LOIS DE CONSERVATION EN DYNAMIQUE.

→ Symétrie du Lagrangien par translation spatiale.

Exemple / Démo : on considère une particule libre. Le Lagrangien se limite à l'énergie cinétique $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2$.

$\mathcal{L}(r, \dot{r}, t) = \mathcal{L}(r+a, \dot{r}, t)$

donc $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$.

Éq. de Lagrange :

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}}_{=0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

donc $\boxed{\frac{d}{dt} m v = 0}$

Grandeur conservée : p : qtité du mouvement.

→ Symétrie du Lagrangien par la transf. de rotation.

Démo : référentiel cylindrique

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r, z)$$

$\mathcal{L}(r, \theta + \theta_0, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}, t) =$
$= \mathcal{L}(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}, t)$.

Éq. d'Euler Lagrange : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$ est conservé.

la fct de Lagrange est invariante p/r à la variable cyclique θ.

donc $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$

→ Invariance par translation dans le temps :

$t \rightarrow t + a \quad a = \text{cte}$

$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t+a)$: grandeur conservée : t.

donc $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$.

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \cdot dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot d\dot{q}_i \right) + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}_{=0} \cdot dt.$$

$$\hookrightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i \right)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\dot{q}_i)\right] = \boxed{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)}$$

on passe $\frac{d}{dt}\mathcal{L}$ à droite et :

c'est à dire : $\boxed{\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \mathcal{L}\right] = 0}$

où $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = H}$ → fonction de Hamilton.

donc $\boxed{H = cte}$ où $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$