## PENYEDERHANAAN EKSPRESI LOGIKA DAN STRATEGI PEMBALIKAN

1. Penyederhanaan

   Penyederhanaan adalah proses mengubah bentuk ekspresi-ekspresi logika menjadi lebih sederhana, dengan menggunakan hukum-hukum ekivalensi dalam logika. Tujuan dari penyederhanaan ini adalah kemudahan dalam mengoperasikan atau menentukan ekivalensinya dengan ekspresi logika yang lain.

   Operasi penyederhanaan adalah langkah mengubah persamaan logika dengan menggunakan hukum-hukum logika pada operasi logika. Penyederhanaan logika menggunakan tabel pada bagian Ekuivalen Logis.

2. Hukum – Hukum Logika

   Berikut ini merupakan tabel yang berisi hukum-hukum logika yang penting dan banyak digunakan untuk melakukan operasi logika dan semua hukum-hukum tersebut dapat dibuktikan dengan tabel kebenaran :

Daftar Ekuivalen Logis

(Plus Hukum-hukum Logika Proposisional)

| No | Ekuivalen Logis | Nama |
|---|---|---|
| **1** | A ^ 1 ≡ A<br>A v 0 ≡ A | Identity of ^ (Identity Laws)<br>Zero of v (Identity Laws) |
| **2** | A v 1 ≡ 1<br>A ^ 0 ≡ 0 | Identity of v (Dominition Laws)<br>Zero of ^ (Dominition Laws) |
| **3** | A v ¬A ≡ 1<br>A ^ ¬A ≡ 0 | Tautology (Excluded Middle Law)<br>Law of Contradiction |
| **4** | A v A ≡ A<br>A ^ A ≡ A | Idempotence Laws<br>Idempotence Laws |
| **5** | ¬ ¬ A ≡ A | Law of Double Negation |
| **6** | A ^ B ≡ B ^ A<br>A v B ≡ B v A | Komutatif<br>Komutatif |
| **7** | (A ^ B) ^ C ≡ A ^ (B ^ C)<br>(A v B) v C ≡ A v (B v C) | Assosiatif<br>Assosiatif |
| **8** | A ^ (B v C) ≡ (A ^ B) v (A ^ C)<br>A v (B ^ C) ≡ (A v B) ^ (A v C) | Distributif<br>Distributif |
| **9** | A ^ (A v B) ≡ A<br>A v (A ^ B) ≡ A | Absorpsi<br>Absorpsi |
| **10** | A ^ (¬A v B) ≡ A ^ B | Absorpsi |

| | | |
|---|---|---|
| | A v (¬A ^ B) ≡ A v B | Absorpsi |
| **11** | ¬ (A ^ B) ≡ ¬A v ¬B<br>¬ (A v B) ≡ ¬A ^ ¬B | De Morgan's Law<br>De Morgan's Law |
| **12** | (A ^ B) v (A ^ ¬B) ≡ A | |
| **13** | A → B ≡ ¬A v B<br>A → B ≡ ¬(A ^ ¬B) | |
| **14** | A ↔ B ≡ (A ^ B) v (¬A ^ ¬B)<br>A ↔ B ≡ (A → B) ^ (B → A) | |
| **15** | (A ^ B) v (A ^ ¬B) ≡ A<br>(A v B) ^ (A v ¬B) ≡ A | |
| **16** | (A ^ B) v (¬A ^ B) ≡ B<br>(A v B) ^ (¬A v B) ≡ B | |

3. Hukum Komutatif dan Asosiatif

**Komutatif**

Ciri-cirinya :

1. Variabel kedua proposisi dapat saling berganti tempat tanpa mengubah nilai kebenaran dari kedua ekspresi.

   Ex : ( A ^ B ) ≡ ( B ^ A)

   ( A ↔ B ) ≡ ( B ↔ A )

2. Perangkai Konjungsi ( ^ ), Disjungsi ( v) dan Ekuivalensi ( ↔ ) bersifat komutatif

3. Perangkai Implikasi ( → ) tidak bersifat komutatif dengan dibuktikan dari tabel kebenaran

   Ex : ( A → B ) dengan ( B → A ) tidaklah ekuivalen.

**Asosiatif**

Ciri – cirinya :

1. Mengacu pada pemindahan tanda kurung dan tidak mengubah nilai kebenarannya.

   Ex : ( ( A ^ B ) ^ C ) ≡ ( A ^ ( B ^ C ) ) ➔ Buktikan dengan Tabel Kebenaran

2. Biasanya terjadi pada perangkai yang sama ( Disjungsi, Konjungsi dan Ekuivalensi )
   Ex : $( ( A \vee B ) \vee C ) \equiv ( A \vee ( B \vee C ) )$

3. Pengecualian pada Perangkai Implikasi ( $\rightarrow$ )
   Ex : $( ( A \rightarrow B ) \rightarrow C )$ tidak sama $( A \rightarrow ( B \rightarrow C ) )$ ➔ Buktikan dengan Tabel Kebenaran

4. Jika perangkainya berbeda pada satu ekspresi logika tidak bisa memindahkan tanda kurung dengan sembarangan.
   Ex : $( ( A \wedge B ) \vee C )$ dan $( A \wedge ( B \vee C ) )$ tidaklah sama. ➔ Buktikan dengan Tabel Kebenaran

Example :

1. **$\underline{( A \vee 0 )} \wedge \underline{( A \vee \neg A} )$**

| | |
|---|---|
| $\equiv A \wedge ( A \vee \neg A )$ | Zero of v |
| $\equiv A \wedge 1$ | Tautologi |
| $\equiv$ **$A$** | Identity of ^ |

2. **$\underline{( A \wedge \neg B} ) \vee \underline{( A \wedge B \wedge C} )$**

| | |
|---|---|
| $\equiv (A \wedge \neg B) \vee ( A \wedge (B \wedge C) )$ | Tambah Kurung |
| $\equiv A \wedge ( \neg B \vee ( B \wedge C ))$ | Distributif 1 |
| $\equiv A \wedge ( ( \neg B \vee B ) \wedge ( \neg B \vee C ) )$ | Distributif 2 |
| $\equiv A \wedge ( 1 \wedge ( \neg B \vee C ) )$ | Tautologi |
| $\equiv$ **$A \wedge ( \neg B \vee C )$** | |

Penyederhanaan juga dapat digunakan untuk membuktikan ekuivalen atau kesamaan secara logis.

3. **$\underline{\neg A} \rightarrow \underline{\neg( A \rightarrow \neg B} )$**

| | |
|---|---|
| | $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ |
| $\equiv \neg \neg A \vee \neg(A \rightarrow \neg B)$ | $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ |

≡ ¬ ¬A v ¬(¬A v ¬B)

≡ ¬ ¬A v (¬ ¬A ^ ¬ ¬ B) Hukum De’Morgan

≡ A v ( A ^ B ) Law of Double Negation

≡ A

Untuk membuat penyederhanaan, pertama kali harus dihilangkan adalah $\rightarrow dan \leftrightarrow$ dan menjadikan kombinasi dari ∧ , ∨, dan ~. Beberapa contoh kesamaan logis.

$A \rightarrow B \equiv (\sim A \ \vee B)$

$A \leftrightarrow B \equiv (\sim A \vee B) \wedge (\sim B \vee A)$

$\equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$

Operasi Penyederhanaan dari suatu ekspresi logika dapat dikatakan bila :

1. Tautologi : Kalau hasil akhir ekspresi yg disederhanakan itu bernilai 1
2. Kontradiksi : Kalau hasil akhir ekspresi yg disederhanakan itu bernilai 0
3. Contingent : Kalau hasil akhir ekspresi yg disederhanakan itu bernilai tidak 1 atau tidak 0.

Contoh :

**1. ( A v B ) ^ ¬A ^ ¬B**

| | |
|---|---|
| ≡ ¬A ^ ( A v B ) ^ ¬B | Hukum Komutatif |
| ≡ ( ¬A ^ ( A v B ) ) ^ ¬B | Tambah Kurung |
| ≡ ( ¬A ^ B ) ^ ¬B | Absorpsi |
| ≡ ¬A ^ ( B ^ ¬B ) | Assosiatif |
| ≡ ¬A ^ 0 | Law of contradiction |
| **≡ 0** | Zero of ^ |

Ekspresi Logika diatas dikatakan Kontradiksi

**2. ¬( A ^ ¬A )**

| | |
|---|---|
| ≡ ¬A v ¬¬A | Hukum De’Morgan |
| ≡ ¬A v A | Law of Double Negation |
| **≡ 1** | |

Ekspresi Logika diatas dikatakan Tautologi

**3. ( (A v B) ^ ¬A ) → ¬B**

| | |
|---|---|
| $\equiv\ \neg ( (A \vee B) \wedge \neg A ) \vee \neg B$ | $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ |
| $\equiv\ ( \neg(A \vee B) \vee \neg\neg A) \vee \neg B$ | Hukum De'morgan |
| $\equiv ( (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg\neg A ) \vee \neg B$ | Hukum De'morgan |
| $\equiv ( ( \neg A \wedge \neg B) \vee A ) \vee \neg B$ | Lawof double negasi |
| $\equiv ( A \vee (\neg A \wedge \neg B) ) \vee \neg B$ | Komutatif |
| $\equiv ( A \vee \neg B ) \vee \neg B$ | Absorpsi |
| $\equiv\ A \vee ( \neg B \vee \neg B )$ | Assosiatif |
| $\boldsymbol{\equiv\ A \vee \neg B}$ | |

Ekspresi Logika diatas dikatakan Contingent.

4. Strategi Pembalikkan

Strategi pembalikan dilakukan dengan cara menyalahkan kesimpulan dari argument yakni :

1. Menegasikan kesimpulan, atau
2. Memberi nilai F.
3. Kesimpulan diberi negasi dan diberi operator ^

Contoh:

1. Jika lampu lalu lintas menyala merah, maka kendaraan-kendaraan berhenti. Lampu lalu lintas menyala merah. Dengan demikian, kendaraan-kendaraan berhenti.
   Tentukan :
   a. Ekspresi logikanya
   b. Buat tabel kebenaran dan tentukan jenis operasinya
   c. Kalau perlu sederhanakan hasil ekspresi logikanya.
   d. Strategi pembalikan

Jawab :
A = Lampu lalu lintas menyala merah
B = Kendaraan-kendaraan berhenti

1. $A \rightarrow B$
2. $A$
3. $B$

Ekspresi Logikanya : $( ( A \rightarrow B ) \wedge A ) \rightarrow B$

Tabel Kebenaran

| **A** | **B** | **A → B** | **(A → B) ^ A** | **( (A → B) ^ A) → B** |
|---|---|---|---|---|
| F | F | T | F | T |
| F | T | T | F | T |
| T | F | F | F | T |
| T | T | T | T | T |

Strategi Pembalikan :

( ( A → B ) ^ A ) → B    menjadi **( A → B) ^ A ^ ¬B**

| **A** | **B** | **A → B** | **(A → B) ^ A** | **¬B** | **(A → B) ^ A ^ ¬B** |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | T | F | T | F |
| F | T | T | F | F | F |
| T | F | F | F | T | F |
| T | T | T | T | F | F |

Setelah hasil strategi pembalikan dengan menegasikan kesimpulan diperiksa dengan tabel kebenaran, ternyata diperoleh nilai F pada semua kemungkinan nilai, maka **dianggap valid**.

2. Jika Persebaya memenangkan Liga Indonesia, maka para bonek akan senang. Jika mereka tidak senang maka para bonek akan minum-minum. Dengan demikian, jika para bonek tidak minum-minum, maka Persebaya akan memenangkan Liga Indonesia.
   Tentukan :
   a. Ekspresi Logika
   b. Strategi Pembalikannya.

   A = Persebaya memenangkan Liga Indonesia
   B = Para Bonek senang
   C = Para bonek minum-minum

   1. A → B
   2. ¬B → C
   3. ¬C → A

   Ekspresi Logikanya : ( (A → B) ^ (¬B → C) → (¬C →A)

Tabel Kebenaran

| **A** | **B** | **C** | **¬B** | **¬C** | **A → B (1)** | **¬B → C (2)** | **(¬C → A) (3)** | **(1) ^ (2)** | **(1) ^ (2) → (3)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | T | T | T | F | F | F | T |
| F | F | T | T | F | T | T | T | T | T |
| F | T | F | F | T | T | T | F | T | F |
| F | T | T | F | F | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | T | F | F | T | F | T |
| T | F | T | T | F | F | T | T | F | T |
| T | T | F | F | T | T | T | T | T | T |
| T | T | T | F | F | T | T | T | T | T |

Strategi Pembalikan

( (A → B) ^ (¬B → C) → (¬C →A)    menjadi **(A → B) ^ (¬B → C) ^ ¬(¬C →A)**

| **A** | **B** | **C** | **¬B** | **¬C** | **A → B (1)** | **¬B → C (2)** | **(¬C → A) (3)** | **¬(¬C→A) (4)** | **(1) ^ (2) ^ (4)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | T | T | T | F | F | T | F |
| F | F | T | T | F | T | T | T | F | F |
| F | T | F | F | T | T | T | F | T | T |
| F | T | T | F | F | T | T | T | F | F |
| T | F | F | T | T | F | F | T | F | F |
| T | F | T | T | F | F | T | T | F | F |
| T | T | F | F | T | T | T | T | F | F |
| T | T | T | F | F | T | T | T | F | F |

Setelah hasil strategi pembalikan dengan menegasikan kesimpulan diperiksa dengan tabel kebenaran, ternyata diperoleh hanya 1 nilai T dan lainnya F pada semua kemungkinan nilai, maka **dianggap tidak valid**.