Содержание

Рациональная механика сплошной среды
Конспект лекций

Муравцев А.А.[1] Вильчевская Е.Н.[2]

28 мая 2022 г.

---

[1]конспектирует; email: almuravcev@yandex.ru

[2]лектор, Высшая школа теоретической механики, Санкт-Петербургский Политехнический университет. Дополнительные материалы к лекциям доступны по ссылке.

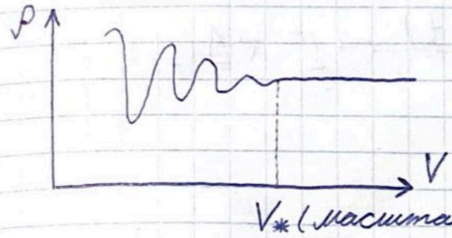
1 Лекция 08.02.2022. Раздел 1. Механика многокомпонентных сред

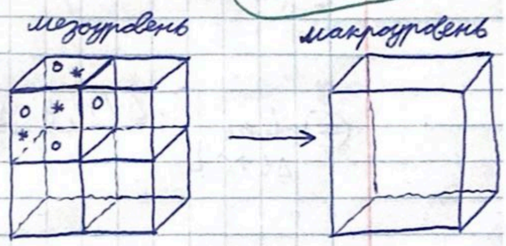
1.1 Материальная производная. Многокомпонентные среды. Баланс массы

(1) Мех-ка многокомпонентных сред

08.02.2022

$$\rho = \frac{M}{V}$$



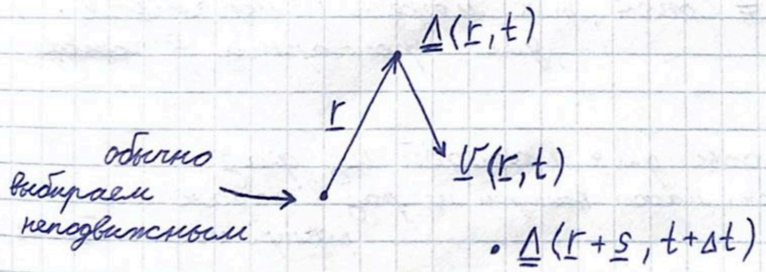


V_* (масштаб, при котором средние х-ки не зависят от объёма) ← только после этого можем исп-ть континуальную теорию.

Пр-ая по пр-ву = изменение х-к при переходе от одного объёма к другому

$$\nabla = \frac{d}{d\underline{r}}$$

Пр-ая по времени = изм-ие материальных св-в с течением времени



$$\frac{\delta \underline{\Delta}}{\delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{\Delta}(\underline{r}+\underline{s}, t+\Delta t) - \underline{\Delta}(\underline{r}, t)}{\Delta t} =$$

1

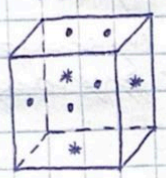
$\underline{\underline{\Delta}}(\underline{V}+\underline{S})$

$$\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}+\underline{s}, t+\Delta t) = \underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t+\Delta t) + \underline{s}\cdot\nabla\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t+\Delta t)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t+\Delta t) - \underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t)}{\Delta t} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t+\Delta t)\right] =$$

$$= \frac{d\underline{\underline{\Delta}}}{dt} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{\underline{\Delta}}(\underline{r}, t)$$

i-компонент.



$$\rho_i = \frac{M_i}{V} = \frac{M_i}{V_i}\,\frac{V_i}{V}$$

ρ_i^* (истинная пл-ть)

объёмная (эффективная) пл-ть

Важный момент! Часто при расчётах дв-ия жидкости с проппантом жидкость считают несжимаемой, т.е. $\rho_i^* = const$, но при этом

$\rho_i \neq const$, т.к. может изменяться доля проппанта в потоке

Баланс массы для каждой из фаз:
(как изменяется масса каждой из фаз в заданном контрольном объёме

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V \rho_i \, dV}_{\text{масса фазы } i \text{ в объёме } V} = \underbrace{-\oint_{\partial V} \underline{n}_i\cdot\underline{v}_i\,\rho_i\, dS}_{\text{приток/отток массы}} = -\int_V \nabla\cdot(\underline{v}_i\rho_i)\,dV$$

2

$$\int_V \left[\frac{d\rho_i}{dt} + \nabla\cdot(\underline{V_i}\rho_i) \right] dV = 0$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \nabla\cdot(\underline{V_i}\rho_i) = 0$$

$$\frac{\delta_i \rho_i}{\delta t} = \frac{d\rho_i}{dt} + \underline{V_i}\cdot\nabla\rho_i$$

$$\frac{\delta_i \rho_i}{\delta t} + \rho_i(\nabla\cdot\underline{V_i}) = 0$$

Хочется сказать, что $\nabla\cdot\underline{V_i} = 0$, если ж-ть несжимаемая, но НЕ $\rho_i \neq const$ (зависит от доли фазы в объёме, которая может изменяться со временем)

Просуммируем по фазам:

$$\sum_i \frac{d\rho_i}{dt} + \sum_i \nabla\cdot(\underline{V_i}\rho_i) = 0$$

(можем изменить порядок суммирования и дифференцирования)

$$\frac{d\left(\sum_i \rho_i\right)}{dt} + \nabla\cdot\left(\sum_i \underline{V_i}\rho_i\right) = 0$$

(на мезоуровне) (сложили компоненты (фазы))

(баланс массы для всего объёма на макроуровне)

Как определить пл-ть и ск-ть на макроуровне?

$\rho, \underline{V}$ - ? Должен вып-ся ЗСМ:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla\cdot(\underline{V}\rho) = 0 \quad \text{(на макро-уровне)}$$

3

1.2 Эффективные плотность и скорость

Сравнивая выр-ия на мезо и макро уровнях, получаем:

$$\rho \underline{V} = \sum_i \rho_i \underline{V_i} \quad , \text{т.е.}$$

Эффективная ск-ть на макроуровне:

$$\underline{V} = \frac{1}{\sum\limits_i \rho_i} \sum_i \rho_i \underline{V_i} \quad \left(= \text{бароцентрическая ск-ть} \neq \text{ск-ть центра масс} \right)$$

и эффективная пл-ть на макроуровне:

$$\rho = \sum_i \rho_i$$

Отступление

Центр масс:

$$\underline{r_c} = \frac{1}{\sum\limits_{i(t)} M_i} \sum_{i(t)} M_i \underline{r_i}$$

(здесь i - это кол-во частиц, которые находятся в заданном объёме в данный момент времени, их кол-во может изм-ся со временем

Показали на пальцах, что ск-ть дв-ия центра масс $\neq$ бароцентрической ск-ти.

Полная пр-ая характ-ет изменение св-ва в данной точке наблюдения.

В материальном описании следим за одной

4 конкретной точкой => материальная пр-ая

1.3 Материальное и пространственное описания

совпадает с полной пр-ой.

В материальном описании:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{V} \quad \text{(определение ск-ти)}$$

В пространственном описании:

$$\frac{\delta \underline{r}}{\delta t} = \underbrace{\cancel{\frac{d\underline{r}}{dt}}}_{0} + \underline{V}\cdot\nabla\underline{r}$$

(радиус-вектор точки наблюдения неподвижен)

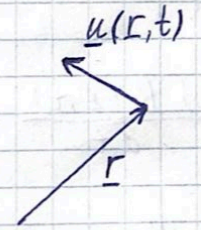
$$\frac{\delta \underline{r}}{\delta t} = \underline{V}$$ (это не определение, а просто тождество)

$$\nabla = \underline{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\underline{r} = \underline{e}_m x_m$$

$$\nabla\underline{r} = \underline{e}_k \underline{e}_m \underbrace{\frac{\partial x_m}{\partial x_k}}_{\delta_{km}} = \underline{e}_k \underline{e}_k = \underline{\underline{E}}$$

Далее хотим расс-ть деф-ии; для этого необходимо ввести перемещения.



В материальном описании отсчётные радиус-векторы фиксированы, а в пр-ом описании в разные моменты времени в точке наблюдения оказываются разные частицы => $\underline{R}(\underline{r}, t)$, где $\underline{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения

есть зав-ть от времени

(т.к. у разных точек, которые бывают в данной точке в разл-ые моменты времени - разные отсчётные радиус-векторы)

5

Вводится определение

$$\frac{\delta \underline{u}(\underline{r},t)}{\delta t} = \underline{v}$$

~~Тогда:~~

$$\cancel{\frac{\delta(u(\underline{r},t)+\underline{r})}{\delta t} = \underline{v}}$$

$$\cancel{\underbrace{\frac{\delta \underline{r}}{\delta t}}_{\underline{v}} + \frac{\delta u(\underline{r},t)}{\delta t} = \underline{v} \Rightarrow \frac{\delta u(\underline{r},t)}{\delta t}}$$

$$\underbrace{\frac{\delta u(\underline{r},t)}{\delta t}}_{\underline{v}} + \cancel{\frac{\delta \underline{r}}{\delta t}} = \underline{v} \Rightarrow \cancel{\frac{\delta \underline{r}}{\delta t} = 0}$$

Тогда:

$$\frac{\delta(\underline{u}(\underline{r},t)+\underline{R}(\underline{r},t))}{\delta t} = \underline{v}$$

$$\underbrace{\frac{\delta u(\underline{r},t)}{\delta t}}_{\underline{v}} + \frac{\delta \underline{R}(\underline{r},t)}{\delta t} = \underline{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\delta \underline{R}(\underline{r},t)}{\delta t} = 0$$

Распишем, чтобы понять, получили нормальный или странный рез-т:

6

1.4 Особенности при рассмотрении многокомпонентных сред

$$\underbrace{\frac{dR}{dt}\Big|_{r\text{-фикс}}}_{} + \underbrace{\underline{V}\cdot\nabla \underline{R}}_{} = 0$$

Откуда точка может попасть в (·) набл. $\underline{r}$

говорит о том, какой должен быть радиус-вектор относит. точки, которая в данный момент нах-ся в (·) набл $\underline{r}$

Особенности, которые могут быть при рассмотрении многокомпонентных сред: переходы одних частиц в другие

Хим реакции или прилипание одних частиц к другим

Для двухкомп. сред:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \; ; \; \underline{V} = \frac{1}{\rho}\left(\rho_1 \underline{V_1} + \rho_2 \underline{V_2}\right)$$

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla\left(\rho_1 \underline{V_1}\right) = 0$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla\left(\rho_2 \underline{V_2}\right) = 0$$

Но теперь хотим учесть, что частицы 1 могут превращаться в частицы 2 и наоборот, тогда

$$\frac{d}{dt}\int \rho_1 dV = -\int\limits_{\partial V} \underline{n}\cdot(\underline{V_1}\rho_1)\, dV - \int\limits_{V} \chi_{12}\, dV + \int\limits_{V} \chi_{21}\, dV$$

2 Лекция 15.02.2022.

2.1 Осреднение скоростей и перемещений (геометрических и кинематических величин)

χ_{12} – ск-ть превращ-ия частиц 1 в частицы 2 $\left(\left[1 \cdot \frac{кг}{м^3} \cdot \frac{1}{с} \right] \right)$

В локальной ф-ме получаем:

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla(\rho_1 \underline{V_1}) = \chi_{21} - \chi_{12}$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla(\rho_2 \underline{V_2}) = \chi_{12} - \chi_{21}$$

Но на макроуровне баланс массы не изм-ся:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla(\rho \underline{V}) = 0$$

15.02.2022

$$\frac{\delta_1 \underline{u_1}}{\delta t} = \underline{V_1} \qquad \frac{\delta_2 \underline{u_2}}{\delta t} = \underline{V_2}$$

ρ: $\rho_1 + \rho_2 = \rho$ (мы осреднили кинематич. хар-ки (ск-ти))

$\underline{V}$: $\rho \underline{V} = \rho_1 \underline{V_1} + \rho_2 \underline{V_2}$

Можно ли то же делать с геометрическими (перемещениями)?

$$\rho \underline{u} = \rho_1 \underline{u_1} + \rho_2 \underline{u_2}$$

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{u_1}}{\delta t} + \rho_2 \frac{\delta_2 \underline{u_2}}{\delta t} = \rho \cdot \frac{\delta \underline{u}}{\delta t}$$

$$\rho_1 \frac{d\underline{u_1}}{dt} + \rho_1 \underline{V_1} \cdot \nabla \underline{u_1} + \rho_2 \frac{d\underline{u_2}}{dt} + \rho_2 \underline{V_2} \cdot \nabla \underline{u_2} = \rho \frac{d\underline{u}}{dt} + \rho \underline{V} \cdot \nabla \underline{u}$$

8

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_1 \underline{u}_1 + \rho_2 \underline{u}_2 - \rho \underline{u}\right) - \frac{d\rho_1}{dt}\underline{u}_1 - \frac{d\rho_2}{dt}\underline{u}_2 + \frac{d\rho}{dt}\underline{u} =$$

$$= \nabla\cdot\left(\rho \underline{V}\,\underline{u} - \rho_1 \underline{V}_1 \underline{u}_1 - \rho_2 \underline{V}_2 \underline{u}_2\right) - \nabla\cdot(\rho \underline{V})\underline{u} + \nabla\cdot(\rho_1 \underline{V}_1)\underline{u}_1 + \nabla\cdot(\rho_2 \underline{V}_2)\underline{u}_2$$

Из б.м. сл-ые уходят

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_1 \underline{u}_1 + \rho_2 \underline{u}_2 - \rho \underline{u}\right) = \nabla\cdot\left(\rho_1 \underline{V}_1 \underline{u} + \rho_2 \underline{V}_2 \underline{u} - \rho_1 \underline{V}_1 \underline{u}_1 - \rho_2 \underline{V}_2 \underline{u}_2\right) =$$

$$= \nabla\cdot\left(\rho_1 \underline{V}_1 (\underline{u} - \underline{u}_1) + \rho_2 \underline{V}_2 (\underline{u} - \underline{u}_2)\right)$$

След-но, р-во $\rho \underline{u} = \rho_1 \underline{u}_1 + \rho_2 \underline{u}_2$ верно только, если $\underline{u} = \underline{u}_1 = \underline{u}_2$, т.е. для однофазной среды, но для двухфазной - осреднение геометр. и кинемат. разные вещи.

9

2.2 Баланс количества движения для двухкомпонентной среды

Баланс кол-ва дв-ия (1-ый з-н динамики)

Сила — это причина изменения количества движения

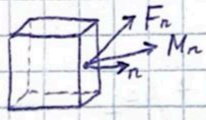
$$\frac{d}{dt}(m\underline{V}) = \underline{F}$$ (для одной частицы) мат-ой точки

Экстенсивные вел-ны (масса, объём, т.д.)

Интенсивные вел-ны (тем-ра)

$\underline{V}$ — кол-во дв-ия, приходящееся на ед. массы

$\rho\underline{V}$ — кол-во дв-ия, приходящееся на ед. объёма



(моменты в дальнейшем не рассм-ем)

$$\underline{F}_n = \lim_{d\to 0} \frac{\underline{F}}{S}$$ — удельная х-ка силы на ед пов-ти [Па]

d — максимальный р-р пов-ти ($\underline{F}_n$ — поверхностные силы, к-ые действ на з-ый объём)

Для простр-го объёма (сп-ая среда; i-ый комп-т):

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_i \underline{V}_i\, dV = \int_V \rho_i \underline{f}_i\, dV + \int_{\partial V} \underline{F}_{ni}\, dS - \int_{\partial V} \underline{n}\cdot\underline{V}\,\rho\underline{V}\, dS$$

$\underline{f}_i$ — уд-ая сила, приход на ед. массы

$\rho_i f_i$ — на ед-цу объёма

т.к. нормаль внешняя

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{n}_i \cdot \underline{F}_{ni}$ — тензор напр-ий (показывает, как конкретный м-л реагирует на внешн. нагрузку)

10

$$\underline{F}_{ni} = \underline{n}_i \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\int\limits_V \left[\frac{d\rho}{dt}\underline{V} + \rho \frac{d\underline{V}}{dt} - \rho \underline{f} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \nabla \cdot (\rho \underline{V})\underline{V} + \rho \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} \right] dV = 0$$

~~ из ЗСМ

$$\int\limits_V \left[\rho \frac{\delta \underline{V}}{\delta t} - \rho \underline{f} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right] = 0$$

$$\rho \frac{\delta \underline{V}}{\delta t} = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$ – для однокомпонентной среды

Для двухкомп-ой среды:

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{V}_1}{\delta t} = \rho_1 \underline{f}_1 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 + \underline{f}_{12} + \rho_1 \underline{\tilde{f}}_{12} + \rho f_{12}^* + \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \underline{\bar{f}}_{12}$$

$\underline{f}_{12}$ – объёмная сила $\quad \underline{f}_{12} = -\underline{f}_{21}$

$\tilde{f}_{12}$ – массовая сила $\quad \rho_1 \tilde{f}_{12} = -\rho_2 \tilde{f}_{21}$

Для обеих фаз:

$$\frac{d\, \rho_1 \underline{V}_1}{dt} = -\nabla \cdot \left(\rho_1 \underline{V}_1 \underline{V}_1 \right) + \rho_1 \underline{f}_1 + \rho \underline{f}_{12} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1$$

$$\frac{d\, \rho_2 \underline{V}_2}{dt} = -\nabla \cdot \left(\rho_2 \underline{V}_2 \underline{V}_2 \right) + \rho_2 \underline{f}_2 - \rho \underline{f}_{12} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2$$

11

2.3 Переход к балансу количества движения на макроуровне

Внутренние силы не могут изм-ть кол-во дв-ия:

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\rho_1\underline{V}_1+\rho_2\underline{V}_2}_{\rho\underline{V}}\Big) = -\nabla\cdot\overset{(*)}{\big(\rho_1\underline{V}_1\underline{V}_1+\rho_2\underline{V}_2\underline{V}_2-\rho\underline{V}\,\underline{V}\big)} -$$

$$-\nabla\cdot(\rho\underline{V}\,\underline{V}) + \underbrace{\rho_1\underline{f}_1+\rho_2\underline{f}_2}_{\rho f} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}_1 + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}_2$$

$$(*)\quad \rho_1\underline{V}_1\underline{V}_1+\rho_2\underline{V}_2\underline{V}_2-\rho_1\underline{V}_1\underline{V}-\rho_2\underline{V}_2\underline{V} =$$

$$=\rho_1\underline{V}_1(\underline{V}_1-\underline{V})+\rho_2\underline{V}_2(\underline{V}_2-\underline{V}) =$$

$$=\frac{1}{\rho}\Big[\rho_1\underline{V}_1\big(\cancel{\rho_1\underline{V}_1}+\rho_2\underline{V}_1-\cancel{\rho_1\underline{V}_1}-\rho_2\underline{V}_2\big)+$$

$$+\rho_2\underline{V}_2\big(\rho_1\underline{V}_2+\cancel{\rho_2\underline{V}_2}-\rho_1\underline{V}_1-\cancel{\rho_2\underline{V}_2}\big)\Big] =$$

$$=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho}(\underline{V}_1-\underline{V}_2)(\underline{V}_1-\underline{V}_2)$$ – здесь относительные ск-ти с приведён. массой

$$\|$$

$$-\rho(\underline{V}-\underline{V}_1)(\underline{V}-\underline{V}_2)$$ – дв-ие отн-но однородной среды

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_1+\underline{\underline{\sigma}}_2+\underbrace{\rho(\underline{V}-\underline{V}_1)(\underline{V}-\underline{V}_2)}_{\text{дополнительные напр-ия, св-ые с отн. дв-ем (св-ны с вязкостью)}}$$ ← тут нужны реш-ия для каждой из фаз

показывает то, что нужно учитывать при переходе на макро-уровень (от двухфазного к однофазному)

12

3 Лекция 22.02.2022.

3.1 Балансы массы и количества движения двухкомпонентной среды с источниковыми членами

Осреднение теряет инф-ию, но даёт представление о том, как дв-ся среда как однофазн на макроуровне (вид опр-их соотн-ий)

Баланс массы:

22.02.2022

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{V}_1) = \chi_{21} - \chi_{12}$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla \cdot (\rho_2 \underline{V}_2) = \chi_{12} - \chi_{21}$$

Баланс к-ва дв-ия:
(без учёта взаимопревращений получили на прошлой паре)
Сейчас добавим взаимопревращения

$$\frac{d\rho_1}{dt}\underline{V}_1 + \rho_1 \frac{d\underline{V}_1}{dt} = -\nabla \cdot (\rho_1 \underline{V}_1)\underline{V}_1 - \rho_1 \underline{V}_1 \cdot \nabla \underline{V}_1 + \rho_1 \underline{f}_1 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 + \chi_{21}\underline{V}_2 - \chi_{12}\underline{V}_1 + \rho \underline{f}_{21}$$

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{V}_1}{\delta t} = \cancel{\chi_{12}\underline{V}_1} - \chi_{21}\underline{V}_1 + \rho_1 \underline{f}_1 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 + \chi_{21}\underline{V}_2 - \cancel{\chi_{12}\underline{V}_1} + \rho \underline{f}_{21}$$

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{V}_1}{\delta t} = \rho_1 \underline{f}_1 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 + \underbrace{\chi_{21}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1)}_{\text{ост-сь только отн. ск-ть, т.к. рассматриваем именно изм-ие ск-ти в данном ур-ии, а не изм кол-ва дв-ия}} + \rho \underline{f}_{21}$$

Почему ушёл χ_{12}?

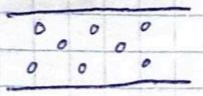
13

3.2 Постановка задачи: жидкость с пропантом

Для второй фазы:

$$\rho_2 \frac{\delta_2 \underline{V}_2}{\delta t} = \rho_2 \underline{f}_2 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2 + \chi_{12}\left(\underline{V}_1 - \underline{V}_2\right) + \rho \underline{f}_{12}$$

$\forall$ двухфазную среду: жид-ть с пропантом



$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{V}_1) = 0 \qquad \frac{\delta \rho_2}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho_2 \underline{V}_2) = 0$$

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{V}_1}{\delta t} = \rho_1 \underline{f}_1 + \rho \underline{f}_{21} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1$$

$$\rho_2 \frac{\delta_2 \underline{V}_2}{\delta t} = \rho_2 \underline{f}_2 - \rho \underline{f}_{21} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2$$

Необходимы определяющие (замыкающие) соотн-ие, которые опр-ют мат-л и характер сил взаимодействия (находим их обычно из эксперимента)

В системе не знаем: $\rho_1, \underline{V}_1, \rho_2, \underline{V}_2$

Знаем $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ (сила гравитации; объёмная)

$\underline{f}_1 = \underline{f}_2 = g$ (в этой задаче нельзя пренебрегать гравитацией, т. к. есть оседание)

$\underline{f}_{12}$ и $\underline{f}_{21}$ вычисляются вначале с помощью эксперимента – силы вз-ия (силы трения между фазами: эти силы уменьшают ск-ть)

Вязкое трение (между фазами): $\underline{f}_{21} = \eta_{12}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1)$ (для некоторых сред бывает и кв-ат ск-ей)

14

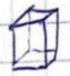
Сухое трение: $\underline{f}_{21} = \eta_{12}(\underline{u}_2 - \underline{u}_1)$, но тогда нужны доп. ур-ия на перемещ.
(Кулона)

$$\frac{\delta_1 u_1}{\delta t} = v_1; \quad \frac{\delta_2 u_2}{\delta t} = v_2$$

Можно взять трубку, создать в ней разность давлений, запустить чистую ж-ть без частиц, измерить ск-ть, а затем ж-ть с частицами

Нужно учесть, что ск-ть жид-ти увел-ся из-за того, что ей останется меньше места из-за частиц
(например, увеличить диаметр трубы)

Определяющие соотношения показывают как конкретный материал реагирует на внешние воздействия.



$\underline{\underline{\sigma}}_1$ реакция м-ла на приложенную нагрузку (специфика м-ла)

Другими сл-ами, $\underline{\underline{\sigma}}_1$ определяет, каким образом данный м-л реагирует на приложенную нагрузку

Ньютоновская ж-ть:

$$\underline{\underline{\sigma}}_f = -p\underline{\underline{E}} + 2\mu_f \underline{\underline{d}}$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla\underline{V} + \underline{V}\nabla) \text{ - градиент ск-ти}$$

$$\underline{\underline{d}} = \mathrm{dev}\,\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{D}} - \frac{1}{3}\nabla\cdot\underline{V}\,\underline{\underline{E}}$$

$\nabla\cdot\underline{V} = 0$ - усл-е несжим-ти жид-ти (из ЗСМ)

$\rho_1 = c\rho_1^*$ ← истинная пл-ть

ρ_1^* - несжимаемая
ρ_1 - сжимаемая

концентрация (доля ж-ти в объёме)

Эффективная пл-ть, которая может изм-ся за счёт изм-ия концентрации

Сл-но, напрямую не можем использовать усл-ие несжимаемости.

15.

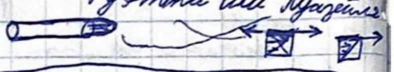
Неньютоновская ж-ть:

$$\underline{\underline{\sigma_1}} = -p\underline{\underline{E}} + 2\mu_f \underline{\underline{d}}^m$$

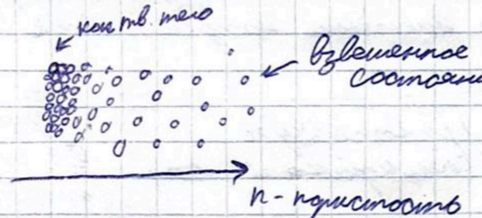
коэф-т вязкости (между слоями одной фазы)

Пок-ль m зависит от типа ж-ти.

находят из эксперим-ов по теч-ию Куэтта или Пуазейля



η_{12} – трение между фазами



(ур-ие как для Ньютон-ой жидк-ти)

Для проппанта опр. ур-ия сложные

И в итоге, разрывные опр-ие соотн-ия, которые часто не удаётся нормально состыковать, поэтому в проппанте часто погрешность.

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ (физ-ки линейная теория)

напряжения - это линейная ф-ия деф-ий

Если $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \underline{u}\nabla)$ – геометрически линейная теория

(деф-ия есть первая пр-ая от перемещений)

Физически линейный закон всегда вып-ся для геом-ки линейной теории

Нач. и ГУ: какие и сколько?

16

4 Лекция 01.03.2022.

4.1 Постановка задачи: жидкость с пропантом (продолжение)

01.03.22

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{V_1}}{\delta t} = \rho_1 \underline{f_1} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma_1}} + \chi_{21}(\underline{V_2} - \underline{V_1}) + \rho \underline{f_{21}}$$

Почему ушёл χ_{12} (не вошёл)?

В это ур-ие входит изм-ие именно ск-ти (а не полного кол-ва дв-ия), поэтому некоторые частицы со ск-ью V_1 просто ушли (в другую фазу) и понятно, что при этом ск-ть ост-ся части не изменилась (просто убрали часть частиц со ск-тью V_1) — переориентировали в другую фазу.

Система ур-ий для двух-ой среды

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{V_1}) = 0$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} + \nabla \cdot (\rho_2 \underline{V_2}) = 0$$

$$\rho_1 \frac{\delta_1 \underline{V_1}}{\delta t} = \rho_1 \underline{f_1} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma_1}} + \rho \underline{f_{21}}$$

$$\rho_2 \frac{\delta_2 \underline{V_2}}{\delta t} = \rho_2 f_2 + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma_2}} - \rho \underline{f_{21}}$$

$$\frac{\delta_1 \underline{u_1}}{\delta t} = \underline{V_1}; \quad \frac{\delta_2 \underline{u_2}}{\delta t} = \underline{V_2}$$

$$\frac{\delta_1 \underline{u_1}}{\delta t} = \frac{d\underline{u_1}}{dt} + \underline{V_1} \cdot \nabla \underline{u_1}$$

Неизвестные: $\rho_1, \rho_2, \underline{V_1}, \underline{V_2}$

$$\underline{f_{12}} = \eta_{12}(\underline{V_2} - \underline{V_1})$$

или

$$\underline{f_{12}} = \mu_{12}(\underline{u_2} - \underline{u_1})$$

тогда сразу более сл-ая система

$$\underline{f_1} = \underline{f_2} = g$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{E}} + \nu \underline{\underline{d}}$$

$[\text{Па} \cdot \text{с}]$

разм-ть $\underline{\underline{d}}$: $\left[\frac{1}{c}\right]$

$$\underline{\underline{d}} = \operatorname{dev} \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{V_1} + \underline{V_1} \nabla) - \frac{1}{3} \nabla \cdot \underline{V} \underline{\underline{E}}$$

17

Теория опр-их ур-ий (другая тема)

Нужны ГУ и НУ:

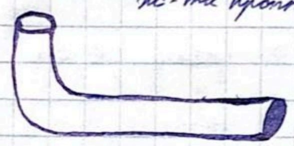
Сколько? Одно НУ

$\rho_1(\underline{r},0)$ $\rho_2(\underline{r},0)$

$v_1(\underline{r},0)$ $v_2(\underline{r},0)$

Могут быть неравномерны по пр-ву, поэтому $\underline{r}$ обязательно должно быть

Пример. Начало закачки ж-ти проппанта.

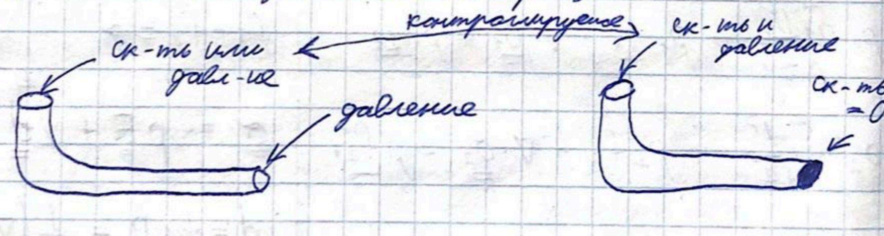


Изначально внутри материи нет, поэтому ставим все НУ = 0.

Два ГУ на $\underline{v}$ (т.к. $\sigma \sim \nabla \underline{v}$)

Можем задавать как силовые так и кинем-ие усл-ия. (но не сразу вместе; если только одни на верт. ур-е; другие на гр-ой)

Задаём ск-ть или давление на гр-це



На боковой границе для ж-ти: условие прилипания (не очень верно), конечная ск-ть на гр-це (которая на самом деле зависит от сил трения между ж-тью и поверх-тью) (новый к-т трения между ж-тью и породой)

18

сила меньше
Если силы трения ~~больше~~, то усл-ие прилипания
~~если меньше~~, то
если сила больше, то конечная ск-ть,
например.

Это с касательной компонентой

протекания
С норм-ой комп-ой усл-ие ~~проникания~~ жидкости через
горную породу. Например,
закон Дарси.

На боковой границе для проппанта:

касат. к-н : то же, что и с ж-тью (своеобр-ое
усл.-ие
прилипания)

Норм. сост-ая : усл.-ие непроницаемости, но есть
разница между нижней и верхней
границами (из-за силы тяжести)

Сверху задаём давление смыкания
горной породы
Снизу нулевая ск-ть

Рассмотрим постановку двухфазной задачи

Пишем ур-ние уравн-ия

св-в
И затем в зав-ти от м-ла и НУ, ГУ
(опр. соотн) (геометрия)
(ре ставим полную замкнутую задачу.)

19

4.2 Баланс энергии в общем виде

Баланс энергии.

$$\underbrace{(E)^{\cdot}}_{\text{изм-ие полной энергии системы}} = \underbrace{N_e}_{\text{мощность внешних воздействий}} + \underbrace{Q}_{\text{ск-ть подвода энергии в систему}}$$

$$E = K + U$$

K — кинетическая (з-т от ск-ей)

U — внутренняя (пот. энергия, зависит от взаимного расп-ия между частицами)

Интуитивно понятный способ, но он не очень правильный.

Почему? Пытаемся постр. картину мира с помощью формул. Проблема в том, что не понятно, что вкл-ть в кин. энергию. Внутри тела есть мн-во разных дв-ий.

 $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega}$

Энергию кол-ий атомов не вкл-ем в модель.

В кин. энергию попадут те степени свободы, которые мы учитывали при записи других ур-ий (баланс кол-ва дв-ия и баланс момента)

Таким образом, весь остаток отправляется в U (т.е. U – та часть энергии, которая остаётся при вычитании K с учётом рассм.-ых ст. св.)

20

Несколько подходов описания газов: кин-ая теория газов
VS
классическая термодинамика

Что отн-ся к K и U зависит от выбранной нами модели.

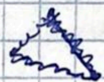
Хотим ур-ия для объёма => нужны аддитивные по объёму величины

$k = \frac{K}{V} = \frac{1}{2}\rho v^2$ — аддитивна по объёму

$\frac{1}{2} v^2$ — аддитивна по массе

удельные х-ки

U аддитивна по объёму? Принимаем за постулат попарную аддитивность.

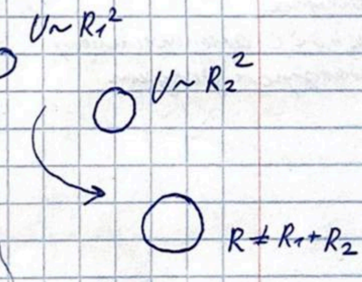


$u = \frac{U}{V}$

(можем суммировать по объёму)

Принимаем также, что U аддитивна по массе (постулат):

$U = \int_V \rho u \, dV$ — более серьёзное ограничение — не всегда верно



масса не изм-ся а U изменилась

Правильнее говорить, что внутренняя энергия аддитивна по числу частиц.

Δ в конце курса

21

4.3 Баланс энергии для одной какой-либо фазы

Для какой-либо фазы:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho u\right)dV}_{\text{изменение полной энергии}} = \underbrace{\int_V \rho\,\underline{f}\cdot\underline{V}\,dV}_{\text{мощность от объёмных сил}} + \underbrace{\int_{\partial V} \overbrace{\underline{f}_n}^{\underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}}\cdot\underline{V}\,dS}_{\text{мощность от поверхностных сил}} +$$

$$+\underbrace{\int_V \rho q\,dV}_{\text{подвод энергии в систему (объёмный)}} - \underbrace{\int_{\partial V}\underline{n}\cdot\underline{h}\,dS}_{\text{подвод энергии через поверхность}} - \underbrace{\int_{\partial V}\overbrace{\underline{n}\cdot\underline{V}}^{\text{поток частиц извне}}\rho\left(\frac{1}{2}v^2+u\right)dS}_{\text{подвод энергии через поверхность за счёт притока частиц внутрь объёма}}$$

q - ск-ть подвода энергии в ед-цу массы

$\underline{h}$ - поток энергии через пов-ть

$\underline{n}$ - внешняя нормаль к пов-ти

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho}{dt}v^2+\rho\frac{d\underline{V}}{dt}\cdot\underline{V}+\boxed{\frac{d\rho}{dt}u}+\rho\frac{du}{dt}=\underbrace{\rho\,\underline{f}\cdot\underline{V}}+$$

$$+\underbrace{(\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}})\cdot\underline{V}+\underline{\underline{\sigma}}\cdot\cdot(\nabla\underline{V})^s}+$$

$$\underbrace{+\rho q}-\underbrace{\nabla\cdot\underline{h}}-\underbrace{\nabla\cdot(\underline{V}\rho)\left(\frac{1}{2}v^2\right)-\rho\underline{V}\cdot(\nabla\underline{V})\cdot\underline{V}-}$$

$$\underbrace{\boxed{-\nabla\cdot(\underline{V}\rho)u}+\rho\underline{V}\cdot\nabla u}$$

Двойное ск-ое с антисимметр. тензором уходит

22

5 Лекция 15.03.2022. Раздел 2. Среды с вращательными степенями свободы

5.1 Баланс энергии для двухкомпонентной среды

$$\rho\frac{\delta u}{\delta t} = \underline{\underline{\sigma}}\cdot\cdot(\nabla\underline{V})^S + \rho q - \nabla\cdot\underline{h}$$

(на след-ей паре для многокомп-ых сред)

15.03.22

Для многокомпонентных сред баланс энергии.

$$\cancel{\frac{d}{dt}\int_V\left(\rho_1 V_1^2 + \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2\right)dV = \int_V \rho_1 q_1\, dV + \int_V}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 + \rho_1 u_1 + \overbrace{\rho u_{21}}\right)dV$$

т.к. есть потенциальная энергия вз-ия между частицами разных фаз

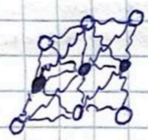
$$= \int_V \rho_1 q_1\, dV + \int_V \rho_1 \underline{f}_1\cdot\underline{V}_1\, dV + \int_{\partial V} \underline{f}_n\cdot V_1\, dS - \int_{\partial V}\underline{n}\cdot\underline{h}\, dS -$$

$$- \int_{\partial V}\underline{n}\cdot V_1\rho_1\left(\frac{1}{2}V_1^2 + u_1\right)dS + \overbrace{\int_V \rho\underline{f}_{12}\cdot(\underline{V}_1 - \underline{V}_2)\,dV + \int_V Q_{21}\,dV}^{\text{добавочные в двухфазном случае}}$$

в двухфазной среде объёмная сила вз-ия между фазами

тепло, кот. идёт от одной фазы к другой (от второй в первую)

часть $\overline{u}_{12}$ должны отнести к одной фазе, другую часть – к другой фазе



$$\rho\overline{u}_{12} = k(\Delta x)^2$$

при суммировании двух фаз не должны уничтожаться, а должно получиться

23

← это не коэф. теплопроводности одной фазы, а то, как одна фаза отдаёт тепло, а другая его воспринимает

$$\left\{\begin{aligned} & Q_{21} = -\varkappa_{12}\,\Delta T \quad , \text{д.б. } \Delta T<0 \\ & Q_{21} = -\varkappa_{12}\,(T_1 - T_2) \end{aligned}\right.$$

Можно разделить энергии $\rho\bar{u}_{12}$ поровну; а можно пропорционально массе каждой фазы: $\rho_1\bar{u}_{12}$ и $\rho_2\bar{u}_{21}$

При суммировании Q взаимоуничтожатся, а ρq — общий подвод тепла извне.

Выражение для эффективной u тоже будет непростым; и для потока $\underline{h}$ эффективного тоже непростым

Введём понятия температуры и энтропии

Возможный подход.

Разложим тензор напр-ий: $\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_e}_{\text{не зависит от ск-ей}} + \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_f}_{\text{диссипативная часть (зависит от ск-ей)}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\tau}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_e \cdot\cdot (\nabla \underline{v})^s = \underbrace{\frac{p}{\rho^2}\dot{\rho}}_{\text{(связано с изменением объёма/пл-ти)}} + \underbrace{(\quad)\cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\Delta}}}}_{\text{(связано с изм-ем формы)}}$$

$\dot{\underline{\underline{\Delta}}}$ ← тензор изм-ия формы

$$\underline{\underline{\sigma}}_f \cdot\cdot (\nabla \underline{v})^s + \rho q - \nabla\cdot\underline{h} = \rho T \dot{\eta}$$

← указывает на аддитивность энтропии

$\left.\begin{aligned} & T \text{ — тем-ра} \\ & \eta \text{ — энтропия} \end{aligned}\right\}$ так вводим

24

Но как ввести эффективную темп-ру?

Если есть смесь горячих и холодных частиц (фаз)

Вопрос остаётся открытым; нет устоявшейся концепции.

Для большинства задач баланс энергии не рассматривается.

25

5.2 Различие между спинорным движением и вращением окрестности среды как твёрдого целого

(2) Среды с вращ-ыми степенями св-ды.

15.03.22 (продолжение)

Вспомнить ДТТ и среды с микростр-ой.

Основная идея всего курса: в мех-ке есть несколько основных балансовых соотношений — массы, кол-ва движения, момента, энергии + опр-ие ур-ия, которые должны быть сф-ны для конкретного заданного м-ла и замыкают систему ур-ий

Чтобы описывать более сл-ые процессы необходимо вводить дополнительные ст. свободы; в 1-ой части смотрели вз-ия фаз; во 2-ой части разрешим частицам вращаться дополнительно независимо.

Есть разные типы вр-ия:

1) трансляционное вращение (изм-е пол-я тела в пр-ве)

$$\nabla\cdot\underline{v} = (\nabla\cdot\underline{v})^S + \overbrace{(\nabla\cdot\underline{v})^A}$$

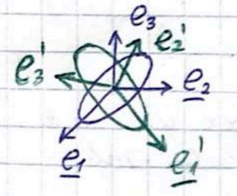
х-т вращение скр-ти точки как единого целого вокруг чего-то

$$(\nabla\cdot\underline{v})^A = \frac{1}{2}\left(\nabla\cdot\underline{v} - \underline{v}\cdot\nabla\right) = \underline{\tilde{w}} \times \underline{\underline{E}}$$

$\uparrow$ сопутствующий вектор антисимметричного тензора $(\nabla\cdot\underline{v})^A$

$\underline{\tilde{w}}$ — угл-ая ск-ть, связанная с перемещением

2) вращение вокруг своей оси (спинорное движ-ие, изм-ие ориентации)



$$\underline{\underline{Q}} = \underline{e}_k'\underline{e}_k \qquad \underline{a} = a_m\underline{e}_m$$

$\underline{\underline{Q}}$ - тензор поворота

$$\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{a} = \underline{e}_k'\underbrace{\underline{e}_k\cdot a_m\underline{e}_m}_{\delta_{km}} = a_k\underline{e}_k'$$

$\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{E}}$; $\det\underline{\underline{Q}} = 1$ (ортогональный тензор) 26

$\underline{\underline{Q}}^T$ поворот в обратном $\underline{\underline{Q}}$ направлении

Последовательно $\underline{\underline{Q}}$ и $\underline{\underline{Q}}^T$ даёт отсутствие поворота.

Продиф-ем рав-во $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{E}}$

$$\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T = 0$$

Левый тензор спина: $\underline{\underline{S}} = \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$

$\underline{\underline{S}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T \Rightarrow \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{S}}^T = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S}}$ - антисимметричный

$\Rightarrow$ 3 компоненты $\Rightarrow$ можно сопоставить 1 вектор

(в матрице на диагонали нули:
$$\begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}$$
)

$\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{S}} = \underline{w} \times \underline{\underline{E}} \Rightarrow \dot{\underline{\underline{Q}}} = \underline{w} \times \underline{\underline{Q}}$ - ур-ие Пуассона

$\underline{\underline{S}}_r = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}$ - правый тензор спина

$\underline{\underline{S}}_r = \underline{\Omega} \times \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \times \underline{\Omega}$, где $\underline{\Omega}$ - правая угл-ая ск-ть

$\Rightarrow \dot{\underline{\underline{Q}}} = \underline{\underline{Q}} \times \underline{\Omega}$

27

$$\underline{\underline{S}} = \underbrace{\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{E}}} \cdot \underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{S}}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{E}}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{S}}_r \cdot \underline{\underline{Q}}^T$$

$$\underbrace{\qquad}_{\underline{\underline{S}}_r} \quad \underbrace{\qquad}_{\underline{\underline{E}}}$$

Без док-ва: $\underline{\omega} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\Omega}$

$$\underline{\underline{S}}_\times = (\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T)_\times = (\underline{\omega} \times \underline{\underline{E}})_\times = (\underline{\omega} \times \underline{e}_k) \times \underline{e}_k =$$

$$= -\underline{e}_k \times (\underline{\omega} \times \underline{e}_k) = -\underline{\omega}\, \underline{e}_k \cdot \underline{e}_k + \underline{e}_k \cdot \underline{\omega}\, \underline{e}_k =$$

$$= -3\underline{\omega} + \underline{\omega} = -2\underline{\omega}$$

$$\underline{\omega} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T\right)_\times$$

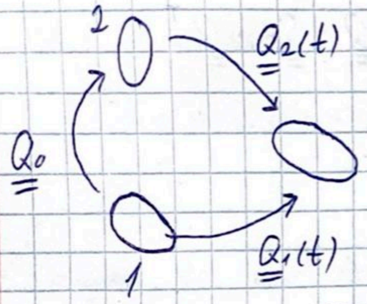
$$\underline{\Omega} = -\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{Q}}^T \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}\right)_\times$$

$\underline{\underline{Q}} = \underline{e}_k' \underline{e}_k$, e_k не зав-ит от t => дифф-ем только $\underline{e}_k'$

$$\underline{\omega} = -\frac{1}{2}\Big(\dot{\underline{e}}_k' \overbrace{\underline{e}_k \cdot \underline{e}_m}^{\delta_{km}} \underline{e}_m'\Big)_\times = -\frac{1}{2} \dot{\underline{e}}_k' \times \underline{e}_m'$$

$$\underline{\Omega} = -\frac{1}{2}\left(\underline{e}_k \underline{e}_k' \cdot \dot{\underline{e}}_m' \underline{e}_m\right)_\times = -\frac{1}{2}\left(\underline{e}_k' \cdot \dot{\underline{e}}_m'\right) \overbrace{\underline{e}_k \times \underline{e}_m}^{= \varepsilon_{kms} \underline{e}_s}$$

28



1 и 2 - отсчётные положения

$$\underline{\underline{Q}}_1 = \underline{\underline{Q}}_2 \cdot \underline{\underline{Q}}_0$$

$$\underline{\omega}_1 = -\frac{1}{2}\left(\dot{\underline{\underline{Q}}}_2 \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}_0^T}_{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{Q}}_2^T\right)_\times = -\frac{1}{2}\left(\dot{\underline{\underline{Q}}}_2 \cdot \underline{\underline{Q}}_2^T\right)_\times = \underline{\omega}_2$$

$\underline{\underline{Q}}_0$ не зав-ит от t (это фикс. поворот)

Почему угл.-ая ск-ть $\underline{\omega}$ наз-ся истинной?

Потому что она не зависит от того, какое отсчётное положение выбрано.

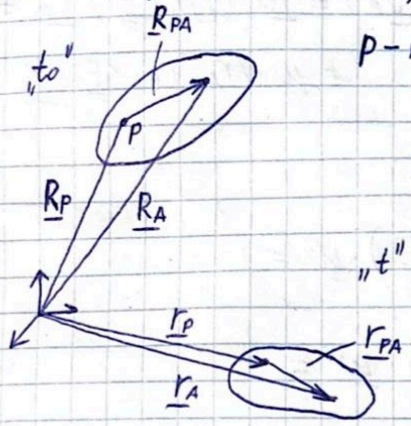
А $\underline{\Omega}$ будет разным в разных отсчётных положениях.

29

6 Лекция 22.03.2022.

6.1 Тензоры инерции твёрдого тела

Будем получать тензор инерции для абс. тв. тела 22.03.22



P – полюс

$$\underline{r}_{PA} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{R}_{PA}$$

$$\underline{r}_A = \underline{r}_P + \underline{r}_{PA}$$

Сейчас расс-ем обычное материальное описание

ск-ть поворота

$$\underline{V}_A = \underline{V}_P + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{R}_{PA} = \underline{V}_P + \underline{\omega} \times \underbrace{\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{R}_{PA}}_{\underline{r}_{PA}}$$

$$\underline{V}_A = \underline{V}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}$$

Кинетич. энергия:

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho \underline{V}_A^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\underline{V}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}\right) \cdot \left(\underline{V}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}\right) dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \rho \underline{V}_P \cdot \underline{V}_P dV + \overbrace{\int_V \rho \underline{V}_P \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) dV}^{1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \rho (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}) dV}_{2} =$$

30

$$①:\ \underline{v}_P\cdot(\underline{\omega}\times\underline{r}_{PA}) = \underline{\omega}\cdot(\underline{r}_{PA}\times\underline{v}_P) = \underline{\omega}\cdot(\underline{r}_{PA}\times\underline{\underline{E}})\cdot\underline{v}_P =$$

$$= \underline{\omega}\cdot(\underline{r}_A-\underline{r}_P)\times\underline{\underline{E}}\cdot\underline{v}_P$$

$$②:\ (\underline{\omega}\times\underline{r}_{PA})\cdot(\underline{\omega}\times\underline{r}_{PA}) =$$

$$= -\underline{\omega}\cdot(\underline{\underline{E}}\times\underline{r}_{PA})\cdot(\underline{r}_{PA}\times\underline{\underline{E}})\cdot\underline{\omega} =$$

$$= -\underline{\omega}\cdot(\underline{r}_{PA}\times\overbrace{\underline{\underline{E}}\cdot\underline{\underline{E}}}^{\underline{\underline{E}}}\times\underline{r}_{PA})\cdot\underline{\omega} =$$

$$= -\underline{\omega}\cdot(\underline{r}_{PA}\,\underline{r}_{PA} - (\underline{r}_{PA}\cdot\underline{r}_{PA})\,\underline{\underline{E}})\cdot\underline{\omega}$$

$$\ominus\ \frac{1}{2}Mv_P^2 + \underline{\omega}\cdot\left[\int_V \rho\,\underline{r}_A\,dV - \int_V \rho\,dV\cdot\underline{r}_P\right]\times\underline{\underline{E}}\cdot\underline{v}_P +$$

$$+\frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot\int_V \rho\left[(\underline{r}_{PA}\cdot\underline{r}_{PA})\,\underline{\underline{E}} - \underline{r}_{PA}\,\underline{r}_{PA}\right]dV\cdot\underline{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2}Mv_P^2 + \underline{\omega}\cdot\underbrace{\left[M(\underline{r}_C-\underline{r}_P)\right]\times\underline{\underline{E}}}_{=\,\underline{\underline{B}}}\cdot\underline{v}_P +$$

$$+\frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot\underbrace{\int_V \rho\left[\underline{r}_{PA}\cdot\underline{r}_{PA}\,\underline{\underline{E}} - \underline{r}_{PA}\,\underline{r}_{PA}\right]dV}_{=\,\underline{\underline{J}}}\cdot\underline{\omega}$$

31

$\underline{\underline{J}}$ - тензор инерции тв. тела (показывает распределение массы по телу)

$\underline{\underline{B}}$ - дополнительный тензор инерции (антисимметричный)
(возникает в тех случаях, когда полюс не совпадает с центром масс)
(грубо говоря, показывает доп. кин-ую энергию, которая возникает от вращения массы, сосредоточенной в центре масс, относительно полюса)

$$K = \underbrace{\frac{1}{2} M \underline{V}_P^2}_{\text{кин. эн-ия тела как мат-ой точки, когда вся масса помещена в полюс}} + \underbrace{\underline{V}_P \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\omega}}_{\text{плата за то, что полюс не совпадает с ц.м}} + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega}}_{\text{отвечает за вращение всего тела как единого целого}}$$

Видим, что кин-ая энергия K есть кв-ая форма ск-ей (теперь есть и трансляционные, и вращательные степени св-ды)

Теперь будем рассм-ть пр-ое тело, у которого

$$K = K(\underline{V}, \underline{\omega}) \text{ и это кв. форма:}$$

$$K = \frac{1}{2} \rho \underline{V}^2 + \underline{V} \cdot (\rho \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\omega} + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot (\rho \underline{\underline{J}}) \cdot \underline{\omega}$$

Пусть теперь $\underline{\underline{B}}$ просто коэф-т КФ, т.е. он не обязан быть антисимметричным.

32

6.2 Движение неклассической частицы по инерции

Пример

Возьмём $\underline{\underline{B}} = q\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{J}} = j\underline{\underline{E}}$ – шаровые

(рассм-ем тело-точку)

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + q\underline{v}\cdot\underline{w} + \frac{1}{2}jw^2$$

Кол-во дв-я = производная от K по $\underline{v}$.

$$(1)\quad \underline{K}_1 = \frac{dK}{d\underline{v}} = m\underline{v} + q\underline{w} \underset{\text{сохр-ие кол-ва дв-ия}}{=} m\underline{v}_0 + q\underline{w}_0 = a\underset{\text{орт кол-ва дв-ия}}{\underline{e}}$$

Момент кол-ва дв-ия:

$$(2)\quad \underline{K}_r^0 = \underline{r}\times\underline{K}_1 + \underbrace{\frac{dK}{d\underline{w}}}_{\text{динамический спин}} = \underbrace{\underline{r}\times(m\underline{v}+q\underline{w}) + q\underline{v} + j\underline{w}}_{(*)} \underset{\text{сохр-ие момента кол-ва дв-ия}}{=} q\underline{v}_0 + j\underline{w}_0$$

$\underline{r}(0)=0$

Теперь необходимо реш-ть полученную систему ур-ий и найти ск-ть и угл-ую ск-ть

Дифф-ем $(*)$: $\underline{v}\times(m\underline{v}+q\underline{w}) + \underline{r}\times\underset{\text{сохр-ие кол-ва дв-ия}}{\overset{\to 0\ \text{(из-за отс. сил)}}{(m\underline{v}+q\underline{w})^{\cdot}}} +$

$$+\, q\dot{\underline{v}} + j\dot{\underline{w}} = 0 \quad \text{из (2)}$$

33

$$q\underline{v}\times\underline{\omega} + q\dot{\underline{v}} + j\dot{\underline{\omega}} = 0 \quad (2*)$$

Из (1): $m\underline{v} + q\underline{\omega} = m\underline{v}_0 + q\underline{\omega}_0 = a\underline{e}$

$$\underline{v} = \frac{a}{m}\underline{e} - \frac{q}{m}\underline{\omega} \quad ; \quad \dot{\underline{v}} = -\frac{q}{m}\dot{\underline{\omega}}$$

Подставляем $\underline{v}$ и $\dot{\underline{v}}$ в (2*):

$$\frac{qa}{m}\underline{e}\times\underline{\omega} - \frac{q^2}{m}\underline{\omega}\times\underline{\omega} = \frac{q^2}{m}\dot{\underline{\omega}} - j\dot{\underline{\omega}} = \frac{q^2 - jm}{m}\dot{\underline{\omega}}, \text{ т.е}$$

$$\dot{\underline{\omega}} = \alpha\,\underline{e}\times\underline{\omega}, \text{ где } \alpha = \frac{qa}{q^2 - jm} \qquad (3*)$$

Будем искать реш-ие в виде:

$$\underline{\omega} = \underline{\underline{Q}}(\varphi(t)\underline{e})\cdot\underline{\omega}_0$$

(т.к. $\dot{\underline{\underline{Q}}}(\varphi(t)\underline{e}) = \dot\varphi(t)\underline{e}\times\underline{\underline{Q}}(\varphi(t)\underline{e})$)

Тогда $$\dot{\underline{\omega}} = \dot\varphi(t)\,\underline{e}\times\overbrace{\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\omega}_0}^{=\underline{\omega}} \qquad (3**)$$

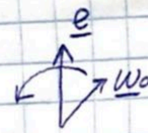
Тогда, приравнивая (3*) и (3**), получаем

$$\dot\varphi\,\underline{e}\times\underline{\omega} = \alpha\,\underline{e}\times\underline{\omega} \Rightarrow \varphi = \alpha t$$

Сл-но, $\underline{\omega} = \underline{\underline{Q}}(\alpha t\underline{e})\cdot\underline{\omega}_0$, т.е. угл.-ая ск-ть вращается вокруг орта кол-ва дв-ия $\underline{e}$

$\uparrow$ угл. ск-ть тела-точки в нач. момент времени

34



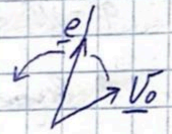
ось поворота не изменяется при повороте

Вернёмся к ск-ти: $\underline{\underline{Q}}(\alpha t\underline{e})\cdot\underline{e} = \underline{e}$

$$\underline{v} = \frac{a}{m}\underline{e} - \frac{q}{m}\underline{w} = \frac{1}{m}\left(a\underline{e} - q\underline{\underline{Q}}(\alpha t\underline{e})\cdot\underline{w}_0\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\underline{\underline{Q}}(\alpha t\underline{e})\cdot\underbrace{\left(a\underline{e} - q\underline{w}_0\right)}_{\text{из (1)}} = \underline{\underline{Q}}(\alpha t\underline{e})\cdot\underline{V}_0$$

Сл-но, для ск-ти верна та же картина:



Из (1): $\underline{V} = \underbrace{\frac{a}{m}\underline{e}}_{\text{постоянная составляющая}} - \underbrace{\frac{q}{m}\underline{w}}_{\text{вращ-ая компонента}}$

$\underline{V}_0 \perp \underline{e}$ => дв-ие по окр-ти

$\underline{V}_0$ не $\perp \underline{e}$ => дв-ие по спирали

Тоже из (1): $\underline{V} = \underline{V}_0 + \frac{q}{m}\left(\underline{w}_0 - \underline{w}\right)$

35 Например, по спирали дв-ся электрон => теория даёт надежду успеха при описании более сложных (в частности, электромагнитных) явлений

7 Лекция 29.03.2022.

7.1 Баланс массы, количества движения и кинетического момента для микрополярной среды

Вернёмся к сплошным средам; будем $\forall$ такие среды, в которых частицы обладают и поступательными, и вращ-ными ст-ями свободы.

Как ввести инерционные и кинематические х-ки такой системы?

Инерционные = ρ, m и массовая пл-ть тензора инерции.

Кинематические = угл-ые и трансляционные ск-ти.

Выбор способа описания (мат-ое или пр-ое) зависит от рассматриваемой среды.

Материальное описание хорошо работает в тв. телах (т.е. когда соседние точки ост-ся соседями на протяжении всего времени дв-ия), когда искл-ся перемешивание, деление и слипание частиц.

В мат-ом описании можно переходить к частным производным; в отличие от пространственного, там всё равно будут конвективные сл-ые.

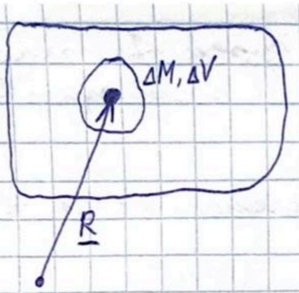
$$\frac{d}{dt}\varphi(\underline{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi\Big|_{\underline{R}}$$

в м-ом описании (=> большое кол-во аналитических реш-ий в теории упругости

$\parallel$ ← в пр-ом описании (=> небольшое кол-во аналитических реш-ий в гидродинамике. Есть аналитика для течений Куэтта и Пуазейля – и это практически всё; всё остальное реш-ся численно)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla\varphi$$

36



$$\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V} \qquad \rho = \lim_{d\to 0}\frac{M}{V}$$

d - хар-ний размер рассматриваемого объёма

$$\underline{\underline{J}} = \frac{\Delta \underline{\underline{J}}}{\Delta V} \qquad \underline{\underline{J}} = \lim_{d\to 0}\frac{\underline{\underline{J}}}{V}$$

Но $\Delta\underline{\underline{J}} \sim \underline{r}_{PA}^2$ $(r_{PA} \le d)$, т.е. $\frac{\Delta \underline{\underline{J}}}{\Delta V} \xrightarrow[d\to 0]{} \infty$

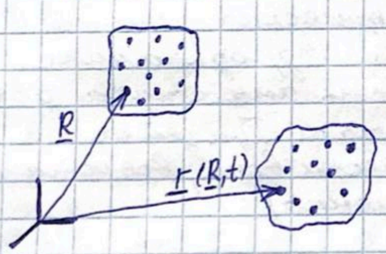
характерный размер

Таким образом, при матер-ом описании введение тензора инерции внутренне противоречиво, но закрывают на это глаза.

В теории микрополярных сред в МО всегда тензор инерции вводится аналогично твёрдому телу.

29.03.22 Сегодня получим балансовые соотношения в рамках мат-ого описания.

Все соотношения ф-ся для материального объёма



$$\frac{d\varphi(\underline{R},t)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\Big|_{\underline{R}}$$

37

Мат-ный объём всегда состоит из одних и тех же точек (сам объём деф-ся, дв-ся, поворач-ся)

некая удельная по объёму величина

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \varphi(\underline{r},t)\,dV \ominus$$

просто так производную под интеграл внести не можем (т.к. объём з-т от времени)

должна стоять ск-ть центра масс

$$\frac{d\varphi(\underline{r}(\underline{R},t))}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\underline{r}} + \underline{V}\cdot\nabla\varphi$$

(исп-ли только пр-ло диф-ия сложной ф-ии)

(действительно, в м-ом описании полная и материальная пр-ые совпадают)

используем транспортную теорему

$$\ominus \int\limits_{V(t)} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\underline{r}} + \nabla\cdot(\underline{V}\varphi)\right] dV =$$

$$= \int\limits_{V(t)} \Big[\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\underline{r}} + \underline{V}\cdot\nabla\varphi}_{\frac{d\varphi}{dt}} + \varphi\nabla\cdot\underline{V}\Big] dV$$

снова по транспортной теореме

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V}\rho\,dV = 0 \quad (\text{т.к. масса не изм-ся}) \Rightarrow \int\limits_{V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{V})\right] = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{V}) = 0 \quad ; \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\underline{V} = 0$$

(баланс массы)

38

Теперь попробуем получить ф-лу для величины, удельной по массе:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho\varphi\, dV \overset{\text{по транспортной теореме}}{=} \int\limits_{V(t)} \left[\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\varphi\underline{v}) \right] dV =$$

$$= \int\limits_{V(t)} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\varphi + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{v})\varphi + \rho\underline{v}\cdot\nabla\varphi \right] dV =$$

баланс масс

$$= \int\limits_{V(t)} \rho\frac{d\varphi}{dt}\, dV$$

Хитрое выр-ие: производную можем перебрасывать через знак интеграла, если φ - это величина, удельная по массе. И при этом дифференцируется только φ.

<u>Баланс кол-ва движения</u> (будем рассматривать обычную ч-цу, обл-ую вращ. степенями свободы, но без перекрёстного сл-ого с $\underline{\underline{B}}$)

уд-ая х-ка по массе

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V} \rho\underline{v}\, dV = \int\limits_{V} \rho\underline{f}\, dV + \int\limits_{\partial V} \underline{f_n}\, dS \qquad \text{поверхностные силы}$$

$$\underline{f_n} = \underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}$$

~~новая теорема~~ по транспортной теореме; по т. Г.-О.

$$\int\limits_{V} \rho\frac{d\underline{v}}{dt}\, dV = \int\limits_{V} \rho\underline{f}\, dV + \int\limits_{V} \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}\, dV$$

39

$$\int_V \left[\rho \frac{d\underline{V}}{dt} - \rho \underline{f} - \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}\right] dV = 0$$

$$\rho\frac{d\underline{V}}{dt} = \rho\underline{f} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}$$

Баланс момента кол-ва дв-ия:

уд-ая по объёму

уд-ая по массе

$$\rho K = \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{1}{2}\underline{w}\cdot\rho\underline{\underline{J}}\cdot\underline{w}$$

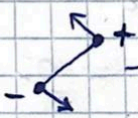
$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)}\Big[\underline{r}\times\rho\underline{V} + \underbrace{\rho\underline{\underline{J}}\cdot\underline{w}}_{\text{собств-ый дин-ий спин}}\Big]dV =$$

$$\rho \underline{K_2} = \frac{d(\rho K)}{d\underline{w}} = \rho\underline{\underline{J}}\cdot\underline{w}$$

(есть производная от кин-ой энергии по угл-ой ск-ти)

$$= \underbrace{\int_V \underline{r}\times\rho\underline{f}\,dV}_{\text{момент от объёмной силы (внешней)}} + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{r}\times\underline{f_n}\,dS}_{\text{от вн-ей пов-ой силы}} + \underbrace{\int_V \rho\underline{m}\,dV}_{\text{объёмный внешний момент}} + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{M_n}\,dS}_{\text{моменты (поверхностные), которые действуют от отброшенной части}}$$

$$\underline{r}\times(\underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}) = -\underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\times\underline{r}$$



– диполь

$\underline{m}$ – момент, действующий внутри на точки, заставляя их вращ-ся

$\underline{M_n} = \underline{n}\cdot\underline{\underline{M}}$, где $\underline{\underline{M}}$ – тензор моментных напряжений (хотим повернуть одну частицу отн. другой, но есть заметное сопротивление)

40

Тогда, по тр-ой теореме и теореме Г-О:

$$\cancel{\frac{d\underline{r}}{dt}}^{\underline{V}} \times \rho \underline{V} + \underline{r} \times \rho \frac{d\underline{V}}{dt} + \rho \frac{d(\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega})}{dt} =$$

$$= \underline{r} \times \rho \underline{f} \underbrace{- \nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \times \underline{r})}_{\substack{-(\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \times \underline{r} - \underline{\underline{\sigma}} \times \cdot (\underline{r} \nabla) = \\ = \underline{r} \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\sigma}}_{\times}}} + \rho \underline{m} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}}$$

Заметки на полях:

$$-\underline{\underline{\sigma}} \times \cdot (\underline{r} \nabla) = -\underline{a}\underline{b} \times \cdot \underline{e}_k \underline{e}_k = -(\underline{b} \times \underline{e}_k)\overbrace{(\underline{e}_k \cdot \underline{a})}^{\underline{\underline{E}}} = -\underline{b} \times \underline{a} =$$

$$= \underline{\underline{\sigma}}_{\times}$$

$$\underline{r} \times \rho \frac{d\underline{V}}{dt} + \rho \frac{d(\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \underline{r} \times \rho \underline{f} + \underline{r} \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\sigma}}_{\times} +$$

$$+ \rho \underline{m} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}}$$

баланс кол-ва дв-ия

дин-ий спин

$$\rho \frac{d(\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \underline{\underline{\sigma}}_{\times} + \rho \underline{m} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}} \qquad (*)$$

(другими словами, баланс динамического спина)

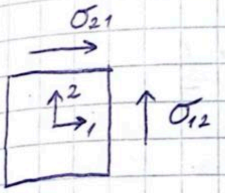
$\Downarrow$

дин-ий спин может изм-ся по трём причинам:

$\rho \underline{m}$ - подвод внешнего момента; $\nabla \cdot \underline{\underline{M}}$ - воздействие окр-их точек;
(сопротивление окр-их частиц повороту данной частицы)

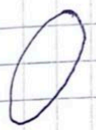
41

$\underline{\underline{\sigma}}_\times \neq 0 \Rightarrow$ тензор напряжений несимметричен



$\sigma_{12} \neq \sigma_{21}$, если $\underline{\underline{\sigma}}_\times \neq 0 \Rightarrow$ объект вращается

$$\frac{d(\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \frac{d\underline{\underline{J}}}{dt} \cdot \underline{\omega} + \underline{\underline{J}} \cdot \frac{d\underline{\omega}}{dt}$$



$\underline{\underline{J}}_0(\underline{R})$

частица не может деф-ся (только вращ-ся) — феноменологически эквивалентна тв. телу

(сейчас мы рассматриваем теорию микрополярных сред/теорию Коссера)

$$\underline{\underline{J}}(\underline{r}, t) = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{R}) \cdot \underline{\underline{Q}}^T$$

$$\frac{d}{dt}\underline{\underline{J}}(\underline{r}, t) = \frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{R}) \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{R}) \cdot \left(\frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt}\right)^T \ominus$$

Помним, что $\frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}}$, $\underline{\omega}$ – угл. ск-ть тела

$$(\underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}})^T = -\underline{\underline{Q}}^T \times \underline{\omega}$$

$$\ominus\ \underline{\omega} \times \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T \times \underline{\omega} = \underline{\omega} \times \underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}} \times \underline{\omega} \quad (**)$$

42

7.2 Баланс энергии для микрополярной среды

В итоге, из (*) получаем:

потерянная ранее плотность

$$\rho \underline{\underline{J}} \cdot \frac{d\underline{\omega}}{dt} = -\rho\underline{\omega} \times \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega} + \underline{\underline{\sigma}}_{\times} + \rho \underline{m} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}}$$

(ур-не для нахождения угл-ой ск-ти) - (следствие из баланса динамического спина, если частицы (тела-точки) не могут деформироваться)

Баланс энергии.

$$\frac{d}{dt}\int_V \left[\frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot\rho\underline{\underline{J}}\cdot\underline{\omega} + \rho u \right] dV =$$

$$= \int_V \left[\rho \underline{f}\cdot\underline{v} + \rho\underline{m}\cdot\underline{\omega} \right] dV +$$

ск-ть подвода энергии в ед. массы

$$+ \int_{\partial V} \Big[\underbrace{\underline{f}_n}_{=\underline{n}\cdot\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{v} + \underbrace{\underline{M}_n}_{=\underline{n}\cdot\underline{\underline{M}}} \cdot \underline{\omega} \Big] dS + \int_V \rho q\, dV - \underbrace{\int_{\partial V} \underline{n}\cdot\underline{h}\, dS}_{\text{через границу}}$$

0 (см. (**))

$$\rho\underline{v}\cdot\frac{d\underline{v}}{dt} + \frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot\rho\,\cancel{\frac{d\underline{\underline{J}}}{dt}}\cdot\underline{\omega} + \rho\frac{d\underline{\omega}}{dt}\cdot\underline{\underline{J}}\cdot\underline{\omega} + \rho\frac{du}{dt} =$$

$$= \rho\underline{v}\cdot\underline{f} + \rho\underline{\omega}\cdot\underline{m} + (\nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}})\cdot\underline{v} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot\cdot (\underline{v}\nabla) +$$

$$+ (\nabla\cdot\underline{\underline{M}})\cdot\underline{\omega} + \underline{\underline{M}}\cdot\cdot(\underline{\omega}\nabla) + \rho q - \nabla\cdot\underline{h}$$

43

Учитывая →, получаем

$$\underline{w}\cdot\underline{\underline{\sigma}}_\times + \cancel{\rho\,\underline{w}\cdot\underline{m}} + \cancel{(\nabla\cdot\underline{\underline{M}})\cdot\underline{w}} + \rho\frac{du}{dt} =$$

$$= \cancel{\rho\,\underline{w}\cdot\underline{m}} + \underline{\underline{\sigma}}^T\cdot\cdot(\nabla\underline{V}) + \cancel{(\nabla\cdot\underline{\underline{M}})\cdot\underline{w}} + \underline{\underline{M}}^T\cdot\cdot(\nabla\underline{w}) + \rho q - \nabla\cdot\underline{h}$$

Заметки на полях.

$$-\underline{w}\cdot\underline{\underline{\sigma}}_\times = -\underline{w}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = -\underline{a}\cdot\underline{b}\times\underline{w} = -\underline{a}\cdot(\underline{b}\cdot\underline{\underline{E}})\times\underline{w} =$$

$$= -\underline{a}\,\underline{b}\cdot\cdot\underline{\underline{E}}\times\underline{w} = -\underline{\underline{\sigma}}\cdot\cdot(\underline{\underline{E}}\times\underline{w}) = \underline{\underline{\sigma}}^T\cdot\cdot(\underline{\underline{E}}\times\underline{w})$$ (тр-ие ^{T} дает минус)

← антисимметр.-ий тензор

Подставляем в ур-ие.

$$\rho\frac{du}{dt} = \underline{\underline{\sigma}}^T\cdot\cdot\underbrace{(\nabla\underline{V} + \underline{\underline{E}}\times\underline{w})}_{(1)} + \underline{\underline{M}}^T\cdot\cdot\underbrace{(\nabla\underline{w})}_{(2)} + \rho q - \nabla\cdot\underline{h}$$

Получили баланс энергии.

мера деф-ии связанная искл-но с вращательными ст-ями свободы (2)

Все возникающие векторные произведения связаны с дополнительными поворотами.

мера деф-ии, связанная с трансляц. деф-ями, относительными поворотами одних частиц по отношению к другим (1)

44

8 Лекция 05.04.2022.

8.1 Линейная теория микрополярной среды

05.04.22

Упростим постановку задачи: рассмотрим случай малых изменений

$$\underbrace{|\underline{u}| \ll 1; \ \|\nabla \underline{u}\| \ll 1}; \ |\underline{\theta}| \ll 1; \ \|\nabla \underline{\theta}\| \ll 1$$

$$\Longrightarrow \quad |\underline{V}| \ll 1 \qquad \nabla = \mathrm{const} \qquad \underline{V} = \dot{\underline{u}}; \ \underline{\omega} = \dot{\underline{\theta}}$$

$$\nabla \underline{V} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\omega} = \nabla \dot{\underline{u}} + \underline{\underline{E}} \times \dot{\underline{\theta}} = (\underbrace{\nabla \underline{u} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\theta}}_{\underline{\underline{e}}})^{\cdot}$$

(см (1) на пред-ей стр)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = (\nabla \underline{u})^S$$

(в линейной теории упр-ти)

$$\underline{\underline{e}} = (\nabla \underline{u})^S + (\nabla \underline{u})^A + \underline{\underline{E}} \times \underline{\theta}$$

$$(\nabla \underline{u})^A = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u} - \underline{u} \nabla\right) = \overline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{E}}$$

$$\overline{\underline{\omega}} = -\frac{1}{2} \nabla \times \underline{u}$$

(связано с вращ-ым дв-ем как тв-ого тела)

$(\nabla \underline{u})^S$ – классический тензор деф-ий

$\underline{\underline{E}} \times \underline{\theta}$ – собственное вращение тела-точки

$$\nabla \underline{\omega} = \nabla \dot{\underline{\theta}} = (\underbrace{\nabla \underline{\theta}}_{\text{æ}})^{\cdot}$$

(см (2) на пред-ей стр.)

æ (wireless tensor)

(показывает изменение поворота частиц по пр-ву)

45

Подставляем в ЗСЭ (баланс энергии):

трансляционная → $\underline{\underline{e}}$ и $\underline{\underline{\varkappa}}$ ← крутильная – это две меры деф-ий, которые получили на пред. предыдущ стр.

$$\rho \dot{u} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{e}}}^T + \underline{\underline{M}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\varkappa}}}^T + \rho q - \nabla \cdot \underline{h}$$

Говорим, что $\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\underline{\underline{\sigma_e}}}_{\text{не з-т от ск-ей}} + \underbrace{\underline{\underline{\sigma_f}}}_{\text{диссипативная часть (зависит от ск-ей)}}$; $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M_e}} + \underline{\underline{M_f}}$

по определению

$$\underline{\underline{\sigma_f}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{e}}}^T + \underline{\underline{M_f}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\varkappa}}}^T + \rho q - \nabla \cdot \underline{h} = \rho T \dot{\eta}$$

В рез-те:

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma_e}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{e}}}^T + \frac{1}{\rho} \underline{\underline{M_e}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\varkappa}}}^T + T\dot{\eta}$$

Можем перейти к св-ой энергии: $f = u - T\eta$, тогда

$$\dot{f} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma_e}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{e}}}^T + \frac{1}{\rho} \underline{\underline{M_e}} \cdot\cdot \dot{\underline{\underline{\varkappa}}}^T - \eta \dot{T} \Rightarrow f = f(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\varkappa}}, T)$$

Чаще всего рассм-ют изотермические процессы ($T = const$):

$$w = w(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\varkappa}}) \qquad \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma_e}} = \frac{dw}{d\underline{\underline{e}}}; \quad \frac{1}{\rho} M_e = \frac{dw}{d\underline{\underline{\varkappa}}}$$

↑ упругая энергия деф-ий

46

Наиболее общий вид упругой энергии деф-ий:

$$\rho w = \frac{1}{2}\underline{\underline{e}} \cdot\cdot {}^4\underline{\underline{C}} \cdot\cdot \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{e}} \cdot\cdot {}^4\underline{\underline{B}} \cdot\cdot \underline{\underline{\varkappa}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\varkappa}} \cdot\cdot {}^4\underline{\underline{D}} \cdot\cdot \underline{\underline{\varkappa}}$$

$[\underline{\underline{e}}] = [\nabla \underline{u} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\theta}]$ - безразм.

$[\underline{\underline{\varkappa}}] = [\nabla \underline{\theta}] = \frac{1}{м}$

$[{}^4\underline{\underline{C}}] = Па$, $[{}^4\underline{\underline{D}}] = Па \cdot м^2$

${}^4\underline{\underline{C}}$ - жёсткость на трансляции;

${}^4\underline{\underline{D}}$ - жёсткость на повороты.

$[\underbrace{(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1})}_{= l_t}{}^{1/2}] = м$ => возникает внутренняя разм-ть длины

$\Downarrow$

возможность описать новые явления (например, улучшить р-т в задаче Кирша)

Полярные теории позволяют описать поля в окрестности каких-либо неоднородностей (дырок, трещин и т.д.):

$$\cancel{\sigma \sim a \exp\left(-b\frac{x}{l_t}\right)}$$

47 $\sigma \sim a \exp\left(-b\frac{x}{l_t}\right)$ (поправка в поле напряжений для микрополярной теории)

Итак, полярная теория хорошо описывает поля в окрестности дефектов + ~~учит~~ позволяет моделировать пограничные слои и поверхностные эффекты.

Если м-л изотропный, то $\overset{4}{\underline{\underline{C}}}$, $\overset{4}{\underline{\underline{B}}}$ и $\overset{4}{\underline{\underline{D}}}$ должны быть изотропны

Кроме того, из усл-ия материальной симметрии

$$\overset{4}{\underline{\underline{B}}} = 0$$

Распишем:

$$\overset{4}{\underline{\underline{C}}} = \lambda \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{E}} + \mu\, \underline{e}_m \underline{\underline{E}}\, \underline{e}_m + (\mu + \kappa)\, \underline{e}_m \underline{e}_n \underline{e}_m \underline{e}_n$$

$$\overset{4}{\underline{\underline{D}}} = \beta_1 \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{E}} + \beta_2\, \underline{e}_m \underline{\underline{E}}\, \underline{e}_m + \beta_3\, \underline{e}_m \underline{e}_n \underline{e}_m \underline{e}_n$$

$$2\rho w = \lambda (tr\, \underline{\underline{e}})^2 + \mu\, \underline{\underline{e}} \cdot\cdot \underline{\underline{e}} + (\mu + \kappa)\, \underline{\underline{e}} \cdot\cdot \underline{\underline{e}}^T +$$

$$(tr\, \underline{\underline{e}})^2 = (tr\, \underline{\underline{\varepsilon}})^2, \qquad \underline{\underline{e}} \cdot\cdot \underline{\underline{e}} = tr(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}}), \qquad \underline{\underline{e}} \cdot\cdot \underline{\underline{e}}^T = tr(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}}^T)$$

(т.к. след антисимметричных тензоров равен нулю)

$$+ \beta_1 (tr\, \underline{\underline{\varkappa}})^2 + \beta_2\, \underline{\underline{\varkappa}} \cdot\cdot \underline{\underline{\varkappa}} + \beta_3\, \underline{\underline{\varkappa}} \cdot\cdot \underline{\underline{\varkappa}}^T$$

Заметки на полях

$$\underline{e}_m \underline{e}_n \underline{e}_n \underline{e}_m \cdot\cdot A_{ks} \underline{e}_k \underline{e}_s = \underline{e}_m \underline{e}_n A_{ks} \underbrace{(\underline{e}_m \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{mk}} \underbrace{(\underline{e}_n \cdot \underline{e}_s)}_{\delta_{ns}} =$$

$$= \underline{e}_m \underline{e}_n A_{mn} = \underline{\underline{A}}$$

48

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{E}} + \mu \underline{\underline{e}}^T + (\mu + \kappa)\underline{\underline{e}} = \lambda(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{E}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \kappa\underline{\underline{e}}$$

(т.к. помним, что $\frac{1}{\rho}\underline{\underline{\sigma}} = \frac{dw}{d\underline{\underline{e}}}$)

$\kappa\underline{\underline{e}}$ ↑ отражает связь между вращ-ыми ст.св. и трансляционными напряжениями

$$\underline{\underline{M}} = \beta_1(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\text{æ}}})\underline{\underline{E}} + \beta_2\underline{\underline{\text{æ}}}^T + \beta_3\underline{\underline{\text{æ}}}$$

(т.к. помним, что $\frac{1}{\rho}\underline{\underline{M}} = \frac{dw}{d\underline{\underline{\text{æ}}}}$)

~~$[\beta] = \frac{M^2}{\Pi a}$~~

$[\beta] = \text{Па}\cdot\text{м}^2$

Разницу между классической и микрополярной теориями можно заметить, когда появляется зав-ть от размера

Пример. Стержень начинаем крутить; измеряем модуль жёсткости на кручение

В классической теории р-ты не будут зависеть от длины стержня (жёсткость = = коэф-т пропорциональности между приложенным моментом и углом поворота)

В полярной теории будет зав-ть от длины, а параметр l_t отражает характерный размер (начиная, с какого диаметра стержня будет расхождение в упругих модулях с классической теорией)

Для стальных стержней разница наблюдается при диаметрах стержня порядка 1 нм

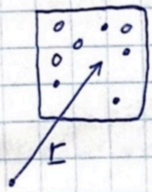
49 Для пен разница проявляется раньше (порядка 1 мкм)

8.2 Инерционные и кинематические характеристики микрочастицы при пространственном описании

Обсудили вид ур-ий при материальном описании.

Далее.

Пространственное описание.



$N(\underline{r}, t)$ - кол-во частиц в объёме, который в данный момент нах-ся в точке набл-ия.

У каждой частицы есть: $\hat{\underline{\underline{J}}}_i, \underline{v}_i, \underline{\omega}_i, m_i$

Как задать эффективные (общие) инерционные х-ки для пространственного объёма?

$m = \frac{1}{N} \sum m_i$ - средняя масса частицы

$\hat{\underline{\underline{J}}} = \frac{1}{N} \sum_i \hat{\underline{\underline{J}}}_i$ - хар-ет средний размер и форму частиц в объёме, а также ориентацию (тип анизотропии материала)

(в мат-ом описании тензор инерции хар-ет распределение массы по объёму, а в пр-ом описании геометрические хар-ки)

$n = \frac{N}{V}$ - пл-ть распр-ия числа частиц

$\rho = \frac{Nm}{V} = nm$

$\underline{\underline{J}} = \frac{1}{Nm} \sum_i \hat{\underline{\underline{J}}}_i$ - геометрический тензор инерции (приходящийся на единицу массы)

50

Тензор инерции на ед-цу объёма:

$$n \hat{\underline{\underline{J}}} = \rho \underline{\underline{J}}$$

средний тензор инерции, приходящийся на одну частицу

на ед-цу массы

Кол-во дв-ия:

$$\sum_i m_i \underline{V_i} = Nm \underline{V}$$ (суммарное кол-во дв-ия ~~вс~~ всех частиц совп-ет с эффективным кол-ом дв-ия)

$$\sum_i \rho_i \underline{V_i} = \rho \underline{V}$$ (так вводим определение ск-ти (эфф-ой) для многофазных сред)

Динам-ий спин (собственный кин-ий момент):

$$\sum_i \hat{\underline{\underline{J}}}_i \cdot \underline{\omega}_i = N \hat{\underline{\underline{J}}} \cdot \underline{\omega} \Rightarrow \underline{\omega} = \frac{1}{M} \underline{\underline{J}}^{-1} \cdot \sum \hat{\underline{\underline{J}}}_i \cdot \underline{\omega}_i$$

Nm (суммарная масса частиц)

Известно, что кол-во дв-ия есть производная кинетической энергии по ск-ти:

$$\underline{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \underline{V}}$$

дин-ий спин есть производная кинетической энергии по угл-ой ск-ти:

$$\frac{\partial K}{\partial \underline{\omega}}$$

51

Могли бы ввести кин-ую энергию каждой ч-цы:

$$\hat{K}_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}_i \cdot \hat{\underline{\underline{J}}}_i \cdot \underline{\omega}_i$$

$$K_i = \frac{1}{2} \rho_i V_i^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}_i \cdot \underline{\underline{J}}_i \cdot \underline{\omega}_i$$

Трансляционную и угл-ую ск-ти можем найти:

1) усреднением кол-ва дв-ия и ~~мом~~ момента кол-ва движ-ия (сделали выше);

2) усреднением кин-ой энергии

1) и 2) будут давать разные ответы в общем случае (ответы будут одинаковые при мат-ом описании)

Мат-ое описание: $\underline{\underline{J}}(\underline{r}, t) = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{R}) \cdot \underline{\underline{Q}}^T$

← известный параметр

Пр-ое описание: $\underline{\underline{J}}$ - новая внутренняя переменная (изменяется при попадании в рассматриваемый объём других частиц)

поток инерции через границу

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \underline{\underline{J}}\, dV = \underbrace{-\int_{\partial V} \underline{n} \times \underline{V} \rho \underline{\underline{J}}\, dS}_{\text{поток инерции через границу}} + \underbrace{\int_V \rho \underline{\underline{X}}\, dV}_{\text{источниковый член, описывающий структурные изменения, происходящие в материале}}$$

изм-ие, консолидация и т.д.

52

В лок-ой форме: $\frac{d\underline{\underline{J}}}{dt} = -\underline{v} \times \nabla \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{\chi}}$ – кинетическое ур-ие

$\underline{\underline{\chi}}$ – новый источниковый член, для которого необходимо сформулировать определяющее соотношение.

Кинетическое ур-ие показывает, как тензор инерции изменяется в рассматриваемой (·) пр-ва с течением времени.

$\underline{\underline{\chi}}$ зависит от (·) пр-ва и времени ($\underline{r}$ и t).

Также $\underline{\underline{\chi}}$ может зависеть от
1) температуры;
2) давления (при измельчении частиц);
3) температуры при фазовых переходах;
4) электрического поля для диэлектриков
5) .....

12.04.22

Напишем в простр-ом описании тензор инерции в виде, похожем на его представление в мат-ом описании:

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{Q}}(\underline{r},t) \cdot \underline{\underline{J}}_0(\underline{r},t) \cdot \underline{\underline{Q}}^T(\underline{r},t)$$

$$\dot{\underline{\underline{Q}}}(\underline{r},t) = \frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{Q}}$$

нах-им из осн-ой системы ур-ий (баланс массы, кол-ва дв-ия, дин-ого спина, энергии)

$$\dot{\underline{\underline{J}}} = \underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{J}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{J}}_0 \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T}_{\underline{\omega} \times \underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}} \times \underline{\omega}} + \underbrace{\underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\underline{\underline{J}}}_0 \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{\chi}}}$$

$\underline{\underline{\chi}}$ – отв-ет за стр-ые изм-ия в среде

53

9 Лекция 12.04.2022.

9.1 Размышления о способах составления определяющих соотношений в различных ситуациях (нагрев, давление, ориентационная поляризация)

В лок-ой форме: $\dfrac{d\underline{\underline{J}}}{dt} = -\underline{v}\times\nabla\underline{\underline{J}} + \underline{\underline{\chi}}$ – кинетическое ур-ие

$\underline{\underline{\chi}}$ – новый источниковый член, для которого необходимо сформулировать определяющее соотношение.

Кинетическое ур-ие показывает, как тензор инерции изменяется в рассматриваемой (·) пр-ва с течением времени.

$\underline{\underline{\chi}}$ зависит от (·) пр-ва и времени ($\underline{r}$ и t).

Также $\underline{\underline{\chi}}$ может зависеть от
1) температуры;
2) давления (при измельчении частиц);
3) температуры при фазовых переходах;
4) электрического поля для диэлектриков
5) .....

12.04.22

Напишем в простр-ом описании тензор инерции в виде, похожем на его представление в мат-ом описании:

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{Q}}(\underline{r},t)\cdot\underline{\underline{J}}_0(\underline{r},t)\cdot\underline{\underline{Q}}^T(\underline{r},t)$$

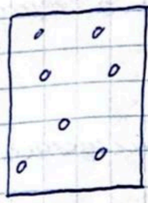
$$\dot{\underline{\underline{Q}}}(\underline{r},t) = \frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{\underline{Q}} = \underline{\omega}\times\underline{\underline{Q}}$$

нах-им из осн-ой системы ур-ий (баланс массы, кол-ва дв-ия, дин-ого спина, энергии)

$$\dot{\underline{\underline{J}}} = \underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}}\cdot\underline{\underline{J}}_0\cdot\underline{\underline{Q}}^T + \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{J}}_0\cdot\dot{\underline{\underline{Q}}}^T}_{\underline{\omega}\times\underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}}\times\underline{\omega}} + \underbrace{\underline{\underline{Q}}\cdot\dot{\underline{\underline{J}}}_0\cdot\underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{\chi}}}$$

$\underline{\underline{\chi}}$ – отв-ет за стр-ые изм-ия в среде

53



репрезентативный объём

(например, при нагреве гранулы расширяются)

$\underline{\underline{J}} = J\underline{\underline{E}}$ - шаровой тензор инерции на ед-цу массы.
(эффективная (средняя) х-ка при изотропном распределении гранул в материале)

Св-во мат-ой объективности: происходящие процессы не должны зав-ть от системы отсчёта, пр-ого или мат-ого описаний

<u>Нагрев:</u> $\underline{\underline{J}}(\underline{r},t) = \underline{\underline{J}}_0(\underline{r})\left(1+\alpha\left(T(\underline{r},t)-T_0\right)\right)^2$ (α - коэф.-т линейного расширения)

$\underline{\underline{J}}_0(\underline{r}) = \underline{\underline{J}}_0$ (нет зав-ти от r, т.к. $\nexists$ однородное распр-ие)

Вспоминаем: $\dot{\underline{\underline{J}}} = \underline{\omega}\times\underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}}\times\underline{\omega} + \underline{\underline{\chi}}$

$\underline{\underline{J}} = J\underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{J}} = J\underline{\underline{E}}$

взаимоуничтожаются
($\underline{\omega}\times\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}\times\underline{\omega}$)

0 (нет трансляц-ых ск-ей, только нагреваем)

$$\dot{\underline{\underline{J}}} = \frac{dJ}{dt}\underline{\underline{E}} + \underline{v}(\underline{r},t)\cdot\cancel{\left(\nabla J(\underline{r},t)\right)}\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\chi}} = \chi\underline{\underline{E}}$$

$$\chi = 2J_0\left(1+\alpha\left(T(\underline{r},t)-T_0\right)\right)\frac{dT(\underline{r},t)}{dt}$$

54

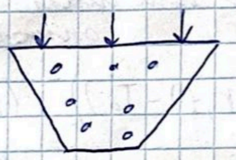
(Ист-ый член получили, исходя из представлений о микроструктуре)

Если частицы = диполи, то при их помещении в эл поле они начнут вращаться

$$J \frac{d\underline{\omega}}{dt} = \underline{m}$$

Давление на м-л.

4 эксперимент: давим на мат-л => частицы измельчаются



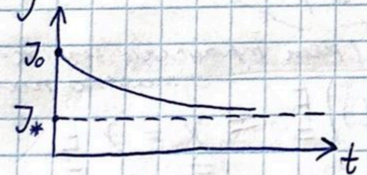
степень сдавления частиц зависит от тензора напряжений

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{E}} + 2\underbrace{\mu(\underline{\underline{J}})}_{\text{существенно зав-т от размера частиц}}\underline{\underline{d}}$$ ← девиатор градиента скорости

$$\rho\dot{\underline{v}} = \rho\underline{g} + \nabla\cdot\underline{\underline{\sigma}}$$

$\underline{\underline{J}} = J\underline{\underline{E}}$ (ориентация не важна) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\chi}} = \chi\underline{\underline{E}}$

$J_* \neq 0$ – при минимальном размере частицы, до которой м.б. измельчение



← нужно придумать опр-ее соотношение, чтобы реш-ие имело такой вид

$\Downarrow$

$$\cancel{J = J_* + J_0 e^{\alpha t}}$$

55 $$J = J_* + (J_0 - J_*)e^{\alpha t}$$

Помним, что $\frac{dJ}{dt} = \chi$

$$\chi = \alpha (J - J_*)$$

Пусть $\alpha = k \, tr \underline{\underline{\sigma}}$ k-жёсткость частиц.

Пр-ка: чем больше давл-ие, тем больше χ (быстрее измельчатся) логично

чем больше k, тем больше χ - нелогично!

Пусть тогда $\alpha = \frac{1}{k} \left(tr \underline{\underline{\sigma}} \right)$ } есть ф-ия $f(p, I_1)$

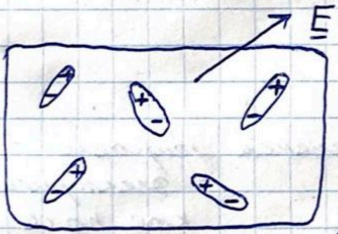
Или

Например, $\alpha = \frac{1}{k} \underbrace{\left(\alpha_1 tr \underline{\underline{\sigma}} + \alpha_2 I_2 \right)}_{\text{есть ф-ия } f(p, I_1, I_2)}$; $I_2 = \underline{\underline{\sigma}} \cdot\cdot \underline{\underline{\sigma}}$

(изотропная ф-ия может зав-ть только от инвариантов тензора)

I_1 - частицы крупкие, надо давить; I_2 - частицы легче разрушить трением.

Ориентационная поляризация.



М-л, состоящий из заряженных диполей.

Внешнее электрическое поле выравнивает диполи, а температурное поле стремится разрушить эту однонаправленность

$$\underline{\underline{J}} = \frac{1}{N} \sum_i \underline{\underline{J}}_i$$

$\underline{\underline{J}}^{sh} = \frac{1}{N} \sum_i J_i^{sh}$ - шаровая часть (хар-ет средний размер частицы и не связана с её ориентацией) 56

$\underline{\underline{J}}^{dev} = \frac{1}{N}\sum_i J_i^{dev}$ – девиаторная часть

$\underline{\underline{J}}^{sh} = \frac{1}{3}\left(tr\,\underline{\underline{J}}\right)\underline{\underline{E}}$

Диполи жёсткие; меняют только ориентацию, поэтому шаровая часть не зависит от времени

$\underline{\underline{J}} \sim \int\limits_V \left[(\underline{r}\cdot\underline{r})\underline{\underline{E}} - \underline{r}\,\underline{r}\right] dV \qquad tr\,\underline{\underline{J}} \sim 2r^2$

$\underline{\underline{J}}_i(t) = \underline{\underline{Q}}_i \cdot \overset{=ab}{\underline{\underline{J}}_i^{\,0}} \cdot \underline{\underline{Q}}_i^{T}; \quad \overset{tr\,J_i}{\overset{\parallel}{\underbrace{\underline{\underline{Q}}_i^{T}\cdot\underline{\underline{Q}}_i}_{\underline{\underline{E}}} \cdot\cdot\, \underline{\underline{J}}_i^{\,0}}} = tr\,\underline{\underline{J}}_i^{\,0}$

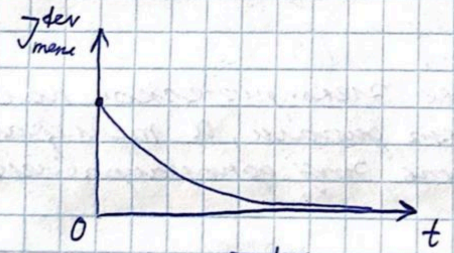
$\Downarrow$ след не зависит от t

Девиаторная часть зависит от того, как частица ориентирована

$\Downarrow$

в данном случае необходимо форм-ть кинетическое ур-ие только для девиатора.

Для теплового дв-ия:



Со временем убираем электрическое поле

$J_{тепл}^{dev} \to 0$

$\underline{\underline{J}}_{тепл}^{dev} = \underline{\underline{A}}\, e^{-\alpha t}$

$\chi_{тепл} = -\alpha J_{тепл}^{dev}$

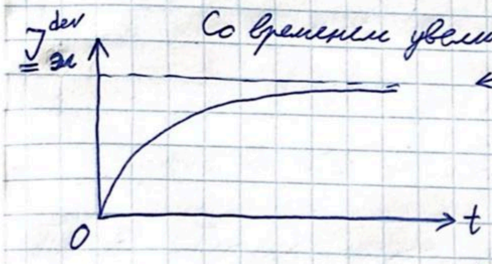
(помним, что $\frac{dJ}{dt} = \chi$)

57

Пусть $\alpha = \frac{1}{t_r}$ (чем выше t_r, тем медленнее убывает $\chi_{тепл}$)

t_r – время релаксации $t_r = t_r(T)$ – убыв-ая ф-ия (с ростом температуры время релаксации падает)

Со временем увеличиваем эл-ое поле



← предельное значение (с одинаковой ориентацией частиц)

равен нулю в изотр. сост (в нач. момент времени)

$$\underline{\underline{\chi}} = \frac{E}{t\cdot\alpha}\left(\underline{\underline{J}}^{dev}_{тепл} - \underline{\underline{J}}^{dev}_{эл}\right)$$

размерн-ть эл. поля (чтобы сокр-сь с E)

$$\underline{\underline{J}} = J_1(\underline{\underline{E}} - \underline{m}\,\underline{m}) + J_2\,\underline{m}\,\underline{m}$$

(после максимального приложения эл. поля получился трансверсально изотропный м-л)

Чтобы опр-ть t_1:

$$\frac{\partial \underline{\underline{J}}^{dev}}{dt} = \chi_{тепл} + \chi_{эл}$$

Параметры модели подбираем так, чтобы их можно было бы определить из экспериментов

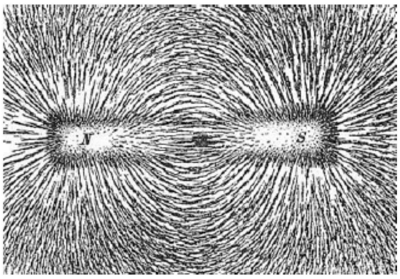
Реш-ие ур-я – ф-ия $\underline{\underline{J}}(t_r, t_1)$

Далее из эсперимента опр-ем t_r и находим t_1.

58

10 Лекция 19.04.2022.

10.1 Уравнения Максвелла



$$\oint_{\partial V(t)} \underline{B}(\underline{z},t)\cdot\underline{n}(\underline{z},t)\,dS=0$$

$\underline{B}$ – вектор магнитного поля,
(вектор магнитной индукции)

$$\int_V \nabla\cdot\underline{B}\,dV=0 \Rightarrow \nabla\cdot\underline{B}=0$$

Магнитный поток через поверхность

$$\underline{\Phi}(t)=\int_{S(t)}\underline{n}(\underline{z},t)\cdot\underline{B}(\underline{z},t)\,dS$$

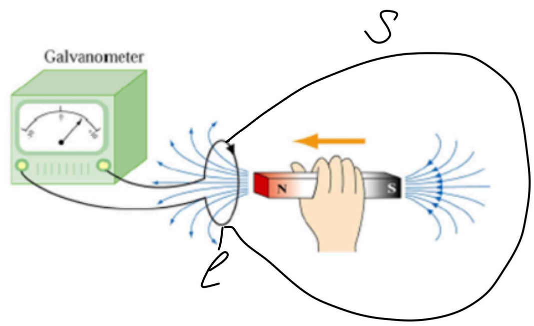
В своих работах Максвелл подробно не рассказал, как ему удалось получить уравнения. В то время ещё не была разработана теория Коссера (теория микрополярных сред, которую мы рассмотрели выше), поэтому Максвелл мог рассматривать вращение только как твёрдого целого, откуда нельзя получить уравнения Максвелла. Видимо, он их получил, основываясь на интуиции.

По мере развития науки поняли, что уравнения Максвелла выполняются далеко не всегда, например, не выполняются (вообще не работают) на микромасштабе.

Елена Александровна Иванова пыталась рассматривать телеграфное уравнение, которое описывает распространение токов в электроцепи. Оказалось, что телеграфные уравнения, описывающие проводимости в диэлектриках и проводниках, кардинально противоположны. Одно из них можно получить из уравнений Максвелла, а другое нельзя. Обратилась к физикам, они сказали, что все специалисты это знают, но никто не объясняет, почему это так.

Если рассматривать уравнения Максвелла как данность, то непонятно, что можно в них модифицировать.

На слайде представлен магнит с ориентированными в его магнитном поле опилками. Введён вектор магнитного поля $\underline{B}$ (индукция магнитного поля), который характеризует ориентацию опилок. Рассмотрена любая замкнутая поверхность, содержащая магнит. Видим, что при любом расположении поверхности, суммарный поток через неё равен нулю. Данный факт трактуется как отсутствие магнитных зарядов.



$$\frac{d}{dt}\int_S \underline{B}(\underline{r},t)\cdot\underline{n}(\underline{r})\,dS = -\oint_l \underline{E}(\underline{r},t)\cdot\underline{\tau}(\underline{r})\,dl$$

$$\frac{d}{dt}\int_S \underline{B}(\underline{r})\cdot\underline{n}(\underline{r},t)\,dS = -\oint_{l(t)} \underline{v}(\underline{r},t)\times\underline{B}(\underline{r})\cdot\underline{\tau}(\underline{r},t)\,dl$$

$$\frac{d}{dt}\int_S \underline{B}(\underline{r},t)\cdot\underline{n}(\underline{r},t)\,dS = -\oint_l \underbrace{\left[\underline{E}(\underline{r},t)+\underline{v}(\underline{r},t)\times\underline{B}(\underline{r},t)\right]}_{\text{электродвижущая сила}}\cdot\underline{\tau}(\underline{r},t)\,dl$$

Следующий опыт (первое уравнение на слайде): изменяем поток магнитного поля через площадь, ограниченную контуром (изменяем за счёт движения магнита, кольцо находится в переменном магнитном поле). Такое изменение создаёт электричество в рассматриваемом контуре, характеризуемое вектором $\underline{E}$ (напряжённость электрического поля).

Ещё один опыт (второе уравнение на слайде): изменяем поток магнитного поля через площадь, ограниченную контуром (изменяем за счёт движения самого контура - его нормали, изменения формы). Тоже будем наблюдать ток в проводе.

Объединяя, получаем третье уравнение на слайде: изменение магнитного потока через контур соответствует некой электродвижущей силе, возникающей в проводнике.

$$\frac{d}{dt}\oint_{S(t)} \underline{B}(\underline{z},t)\cdot\underline{n}(\underline{z},t)\,dS = 0 \Rightarrow$$

если замкнём контур на предыдущем слайде, то изменение потока со временем равно нулю

$$\oint_{S(t)} \underline{B}(\underline{z},t)\cdot\underline{n}(\underline{z},t)\,dS = \oint_{S(0)} \underline{B}(\underline{z},0)\cdot\underline{n}(\underline{z},0)\,dS$$

Транспортная теорема (чисто из математики, как пронести производную через интеграл):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \underline{B}\cdot\underline{n}\,dS = \int_{S(t)}\left(\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{v}\,\nabla\cdot\underline{B}\right)\cdot\underline{n}\,dS + \oint_{l}(\underline{B}\times\underline{v})\cdot\underline{\tau}\,dl}$$

Подставляя первое уравнение с предыдущего слайда в транспортную теорему:

$$\int_S\left(\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \nabla\times\underline{E}\right)\cdot\underline{n}\,dS = 0 \Rightarrow \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \nabla\times\underline{E} = 0$$

Используя при этом теорему Стокса (переход от интеграла по контуру к интегралу по поверхности)

второе ур-ние Максвелла

Транспортная теорема = вносим производную под знак интеграла по определённым правилам.

В итоге, получили второе уравнение Максвелла. Важно: для полей $\underline{B}$ и $\underline{E}$ не нужна материя (они существуют вокруг всего). Рассматриваемые контуры воображаемы.

З-н сохранения электрического заряда.

Изменение заряда в объёме: Подвод заряда через границу: Неконвективные токи (аналог передачи тепла в уравнении баланса энергии):

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} q\,dV = \oint_{\partial V}\left[q(\underline{v}^s - \underline{v}) - \underline{j}\right]\cdot\underline{n}\,dS$$

(скорость движения границ объёма) (скорость движения зарядов)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla\cdot(q\underline{v} + \underline{j}) = 0 \Rightarrow \frac{\delta q}{\delta t} + q\,\nabla\cdot\underline{v} + \nabla\cdot\underline{j} = 0$$

(в локальной форме через материальную производную)

$$\frac{d}{dt}\int_S \underline{D}\cdot\underline{n}\,dS = \oint_l\left[\underline{H} + \underline{D}\times\underline{v}\right]\cdot\underline{\tau}\,dl + \int_S\left[q(\underline{v} - \underline{v}_s) - \underline{j}\right]\cdot\underline{n}\,dS$$

(Общее решение верхнего уравнения)

$\underline{D}$ и $\underline{H}$ – электрический и магнитный потенциалы

$\underline{D}$ – вектор электрической индукции

$\underline{H}$ – вектор напряжённости магнитного поля

Поля D и H связаны с массой

Следующие уравнения (на слайде) связаны с электрическими зарядами.

Электрический заряд всегда связан с массой (он не может без неё существовать). Заряд не является аддитивным по массе (если добавляем массу, то не значит, что добавили заряд, т.к. добавляемая масса может быть, например, нейтрально заряженной).

q (на слайде) – удельная величина заряда по объёму.

Для замкнутой поверхности

(интеграл по контуру в последнем выражении на предыдущем слайде обнуляется)

$$\oint_S \underline{D}\cdot\underline{n}\,dS = \oint_S \left[q(\underline{v}^s - \underline{v}) - \underline{j}\right]\cdot\underline{n}\,dS \equiv \int_V q\,dV$$

з-н Гаусса $\nabla\cdot\underline{D} = q$

$$\int_S \left(\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + q\underline{v}\right)\cdot \underline{n}\, dS = \oint_l \underline{H}\cdot\underline{\tau}\, dl - \int_S \underline{j}\cdot\underline{n}\, dS = \int_S (\nabla\times\underline{H} - \underline{j})\cdot\underline{n}\, dS$$

$$-\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \nabla\times\underline{H} = q\underline{v} + \underline{j}$$

$$\underline{D} = \alpha\underline{E}, \quad \underline{B} = \beta\underline{H}$$ (Максвелл-Лоренц)

$$[\underline{E}] = \frac{\text{сила}}{\text{заряд}}; \quad [\underline{D}] = \frac{\text{заряд}}{\text{длина}^2}$$

$$[\underline{B}] = \frac{\text{сила}}{\text{заряд}\cdot\text{длина}/\text{время}}$$

$$[\underline{H}] = \frac{\text{заряд}/\text{время}}{\text{длина}}$$

Преобразование второй части общего решения, полученного из закона сохранения заряда. Последнее уравнение Максвелла.

Есть две пары похожих характеристик: $\underline{E}$ и $\underline{B}$ вводили без наличия зарядов (просто электрические и магнитные поля без наличия материи); $\underline{D}$ и $\underline{H}$, для которых необходимо существование материи. Есть гипотеза Максвелла-Лоренца линейной связи между этими парами характеристик.

Вектор электрической индукции для точечного заряда $e\delta(x)$ $\quad \underline{D} = D(r)\underline{e_r} = \frac{e}{4\pi r^2}\underline{e_r}$

Вектор напряженности магнитного поля для постоянного тока

$$\underline{H} = H(r)\underline{e_\varphi} = \frac{1}{2\pi r}\underline{e_\varphi}$$

$$\underline{F_e} = a e' \underline{E} \quad ; \quad \frac{d\underline{F_m}}{dz} = b\,\underline{I}' \times \underline{B}$$

$$\underline{F_e} = \frac{a}{4\pi\varepsilon}\frac{ee'}{r^2}\underline{e_r} \quad ; \quad \frac{d\underline{F_m}}{dz} = -\frac{b\beta}{2\pi}\frac{\underline{I}\,\underline{I}'}{r}\underline{e_r}$$

з-н Кулона $\qquad$ з-н Био-Савара

система сгс (сантиметр, грамм, секунда)
ед. заряда: 2 точечных заряда 1esu (electro-static unit) расположенных на расстоянии 1см действуют др. на др с единичной силой 1дина = $1 \frac{\text{гр}\cdot\text{см}}{c^2}$,

$\underline{F_e} = \frac{ee'}{r^2} \underline{e_r}$ $\qquad 1esu = \frac{\text{гр}^{1/2}\text{см}^{3/2}}{c}$

Система Хевисайда–Лоренца $\frac{a}{\gamma} = \underline{1}$

Размерность тока $q\underline{v} = \frac{\text{гр}^{1/2}\text{см}^{5/2}}{c^2}$

$\frac{d\underline{F_m}}{dz} = -\frac{\beta b}{2\pi}\frac{\underline{I}\,\underline{I}'}{r}\underline{e_r} \implies [b\beta] = \frac{c^2}{\text{см}^2} \sim \frac{1}{v^2}$

сгс $b\beta = \frac{4\pi}{c^2}$; Хевисайд $b\beta = \frac{1}{c^2}$

Гаусс $[\underline{E}] = \dfrac{г^{1/2}}{см^{1/2}\, с}$; $[\underline{D}] = \dfrac{г^{1/2}}{см^{1/2}\, с}$

$$[\underline{B}] = \frac{г^{1/2}}{см^{3/2}} \quad ; \quad [\underline{H}] = \frac{г^{1/2}\, см^{1/2}}{с^2}$$

Хевисайд-Лоренц

$$\underline{B}^{G} = c\underline{B} \quad ; \quad \underline{H}^{G} = \frac{1}{c}\underline{H}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{D} &= \underline{E} \\ \underline{H} &= \underline{B} \end{aligned}}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \nabla \times \underline{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = 4\pi q \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \nabla \times \underline{H} = \frac{4\pi}{c}\left(q\underline{v} + \underline{j}\right)$$

система СИ
Заряд вводится через ток.
1 Ампер — постоянный ток, который при прохождении по 2 параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м. вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия $2 \cdot 10^{-7} H$

$$|\underline{F}| = -\frac{k\beta}{2\pi} \frac{I I'}{r} \qquad k\beta = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{A^2}$$

μ_0 — магнитная постоянная вакуума

Кулон - величина заряда, прошедшего через сечение проводника при силе тока 1А за 1с

$$\left[\frac{a}{d}\right] = \frac{Нм^2}{А^2с^2} \qquad \frac{a}{d} = \mu_0 c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

ε_0 - электрическая постоянная вакуума

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}, \quad \underline{B} = \mu_0 \underline{H}, \quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$(1)\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \qquad (2)\ \nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$(3)\ \nabla \cdot \underline{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (4)\ \nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\underline{j}$$

$\nabla \cdot \underline{j} = -\frac{\partial q}{\partial t}$ — з-н сохранения заряда

10.2 Связь уравнений Максвелла с уравнениями механики

Возвращаемся к полученным ранее механическим уравнениям для полярных сред.

Баланс количества движения:

$$\rho \frac{\delta \underline{v}}{\delta t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} \tag{1}$$

Баланс динамического спина

$$\rho \frac{\delta \left(\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\omega} \right)}{\delta t} = \underline{\underline{\sigma}}_{\times} + \nabla \cdot \underline{\underline{M}} + \rho \underline{m} \tag{2}$$

Баланс энергии:

$$\rho \frac{\delta u}{\delta t} = \underline{\underline{\sigma}} : \left(\nabla \underline{v} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\omega} \right) + \underline{\underline{M}} : \nabla \underline{\omega} + \rho q - \nabla \cdot \underline{h} \tag{3}$$

Две диаметрально противоположные точки зрения: дальнодействия (сила может передаваться просто абстрактно через пустоту) и близкодействия (всегда есть посредник, который передаёт воздействие от одного объекта к другому; этот посредник не имеет ничего общего с реально наблюдаемой материей).

Будем моделировать вакуум неким континуумом (для того, чтобы можно было пользоваться континуальными моделями мы должны стоять на теории близкодействия: есть некий агент, который передаёт влияние одного объекта на другой объект).

Максвелл и Герц тоже работали, основываясь на близкодействии (наличии некого эфира), но затем научный мир стал отказываться от этой точки зрения (так как не были развиты теории с вращательными степенями свободы, а, если строить теории близкодействия, основываясь только на трансляционных степенях свободы, то придём к противоречиям).

Сейчас, когда появились теория Коссера (микрополярных сред), возвращаются к концепции эфира, но процесс возвращения происходит медленно, так как многие по-прежнему считают, что концепция эфира и близкодействие – отсталые. Но даже вакуум (пустота) наделяется огромным количество характеристик (у него есть магнитная постоянная, электрическая постоянная, скорость распространения света, скорость распространения гравитационных волн) - (но с другой стороны, это смешно считать, что у пустоты есть множество физических характеристик).

Итак, мы считаем, что есть эфир (некий континуум, который передаёт что-то из одной точки в другую).

Рассмотрим простую ситуацию – частицы эфира неподвижны и т.д.:

$$\underline{v} = 0; \quad \underline{\underline{\sigma}} = 0; \quad \rho = \text{const}; \quad \underline{f} = 0 \tag{4}$$

Таким образом, уравнение (1) будет удовлетворяться тождественно.

Плюс тогда

$$\frac{\delta}{\delta t}(.) = \frac{d}{dt}(.) + \overset{=0}{\widehat{\underline{v}}} \cdot \nabla (.) = \frac{d}{dt}(.) \tag{5}$$

Примем следующее определяющее соотношение для тензора моментных напряжений (является антисимметричным):

$$\underline{\underline{M}} = \mu \underline{B} \times \underline{\underline{E}} \tag{6}$$

Размерности:

$$\left([\underline{B}] = \text{Тесла} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}\right) \text{ и } \left([\underline{\underline{M}}] = \text{Па} \cdot \text{м} = \frac{\text{Н}}{\text{м}}\right) \Rightarrow [\mu] = \text{А} \tag{7}$$

Распишем дивергенцию $\underline{\underline{M}}$:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{M}} = \mu \nabla \cdot \left(\underline{\underline{E}} \times \underline{B}\right) = \mu \nabla \times \underline{B} \tag{8}$$

Далее принимаем тензор инерции шаровым:

$$\underline{\underline{J}} = J_0 \underline{\underline{E}} \tag{9}$$

Баланс динамического спина (2) принимает следующий вид:

$$\rho_0 \frac{d(J_0 \underline{\omega})}{dt} = \mu \nabla \times \underline{B} + \rho_0 \underline{m} \tag{10}$$

Выразим $\nabla \times \underline{B}$:

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} (\rho_0 J_0 \underline{\omega}) - \frac{\rho_0}{\mu} \underline{m} \tag{11}$$

Получили уравнение, которое по структуре совпадает **с четвёртым уравнением Максвелла**:

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d\underline{E}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \underline{j} \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (12), получаем:

$$\underline{E} = \frac{\rho_0 J_0 c^2}{\mu} \underline{\omega} \text{ и } \underline{j} = -\frac{\varepsilon_0 c^2 \rho_0}{\mu} \underline{m} \tag{13}$$

Далее будем считать, что повороты малы (линейная микрополярная теория), тогда

$$\underline{\omega} = \frac{d\underline{\theta}}{dt} \tag{14}$$

и из (13):

$$\underline{E} = \frac{\rho_0 J_0 c^2}{\mu} \frac{d\underline{\theta}}{dt} \tag{15}$$

Далее начинаем работать с балансом энергии:

$$\underline{\underline{M}} : \nabla \underline{\omega} = \tag{16}$$

используя определяющее соотношение (6),

$$= \mu \left(\underline{B} \times \underline{e_k e_k}\right) : (\nabla \underline{\omega}) = \mu \left(\underline{B} \times \underline{e_k}\right) \cdot \overbrace{\nabla \left(\underline{e_k} \cdot \omega\right)}^{\nabla \text{ только на } \omega} = \mu \overbrace{\nabla \cdot \left(\underline{B} \times \underline{e_k}\right) e_k \cdot \underline{\omega}}^{\nabla \text{ действует только на } \omega} =$$

$$= \mu \underbrace{\nabla \cdot (\underline{B} \times \underline{\omega})}_{\nabla \text{ только на } \omega} = \mu \underline{B} \cdot (\underline{\omega} \times \nabla) = -\mu \underline{B} \cdot (\nabla \times \underline{\omega}) \tag{17}$$

Подставляем в баланс энергии (3), принимая, что $\underline{h} = 0$ и $q = 0$:

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \mu \underline{B} \cdot \left(\nabla \times \frac{d\underline{\theta}}{dt}\right) \tag{18}$$

Так мы в линейной теории (малые повороты), то энергия

$$u = \frac{1}{2} \kappa \left(\nabla \times \underline{\theta}\right)^2 \tag{19}$$

и равенство (18) перепишется в виде:

$$\rho_0 \kappa \left(\nabla \times \underline{\theta}\right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\nabla \cdot \underline{\theta}\right) = -\mu \underline{B} \cdot \frac{d}{dt} \left(\nabla \times \underline{\theta}\right) \tag{20}$$

Следовательно,

$$\underline{B} = -\frac{\rho_0 \kappa}{\mu} \nabla \times \underline{\theta} \tag{21}$$

Видим, что $\underline{B}$ есть ротор какой-то векторной величины, поэтому дивергенция $\underline{B}$ равна нулю:

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \tag{22}$$

Получили **первое уравнение Максвелла**.

Дифференцируем равенство (21):

$$\frac{d\underline{B}}{dt} = -\rho_0 \frac{\kappa}{\mu} \nabla \times \frac{d\underline{\theta}}{dt} \tag{23}$$

Из (15):

$$\nabla \times \underline{E} = \frac{\rho_0 J_0 c^2}{\mu} \nabla \times \frac{d\underline{\theta}}{dt} \tag{24}$$

Таким образом, из (23) и (24):

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{J_0 c^2}{\kappa} \frac{d\underline{B}}{dt} \tag{25}$$

Получили **второе уравнение Максвелла** (должно выполняться равенство $\kappa = J_0 c^2$).
Возьмём дивергенцию от обеих частей уравнения (12):

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \nabla \cdot \underline{E} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \nabla \cdot \underline{j} \tag{26}$$

Известно, что

$$\nabla \cdot \underline{j} = -\frac{dq}{dt} \tag{27}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{dq}{dt} \tag{28}$$

Получили **третье уравнение Максвелла**.

Таким образом, показали, что из механики (в самой простой среде) можем получить уравнения Максвелла. Смогли связать механические величины с электродинамическими величинами.

Большой плюс в том, что теперь знаем, каким образом можем модифицировать уравнения Максвелла, рассматривая более сложные среды с дополнительными слагаемыми и множителями (и тем самым обобщить уравнения Максвелла на более общие случаи).

11 Лекция 26.04.2022.

12 Лекция 17.05.2022.

13 Лекция 24.05.2022.