Содержание

Гидродинамическое моделирование
Решение задач

Муравцев А.А. (вариант 16)[1]

7 октября 2022 г.

1 Задание 1 от 14.09.2022

Задача 1

1,1	Определить давление на расстоянии x1 (м) и x2 (м) от скважины при плоско-радиальном движении несжимаемой жидоксти по линейному закону фильтрации, считая, что проницаемость пласта k(Да), мощность пласта h (м), давление на забое скважины pw (атм), радиус скважины rw (см), вязкость нефти mu0 (сПз), объемный дебит скважины в пластовых условиях q (м3/сут)
1,2	Построить зависимость давления от расстояния
1.3*	Написать макрос/скрипт, который при запуске будет выводить построенный выше график
1,4	Сделать анализ чувствительности закона Дарси-Дюпюи
1,5	Вывод уравнений Дарси, Дарси-Дюпюи

Вариант	x1, м	x2, м	k, Да	h, м	pw, атм	rw, см	mu0, сПз	q, м3/сут
1	6	40	10	11	85	9	1	249
2	67	21	4	12	74	13	3	61
3	24	35	8	14	69	13	9	232
4	77	89	4	28	59	18	9	211
5	93	61	7	15	75	17	9	87
6	6	32	8	12	100	15	1	114
7	86	61	4	8	56	11	9	184
8	57	54	8	18	63	16	10	204
9	32	32	6	6	77	14	8	124
10	45	56	10	5	90	16	10	256
11	52	20	7	26	82	13	9	118
12	46	35	1	20	77	17	10	135
13	33	8	10	7	53	12	6	176
14	78	40	6	15	71	12	7	53
15	22	41	9	5	81	10	9	193
16	73	83	9	13	71	10	3	65
17	53	23	7	14	98	19	9	158
18	94	87	9	14	63	12	9	231
19	18	49	1	9	99	14	3	118
20	37	10	10	14	61	15	9	73
21	97	50	9	17	93	15	7	264
22	54	68	5	26	62	12	8	68
23	14	19	2	8	89	14	8	93
24	30	17	4	30	96	18	8	214
25	57	80	4	24	66	9	10	250

[1] студент группы 5040103/10401; email: almuravcev@yandex.ru

1.1 Расчёт давления по формуле Дюпюи

Давление на расстоянии x_1:

$$P_{x_1} = P_w + \frac{18.41 \cdot Q\mu}{kh}\left(\ln\left(\frac{x_1}{r_w}\right) + S\right) = \\ = 71 \text{ атм} + \frac{18.41 \cdot 65\frac{\text{м}^3}{\text{сут}} \cdot 3 \text{ сПз}}{9000 \text{ мД} \cdot 13 \text{ м}}\left(\ln\left(\frac{73 \text{ м}}{0,1 \text{ м}}\right) + 0\right) \approx 71.2023 \text{ атм} \quad (1)$$

Давление на расстоянии x_2:

$$P_{x_1} = P_w + \frac{18.41 \cdot Q\mu}{kh}\left(\ln\left(\frac{x_2}{r_w}\right) + S\right) = \\ = 71 \text{ атм} + \frac{18.41 \cdot 65\frac{\text{м}^3}{\text{сут}} \cdot 3 \text{ сПз}}{9000 \text{ мД} \cdot 13 \text{ м}}\left(\ln\left(\frac{83 \text{ м}}{0,1 \text{ м}}\right) + 0\right) \approx 71.2062 \text{ атм} \quad (2)$$

1.2 График зависимости давления от расстояния

1.3 Код для вывода графика

1.4 Анализ чувствительности формулы Дюпюи

Вид формулы Дюпюи на установившемся режиме в промысловых единицах со скин-фактором:

$$Q = \frac{kh}{18.41 \cdot \mu}\frac{P_e - P_w}{\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) + S} \quad (3)$$

Jupyter-тетрадь с кодом для построения графика и проведения анализа чувствительности доступна по ссылке: OPEN IN COLAB.

1.5 Вывод уравнения Дарси и формулы Дюпюи

Приравнивая значение потоковой скорости, найденное из геометрии пласта, к значению, найденному из закона Дарси, получим дифференциальное уравнение притока флюида к скважине. Дюпюи составил и решил это дифференциальное уравнение для случая границы в виде цилиндрической области (для радиального режима течения).

$$\frac{Q}{A} = \frac{k}{\mu}\frac{dP}{dx} \Rightarrow \frac{Q}{2\pi h}\int_{r_w}^{r_e}\frac{dr}{r} = \frac{k}{\mu}\int_{P_w}^{P_e} dp \Rightarrow Q = \frac{2\pi kh}{\mu}\frac{P_e - P_w}{\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)} \quad (4)$$

Формула получена в СИ. При пересчёте в промысловые единицы измерения формула Дюпюи примет следующий вид:

$$Q = \frac{kh}{18.41 \cdot \mu} \frac{P_e - P_w}{\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)} \tag{5}$$

2 Задание 2 от 14.09.2022

Задача 2	
1,1	Определите радиус исследований
1,2	Решить обратную задачу. Задать начальный радиус исследований (более приближенный к реальности), приблизиться к решению, меняя параметры.
1.3*	Решить обратную задачу. Задать начальный радиус исследований (более приближенный к реальности), приблизиться к решению, меняя параметры, используя методы оптимизации
1,4	Вывод уравнения пьезопроводности без упругости пласта
1.5*	Вывод уравнения пьезопроводности с упругостью пласта

Вариант	k, мДа	t, мин	kp, %	mu0, сПз	ct, 10^(-4) атм^(-1)
1	86	1781	22	4	13
2	30	3984	17	6	3
3	91	9682	17	5	15
4	60	2775	21	1	20
5	70	1305	26	3	6
6	7	887	23	10	5
7	3	1520	20	2	4
8	73	8261	22	4	5
9	25	54	26	8	20
10	64	1423	30	9	14
11	71	7600	23	7	10
12	59	5890	11	5	5
13	12	9645	21	9	11
14	85	97	21	1	16
15	49	9645	11	4	2
16	32	7343	14	10	20
17	14	465	19	4	1
18	99	4763	20	8	9
19	94	7593	14	8	3
20	82	8266	13	4	1
21	48	7462	22	8	14
22	74	1046	26	1	16
23	73	8173	19	1	13
24	42	1202	28	10	19
25	11	1841	18	1	10

2.1 Радиус исследований

$$r_{inv} = 0.037\sqrt{\frac{kt}{\varphi\mu c_t}} = 0.037\sqrt{\frac{32 \text{ мДа} \cdot 7343 \text{ мин}}{0.14 \cdot 10 \text{ сПз} \cdot 20 \cdot 10^{-4}\frac{1}{\text{атм}}}} \approx 338.95 \text{ м} \tag{6}$$

График зависимости радиуса исследования от произведения проницаемости и времени построен по ссылке: OPEN IN COLAB.

2.2 Решение обратной задачи

Зададим радиус исследования $r_{inv} = 100$ м, тогда:

$$kt = \varphi\mu c_t \left(\frac{r_{inv}}{0.037}\right)^2 = 0.14 \cdot 10 \text{ сПз} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{атм}} \cdot \left(\frac{100 \text{ м}}{0.037}\right)^2 \approx 20452.89 \text{ мДа} \cdot \text{мин} \tag{7}$$

При проницаемости $k = 32$ мДа, время исследования будет составлять:

$$t \approx \frac{20452.89 \text{ мДа} \cdot \text{мин}}{32 \text{ мДа}} \approx 639 \text{ мин} \tag{8}$$

2.3 Вывод уравнения пьезопроводности без упругости пласта

1) Набор уравнений:

- неразрывность потока

$$\frac{\partial\left(\rho_f\varphi\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_f\varphi\boldsymbol{v_f}\right) = q_f(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

- закон Дарси

$$\boldsymbol{W} = -\frac{k}{\mu_f} \cdot \nabla p \tag{10}$$

- сжимаемость флюида

$$p - p_0 = K_f \frac{\rho_f - \rho_f^0}{\rho_f^0} \tag{11}$$

На этих уравнениях строится основное уравнение гидродинамики пласта – уравнение пьезопроводности.
2) Насыщенности и относительные фазовые проницаемости (для нескольких флюидов)
3) Геометрия (сложное строение пласта)

2.3.1 В векторной форме (быстрый, но не совсем строгий вывод)

В предположении неподвижности скелета ($\boldsymbol{v_s} \approx \boldsymbol{0}$ и $\varphi(t) = \text{const}$) верно равенство $\boldsymbol{W} \approx \varphi\boldsymbol{v_f}$. Подставляя в закон Дарси (10), получаем:

$$\varphi\boldsymbol{v_f} = -\frac{k}{\mu_f} \cdot \nabla p \tag{12}$$

Условие сжимаемости флюида (11) перепишем в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K_f}{\rho_f^0}\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \tag{13}$$

Учитывая предположение о неподвижности скелета, перепишем уравнение неразрывности потока:

$$\varphi\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_f\varphi\boldsymbol{v_f}\right) = q_f(\boldsymbol{x}) \tag{14}$$

Подставляя (12) и (13) в (14), при отсутствии источникового слагаемого ($q_f(\boldsymbol{x}) = 0$) получаем:

$$\varphi \frac{\rho_f^0}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho_f \frac{k}{\mu_f} \boldsymbol{\nabla} p \right) = 0 \tag{15}$$

При дополнительном условии слабосжимаемости флюида ($\rho_f \approx \rho_f^0 = \text{const}$) получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k K_f}{\mu_f \varphi} \boldsymbol{\nabla}^2 p \tag{16}$$

Это уравнение пьезопроводности (без упругости пласта), полученное в приближении слабосжимаемого флюида, неподвижного и недеформируемого пласта.

2.3.2 В покомпонентной форме с обезразмериванием (от Шеля Е.В.)

Запишем ЗСМ для флюида:

$$\frac{\partial r_f}{\partial t} + \partial_i \left(r_f v_i^f \right) = 0 \tag{17}$$

Закон Дарси в «школьной» форме:

$$Q = -\frac{\Delta p}{L} \frac{k}{\mu} S \tag{18}$$

Закон Дарси в дифференциальной форме:

$$W_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \partial_j p, \tag{19}$$

где $W_i = \varphi v_i^f$ – потоковая относительная скорость флюида.
Учитывая связь эффективной и истинной плотностей ($r_f = \varphi \rho_f$), перепишем ЗСМ для флюида:

$$\frac{\partial \left(\rho_f \varphi \right)}{\partial t} + \partial_i \left(\rho_f \varphi v_i^f \right) = 0 \tag{20}$$

Подставляя (19) в (20), получаем:

$$\frac{\partial \left(\rho_f \varphi \right)}{\partial t} - \partial_i \left(\rho_f \frac{k_{ij}}{\mu} \partial_j p \right) = 0 \tag{21}$$

Замыкающее соотношение (связь плотности флюида и давления):

$$\rho_f = \rho_f^0 \left(1 + c_f \left(p - p_0 \right) \right), \tag{22}$$

где c_f – сжимаемость флюида (1/Па).
Замыкающее соотношение (связь пористости и давления):

$$\varphi = \varphi^0 + c_{\text{п}} \left(p - p_0 \right), \tag{23}$$

где $c_{\text{п}}$ – сжимаемость пор (не равно сжимаемости породы).

Продифференцируем по времени замыкающее соотношение (22):

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = c_f \rho_f^0 \frac{\partial p}{\partial t} \tag{24}$$

Продифференцируем по пространству замыкающее соотношение (22):

$$\partial_i \rho_f = c_f \rho_f^0 \partial_i p \tag{25}$$

Продифференцируем по времени замыкающее соотношение (23):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c_\text{п} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{26}$$

Продифференцируем по пространству замыкающее соотношение (23):

$$\partial_i \varphi = c_\text{п} \partial_i p \tag{27}$$

Раскрывая производные произведений в (21), получаем:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t}\varphi + \rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu}\partial_j p\, \partial_i \rho_f - \rho_f \partial_j p\, \partial_i \left(\frac{k_{ij}}{\mu}\right) - \rho_f \frac{k_{ij}}{\mu}\left(\partial_i \partial_j p\right) = 0 \tag{28}$$

Подставляя (24), (25), (26) и (27) в (28), получаем:

$$\begin{multline} c_f \rho_f^0 \frac{\partial p}{\partial t}\varphi + \rho_f c_\text{п} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu}\partial_j p\, c_f \rho_f^0\, \partial_i p - \frac{\rho_f}{\mu}\partial_j p\, \partial_i k_{ij} + \\ + \rho_f\, \partial_j p\, k_{ij} \frac{\partial \mu}{\partial p}\frac{1}{\mu^2}\partial_i p - \rho_f \frac{k_{ij}}{\mu}\left(\partial_i \partial_j p\right) = 0 \end{multline} \tag{29}$$

Перед анализом физических уравнений всегда делают масштабный анализ, чтобы понять, какие слагаемые в уравнении важны, а какие не важны (пример: уравнение Навье-Стокса с числами Струхаля, Эйлера, Рейнольдса, Фруда).

Спойлер: ГДМ симуляторы не решают уравнение пьезопроводности в классическом виде, а решают закон сохранения массы, в который они подставляют закон Дарси.

Далее необходимо выделить характерные масштабные факторы, обезразмерив каждую из функций в уравнении.

Введём безразмерное давление $\tilde{p}$ такое, что:

$$p = \tilde{p} \cdot p_0, \tag{30}$$

где p_0 – пластовое давление.

Введём безразмерное расстояние $\tilde{r}$ такое, что:

$$\vec{r} = \tilde{r} \cdot L, \tag{31}$$

где L – некое характерное расстояние (например, между скважинами).
Введём безразмерную проницаемость $\tilde{k}_{ij}$ такую, что:

$$k_{ij} = \tilde{k}_{ij} \cdot k_0, \tag{32}$$

где k_0 – некая характерная проницаемость.
Введём безразмерную вязкость $\tilde{\mu}$ такую, что:

$$\mu = \tilde{\mu} \cdot \mu_0, \tag{33}$$

где μ_0 – некая характерная вязкость.
Все безразмерные функции (с волной) порядка единицы.

Перепишем (29) в введённых безразмерных величинах, разделив обе части этого уравнения на ρ_f^0:

$$\frac{\partial p}{\partial t}\left(\varphi c_f + \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\cdot c_\text{п}\right) - \frac{k_0}{\mu_0}\frac{p_0^2}{L^2}c_f\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\partial}_i\tilde{p}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p} - \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{k_0\,p_0}{\mu_0 L^2}\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p}\,\tilde{\partial}_i\tilde{k}_{ij} + \\ + \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{p_0\,k_0}{L^2\mu_0}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p}\,\tilde{k}_{ij}\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\tilde{p}}\frac{1}{\tilde{\mu}^2}\,\tilde{\partial}_i\tilde{p} - \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{k_0}{\mu_0}\frac{p_0}{L^2}\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\left(\tilde{\partial}_i\tilde{\partial}_j\tilde{p}\right) = 0 \tag{34}$$

Вынесли все масштабные множители. Далее делим обе части уравнения на множитель перед старшей производной $\left(\text{на } \frac{k_0\,p_0}{\mu_0\,L^2}\right)$, т.е. обезразмериваем уравнение:

$$\frac{\mu_0 L^2}{k_0 p_0}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}\left(\varphi c_f + \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\cdot c_\text{п}\right) - p_0 c_f\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\partial}_i\tilde{p}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p} - \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p}\,\tilde{\partial}_i\tilde{k}_{ij} + \\ + \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\tilde{p}}\frac{1}{\tilde{\mu}^2}\tilde{k}_{ij}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p}\,\tilde{\partial}_i\tilde{p} - \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\left(\tilde{\partial}_i\tilde{\partial}_j\tilde{p}\right) = 0 \tag{35}$$

Сделаем 3 важных приближения:

1. $p_0 c_f \ll 1$ (прикинем: сжимаемость воды порядка 10^{-5} атм$^{-1}$ $= 10^{-10}$ Па$^{-1}$; характерные значения давлений на глубинах, равных нескольким километрам, составляют сотни атмосфер; таким образом, произведение порядка 10^{-3}, что много меньше единицы; но такое приближение не работает для газа: для него рассматриваемое произведение порядка единицы); это приближение фактически равносильно приближению $\rho_f \approx \rho_f^0$;

2. $\tilde{\partial}_i\tilde{k}_{ij} \ll 1$ (считаем, что на характерном масштабе задачи по данному направлению проницаемость изменяется незначительно, не больше 10 процентов);

3. $\dfrac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{p}} \ll 1$ (считаем, что отмасштабированный график проницаемости от давления пологий – этот факт подтверждается экспериментально – вязкость слабо зависит от давления)

Тогда уравнение (35) перепишется в следующем виде (убрали слагаемые с пренебрежимо малыми множителями в рамках сделанных приближений и вернулись от безразмерных функций с волной к обычным функциям):

$$\frac{\partial p}{\partial t}\underbrace{(\varphi c_f + c_\text{п})}_{c_t} - \frac{k_{ij}}{\mu}\partial_i\partial_j p = 0 \tag{36}$$

(заметим, что если есть анизотропия проницаемости, то лапласиана в уравнении не будет). Получаем классическое уравнение пьезопроводности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu c_t}\partial_i\partial_j p = 0, \tag{37}$$

где c_t – это полная сжимаемость.
Замечание. Но есть литература, в которой $c_t = c_f + \frac{c_\text{п}}{\varphi}$, тогда уравнение пьезопроводности будет выглядеть так:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu\varphi c_t}\partial_i\partial_j p = 0 \tag{38}$$

Пусть тензор проницаемости изотропен $k_{ij} = k_0 \cdot \delta_{ij}$, тогда:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_0}{\mu c_t}\delta_{ij}\,\partial_i\partial_j p = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_0}{\mu c_t}\Delta p = 0 \tag{39}$$

(получили всем известный вид уравнения пьезопроводности).

2.4 Вывод уравнения пьезопроводности с упругостью пласта

Задача со звёздочкой. Ещё думаю.

3 Задание от 21.09.2022

Jupyter-тетрадь с кодом обработки ОФП доступна по ссылке: OPEN IN COLAB.

4 Задание от 28.09.2022

5 Задание от 05.10.2022