Phénomènes de propagation unidimensionnels non dispersifs

Chapitre III : Vibrations transversales d'une corde

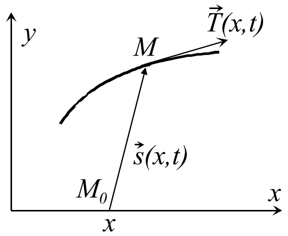
Objectifs :

- *Mise en équation de la propagation de vibrations transversales dans une corde ;*
- *Etude de la corde de Melde.*

1. Equation de d'Alembert

1.1. Position du problème

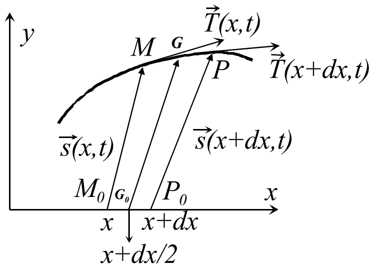
Nous considérons une corde, dont les extrémités sont fixées à des supports fixes. Nous supposons qu'elle est suffisament tendue pour pouvoir négliger son poids : au repos la corde est rectiligne et sa direction est confondue avec l'axe Ox.
Si la corde est écartée transversalement de sa position d'équilibre puis lachée, elle tend à y revenir et cette évolution se manifeste par la **propagation** de la déformation le long de la corde.
Nous supposons que la corde est infiniment souple : elle est sans raideur et elle n'oppose donc aucune résistance à sa torsion. Dans une telle situation la force interne entre éléments adjacents de la corde (appelée **tension**) a toujours pour direction celle de la tangente locale à la corde.
Nous appelons **tension** de la corde au point M la force, notée $\vec{T}(M,t)$, exercée par la partie de la corde située à droite de M sur la partie située à gauche. Au repos, pour tout point M de la corde $\vec{T}(M,t) = \vec{T_0} = cste$.
Le déplacement à l'instant t d'un point M d'abcisse initiale x sera noté $\vec{s}(x,t)$. Nous supposons que le problème est plan et le plan des vibrations est noté (O,x,y).



1.2. Equations du mouvement

1.2.1. Cas général

Soit μ la masse linéique (constante) de la corde tendue, au repos.
Nous nous plaçons dans le référentiel du laboratoire (évidement galiléen pour cette expérience).
Le système étudié est un petit élément de corde compris entre x et $x + dx$.



Bilan des forces :
- action de la corde située avant M : $-\vec{T}(x,t)$ d'après la troisième loi de Newton ;
- action de la corde située au delà de P : $\vec{T}(x+dx,t)$.

Appliquons le théorème du centre d'inertie au système : $m\vec{a}_{centre\,d'inertie} = \sum \vec{f}$
Nous obtenons alors :

$$
\begin{aligned}
(\mu dx)\,\frac{\partial^2 \vec{s}(x+dx/2,t)}{\partial t^2} &= \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t) \\
\text{soit } \mu \frac{\partial^2 \vec{s}(x+dx/2,t)}{\partial t^2} &= \frac{\vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t)}{dx}
\end{aligned}
$$

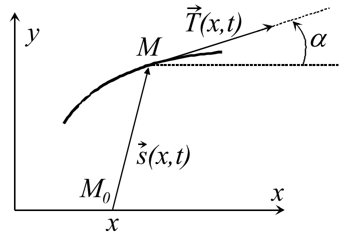
en faisant tendre dx vers zéro, il vient :

$$\boxed{\mu\frac{\partial^2 \vec{s}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{T}(x,t)}{\partial x}}$$

1.2.2. Approximation des petites amplitudes

Nous avons supposé que les vibrations se faisait dans le plan (O, x, y) :

$$\vec{s}\,(x,t) = s_x\,(x,t)\,\vec{e}_x + s_y\,(x,t)\,\vec{e}_y$$



Soit $\alpha\,(x,t)$ l'angle que fait la tangente avec l'axe horizontal Ox.
L'équation $\mu\frac{\partial^2 \vec{s}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{T}(x,t)}{\partial x}$ se projette alors sur les axes Ox et Oy :

$$\begin{cases} \mu\frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial[T_x(x,t)]}{\partial x} = \frac{\partial[T(x,t)\cos(\alpha(x,t))]}{\partial x} \\ \mu\frac{\partial^2 s_y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial[T_y(x,t)]}{\partial x} = \frac{\partial[T(x,t)\sin(\alpha(x,t))]}{\partial x} \end{cases}$$

Nous supposons que les vibrations sont d'amplitudes faibles ; nous obtenons alors deux simplifications :

- l'allongement relatif de la corde est suffisament petit pour **négliger les variations de tension**, soit $|T - T_0| \ll T_0$. Dans la suite nous prendrons $T \simeq T_0$:

$$\begin{cases} \mu\frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial t^2} \simeq T_0\frac{\partial[\cos(\alpha(x,t))]}{\partial x} \\ \mu\frac{\partial^2 s_y(x,t)}{\partial t^2} \simeq T_0\frac{\partial[\sin(\alpha(x,t))]}{\partial x} \end{cases}$$

- **l'angle α est toujours très faible** et nous effectuons donc des développements limités à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \mu\frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial t^2} \simeq T_0\frac{\partial[1]}{\partial x} = 0 \\ \mu\frac{\partial^2 s_y(x,t)}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial[\alpha(x,t)]}{\partial x} \end{cases}$$

  Le mouvement d'un point de la corde est négligeable dans la direction (Ox) : **les vibrations de la corde sont des ondes <u>tranverses</u>**.

1.2.3. Equation de propagation

Pour obtenir l'équation de propagation il faut exprimer α en fonction de s_y et remplacer dans l'équation $\mu\frac{\partial^2 s_y(x,t)}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial[\alpha(x,t)]}{\partial x}$.
Soit $\vec{t} = t_x\vec{e}_x + t_y\vec{e}_y$ le vecteur tangent à la corde en M. L'angle α est suffisament faible pour écrire

$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{t_y}{t_x}$$

Le vecteur tangent $\vec{t}$ est donné par

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \frac{1}{\left\|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x}\right\|}\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 + \overrightarrow{M_0M} = x\vec{e}_x + s_x\,(x,t)\,\vec{e}_x + s_y\,(x,t)\,\vec{e}_y \\ &\Rightarrow \quad \vec{t} = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x}\right\|}\left[\left(1 + \frac{\partial s_x\,(x,t)}{\partial x}\right)\vec{e}_x + \frac{\partial s_y\,(x,t)}{\partial x}\vec{e}_y\right] \\ &\Rightarrow \quad \vec{t} \simeq \frac{1}{\left\|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x}\right\|}\left[\vec{e}_x + \frac{\partial s_y\,(x,t)}{\partial x}\vec{e}_y\right] \quad \text{au } 1^{er} \text{ ordre} \end{aligned}$$

nous obtenons alors :

$$\alpha \simeq \frac{\partial s_y(x,t)}{\partial x} \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 s_y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial [\alpha(x,t)]}{\partial x} = T_0 \frac{\partial \left[\frac{\partial s_y(x,t)}{\partial x}\right]}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 s_y(x,t)}{\partial x^2}$$

Pour alléger les notations, posons $u = s_y$.

Dans l'approximation des faibles amplitudes, les ondes de déplacement transverse $u(x,t)$ se propageant le long d'une corde sans raideur sont solutions de l'équation de propagation unidimensionnelle de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

1.2.4. Couplage

Soit V la vitesse de déplacement transverse $V = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial s_y}{\partial t}$

$$\left\{\begin{array}{l} \mu\frac{\partial^2 s_y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial[T_y(x,t)]}{\partial x} \\ T_y(x,t) = T_0 \sin(\alpha(x,t)) \simeq T_0\alpha(x,t) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x} \\ T_y(x,t) = T_0\alpha(x,t) = T_0\frac{\partial s_y(x,t)}{\partial x} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x} \\ \frac{\partial T_y(x,t)}{\partial t} = T_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial s_y(x,t)}{\partial x}\right) = T_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s_y(x,t)}{\partial t}\right) = T_0\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \end{array}\right.$$

Nous obtenons donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \mu\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x} \\ \frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0\frac{\partial V}{\partial x} \end{array}\right.$$

Le phénomène de propagation a pour origine le couplage liant les évolutions de la vitesse transverse $V(x,t)$ et la composante tranverse de la force $T(x,t)$ de la tension de la corde :
- **une déformation de la corde entraîne l'apparition d'une force ;**
- **une tension entraîne l'apparition d'une vitesse de déplacement.**

2. Vibrations libres d'une corde fixée à ses extrémités

Soit une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Nous étudions les mouvements transverses libres de cette corde.

2.1. Recherche des solutions

Les solutions de l'équation d'onde de d'alembert à une dimension sont de la forme :

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Cette solution doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall t \quad u(0,t) = 0 \Rightarrow \forall t \quad f(t) + g(t) = 0 \\ \forall t \quad u(L,t) = 0 \Rightarrow \forall t \quad f\left(t - \frac{L}{v}\right) + g\left(t + \frac{L}{v}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad f\left(t - \frac{L}{v}\right) = -g\left(t + \frac{L}{v}\right) = f\left(t + \frac{L}{v}\right)$$

Les fonctions f et g sont donc périodique et de période temporelle $T = \frac{2L}{v}$ et donc de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi v}{L}$. Nous effectuons alors une décomposition en série de Fourier de la fonction f :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(n\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) + b_n \sin\left(n\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)\right] - \sum_{n=0}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(n\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)\right) + b_n \sin\left(n\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)\right)\right]$$

La solution est donc :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[((-2b_n)\cos(n\omega t) + (2a_n)\sin(n\omega t))\sin\left(n\omega\frac{x}{v}\right)\right]$$

il s'agit d'une **onde stationnaire** car les variables x et t sont découplées.

2.2. Modes propres de vibration

La solution générale précédente est la superposition d'ondes stationnaires monochromatiques $u_n(x,t) = F_n(x)\,G_n(t)$:

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \left[(-2b_n)\cos(n\omega t) + (2a_n)\sin(n\omega t)\right]\sin\left(n\omega\frac{x}{v}\right) \\ &= \left[F_{0_n}\sin\left(n\omega\frac{x}{v}\right)\right] G_{0n}\cos(n\omega t + \phi_n) \end{aligned}$$

- la période spatiale de $F_n(x) = F_{0_n}\sin\left(n\omega\frac{x}{v}\right) = F_{0_n}\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) = F_{0_n}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right)$ est $\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{\lambda_0}{n}$
- la fréquence temporelle de $G_n(t) = G_{0n}\cos(n\omega t + \phi_n)$ est $\nu_n = n\frac{v}{2L} = n\nu_0$
- période spatiale et fréquence temporelle sont liées par la relation $\lambda_n = v/\nu_n$

Les ondes se propageant librement le long d'une corde, de longueur L, fixée à ses extrémités $x=0$ et $x=L$, sont des superpositions des modes propres d'oscillation de la corde vibrante c'est à dire des superpositions d'ondes stationnaires monochromatiques de période spatiale λ_n et de fréquence temporelle ν_n quantifiées :

$$\boxed{\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2L}{n} \quad \text{et} \quad \nu_n = n\nu_0 = n\frac{v}{2L}}$$

L'onde est donnée par :

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(A_n\cos(2\pi\nu_n t) + B_n\sin(2\pi\nu_n t)\right)\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda_n}\right)\right]}$$

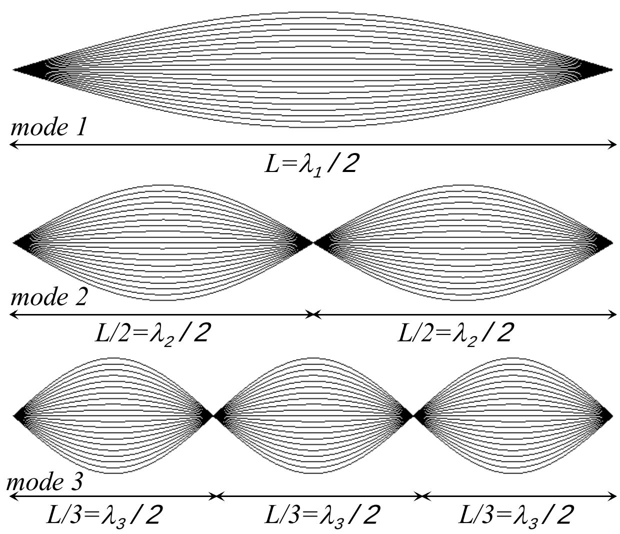
Lorsque la corde vibre dans le mode propre n :

- **elle est immobile aux extrémités $x=0$ et $x=L$ ainsi qu'aux points d'abcisse $x = p\,(L/n)$; ces points sont appelés <u>noeuds</u> de vibration sont au nombre de $n+1$.**
- **les points situés au milieu de deux noeuds successifs vibrent avec une amplitude maximale ; ces points d'abcisse $x = (p+1/2)\,(L/n)$ sont appelés <u>ventres</u> de vibration.**
- **$u_n(x,t)$ peut se s'écrire comme la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même pulsation, de même amplitude et se propageant en sens inverse.**

démonstration :

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \left[A_n\cos(2\pi\nu_n t) + B_n\sin(2\pi\nu_n t)\right]\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda_n}\right) \\ &= C_n\cos(2\pi\nu_n t + \phi_n)\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda_n}\right) \\ &= \frac{C_n}{2}\sin\left(2\pi\nu_n t + \phi_n + 2\pi\frac{x}{\lambda_n}\right) - \frac{C_n}{2}\sin\left(2\pi\nu_n t + \phi_n - 2\pi\frac{x}{\lambda_n}\right) \\ &= \frac{C_n}{2}\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda_n} + 2\pi\nu_n t + \phi_n\right) - \frac{C_n}{2}\sin\left(-2\pi\frac{x}{\lambda_n} + 2\pi\nu_n t + \phi_n\right) \\ &= \frac{C_n}{2}\sin(k_n x + \omega_n t + \phi_n) - \frac{C_n}{2}\sin(-k_n x + \omega_n t + \phi_n) \\ &= \frac{C_n}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - (k_n x + \omega_n t + \phi_n)\right) - \frac{C_n}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - (-k_n x + \omega_n t + \phi_n)\right) \\ &= \left(\frac{C_n}{2}\right)\cos\left(-k_n x + \left(\frac{\pi}{2} - \phi_n\right) - \omega_n t\right) + \left(-\frac{C_n}{2}\right)\cos\left(k_n x + \left(\frac{\pi}{2} - \phi_n\right) - \omega_n t\right) \end{aligned}$$

<u>*Remarque*</u> : le premier mode propre, de plus basse fréquence, est appelé **mode fondamental**. Les autres modes, appelés **harmoniques**, ont une fréquence multiple entier de la fréquence du mode fondamental.

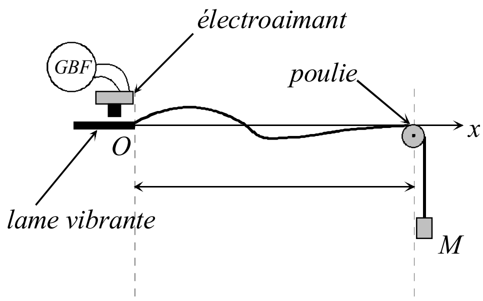


3. Corde de Melde

3.1. Dispositif expérimental

La code de Melde est une corde est tendue entre deux extrémités :

- la première est constituée par une lame vibrante, soumise à une électroaimant excitateur, qui effectue de petites oscillations verticales à la fréquence ν.
- la seconde est constituée par une poulie sur laquelle la corde, enroulée, est tendue par le poids d'une masse M ajustable.



3.2. Observations

A la mise en route de l'électroaimant, nous observons un régime transitoire qui laisse place à des oscillations forcées à la fréquence ν imposée par l'électroaimant. Nous pouvons alors étudier la réponse de la corde en fonction de la fréquence de l'excitation.
En général, l'amplitude des oscillations reste faible (même ordre de grandeur que l'amplitude du vibreur) sauf pour certaines fréquences ν_n pour lesquelles la corde entre en résonance.

3.3. Recherche des solutions

Nous étudions le régime forcé associé à une excitation sinusoïdale de pulsation ω. Nous recherchons donc les solutions $u(x,t)$ stationnaires sinusoïdales de l'équation de d'Alembert associée à la corde de Melde :

$$u(x,t) = F(x)\,G(t) = U\cos(kx+\phi_F)\cos(2\pi\nu t+\phi_G)$$

L'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow -k^2 u + \frac{(2\pi\nu)^2}{v^2}u = 0$$

Nous retrouvons la relation de dispersion $k = \frac{(2\pi\nu)^2}{v} = \frac{\omega}{v}$. Les constantes U, ϕ_F et ϕ_G sont déterminées par les conditions aux limites : le vibreur et la poulie imposent respectivement $u(0,t) = a\cos(2\pi\nu t)$ et $u(L,t) = 0$:

$$\Rightarrow \forall\ t \left\{ \begin{array}{l} U\cos(\phi_F)\cos(2\pi\nu t + \phi_G) = a\cos 2\pi\nu t \\ U\cos(kL + \phi_F)\cos(2\pi\nu t + \phi_G) = 0 \end{array} \right.$$

Les deux conditions précédentes sont réalisées si $\phi_F = \pi/2 - kL$, $\phi_G = 0$ et $U = a/\sin(kL)$:

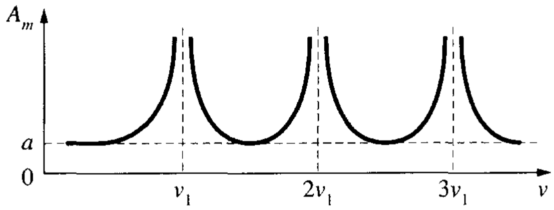
$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{a}{\sin(kL)}\cos(kx + \pi/2 - kL)\cos(2\pi\nu t) = \frac{a}{\sin(kL)}\sin(k(L-x))\cos(2\pi\nu t)$$

3.4. Etude de l'amplitude en fonction de la fréquence

Soit ν_i la fréquence de $i^{ième}$ mode propre : $\nu_i = i\frac{v}{2L}$

- Pour $\nu < \nu_1/2$, nous avons $k = 2\pi\nu/v < \pi\nu_1/v = \frac{\pi}{2L}$; d'où pour un point de la corde $(0 \le L - x \le L)$ l'inégalité $0 < \sin(k(L-x)) < 1$. Le maximum d'amplitude est a au niveau du vibreur.
- Pour $\nu > \nu_1/2$, l'amplitude maximale (ventre de vibrations) se situe aux points pour lesquels $|\sin(k(L-x))| = 1$ et elle est égale à $A_m = \frac{a}{|\sin(kL)|}$.

  La courbe donnant A_m en fonction de la fréquence est tracée ci-dessous. Pour les fréquences des modes propres nous avons $k = 2\pi\nu_i/v = \frac{\pi i}{L}$, il y a résonance avec une amplitude des vibrations pour un ventre tendant théoriquement vers l'infini.



Il y a résonance lorsque la fréquence ν devient égale à l'une des fréquences propres de la corde avec extrémités fixes. Aux fréquences intermédiaires, $\nu = (n + 1/2)\nu_1$, A_m a une valeur égale à a.
Expérimentalement on observe effectivement une augmentation importante de l'amplitude lorsque la fréquence d'excitation ν devient voisine de l'une des fréquences propres de la corde. Le dénombrement des fuseaux, ou ventres, que forme la corde permet immédiatement de déterminer la valeur de l'entier n.
L'amplitude cependant reste finie. On peut en attribuer la raison à des amortissements jusque là négligés. Une corde vibrante émet en effet des ondes sonores dans l'air; elle transmet aussi des vibrations aux supports qui la maintiennent, jamais parfaitement rigides; d'où des «pertes» d'énergie.
En fait la véritable cause de limitation de l'amplitude est la non-linéarité du système. Lorsque l'amplitude est suffisamment grande, la linéarisation effectuée pour aboutir à l'équation d'ondes n'est plus valable. Plus précisément, l'allongement de la corde produit une augmentation de la tension T, qui ne peut être négligée; cette tension ne peut plus être considérée comme constante.
Qualitativement, la force moyenne de rappel vers la position d'équilibre croît avec l'amplitude plus que ne le donne l'approximation linéaire. Cela a pour conséquence une augmentation de la fréquence propre avec l'amplitude des oscillations; la non-linéarité rend ces oscillations non-harmoniques et cause aussi l'apparition de phénomène d'hysterèsis dans le régime d'oscillations.

4. Réflexion et transmission à une discontinuité

Une discontinuité localisée des propriétés de la corde modifie la propagation d'une onde. En général, une onde progressive incidente $u_i(x,t)$ produit, à l'endroit de la discontinuité, une onde réfléchie $u_r(x,t)$ et une onde transmise $u_t(x,t)$. Pour obtenir ces ondes il faut appliquer les relations de continuité :

- la corde n'est pas coupé à l'endroit de la discontinuité $x = x_0$, ce qui impose $u_i(x_0,t) + u_r(x_0,t) = u_t(x_0,t)$
- il y a une seconde relation de continuité qui dépend de la nature de la discontinuité.

Dans la pratique nous étudierons le cas du raccord entre deux cordes différentes ou le cas d'une masse ponctuelle fixée sur une corde.

5. Exercices

Exercice n° 01 :

Un fil parfaitement flexible, de section constante, de longueur $2L$, de masse linéique μ, est fixé par ses extrémités A et B dans un plan vertical xOz (Oz verticale ascendante ; Ox horizontale). On pose $AO = OB = d$; sous l'action de son poids, le fil à l'équilibre prend une flèche définie par la longueur $|OS| = h$. Un point M du fil est repéré par ses coordonnées cartésiennes x et z, ou par son abscisse curviligne $s = \overset{\frown}{SM}$. On admet que la tension exercée au point M par la partie MB du fil sur la partie AM est du type $T.\vec{t}$ où $\vec{t}$ est le vecteur unitaire de la tangente au fil en M.

1) On considère un élément MN du fil, de longueur ds. Montrer que l'équilibre de cet élément se traduit par l'équation différentielle $d(T.\vec{t}) + \mu\vec{g}.ds = \vec{0}$.

2.a) En déduire les équations suivantes, où α et β sont deux constantes :

$$T.\frac{dx}{ds} = \alpha \quad \text{et} \quad T.\frac{dz}{ds} = \mu g s + \beta$$

2.b) Au point S, on note $T(S) = T_0$. Exprimer les constantes α et β.

3) On pose $a = T_0/(\mu g)$. On se propose de déterminer, dans cette modélisation, l'équation $z(x)$ de la courbe prise par le fil .

3.a) Montrer que la fonction dérivée est $dz/dx = s/a$.

3.b) En déduire la courbe $z(x)$ prise par le fil. On rappelle que la primitive de la fonction $1/\sqrt{1+u^2}$ est la fonction $\mathrm{argsh}(u)$.

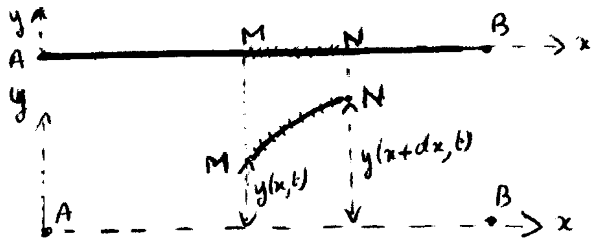
4) Utiliser les résultats précédents pour établir les relations entre :

4.a) les grandeurs L, d et a.

4.b) les grandeurs h, L et a.

4.c) les grandeurs T, T_0, x et a.

Exercice n° 02 :



Un fil d'acier à l'équilibre, tendu entre les points A et B, est confondu avec l'axe Ax ; il est alors caractérisé par sa masse linéique μ,sa longueur $AB = 2L$ et sa tension uniforme T_0. On se propose d'étudier les petits déplacements du fil dans une direction orthogonale à Ax. On considère un élément du fil MN de longueur dx ; à l'instant t, on note $y(x,t)$ le petit déplacement du point M et $y(x+dx,t)$ celui du point N : on néglige l'action de la pesanteur et on admet que la norme de la tension vaut toujours T_0.

1) En raisonnant sur l'élément MN, montrer que le mouvement est décrit par une équation de type $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$.

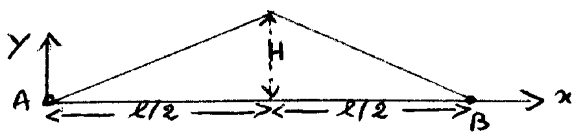
2) Quelle est l'expression de la vitesse de phase des ondes dans ce fil ?

3) On souhaite que les solutions $y(x,t)$ soient du type stationnaire sinusoidal : $y(x,t) = y_0.\cos(k.x+\varphi).\cos(\omega t+\psi)$,où y_0, φ et ψ sont des constantes.

3.a) Etablir la relation liant k à la pulsation ω. Conclure.

3.b) Quelle est la fréquence f_0 du mode fondamental (valeur la plus petite de la fréquence), exprimée en fonction de v (vitesse de phase) et de L ?

Exercice n° 03 :



Une corde vibrante de longueur ℓ est fixée à ses deux extrémités A et B. On donne à la corde un déplacement transversal $Y(x,t=0) = f(x)$ hors de sa position d'équilibre, à l'instant $t = 0$, et ensuite on la lâche.

1) Montrer qu'une solution particulière du déplacement transversal de cette corde est : $Y(x,t) = b.\sin(N.\pi x/\ell).cos(N.\pi ct/\ell)$.

2) En déduire la solution générale $Y(x,t)$.

3) La corde d'extrémités fixes est écarte de sa position d'équilibre, en son milieu, d'une hauteur H. Elle est ensuite lâchée. Trouver le déplacement $Y(x,t)$.

4) Trouver les fréquences propres et les modes normaux de la corde vibrante.

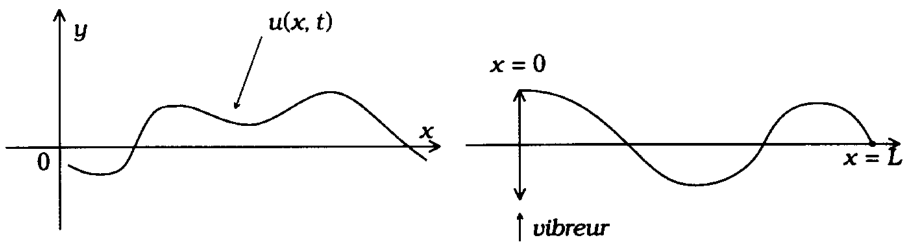


Figure 1:

Exercice n° 04 (Mines Ponts) :

Une corde tendue se confond au repos avec l'axe Ox ; lorsqu'elle bouge, elle est animée de petits mouvements transversaux parallèles à Ou. On notera μ la masse linéique de la corde et T sa tension. On supposera que la tension de la corde reste constante tant que les écarts à la position d'équilibre restent faibles. On négligera les effets de la pesanteur.

1) Etablir l'équation aux dérivées partielles dont la fonction $y\,(x,t)$ est solution. Préciser la forme générale de cette solution, on notera c la vitesse de propagation.

2) La corde est tendue entre les points $x = 0$ et $x = L$. L'extrémité en $x = 0$ est solidaire d'un vibreur qui lui impose un mouvement sinusoïdal de pulsation ω : $y\,(0,t) = U_0 \cos \omega t$. Etablir l'expression de $y\,(x,t)$; préciser les caractéristiques intéressantes du mouvement. Pour quelles valeurs de ω y a-t-il résonance ? Commenter.

Exercice n° 05 (Centrale) :

Une corde «infinie » est constituée de deux parties :

$x < 0$: masse linéique μ_1, tension T,

$x > 0$: masse linéique μ_2, tension T.

Une onde progressive se dirige vers le point O en provenant de la région des $x < 0$.

1) Déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission t. On introduira la quantité $n = \sqrt{\mu_2/\mu_1}$. Commenter les résultats obtenus. Que se passe-t-il pour les cas limites $\mu_2 = 0$ et μ_2 infini ?

2) Vérifier la conservation de l'énergie.

Exercice n° 06 :

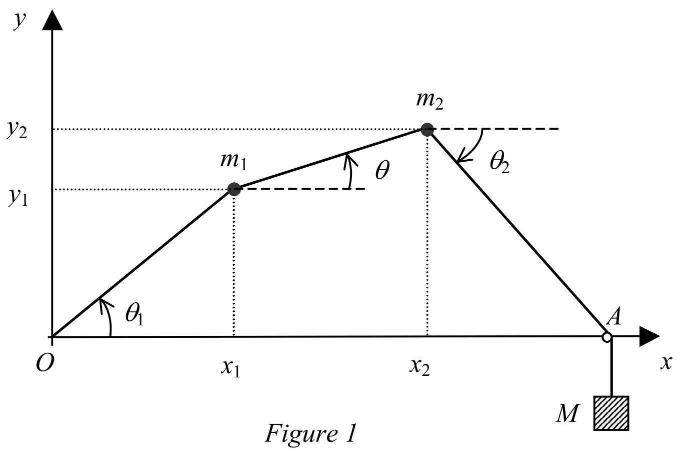


Figure 1

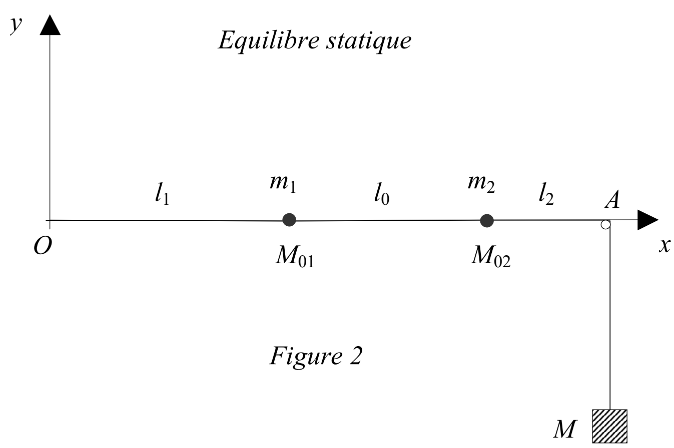


Figure 2

Un fil inextensible, de masse négligeable, est tendu, par une masse M, entre deux point O et A situés sur la même horizontale. Ce fil est plombé à l'aide de deux masses m_1 et m_2 très inférieures à M ; ces deux masses sont fixées sur le fil.

A l'équilibre statique, m_1 et m_2 sont respectivement en M_{01} et M_{02} avec $OM_{01} = l_1$, $M_{01}M_{02} = l_0$, $M_{01}A = l_2$ (figure 2).

On désire étudier les petits mouvements des masses m_1 et m_2 en négligeant tout terme du second ordre en y_i/l_i.

La figure 1, où les déplacement sont très exagérés pour une meilleure lisibilité, précise les notations à utiliser.

1) Exprimer, dans le cadre des approximations envisagées, les angles θ_1, θ, θ_2 en fonction des déplacements verticaux des masses.

2) Compte tenu des hypothèses $m_1 \ll M$ et $m_2 \ll M$, que peut-on dire du module de la tension le long du fil ?

3) Etablir le système d'équations différentielles satisfait par y_1 et y_2. On posera :

$$\omega_1^2 = \frac{Mg}{m_1}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_0}\right) \text{ et } \omega_2^2 = \frac{Mg}{m_2}\left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_0}\right)$$

4) Réécrire et résoudre le système précédent dans le cas où $m_1 = m_2 = m$ et $l_1 = l_2 = l_0$. Ecrire le mouvement le plus général des masses m_1 et m_2.

5) Décrire les mouvements obtenus avec les conditions initiales suivantes :

- $y_1(0) = a = -y_2(0)$; $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$.
- $y_1(0) = a = y_2(0)$; $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$.