Relatório de Simulação - MAD

Carlos Eduardo Valladares - 119062426, Luan Martins Felix - 119022028

1 Dobrando a Taxa de Chegada e o Tempo de Serviço

O que mudou e o que permaneceu igual?

Ao dobrarmos ambas as taxas de chegada e de tempo de serviço, houve uma diminuição no tempo de espera na fila e do tempo médio dos clientes no sistema; porém o número médio de clientes do sistema permaneceu o mesmo. Mais especificamente, a variação foi proporcional ao fator multiplicativo do aumento ($2\times$ a taxa de chegada e tempo de serviço, $\frac{1}{2}\times$ o tempo de espera na fila e de permanência no sistema).

Este comportamento é explicado pela Lei de Little, que nos diz que: Número médio de clientes no sistema é proporcional a taxa de chegada dos clientes no sistema e o tempo médio que o cliente permanece no sistema. Exatamente:

$$L \;=\; \lambda \times W$$

onde L é o número médio de clientes do sistema, λ é a taxa de chegada e W é o tempo médio dos clientes no sistema.

Podemos expressar W como $Q+S$, sendo Q o tempo médio do cliente na fila e S é o tempo médio do cliente em serviço. Como S é inversamente proporcional a μ (Quanto maior a taxa de serviço, menor o tempo médio que um cliente passa em serviço), ao aumentarmos μ diminuímos S, e consequentemente diminuímos W. De fato, sendo $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, temos que $L = \frac{\rho}{1-\rho}$, de onde segue que $Q = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$ (fonte: math.stackexchange)

$$L = \lambda \times W$$

$$L = \lambda \times (Q + S)$$

$$L = \lambda \times (\frac{\rho}{\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu})$$

$$L = \lambda\frac{\rho}{\mu - \lambda} \; + \; \lambda\frac{k}{\mu}$$

Dobrando λ e μ

$$L = 2\lambda \times (Q + \frac{k}{2\mu})$$

$$L = 2\lambda \times (\frac{\rho}{2\mu - 2\lambda} \; + \; \frac{\lambda k}{2\mu})$$

$$L = 2\lambda\frac{\rho}{2(\mu - \lambda)} \; + \; \frac{2\lambda k}{2\mu}$$

$$L = \lambda\frac{\rho}{\mu - \lambda} \; + \; \lambda\frac{k}{\mu}$$

E podemos notar que ao dobrarmos λ e μ L permanece constante, mas S e Q diminuem.

2 Dobrando só a capacidade de Serviço

Intuitivamente, ao dobrar a capacidade de serviço, esperamos que o tempo médio de espera bem como o número médio de clientes no sistema reduza. Contudo, a questão é, quanto?

Como podemos ver na wikipedia, a lei de little nos permite calcular que a média do tempo total que um cliente gasta no sistema é $\dfrac{1}{\mu - \lambda}$. Isso está de acordo com o resultado da nossa simulação.

Além disso, o tempo de espera médio é $\dfrac{1}{\mu - \lambda} - \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{\rho}{\mu - \lambda}$, onde $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Novamente, o resultado está de acordo com a nossa simulação.

Contudo, podemos dizer que nos surpreende quanto à redução dos tempos dos clientes. Dobrar a taxa de serviço reduziu de 1 para $\frac{1}{3}$ e o tempo médio no sistema de $\frac{1}{2}$ para $\frac{1}{12}$ o tempo médio de espera. Novamente, pela lei de little, temos que o número médio de clientes é o mesmo que o tempo médio no sistema.

3 Tempo de Serviço Determinístico

Quando o serviço é determinístico, a primeira abordagem para de funcionar porque a forma como a abordagem foi construída conta com a propriedade da falta de memória das variáveis aleatórias exponenciais. Ou seja, ao amostrarmos duas variáveis aleatórias exponenciais, não utilizamos nenhuma amostragem anterior para determinar o próximo evento . Contudo, como agora uma das variáveis é determinística, a propriedade da falta de memória não se aplica mais e a fila não é simulada adequadamente.

Consultando a wikipedia novamente, podemos reavaliar nossos resultados dado o novo formato de fila. Ainda aplicando a Lei de Little, o tempo médio de espera no sistema é, após aplicarmos nossos valores de λ e μ à fórmula, $\omega = \frac{3}{4}$. E o tempo médio de espera na fila é $\omega_Q = \frac{1}{4}$, utilizando novamente a fórmula da referência.

4 Bônus: Taxa de Chegada e Tempo de Serviço iguais

Por curiosidade, quisemos explorar o cenário em que a utilização é igual a 1, isso é, $\rho = 1$. Para isso, utilizamos $\lambda = \mu = 1$. Como podemos ver pelos resultados, o sistema fica instável com uma quantidade absurda de tempo de espera e número de clientes no sistema, mas ainda respeitando a Lei de Little.

5 Bônus: Dobrando a Taxa de Chegada e Tempo de Serviço (iguais)

Explorando ainda mais essa curiosidade, utilizamos $\lambda = \mu = 2$. Novamente observando os resultados, o sistema fica completamente instável com uma quantidade imprevisível de tempo de espera e número de clientes no sistema, mas desta vez com o tempo médio no sistema tendo caído pela metade, pois ainda está sendo respeitada a Lei de Little.