

## Diffusion de charge électrique à une dimension

par **Wladimir TOUTAIN**

Préparation à l'Agrégation interne de physique,  
Université Paris Diderot - Paris 7 - 75205 Paris Cedex 13

**Éric GUINEVEU**, **François-Xavier BALLY**

Préparation à l'Agrégation externe de physique  
École normale supérieure - 75005 Paris

et **Frédéric BERNARDOT**

Préparation à l'Agrégation interne de physique,  
Université Paris Diderot - Paris 7 - 75205 Paris Cedex 13

Préparation à l'Agrégation externe de physique  
École normale supérieure - 75005 Paris

[frederic.bernardot@insp.jussieu.fr](mailto:frederic.bernardot@insp.jussieu.fr)

### RÉSUMÉ

*Cet article présente un système électrique simple : une ligne de transmission dissipative faite de capacités et de résistances discrètes, qui permet l'étude de la diffusion de charge électrique à une dimension. On étudie d'abord ce système en régime continu, puis en régime transitoire après une excitation en échelon, ensuite en régime sinusoïdal permanent, et enfin en excitation impulsionnelle. Ces manipulations sont les homologues d'expériences thermiques que l'on peut faire avec une barre conductrice de la chaleur ; l'avantage ici, en pratique, est l'extrême facilité des expériences électriques.*

### INTRODUCTION

Les expériences simples portant sur la diffusion de particules sont plutôt rares. On peut mentionner la méthode de Stefan qui donne accès au coefficient de diffusion dans l'air de la vapeur d'un liquide volatil, en suivant au cours du temps la baisse du ménisque dans une colonne de liquide [1, 23]. Il est possible par ailleurs d'étudier la diffusion d'un gaz dans l'air par des mesures de la vitesse du son dans une enceinte contenant le mélange air-gaz, tandis que les molécules du gaz s'échappent à l'atmosphère par un orifice calibré [3]. Cependant, les expériences les plus aisément abordables concernent la diffusion d'un liquide dans un autre ; l'évolution du profil de concentration au voisinage de l'interface est étudiée soit par interférométrie holographique [13] soit par déviation d'un faisceau laser (méthode de Wiener) [5, 12, 15] soit par imagerie de photo-luminescence de l'un des deux liquides [25].

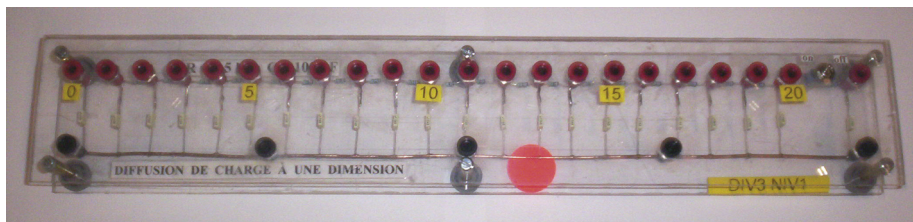
On propose ici un système simple permettant d'étudier la diffusion de charge élec-

trique à une dimension. Il est formé de capacités et de résistances discrètes. Les particules diffusantes sont des électrons – ou des manques d'électrons – portés par les armatures des condensateurs ; on a accès à leur nombre sur un condensateur donné par la mesure de la tension aux bornes de celui-ci. Le montage expérimental est décrit dans la partie 1 suivante. Ensuite, la partie 2 expose la théorie montrant que ce système ouvre bien la voie à l'étude d'un phénomène de diffusion particulière à une dimension. Enfin sont présentés les résultats expérimentaux, en régime stationnaire (partie 3), en régime d'échelon (partie 4), en régime sinusoïdal permanent (partie 5) et en régime impulsionnel (partie 6).

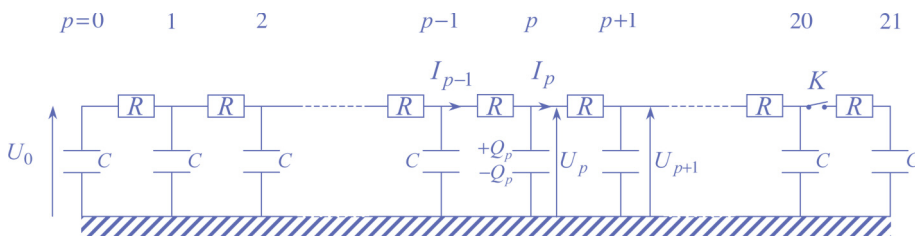
## 1. MONTAGE EXPÉRIMENTAL

Des capacités  $C = 100$  nF alignées parallèlement, numérotées  $p = 0, 1, 2, \dots, 20, 21$ , sont liées d'un côté à la masse et de l'autre côté à la capacité voisine *via* une résistance  $R = 1,5$  k $\Omega$  (cf. figure 1). Les composants employés sont ceux d'usage courant : les condensateurs sont à diélectrique en polyester, et les résistances sont à film métallique. Le montage expérimental est fabriqué entre deux plaques parallèles de plexiglas® d'épaisseur 5 mm, qui sont maintenues séparées de 25 mm par des entretoises. Les trous nécessaires sont faits avec une perceuse sur colonne, en utilisant des forets à bois. Les dimensions horizontales du montage sont  $8 \text{ cm} \times 46 \text{ cm}$ . Des pieds en caoutchouc sont placés sous la plaque du dessous.

Sur la plaque du dessus sont installées des prises bananes permettant les mesures



**Figure 1a :** Photographie du dispositif expérimental ; les cinq prises bananes du bas sont connectées au fil de masse qui court sur toute la longueur du montage, tandis que les vingt-deux du haut permettent de mesurer les tensions aux bornes des capacités.



**Figure 1b :** Schéma électrique du dispositif expérimental ( $C = 100$  nF et  $R = 1,5$  k $\Omega$ ).

des tensions  $U_p = Q_p/C$  aux bornes de chaque capacité  $p$  portant la charge électrique  $Q_p$ . Entre les positions  $p = 20$  et  $p = 21$  est placé un interrupteur  $K$  (en série avec une résistance  $R$ ). Un montage similaire, comportant de plus nombreux éléments, a été récemment proposé dans *Le Bup* [11].

## 2. ÉQUATION DE DIFFUSION DE LA CHARGE

Par conservation de la charge électrique, la charge  $Q_p$  sur la capacité n°  $p$  est reliée aux intensités électriques  $I_p$  (vers la capacité suivante) et  $I_{p-1}$  (en provenance de la précédente) par :

$$dQ_p/dt = I_{p-1} - I_p \quad (1)$$

(cf. figure 1b, page ci-contre). Par ailleurs, en utilisant la loi des mailles, l'intensité  $I_p$  du courant au travers de la résistance  $R$  liant la capacité  $p$  à la capacité  $p + 1$  vaut :

$$I_p = (U_p - U_{p+1})/R,$$

soit :

$$I_p = (Q_p - Q_{p+1})/\tau \quad (2)$$

où l'on a posé  $\tau = RC = 150 \mu s$ .

Cette valeur du temps caractéristique  $RC$  est issue de celles, nominales, des résistances  $R$  et capacités  $C$  du montage.

Afin de passer à la limite continue (qui s'avérera satisfaisante comme on le verra), on écrit  $Q_p(t) = Q(x_p, t)$  et  $I_p(t) = I(x_p, t)$ , avec  $x_p = pa$  ( $a = 19$  mm dans le montage), et l'on ne conserve que les termes d'ordre un en  $a$ . Les équations discrètes (1) et (2) précédentes prennent ainsi la forme des deux équations aux dérivées partielles suivantes,  $q(x, t) = Q(x, t)/a$  étant la charge électrique par unité de longueur :

$$\partial q / \partial t + \partial I / \partial x = 0$$

et :

$$I = -D \partial q / \partial x,$$

où intervient le coefficient de diffusion  $D = a^2/\tau$ . Ces équations ont des formes connues : la première est l'expression de la continuité de la charge électrique, et la seconde est la version de la loi de Fick pour des particules chargées. On est alors conduit à l'équation de diffusion de la charge :

$$\partial q / \partial t = D \partial^2 q / \partial x^2,$$

soit :

$$\partial U / \partial t = D \partial^2 U / \partial x^2$$

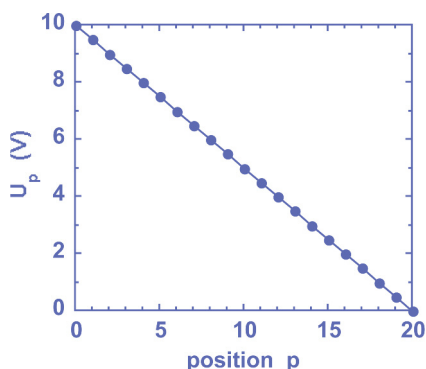
pour la tension  $U(x_p, t) = U_p(t)$  accessible dans l'expérience [mesurer la tension  $U_p(t)$  aux bornes de la capacité  $p$ , c'est mesurer sa charge  $Q_p(t) = a q(x_p, t) = CU_p(t)$  – ce qui revient à y détecter  $CU_p(t)/e$  charges élémentaires (où  $e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}$  C)].

Cette équation de diffusion de la charge électrique est analogue à l'équation de la chaleur à une dimension, suivie par la température dans un milieu de diffusivité thermique  $D$ . La correspondance entre ces deux problèmes de diffusion, de natures physiques différentes, a été remarquée de longue date [26], et exploitée à une dimension [22] ou à deux dimensions [28].

### 3. RÉGIME STATIONNAIRE

Une tension continue  $U_0 = 10,0 \text{ V}$  est imposée à l'extrémité  $p = 0$  du système par une alimentation stabilisée, et – pour faire à la fois simple et intéressant – la capacité  $p = 20$  est mise en court-circuit ( $U_{20} = 0$ ). Les tensions  $U_p$ , où  $p = 0$  à 20, sont mesurées l'une après l'autre avec un ohmmètre.

Les points expérimentaux sont reportés sur la figure 2 (disques pleins) ; ils s'alignent parfaitement avec la droite attendue  $U_p = U_0 (1 - p/20)$ , qui est représentée par une ligne continue.



**Figure 2 :** Expérience en régime stationnaire, avec  $U_0 = 10,0 \text{ V}$  et  $U_{20} = 0$ .

Les disques pleins sont les tensions  $U_p$  mesurées ; la ligne continue représente la loi linéaire prédite.

On mesure à l'ampèremètre l'intensité du courant débité par l'alimentation :  $I = 333 \mu\text{A}$  ; on en tire la résistance électrique du système  $U_0/I = 30,0 \text{ k}\Omega$ , ce qui est bien la valeur  $20 \times R$  attendue.

Cette expérience correspond à la situation thermique où une barre conductrice de la chaleur se voit imposer des températures différentes à chacune de ses extrémités (ou dans laquelle un mur a une température imposée sur chacune de ses faces). Lorsque le régime stationnaire est établi, la température à l'intérieur du milieu varie linéairement avec la position d'un côté à l'autre [2, 10, 19, 32]. On en déduit alors la résistance (ou la conductance) thermique du milieu, puis sa conductivité thermique. Cependant, une difficulté

expérimentale dans une expérience thermique le long d'une barre provient de la chaleur échangée transversalement avec l'extérieur [18, 20, 24]<sup>(1)</sup>. Ces fuites thermiques latérales peuvent être mimées avec le système électrique présenté ici, comme cela est décrit dans l'annexe 1.

#### 4. RÉGIME D'ÉCHELON

À l'extrémité  $p = 0$  du système, la tension  $U_0(t)$  est imposée en créneaux  $(-E_0, +E_0)$  à très basse fréquence (2 Hz) par un générateur de fonctions ; on fixe l'amplitude  $E_0 = 10,0 \text{ V}$ . Le système est ouvert en  $p = 21$  et l'interrupteur  $K$  est fermé [cette ouverture du système en  $p = 21$  va permettre d'utiliser une formule simple pour  $U_p(t)$ ].

La figure 3 montre les tensions  $U_0(t)$ ,  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  et  $U_3(t)$  telles qu'on les observe à l'oscilloscope – deux à la fois sur un oscilloscope à deux voies, dans leur ensemble avec un quatre voies – ; le déclenchement est fait sur le signal  $U_0(t)$ , qui passe de  $-E_0$  à  $+E_0$  à la date arbitraire  $t = 0$ .

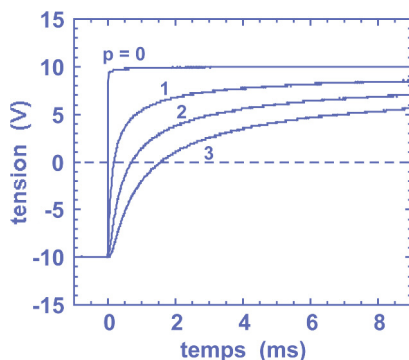


Figure 3 : Expérience en régime d'échelon.

Les tensions  $U_0(t)$ ,  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  et  $U_3(t)$  sont observées lorsque la tension  $U_0(t)$  est imposée en échelon  $(-E_0, +E_0)$  à  $t = 0$  ( $E_0 = 10,0 \text{ V}$ ), et que le système est ouvert en  $p = 21$  ; l'interrupteur  $K$  est fermé.

En considérant que le système est infiniment long du côté des grands  $p$ , ce qui est sans doute juste pour les capacités de plus faibles positions  $p$ , les tensions  $U_p(t)$  s'écrivent :

$$U_p(t) = E_0 \left[ 1 - 2 \operatorname{erf} \left( p/2 \sqrt{t/\tau} \right) \right],$$

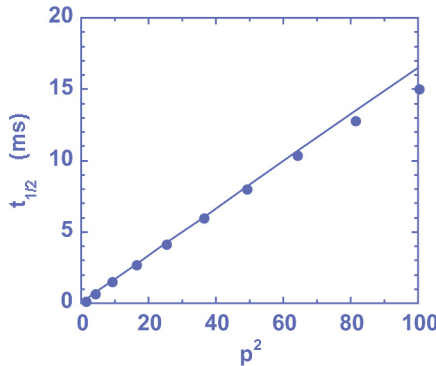
où  $\operatorname{erf}(w) = (2/\pi^{1/2}) \int_0^w du \exp(-u^2)$  est la « fonction d'erreur ». La démonstration de

(1) Cette difficulté peut être évitée en étudiant un flux de chaleur radial dans un cylindre (cf. [33]).

cette expression de  $U_p(t)$  est faite dans l'annexe 2. On constate que  $U_p(t)$  a l'allure attendue :  $U_{p=0}(t) = +E_0$  à tout temps, et  $U_{p \neq 0}(t)$  croît de  $-E_0$  à  $+E_0$  au cours du temps, d'autant plus rapidement que  $p$  est petit. Sur la capacité n°  $p$ , la tension  $U_p(t)$  s'annule à la date  $t = t_{1/2}$  telle que  $p/2\sqrt{t_{1/2}/\tau} = w_{1/2}$ , où le réel  $w_{1/2}$  est défini par  $\text{erf}(w_{1/2}) = 1/2$  :  $w_{1/2} = 0,47694$ . À la position  $p$ , la date  $t_{1/2}$  est donc donnée par :

$$t_{1/2} = \tau p^2 / 4w_{1/2}^2 = 1,099 \tau p^2.$$

Pour chacune des positions  $p$  entre  $p = 1$  et  $p = 10$ , la date  $t_{1/2}$  est mesurée à l'aide de curseurs temporels sur un oscilloscope numérique. Sur la figure 4, les points expérimentaux (disques pleins) représentent  $t_{1/2}$  en fonction de  $p^2$ . Comme attendu, les points avec  $p \leq 7$  sont alignés, et l'on détermine alors avec eux  $\tau = 150 \pm 1 \mu\text{s}$  à l'aide de la loi précédente ; ce résultat est en accord avec la valeur nominale  $\tau = 150 \mu\text{s}$ . Cette expérience a déjà été proposée, avec un temps caractéristique  $\tau$  de l'ordre de la seconde [30].



**Figure 4 :** Expérience en régime d'échelon (cf. figure 3).

Les délais expérimentaux  $t_{1/2}$  sont représentés en fonction de  $p^2$  (disques pleins). La ligne continue est un ajustement linéaire réalisé avec les mesures faites de  $p = 1$  à 7, ce qui fournit  $\tau = 150 \pm 1 \mu\text{s}$ . Les mesures faites de  $p = 8$  à 10 ne sont pas alignées avec les précédentes, à cause de la taille finie du système.

Des expériences thermiques homologues ont été réalisées, soit avec des barres supposées semi-infinies en présence de fuites latérales [20, 24] soit avec des barres calorifugées de longueur finie ayant une température fixée en extrémité [2, 10, 18] ; on n'a pas tenté ici d'expérience électrique analogue à la première catégorie d'expériences, et une expérience électrique analogue à la seconde catégorie est présentée dans l'annexe 3.

Aux positions  $p \geq 8$ , on observe sur la figure 4 que  $t_{1/2}$  ne varie plus linéairement avec  $p^2$ . Cela est attribué au fait que le système n'est pas semi-infini du côté des grands  $p$ . Cette analyse se confirme en jouant sur l'interrupteur  $K$  : pour les positions  $p \geq 8$ , la

date  $t_{1/2}$  n'est pas la même quand  $K$  est fermé ou ouvert.

Ce comportement est montré sur la figure 5 : en  $p = 10$  (cf. figure 5a), la tension  $U_{10}(t)$  est modifiée, avec l'action sur  $K$ , dès en deçà de  $t = t_{1/2}$ , et il n'est donc pas possible d'employer l'hypothèse d'un système semi-infini pour exprimer  $t_{1/2}$  ; au contraire en  $p = 7$  (cf. figure 5b), la tension  $U_7(t)$  ne change avec l'action sur  $K$  qu'au-delà de  $t = t_{1/2}$ , et la mesure de  $t_{1/2}$  n'est pas sensible au fait que le système soit de taille finie (avec  $p_{\max} = 20$  ou 21).

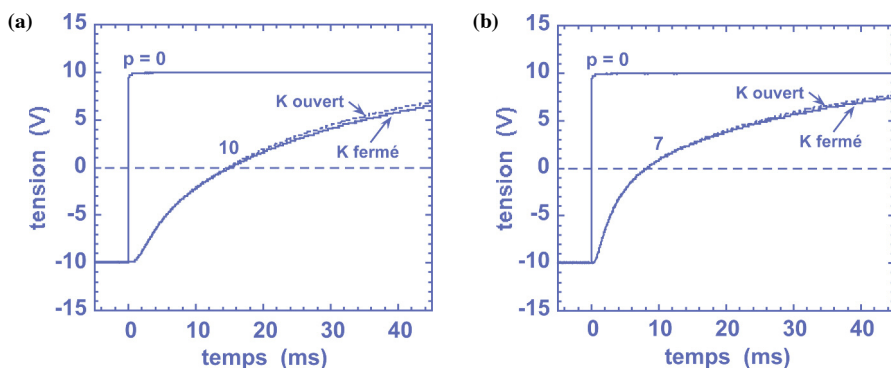


Figure 5 : Expérience en régime d'échelon (cf. figure 3).

Fermer ou ouvrir l'interrupteur  $K$  modifie (a)  $U_{10}(t)$  en deçà de  $t = t_{1/2}$  et (b)  $U_7(t)$  au-delà de  $t = t_{1/2}$ . (On remarquera le changement d'échelle de temps par rapport à celle de la figure 3).

Il serait certes envisageable d'obtenir plus de points expérimentaux exploitables, en travaillant par exemple avec la date  $t_{1/4}$  telle que  $U_p(t_{1/4}) = -E_0/2$  ; mais on a préféré s'abstenir ici, afin que les mesures des délais temporels à l'oscilloscope restent les plus simples et les plus immédiates possible.

## 5. RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT

Lorsque la tension sinusoïdale  $U_0(t) = E_0 \cos(\omega t + \delta)$  est imposée à l'extrémité  $p = 0$  du système par un générateur de fonctions ( $\delta$  est la phase initiale), la solution permanente de l'équation de diffusion est l'onde diffusive [11, 16, 30] suivante :

$$U_p(t) = E_0 \exp(-k^* p a) \cos(\omega t - k' p a + \delta),$$

avec :

$$k'a = k''a = \sqrt{\omega\tau/2},$$

le système étant supposé infini du côté des grands  $p$ .

Cette hypothèse est vérifiée ici pour les fréquences  $f = \omega/2\pi$  plus grandes que

100 Hz, car alors l'amplitude de la tension  $U_{21}(t)$ , à la position extrême  $p = 21$ , est inférieure à 1 % de celle en  $p = 0$ .

La figure 6 représente les tensions  $U_0(t)$ ,  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  et  $U_3(t)$  telles qu'on peut les observer à l'oscilloscope, l'interrupteur  $K$  étant fermé et le système ouvert en  $p = 21$  ( $f = 400$  Hz,  $E_0 = 9,0$  V). Comme attendu d'après l'expression de  $U_p(t)$  précédente, ces tensions décroissent en amplitude et se décalent dans le temps si on les considère pour des positions  $p$  croissantes. Ces signaux ont ainsi à la fois un caractère évanescent et un caractère propagatif ; ils ont la même structure spatio-temporelle que celle d'une onde électromagnétique dans un métal (effet de peau) [4, 6] et que celle d'une onde de température dans le sol [7, 17, 21] ou dans une barre conductrice de la chaleur [8-10, 31].

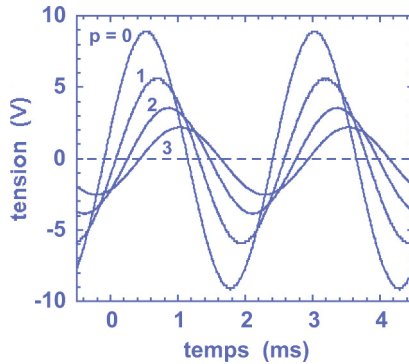


Figure 6 : Expérience en régime sinusoïdal permanent.

Les tensions  $U_0(t)$ ,  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$  et  $U_3(t)$  sont observées lorsque  $U_0(t) = E_0 \cos(\omega t + \delta)$  est imposée et le système ouvert en  $p = 21$  ( $K$  est fermé) ;  $f = \omega/2\pi = 400$  Hz et  $E_0 = 9,0$  V.

◆ On étudie l'amplitude  $A_p = E_0 \exp(-k^* pa)$  de  $U_p(t)$ .

Sur la figure 7a (cf. page ci-contre) on a reporté en fonction de la position  $p$  les valeurs de :

$$\ln [A_p/E_0] = -k^* pa,$$

$2A_p$  étant l'amplitude crête à crête mesurée de la tension  $U_p(t)$ , pour les fréquences  $f = 100$  Hz (disques pleins) et 400 Hz (carrés pleins) ; on a fixé  $2E_0 = 18,0$  V.

Comme il se doit, les points expérimentaux sont alignés, sauf pour les positions de très grands  $p$  à  $f = 100$  Hz (du fait de la taille finie du système). À 100 Hz, la droite d'ajustement  $\ln [A_p/E_0] = -\sqrt{\omega\tau/2} p$  est calculée avec les positions  $p = 1$  à 10, et l'on en tire  $\tau = 152$   $\mu$ s. Par ailleurs, l'ajustement linéaire des données à 400 Hz conduit à  $\tau = 155$   $\mu$ s. Ces estimations du temps caractéristique  $\tau$  sont proches de la valeur  $150 \pm 1$   $\mu$ s mesurée



dans la partie 4. Mais ce sont en toute rigueur ici des valeurs apparentes, qui augmentent avec la fréquence [11].

À l'aide de la théorie exacte de l'annexe 4, qui tient compte du caractère discret du système, on obtient l'estimation véritable du temps caractéristique :  $\tau = 151 \mu\text{s}$  dans l'expérience à 100 Hz et  $\tau = 150 \mu\text{s}$  dans celle à 400 Hz.

♦ On étudie maintenant l'aspect propagatif de  $U_p(t)$ .

Les points de la figure 7b sont, en fonction de la position  $p$ , les déphasages  $\varphi_p = k' p a$  des tensions  $U_p(t)$  par rapport à  $U_0(t)$ , mesurés sur un oscilloscope numérique à 100 Hz (disques pleins) et à 400 Hz (carrés pleins). Comme précédemment, le manque d'alignement des points à 100 Hz, pour les très grands  $p$ , est dû à la taille finie du système. À 100 Hz, la droite d'ajustement  $\varphi_p = \sqrt{\omega\tau/2} p$  est calculée avec les positions  $p = 1$  à 10, et l'on en déduit la valeur apparente  $\tau = 148 \mu\text{s}$ , d'où la valeur véritable  $\tau = 149 \mu\text{s}$  (cf. annexe 4). À 400 Hz, on obtient  $144 \mu\text{s}$  pour la valeur apparente de  $\tau$ , et  $149 \mu\text{s}$  de nouveau pour sa valeur réelle.

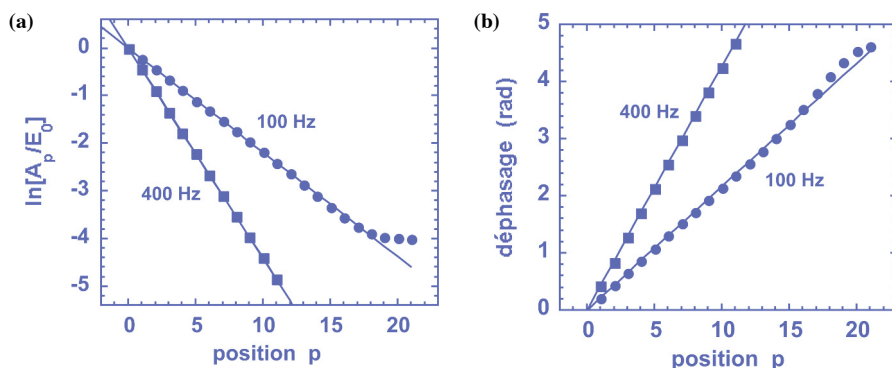


Figure 7 : Expérience en régime sinusoïdal permanent (cf. figure 6).

(a) Les points sont les  $\ln[A_p/E_0]$  en fonction de la position  $p$ ,  $2A_p$  étant l'amplitude crête à crête mesurée de la tension  $U_p(t)$ , pour les fréquences de 100 Hz (disques pleins) et 400 Hz (carrés pleins) ;  $2E_0 = 18,0 \text{ V}$  ; les lignes continues sont des ajustements avec la loi  $\ln[A_p/E_0] = -\sqrt{\omega\tau/2} p$ .

(b) Les points sont les déphasages  $\varphi_p$  des tensions  $U_p(t)$  par rapport à  $U_0(t)$ , mesurés à 100 Hz (disques pleins) et à 400 Hz (carrés pleins) ; les lignes continues sont des ajustements avec la loi  $\varphi_p = \sqrt{\omega\tau/2} p$ . Cette étude fournit finalement  $\tau = 150 \pm 1 \mu\text{s}$ .

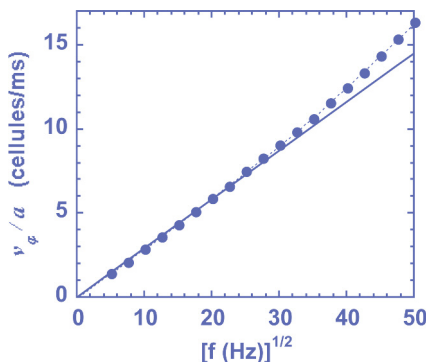
La vitesse de phase  $v_\varphi = \omega/k'$  de l'onde diffusive est attendue de la forme :

$$v_\varphi = a\sqrt{2\omega/\tau} = a\sqrt{4\pi f/\tau}.$$

Elle croît comme la racine carrée de la fréquence  $f$ .

Si l'on peut voir un paradoxe dans le fait que  $v_\phi$  croisse sans limite lorsque la fréquence augmente, la décroissance de l'amplitude, en  $\exp(-\sqrt{\pi f \tau} \cdot p)$ , se charge cependant de le résoudre en interdisant l'existence même d'une onde à haute fréquence.

Sur la figure 8, on a reporté, en fonction de la racine carrée de la fréquence, la vitesse de phase  $v_\phi/a$  (en cellules par unité de temps) qui est déduite de mesures du déphasage  $\phi_3$  à la position  $p=3$ , grâce à la relation  $v_\phi/a = 3\omega/\phi_3$  (disques pleins). Pour les fréquences les plus basses, la vitesse de phase  $v_\phi/a$  est bien proportionnelle à  $\sqrt{f}$ , et l'ajustement linéaire (ligne continue) des points expérimentaux avec  $f < 400$  Hz permet de déduire une mesure du temps caractéristique  $\tau = 149 \pm 1 \mu\text{s}$ , en accord avec les précédentes déterminations. Néanmoins, aux plus hautes fréquences la vitesse de phase s'écarte de la loi décrite ici, de la manière calculée dans l'annexe 4 (ligne en pointillés sur la figure 8).



**Figure 8 :** Expérience en régime sinusoïdal permanent (cf. figure 6).

Les disques pleins représentent la vitesse de phase  $v_\phi/a = 3\omega/\phi_3$ , mesurée en  $p=3$ , en fonction de la racine carrée de la fréquence. À basse fréquence, les points expérimentaux s'alignent comme attendu (ligne continue), d'où l'on déduit  $\tau = 149 \pm 1 \mu\text{s}$ . À haute fréquence, ils s'écartent de ce comportement linéaire ; la ligne en pointillés est la loi exacte démontrée dans l'annexe 4.

Pour que la description continue du système soit valable, et donc que  $v_\phi$  soit proportionnelle à  $\sqrt{f}$ , il faut que la longueur d'onde  $\lambda = v_\phi/f$  soit très grande devant le pas  $a$  ; avec le critère  $\lambda > 10a$ , on trouve la condition  $f < \pi/25\tau$ , soit  $f < 840$  Hz : effectivement, les points expérimentaux de la figure 8 sont alignés dans cette gamme de fréquences, et ne le sont plus en dehors.

## 6. RÉGIME IMPULSIONNEL

L'excitation impulsionnelle du système est réalisée de la manière suivante. Entre la

masse et la capacité n° 10 sont placés en série une alimentation stabilisée ( $E_0 = 10,0\text{ V}$ ), une résistance  $r = 100\ \Omega$  et un relais rapide (AQY221N2S, Panasonic) ; le relais est fermé durant un intervalle de temps  $\delta t = 30\ \mu\text{s}$ , avec une période de 100 ms, en étant commandé par un générateur d'impulsions. Il n'est pas possible d'effectuer directement cette excitation avec le générateur d'impulsions, à cause de sa résistance de sortie de  $50\ \Omega$  au travers de laquelle se déchargerait le système. La loi attendue pour les tensions  $U_p(t)$ , la charge initiale de la capacité  $p = 10$  ayant lieu à  $t = 0$  et le système étant supposé illimité de part et d'autre de la position  $p = 10$ , est [29-30] :

$$U_p(t) = U_{10}(0^+) (4\pi t / \tau)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(p-10)^2}{4} \frac{\tau}{t}\right)$$

Les tensions  $U_{11}(t)$ ,  $U_{12}(t)$  et  $U_{13}(t)$  observées à l'oscilloscope sont montrées sur la figure 9.

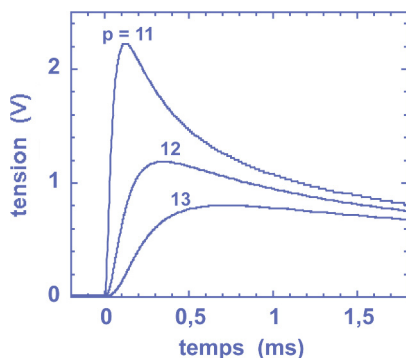


Figure 9 : Expérience en régime impulsif.

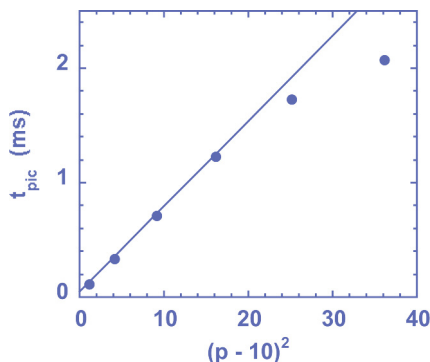
Les tensions (lignes continues)  $U_{11}(t)$ ,  $U_{12}(t)$  et  $U_{13}(t)$  sont mesurées après la charge de la capacité  $p = 10$  sur une durée de  $\delta t = 30\ \mu\text{s}$ .

Des courts-circuits ont été placés en  $p = 0$  et  $p = 20$  ; en leurs absences, les tensions mesurées possèdent une composante continue qui croît quand la période des impulsions diminue, à cause de la très grande résistance d'isolement des capacités. Cette manipulation électrique est l'homologue d'une expérience thermique dans laquelle de la chaleur est communiquée, brièvement et localement, à une barre conductrice [29].

D'après l'expression précédente des tensions  $U_p(t)$ , la date  $t_{pic}$  à laquelle la tension  $U_p(t)$  passe par son maximum est de la forme  $t_{pic} = (\tau/2)(p-10)^2$ .

Les dates  $t_{pic}$  mesurées, par référence au début de l'impulsion appliquée en  $p = 10$ , sont montrées sur la figure 10 (cf. page ci-après) en fonction de  $(p-10)^2$ , pour les posi-

tions  $p = 11$  à 16 (disques pleins). Comme attendu, les mesures pour  $p = 11$  à 14 sont alignées, et l'on en déduit  $\tau = 149 \pm 1 \mu\text{s}$ , valeur conforme aux  $150 \mu\text{s}$  nominaux. Les deux points expérimentaux correspondant aux positions  $p = 15$  et 16 ne sont pas alignés avec les précédents, du fait de la proximité du court-circuit en  $p = 20$  ; d'ailleurs, les dates  $t_{pic}$  aux deux positions en question dépendent de la présence ou l'absence de ce court-circuit, ce qui n'est pas le cas pour les positions  $p = 11$  à 14.



**Figure 10 :** Expérience en régime impulsionnel (cf. figure 9).

Les dates  $t_{pic}$  des maxima des tensions  $U_p(t)$ ,  $p = 11$  à 16, sont reportées en fonction de  $(p - 10)^2$  (disques pleins). L'ajustement linéaire (ligne continue) des données expérimentales pour  $p = 11$  à 14 conduit à  $\tau = 149 \pm 1 \mu\text{s}$  ; cet ajustement ne passe pas par l'origine (le décalage vaut  $49 \mu\text{s}$ ).

Sur la figure 10, la droite d'ajustement (ligne continue) ne passe pas exactement par l'origine ; cela est attribué à la durée  $\delta t = 30 \mu\text{s}$  de l'impulsion appliquée en  $p = 10$ , qui n'est pas négligeable devant le temps caractéristique  $\tau$ .

À la position  $p$ , la tension maximale  $U_{pic} = U_p(t_{pic})$  à la date  $t_{pic}$  est attendue de la forme :

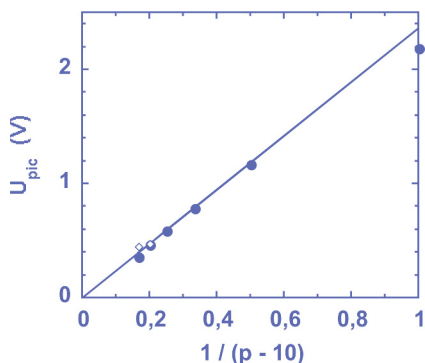
$$U_{pic} = U_{10}(0^+) (2\pi e)^{-1/2} |p - 10|^{-1},$$

où :

$$e \approx 2,718.$$

Les tensions maximales mesurées aux positions  $p = 11$  à 16 sont reportées en fonction de  $1/|p - 10|$  sur la figure 11 (disques pleins). Leur valeur ne dépend pas de la présence ou l'absence du court-circuit en  $p = 20$ , sauf pour les positions  $p = 15$  (très légèrement) et  $p = 16$  (plus fortement) ; les diamants creux sur la figure 11 (cf. page ci-contre) représentent les tensions maximales à ces deux positions pour un système ouvert en  $p = 20$ . Les points expérimentaux sont alignés pour  $p = 12$  à 15 ; leur ajustement linéaire (ligne continue) permet alors d'en déduire  $U_{10}(0^+) = 9,7 \text{ V}$ . Cette valeur se compare favorablement avec la tension  $E_0 [1 - \exp(-\delta t / rC)] = 9,5 \text{ V}$ , estimée aux bornes de la capa-

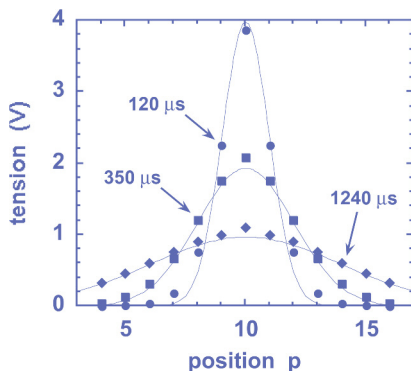
cité  $p = 10$  à l'issue de sa charge au travers de  $r = 100\ \Omega$  sur une durée  $\delta t = 30\ \mu\text{s}$  (en négligeant la présence des capacités voisines).



**Figure 11 :** Expérience en régime impulsif (cf. figure 9).

Les disques pleins sont les tensions maximales mesurées en  $p = 11$  à 16, reportées en fonction de  $1/|p-10|$  ; les diamants creux sont les tensions maximales en  $p = 15$  et 16 quand le système est ouvert en  $p = 20$ . L'ajustement linéaire (ligne continue) des données pour  $p = 12$  à 15 fournit  $U_{10}(0^+) = 9,7\text{ V}$ .

On a tracé enfin, sur la figure 12, les profils spatiaux de tension aux dates  $t = 120\ \mu\text{s}$  (disques pleins),  $350\ \mu\text{s}$  (carrés pleins) et  $1\ 240\ \mu\text{s}$  (diamants pleins), en utilisant les prises de données faites aux positions  $p = 10$  à 16 (avec des courts-circuits en  $p = 0$  et  $p = 20$ ) et en postulant leur symétrie par rapport à  $p = 10$ . On observe ainsi l'étalement spatial, au cours du temps, de la charge électrique initialement déposée en  $p = 10$ .



**Figure 12 :** Expérience en régime impulsif (cf. figure 9).

Les disques (resp. carrés et diamants) pleins sont les tensions mesurées à la date  $t = 120\ \mu\text{s}$  (resp.  $350\ \mu\text{s}$  et  $1\ 240\ \mu\text{s}$ ) aux positions  $p = 10$  à 16, placées symétriquement par rapport à  $p = 10$ . Les lignes continues sont les gaussiennes attendues, tracées avec  $\tau = 150\ \mu\text{s}$ ,  $U_{10}(0^+) = 9,7\text{ V}$  et en remplaçant  $t$  par  $t - 49\ \mu\text{s}$  (cf. figure 10).

Les lignes continues sur la même figure sont les gaussiennes qui sont attendues, tracées avec  $\tau = 150 \mu\text{s}$ ,  $U_{10}(0^+) = 9,7 \text{ V}$  et en remplaçant  $t$  par  $t - 49 \mu\text{s}$  pour tenir compte du décalage temporel observé sur la figure 10 ; l'accord de ces profils spatiaux théoriques avec les points expérimentaux est satisfaisant.

## CONCLUSION

On a présenté des expériences sur la diffusion de charge, que l'on peut aisément réaliser à l'aide d'un système électrique facile à construire avec des résistances et des capacités courantes. Ces expériences abordent tous les aspects classiques du phénomène de diffusion à une dimension. Elles peuvent être menées, quantitativement, dans des régimes variés d'excitation du système : régimes stationnaire, d'échelon, sinusoïdal permanent et impulsif. Elles ne nécessitent que le matériel classique d'une salle de TP d'électronique, et les mesures peuvent se faire pour l'essentiel avec un ohmmètre et sur l'écran d'un oscilloscope. Remarquablement, le caractère discret du système ne se manifeste que marginalement, ce qui permet de l'aborder avec la théorie connue des phénomènes de diffusion dans un milieu continu.

Les expériences proposées possèdent naturellement leur intérêt en soi : elles permettent l'étude, originale, de la diffusion de charge électrique à une dimension. En outre, elles peuvent aussi être vues comme les homologues d'expériences de diffusion de la chaleur ; ces dernières sont en général longues et délicates à mettre en œuvre, et les présentes expériences électriques apparaissent alors comme un outil pédagogique qui leur fournisse une introduction expérimentale aisée, afin de mieux les comprendre et de mieux désirer les réaliser malgré leur difficulté.

## BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

- [1] ABRAHAM A. J. and BEAN C. P. « A simple method for measurement of the diffusion of vapors ». *Am. J. Phys.*, 1989, **57**, p. 325.
- [2] ARBOUET A. « Étude de la transmission de la chaleur le long d'une barre métallique ». *Bull. Un. Phys.*, octobre 1993, vol. 87, n° 757 (3), p. 117-126.
- [3] ASHKENAZI S. and POLTURAK E. « An acoustic laboratory experiment to determine the coefficient of mutual diffusion of gases ». *Am. J. Phys.*, 1988, **56**, p. 836.
- [4] BARRAT J.-P. *Électromagnétisme et relativité restreinte*. ÉdisScience, 1972, p. 199.
- [5] BERNARDOT F. Notes de cours 2010 : Introduction aux phénomènes de transport (<http://didel.script.univ-paris7.fr>, Sciences, UFR de Physique, IPT), partie « Quelques expériences », p. 48-49.
- [6] BERTIN M., FAROUX J.-P. et RENAULT J. *Électromagnétisme III*. Dunod, 1979, p. 76.
- [7] BERTIN M., FAROUX J.-P. et RENAULT J. *Thermodynamique*. 3<sup>e</sup> édition, Dunod, 1984, p. 109-110.

- [8] BODAS A., GANDÍA V. and LÓPEZ-BAEZA E. « An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves ». *Am. J. Phys.*, 1998, **66**, p. 528.
- [9] BRYANT H. C. « Heat waves and Ångström's method ». *Am. J. Phys.*, 1963, **31**, p. 325.
- [10] DEGUIN A. et MESNARD G. « Expériences de thermodynamique - B. Deuxième expérience : étude de la transmission de la chaleur le long d'une barre métallique ». *Bull. Un. Phys.*, juillet-août-septembre 1967, vol. 61, n° 497, p. 707-713.
- [11] DEIBER A., PAVIET-SALOMON F. et POINÇOT J.-B. « Un exemple de diffusion en électrocinétique sur une chaîne RC ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, décembre 2010, vol. 104, n° 929 (2), p. 95-112.
- [12] ENS Montrouge. « Mesure du coefficient de diffusion du glycérol dans l'eau ». *Bull. Un. Phys.*, décembre 1999, vol. 93, n° 819 (1), p. 1885-1887.
- [13] FENICHEL H., FRANKENA H. and GROEN F. « Experiments on diffusion in liquids using holographic interferometry ». *Am. J. Phys.*, 1984, **52**, p. 735.
- [14] FOX J. N. and MCMASTER R. H. « Measurement of the thermal properties of a metal using a relaxation method ». *Am. J. Phys.*, 1975, **43**, p. 1083.
- [15] GAFFNEY C. and CHAU C.-K. « Using refractive index gradients to measure diffusivity between liquids ». *Am. J. Phys.*, 2001, **69**, p. 821.
- [16] GREENSLADE T. B. « An intermediate experiment with a lossy transmission line ». *Am. J. Phys.*, 1989, **57**, p. 275.
- [17] GROSSETÊTE B., PASTOR L. et ZEITOUN-FAKIRIS A. *La représentation des phénomènes physiques*. Paris : Masson, 1981, p. 144.
- [18] JAI C. et WUNENBURGER R. « Transitoire thermique dans une barre calorifugée ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, décembre 2010, vol. 104, n° 929 (2), p. 113-125.
- [19] LEMAIRE J. « Conduction thermique - Réalisation pratique d'un TP de Math Sup ». *Bull. Un. Phys.*, novembre 1990, vol. 84, n° 728 (1), p. 1195-1202.
- [20] LONG T. P. and DUNHOLTER H. « An experiment on variable, linear flow of heat ». *Am. J. Phys.*, 1937, **5**, p. 205.
- [21] MCINTOSH G. and SHARRATT B. S. « Thermal properties of soil ». *Phys. Teach.*, 2001, **39**, p. 458.
- [22] MORRIS D. A. « Demonstration experiment of heat flow in transient and steady-state conditions ». *Am. J. Phys.*, 1968, **36**, p. 120.
- [23] PRYDE J. A. and PRYDE E. A. « A simple quantitative diffusion experiment ». *Phys. Educ.*, 1967, **2**, p. 311.
- [24] RÀFOLS I. and ORTÍN J. « Heat conduction in a metallic rod with Newtonian losses ». *Am. J. Phys.*, 1992, **60**, p. 846.
- [25] RAY E., BUNTON P. and POJMAN J. A. « Determination of the diffusion coefficient between corn syrup and distilled water using a digital camera ». *Am. J. Phys.*, 2007, **75**, p. 903.

- [26] ROCARD Y. *Thermodynamique*. Partie VII-I : Le transfert de la chaleur. 2<sup>e</sup> édition, Paris : Masson, 1967, p. 523-525.
- [27] SHAW C. H. and SAUNDERS N. « Intermediate laboratory experiment in heat conduction ». *Am. J. Phys.*, 1955, **23**, p. 89.
- [28] STEERE R. C. « Solution of two-dimensional transient heat-flow problems by electrical analogue ». *Phys. Educ.*, 1971, **6**, p. 443.
- [29] SULLIVAN M. C., THOMPSON B. G. and WILLIAMSON A. P. « An experiment on the dynamics of thermal diffusion ». *Am. J. Phys.*, 2008, **76**, p. 637.
- [30] TOMLIN D. H. and Fullarton G. K. « Electrical circuit analogues of thermal conduction and diffusion ». *Phys. Educ.*, 1978, **13**, p. 295.
- [31] VERNOTTE P. « Une séance de travaux pratiques sur la conduction de la chaleur ». *Bull. Un. Phys.*, janvier 1935, vol. 29, n° 279, p. 209-217.
- [32] VILLEDARY F. « Conductivité thermique ». *Bull. Un. Phys.*, décembre 1988, vol. 82, n° 709, p. 1289-1294.
- [33] JENFFER P., BÉTRENCOURT C., DEROCHE J.-C. et GUYON E. « Mesure de la conductivité et de la diffusivité thermique d'un solide en travaux pratiques ». *Bull. Un. Phys.*, novembre 1990, vol. 84, n° 728 (1), p. 1185-1194.



## Annexe 1

### Régime stationnaire avec fuites transversales

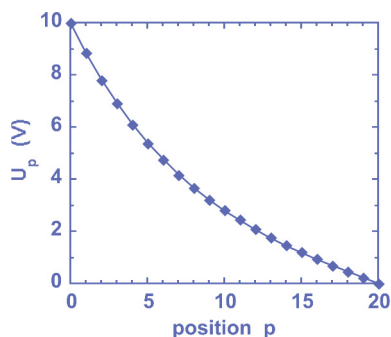
Dans une expérience en régime stationnaire (cf. partie 3), on installe une résistance  $R'$  en parallèle sur chaque capacité. Avec  $R' = 100 \text{ k}\Omega$ , et toujours les conditions aux limites  $U_0 = 10,0 \text{ V}$  et  $U_{20} = 0$ , on mesure les points expérimentaux représentés par des diamants pleins sur la figure A1. L'expression de  $U_p$  en fonction de  $p$  est obtenue en tenant compte de la nouvelle forme de l'équation de conservation de la charge :

$$dQ_p/dt + Q_p/R'C = I_{p-1} - I_p ;$$

en raisonnant comme dans les parties 2 et 3 (passage à la limite continue, puis résolution du régime stationnaire et enfin prise en compte des conditions aux limites), on obtient :

$$U_p = U_0 \operatorname{sh} \left[ (20 - p) \sqrt{R/R'} \right] / \operatorname{sh} (20 \sqrt{R/R'}) .$$

La meilleure courbe d'ajustement utilisant cette expression est représentée sur la figure A1 en ligne continue. Elle est obtenue avec  $(R/R')^{1/2} = 0,119$ . Cela est en accord avec la détermination  $(1,5/100)^{1/2} = 0,12$  qui est déduite des valeurs nominales  $R = 1,5 \text{ k}\Omega$  et  $R' = 100 \text{ k}\Omega$ .



**Figure A1 :** Expérience en régime stationnaire (cf. partie 3), en présence de fuites transversales. Les diamants pleins sont les tensions  $U_p$  mesurées quand  $R' = 100 \text{ k}\Omega$  est mise en parallèle sur chaque capacité ; la ligne continue est le meilleur ajustement avec la loi attendue, qui conduit à  $(R/R')^{1/2} = 0,119$ .

## Annexe 2

### *Expression de $U_p(t)$ lorsque $U_0(t)$ est en échelon $(-E_0, +E_0)$ , le système étant ouvert en $p = 21$*

Les calculs exposés ici suivent la démarche de ceux de la référence [18], en l'adaptant aux conditions aux limites présentes :  $U(x=0, t)$  passe instantanément de  $-E_0$  à  $+E_0$  à la date  $t=0$ , et la nullité du courant en  $x=L$  (avec ici  $L=21a$ ) impose :

$$\partial U / \partial x (x=L, t) = 0.$$

La transformée de Laplace temporelle  $U'(x, \alpha)$  de  $U(x, t)$  est définie par :

$$U'(x, \alpha) = \int_0^{+\infty} dt U(x, t) \exp(-\alpha t).$$

Avec l'équation de la diffusion suivie par  $U(x, t)$  et la condition initiale :

$$U(x > 0, t=0) = -E_0,$$

on déduit l'équation à laquelle obéit  $U'(x, \alpha)$  :

$$D \partial^2 U' / \partial x^2 = \alpha U' + E_0.$$

Cette équation a pour solution générale :

$$U'(x, \alpha) = A(\alpha) \exp(qx) + B(\alpha) \exp(-qx) - E_0/\alpha,$$

où l'on a noté  $q = (\alpha/D)^{1/2}$ . Les conditions aux limites imposent  $A(\alpha) + B(\alpha) = 2E_0/\alpha$  et  $A(\alpha) \exp(qL) - B(\alpha) \exp(-qL) = 0$ , et l'on obtient alors :

$$U'(x, \alpha) = -E_0/\alpha + (2E_0/\alpha) \{ \exp(-qx) + \exp[-q(2L-x)] \} / [1 + \exp(-2qL)].$$

En écrivant  $1/[1 + \exp(-2qL)] = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \exp(-2qnL)$ ,  $U'(x, \alpha)$  prend la nouvelle forme :

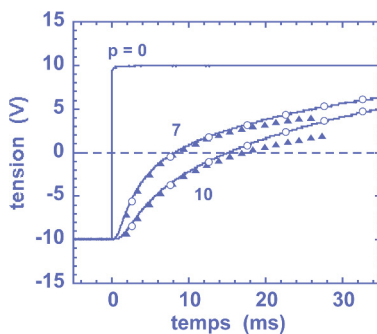
$$U'(x, \alpha) = -E_0/\alpha + (2E_0/\alpha) \exp(-qx) + (2E_0/\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \{ \exp[-q(2nL+x)] - \exp[-q(2nL-x)] \}$$

L'expression de  $U(x, t)$  est finalement obtenue en utilisant le fait que  $\exp(-qx)/\alpha$  est la transformée de Laplace de  $\operatorname{erfc}[x/2\sqrt{Dt}]$ , où  $\operatorname{erfc}[w] = 1 - \operatorname{erf}(w)$  définit la fonction dite « fonction d'erreur complémentaire » :

$$U(x, t) = -E_0 + 2E_0 \operatorname{erfc} [x/2\sqrt{Dt}] + 2E_0 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left\{ \operatorname{erfc} [(2nL+x)/2\sqrt{Dt}] - \operatorname{erfc} [(2nL-x)/2\sqrt{Dt}] \right\}.$$

Pour les faibles  $x_p = pa$  ( $x_p \ll L$ , c'est-à-dire  $p \ll 21$ ), le système peut être considéré comme semi-infini ( $L \rightarrow \infty$ ), et seuls interviennent les deux premiers termes dans la formule précédente. On obtient ainsi l'expression de  $U_p(t) = U(x_p, t)$  employée dans la partie 4, en utilisant  $D = a^2/\tau$ .

La figure A2 montre, en lignes continues, les tensions mesurées  $U_0(t)$ ,  $U_7(t)$  et  $U_{10}(t)$  lorsque  $U_0(t)$  est imposée en échelon ( $-E_0, +E_0$ ) à  $t = 0$ , avec  $E_0 = 10,0 \text{ V}$ , tandis que le système est ouvert en  $p = 21$  (l'interrupteur  $K$  est fermé). Les triangles pleins représentent les dépendances temporelles de  $U_7(t)$  et  $U_{10}(t)$  exprimées avec la formule approchée de la partie 4 et  $\tau = 150 \mu\text{s}$ <sup>(2)</sup>; on observe bien que cette formule approchée permet de décrire  $U_7(t)$  jusqu'au-delà de  $t = t_{1/2}$ , mais que ce n'est pas le cas pour la tension  $U_{10}(t)$ . Sur cette même figure, les disques creux sont calculés avec la dépendance exacte de  $U_p(t) = U(x_p, t)$  qui vient d'être déterminée, en ne conservant que les termes  $n = 1$  et  $n = 2$  de la somme; comme attendu, ces points calculés tombent sur les courbes expérimentales des tensions  $U_7(t)$  et  $U_{10}(t)$ .



**Figure A2 :** Tensions mesurées (lignes continues)  $U_0(t)$ ,  $U_7(t)$  et  $U_{10}(t)$  en régime d'échelon (cf. figures 3 et 5).

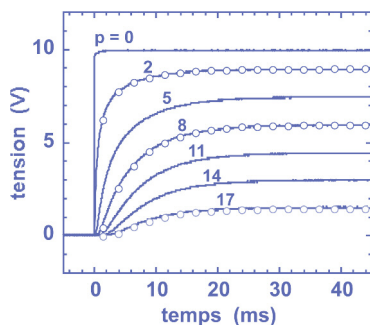
Les triangles pleins représentent  $U_7(t)$  et  $U_{10}(t)$  avec la loi approchée de la partie 4 et  $\tau = 150 \mu\text{s}$ ; les disques creux représentent ces mêmes tensions avec la loi exacte (avec seulement les termes  $n = 1$  et  $n = 2$  dans la somme discrète).

(2) On peut utiliser la forme approximative  $[1 - \exp(-1,246 w^2)]^{1/2}$  de la fonction  $\operatorname{erf}(w) = 1 - \operatorname{erfc}[w]$ ; la différence entre ces deux fonctions est partout inférieure à 0,0032.

## Annexe 3

### *Expérience lorsque $U_0(t)$ est en échelon $(0, +E_0)$ , le système étant fermé en $p = 20$*

Les lignes continues sur la figure A3 sont les tensions  $U_p(t)$ , avec  $p = 0, 2, 5, 8, 11, 14$  et  $17$ , qui sont mesurées lorsque  $U_0(t)$  est imposée en échelon  $(0, +E_0)$  à  $t = 0$ , où  $E_0 = 10,0 \text{ V}$ , et que le système est court-circuité en  $p = 20$  [ $U_{20}(t) = 0$ ]. Comme attendu, les tensions en question se répartissent aux temps longs suivant la loi  $U_p = E_0 (1 - p/20)$  du régime stationnaire (cf. partie 3).



**Figure A3 :** Tensions mesurées (lignes continues)  $U_p(t)$ ,  $p = 0, 2, 5, 8, 11, 14$  et  $17$ , lorsque la tension  $U_0(t)$  est imposée en échelon  $(0, +E_0)$  à  $t = 0$ ,  $E_0 = 10,0 \text{ V}$ , et que le système est fermé en  $p = 20$ .

Les disques creux représentent la loi attendue pour  $p = 2, 8$  et  $17$ , avec seulement les termes  $n = 1$  et  $n = 2$  dans la somme discrète.

La détermination de  $U_p(t) = U(x_p, t)$  dans le régime transitoire s'obtient dans la même démarche que celle de l'annexe 2, en tenant compte des nouvelles conditions aux limites, et coïncide exactement avec les calculs de la référence [18] ; on trouve :

$$U_p(t)/E_0 = \operatorname{erfc} \left[ p/2\sqrt{t/\tau} \right] + \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \operatorname{erfc} \left[ (40n + p)/2\sqrt{t/\tau} \right] - \operatorname{erfc} \left[ (40n - p)/2\sqrt{t/\tau} \right] \right\}.$$

Les disques creux sur la figure A3 sont des valeurs calculées de  $U_p(t)$  pour  $p = 2, 8$  et  $17$ , obtenues avec  $\tau = 150 \mu\text{s}$  et la formule précédente dans laquelle on n'a conservé que les termes  $n = 1$  et  $n = 2$  dans la somme discrète ; la coïncidence avec les courbes expérimentales est très satisfaisante. Cette expérience électrique est l'homologue de mesures

thermiques réalisées avec une barre conductrice de la chaleur qui est brutalement changée de température à une extrémité, tandis que l'autre est maintenue à température fixe [2, 10, 18].

Une autre expression théorique de  $U_p(t)$ , faisant intervenir les modes propres de diffusion du système, est [18] :

$$U_p(t)/E_0 = 1 - p/20 - (2/\pi) \sum_{n=1}^{+\infty} (1/n) \exp\left[-(n\pi/20)^2 t/\tau\right] \sin(n\pi p/20).$$

Cette forme des tensions  $U_p(t)$  ne peut certes pas être utilisée aux temps courts avec un nombre limité de termes dans la somme, mais son intérêt est de procurer une nouvelle mesure du temps caractéristique  $\tau$  : les points expérimentaux  $\ln[1 - p/20 - U_p(t)/E_0]$  en fonction du temps doivent s'aligner, suivant la droite :

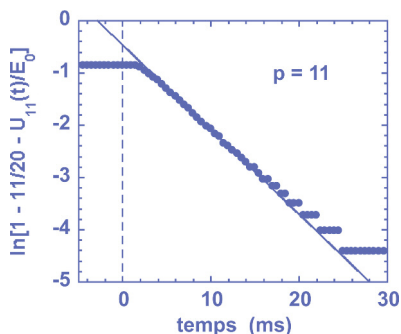
$$\ln\left[(2/\pi) \sin(\pi p/20)\right] - (\pi^2/400 \tau) t,$$

dès que les dates  $t$  sont assez grandes pour que le premier terme  $n = 1$  de la somme domine tous les autres.

La figure A4 montre en effet un tel alignement des données pour  $p = 11$ , d'où l'on tire  $\tau = 152 \pm 4 \mu\text{s}$  avec les valeurs mesurées à  $t > 10 \text{ ms}$  ; ce résultat est également obtenu avec  $U_8(t)$  ou avec  $U_{14}(t)$ . Il est possible aussi de travailler avec un échelon décroissant  $(+E_0, 0)$  imposé à  $t = 0$  en  $p = 0$ , les données à analyser en fonction du temps étant alors les termes développés selon :

$$\ln[U_p(t)/E_0] \approx \ln\left[(2/\pi) \sin(\pi p/20)\right] - (\pi^2/400 \tau) t ;$$

les expériences thermiques homologues sont appelées des expériences de relaxation [14, 27].



**Figure A4 :** Logarithme népérien de l'écart de  $U_{11}(t)/E_0$  à sa valeur stationnaire  $1 - 11/20$  en fonction du temps (disques pleins), lorsque la tension  $U_0(t)$  est imposée en échelon  $(0, +E_0)$  à  $t = 0$ ,  $E_0 = 10,0 \text{ V}$ , et que  $U_{20}(t) = 0$ . L'ajustement linéaire (ligne continue) des points expérimentaux à  $t > 10 \text{ ms}$  donne  $\tau = 152 \pm 4 \mu\text{s}$ .

## Annexe 4

### Onde diffusive sinusoïdale le long du système discret

En ne faisant pas le passage à la limite continue dans la démarche de la partie 2, on aboutit à l'équation suivante suivie par les tensions  $U_p(t)$  :

$$\tau \, dU_p/dt = U_{p-1} + U_{p+1} - 2U_p.$$

Lorsqu'une onde sinusoïdale  $U_p(t) = \text{Re}\{A \exp[i(\omega t - kpa)]\}$  se propage le long du système supposé infini, la relation de dispersion est trouvée sous la forme implicite :

$$[\exp(-ika)]^2 - 2(1 + i\omega\tau/2)[\exp(-ika)] + 1 = 0.$$

En notant  $(\gamma_1 + i\gamma_2)^2$  le discriminant réduit  $-(\omega\tau/2)^2 + i\omega\tau$  de cette équation du second degré, les coefficients réels  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont trouvés égaux à :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \left\{ \sqrt{(\omega\tau/2)^2 + (\omega\tau/2)^4/4} - (\omega\tau/2)^2/2 \right\}^{1/2} \\ \gamma_2 = \left\{ \sqrt{(\omega\tau/2)^2 + (\omega\tau/2)^4/4} + (\omega\tau/2)^2/2 \right\}^{1/2} \end{cases},$$

et la relation de dispersion s'exprime alors plus simplement par :

$$\exp(-ika) = (1 - \gamma_1)(1 - i\gamma_2).$$

En posant  $k = k' - i k''$ , il vient finalement :

$$k'a = \text{Arctg}(\gamma_2)$$

et :

$$k''a = (1/2) \ln \left[ (1 + \gamma_1)/(1 - \gamma_1) \right] = \text{Argth}(\gamma_1).$$

Dans la limite  $\omega\tau \ll 1$ , on trouve les expressions approchées :

$$k'a \approx \sqrt{\omega\tau/2} (1 - \omega\tau/24)$$

et :

$$k''a \approx \sqrt{\omega\tau/2} (1 + \omega\tau/24),$$

dont les termes dominants  $\sqrt{\omega\tau/2}$  correspondent au cas d'un milieu continu.

Lors de la mesure de  $\tau$  à l'aide de l'amortissement de l'amplitude de la tension sinusoïdale le long du système (cf. partie 5), on accède en fait, en posant :

$$k''a = \sqrt{\omega\tau''(\omega)/2},$$

au temps caractéristique apparent  $\tau''(\omega)$  donné par (avec  $\omega\tau \ll 1$ ) :

$$\tau''(\omega) \approx \tau(1 + \omega\tau/12),$$

d'où l'estimation  $\tau \approx \tau''(\omega) [1 - \omega\tau''(\omega)/12]$ .

Si cette mesure de  $\tau$  est faite en mesurant le déphasage  $k'a = \sqrt{\omega\tau'(\omega)/2}$ , alors le temps caractéristique apparent  $\tau'(\omega)$  est :

$$\tau'(\omega) \approx \tau (1 - \omega\tau/12),$$

d'où l'estimation  $\tau \approx \tau'(\omega) [1 + \omega\tau'(\omega)/12]$ .

La vitesse de phase est  $v_\phi = \omega/k' = a\omega/\text{Arctg}(\gamma_2)$ , d'où, dans la limite  $\omega\tau \ll 1$  :

$$v_\phi \approx a\sqrt{2\omega/\tau} (1 + \omega\tau/24).$$

On a  $v_\phi > a\sqrt{2\omega/\tau}$  dès que  $\omega\tau/24$  n'est pas négligeable devant 1.