LP.26. Propagation avec dispersion

La dispersion peut être due :

- propriétés du milieu
- cond. limites (guidage).

Atténuation : onde atténuée lorsque son amplitude, et donc sa densité locale d'énergie, décroissent au cours de la propagation

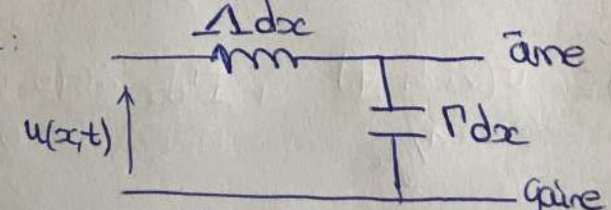
Absorbance : Une onde est absorbée lorsqu'elle cède de l'énergie au milieu dans lequel elle se propage.

Atténuation sans absorption : onde sphérique.

I. Propagation dans un milieu dispersif : câble coaxial

I.1. Modélisation

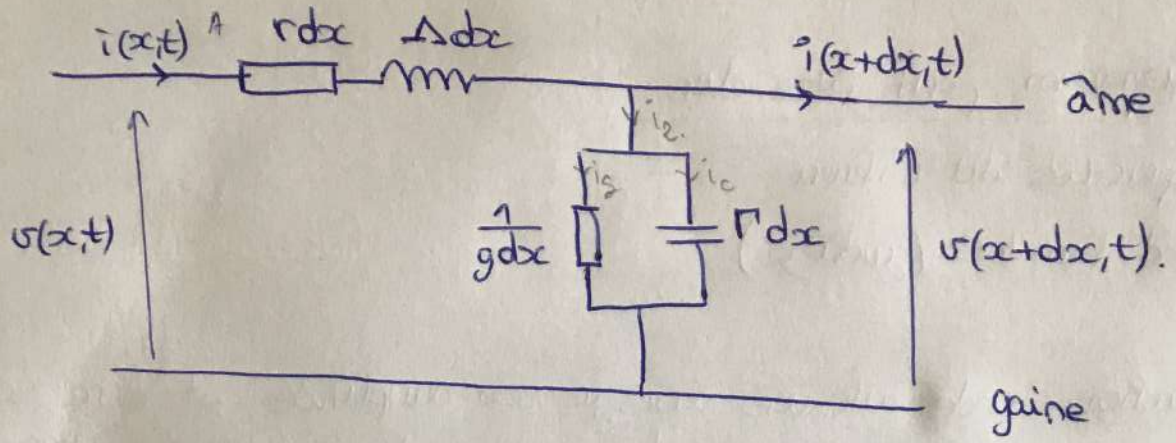
Rappelle :



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$

I.2. Équation des télégraphistes.



<u>Loi des mailles:</u>

$$v(x,t) = r\cdot dx\cdot i(x,t) + u_L + v(x+dx,t)$$

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\cdot \cancel{dx} = \cancel{dx}\cdot\left(r\cdot i(x,t) + \Lambda\frac{di}{dt}(x,t)\right) \qquad u_L = \underset{\Lambda\,dx}{\underset{\parallel}{L}}\,\frac{di(dx,t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -\Lambda\frac{\partial i}{\partial t} - r i.} \quad (1)$$

<u>Loi des noeuds:</u> $i(x,t) = i(x+dx,t) + i_g + i_c$

$$i(x,t) - i(x+dx,t) = \frac{v(x+dx,t)}{1/g\,dx} + \Gamma\,dx\,\frac{\partial v(x+dx,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}\cdot\cancel{dx} = \cancel{dx}\left(g\,v(x,t) + \Gamma\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -g v - \Gamma\frac{\partial v}{\partial t}} \quad (2).$$

$\frac{\partial}{\partial x}(1)$ $\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right) - r\frac{\partial i}{\partial x}$

On remplace $\frac{\partial i}{\partial x}$ en utilisant (2)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t}\left[-gv - \Gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right] - r\cdot\left(-gv - \Gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t}\left(\Lambda g + r\Gamma\right) + rgv}$$

où $c^2 = \frac{1}{\Lambda\Gamma}$

I.3. Relation de dispersion.

... $v(x,t) = V_0 \cdot \exp i(kx - \omega t)$

$\longrightarrow \quad -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = -i\omega\left(\Lambda g + \Gamma r\right) + rg$

$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega(\Lambda g + \Gamma r) - rg.}$ relation de dispersion.

k : nb complexe à partie imaginaire non nulle!
L'onde cherchée n'est donc PAS une OPPH, puisqu'elle n'est pas progressive. C'est une onde plane pseudoprogressive harmonique.

$k = k' + ik''$

Donc, $\underline{v(x,t) = V_0 \exp i\phi . \exp(-k''x) \exp i(k'x - \omega t)}$.

En réel : $v(x,t) = V_0 \cdot \underbrace{\exp(-k''x)}_{\text{atténuation}} \underbrace{\cos(k'x - \omega t + \phi)}_{\text{propagation d'OPPH}}$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)}} \quad ; \quad \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk'(\omega)}}$$

Atténuation de l'onde $\boxed{\delta = \frac{1}{k''}}$

longueur caractéristique

On avait : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega(\Lambda g + \Gamma r) - rg$

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - rg + i\omega(\Lambda g + \Gamma r)}$$

Propagation dispersive car $k'(\omega)$ donc v_φ diff. en fonction de ω.

~~Enveloppe~~ Transition Hugo.

Propagation atténuée mais pas dispersive :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega(\Lambda g + \Gamma r) - rg$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + i\frac{c^2}{\omega}(\Lambda g + \Gamma r) - rg\frac{c^2}{\omega^2}\right]$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + i\left(\frac{r}{\Lambda\omega} + \frac{g}{\omega\Gamma}\right) - \frac{rg}{\Lambda\Gamma\omega^2}\right]$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{g}{\omega\Gamma}\right)\left(1 + i\frac{r}{\Lambda\omega}\right)$$

on cherche une solution sans dispersion:

$$v(x,t) = f(x-ct)\cdot e^{-x/\delta}$$

... Condition de Heaviside: $\dfrac{g}{\Gamma} = \dfrac{r}{\Lambda}$

Alors une nouvelle factorisation apparaît de l'éq. de dispersion:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{r}{\Lambda\omega}\right)^2 \quad \text{donc} \quad k = \pm\frac{\omega}{c}\left(1+i\frac{r}{\Lambda\omega}\right)$$

$$k = k' + ik'' = \pm \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k'} \pm i\underbrace{\frac{r.\omega}{\Lambda\omega c}}_{k''}$$ pas de dispersion !

où $k' = \dfrac{\omega}{c}$ donc $\underline{v_\varphi = c}$.

$$\delta = \frac{1}{k''} = \frac{\Lambda\omega}{r}\frac{c}{\omega} = \frac{\Lambda c}{r}$$ ne dépend pas de ω non plus !

Signal atténué mais pas déformé. → des cables coaxiaux réels sont souvent loin de vérifier la condition de Heaviside

A.N: ⇒ pag. 36 Et. Thib.

II. Propagation d'un paquet d'ondes.

II.1. Paquet d'ondes : définition.

Fourier : signal quelconque → somme des sinusoïdes.

$$s(x,t) = \iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}} \tilde{s}(k,\omega) e^{-i(\omega t - kx)} \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Etienne Thibierge pag 17.

$$s(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{s}(k,\omega) e^{-i(\omega t - kx)} \delta(k - k(\omega)) \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

variable de Fourier

rel. de dispersion.

Intégration sur k

$$s(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{s}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega) x)} . \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Un paquet d'ondes est une combinaison linéaire continue d'ondes planes progressives harmoniques dont les fréquences spatiales k et temporelle ω sont reliées par la relation de dispersion. Il a un <u>spectre</u> <u>continu</u>.

Paquet d'onde → interférence nb infini d'OPPH cohérentes chaque OPPH contribue au paquet d'onde par l'amplitude $\tilde{s}(\omega)$.

2.2 - Propagation en présence de dispersion.

On considère que l'atténuation étudiée est suffisamment faible pour être négligée. k réel dépendant de ω. par la relation de dispersion.

Paquet d'onde se propageant dans 1 direction bien définie, c'est à dire tel que $\tilde{S}(\omega)$ ne prenne des valeurs non-nulles que dans l'intervalle $[\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$ avec $\omega_0 > 0$ et $\Delta\omega \ll \omega_0$. Relation de dispersion sous forme de développement limité autour de $\omega = \omega_0$.

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} (\omega^2 - \omega_0)^2 + \theta \ldots$$

→ Dispersion au premier ordre

$$s(x,t) = \int \tilde{S}(\omega) . \exp\left(-i \left[\omega t + k(\omega_0)x - \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)x\right]\right) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

$$= \int \tilde{S}(\omega) . \exp\left(-i \left[\omega_0 t + (\omega - \omega_0)t - k(\omega_0)x - \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)x\right]\right) \frac{d\omega}{2\pi}$$

$\tilde{S}(\omega)$ complexe : $\tilde{S}(\omega) = |\tilde{S}(\omega)| \exp^{i\phi(\omega)}$.

développ limité de sa phase:

$$\tilde{S}(\omega) = |\tilde{S}(\omega)| e^{i\phi(\omega)} e^{i\phi'(\omega_0)(\omega - \omega_0)}$$

Etienne Thibierge! page 18-19-20

Donc :

$$s(x,t) = e^{i\phi(\omega_0)} \cdot e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{ik(\omega_0)x} \int |\tilde{s}(\omega)| e^{i\phi'(\omega_0)(\omega-\omega_0)} \times e^{-i\left((\omega-\omega_0)t - \frac{dk}{d\omega}\big|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)x\right)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

changeant de variable :

$$\delta\omega = \omega - \omega_0 .$$

$$s(x,t) = e^{i(\phi(\omega_0) + k(\omega_0)x - \omega_0 t)} \times \underbrace{\int \underbrace{|\tilde{s}(\omega_0+\delta\omega)| e^{i\phi'(\omega_0)\cdot\delta\omega}}_{\tilde{s}_e(\delta\omega)} \cdot e^{i\left[\delta\omega\left[t - \frac{dk}{d\omega}\big|_{\omega_0} x\right]\right]} \frac{d\delta\omega}{2\pi}}_{s_e\left(t - \frac{dk}{d\omega}\big|_{\omega_0} x\right)}$$

En regardant l'intégrale on voit que l'on a maintenant la TF de $\tilde{s}_e(\delta\omega)$ prise en $t - \frac{dk}{d\omega} x$

Donc
$$\boxed{s(x,t) = \overbrace{s_e\left(t - \frac{dk}{d\omega}\Big|_{\omega_0} x\right)}^{\text{enveloppe}} \underbrace{e^{i(\phi(\omega_0) + k(\omega_0)x - \omega_0 t)}}_{\text{porteuse}}}$$

Conclusion : Un paquet d'ondes est constitué du produit d'une onde porteuse modulée par une enveloppe s_e. L'onde porteuse se propage à la vitesse de phase :
$$v_\varphi = \frac{\omega(k_0)}{k_0}.$$

vitesse de groupe :
$$v_g = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0}.$$

si éq. de d'Alembert : $v_g = v_\varphi$. Pas notre cas !!

$v_\varphi \neq v_g$ donc glissement de la porteuse à l'intérieur de l'enveloppe.

Dispersion normale : $v_\varphi > v_g$.

Pas de déformation !

Dispersion au premier ordre → glissement de la porteuse dans l'enveloppe → glissement de phase. Forme de l'enveloppe conservée au cours de la propagation, le paquet d'ondes sans étalement ni déformation.

→ Dispersion au deuxième ordre.

Hugo → qualitatif

III. Propagation dans un plasma : ionosphère.

- - -

relation de dispersion $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$

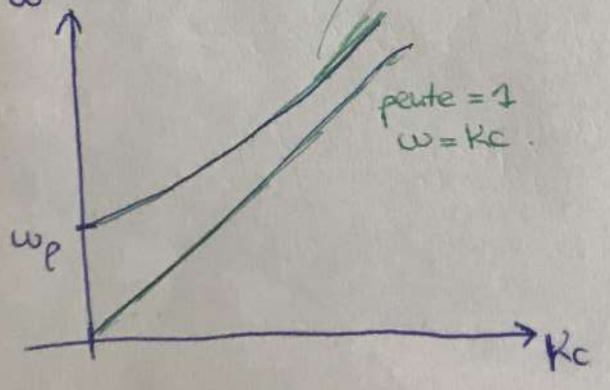
si $\omega > \omega_p$: propagation.

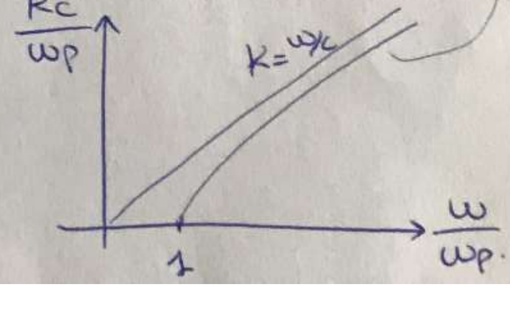
si $\omega < \omega_p$: k imag. pur $\Rightarrow$ pas de propagation.

onde évanescente

(elle est réfléchie à l'interface)

→ sur de l'atténuation.





On étudie la dispersion : $\omega > \omega_p$.

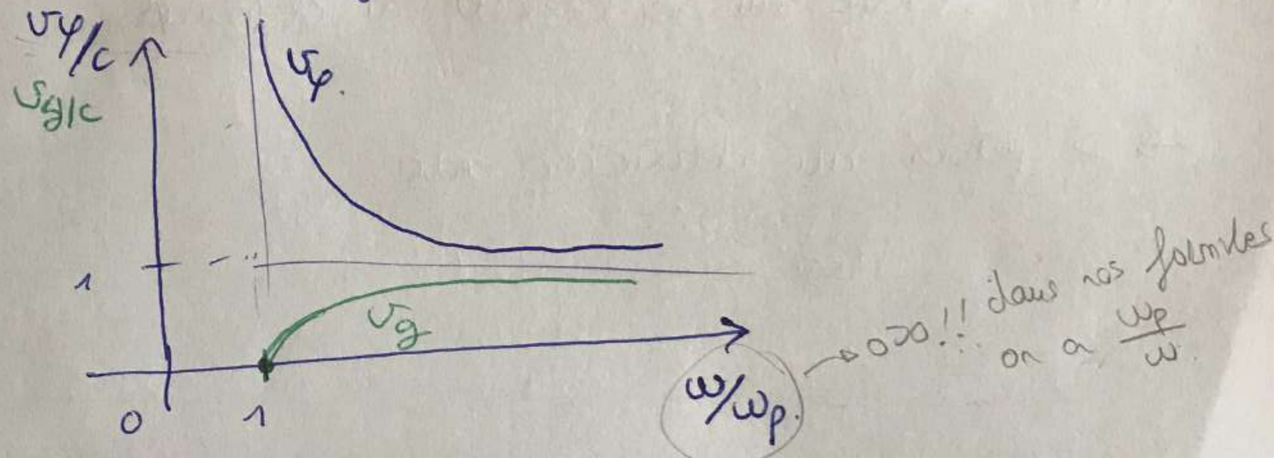
$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}}$$

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk'} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

On remarque : $v_\varphi \cdot v_g = c^2$

$v_\varphi > c$ $\qquad$ $v_g < v_\varphi \Rightarrow$ dispersion normale

$v_g < c$.



v_g : quand $\omega = \omega_p \rightarrow \frac{v_g}{c} = 0$ $\qquad$ quand $\frac{\omega}{\omega_p} \rightarrow \infty$.

$\frac{v_g}{c} \rightarrow 1$.