

LP. Présentation de l'optique géométrique à partir du principe de Fermat

Maria Ubero Gonzalez

Table des matières

1	Enoncé moderne du principe de Fermat	3
1.1	Cadre de l'optique géométrique	3
1.2	Temps de parcours et chemin optique	3
1.3	Conséquences directes	5
2	Lois de l'optique géométrique	6
2.1	Reformulation des lois de Snell-Descartes	7
2.2	Formation des images : stigmatisme	9
3	Propagation dans un milieu non homogène	11
3.1	Loi fondamentale de l'optique géométrique	11
3.2	Application : mirage	13
3.3	Application : fibre optique à saut d'indice	14

Rapport du jury

2017. Les applications à des systèmes optiques réels sont très souvent absentes dans cette leçon.

2014 : La leçon doit illustrer ce que le principe de Fermat apporte de plus que les lois de la réfraction et de la réflexion. Les analogies avec d'autres principes variationnels sont appréciées.

2013 : La leçon doit illustrer ce que le principe de Fermat apporte de plus que les lois de la réfraction et de la réflexion.

2010 : Notion de rayon lumineux. Principe de Fermat. Conséquences et applications.

2010 : Le caractère *variationnel* du principe de Fermat doit clairement ressortir. Cette leçon peut être l'occasion d'introduire le théorème de Malus.

2009 : Le caractère *variationnel* du principe de Fermat doit clairement ressortir.

2008 : L'intérêt de l'introduction de la notion de chemin optique est central dans cette leçon.

2005 : La notion de rayon lumineux reste imprécise. L'expression mathématique du principe de Fermat mettant en avant l'expression de l'infiniment petit du premier ordre mis en jeu est souvent ignorée. Par ailleurs, l'interprétation du stigmatisme est une application intéressante du principe de Fermat³⁷.

Jusqu'en 2004, le titre était : *Notion de rayon lumineux. Principe de Fermat. Conséquences.*

2000 : Cette leçon nécessite d'avoir réfléchi au lien existant entre la notion de rayon lumineux et l'optique ondulatoire.

1999 : Pour que cette leçon soit complète et afin de faire correctement le lien avec le théorème de Malus il est nécessaire de savoir relier chemin optique et phase d'une onde et de comprendre à la lumière de la théorie ondulatoire la concentration de l'énergie sur un rayon lumineux. On peut discuter sans calcul comment le principe de Fermat intervient dans la formation des images.

1996 : Il est bon d'expliquer comment on est conduit à ne rechercher les courbes de chemin optique stationnaire que parmi les lignes brisées, et de souligner que le principe de Fermat ne fait que sélectionner les trajectoires possibles pour la lumière – sans préciser comment la répartition du flux s'effectue entre elles.

Bibliographie :

- Pérez Optique.
- <https://www.youtube.com/watch?v=J22D4tQu5GI>
- <https://femto-physique.fr/optique/principe-de-fermat.php>

Pré-requis :

- Equations de Maxwell.
- Optique géométrique.
- Mécanique : principe variationnel, équations d'Euler Lagrange. (c'est peut être mieux de ne pas le prendre en pré-requis, on présente le ppe variationnel en optique).
- Optique ondulatoire.

Objectif. Importance du principe variationnel en physique. Le principe de Fermat nous permet de trouver toutes les lois de l'optique géométrique et de faire le lien avec l'optique ondulatoire.

Introduction

L'histoire de l'optique commence avec les Grecs : le mot optique vient du grec "opticos" qui veut dire relatif à l'oeil humain. Depuis l'Antiquité, et notamment grâce à Euclide, la notion de rayon lumineux et la propagation rectiligne de la lumière ont été comprises. Toutefois, ces interprétations plaçaient l'oeil en tant que source d'émission de la lumière.

Il a fallu attendre Ibn Al Haytham (935-1039), qui a expliqué la vision comme la réception des rayons lumineux par l'oeil.

En 1621 Snell a établi les lois de la réfraction et suite à ses travaux, Descartes a publié ses lois qui seront plus tard la base de l'optique géométrique. Les travaux de ces derniers ont permis à Fermat d'annoncer son principe concernant le déplacement de la lumière en 1657.

Nous avons étudié lors de cours précédents l'optique géométrique et l'optique ondulatoire. L'objectif de cette leçon est de **retrouver les lois de l'optique géométrique grâce au principe de Fermat** et de regarder si ce principe peut nous renseigner sur d'autres propriétés de la lumière. Nous allons commencer par énoncer le principe historique de Fermat :

La lumière se propage d'un point à un autre le long d'une trajectoire telle que le temps du parcours soit minimal.

Nous allons donner une formulation plus moderne de ce principe et voir les conséquences que l'on peut en tirer.

1 Enoncé moderne du principe de Fermat

Pour arriver à l'énoncé de ce principe nous allons commencer par citer les hypothèses du cadre de l'étude de l'optique géométrique et quelques définitions.

1.1 Cadre de l'optique géométrique

La lumière est constituée de rayons lumineux. Un **rayon lumineux** est une ligne le long de laquelle se propage l'énergie lumineuse. [Définition 2 : ligne de champ du vecteur de Poynting](#).

Hypothèses de travail :

- Milieu **linéaire, transparent et isotrope**. On néglige toute dissipation d'énergie et il n'y a pas de biréfringence.
- Le milieu peut être non homogène mais si n varie, il le fait sur une distance caractéristique grande devant la longueur d'onde (afin de négliger la diffraction).

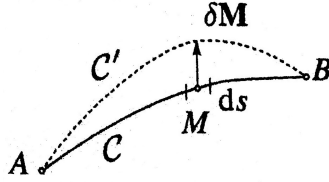
1.2 Temps de parcours et chemin optique

Dans le cas d'une propagation finie entre deux points A et B distants de ds , le chemin optique est défini par :

$$L = \int_A^B n ds = \int_{t_A}^{t_B} c dt \quad (1)$$

où la vitesse de la lumière dans un milieu d'indice n est $v = \frac{c}{n}$. Le chemin optique est **le chemin parcouru par la lumière dans le vide pendant la durée de propagation dans le milieu considéré**.

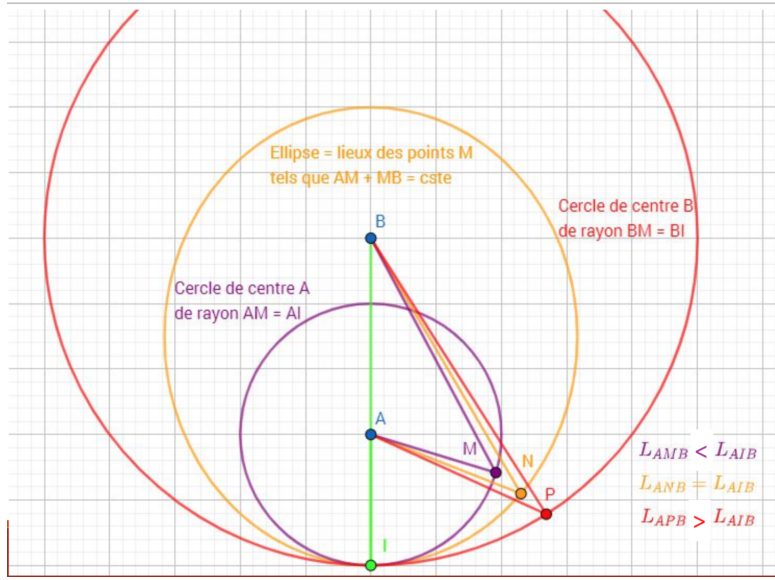
Soit deux points A et B atteints par la lumière et entre eux deux trajectoires C et C' qui a été obtenue en déformant C par un déplacement élémentaire $\delta \vec{M}$ en chaque point M de C tel que $\delta \vec{A} = \delta \vec{B} = 0$:



Le principe de Fermat moderne dit : *le chemin optique L calculé le long de C n'est pas minimal mais stationnaire si la quantité élémentaire $\delta L = L' - L$ est infiniment petite par rapport à la valeur supérieure de $\|\delta \vec{M}\|$. Ce qui veut dire que le vrai chemin suivi par la lumière est celui qui rend le chemin stationnaire.*

Cet énoncé est le **premier principe variationnel** en physique. Nous avons fait jusqu'à maintenant en physique une approche plutôt différentielle (par exemple PFD) qui consiste à construire une trajectoire de proche en proche à partir des conditions initiales. Dans le cas de l'approche variationnelle, ce qu'on fait c'est considérer l'ensemble de trajectoires possibles et on sélectionne la ou les bonnes. Cette approche présente en outre l'intérêt d'être d'une très grande généralité et nous verrons que son énoncé moderne contient **toute l'optique géométrique**. De surcroît, ce point de vue variationnel est très utilisé en physique par exemple en mécanique analytique où on utilise le principe variationnel de moindre action de Maupertuis énoncé en 1744. Selon ce principe la trajectoire d'un point matériel, est aussi celle pour laquelle une certaine quantité appelée l'action, est minimale ($S \rightarrow L$, $p \rightarrow n$).

Le basculement entre chemin minimal de l'énoncé historique et chemin stationnaire de l'énoncé moderne fait que ce principe est moins restrictif. De plus, il peut être justifié à travers les schémas de trajets suivis par la lumière suivants :



On s'intéresse à la propagation du rayon AIB par réflexion selon trois dioptries : l'ellipse orange et les cercles plus ou moins concaves violet et rouge. Dans les trois cas le rayon AIB correspond à une incidence normale existante réellement. On différencie pourtant trois variations différentes :

- Dans le cas orange, quel que soit le point N , le chemin optique (ANB) est le même que (AIB). Le chemin optique est constant.
- Dans le cas rouge, le chemin optique (APB) est supérieur au chemin (ANB) donc en particulier au chemin (AIB). Le trajet suivi par la lumière correspond bien à un minimum du chemin optique.
- Dans le cas violet, le chemin optique (AMB) est inférieur au chemin (ANB) donc en particulier à (AIB). Le trajet suivi par la lumière correspond à un maximum du chemin optique.

On montre que le chemin suivi par la lumière n'est pas celui qui emprunte le chemin optique minimal mais stationnaire.

Transition Mais comment peut-on appliquer le principe de Fermat pour retrouver toutes les lois de l'optique géométrique ? Commençons par deux conséquences directes, qui constituent usuellement des principes compris dans la définition des rayons lumineux.

1.3 Conséquences directes

Propagation rectiligne dans un milieu homogène

$$L = \int_{AB} n ds = n \widehat{AB} \quad (2)$$

L est minimal si \widehat{AB} s'identifie au segment AB.

Retour inverse de la lumière

L

$$L(AB) = \int_{AB} n ds = \int_{BA} n(-ds) = \int_{BA} n ds' \quad (3)$$

où ds' désigne l'élément curviligne orienté de B vers A . Par conséquent :

$$L(AB) = L(BA) \quad (4)$$

Le trajet suivi par la lumière ne dépend pas de son sens de parcours. Si la lumière parcourt le chemin AB alors ce chemin est stationnaire et comme le chemin AB est égal au chemin BA alors la lumière pourrait aussi faire le chemin invers.

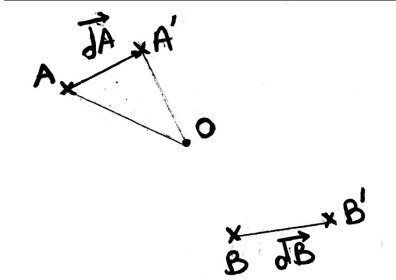
Transition. Montrons maintenant que nous pouvons trouver les lois de l'optique géométrique grâce au principe de Fermat.

2 Lois de l'optique géométrique

Afin de pouvoir exprimer la stationnarité d'un trajet de la lumière, on va regarder des trajets voisins dans un milieu homogène. La longueur d'un segment AB peut s'écrire $AB = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}$. (où \vec{u} est un vecteur unitaire).

$$L(AB) = nAB = n\overrightarrow{AB}\vec{u}$$

Nous allons déterminer la variation de la longueur d'un segment lorsqu'on déplace ses extrémités. Si on impose des variations élémentaires $d\vec{A}$ et $d\vec{B}$:



$$\begin{aligned} dL(AB) &= nd(\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}) = n\overrightarrow{AB} \cdot d\vec{u} + n\vec{u} \cdot d\overrightarrow{AB} \\ &= nAB\vec{u} \cdot d\vec{u} + n\vec{u} \cdot (d\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB'}) \\ &= n\vec{u} \cdot (d(-\overrightarrow{OA}) + d\overrightarrow{OB'}) \end{aligned}$$

car $\vec{u} \cdot d\vec{u} = \frac{1}{2}d\vec{u}^2 = 0$ (\vec{u} est un vecteur unitaire). On obtient :

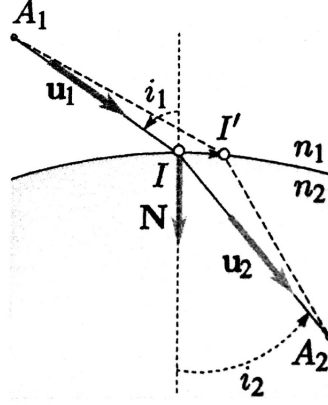
$$\boxed{dL(AB) = n\vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A})} \quad (5)$$

car $d\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = d\vec{A}$, pareil pour $d\vec{B}$.

2.1 Reformulation des lois de Snell-Descartes

On considère un rayon lumineux tombant sur I sur un dioptre d'indices n_1 et n_2 .

On sait que comme le milieu 1 est homogène et le milieu 2 aussi, les portions IA sont des segments des droites.



$$L(A_1A_2) = n_1 A_1I + n_2 IA_2$$

Variation de la position du point I . On utilise l'expression précédente mais en faisant varier qu'une extrémité car il n'y a que I qui varie. Si on fait :

$$\delta L(A_1I) = n_1 \vec{u}_1 \cdot (\delta \vec{I} - \delta \vec{A}_1) = n_1 \vec{u}_1 \cdot \delta \vec{I}$$

$$\text{car } \delta \vec{A}_1 = 0.$$

$$\delta L(IA_2) = n_2 \vec{u}_2 \cdot (\delta \vec{A}_2 - \delta \vec{I}) = n_2 \vec{u}_2 \cdot (-\delta \vec{I})$$

$$\text{car } \delta \vec{A}_2 = 0.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \delta L(A_1A_2) &= \delta L(A_1I) + \delta L(IA_2) \\ &= n_1 \vec{u}_1 \cdot \delta \vec{I} - n_2 \vec{u}_2 \cdot \delta \vec{I} \end{aligned}$$

En appliquant le principe de Fermat : $\delta L = 0$. On obtient :

$$0 = -\delta \vec{I} (n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1)$$

$$\boxed{n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = a \vec{N}} \quad (6)$$

Par conséquent $\vec{u}_2 = \frac{n_1 \vec{u}_1 + a \vec{N}}{n_2}$. Le rayon réfracté est contenu dans le plan (\vec{u}_1, \vec{N}) appelé **plan d'incidence**. Car système invariant (symétrie).

Réfraction

On multiplie vectoriellement l'expression précédente par \vec{N} ce qui donne :

$$n_2(\vec{N} \wedge \vec{u}_2) = n_1(\vec{N} \wedge \vec{u}_1) \quad (7)$$

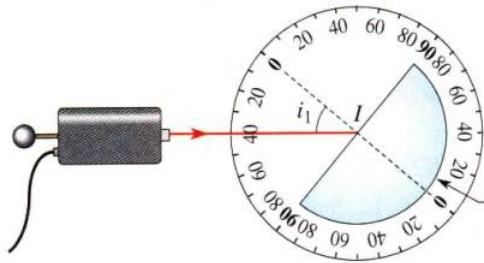
où $i_1 = (\vec{N}, \vec{u}_1)$ et $i_2 = (\vec{N}, \vec{u}_2)$. On obtient :

$$\boxed{n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1} \quad \text{Loi de Snell-Descartes} \quad (8)$$

Pour illustrer cette loi on peut faire un expérience :

Plexiglass avec laser λ fixe. Montrer vidéo jusqu'à la seconde 50. En fonction de la position du demi cercle on passe d'un milieu moins réfringent à un plus réfringent ou l'inverse. Montrer qu'il y a un angle limite dans le cas où on passe de plus réfringent à moins réfringent et qu'il n'y en a pas dans le cas contraire.

<https://www.youtube.com/watch?v=J22D4tQu5GI>

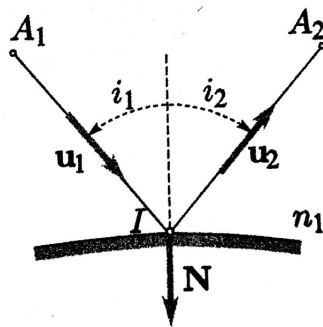


On peut représenter différents angles i_1 en fonction de i_2 . On voit que ce n'est pas linéaire. On représente alors $\sin i_2$ en fonction de $\sin i_1$. On trouve une droite. On trouve n_2 (pente) correspondant au plexiglass ($n_2 = 1,47$). On a montré que notre modèle est correct (il faudrait calculer les incertitudes...).

On montre que si n_2 est plus grand que n_1 , alors $i_1 > i_2$. Le rayon réfracté se rapproche de la normale. (C'est symétrique car ppe inverse de la lumière, de l'air vers plexiglass et du plexiglass vers l'air).

On ne peut pas s'éloigner de la normale de plus de 90° . On peut définir un angle limite dans le cas où on passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent : $\sin(i_{lim}) = \frac{n_2}{n_1}$ ce qui donne $i_{lim} \approx 43^\circ$. Comparer par rapport à celui trouvé par l'expérience (regarder la vidéo). Si $i > i_{lim}$ le rayon ne se propage pas dans le milieu 2.

Réflexion



Même démarche que pour la réfraction mais $n_1 = n_2$ dans ce cas. On obtient $\vec{N} \wedge \vec{u}_2 = \vec{N} \wedge \vec{u}_1$. $i_2 = (\vec{N}, \vec{u}_2)$ est l'angle réfléchi. On obtient $-\sin i_2 = \sin i_1$.

$$\boxed{i_2 = -i_1} \quad \text{Loi de Snell-Descartes} \quad (9)$$

Les angles incident et réfléchi sont opposés.

Transition. Le principe de Fermat permet donc d'exprimer de façon très condensée toutes les lois de l'optique géométrique. Mais le principe de Fermat nous amène plus loin grâce à la notion de chemin optique. On va ainsi étudier le stigmatisme grâce à ce principe.

2.2 Formation des images : stigmatisme

Considérons un système optique constitué de dioptres et/ou de miroirs. Si tout rayon issu d'un point A arrive, après avoir traversé le système optique, en un point A' , on dit que A' est l'image de A , et le système optique est rigoureusement stigmatique vis à vis des points A et A' .

En vertu du principe de Fermat, un rayon lumineux issu de A et traversant le système optique, parviendra en A' s'il existe un trajet qui présente un **chemin optique stationnaire**. Aussi, tous les rayons issus de A arriveront en A' si le chemin optique $L(AA')$ est une fonction partout stationnaire, c'est-à-dire constante.

Excepté le miroir plan, il n'existe pas de système optique rigoureusement stigmatique pour tout point. En revanche, de nombreux systèmes présentent un stigmatisme rigoureux pour certains points particuliers. Par exemple :

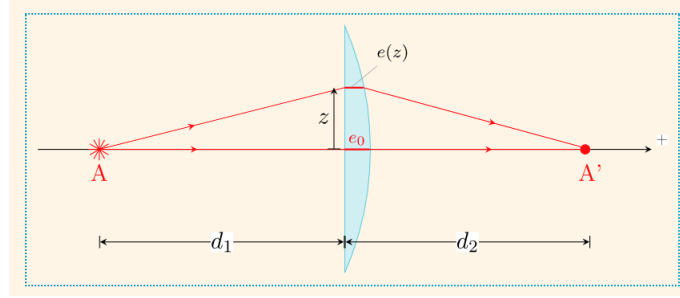
- le miroir sphérique conjugue son centre avec lui-même ;
- le miroir elliptique conjugue un foyer avec l'autre foyer ;
- la parabole conjugue un point à l'infini sur son axe optique avec son foyer.

Miroir hyperbolique ? Conjugaison avec ?

Le stigmatisme est évidemment une propriété très recherchée si l'on souhaite former des images. La plupart du temps, cette propriété n'est vérifiée que dans un cadre approximatif pour un ensemble restreint de rayons ; on parle alors de stigmatisme approché. **Mentioner les points de Weierstrass.**

Application lentille plan-convexe dans l'approximation paraxiale

Profil parabolique d'une lentille et on peut obtenir la formule de conjugaison des lentilles minces ! Calcul fait dans <https://femto-physique.fr/optique/principe-de-fermat.php>.



Plaçons entre deux points A et A' une lentille mince plan convexe, d'indice n . Appelons d_1 et d_2 les distances qui séparent ces points de la lentille. On souhaite déterminer le profil de la lentille, c'est-à-dire la façon dont l'épaisseur locale $e(z)$ varie avec la coordonnée z , qui garantisse que A et A' soient conjugués, ceci dans l'approximation paraxiale.

$$L_{AA'} = L_{vide} + \Delta L$$

où L_{vide} est le chemin optique dans le vide et ΔL le chemin optique introduit par la lentille.

$$L_{vide} = \sqrt{d_1^2 + z^2} + \sqrt{(d_2 - e(z))^2 + z^2} \quad (10)$$

On pose $D = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$ et z et $e(z)$ sont très inférieurs à d_1 et d_2 . Un développement limité donne :

$$L_{vide} = d_1 + d_2 - e(z) + \frac{1}{2D} z^2$$

$$\Delta L = ne(z)$$

Donc :

$$L_{AA'} = d_1 + d_2 + \frac{z^2}{2D} + (n-1)e(z) \quad (11)$$

A et A' seront conjugués (dans l'approximation paraxiale) si, et seulement si $L_{AA'}$ est constant. Cette constante peut être obtenue en prenant $z = 0$. On trouve :

$$d_1 + d_2 + \frac{z^2}{2D} + (n-1)e(z) = d_1 + d_2 + (n-1)e_0 \quad e(z) = e_0 - \frac{z^2}{2D(n-1)}$$

La lentille doit présenter un profil parabolique.

Ce qu'il faut dire pour ne pas faire tout le calcul : On obtient l'équation encadrée juste en disant qu'on applique pythagore et on dit que pour que le chemin optique soit constante (ppe de Fermat) il ne doit pas dépendre de z , ce qui veut dire que $e(z)$ doit être proportionnel à z^2 afin

que les deux termes se compensent et s'annulent. $e(z)$ proportionnel à $z^2 \rightarrow$ **profil parabolique**.

Si on se donne une lentille de profil parabolique : $e = e_0 - az^2$ où $a = \frac{1}{2D(n-1)}$ avec $D = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$ on trouve :

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} = 2a(n-1) = V \quad (12)$$

Transition. On peut de la même façon considérer des milieux dans lesquels l'indice optique n varie, milieux non homogènes. Ce qui nous amène à trouver la loi fondamentale de l'optique géométrique.

3 Propagation dans un milieu non homogène

3.1 Loi fondamentale de l'optique géométrique

La formule vectorielle de Snell-Descartes permet d'établir l'équation différentielle de la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu non homogène.

Si on applique $n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = a \vec{N}$ entre deux points voisins situés de part et d'autre d'une surface équi-indice :

$$d(n\vec{u}) = a \vec{N} \quad \text{ou} \quad d(n\vec{u}) = a' \overrightarrow{\text{grad}}(n) \quad (13)$$

$$d(n\vec{u}) = nd\vec{u} + \vec{u}dn \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{et} \quad dn = \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot d\vec{r} \quad (14)$$

On multiplie par \vec{u} :

$$(nd\vec{u} + \vec{u}dn) \cdot \vec{u} = (a' \overrightarrow{\text{grad}}(n)) \cdot \vec{u} \quad (15)$$

$$dn = a' \overrightarrow{\text{grad}}(n) \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad (16)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(n) d\vec{r} = a' \overrightarrow{\text{grad}}(n) \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad (17)$$

Ce qui donne $a' = ds$. On obtient finalement la loi fondamentale de l'optique géométrique :

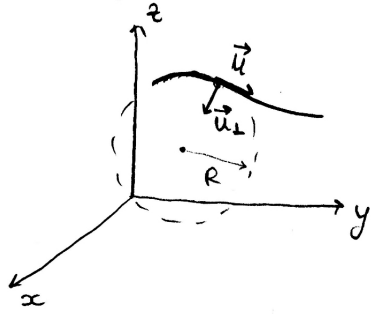
$$\boxed{\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}}(n)} \quad (18)$$

Cette relation nous confirme que dans un milieu homogène ($n = \text{cte}$) le rayon se propage en ligne droite ($\vec{u} = \text{cte}$). À l'inverse, dans un milieu inhomogène, l'existence d'un gradient d'indice fait courber les rayons lumineux. On peut faire une analogie entre la loi fondamentale de la mécanique et la loi qu'on vient de trouver. En optique c'est le gradient d'indice qui courbe la trajectoire de la même façon qu'en mécanique c'est le gradient de l'énergie potentielle.

On a deux options : soit on fait la démo de la courbure avec le repère de Frenet (je crois que pas le temps) soit on fait une analogie avec la mécanique d'une forme plutôt qualitative et on trouve de quel côté vont être déviés les rayons.

Option 1 repère Frenet

Nous pouvons étudier plus précisément comment se courbent les rayons. On se place dans le trièdre de Frenet :



$$\frac{\vec{u}_\perp}{R} = \frac{d\vec{u}}{ds}$$

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} = n \frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{u} \frac{dn}{ds} = \overrightarrow{grad}(n)$$

En prenant le produit scalaire avec le vecteur normal on aboutit à la relation :

$$\boxed{\frac{n}{R} = \vec{u}_\perp \cdot \overrightarrow{grad}(n)}$$

Etant donné que le rayon de courbure est positif, l'angle entre \vec{u}_\perp et $\overrightarrow{grad}(n)$ est nécessairement aigu.

La concavité du rayon est donc tournée dans le sens du $\overrightarrow{grad}(n)$.

Option 2. Analogie mécanique

(pag 10 Pérez)

Loi fondamentale de la dynamique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{soit aussi} \quad \frac{d(p\vec{e}_t)}{ds} = \frac{\vec{F}}{v}$$

où $v = ds/dt$. On la compare à la loi fondamentale de l'optique géométrique :

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \overrightarrow{grad}(n)$$

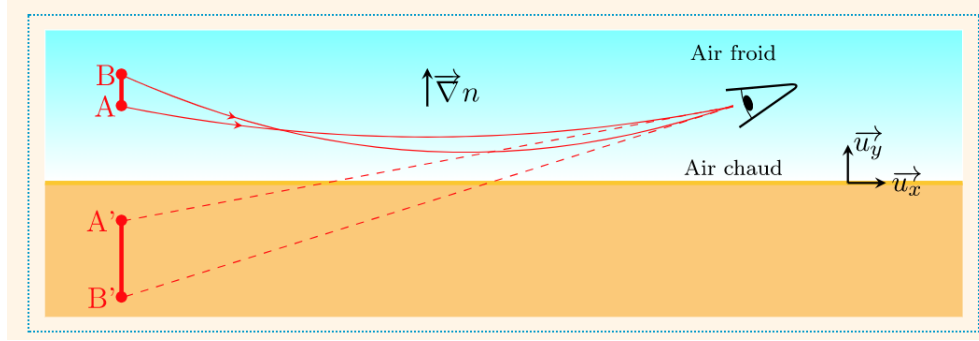
On est conduit à considérer que la trajectoire du rayon lumineux est celle d'une particule newtonienne fictive, de masse unité, de vitesse $\vec{v} = n\vec{e}_t$ et soumise à la force $\vec{F} = v\overrightarrow{grad}n$.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\left(-\frac{n^2}{2}\right)$$

Comme l'énergie potentielle est équivalente à $-n^2/2$, quand n est plus fort, l'énergie potentielle est plus faible ce qui fait que les rayons se courbent vers "ces potentiels plus faibles" donc dans le sens du $\vec{\text{grad}}(n)$.

Transition Nous allons maintenant appliquer ce résultat au cas des mirages et des fibres optiques.

3.2 Application : mirage



Vidéo minute 2'20" principe du mirage : <https://www.youtube.com/watch?v=J22D4tQu5GI>

Le gradient d'indice dépend de la température. n dépend de la masse volumique (loi de Gladstone). Si T augmente, ρ diminue, donc modèle de Drude Lorentz, plus il y a de molécules plus la polarisation est importante, ? ? ? ?. Ces mirages sont liés à la courbure des rayons à proximité du sol surchauffé. En effet, l'air chaud étant moins dense que l'air froid, l'indice optique augmente avec l'altitude ce qui fait naître un gradient d'indice vertical. Par conséquent, les rayons se courbent comme indiqué sur la Figure ci-dessus (comme nous avons montré précédemment, la concavité du rayon est dans la direction du gradient). L'observateur voit une image virtuelle du ciel en surimpression du sol.

On peut trouver la courbure des rayons grâce au principe de Fermat et les équations d'Euler Lagrange.

$$L(AB) = \int_A^B n(y) ds = \int_A^B n(y) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{y_A}^{y_B} n(y) \sqrt{1 + x'(y)^2} dy \quad (19)$$

Principe de Fermat : rendre stationnaire $\int_{y_A}^{y_B} f(y, x(y), x'(y)) dy$. Application des équations d'Euler Lagrange :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\delta f}{\delta x'} \right) \quad \text{c'est à dire} \quad 0 = \frac{d}{dy} \left(\frac{nx'}{\sqrt{1 + x'^2}} \right) \quad (20)$$

On en déduit :

$$\frac{nx'}{\sqrt{1 + x'^2}} = a = \text{Cte} \quad (21)$$

La constante d'intégration a représente l'indice de réfraction au sommet de la courbe, lorsque $x' \rightarrow \pm\infty$. Si on note (x_0, y_0) les coordonnées du sommet, on a $a = n(y_0)$. Si on sépare les variables on obtient :

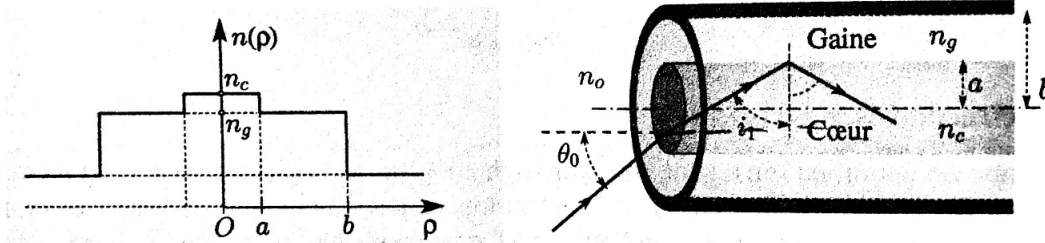
$$dx = \frac{\pm a}{\sqrt{n^2 - a^2}} dy$$

On choisit pour simplifier un modèle linéarisé de n^2 : $n^2 = a^2 + \alpha(y - y_0)$ où $\alpha > 0$. En substituant sur l'équation précédente et en intégrant on trouve :

$$y = y_0 + \frac{\alpha}{4a^2}(x - x_0)^2$$

Le rayon lumineux adopte une trajectoire parabolique dont la courbure est d'autant plus prononcée que le gradient d'indice est important

3.3 Application : fibre optique à saut d'indice



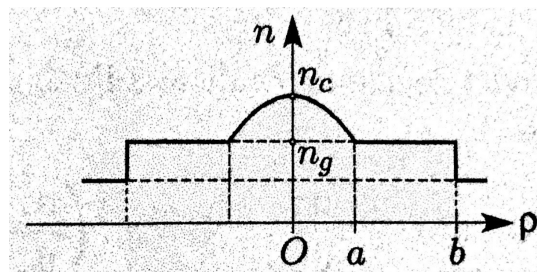
Calcul fait Pérez pag 16.

Vidéo minute 1'47" montrer le principe de la fibre à saut d'indice : <https://www.youtube.com/watch?v=J22D4tQu5GI>

Problème fibre à saut d'indice : différents angles, le temps de parcours de l'information pour un rayon qui est sur l'axe est inférieur que pour un rayon qui est à i_{lim} . Il y a un phénomène de **dispersion**. Système non stigmatique.

Ordres de grandeur : dispersion relative de 20%, 1 ns pour 5 m de fibre, 100 MHz.

Pour surmonter ce problème on utilise des **fibres à gradient d'indice** (Pérez pag 206). Système stigmatique.



Faire le lien avec l'épaisseur parabolique qu'on a trouvé pour une lentille! On observe que l'indice optique a un profil parabolique, en fait quand nous avons montré le profil de la lentille,

on avait dit que l'épaisseur variait de forme parabolique. Ce qui nous intéresse c'est le produit ne . Dans le cas de la lentille n était cte à l'intérieur de la lentille est e variait. Dans le cas de la fibre optique, e reste cte et c'est n qui varie de forme parabolique pour assurer le stigmatisme du système et donc la dispersion.

Conclusion

Résumé. Nous avons vu que le principe de Fermat est un **principe variationnel** qui permet de retrouver tous les résultats de l'optique géométrique. C'est aussi un outil commode pour l'étude de l'optique dans un milieu non homogène, ce qui nous a permis d'obtenir la loi fondamentale de l'optique. Nous avons ensuite cité l'analogie entre le principe de Fermat et le principe de moindre action en mécanique. Ce résultat nous a amenés à l'explication des phénomènes comme les mirages ou le cheminement de la lumière dans les fibres optiques à gradient d'indice, qui jouent un rôle de plus en plus important grâce à leurs propriétés stigmatiques notamment dans le cas des connexions Internet à très haut débit. [OdG vitesse de connexion Internet fibre personnelle : 100 Mbits/s, ADSL : 10 Mbits/s.](#)

Ouverture. Le principe de Fermat permet aussi de faire le lien entre l'optique géométrique et l'optique ondulatoire grâce au **théorème de Malus** (Regarder leçon Hugo Roussille, il y a la référence pour trouver la démo du théorème de Malus) .

Optique géométrique \rightarrow cas limite de l'optique ondulatoire.

Mécanique classique \rightarrow cas limite de la mécanique ondulatoire (quantique).