

## Задача 2. Социальное моделирование.

К 1 сентября в стране «Гаудэамус игитур»  $m$  абитуриентов  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  пытаются поступить в  $n$  университетов  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ . Поступление в университет происходит по результатам трех выпускных экзаменов «АГУ», за каждый из которых абитуриент может получить до 100 баллов. Пусть у каждого абитуриента заданы строгие предпочтения на множестве университетов в виде списка  $p(a_j) = \{c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jk}\}$ , при этом некоторые университеты могут отсутствовать в списках предпочтений отдельных абитуриентов. Каждый университет имеет нижнюю квоту поступления  $l(c_i)$  и верхнюю квоту поступления  $u(c_i) \geq l(c_i)$  для любого  $c_i \in C$ . В случае, если число абитуриентов, поступивших в университет, меньше нижней квоты, то университет подлежит закрытию. Будем говорить, что имеется стабильное разбиение абитуриентов по университетам, если выполнены следующие условия:

- а) не существует открытого (работающего) университета, такого, что существует абитуриент, который наряду с открытым университетом предпочитает друг друга своим текущим «партнерам»;
- б) не существует закрытого (не работающего) университета, такого, что существует абитуриент, который предпочитает закрытый университет своему текущему университету.

### Задания.

1) Предположим, что предпочтения всех абитуриентов, которые хотят стать историками, по университетам совпадают. Валя и Маша являются абитуриентами и тоже хотят стать историками. Перед тем как начнется зачисление в университеты, Маша думает рассказать ли Вале про новый «Перспективный университет», о котором Валя не знала. Может ли получиться, что:

- (а) (2 балла) Маша окажется в менее предпочтительном университете, рассказав Вале о новом университете?
- (б) (2 балла) Маше выгодно рассказать Вале о новом университете?

2) (5 баллов) Друзья Миша, Саша, Петр и Валера живут в Простоквашино и хотят в следующем году поступать в университет. Ребята заочно знакомы с девушками Дарьей и Натальей из Уфы, Катей и Лизой из Москвы, и у каждого юноши и девушки есть свой список предпочтений противоположного пола. Поэтому Миша, Саша, Петр и Валера хотели бы поступать в университеты тех городов, где у них и у девушек возникнут обоюдные симпатии. Единственная проблема, что братья Миша и Саша не хотят расставаться, и поедут обязательно вместе или в Уфу, или в Москву. Ребятам настолько важно быть вместе, что любой из них готов отказаться от самой предпочтительной девушки, если она будет жить не в том городе, где живет девушка брата. Возможно ли, при любых вариантах предпочтений найти стабильное разбиение на пары?

3) (6 баллов) Исследовать условия, при которых можно распределить  $m$  абитуриентов  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  по  $n$  университетам  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  так, чтобы итоговое разбиение было устойчивым. Всегда ли это возможно?

- 4) (15 баллов) а) Составьте распределение абитуриентов по университетам, если известны

баллы абитуриента, его список предпочтений, а также верхняя квота университетов (нижняя квота для всех университетов равна нулю). Если баллы абитуриентов совпадают, то лучший абитуриент определяется по лексикографическому порядку его id номера. В результате должен быть получен файл, содержащий список студентов и университетов, с указанием куда поступил абитуриент.

data.csv – файл, содержащий предпочтения студентов (id\_s000...am) относительно университетов (id\_u00...bn), а также личный рейтинг студентов в баллах в столбце rating\_students;

quota.json – файл, содержащий верхние квоты университетов;

example.json – пример файла-ответа.

б) Возможно ли использование данного алгоритма в текущей приемной кампании для оптимального зачисления абитуриентов в университеты. Какие положительные и отрицательные стороны, в том числе социальные, может иметь алгоритм при использовании в России?

5) (15 баллов) Докажите, хотя бы в частных случаях, например, в случае верхней квоты равной 3, что задача стабильного разбиения абитуриентов по университетам с нижней и верхней ненулевыми квотами в общей постановке является NP-полной?

Для доказательства можно воспользоваться следующим утверждением. Рассмотрим множество мужчин  $V = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  и женщин  $U = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ . У каждой женщины и мужчины есть свой список предпочтений, возможно, не полный и нестрого упорядоченный, а именно этот список может содержать неупорядоченную подпоследовательность предпочтений, например  $w_i : m_1, (m_2, m_3), m_4, m_5$  (в этом случае для женщины  $w_i$  нет явного предпочтения между мужчинами  $m_2, m_3$ ). Требуется решить задачу о стабильном образовании пар мужчин и женщин. Справедливо утверждение, что данная задача является NP-полной.

Исходные данные представлены в директории задачи.

В пункт 2.1. «Загрузка файла решения» необходимо загрузить файл в формате pdf/jpeg. Файл должен содержать полное решение задачи 2.

В пункт 2.2 «Загрузка файла решения json» необходимо загрузить файл в формате json. Файл должен содержать решение задачи 2 пункт 4. Пример файла ответа example.json.