Partiel + Examen
Adnen.Mlayah@cemes.fr

Relativité et Invariance

Chapitre 1 : Introduction

* 4 constantes fondamentales ; une théorie derrière chacune

$\mathcal{G}$: gravitation : mécanique classique
relativité générale

k_B : Boltzmann : physique statistique

h : Planck : mécanique quantique

c : vitesse de la lumière dans le vide : relativité restreinte

$c = 3.10^8 \, m.s^{-1}$

Au début du siècle dernier (1900 -), deux théories dominent :
- mécanique de Newton
- électromagnétisme de Maxwell

$\Rightarrow$ expliquent 90 % des observations expérimentales

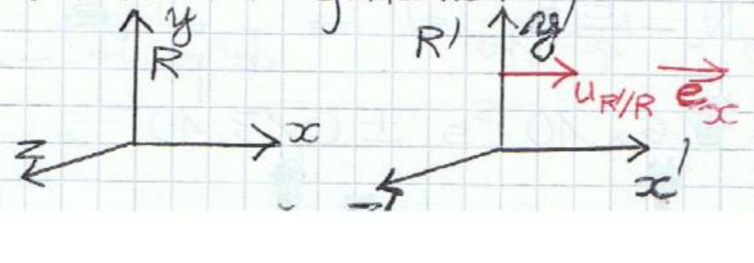
Mais des observations demeurent inexplicables avec ces théories : spectres de raies, entre autres choses.

Les grandeurs physiques $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$, **E** sont exprimées dans un référentiel donné. Mais il faut que les lois de la physique soient indépendantes du référentiel

* Référentiel Galiléen : tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

ex : le référentiel de Copernic est supposé galiléen

En mécanique de Newton, une transformation permet de relier deux référentiels galiléens :



$\Rightarrow$ Transformation de Galilée

$\vec{u}_{R'/R} = cte$

I - Transformation de Galilée

$$\begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

$\underset{R}{\uparrow}$ $\qquad$ $\underset{R'}{\uparrow}$

4 équations : **3** sur l'espace,
1 sur le temps

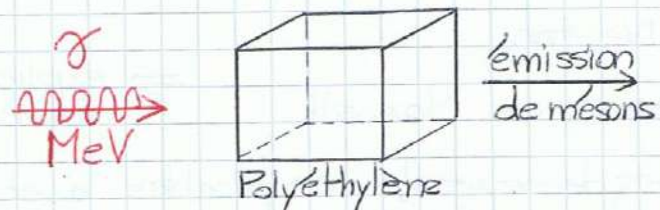
En mécanique classique, le temps est un invariant, un simple paramètre commun à tout référentiel

On introduit la notion d'évènement : **(E)** : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}_{(R)}$

$\Rightarrow$ dépend du référentiel

II - Echecs de la mécanique classique

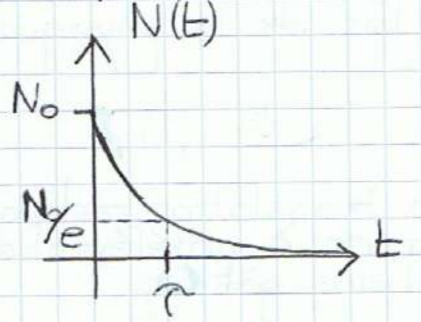
1 - Durée de vie de mésons (Wiegand - 1951)



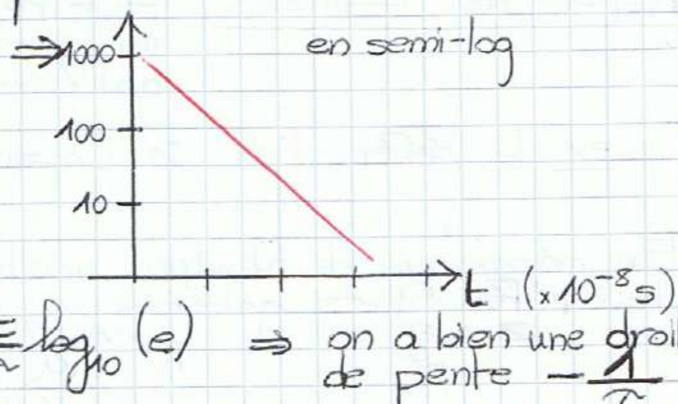
$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu$

muons $\quad$ neutrinos

Les π^+ étant instables, leur nombre décroit, selon une loi exponentielle : $N_{\pi^+}(t) = N_0 \, e^{-t/\tau}$



1°) On mesure $N(t)$, une fois les particules arrêtées dans un bloc de plomb.



Or, $\log_{10}(N) = \log_{10} N_0 - \frac{t}{\tau} \log_{10}(e)$ $\Rightarrow$ on a bien une droite, de pente $-\frac{1}{\tau}$

On mesure $\tau_{exp_1} = 2{,}6 \times 10^{-8}\,s \pm 0{,}13 . 10^{-8}\,s$

2°) Si on répète l'expérience avec des particules en "vol" (on enlève le plomb)

On mesure alors $\tau_{exp_2} = 3{,}9 \cdot 10^{-8}\,s \pm 0{,}3 \cdot 10^{-8}\,s$

La durée de vie a changé.

$$\Rightarrow \frac{\tau_{exp_2}}{\tau_{exp_1}} = 1{,}5$$

: et cette différence n'est pas liée aux erreurs expérimentales.

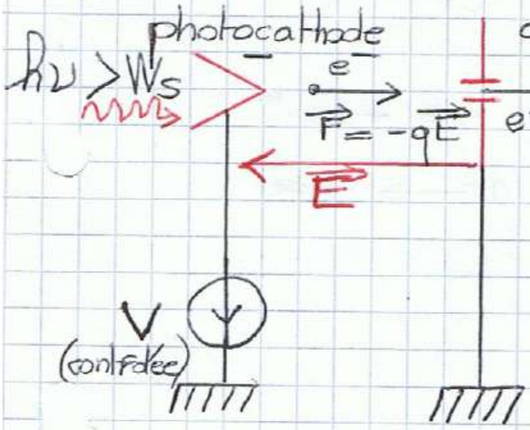
Elle ne peut pas non plus être expliquée par la mécanique classique car le temps, la durée de vie, varie.

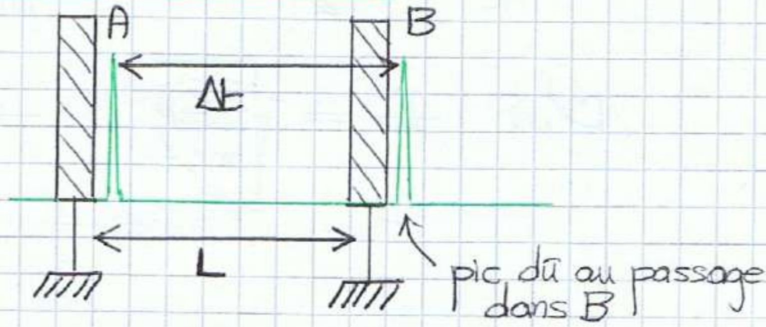
Dans l'expérience 1 : particules et expérimentateur dans le même référentiel $\underbrace{\quad}_{\text{immobiles}}$

" " " 2 : particules en mouvement, donc immobiles dans un autre référentiel

$\Rightarrow t$ est différent dans les 2 référentiels.

2 - Vitesse de la lumière (Bertozzi - 1964)





On mesure $v = \dfrac{L}{\Delta t}$

Conservation de l'énergie totale :

$$\mathcal{E}_{cathode} = \mathcal{E}_{anode} \Leftrightarrow \mathcal{E}_k^{cathode} + E_p^{cathode} = \mathcal{E}_k^{anode} + \mathcal{E}_p^{cathode}$$

$\mathcal{E}_k^{cathode} \simeq 0$ (on fournit juste W_s)
$\Rightarrow$ ils sortent sans vitesse initiale

On a : $-q_e V_{cat} = \mathcal{E}_k^{anode} - q_e V_{an}$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_k^{anode} = -q_e (V_{cat} - V_{an}) > 0$$

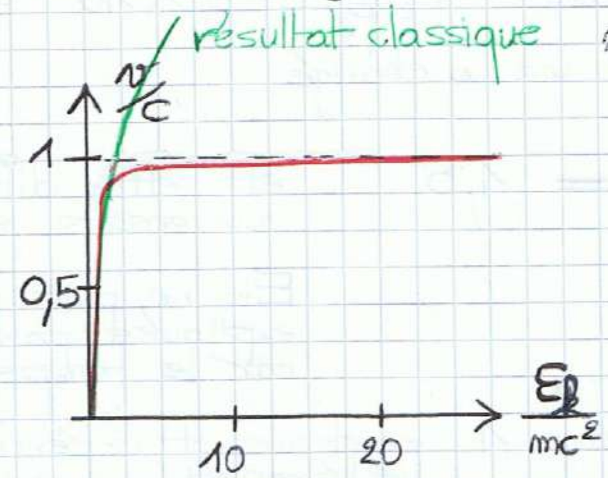
$$\boxed{\mathcal{E}_k^{anode} = q_e V} \quad \text{où } V = V_{an} - V_{cat}$$

E_k^{anode}/mc^2	v/c
1	0,867
2	0,91
3	0,96
9	0,98
20	~ 1

$c = 3 \times 10^8$ m/s

mc^2 : énergie de masse $\simeq 8{,}1 . 10^{-14}$ J

$\approx 0{,}55 \times 10^6$ eV



$\Rightarrow v/c < 1 \ \forall E_k^{anode} \ \Rightarrow c$ est une vitesse limite

Impossible à prédire avec la mécanique classique

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{E_k}{mc^2} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

D'où $\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E_k}{mc^2}}$ $\rightarrow$ si $E_k \rightarrow +\infty$

alors $v \rightarrow +\infty$

Chapitre 2 : Principes de Relativité

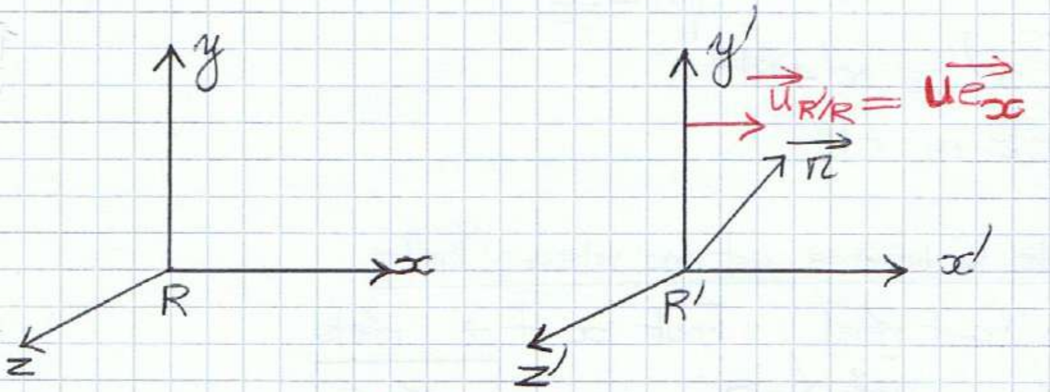
- Les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel.

- La vitesse de la lumière est un invariant par changement de référentiel.

  ⇒ le temps n'est donc plus un invariant

Nécessité pour la nouvelle théorie d'expliquer les expériences qui font échouer l'ancienne, mais elle doit aussi l'englober.

I - Transformation de Lorentz



espace
$$\begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

temps
$$t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$ Facteur relativiste

c : vitesse de la lumière

t n'est plus un invariant, mais il dépend aussi de l'espace

Rq: $x = \gamma\left(x' + \frac{u}{c} ct'\right)$
$ct = \gamma\left(ct' + \frac{u}{c} x'\right)$

On pose $\boxed{\beta = \frac{u}{c}}$ $\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$

↳ on peut multiplier par c car c est un invariant !!!
⇒ à gauche, on est dans R, à droite on est dans R'.

$$\boxed{\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases}}$$

- β devant le terme "croisé"
- γ devant (
- x'A + βct'

⇒ espace quadridimensionnel
ct a la dimension d'une longueur

II - Propriétés de la transformation de Lorentz

* Linéarité : et bijectivité

$\Rightarrow$ unicité des relations $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}_R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix}_{R'}$

Un seul évènement dans R correspond à un seul évènement dans R'

* Elle contient la transformation de Galilée

Si $u \ll c$: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \sim 1$

d'où $x \simeq x' + ut$

$ct \simeq ct'$

* La vitesse de la lumière est une vitesse limite

L'espace étant réel, il faut x et x' réels

donc $1 - \dfrac{u^2}{c^2} \geqslant 0$ donc $\boxed{u \leqslant c}$

* Transformation de Lorentz inverse

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = c\gamma\left(t - \dfrac{u}{c^2}x\right) = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

. Le + devient –
. Les ' changent de côté

* Intervalle entre deux évènements

$(E_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ ct_1 \end{pmatrix}$ et $(E_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ ct_2 \end{pmatrix}$

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]$$

$\Rightarrow$ "distance entre points". Le "–" génère de nouveaux invariants

- $\boxed{\begin{array}{l} \underline{s^2 \text{ est un invariant}} \Rightarrow s^2_{(R)} = s^2_{(R')} \\ \text{où } s^2_{(R')} = c^2(t_2' - t_1')^2 - \left[(x_2'-x_1')^2 + (y_2'-y_1')^2 + (z_2'-z_1')^2\right] \end{array}}$

On introduit la transformation de Lorentz dans $s^2_{(R')}$:

$$\Rightarrow s^2_{(R')} \underset{\text{par linéarité}}{=} \gamma^2\left[c(t_2-t_1) - \beta(x_2-x_1)\right]^2 - \left\{\gamma^2\left[(x_2-x_1) - \beta c(t_2-t_1)\right]^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right\}$$

$$= \gamma^2 c^2 (t_2-t_1)^2 + \gamma^2\beta^2(x_2-x_1)^2 - \left\{\gamma^2(x_2-x_1)^2 + \beta^2c^2(t_2-t_1)^2\gamma^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right\}$$

$$= \underbrace{(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)}_{=1} c^2 (t_2-t_1)^2 - \left\{(\gamma^2-\gamma^2\beta^2)(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right\}$$

car $\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2} - \dfrac{\beta^2}{1-\beta^2} = \dfrac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = 1$

D'où $s^2_{(R')} = c^2(t_2-t_1)^2 - \left[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right]$

$= s^2_{(R)}$ On a vérifié l'invariance de s^2 par transformation de Lorentz.

Rq: on l'écrit aussi $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$

Si $\Delta s^2 > 0$: genre temps : $c^2\Delta t^2 > \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$

Si $\Delta s^2 < 0$: genre espace : $c^2\Delta t^2 < \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$
$\Rightarrow$ pas de causalité possible entre les 2 évènements

Si $\Delta s^2 = 0$: genre lumière $c^2 = \dfrac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2}$

On peut avoir : $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2\left(1 - \dfrac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{c^2\Delta t^2}\right)$

En mécanique classique : $c \to \infty$

D'où $\Delta s^2 \to c^2\Delta t^2 \to \Delta t^2$ invariant

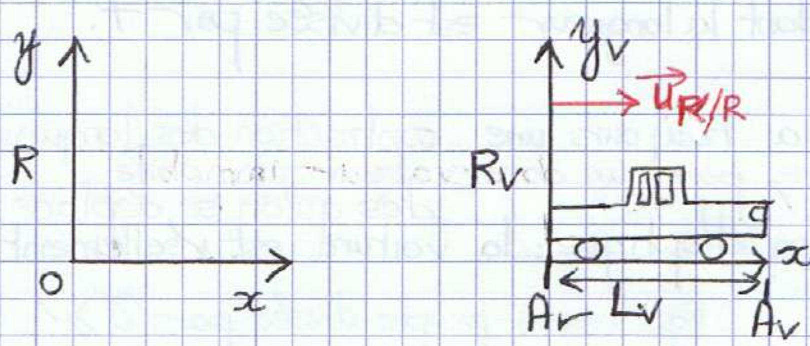
En mécanique relativiste, c est Finie $\to$ le temps n'est plus un invariant

Chapitre 3 : Cinématique Relativiste

I - Longueur Propre

Longueur Propre = longueur mesurée dans un référentiel où le système est "immobile".

ex: voiture en mouvement



2 évènements : E(Ar) : l'arrière de la voiture est en x_{Ar} à t_{Ar}

E(Av) : l'avant de la voiture est en x_{Av} à t_{Av}

La voiture est immobile dans R_V : L_V est donc une longueur propre.

Qu'en est-il dans R ?

On a : $\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases}$

Comme on a $x' = \gamma(x - \beta ct)$, on a :

$$x'_{Ar} - x'_{Ar} = \gamma\left[x_{Av} - x_{Ar} - \beta c(t_{Av} - t_{Ar})\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad L_V = \gamma\Big(\underbrace{L_{V/R}}_{\text{longueur de la voiture en R}} - \beta\underbrace{(t_{Av} - t_{Ar})}_{=0 \text{ car les 2 évènements sont simultanés}}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_{V/R} = \frac{L_V}{\gamma}}$$

Oui mais... que vaut γ ?

On prend $u_{R_V/R} = 0{,}8c \Rightarrow \beta = 0{,}8$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}67$$

Si $\beta = 0{,}99 \Rightarrow \gamma = 7$

Si $\beta = 0{,}1 \Rightarrow \gamma = 1{,}001$

γ monte avec $u_{R_V/R}$

Si la voiture roule avec $u_{R_V/R} = 0{,}99c$, un passant dans la rue voit une voiture dont la longueur est divisée par 7.

Comme $\gamma \geqslant 1$: on a toujours une contraction des longueurs dès lors qu'on se déplace, pour un observateur immobile.

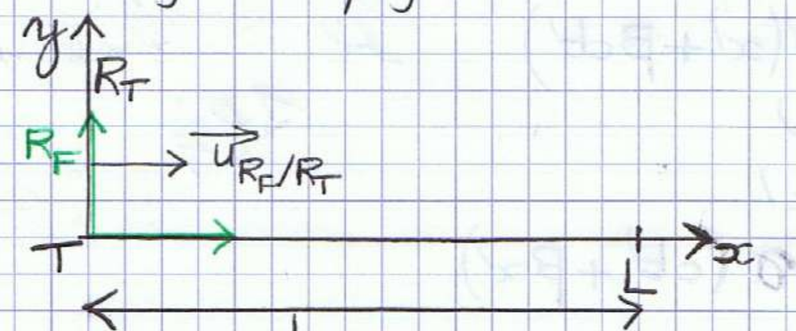
Ce n'est pas une illusion d'optique : la voiture est réellement contractée dans R.

Rq : longueur propre divisée par $\gamma \geqslant 1$: contraction

II - Durée Propre

Durée propre : durée séparant deux évènements qui ont lieu au même point d'un référentiel donné.

On imagine un voyage Terre - Lune



d_{TL} est une distance propre dans R_T, mais pas pour le voyageur dans R_F.

Durée du voyage dans R_T : $\Delta t_R = \dfrac{d_{TL}}{u_{R_F/R_T}}$

On a la transformation suivante : $\underbrace{ct'}_{R_F} = \gamma \underbrace{(ct - \beta x)}_{R_T}$

$$\Rightarrow c(\Delta t)_{R_F} = \gamma\left(c(\Delta t)_{R_T} - \beta (\Delta x)_{R_T}\right)$$

$$c(\Delta t)_{R_F} = \gamma\left(c(\Delta t)_{R_T} - \beta\, d_{TL}\right)$$

$$c(\Delta t)_{R_F} = \gamma\left[c(\Delta t)_{R_T} - \beta u (\Delta t)_{R_T}\right]$$

$$\Rightarrow c(\Delta t)_{R_F} = c(\Delta t)_{R_T}\left[\gamma\left(1-\beta^2\right)\right]$$

$$\Rightarrow (\Delta t)_{R_F} = (\Delta t)_{R_T}\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow (\Delta t)_{R_F} = \frac{(\Delta t)_{R_T}}{\gamma} \Rightarrow \boxed{(\Delta t)_{R_T} = \gamma (\Delta t)_{R_F}}$$

$(\Delta t)_{R_T}$ n'est pas une durée propre : 2 points différents T et L

Par contre le voyageur dans sa fusée n'a pas bougé : $(\Delta t)_{R_F}$ est donc une durée propre.

$\Rightarrow$ Dilatation des durées pour l'observateur sur Terre

↳ durée propre multipliée par $\gamma \gg 1$

On peut retrouver cela grâce à la contraction des longueurs :

d_{TL} distance propre dans R : $L_{Fusée} = \dfrac{d_{TL}}{\gamma}$

or $(\Delta t)_F = \dfrac{L_{Fusée}}{u} = \dfrac{d_{TL}}{u\gamma} = \dfrac{(\Delta t)_{R_T}}{\gamma}$ CQFD

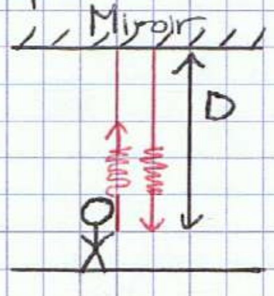
D'où le paradoxe des jumeaux : celui dans une fusée voyageant à $u \approx c$ vieillit 7 fois moins vite que celui qui reste sur Terre.

Dilatation des durées observées en <u>vrai</u> (avions à réaction)

Le temps est vraiment relatif au repère dans lequel on se place

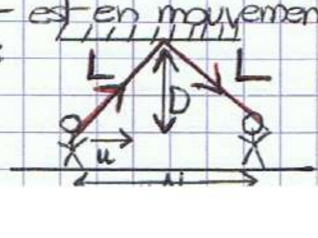
On a remplacé l'invariance de t par celle de c.

<u>Expérience :</u>



impulsion lumineuse : $\Delta t' = \dfrac{2D}{c}$ vitesse de parcours.

Si l'opérateur est en mouvement par rapport à un observateur :



Δt : durée séparant émission et

Comme on a : $L^2 = D^2 + \frac{u^2 \Delta t^2}{4}$

or $D^2 = \left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2$

D'où $L^2 = \left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2$ or $2L = c\Delta t$

on injecte de la relativité car on considère que la lumière voyage à la même vitesse quelque soit le référentiel

$$\Rightarrow \left(\frac{c\Delta t}{\cancel{2}}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t'}{\cancel{2}}\right)^2 + \left(\frac{u\Delta t}{\cancel{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{c^2}\Delta t^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \cancel{c^2}\Delta t'^2$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

La durée propre est $\Delta t'$ (émission et réception au même point)
or $\Delta t = \gamma \Delta t'$, $\gamma \geqslant 1$

$\Rightarrow$ on retrouve bien la dilatation des durées <u>sans Lorentz</u>

c est la seule responsable de ce phénomène du fait de son invariance.

- En mécanique classique : dans R', on a toujours $\Delta t' = \frac{2D}{c}$

Pour un observateur dans R : il perçoit c composée avec u :

à savoir $\sqrt{u^2+c^2} = v$

On a donc $2L = \sqrt{u^2+c^2}\,\Delta t$

D'où : $\left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 = (u^2+c^2)\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2$

$$\cancel{\Delta t^2 u^2} + c^2\Delta t'^2 = \cancel{u^2\Delta t^2} + c^2\Delta t^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta t' = \Delta t$$

<u>On retrouve l'invariance du temps, à condition de lâcher celle sur c</u>. /