LP.41. Effet tunnel

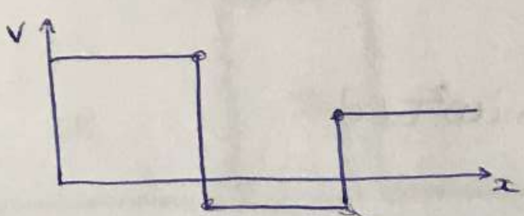
* Introduction. → manip → Demander Mathevet.

Animation (simulation) univ Lemans (divers, MQ, barrière pot). Expliqué par Benoît. vidéo..

1. modélisation du problème

1.1. Barrière potentiel à 1D.

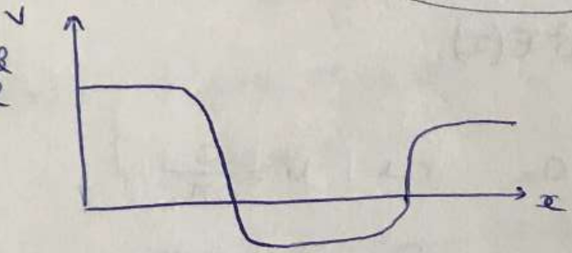
À savoir : modélisation du potentiel :



→ variation brusque de V.

on peut faire cette modélisation que lorsque les intervalles sur lesquels se fait cette variation sont très petits devant toutes les longueurs intervenant dans le problème. (en particulier la longueur d'onde associée à la partic)

potentiel réel



Cette approx cesserait par exemple d'être valable pour une particule d'énergie très grande, dont la longueur d'onde serait très courte.

1.2 Analogie avec la physique classique.

a) Analogie avec méca classique.

b) Analogie avec l'optique.

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\right]\varphi(x) = 0. \quad \text{Éq. de schrödinger.} \quad (1)$$

En optique (ou Em).

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E(x)\cdot e^{-i\omega t}\,\vec{u}$$ vecteur unitaire ⊥ à Ox.

Éq. de d'Alembert.

$$v^2\,\Delta E = \frac{d^2E}{dt^2} = -\omega^2 E(x).$$

vitesse

$$v^2 \frac{d^2}{dx^2} E(x) = -\omega^2 E(x).$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2}\right] E(x) = 0. \quad \text{où} \quad v = \frac{c}{n}.$$

donc : $$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2 \cdot n^2}{c^2}\right] E(x) = 0 \quad (2)$$

Éqts (1) et (2) deviennent identiques si on pose :

$$\frac{2m}{\hbar^2}(E-V) = \frac{\omega^2 \cdot n^2}{c^2}$$

discontinuité de V → discontinuité de n.

$$n(\omega) = \frac{1}{\hbar\Omega}\sqrt{2mc^2(E-V)}$$

si $E > V$ → $n(\omega) > 0$. Indice n réel. Onde de la forme e^{ikx}

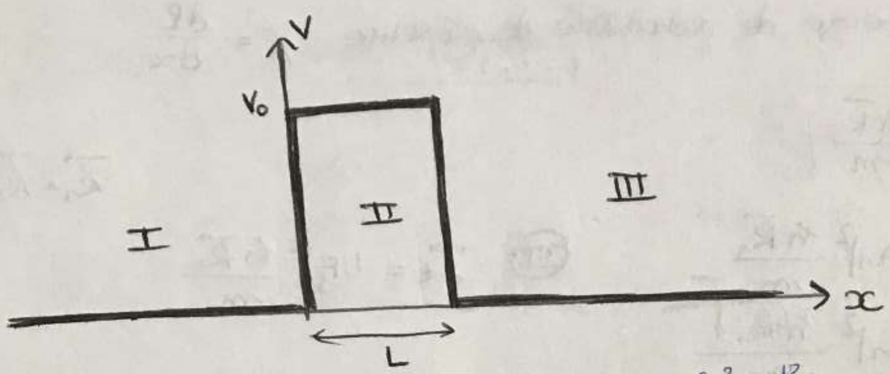
si $V > E$ → $n^2(\omega) < 0$. Indice n imag. Onde évanescente $e^{-\rho x}$.

En méca Q : cela se traduit par probabilité d'être réfléchie ou transmis si la barrière de pot n'est pas trop grande.

... Effet tunnel.

Expliquer mieux. (pag 29-30 Cohen).

1.3. Mise en équation



$V(x)$ $\begin{cases} 0 \text{ pour I et III} \\ V_0 \text{ pour II} \end{cases}$ $\begin{array}{l} \rightarrow -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} - E\varphi = 0. \\ \rightarrow -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + (V_0 - E)\varphi = 0 \end{array}$

$E < V_0$.

$k = \sqrt{\dfrac{2m \cdot E}{\hbar^2}}$ $\boxed{q = \sqrt{\dfrac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}}$

Solutions :

(I) : $\varphi_I(x) = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx)$.

(II) : $\varphi_{II}(x) = C\exp(qx) + D\exp(-qx)$
ou $A_2 \operatorname{ch}(qx) + B_2 \operatorname{sh}(qx)$

(III) $\varphi_{III}(x) = A_3 \exp(ikx) + \underbrace{\cancel{B_3}}_{=0.} \exp(-ikx)$.

continuité : $\varphi_I(0) = \varphi_{II}(0)$ $\varphi_I'(0) = \varphi_{II}'(0)$

$\varphi_{II}(L) = \varphi_{III}(L)$ $\varphi_{II}'(L) = \varphi_{III}'(L)$

Question : × Q continuité de la dérivée ?

1.4. Probabilité de transmission

→ part. libre sans intéraction ou sans interaction.

$$dP = |\Psi(x,t)|^2 \cdot dx = v_g \cdot |\Psi(x,t)|^2 \cdot dt = \underbrace{\frac{\hbar k}{m} |\Psi(x,t)|^2}_{\vec{J}(x,t)} \cdot dt.$$

↑ analogie EM : $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$

Densité linéique de probabilité de présence : $\rho = \frac{dP}{dx}$

$$\boxed{\vec{J} = |\Psi|^2 \cdot \frac{\hbar \vec{k}}{m}}$$

$\vec{k_1} = \vec{k_3}$

(I) $\vec{J_i} = |A_1|^2 \cdot \frac{\hbar \vec{k_1}}{m}$ (III) $\vec{J_t} = |A_3|^2 \frac{\hbar \vec{k_3}}{m}$

$\vec{J_r} = |B_1|^2 \cdot \frac{\hbar(\vec{k_1})}{m}$

Le coefficient de transmission est : $\boxed{T = \left|\frac{\vec{J_t}}{\vec{J_i}}\right| = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2}$

et $\boxed{R = \frac{|\vec{J_r}|}{|\vec{J_i}|} = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2}$ où $R + T = 1$.

si on résolve le système de 4 éqt. possé par les cond. au limites (continuité). On laisse $A_3 = f(A_1)$
5 inconnues, 4 éqts.

On trouve :
$$\boxed{T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} sh^2(qL)}}$$

- si $qL \gg 1$ alors $sh^2(qL) \simeq \left(\frac{e^{qL}}{2}\right)^2$ car $sh(qL) = \frac{e^{qL} - e^{-qL}}{2}$.

$$\boxed{T \simeq \frac{4E(V_0-E)}{V_0^2} \cdot \frac{4}{e^{2qL}}} = \underbrace{\frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}}_{= T_0} e^{-2qL} = T_0 \cdot e^{-2qL}$$

$\hookrightarrow T_0 \cdot e^{-\frac{2L}{\delta}}$

d'où $\boxed{\ln T = \ln T_0 - 2qL}$

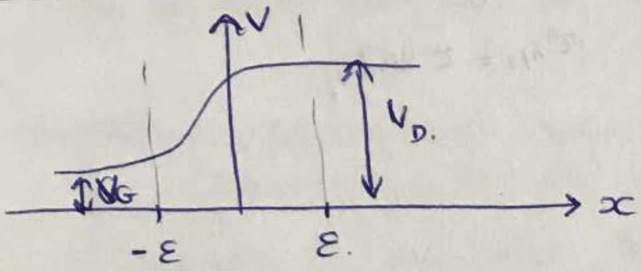
$qL \ll 1$. $\frac{L}{\delta} \to \delta = \frac{1}{q}$ où $\boxed{\delta = \frac{1}{q}}$

~~grandeur~~ prof. de pénétration

- si $qL \ll 1$ alors $sh^2(qL) \approx (qL)^2$.

$$T = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}(qL)^2} \approx 1 - \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}(qL)^2$$

Continuité de la fonction d'onde :



$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + (V-E)\Psi(x) = 0}_{(1).}$$

On intègre (1) entre $x=-\varepsilon$ et $x=+\varepsilon$.

$$\Psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\Psi(x).$$

$$\Psi'(\varepsilon) - \Psi'(-\varepsilon) = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(V(x)-E)\Psi(x)\,dx.$$

sur lequel V varie entre V_0 et V_G.

lorsque 2ε tend vers 0, l'intégrale tend vers 0, ce qui signifie que la dérivée Ψ' de la fonction d'onde est donc continue ainsi bien que la fonction d'onde elle-même.

Continuité de la dérivée de $\Psi(x)$ que quand la barrière de potentiel est finie.

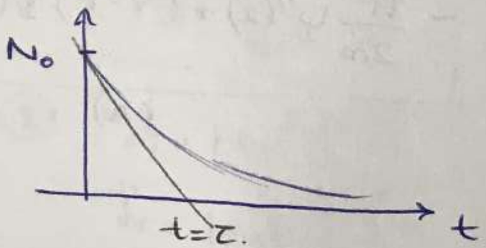
* Radioactivité α:

$$N(t) = N(0)\cdot e^{-\lambda t}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{-N}{\tau} \rightarrow \text{où } \lambda = \frac{1}{\tau}$$

$$N(t) = \frac{N_0}{2} \rightarrow e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{t}{\tau} = -\ln 2$$

$$\tau_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$$



Correction leçon :

- message leçon ?
  c'est un phénomène de nature ondulatoire

  optique : ondes évanescentes. Dessin.

  réflexion en termes de rayons : reflexion.
  en termes d'ondes : onde évanescente

  Il se trouve que la M.Q. adopte une description ondulatoire.

INTRO : description optique rayons lumineux.
description ondulatoire : ondes évanesc.
L'apport de la M.Q. descript. ondulatoire
Effet tunnel. (applications, permet d'expliquer la radioactivité).

- Analogie
  a) méca classique. Faire dessins.
  faire bien la différence entre V_0 et E_p !

- mise en équation.
  messages : 6 coefficients apparaissent
  5 coeff.

  4 conditions avec cond. de passage.
  ↳ Problème indeterminé ? Important.

  ×Q. continuité : eq. diff. Sch. 2ème ordre. donc fonction est continue et sa dérivée 1ère aussi.
  → valable que si le potentiel n'a pas de divergence.
  Dans ce cas le potentiel a une hauteur finie.

très important

(voir demo cours). intégrale de chaque côté finie.

- 5 coeff, 4 égts.

si 5 egts → cas pour les états liés.

→ cas cas de diffusion. ces états ne sont pas normalisables

On regarde des combinaisons.

ce qui a du sens physique c'est le rapport des amplitudes, à ce moment là il n'y a pas d'indétermination.

Il faut parler que phys. paquet d'ondes...

Dire qu'on regarde 1 phénomène de diffusion et pas un état lié.

- Dans quelle mesure la barrière carée est pertinente?

~~pour~~ variation spatiale de V, doit être petite p/r à la $\lambda_{\text{de broglie}}$ de la particule.

- Parler de l'infl. de la masse (OdG fait).

Dire sensibilité exponentielle (ce qui fait un senseur pour le microsc. à effet tunnel)

- Radioactivité α:

modèle Gamow.

part α: atome d'hélium.

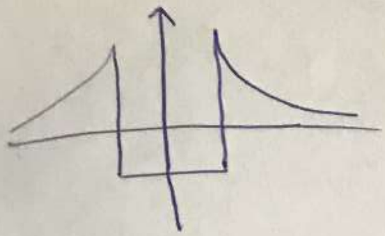
→ consiste à

noyau se déplace dans le pot. créé par les autres particules.

⚠ IMPORTANT

Faire: rajouter calcul nb de particules pouvant passer la barrière en f(T). et du nb de désintégration.

lien entre τ et T il faut un temps. C'est quoi ce temps?



le temps c'est le temps d'aller retour dans la boîte.

- microscope effet tunnel.

Comment on fait pour déduire les diff. altitudes, ça marche comment ?
On utilise quoi en pratique pour remonter à l'altitude ?
On fait un asservissement. On garde le courant de.
on baisse la pointe en conséquence.

- Sensibilité de l'appareil ? c'est la sensibilité exponentielle qui donne beaucoup de précision. (sens verticale).
sens dans le plan de l'objet (horizontale). Il faut que la pointe soit très pointue ?

Dire :
- radioactivité : sensib. exp. fait que la radioact. varie dans 10 odG ou un truc comme ça.
Loi physique qui marche sur beaucoup OdG. L'autre loi qui marche c'est la loi d'ohm.

Dans le livre :
→ Dalibard : relié a la notion d'actio vs $\hbar$. S
on pourrait en parler. Petit tableau avec OdG.

- mettre prix Nobels.

~~Effet~~ microscope effet tunnel :
- Il faut e^- puisse passer. Il faut des conducteurs.
si pas conducteurs ? On pourrait métaliser. si pas trop petit.