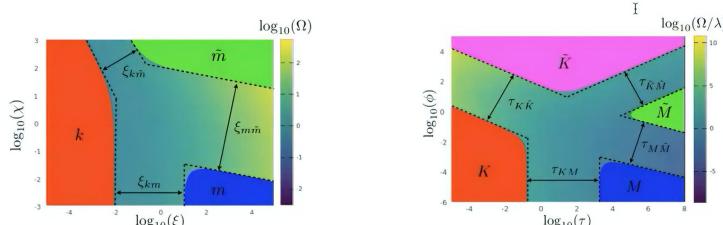
- Estimation of the solution based on scaling
- Definition of fracture regimes
- The relationship between the regimes for a finite fracture and tip asymptote (the same as for plane strain)
- The existence of approximate solution constructed using global volume balance and tip asymptote (similar to plane strain)
- The existence of explicit expressions for limiting or vertex cases
- Parametric space for the problem, two dimensionless parameters, dimensionless leak-off and dimensionless time
- Fracture regimes affect morphology of multiple hydraulic fractures



E.V. Dontsov. An approximate solution for a penny-shaped hydraulic fracture that accounts for fracture toughness, fluid viscosity, and leak-off. *R. Soc. open sci.*, 3:160737, 2016.

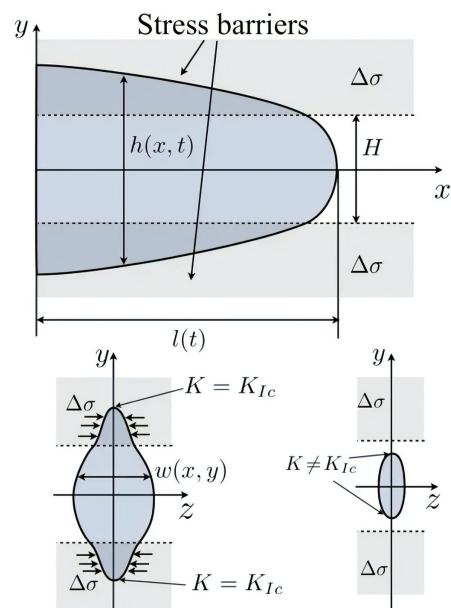
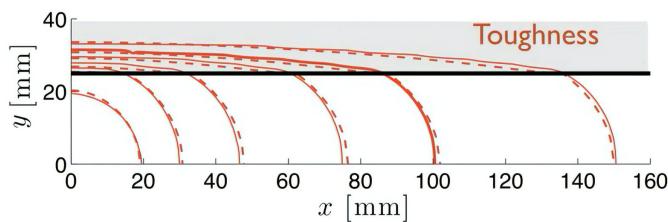
### Recall main learnings: PKN fracture

- Assumptions of PKN model, including constant height, length  $\gg$  height, horizontal flux, constant pressure in each vertical cross-section, elliptical width in each vertical cross-section
- There are two approaches to solve the problem:
  - Use non-local elasticity, which is good for numerical scheme and leads to superior accuracy
  - Use local elasticity with a specific boundary condition at the tip, which is less accurate, but easier for analysis
- PKN fracture has its own formulation for the tip region, which is different from that for a semi-infinite plane strain fracture, approximate solution exists
- Parametric space for the finite fracture is evaluated
- Limiting vertex solutions exist, as well as the global approximate solution



## Recall main learnings: pseudo-3D fracture

- Assumptions of P3D model, including equilibrium height growth model, length  $\gg$  height, horizontal flux, constant pressure in each vertical cross-section, plane strain solution for width in each vertical cross-section
- Non-local elasticity and other corrections allow to significantly improve accuracy of the model
- There are extensions for asymmetric stress layers as well as multiple layers
- This model is suited more for numerical calculations, rather than analysis. However, analysis of the classical P3D model can be found in Adachi et. al, 2010.



## 6 Лекция 02.04.2021 (Валов А.В.)

### 6.1 Модель Planar3D ILSA: основные уравнения, классификация элементов

## 7 Лекция 08.04.2021 (Валов А.В.)

### 7.1 Модель Planar3D ILSA: дискретизация, поиск фронта, алгоритм

## 8 Лекция 13.04.2021 (Байкин А.Н.)

### 8.1 Модель Planar3D Biot: постановка задачи, перенос граничных условий

## 9 Лекция 20.04.2021 (Байкин А.Н.)

### 9.1 Модель Planar3D Biot: слабая постановка, штраф, пороупругие эффекты

## 10 Лекция 27.04.2021 (Байкин А.Н.)

### 10.1 Перенос проппанта: постановка задачи, обезразмеривание, оседание

## 11 Лекция 30.04.2021 (Байкин А.Н.)

### 11.1 Перенос проппанта: осреднение, численный алгоритм, бриджинг

## 12 Лекция 11.05.2021 (Байкин А.Н.)

### 12.1 Моделирование течения жидкости в скважине

Мы с вами движемся дальше. Сегодня у нас будут тема про моделирование скважин. Т.е. до этого мы рассматривали преимущественно именно процессы в самой трещине, процессы в окружающем пласте (такие как утечки или деформация породы), а закачка всегда предполагалась на забое скважины (расход задавался на входе в саму трещину). Но вообще говоря у нас с вами есть скважины и то давление на входе в трещину, которое мы получаем в расчётах, не совпадает с давлением, которое мы получаем при измерении какими-то приборами (как на поверхности, так и когда мы опускаем датчик давления вниз к забою).

Зачем нам необходимо моделировать скважину?

Во-первых, чтобы знать, какое давление на забое скважины и как оно соотносится с давлением на устье скважины. Почему это важно? С одной стороны, можно было бы сказать: давайте поставим датчик давления на забое и всё будет классно, но этот датчик давления будет стоять не на самой трещине (т.е. между датчиком и трещиной будет либо участок трубы, либо как минимум участок с перфораций вдоль которых возникает падение давления из-за трения; в итоге, измеряемое давление ВНР будет немного выше, чем давление на входе в трещину). Датчик забойного давления ВНР практически никогда не ставят, потому что это дорого; обычно мы знаем только давление на устье WHP.

Чтобы осуществить пересчёт ВНР через известное WHP нам необходимо учесть падение давления за счёт трения жидкости при движении по трубе и гидростатическое давление. Т.е. получаем, что за счёт трения давление на забое снижается (относительно WHP), а за счёт гидростатики давление на забое увеличивается (относительно WHP).

Кроме того, скважину интересно моделировать, чтобы объяснить наблюдаемый hammer effect: при резком закрытии скважины наблюдаются колебательные движения жидкости между скважиной и трещиной, которые имеют форму затухающих колебаний. И по этим затухающим колебаниям пытаются проводить диагностику. Как минимум говорят, что если есть hammer effect, то связь между скважиной и трещиной достаточно хорошая (т.е. перфорацию сделали достаточно качественно). Дальше по hammer эффекту пытаются оценить размеры трещины (ширину, длину).

Ещё дальше пытаются понять, какой порт заработал (если есть несколько портов) – правда это уже немножко другая технология, которая называется tube waves от компании Schlumberger.

Для чего ещё моделировать скважину?

Если мы запустили пульсы проппанта (с определённой концентрацией) наверху (на устье), то никто не говорит, что они в таком же виде дойдут до забоя. Вообще говоря, они могут размазаться. Сегодня мы размазывание не будем рассматривать, потому что для этого нужна двухскоростная модель, а сегодня мы рассмотрим только односкоростную модель. Но вообще говоря из-за того, что у нас есть профиль скорости, частички проппанта будут собираться (проводиться) к центру.

Размазывание концентрации проппанта важно моделировать, чтобы понимать, какое значение концентрации будет на входе в трещину.

Замечание аудитории. Слышали, что при движении по круглой трубе частички проппанта будут собираться в кольцо на расстоянии 0.6 радиуса от центра. Говорят, что это связано с тем, что сами частички проппанта могут крутиться вокруг своей оси.

Сегодня рассмотрим модель попроще, чтобы вы поняли общую схему, а дальше уже можно придумывать более сложные модели (главное понять, какой эффект хочется описать).

Теперь давайте приступим к самой модели.

Основные предположения модели:

- 1) наклонная скважина переменного радиуса  $R$  (на рисунке я специально нарисовал 2 цилиндра, т.к. скважина вообще говоря может иметь переменное сечение, но в реальности оно обычно кусочно постоянное);
- 2) односкоростная модель  $\vec{u}_p = \vec{u}_f = \vec{u}_m$  (жидкость и проппант движутся с одинаковой скоростью и эта скорость равна усреднённой скорости, формула для которой была в прошлый раз) – это оправдано, когда жидкость достаточно вязкая и частички проппанта как-бы заморожены в жидкость;
- 3) жидкость неニュтоновская (т.е. жидкость со степенной реологией);
- 4) течение не расслаивается (не может быть такого, что проппант где-то внизу пошёл и течение расслоилось);
- 5) ламинарный, переходный, турбулентный режимы;
- 6) сжимаемостью пренебрегаем.

Что нам нужно, чтобы описать течение рассматриваемой жидкости?

- 1) Закон сохранения объёма проппанта:

$$\frac{\partial(cS(x))}{\partial t} + \frac{\partial(cS(x)u_p)}{\partial x} = 0, \quad c_p \equiv c \quad (12.1)$$

- 2) Закон сохранения объёма жидкости:

$$\frac{\partial((1-c)S(x))}{\partial t} + \frac{\partial((1-c)S(x)u_f)}{\partial x} = 0, \quad c_f \equiv 1 - c \quad (12.2)$$

Уравнения (12.1) и (12.2) уже усреднённые по сечению скважины, но они выводятся точно также, как и для течения проппанта в трещине (только сейчас вместо раскрытия трещины  $w(x)$  используем площадь сечения  $S(x)$  и сейчас нет утечек).

Далее используя предположение односкоростной модели  $u_p = u_f = u_m$ , где  $u_m$  – среднеобъёмная усреднённая скорость смеси по сечению  $S(x)$ , складываем уравнения (12.1) и (12.2):

$$\frac{\partial(S(x)u_m)}{\partial x} = \frac{\partial(Q(t,x))}{\partial x} = 0, \quad (12.3)$$

где  $Q(t,x) = Su_m = const(t) = Q_{inlet}(t)$ ,  $S = \pi R^2$ .

Полученное уравнение говорит нам о том, что расход через любое поперечное сечение скважи-

ны одинаков и зависит от расхода, закачиваемого в скважину сверху. Если изменяется сечение скважины, то соответственно изменяется скорость течения так, чтобы расход оставался прежним.

3) Границное условие (на концентрацию проппанта) на устье скважины:

$$c|_{x=0} = c_{inlet}(t) \quad (12.4)$$

Если проводить аналогию с течением проппанта в трещине, то уравнение (12.3) аналогично эллиптическому уравнению, в котором необходимо было искать давление.

В итоге: мы знаем расход  $Q_{inlet}(t)$ ; знаем площадь  $S(x)$ ; можем найти скорость  $u_m(x, t)$ ; как только знаем скорость, мы можем подставить её в уравнение (12.1), решить это уравнение и с учётом граничного условия (12.4) найти концентрацию проппанта.

При решении данной задачи можно использовать тот же алгоритм, что и для переноса проппанта в трещине, т.е. взять одномерную разностную схему (например, Лакса-Вендроффа с лимитерами), но я хотел бы ещё показать другой численный алгоритм. В данном случае, когда рассматриваем односкоростную модель, этот алгоритм проще, намного быстрее и точнее.

Можно показать, что в случае односкоростной модели уравнение (12.1) для переноса проппанта можно переписать в более простом виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_m \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (12.5)$$

(уравнение (12.1) – это закон сохранения в дивергентной форме; а уравнение (12.5) – это классическое уравнение переноса, которое всем известно с урматов).

Физический смысл уравнения (12.5): концентрация  $c$  неизменно переносится векторным полем  $\vec{u}$  (в данном случае со скоростью  $u_m$  вдоль скважины).

Разобьём суммарное время закачки на  $k - 1$  временных интервалов:

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad t_0 = 0 \quad (12.6)$$

Обозначение:  $F_k$  – это значение величины  $F$  в момент времени  $t_k$ .

В лагранжевых координатах  $(t, X)$  на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$  имеем решение вида:

$$c(t, X(t)) = c(t, X|_{t=t_k}), \quad X(t) = X|_{t=t_k} + \int_0^t u_m(X(s))ds \quad (12.7)$$

Грубо говоря, мы в начале трубы выпускаем некоторую лагранжеву частицу со скоростью  $u_m$ , и формула (12.7) говорит нам, что эта частица через время  $t$  дойдёт до положения с координатой  $X$ .

Соответственно мы можем рассматривать весь этот процесс в виде набора фронтов концентрации. За каждый новый шаг по времени мы выпускаем новый фронт, далее он движется по трубе и мы фиксируем кусочно постоянный уровень концентрации проппанта на каком-то участке

скважины.

Чтобы перейти в эйлерову сетку в точке  $x$ , мы просто смотрим между какими фронтами эта точка  $x$  лежит и говорим, что концентрация равна этому значению.

Нам нужна не только концентрация, а прежде всего нам нужно знать давление. Если на забое будет слишком большое давление, то жидкость может просто порвать трубу. Как будем считать давление? Для этого берём уравнение Навье-Стокса. Выводим аналогично выводу транспорта проппанта для трещины. Но здесь в роли малого параметра будет

$$\varepsilon = \frac{2R}{L},$$

где  $2R$  – диаметр скважины;  $L$  – длина скважины.

Вдоль оси  $Ox$ :

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rx}) + \rho g \sin \theta \quad (12.8)$$

$$\tau_{ij} = 2\mu_s D_{ij}, \quad D = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T), \quad \tau_{rx} = \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \quad (12.9)$$

Есть зависимость вязкости смеси от концентрации проппанта. Формула Нолти:

$$\mu_s(c) = \mu_f \left( 1 - \frac{c}{c_{max}} \right)^{-2.5n_{clean}}, \quad (12.10)$$

где  $c_{max} = 0.65$  – максимальная концентрация упаковки,  $\mu_f$  – вязкость чистой жидкости (гель без проппанта),  $n_{clean}$  – индекс течения чистой жидкости (без проппанта).

По сути сейчас докажем формулу Пуазейля с учётом силы тяжести:

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \rho g \sin \theta \quad (12.11)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = \left( \frac{dp(x)}{dx} - \rho g \sin \theta \right) r \quad (12.12)$$

С учётом  $\tau_{rx}|_{r=0} = 0$  (условие регулярности):

$$\mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right) \frac{r}{2} \quad (12.13)$$

Интегрируем:

$$u_x(r) = \frac{1}{4\mu_s} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right) r^2 + C \quad (12.14)$$

Используем граничное условие  $u_x|_{r=R} = 0$ :

$$u_x(r) = -\underbrace{\frac{R^2}{4\mu_s} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \sin \theta \right)}_{u_{max}} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = u_{max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (12.15)$$

Нашли максимальную скорость  $u_{max}$ , а уравнение переноса записано в терминах средней ско-

ности, поэтому необходимо найти соотношение между средней скоростью и максимальной скоростью.

Возьмём и усредним найденный профиль скорости по сечению:

$$\begin{aligned} u_m = \frac{1}{|S|} \int_S u_x dS &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R u_{max} r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr d\varphi = \\ &= u_{max} \frac{2\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{r}{R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) d\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{u_{max}}{2} \end{aligned} \quad (12.16)$$

Таким образом, получаем среднюю скорость ламинарного течения. В целом отсюда можно найти давление для ламинарного течения!

В тех же самых предположениях можем вывести профиль скорости для степенной жидкости:

$$\tau_{ij} = K_s \dot{\gamma}^{n-1} D_{ij}, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 D_{ij}^2} \quad (12.17)$$

Профиль скорости:

$$u_x = u_{max} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{(n+1)/n}\right) \quad (12.18)$$

Сейчас выведем формулу для давления немного по-другому. Опять стартуем с уравнения Навье-Стокса и сразу усредняем:

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rx}) + \rho g \sin \theta \Bigg| \frac{1}{\pi R^2} \int_S (\cdot) dS \quad (12.19)$$

Получаем:

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} + \bar{\rho}g \sin \theta, \quad (12.20)$$

где  $\tau_w = -\tau_{rx}|_{r=R}$  – напряжение сдвига (трения) на стенке трубы. Его можно измерить и в случае турбулентного течения (например, для известного перепада давления найти  $\tau_w$  из (12.20)), поэтому этот вывод формулы для давления более общий (в предыдущем выводе не понятно, что такое профиль скорости в случае турбулентного течения).

Видим, что для определения давления профиль скорости нам и не нужен.

Обычно экспериментаторы работают с безразмерными величинами для того, чтобы можно было масштабировать результаты (измерить на одной трубе, а распространить результаты на трубы произвольного диаметра), поэтому вводят коэффициент трения Фаннинга:

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} \quad (12.21)$$

Тогда уравнение (12.20) примет вид:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\rho u_m^2}{R} f_s + \rho g \sin \theta \quad (12.22)$$

Какой физический смысл у полученного уравнения? Это баланс сил: есть сила давления, кроме того проталкивать жидкость нам помогает сила тяжести, а препятствует трение жидкости о стенки трубы.

Давайте посчитаем коэффициент Фаннинга для ламинарного течения.

Профиль скорости:

$$u_x = 2u_m \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (12.23)$$

Подставляем профиль скорости в выражение для  $\tau_w$ :

$$\tau_w = -\mu_s \frac{\partial u_x}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{4\mu_s u_m}{R} \quad (12.24)$$

Подставляем  $\tau_w$  в выражение для коэффициента Фаннинга:

$$f_s = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2 / 2} = \frac{4\mu_s u_m}{R \rho u_m^2 / 2} = \frac{8 \cdot 2}{\rho u_m (2R) / \mu_s} = \frac{16}{Re}, \quad (12.25)$$

где

$$Re = \frac{\rho u_m (2R)}{\mu_s}$$

Для степенной жидкости можно показать, что

$$f_s = \frac{16}{Re'}, \quad (12.26)$$

где

$$Re' = \frac{\rho u_m^{2-n} (2R)^n}{K_s \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n 8^{n-1}} \text{ — обобщённое число Рейнольдса}$$

Для турбулентного течения явной формулы для коэффициента Фаннинга нет, но есть экспериментальные корреляции.

Теперь давайте перейдём к самому расчёту давления.

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} + \bar{\rho}g \sin \theta \quad (12.27)$$

$$p_{bh}(t, x) = p_{wh}(t) + \Delta p_h(t, x) - \Delta p_{fric}(t, x) \quad (12.28)$$

Гидростатика:

$$\Delta p_h(t, x) = \int_0^x \rho_s(c(t, s)) g \sin \theta(s) ds \quad (12.29)$$

$$\rho_s(c) = \rho_p c + \rho_f (1 - c) \quad (12.30)$$

Трение:

$$\Delta p_{fric}(t, x) = \int_0^x \frac{2\tau_w(t, s)}{R(s)} ds - \text{давление трения} \quad (12.31)$$

Переходим к следующей теме.

## 12.2 Разделение потоков между трещинами

В предыдущем разделе рассмотрели скважину от устья до забоя. Но у нас между трещиной и забоем могут быть участки скважины (во-первых, датчик забойного давления обычно выше трещины; во-вторых, у нас есть трение вдоль перфораций). Это ещё усугубляется задачей многостадийного ГРП, когда у нас есть несколько портов.

Я вам рассказывал про технологию plug and purf, когда опускают перфорационный пистолет, который сразу может сделать несколько отверстий (портов). В итоге при закачке растим несколько трещин и весь расход, который качаем в скважину, перераспределяется между трещинами. В зависимости от чего? Во-первых, в зависимости от трения по трубе и гидростатики. Во-вторых (что более существенно), от давления на перфорациях. Например, одна перфорация сделана хорошо и через неё будет хорошая проводимость. Другая перфорация сделана плохо и через неё будет плохая проводимость. Кроме того, есть эффект влияния соседних трещин друг на друга.

Если есть 3 трещины, то боковые трещины пойдут криво, но мы это не учитываем (пока рассматриваем плоские трещины).

Если успеем добраться, то потом расскажу, что делать с кривыми трещинами.

Но даже если у нас 3 плоские трещины, то боковые трещины за счёт упругого воздействия через породу зажимают центральную трещину. Соответственно в боковые трещины будет втекать больше жидкости и расход на них будет выше, чем в центральной части.

## 12.3 Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине

## 13 Лекция 18.05.2021 (Байкин А.Н.)

### 13.1 Модели инициации трещины гидроразрыва