LP.28. Ondes EM dans les milieux diélectriques

Plan : I. Les milieu diélectriques

I.1. Polarisation d'un milieu

I.2. Vecteur polarisation

I.3. modèle de l'e^- élastiquement lié

II. Propagation des OEM dans les milieux diélectriques.

II.1. Équations de Maxwell

II.2 Équation de propagation

II.3 Dispersion et absorption

III. Applications

- En introduction on peut faire l'expérience de Faraday.

I. Les milieu diélectriques

Un milieu diélectrique est un milieu qui, sous l'action d'un champ électrique excitateur, réagit par l'apparition d'une polarisation $\vec{P}$ ~~au sein~~ en son sein.

Dans un matériau : deux types de charges : libres → particules pouvant se déplacer sur des échelles macrosc. (conducteurs)

liées → petit déplacement autour de sa position d'équilibre

si $\rho_{libre} = 0$ → alors diélectrique parfait = isolant

Transition on va donc s'intéresser à ces charges dites liées et aux mécanismes microscopiques de polarisation pour expliquer les observations macroscopiques. (l'expérience en introduction de Faraday).

I.1. Polarisation d'un milieu. (Rapide!).

Milieu polarisable dans champ $\vec{E}$ → apparition moment dipolaire $\vec{p}$: c'est la réponse du milieu à $\vec{E}$.

ce moment dipolaire donne lieu à $\vec{E}_p$.

Le champ électrique local est : $\vec{E}_l = \vec{E}_p + \vec{E}$

Il existe diff types de polarisation: leçon Hugo.

→ Polarisation d'orientation

→ " ionique

→ " électronique

Transition
on cherche à décrire ce phénomène macroscopiquement, pour cela on introduit le ~~mom~~ vecteur polarisation.

I.2. Vecteur polarisation.

du moins vers le plus

sous l'action de $\vec{E}$: apparition de moments dipolaires

$\boxed{\vec{P_i} = \Sigma q_i \cdot \vec{r_i}}$ $\vec{r_i} = \vec{OA_i}$ Matière neutre: $\boxed{Q = \sum_i q_i = 0}$.

on définit le vecteur dipolaire électrique $\vec{P}$ ou vecteur polarisation:

volume mesoscopique.

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p_i}$$

$$= \frac{1}{V} \sum q_i \cdot \vec{r_i}.$$

Lorsque les charges composant ces dipôles son en mouvement, une densité volumique de courant se crée :

$$\vec{J_P} = \frac{1}{V} \sum_i q_i \cdot \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Ce courant est appelé courant de polarisation.

La neutralité du milieu n'est plus vérifiée localement car déplacement de la charge.

On associe la densité volumique de charge grâce à l'équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J_P} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\rho_P + \operatorname{div} \vec{P}\right)}_{\text{indépendant du temps.}} = 0.$$

$\rho_P + \operatorname{div} \vec{P} = cte$

↳ on la prend égale à 0 parce que le milieu n'est pas chargé au début. A $t=0$: $\vec{P} = 0$ et $\rho_P = 0$!! donc $cte = 0$

$$\rho_P = -\operatorname{div} \vec{P}$$

Transition Nous avons défini des grandeurs permettant de caractériser la polarisation du milieu. Il nous reste à trouver comment la polarisation et donc la réponse du milieu, se comporte sous un champ. EM.

⟶ Plutôt on veut chercher la relation entre $\vec{P}$ et $\vec{E}$. !!

I.3. modèle de l'e^- élastiquement lié

- hypothèses :

- prend en compte que la polarisation électronique.
- pas de charge libres → diélectrique parfait → isolant
- atome volume meso, modelisé par un ion ⊕ et un e^- fortement lié.
- ref. lié au noyau de l'atome, galiléen.
- pas interaction entre e^-
- milieu peu dense.

forces : $\vec{f} = -k\vec{r}$ rappel élastique, de l'e^- à son noyau (car oscillation harmonique autour de la position d'équilibre, on peut tjs approx au voisinage de la pos. d'éq.

$\vec{f} = -\dfrac{m\vec{v}}{\tau}$ force frottement.

$\vec{f} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

$$\frac{|\vec{v} \wedge \vec{B}|}{\vec{E}} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c}$$ e^- non relativiste $\Rightarrow \dfrac{|v \wedge B|}{|E|} \ll 1$.

PFD : $$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} - \frac{m\vec{v}}{\tau} - e\vec{E}$$ si on pose

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ pulsation propre.

et $Q = \omega_0\tau$ facteur de qualité

Atomes identiques, champ uniforme sur un volume mesoscopique,

$$\vec{P} = \underbrace{\frac{\sum \vec{p}_i}{V}}_{\text{vol.}} = \frac{N\vec{p}}{V} = nq\vec{r} = -ne\vec{r} \quad \text{où } n = \frac{N}{V}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{P}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{P}} + \omega_0^2\vec{P} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$$

On suppose qu'on envoie une onde plane $\vec{E} = \vec{E_0}\exp(i\omega t)$

$\Rightarrow \vec{\underline{P}} = \vec{P_0}\exp(i(\omega t + \varphi))$.

$$\Rightarrow -\omega^2\underline{\vec{P}} + i\frac{\omega_0\omega}{Q}\underline{P} + \omega_0^2\underline{P} = \frac{ne^2}{m}\underline{\vec{E}}$$

$$\omega_0^2\underline{\vec{P}}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{i\omega}{\omega_0 Q}\right) = \frac{ne^2}{m}\underline{\vec{E}}$$

On obtient:

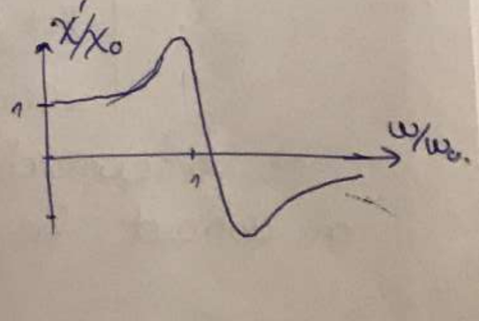
$$\boxed{\underline{\vec{P}} = \frac{\frac{ne^2}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{i\omega}{\omega_0 Q}}\vec{E}}$$

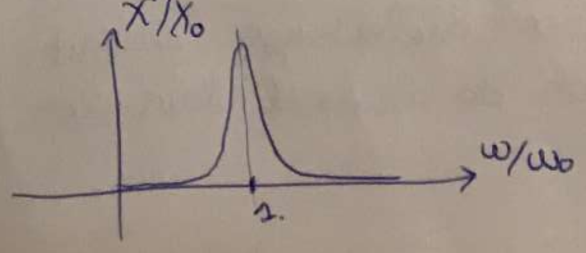
On définit la susceptibilité diélectrique: $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \chi_e(\omega)\underline{\vec{E}}$

$$\text{où } \chi_e(\omega) = \frac{\chi_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{i\omega}{\omega_0 Q}} \quad \text{et } \chi_0 = \frac{ne^2}{m\omega_0^2}$$

χ_e représente la réponse du milieu à l'application d'un champ $\vec{E}$. Complexe, dépend de ω.

$$\chi_e = \chi' + i\chi''$$





La partie réelle décroit beaucoup plus lentement que la partie imaginaire. Il y a résonance à $\omega = \omega_0$.

- si $\omega \ll \omega_0$ $\quad \chi_e(\omega) = \chi_0 \in \mathbb{R}$.
- si $\omega = \omega_0$ $\quad \chi_e(\omega) = -i\chi_0 Q$. $\vec{P}, \vec{E}$ en quadrature.
- si $\omega \gg \omega_0$ $\quad \chi_e(\omega) = -\chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ $\quad \vec{P}, \vec{E}$ en opposition.
- si $\omega \to \infty$ $\quad \chi_e(\omega) \to 0$. transparence à HF.

II. Propagation des ondes EM dans les milieux diélectriques.

II.1. Équation de Maxwell.

M.G : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_L + \rho_P}{\varepsilon_0} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_L}{\varepsilon_0} - \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_L}$$

On introduit le vecteur déplacement $\vec{D}$.

↳ unités de D. $C.m^{-2}$.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho_L}$$

M.A : $\overrightarrow{rot}\, \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_L + \vec{j}_P) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$= \mu_0\left(\vec{j}_L + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{j}_L + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Si on considère un diélectrique parfait : $\rho_L = 0$ et $\vec{j}_L = 0$, on obtient les éqts de Maxwell dans les diélectriques :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\ \vec{\operatorname{Rot}}\, E = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \\ \vec{\operatorname{Rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{cases}$$

8 égts → 9 inconnues, pour fermer le système on a besoin de rélation de fermeture:

$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi_e} \underline{\vec{E}}$ vraie dans milieu linéaire isotrope

$\underline{\vec{D}} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{\vec{E}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{\vec{E}}$ où $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$

permittivité relative du milieu.

Ég. de propagation dans milieu linéaire isotrope homogène?

II.2. Ég. de propagation.

$\underline{\vec{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{\vec{E}}$ $\quad \operatorname{div} \underline{\vec{D}} = 0$ donc $\operatorname{div} \vec{E} = 0$.

et $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

$$\Rightarrow \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{Rot}}\, \underline{\vec{E}}) = \vec{\operatorname{grad}}(\underbrace{\cancel{\operatorname{div} \vec{E}}}_{=0}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\operatorname{Rot}}\, \vec{B}$$

$$\Rightarrow + \Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\operatorname{Rot}}\, \vec{B}$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E})$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$ x \epsilon_r

où $c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

Même chose avec $\vec{B}$. Éq. de d'Alembert avec ε_r.

Ce n'est pas l'éq de d'Alembert car le coeff \epsilon_r est à priori complexe !

Chercher solution sous la forme $\vec{E} = \vec{E_0} \exp(i(\omega t - kx))$

$$(-ik)^2 - \frac{\varepsilon_r}{c^2}(i\omega)^2 = 0 \Rightarrow -k^2 + \frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2 = 0.$$

$$\boxed{k^2 = \frac{\varepsilon_r(\omega)}{c^2}\omega^2}$$ propagation dispersive. car ε_r dépend de ω!!

$$\boxed{k^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2}}$$ où $\boxed{n^2 = \varepsilon_r}$ indice du milieu.

II.3 Dispersion et absorption.

$\underline{k} = k'(\omega) - i k''(\omega)$ k complexe car ε_r complexe.

$$\vec{E} = \vec{E_0} \underbrace{\exp^{-k''x}}_{\text{atténuation}} \underbrace{\exp(i(\omega t - k'x))}_{\text{propagation}}$$

où $\begin{cases} \underline{n} = n' - i n'' \\ \underline{\varepsilon_r} = \varepsilon_r' - i\varepsilon_r'' \end{cases}$ $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon_r}$ $n'^2 - n''^2 = \varepsilon_r'$

$2n' n'' = \varepsilon_r''$

$$\underbrace{k' = n'\frac{\omega}{c} \text{ et } \boxed{k'' = n''\frac{\omega}{c}}}$$ positifs

$n'' = \sqrt{\varepsilon_r''}$

→ L'indice n' est l'indice de réfraction, que nous utilisons en optique. Il permet d'exprimer la vitesse de phase d'une onde plane.

$v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'} = \dfrac{c}{n'}$ n' caractérise la dispersion du milieu (si n' dépend bien de ω).

→ L'indice n'' caractérise l'absorption de l'onde par le milieu. C'est l'indice d'extinction.

Images.

Application : Formule de Cauchy pour l'indice d'un verre.

Dans le domaine visible, $\underline{\varepsilon_r} \simeq \varepsilon_r'$ car la zone d'absorption dans ce domaine est très faible. (graphes d'avant).

On peut alors écrire : $\underline{\varepsilon_r} \simeq \varepsilon_r' \gg \varepsilon_r''$ L'indice du milieu s'identifie à son indice de réfraction :

$$\underline{n} \simeq n' \gg n''$$

En considérant un milieu ne comportant qu'un seul type de charges liées, on peut utiliser la forme approchée :

$$\underline{\varepsilon_r} = \varepsilon_r = 1 + \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{avec } \varepsilon_r > 0.$$

en négligeant le terme d'amortissement ($Q \to \infty$)

→ car si on développe $\underline{\chi_e} = \dfrac{\chi_0}{1+j\dots}$ $\begin{cases} \chi' = \dots \\ \chi'' = \dots \end{cases}$

montrer que l'indice du verre obéit la loi de Cauchy :

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}.$$

En supposant $\omega \ll \omega_0$

$$n^2 = \varepsilon_r \approx 1 + \chi_0\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right)$$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$$

donc $n^2 = (1 + \chi_0) + \left(\frac{2\pi c}{\omega_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{2\pi c}{\omega_0}\right)^4 \frac{1}{\lambda^4}$.