Quelques axes de réflexion pour la leçon : LP19 : Bilans thermiques : Flux conductifs, convectifs et radiatifs.

M. Rieutord

6 juin 2019

Références : le Perez d'optique (chap15) (flux radiatif), Rieutord (dynamique des fluide), chap7 flux convectif. Transferts thermiques de Taine & Petit, Transfert de Chaleur de Crabol, Introduction to thermodynamics and heat transfert de Mooney.

Remarque du jury :
— Rapport 2015 : Le traitement d'au moins un exemple mettant en jeu plusieurs mécanismes de transferts thermiques est l'un des objectifs de cette leçon.

1 Introduction

But de la leçon : synthèse sur les différentes formes du transport de la chaleur.

Placer cette leçon après les leçons 16 et 17. *LP16 Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir* permet de voir la notion de flux radiatif qui ne sera donc que rappelée dans la présente leçon. *LP17 Phénomènes de transport* est a priori très généraliste mais le jury a précisé que ≪ le candidat développera sa leçon à partir d'un exemple de son choix ≫ (rapport 2013, p. 22). Donc en abordant la présente leçon, vous pouvez commencer en notant que vous avez vu le transport radiatif et les notions autour de la diffusion de la chaleur.

Alors que reste-t-il pour cette leçon ? Plein de choses et notamment ce qu'il se passe dans la réalité, à savoir que les processus de transport sont toujours tous en action mais que certains dominent dans une situation donnée.

Omniprésence dans notre environnement :
— Chauffage central, frigo : transport convectif, rayonnement des radiateurs..
— Cuisson d'une confiture : un pb de transport dans un liquide avec competition convection/conduction.
— Problème de l'isolation d'une habitation : diminuer la conduction sans déclencher la convection
— Etat de l'atmosphère terrestre : compétition entre convection, conduction et rayonnement.
— Dans une étoile (comme le soleil) là encore, convection, conduction, rayonnement sont à l'œuvre.

Présentation du plan de la leçon.

2 Rappels à propos de la conduction et du rayonnement

On rappelle l'essentiel de ce qu'il faut savoir sur les 2 sujets ci-dessus pour bien suivre ce qui suit.

2.1 Flux conductif

Rappeler la loi de Fourier et l'équation de la chaleur.

2.2 Flux radiatif

Rappeler la loi de Stefan-Boltzmann

3 La convection thermique

3.1 Expériences

- Expérience de l'instabilité de Rayleigh-Taylor : Avec 2 erlenmeyer contenant l'un de l'eau froide et l'autre de l'eau chaude colorée, montrer que lorsque l'eau chaude est placée au dessus de l'eau froide l'équilibre est stable et lorsqu'on inverse les positions les 2 fluides se mélangent. Faire remarquer qu'au moment du mélange le mouvement du fluide a conduit à un transport de chaleur du bas vers le haut, et que ce transport de la chaleur a été très rapide.
- Sur une plaque électrique et un récipient à fond métallique mais parois transparente montrer la convection de l'eau (ensemencée de particules flottantes) et commenter sur le transport de la chaleur. On peut aussi mettre de l'eau très froide (ensemencée de particules) dans un cristallisoir dont le fond est au contact d'un thermostat chaud (bain d'eau chaude), visualisez avec la webcam et projeter sur écran.

3.2 Transport de la chaleur par le mouvement d'un fluide

On admet sans demonstration la loi d'évolution de l'énergie interne pour un fluid conducteur de la chaleur mais non-visqueux :

$$\rho \frac{De}{Dt} = \mathrm{Div}(\chi \vec{\nabla} T) - P \mathrm{Div} \vec{v} \tag{1}$$

mais en faisant le commentaire suivant : Cette équation traduit la conservation de l'énergie au niveau d'une particule fluide, telle qu'on la vue en thermodynamique, i.e. $dU = \delta Q + \delta W$:

- $\mathrm{Div}(\chi \vec{\nabla} T)$ est la chaleur déposée dans l'élément fluide par le contact avec le voisinage
- $-P\mathrm{Div}\vec{v}$ est la traduction dynamique du travail des forces pression, c'est-à-dire du terme $-PdV$ qu'on connaît bien. En fait on voit ici que $\mathrm{Div}\vec{v}$ est tout simplement la variation de volume de l'élément fluide pendant dt.

Encore un peu de thermodynamique : Nous savons depuis longtemps que si les éléments fluides sont à l'équilibre thermodynamique alors $de = Tds - PdV$. En mécanique des fluides on fait toujours l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local, donc cette relation entre les dérivées totales des fonctions e, s, V est toujours valable et induit la même égalité pour les dérivées partielles, par exemple

$$\frac{\partial e}{\partial x} = T\frac{\partial s}{\partial x} - P\frac{\partial V}{\partial x}$$

c'est-à-dire que l'égalité thermodynamique se transmet aux dérivées particulaires :

$$\frac{De}{Dt} = T\frac{Ds}{Dt} - P\frac{DV}{Dt} \tag{2}$$

On notera que les quantités utilisées en mécanique des fluides sont massiques, c'est-à-dire que $V = 1/\rho$. Comme l'équation de conservation de la masse donne

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \mathrm{Div}\vec{v}$$

on peut transformer (2) en

$$\frac{De}{Dt} = T\frac{Ds}{Dt} - \frac{P}{\rho}\mathrm{Div}\vec{v} \tag{3}$$

ce qui finalement permet d'écrire l'équation de l'entropie d'une particule fluide à partir de (1)

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} = \mathrm{Div}(\chi\vec{\nabla}T) \tag{4}$$

Equation par laquelle on aurait pu commencer car elle traduit de façon dynamique l'égalité de Clausius $TdS = \delta Q$.

Souvent dans le transport de la chaleur par le mouvement d'un fluide on peut négliger les variations de pression. Par exemple l'air chaud qui monte au dessus d'un radiateur dans une pièce subira une variation de pression $\rho g\Delta z \sim 20$ Pa en s'élevant dans la pièce ce qui est très faible par rapport à 1 bar. On simplifie alors en supposant que l'évolution du fluide est à pression constante. Ainsi la thermo nous dit que $Tds = dh$ et on peut transformer l'équation de l'entropie en celle de l'enthalpie

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \mathrm{Div}(\chi\vec{\nabla}T) \tag{5}$$

et pour un gaz parfait $h = c_P T$. Si on suppose que la conductivité thermique χ est constante alors on trouve l'équation generale du champ de température :

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa\Delta T \tag{6}$$

où $\kappa = \chi/\rho c_P$ est la diffusivité thermique du fluide. Cette équation est généralement adoptée par les thermiciens pour traiter du transfert thermique en ingéniérie. On notera qu'elle est une approximation (bonne en général) des équations exactes : on néglige les effets des fluctuations de pression sur la masse volumique, on néglige de dissipation visqueuse i.e. pas d'échauffement dû au frottement visqueux.

4 Compétition entre les différents mécanismes

Très souvent les différents mécanismes interviennent simultanément et l'effet dominant peut être mis en évidence par un nombre sans dimension. L'effet dominant est aussi contrôlé par l'échelle de longueur du système.

4.1 Rôle de l'échelle de longueur - nombre de Péclet

A partir de l'équation de la température (6) apparaît le nombre sans dimension

$$\mathrm{Pe} = \frac{VL}{\kappa}$$

κ = diffusivité thermique, V = vitesse typique, L échelle typique. En effet, après avoir posé $\vec{v} = V\vec{u}$, et fait le changement de variable $\vec{r} \to L\vec{r}$ et $t \to (L/V)\tau$ on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \Delta T$$

On en conclut que la diffusion domine à petite échelle (si Pe$\ll 1$) et la convection domine à grande échelle (Pe$\gg 1$).

Conclusion : pour une bonne isolation il faut un materiau de faible conductivité (un gaz par exemple), mais s'il se met en mouvement alors on risque de perdre ce qu'on recherche. D'où l'utilisation de matériaux à fibres, peu denses, emprisonnant de l'air.

4.2 Compétition conduction radiation

à la surface d'un corps solide (de normale ext. $\vec{n}$) dans le vide

$$-K\vec{n} \cdot \vec{\nabla} T + \sigma T^4 = 0 \quad \text{sur la surface} \tag{7}$$

Note : cette équation n'est pas une équation différentielle mais une condition aux limites. Elle n'est valable que sur la surface.

En introduisant l'échelle typique du solide L (en fait du gradient de température), on fait apparaître le nombre de Biot :

$$\frac{dT}{d\hat{x}} + BiT = 0$$

$$Bi = \frac{\sigma T^3 L}{K}$$

si $Bi \ll 1$ isolation, sinon forte perte par rayonnement.

A partir de l'équation (7) montrez que le vide est un très bonne isolant (applications bouteilles thermos, pour l'azote liquide, etc).

4.3 La conductivité radiative : cas du soleil

Le soleil est une boule de gaz (ionisé) de 700000km de rayon. Dans la région interne de r=0 à r=500000km le gaz est en équilibre hydrostatique et la chaleur est transportée par diffusion des photons qui dominent largement la conduction classique (voir ci-dessous). De r=500000km à r=R=700000km la chaleur est transportée par convection.

En r=0, $T_0 = 15 \times 10^6$ K et en r=500000km $T_5 = 2 \times 10^6$ K. Le flux total est de $L = 3.8 \times 10^{26}$ W. On peut donc estimer la conductivité thermique du milieu avec

$$K \sim \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\Delta r}{T_0 - T_5}$$

On trouve

$$K \sim 4.6 \times 10^9 W/m/K \gg K_{\mathrm{Cu}} = 401 W/m/K$$

Cette conductivité est donc très grande par rapport à celle qu'on connait des matériaux de notre environnement. On sait que pour un gaz la conductivité augmente comme $\sqrt{T}$. La conductivité de l'air est de 0.02 W/m/K, donc même si on multiplie par 10^3 $(=\sqrt{10^6})$ on n'y arrive pas ! Cette conductivité ne peut être que d'origine radiative

$$\chi_{rad} = \frac{16\sigma T^3}{3\rho\kappa_o}$$

où κ_o est l'opacité. Pour un plasma d'hydrogène pure c'est une constante. Donc χ_{rad} augmente très vite avec la température et domine rapidement la conductivité classique qui vient des collisions entre ion et electrons.

L'existence de la zone convective du soleil, montre que la convection peut aussi assurer des flux de chaleur enormes et concurrencer la diffusion des photons (ce sont les deux seul processus qui se partage le transport de la chaleur à haute tempérture, donc dans les étoiles ; la conduction est négligeable).

5 Bilans de transfert thermique en régime stationnaire

5.1 Bilan thermique

Reprenons l'équation de l'enthalpie (5) et intégrons la sur un volume V dans le cas stationnaire ($\partial/\partial t = 0$). On trouve

$$\int_{(S)} h\vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{(S)} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

avec $\vec{F} = -\chi \vec{\nabla} T$. Flux d'enthalpie (transport de la chaleur par mouvement du fluide) et flux conductif se compensent.

5.2 Isolation d'une conduite d'eau

Exemple d'application : comment isoler une tuyau d'eau passant dans de l'air à -10° pour que l'eau ne gèle pas sachant que l'eau circule avec un débit Q minimum ?

a) On calcule la résistance thermique d'un tuyau en acier. Le tuyau est cylindrique de rayon interne R_1 et de rayon externe R_2. La résistance thermique est définie comme le rapport entre la différence de température et la puissance transmise par conduction, ie

$$R = \frac{T_2 - T_1}{Flux}$$

Considérons le cas d'un tuyau de longueur L. Il suffit de résoudre $\Delta T = 0$ en géométrie cylindrique avec les conditions aux limites

$$T(R_1) = T_1 \qquad \text{et} \qquad T(R_2) = T_2$$

Ainsi on trouve que dans l'acier

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)r}$$

Donc sur une longueur L le tuyau transmet une flux de

$$Flux = -\chi \frac{dT(r)}{dr} 2\pi r L = -\chi 2\pi L \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

Il a une résistance thermique de

$$R = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L \chi}$$

Maintenant, l'eau circulant dans cette canalisation alimente une fontaine avec un débit Q sur 10m le tuyau est à l'air libre et il fait $-10s$°C. Quel est le débit minimum pour que l'eau ne gèle pas dans le tuyau ? On se donne $R_1 = 1$cm et R_2=1.2cm ; $\chi_{\text{acier}} = 26$W/m/K. L'eau arrive avec une température de 10°C à l'entrée de la partie aérienne du tuyau. La puissance cédée par l'eau durant son parcours dans le tuyau est simplement

$$P = \rho c_p T_{\text{entree}} Q - \rho c_p T_{\text{sortie}} Q$$

et on veut $T_{\text{sortie}} > 0$°C avec T_{entree} =10°C.

La résistance thermique du tuyau est R= 1.1×10^{-4}K/W. Avec les conditions du problème la température moyenne dans le tuyau est de 5°C donc la puissance perdue par diffusion est de

$$\Phi = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R} = \frac{5 - (-10)}{1.1 \times 10^{-4}} = 1.3 \times 10^5 \, W$$

En égalant P (avec T_{entree} = 10°C et T_{sortie} = 0°C) et Φ on déduit le débit minimum Q=3,2 litres/seconde. Si la fontaine débite 10 litres par minute (débit typique), son tuyau d'alimentation aura clairement gelé. Si maintenant on entoure le tuyau de laine de verre dont la conductivité est $\chi = 0.04$W/m/K, la résistance thermique augmente fortement et le débit minimum est réduit du même facteur. En effet, la résistance thermique du tuyau enveloppé est

$$R = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L \chi_{\text{acier}}} + \frac{\ln(R_3/R_2)}{2\pi L \chi_{\text{laine}}}$$

où R_3 est le rayon extérieur de l'enveloppe de laine de verre. On prend $R_3 - R_2 = 1$cm, et on note que la résistance thermique de l'acier est négligeable comparée à celle de l'enveloppe de laine de verre. En effet, on trouve :

$$R_{\text{acier}} = 1.1 \times 10^{-4} K/W \qquad \text{et} \qquad R_{\text{laine}} = 0.24 K/W$$

avec les données numériques précédentes.

Commentaire : dans ce genre de calculs, il y a pas mal d'approximations. Notamment du fait qu'on ne tient pas compte de la forme de l'écoulement dans le tuyau (écoulement de Poiseuille si Reynolds plus petit que 1000) que l'eau ne se refroidit pas uniformément. Est-ce grave ? Calculons les nombres de Reynolds et de Péclet. La vitesse débitante permettant de faire 3.2 l/s avec un tuyau de 1cm de rayon est de 10m/s. Donc le Reynolds est de $VD/\nu \sim 2 \times 10^5$: l'écoulement est très turbulent. Le Péclet est de $VD/\kappa \sim 3 \times 10^4 \gg 1$ donc la chaleur n'a pas le temps de diffuser dans l'eau si l'écoulement est laminaire, mais on s'attend à un écoulement turbulent. Donc l'eau se mélange latéralement avec une vitesse typique de 0.25 fois la vitesse axial. Donc Péclet axial est grand aussi et donc le transport de la chaleur axial est très efficace même si l'eau est bien moins conductrice que l'acier. La diffusion dans l'eau n'importe pas : elle est dominée par le mélange turbulent. En conclusion dans une section du tuyau la température de l'eau est uniforme.

Il peut se former de la glace sur les parois internes du tuyau. Comme la glace à une conductivité 10 fois plus petite que l'acier on peut tolerer des débits moindres. Enfin, si vous posez une isolation vous chercherez à prendre une marge de sécurité par rapport au seuil calculé.

Donc ce type de calculs permet d'estimer les ordres de grandeurs et de prendre les bons matériaux d'isolation.

5.3 Autre bilan : Effet de serre sur Terre

Discuter le bilan radiatif de la Terre (prise comme une boule solide) et montrer qu'il y a un effet de serre dans la réalité (car la température moyenne du globe est de 15°C).

6 Conclusions

C'est une première exploration de tous les processus de transport de la chaleur. On retiendra que :

- Les échelles de longueur du système déterminent le processus dominant. A grande échelle la convection est la plus efficace.
- A haute température la diffusion des photons domine mais peut être concurrencée par la convection (régime des étoiles).
- On voit qu'un bilan global permet d'obtenir des résultats intéressants sans résoudre les équations aux dérivées partielles sous-jacentes.

— ...

Granulation solaire :

vous pouvez faire le calcul vous même :

— Vitesse typique 1km/s

— Echelle typique 1000 km

conductivité thermique d'origine radiative (les photons diffusent la chaleur, car dominent complètement les autres processus, ie les collisions)

$$k_{\mathrm{rad}} = \frac{16\sigma T^3}{3\rho\kappa_o}$$

κ_o= opacité du milieu =section efficace de diffusion des photons ; typiquement pour un plasma ou la diffusion sur les électrons domine (diffusion Thomson) κ_o=0.02(1+X) m^2/kg X=fraction massique d'hydrogène, à la surface du soleil X=0.7 vous prenez $\rho = 3\,10^{-4}$ kg/m^3 T=6000K Cp = 5/2 R/M, R=8.413 J/K/mole, M=0.001 kg/mole (hydrogène) $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ (cst de Stefan)

et vous trouvez que Diff = $\mathrm{k}_{\mathrm{rad}}/\rho/Cp = 10^9$ m^2/s donc Pe = V*L/Diff =1