Pertemuan 2

Matematika Komputasi

Agustin, M. Kom

Welcome!!

Logika

Logika

Apa itu Logika?

Logika merupakan studi penalaran (reasoning) yaitu cara berpikir dengan mengembangkan sesuatu berdasarkan akal atau fakta bukan dengan perasaan atau pengalaman.

Logika pertama kali dikembangkan oleh filsuf Yunani yaitu Aristoteles sekitar 2300 tahun yang lalu.
Hukum – hukum logika membantu kita untuk membedakan antara argumen yang valid atau tidak valid.
Pelajaran logika difokuskan pada hubungan antara pernyataan-pernyataan.

Logika

Perhatikan pernyataan berikut:

Semua pengendara sepeda motor memakai helm
Setiap orang memakai helm adalah mahasiswa
Jadi, semua pengendara sepeda motor adalah mahasiswa

Meskipun kebenaran dari pernyataan-pernyataan diatas belum bisa dibuktikan, tetapi jika kedua pernyataan tersebut benar, maka penalaran dengan menggunakan logika membawa kita pada kesimpulan bahwa pernyataan “semua pengendara sepeda motor adalah mahasiswa” juga benar

Logika

Banyak teorema di dalam Ilmu Komputer/Informatika yang membutuhkan pemahaman logika.

Contoh:

1. Syarat cukup graf dengan *n simpul mempunyai sirkuit* Hamilton adalah derajat tiap simpul $\geq n/2$.
2. $T(n) = \Theta(f(n))$ *jika dan hanya jika* $O(f(n)) = \Omega(f(n))$.

Logika

Bahkan, logika adalah pondasi dasar algoritma dan pemrograman.

Contoh:

```
if x > y then
begin
    temp:=x;
    x:=y;
    y:=temp;
end;
```

```
if x mod 2 = 0 then
    x:=x + 1
else x:=x – 1
```

Proposisi

- Logika merupakan dasar dari semua penalaran (*reasoning*).
- Penalaran didasarkan pada hubungan antara pernyataan (*statements*).
- Di dalam logika, tidak semua jenis kalimat menjadi obyek tinjauan, Hanya kalimat yang bernilai benar atau salah saja yang menjadi tinjauan .

Proposisi: pernyataan yang bernilai benar (*true*) atau salah **(*false*),** *tetapi tidak keduanya.*

Proposisi

“Semut Lebih Kecil Daripada Gajah.”

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? BENAR

Proposisi

“5<2”

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

Proposisi

"x<2"

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Nilai kebenaran dari pernyataan tersebut bergantung pada x, tapi nilainya belum ditentukan.

Pernyataan jenis ini kita sebut sebagai **fungsi proposisi atau kalimat terbuka.**

Proposisi

"Sekarang tahun 2021 dan 2 > 5."

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

Proposisi

"Tolong untuk tidak makan selama kuliah."

Apakah ini sebuah pernyataan? TIDAK

Ini adalah sebuah permintaan.

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

Hanya pernyataanlah yang bisa menjadi proposisi.

Proposisi

“$x < y$ jika dan hanya jika $y > x$.”

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

karena nilai kebenarannya tidak bergantung harga spesifik x maupun y.

Apakah nilai kebenaran dari proposisi ini? BENAR

Proposisi

Kesimpulan: Proposisi adalah kalimat berita

Proposisi

Apakah semua pernyataan di bawah ini adalah proposisi?

a) 13 adalah bilangan ganjil
b) Soekarno adalah alumnus UGM.
c) 1 + 1 = 2
d) 8 ≥ akar kuadrat dari 8 + 8
e) Ada monyet di bulan
f) Hari ini adalah hari Rabu
g) Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, *maka* $2n$ *adalah bilangan genap*
h) $x + y = y + x$ *untuk setiap* x *dan* y *bilangan* riil

Proposisi

Apakah semua pernyataan di bawah ini proposisi?

a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?
b) Isilah gelas tersebut dengan air!
c) $x + 3 = 8$
d) $x > 3$
e) Seberapa dalam kamu mencintai aku?
f) Jawablah pertanyaan dibawah ini!

Kalkulus Proposisi

Pernyataan yang melibatkan peubah (*variable) disebut* **predikat, kalimat terbuka, atau fungsi proposisi**

Contoh: " $x > 3$", "$y = x + 10$"

Notasi: $P(x)$, *misalnya* $P(x)$: $x > 3$

Kalkulus proposisi: bidang logika yang berkaitan dengan proposisi

Kalkulus predikat: bidang logika yang berkaitan dengan predikat dan *quantifier*

Kalkulus Proposisi

Proposisi dilambangkan dengan huruf kecil *p*, *q*, *r*, …

Contoh:

p : 13 adalah bilangan ganjil.

q : Soekarno adalah alumnus UGM.

$r : 2 + 2 = 4$

Proposisi

Bentuk-bentuk Proposisi

Proposisi dapat dinyatakan dalam empat bentuk:

1. Proposisi atomik
2. Proposisi majemuk
3. Implikasi
4. Bi-implikasi

Proposisi

Proposisi Atomik (Proposisi tunggal)

Contoh

1. $2n$ *selalu genap untuk* $n=0, 1, 2, \ldots$
2. I’m Javanese
3. Orang Jawa belum tentu bisa Bahasa Java

Proposisi

Proposisi Majemuk (kombinasi proposisi atomik)
Misalkan *p dan q adalah proposisi atomik*

Ada empat macam proposisi majemuk:

1. **Konjungsi (*conjunction*): *p dan q***
   Notasi $p \wedge q$,
2. **Disjungsi (*disjunction*): *p atau q***
   Notasi: $p \vee q$
3. **Ingkaran (*negation*) *dari p: tidak p***
   Notasi: $\neg p$
4. **Disjungsi eksklusif: *p atau q tapi bukan keduanya***
   Notasi: $p \oplus q$:

Proposisi

Proposisi Majemuk (kombinasi proposisi atomik)

Contoh :

p : Hari ini hujan

q : Siswa masuk sekolah

$p \wedge q$: *Hari ini hujan dan siswa masuk sekolah*

semakna dengan

Hari hujan namun siswa masuk sekolah

$\neg p$: *Tidak benar hari ini hujan* (atau: Hari ini *tidak hujan)*

$P \vee q$:

$\neg p \wedge \neg q$:

Proposisi

Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi

q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik:

1. Pemuda itu tinggi dan tampan
2. Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
3. Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
4. Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
5. Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
6. Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Proposisi

Tabel kebenaran adalah suatu tabel yang menunjukkan secara sistematis satu demi satu nilai-nilai kebenaran sebagai hasil kombinasi dari proposisi-proposisi yang sederhana. Dalam matematika komputasi, pernyataan-pernyataan kemudian disajikan dalam bentuk simbol.

Semua kombinasi dari proposisi-proposisi sederhana atau variabel proposional nilainya tergantung dari jenis perangkai atau operator yang digunakan untuk mengkombinasikannya

Proposisi

Berikut bentuk tabel kebenaran dari beberapa operator, konjungsi, disjungsi, dan negasi

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	¬p
T	F
F	T

Proposisi

Nilai kebenaran proposisi majemuk dapat ditentukan dengan menggunakan “tabel kebenaran”

Contoh proposisi majemuk:

a. $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$

b. $(p \wedge r) \wedge \sim(p \vee q)$

Buatlah Tabel kebenarannya:

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

a. $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$

			1		2	
p	**q**	**r**	p ^ q	-q	~q ^ r	1 v 2
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

b. $(p \wedge r) \wedge \sim(p \vee q)$

			1		2	
p	**q**	**r**	p ^ r	p ˅ q	~(p ˅ q)	1 ^ 2
T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	T	F

Proposisi

Disjungsi Eksklusif

Kata "atau" (*or) dalam operasi logika digunakan dalam* salah satu dari dua cara:

1. Inclusive or

"atau" berarti "*p atau q atau keduanya*"

Contoh: "Tenaga IT yang dibutuhkan harus menguasai Bahasa C++ **atau Java**".

2. *Exclusive or*

"atau" berarti "*p atau q tetapi bukan keduanya*".

Contoh: "Ia dihukum 5 tahun **atau denda 10 juta**".

Proposisi

Operator logika disjungsi eksklusif: *xor*

Notasi: $\oplus$

Tabel Kebenaran

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Proposisi

- Proposisi majemuk disebut **tautologi jika ia** benar untuk semua kasus

$p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Proposisi

- Proposisi majemuk disebut **kontradiksi jika** ia salah untuk semua kasus.

$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Proposisi

Dua buah proposisi majemuk, *P(p, q, ..) dan Q(p, q, ..)* disebut **ekivalen secara logika jika keduanya mempunyai** tabel kebenaran yang identik.

Notasi: $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$

Contoh. Hukum De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Hukum-hukum Logika

Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi.**

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – ${\sim}({\sim}p) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – ${\sim}(p \wedge q) \Leftrightarrow {\sim}p \vee {\sim}q$ – ${\sim}(p \vee q) \Leftrightarrow {\sim}p \wedge {\sim}q$

Tunjukkan bahwa $p \vee {\sim}(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee {\sim}q$

Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Hukum-hukum Logika

Latihan

Diberikan pernyataan “Tidak benar bahwa dia belajar Algoritma tetapi tidak belajar Matematika”.

a) Nyatakan pernyataan di atas dalam notasi simbolik (ekspresi logika)
b) Berikan pernyataan yang ekivalen secara logika dengan pernyataan tsb (Petunjuk: gunakan hukum De Morgan)

Implikasi

- Disebut juga proposisi bersyarat
- Bentuk proposisi: “jika *p*, *maka q*”
- Notasi: $p \rightarrow q$
- *p disebut* ***hipotesis***, ***antesenden***, ***premis***, ***atau*** **kondisi**
- *q disebut* ***konklusi (atau konsekuen)***.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Contoh-contoh implikasi

a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari Ayah

b. Jika suhu mencapai 80^{o}C, maka *alarm akan berbunyi*

c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Implikasi

Contoh

Dosen: “Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini”.

Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong?

Tinjau empat kasus berikut ini:

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut (konklusi benar).

pernyataan dosen benar.

Kasus 2:Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah).

dosen berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar).

dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah)

dosen anda benar.

Implikasi

Perhatikan bahwa dalam implikasi yang dipentingkan nilai kebenaran premis dan konsekuen, bukan hubungan sebab dan akibat diantara keduanya.

Beberapa implikasi di bawah ini valid meskipun secara bahasa tidak mempunyai makna:

"Jika $1 + 1 = 2$ maka Paris ibukota Perancis"

"Jika *n bilangan bulat maka hari ini hujan*"

Implikasi

Cara-cara mengekspresikan implikasi $p \to q$:

- Jika *p, maka* *q (if p, then q)*
- Jika *p, q* *(if p, q)*
- *p mengakibatkan q* *(p implies q)*
- *q jika p* *(q if p)*
- *p hanya jika q* *(p only if q)*
- *p syarat cukup untuk q* *(p is sufficient condition for q)*
- *q syarat perlu bagi p* *(q is necessary condition for q)*
- *q bilamana p* *(q whenever p)*
- *q mengikuti dari p* *(q follows from p)*

Implikasi

Contoh :

1. Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
2. Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
3. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
4. Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
5. Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
6. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
7. Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
8. Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

Implikasi

Latihan

Ubahlah proposisi di bawah ini dalam bentuk standard “jika *p maka q*”:

1. Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
2. Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
3. Anda tidak dapat terdaftar sebagai pemilih dalam Pemilu jika anda berusia di bawah 17 tahun kecuali kalau anda sudah menikah
4. Untuk menerangkan mutu sebuah hotel, misalkan *p : Pelayanannya* baik, dan *q : Tarif kamarnya murah, r : Hotelnya berbintang tiga.*

Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik (menggunakan *p, q, r)*:

(a) Tarif kamarnya murah, tapi pelayanannya buruk.

(b) Tarif kamarnya mahal atau pelayanannya baik, namun tidak keduanya.

(c) Salah bahwa hotel berbintang tiga berarti tarif kamarnya murah dan pelayanannya buruk.

Implikasi

Dua pedagang barang kelontong mengeluarkan moto jitu untuk menarik pembeli. Pedagang pertama mengumbar moto “Barang bagus tidak murah” sedangkan pedagang kedua mempunyai moto “Barang murah tidak bagus”. Apakah kedua moto pedagang tersebut menyatakan hal yang sama?

Penyelesaian:

p : Barang itu bagus

q : Barang itu murah.

Moto pedagang pertama: “Jika barang itu bagus maka barang itu tidak murah”

atau p □ $\neg q$

Moto pedagang kedua: “Jika barang itu murah maka barang itu tidak bagus”

atau q □ $\neg p$.

Buat Tabel Kebenarannya

Implikasi

Implikasi Dalam Bahasa Pemrograman

if c then S

c: ekspresi logika yang menyatakan syarat/kondisi

S: satu atau lebih pernyataan.

S dieksekusi jika c benar,

S tidak dieksekusi jika c salah.

Struktur *if-then pada bahasa pemrograman berbeda dengan implikasi if-then* yang digunakan dalam logika.

Pernyataan *if-then dalam bahasa pemrograman bukan proposisi karena tidak* ada korespondensi antara pernyataan tersebut dengan operator implikasi (→).

Interpreter atau compiler tidak melakukan penilaian kebenaran pernyataan if-then secara logika. Interpreter hanya memeriksa kebenaran kondisi c, jika c benar maka S dieksekusi, sebaliknya jika c salah maka S tidak dieksekusi

Implikasi

Contoh

Misalkan di dalam sebuah program yang ditulis dalam Bahasa Pascal terdapat pernyataan

if x > y then y:=x+10;

Berapa nilai *y setelah pelaksanaan eksekusi if-then*

(i) x = 2, y = 1

(ii) *x = 3, y = 5?*

Penyelesaian:

(i) x = 2 dan y = 1

Ekspresi x > y bernilai benar

Pernyataan y:=x+10 dilaksanakan

Nilai *y sekarang menjadi y = 2 + 10 = 12.*

(ii) x = 3 dan y = 5

Ekspresi x > y bernilai salah

Pernyataan y:=x+10 tidak dilakukan

Nilai y tetap seperti sebelumnya, yaitu 5.

Implikasi

Contoh

Tentukan apakah spesifikasi sistem di bawah ini konsisten.

“Pesan diagnosa disimpan di dalam memori atau ditransmisikan”

“Pesan diagnose tidak disimpan di dalam memori”

“Jika pesan diagnosa disimpan di dalam memori, maka ia ditransmisikan”

Penyelesaian:

p: pesan diagnosa disimpan di dalam memori

q : pesan diagnose ditransmisikan

Notasi simbolik:

$p \vee q$

$\neg p$

$p \rightarrow q$

Jika semua spesifikasi benar, maka *p harus salah agar* $\neg p$ *benar.*

Jika *p salah, maka* $p \vee q$ *hanya benar jika q benar.*

Jika *p salah dan q benar, maka* $p \rightarrow q$ *benar.*

Kesimpulan: spesifikasi system tersebut konsisiten.

Implikasi

Ekivalensi bentuk $p \to q$

implikasi $p \to q$ *ekivalen dengan* $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	**T**	**T**
T	F	F	**F**	**F**
F	T	T	**T**	**T**
F	F	T	**T**	**T**

Kita dapat membuat negasi dari implikasi dengan menggunakan bentuk ekivalensinya tersebut:

$\neg(p \to q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

- Contoh: Jika anda berusia 17 tahun, maka anda boleh memiliki SIM

Negasinya: Anda berusia 17 tahun tetapi anda tidak boleh memiliki SIM.

Implikasi

Konvers (kebalikan) : $q \rightarrow p$

Invers : $\neg p \rightarrow \neg q$

Kontraposisi : $\neg q \rightarrow \neg p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \rightarrow q$	Konvers $q \rightarrow p$	Invers $\sim p \rightarrow \sim q$	Kontraposisi $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:

"Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya"

Penyelesaian:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil

Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya

Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil

Implikasi

Tentukan kontraposisi dari pernyataan:

(a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara.

(b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negatif.

(c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.

(d) Hanya jika ia tdk terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan.

(e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang.

(f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin.

(g) Diberikan pernyataan "Perlu memiliki *password yang sah agar anda bisa logke server*"

(1) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi "jika *p*, *maka q*".

(2) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tsb.

Bi-Implikasi

Bi-implikasi

Bentuk proposisi: “*p jika dan hanya jika q*”

Notasi: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Dengan kata lain, pernyataan “*p jika dan hanya jika q*” dapat dibaca “Jika *p maka q dan jika q maka p*”.

Bi-Implikasi

Contoh Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

(a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.

(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.

(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.

(d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* *Jawa Barat* adalah sebuah propinsi di Indonesia.

Bi-Implikasi

Latihan. Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk "*p jika dan* hanya jika *q*":

(a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.

(b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.

(c) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.

(d) Jika anda lama menonton televisi maka mata anda lelah, begitu sebaliknya.

(e) Kereta api datang terlambat tepat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.

Argumen

Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$
\begin{array}{ll}
 & p_1 \\
 & p_2 \\
 & \vdots \\
 & p_n \\
\hline
\therefore & q
\end{array}
$$

yang dalam hal ini, p1,p2, …, p disebut hipotesis (atau premis), dan q disebut konklusi.

Sering ditulis dalam bentuk: $p1$, $p2$, ..., $pn \rightarrow$ n

Konklusi biasanya ditandai dengan kata “Jadi”, “Oleh karen itu”,“Dengan demikian, “, dll

Argumen

Contoh

Jika anda mahasiswa Informatika maka anda tidak sulit belajar Bahasa Java. Jika anda tidak suka begadang maka anda bukan mahasiswa Informatika.Tetapi, anda sulit belajar Bahasa Java dan anda tidak suka begadang. Jadi, anda bukan mahasiswa Informatika

Argumen ada yang sahih (*valid*) *dan palsu* (*invalid*).

Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy atau invalid)* bilamana semua hipotesisnya salah.

Jika argumen sahih, maka dikatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Argumen

Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang. Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang.

adalah sahih.

Penyelesaian:

Misalkan:

p : Air laut surut setelah gempa di laut

q : Tsunami datang:

Argumen:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini.

Argumen

Cara 1 Bentuklah tabel kebenaran untuk *p, q, dan p q*

p	q	$p \to q$	
T	**T**	**T**	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	T	T	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

Argumen dikatakan sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis *p dan pq* benar, maka konklusi *q juga benar sehingga argumen dikatakan* benar. Periksa tabel, *p dan p q benar secara bersama-sama pada* baris 1. Pada baris 1 ini *q juga benar*. *Jadi, argumen di atas* ***sahih***.

Argumen

Cara 2 Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah $[p \wedge (p \to q)] \to q$

merupakan tautologi. Tabel dibawah ini memperlihatkan bahwa $[p \wedge (p \to q)] \to q$ *suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sahih.*

Tabel $[p \wedge (p \to q)] \to q$ ***adalah tautologi***

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponen. Jadi, kita kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponen adalah argmen yang sahih

Argumen

Beberapa argumen yang sudah terbukti sahih

Modus ponen

$p \to q$

p

$\therefore q$

Modus tollen

$p \to q$

$\sim q$

$\therefore \sim p$

Aturan transitif

$p \to q$

$q \to r$

$\therefore p \to r$

Konjungsi

p

q

$\therefore p \wedge q$

Simplifikasi konjungtif

$p \wedge q$	$p \wedge q$
---------	--------
$\therefore p$	$\therefore q$

Penjumlahan disjungtif

p

$\therefore p \vee q$

Silogisme disjungtif/kontrapositif

$p \vee q$	$p \vee q$
$\sim p$	$\sim q$
----------	---------
$\therefore q$	$\therefore p$

Argumen

Selain menggunakan Cara 1 dan Cara 2 di atas, sebuah argumen juga dapat dibuktikan kesahihannya dengan menggunakan campuran hukum-hukum logika dan metode penarikan kesimpulan yang sudah terbukti sahih (modus ponen, modus tollen, dsb).

Perhatikan contoh berikut ini.

$$\sim p \vee q\ ,\ \ s \vee p, \sim q\ \Rightarrow s$$

Bu

<u>Bukti</u>:

(1) $\sim p \vee q$	Premis
(2) $\sim q$	Premis
(3) $\sim p$	Silogisme disjungtif (1) dan (2)
(4) $s \vee p$	Premis
(5) s	Silogisme disjungtif (3) dan (4)

Argunem

Buktikan bahwa argumen berikut benar $p \to r, q \to s, p \vee q \Rightarrow s \vee r$

Bukti:

(1)	$p \vee q$	Premis
(2)	$\sim p \to q$	Ekivalensi bentuk (1)
(3)	$q \to s$	Premis
(4)	$\sim p \to s$	Aturan transitif (2) dan (3)
(5)	$\sim s \to p$	Ekivalensi bentuk (4)
(6)	$p \to r$	Premis
(7)	$\sim s \to r$	Aturan transitif (5) dan (6)
(8)	$s \vee r$	Ekivalensi bentuk (7)

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar.
Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Contoh-contoh aksioma:

(a) Untuk semua bilangan real *x dan y, berlaku* $x + y = y + x$ *(hukum komutatif penjumlahan).*
(b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.

Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar.

Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma dan corolarry*.
Lemma: teorema sederhana yang digunakan untuk pembuktian teorema lain
Corollary: teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan.
atau, *corollary adalah teorema yang mengikuti* teorema lain.

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

Contoh-contoh teorema:

a. Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.
b. Untuk semua bilangan real x, y, *dan* z, *jika* $x \leq y$ *dan* $y \leq z$, *maka* $x \leq z$ *(hukum transitif)*.

Contoh *corollary:*

Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut.
Corollary ini mengikuti teorema (a) di atas.

Contoh *lemma:*

Jika n *adalah bilangan bulat positif, maka* $n - 1$ *bilangan* positif atau $n - 1 = 0$.

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

Contoh lainnya (dalam kalkulus)

- **Teorema:** $|x| < a$ ***jika dan hanya jika*** $-a < x < a$, dimana $a > 0$
- **Corollary:** $|x| \le a$ ***jika dan hanya jika*** $-a \le x \le a$, dimana $a > 0$

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Corollary*

Contoh lainnya (dalam kalkulus)

- **Teorema:** $|x| < a$ ***jika dan hanya jika*** $-a < x < a$, dimana $a > 0$
- **Corollary:** $|x| \leq a$ ***jika dan hanya jika*** $-a \leq x \leq a$, dimana $a > 0$

Tambahan

Tingkat Presedensi
Urutan pengerjaan Algoritma

TABLE 8 Precedence of Logical Operators.

Operator	Precedence
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Tingkat Presedensi

Urutan pengerjaan logika:

Jadi, jika ada $p \wedge q \vee r$ berarti lebih benar $(p \wedge q) \vee r$, dibanding $p \wedge (q \vee r)$

Jika ada $\neg p \wedge q$ berarti lebih benar $(\neg p) \wedge q$, bukan berarti $\neg (p \wedge q)$

Jika ada $p \vee q \rightarrow r$ berarti lebih benar $(p \vee q) \rightarrow r$, bukan $p \vee (q \rightarrow r)$

Latihan

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi jika diketahui implikasi berikut ini

1. Jika hari ini asesemen matdis maka saya akan berusaha mengerjakan soal dengan baik
2. Jika saya tidak malas belajar maka kelulusan bukanlah hal yang sulit

Buatlah Tabel Kebenaran untuk pernyataan majemuk berikut.

1) $[p \wedge q] \rightarrow \neg p$
2) $\neg [p \wedge q] \vee \neg p$
3) $[\neg p \vee \neg q] \wedge r$
4) $p \rightarrow [p \wedge (q \vee r)]$
5) $p \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge r]$
6) $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)] \leftrightarrow (p \rightarrow r)$
7) Tunjukkan bahwa $(p \rightarrow q)$ ekivalen dengan $\neg p \vee q$
8) Tunjukkan bahwa $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ dan $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
9) Gambarkan rangkaian dari pernyataan majemuk berikut
   a. $(\neg p \wedge [q \vee (r \wedge \neg s)]) \vee [\neg q \vee p]$
   b. $\{ [(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)] \wedge s \} \vee \{\neg p \wedge [q \vee (r \wedge \neg s)] \wedge \neg q \}$

Latihan

Tunjukkan bahwa $\neg (p \vee (\neg p \wedge q))$ and $\neg p \wedge \neg q$ ekivalen
Tunjukkan bahwa $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ tautology
Tunjukkan bahwa $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ ekivalen dengan $(r \vee p) \wedge [(\neg r \vee (p \wedge q)) \wedge (r \vee p)]$

Thank you

Keep Smile