LP 24. Ondes progressives, ondes stationnaires

Pré-requis : | Équation de d'Alembert
| solutions de l'équation de d'Alembert
| - développement en série de Fourier.

- oscillateur harmonique équation

• Introduction.

Lorsqu'on jette une pierre dans de l'eau en calme, l'eau s'agite et on observe autour de la zone d'impact la formation de rides circulaires qui s'agrandissent au cours du temps. On dit qu'il se forme des ondes à la surface de l'eau : la perturbation créée par la pierre semble se propager.

Dans notre vie quotidienne, les ondes servent essentiellement à communiquer et à transmettre de l'information. Par exemple nous percevons l'expérience précédente (ondes sur la surface de l'eau) à travers l'ouïe et les yeux. Le bruit produit par la chute de la pierre dans l'eau se propage de la zone d'impact à nos oreilles sous forme de son (ondes acoustiques). Si nous voyons la pierre tomber et l'eau se déformer, c'est parce que la pierre et l'eau nous renvoient de la lumière qui est une onde EM vers nos yeux.

Lors de cette leçon, nous allons nous intéresser aux propriétés des ondes lorsqu'il y a propagation par les ondes progressives ou lorsqu'il n'y en a pas, comme c'est le cas des ondes stationnaires.

Ces derniers sont produites par exemple par les instruments de musique (comme la guitare) et on peut observer des phénomènes particuliers lorsqu'on excite une des extrémités d'une corde. C'est le cas du montage appelé la corde de Melde que je vous montre ici

Nous allons essayer de comprendre le phénomène des ondes progressives et stationnaires pour pouvoir expliquer ce que je viens de vous montrer.

Commençons notre étude à travers quelques exemples

. . .

* INTRODUCTION

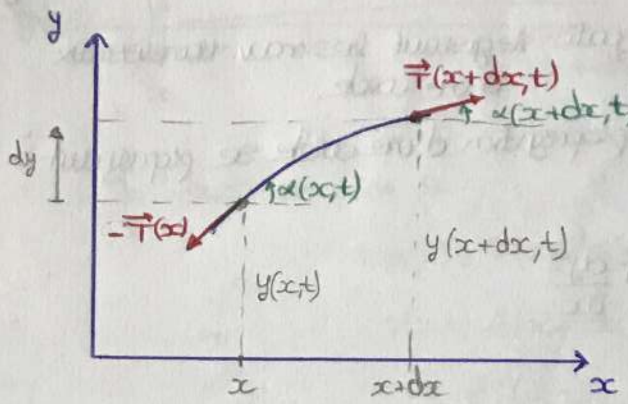
Nous avons une grande diversité de phénomènes ondulatoires, cette diversité rend la définition d'une onde délicate.
Ce que nous pouvons dire c'est qu'une onde correspond à la propagation d'une perturbation à travers un milieu.

Pour qu'il y ait propagation, il faut qu'il existe un couplage entre deux grandeurs qu'on a appellées excitation et réponse, ce sont les grandeurs couplées.
Le couplage se traduit par des échanges d'énergie entre ces deux grandeurs couplées.

Lors de cette leçon nous nous intéresserons aux ondes progressives mais aussi aux ondes stationnaires qui sont des ondes qui ne se propagent pas et qui sont produites par exemple par des instruments de musique (comme la guitare) et qu'on aisera de modéliser grâce à l'expérience de la corde de Melde.

1. Exemples de phénomènes ondulatoires

1.1. La corde vibrante



Considérons un élément de corde compris au repos entre les abscisses x et $x+dx$. Cet élément est supposé sans raideur et de masse linéique μ.
À l'équilibre la corde est à l'horizontale suivant (Ox).
La longueur dx est choisie petite devant la distance caractéristique de variation de $y(x,t)$.
Le poids est négligé.
On suppose que les mouvements transversaux sont petits, c'est à dire $\alpha \ll 1$.

$$\tan\alpha \simeq \alpha = \frac{y(x+dx,t) - y(x,t)}{dx} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \ll 1$$

Ppe fondamental de la dynamique sur l'élément de corde de masse $dm = \mu . dx$

$$dm . \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)\, \vec{e}_y = \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x)$$

$$\mu . \cancel{dx} . \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)\, \vec{e}_y = \frac{\partial \vec{T}(x,t)}{\partial x} . \cancel{dx}$$

On projete sur Ox : $\frac{\partial T . \cos\alpha}{\partial x} = 0$; $\cos\alpha \simeq 1 . \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0$.

$T(x,t) = T(t)$ La tension ne dépend pas de x.

On projete sur Oy : $\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T \sin\alpha}{\partial x} = T . \frac{\partial \sin\alpha}{\partial x} = T . \frac{\partial \alpha}{\partial x}$

$\alpha = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ donc $\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$

Ce qui donne : $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0.$ $\mu = kg.m^{-1}$
$T = kg.m.s^{-2}$
$\rightarrow \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ en $m.s^{-1}$.

On peut réécrire notre équation : $\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0.}$ où $\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$.

Équation regissant les mov. transversaux d'une corde.

Elle décrit le phénomène de propagation d'une onde se propageant à la vitesse c.

Si on pose $\begin{cases} F_y = -T\alpha = -T\frac{\partial y}{\partial x} \\ v_y = \frac{\partial y}{\partial t}. \end{cases}$

PFD : en Oy. $\mu.\cancel{dx}\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial F_y}{\partial x}.\cancel{dx} \rightarrow \boxed{\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial F_y}{\partial x}}$

Dérivée de F_y p/r au temps. $\boxed{\frac{\partial F_y}{\partial t} = -T\frac{\partial v_y}{\partial x}.}$

système d'équations couplées

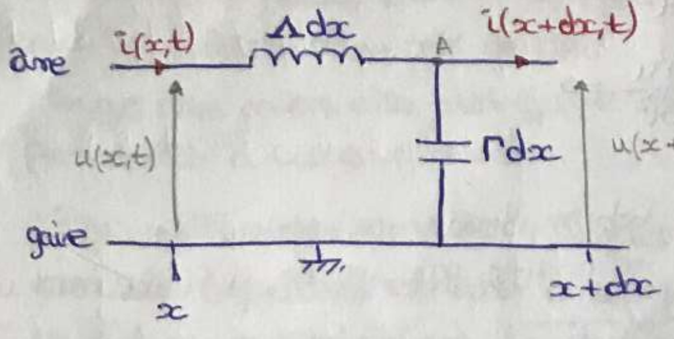
Une déformation de la corde entraîne l'apparition d'une force $F_y(x,t)$ qui peut elle-même entraîner une vitesse de déplacement, etc.

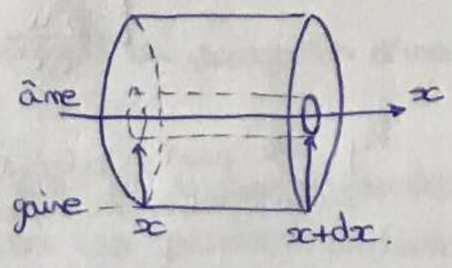
Nous avons obtenu une équation de propagation pour une corde. La question maintenant est qu'en est il pour une autre situation physique ? Nous allons étudier la propagation d'une onde électrique dans un cable coaxial.

1.2 Le câble coaxial

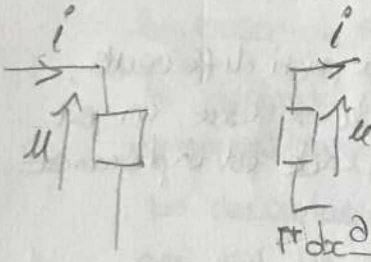
Un câble coaxial est composé de deux conducteurs cylindriques de même axe, l'âme et la gaine, séparés par un isolant. Une portion mésoscopique de câble de longueur δx se modélise par un circuit LC constitué :

- D'une bobine, d'inductance Λdx, qui modélise les phénomènes d'induction ayant lieu entre les deux conducteurs, parcourus par des courants variants dans le temps.
- D'un condensateur, de capacité Γdx, qui modélise les phénomènes capacitifs ayant lieu entre les deux conducteurs, chargés, se faisant face.





Loi de noeuds au point A :



$$i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \cdot \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t}$$

$$i(x,t) - i(x+dx,t) = \Gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \cancel{dx} = \Gamma \cancel{dx} \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t}$$

$$\Gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = \Gamma dx \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \underbrace{\Gamma dx^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t)}_{dx^2 \to \text{ négligé}}$$

donc $\boxed{\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -\Gamma \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}}$ ou $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{1}{\Gamma} \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x}}$

Loi des mailles : $u(x,t) = u(x+dx,t) + \Lambda dx \cdot \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}$

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \cancel{dx} = \Lambda \cancel{dx} \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}}$ ou $\boxed{\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{\Lambda} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)}$

En remplaçant u par F_y, i par v_y, Λ par μ et Γ^{-1} par T on retrouve les mêmes relations de couplage que pour la corde.

L'équation de propagation s'en déduit par élimination de v ou i dans le système d'équations couplées.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (2)$$

on dérive (1) p/r à x :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$

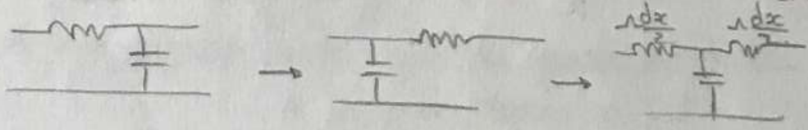
$$\text{(2)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}} \quad \text{où } c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$$

On obtient : $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \overbrace{\Lambda\Gamma}^{1/c^2} \dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \overbrace{\Lambda\Gamma}^{1/c^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Rq : La position relative de la bobine et du condensateur dans la modélisation du câble coax ne modifie pas les ég. diff. reliant v et i.

on aurait pu faire :



Nous venons de voir que pour deux phénomènes physiques à priori différents, nous trouvons les mêmes équations regissant l'évolution du système. On est alors en droit de se demander si la propagation d'une onde est un phénomène que l'on peut généraliser.

Intéressons nous à d'autres exemples et essayons de tirer des conclusions.

1.3. Bilan et généralité

	Corde	Câble coaxial	onde acoustique	onde EM
grandeur excitation "s_1"	F_y	u	p : surpression	$\vec{E}$
grandeur réponse "s_2"	v_y	i	v : vitesse	$\vec{H}$
inertie "b"	μ	Λ		μ_0
élasticité "a"	T	$\frac{1}{\Gamma}$		$\frac{1}{\varepsilon_0}$
célérité "c"	$\sqrt{\frac{T}{\mu}}$	$\frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$		$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

Équations couplées : $$\begin{cases} \dfrac{\partial s_1}{\partial t} = -a\dfrac{\partial s_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial s_2}{\partial t} = -\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial s_1}{\partial x} \end{cases}$$ ég. propagation $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s_2}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$ où $c^2 = \dfrac{a}{b}$

Voici un tableau récapitulatif de nos résultats, dans le cas d'une onde acoustique et EM, nous pourrions montrer que nous obtenons les mêmes équations.

Nous avons une grande diversité de phénomènes ondulatoires, cette diversité rend la définition d'une onde délicate.

Ce que nous pouvons dire c'est qu'une onde correspond à la propagation d'une perturbation à travers un milieu.

Pour qu'il y ait propagation, il faut qu'il existe un couplage entre deux grandeurs (appellées excitation et réponse), ce sont les grandeurs couplées.
Le couplage se traduit par des échanges d'énergie entre les grandeurs couplées.

En pratique, les variations temporelles d'une grandeur couplée entraînent les variations spatiales de l'autre, et réciproquement.
Le produit des grandeurs couplées est homogène à une puissance ou éventuellement à une puissance surfacique.
Le decouplage des équations couplées permet d'obtenir l'équation de propagation qui est la même pour les deux grandeurs couplées.
La propagation peut être à plusieurs dimensions, les grandeurs peuvent être scalaires ou vectorielles.
L'onde peut être longitudinale, c'est à dire que la perturbation est colinéaire à la direction de propagation (ondes acoust) ou transversale, quand la perturbation est orthogonale à la direction de propagation. (ondes Em)

Nous avons vu dans les exemples précédents que nous obtenons la même équation de propagation. Cette équation est appellée l'équation de d'Alembert et elle est linéaire. Nous allons maintenant chercher les solutions de cette équation.

2. Ondes progressives

2.1. Solution de l'équation de d'Alembert.

On veut trouver toutes les solutions de l'équation de d'Alembert à 1 dimension. Ondes $f(t-\frac{x}{c})$ et $g(t+\frac{x}{c})$ solutions.

changement de variable $\begin{cases} u = t - \frac{x}{c} \\ v = t + \frac{x}{c} \end{cases}$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c}. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 1$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c}. \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 1$

La différentielle de la fonction d'onde:

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_t \cdot dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_x dt = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)_u \cdot dv.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\right)$$

Éq. de d'Alembert: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$

prend la forme:

$$\frac{1}{c^2}\left(\cancel{\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}} - \frac{2\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}\right) - \frac{1}{c^2}\cdot\left(\cancel{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{c^2} 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0.}$$

→ Intégrons p/r à u:

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = G(v)$$

→ Intégrons p/r à v:

$$\psi(u,v) = g(v) + f(u)$$

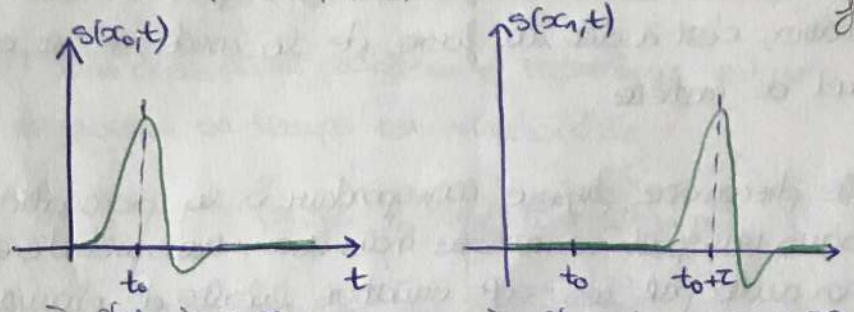
II. Ondes progressives

II.1 Définition

Nous voulons interpréter physiquement la solution de l'équation de d'Alembert. $f(t-\frac{x}{c})$ et $g(t-\frac{x}{c})$

↳ cas unidimensionnel !!

diapo !!



à l'abscisse x_0

à l'abscisse $x_1 > x_0$.

Les valeurs observées en x_0 au cours du temps sont observées aussi en x_1, mais avec un retard τ. On écrit :

$$s(x_1,t) = s(x_0, t-\tau)$$

La durée τ est celle qu'il faut à l'onde pour se propager de x_0 à x_1.
La vitesse de propagation étant c on a : $\tau = \frac{x_1 - x_0}{c}$

$$s(x_1,t) = s\left(x_0, t - \frac{x_1-x_0}{c}\right)$$

si on pose, $x_0 = 0$ et $x_1 = x$, on trouve :

$$s(x,t) = s\left(0, t-\frac{x}{c}\right)$$

Le membre de droite de cette équation est simplement une fonction d'une seule variable, $t-\frac{x}{c}$. Pour simplifier l'écriture on le note $f(t-\frac{x}{c})$.

Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox), dans le sens positif de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme suivante :

$$\boxed{s(x,t) = f\left(t-\frac{x}{c}\right)}$$

où f est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'un temps.

Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox), dans le sens négatif de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme suivante

$$\boxed{s(x,t) = g\left(t+\frac{x}{c}\right)}$$

Après le passage de l'onde, les points x_0 et x_1 retrouvent leur position d'origine, ils ne sont pas déplacés ; il y a donc transport d'information (puisque la perturbation, c'est à dire, la forme de la corde, se propage) mais pas transport de matière.

↳ Une onde est le phénomène physique correspondant à la propagation d'information, sans transport de matière mais avec transport d'énergie, d'un point à un autre par les seules variations locales de champs scalaires ou vectorielles fonctions du point M et de l'instant t.

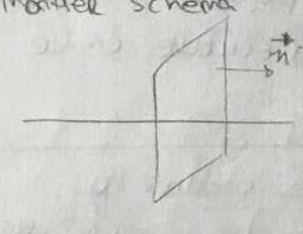
Ainsi, toute onde unidimens solution de l'équation de d'Alembert à une dimension, peut s'écrire sous la forme de deux ondes unidimensionnelles progressives se propageant à la vitesse c, l'une vers les x croissants et l'autre vers les x décroissants.

Nous pouvons aussi définir ce qu'est une onde plane.

Une onde est dite plane si ses surfaces d'onde (surface continue de l'espace dont tous les points sont dans le même état vibratoire) sont des plans parallèles, ces plans sont appelés plans d'onde.

diapo!!

montrer schéma



Ces plans sont associés à un vecteur normal $\vec{n}$ qui définit la direction de propagation, ainsi, dans un repère bien choisi, une onde plane est à une dimension cartésienne

On fait alors l'analogie avec le cas unidimensionnel, on obtient alors que toute onde plane solution de l'équation de d'Alembert à une dimension, peut s'écrire sous la forme de deux ondes planes progressives se propageant à la vitesse c, l'une vers les x croissants et l'autre vers les x décroissants.

Nous allons nous intéresser maintenant à un cas particulier des ondes planes progressives. Les ondes planes progressives harmoniques. Nous allons voir leur intérêt pour l'étude des phénomènes ondulatoires et leur limites.

II.2 Ondes planes progressives harmoniques (OPPH).

Une onde plane progressive harmonique est une onde plane dont la dépendance en temps est sinusoïdale.

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cdot \cos(kx - \omega t + \phi)$$

Cette onde possède une <u>double périodicité</u> dans le temps et dans l'espace.

On peut trouver ce qu'on appelle la <u>relation de dispersion</u> en injectant l'OPPH dans l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0.$$

$$-\cancel{\Psi_0}(k^2)\cancel{\cos(kx-\omega t+\phi)} - \frac{1}{c^2}(\omega^2 \cancel{\Psi_0})(-\cancel{\cos(kx-\omega t+\phi)}) = 0$$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Nous pouvons aussi définir la vitesse de phase qui est la vitesse de déplacement d'un signal harmonique.

$$\Psi(x_1,t_1) = \Psi(x_2,t_2) \quad \rightarrow \text{Car pas de dispersion}$$

$$\cancel{\Psi_0}\cdot\cos(kx_1 - \omega t_1 + \phi) = \cancel{\Psi_0}\cdot\cos(kx_2 - \omega t_2 + \phi)$$

$$kx_1 - \omega t_1 = kx_2 - \omega t_2.$$

$$\omega(t_2 - t_1) = k(x_2 - x_1)$$

$$\boxed{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k}}$$

Dans le cas de l'OPPH $\rightarrow$ $\boxed{v_\varphi = c}$ grâce à la relation de dispersion. Nous constatons que v_φ ne dépend pas de ω dans ce cas, ce qui veut dire que chaque onde progressive harmonique se propage à la même vitesse c. Il n'y a alors pas de dispersion.

Comme nous avons vu grâce au développement en série de Fourier, tout signal périodique $f(x,t)$ peut être représenté comme une somme de fonctions sinusoïdales monochromatiques, c'est à dire, une onde progressive peut être représentée comme une somme d'OPPH.

Autrement dit, la linéarité de l'équation de d'Alembert nous permet de chercher des solutions de la forme des OPPH puisque ces solutions donnent accès à n'importe quelle onde par combinaison linéaire.

Par contre, il faut savoir que les OPPH n'ont pas de sens physique car elles ont une extension spatiale et temporelle infini, donc une énergie infinie.