

LP10 - Induction électromagnétique

Mathieu Sarrat

26 avril 2019

0.1 Pré-requis

- Équations de Maxwell en régime stationnaire
- Force de Lorentz et force de Laplace
- Champ magnétique généré par un solénoïde infini

0.2 Objectifs

- Introduire la notion d'induction électromagnétique

1 Introduction

2 Mise en évidence

2.1 Champ électromagnétique, force de Lorentz et relativité galiléenne

Rappelons tout d'abord qu'une particule chargée q plongée dans un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) est soumise à la force de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_{\mathcal{R}} \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

où $\mathbf{v}_{\mathcal{R}}$ désigne la vitesse de la particule **dans le référentiel d'étude**. Ainsi, par rapport à un autre référentiel \mathcal{R}' , la force de Lorentz s'écrit

$$\mathbf{F}' = q'(\mathbf{E}' + \mathbf{v}_{\mathcal{R}'} \times \mathbf{B}'), \quad (2)$$

où figure $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'}$ la vitesse de la particule par rapport à \mathcal{R}' .

En relativité galiléenne, la charge électrique et la force sont des grandeurs invariantes par changement de référentiel galiléen. Si \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont deux référentiels galiléens,

$$q' = q \quad \text{et} \quad \mathbf{F}' = \mathbf{F}. \quad (3)$$

En utilisant la loi de composition des vitesses galiléenne $\mathbf{v}_{\mathcal{R}} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}'} + \mathbf{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, où $\mathbf{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ désigne la vitesse d'entraînement, on trouve les formules de transformation suivantes,

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \mathbf{B}. \quad (4)$$

La partie électrique de l'interaction n'est pas perçue de la même manière par un observateur placé dans \mathcal{R}' et un autre placé dans \mathcal{R} . Lorsque des charges se déplacent dans un conducteur en mouvement, elles ressentent un champ électrique dépendant directement du mouvement du conducteur dans le champ magnétique. Le champ électrique et le champ magnétique sont étroitement liés, d'où l'importance accordée au concept plus général de champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Ceci est encore plus vrai en relativité restreinte.

2.2 L'expérience de Faraday (1831)

Soient deux circuits électriques C_1 et C_2 placés de telle sorte que le flux du champ magnétique créé par l'un à travers l'autre soit suffisamment important (on introduit une bobine dans chacun de ces circuits pour pouvoir générer un champ magnétique significatif). Le circuit C_1 est alimenté par un générateur et comporte un interrupteur K . Le circuit C_2 ne comporte qu'un galvanomètre permettant de mesurer l'intensité du courant électrique mais aussi son sens. Les notations utilisées sur le schéma représentent le sens positif des courants i_1 et i_2 . Nous allons effectuer plusieurs manipulations pour mettre en évidence le phénomène d'induction électromagnétique.

Circuits fixes :

Expérience 1 :

- Initialement : interrupteur K ouvert, donc $i_1 = 0$ et $i_2 = 0$
- Manip : fermeture de K et augmentation progressive du courant i_1 débité par le générateur. Mesure de $i_1 > 0$ dans C_1 et mesure de $i_2 < 0$ tant que i_1 varie.

Expérience 2 : suite de 1

- Initialement : interrupteur K fermé, $i_1 > 0$ et constant mesuré, $i_2 = 0$
- Manip : diminuer i_1 et constater l'apparition de $i_2 > 0$ dans C_2

Expérience 3 : inverser la polarité du générateur et refaire l'expérience 1, constater l'inversion des signes des courants i_1 et i_2 .

Circuits mobiles :

C_2 peut bouger par rapport à C_1 .

Expérience 1 :

- Initialement K fermé, donc $i_1 > 0$ et $i_2 = 0$.
- On éloigne C_1 de C_2 : $i_2 > 0$ circule dans C_2 tant qu'il y a du mouvement.

Expérience 2 :

- Initialement K fermé, donc $i_1 > 0$ et $i_2 = 0$.
- On éloigne C_2 de C_1 : $i_2 > 0$ circule dans C_2 tant qu'il y a du mouvement.

Le courant induit est d'autant plus intense que le déplacement est rapide.

2.3 Définition de la force électromotrice induite

Consignes : aller directement à l'expression de $e(t)$ dans le cas général, en expliquant la signification de chaque grandeur (+ schéma), détailler le cas du circuit fixe et expliquer la relation entre les deux formules à la lumière de la transformation de Galilée de (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Expliquer que $e(t)$ est calculée à partir du travail électromoteur (le travail de la force de Lorentz servant à mettre en mouvement les charges dans le conducteur).

Travail fourni par le champ électromagnétique

L'apparition d'un courant dans le conducteur est liée à la mise en mouvement des charges sous l'effet de la force de Lorentz. Considérons un élément de volume matériel $d\mathcal{V}$ centré au point M appartenant au conducteur. Ce morceau de conducteur est animé d'une vitesse \mathbf{V} dans le référentiel \mathcal{R} et est plongé dans un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Cet élément contient deux types de charges électriques :

- des charges fixes (les ions du réseau), de densité volumique de charge ρ_f . Elles se déplacent ensemble, avec la vitesse \mathbf{V} de l'élément $d\mathcal{V}$,
- des charges mobiles (les électrons de conduction), de densité volumique de charge ρ_m et qui se déplacent à la vitesse $\mathbf{u} + \mathbf{V}$, où \mathbf{u} désigne la vitesse de dérive des électrons dans le conducteur, responsable du courant électrique. C'est la vitesse moyenne des électrons dans le câble (leur vitesse exacte à laquelle on retire leur vitesse d'agitation thermique, aléatoire). La densité volumique de courant s'écrit donc $\mathbf{J} = \rho_m \mathbf{u}$.

On suppose que le conducteur est électriquement neutre : $\rho_m + \rho_f = 0$.

La force agissant sur l'ensemble des charges de $d\mathcal{V}$ s'écrit donc

$$d\mathbf{F}_L = d\mathbf{F}_m + d\mathbf{F}_f = \rho_m d\mathcal{V} [\mathbf{E} + (\mathbf{u} + \mathbf{V}) \times \mathbf{B}] + \rho_f d\mathcal{V} [\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (5)$$

Remarque : la force totale $\mathbf{F}_L = \int_V d\mathbf{F}_L$, rappelons-le, est appelée force de Laplace.

Entre t et $t + dt$ les charges contenues dans $d\mathcal{V}$ reçoivent de la force de Lorentz une énergie

$$\begin{aligned} \delta^2 W &= \rho_m d\mathcal{V} [\mathbf{E} + (\mathbf{u} + \mathbf{V}) \times \mathbf{B}] \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{V}) dt + \rho_f d\mathcal{V} [\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{V} dt \\ &= d\mathcal{V} dt \left[\rho_m \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} + \underbrace{(\rho_m + \rho_f) \mathbf{E} \cdot \mathbf{V}}_{=0} \right] = \rho_m \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V} dt \\ \delta^2 W &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\mathcal{V} dt \end{aligned}$$

Les autres termes sont nuls ou s'éliminent entre eux. On voit que la partie magnétique ne travaille pas : l'action de \mathbf{B} sur les charges mobiles est entièrement transmise à l'ensemble des charges du conducteur sans pertes. L'ensemble du travail fourni aux charges l'est grâce au champ électrique.

Pour l'ensemble du conducteur, le travail reçu par les charges vaut

$$\delta W = \int \delta^2 W = dt \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\mathcal{V}. \quad (6)$$

Supposons un conducteur filiforme C de section S et donc par conséquent des champs homogènes sur toute la section du câble : $\mathbf{J} d\mathcal{V} = i d\mathbf{r}$

$$\delta W = i dt \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (7)$$

Force électromotrice

L'équation (??) permet de calculer le travail total fourni par le champ électromagnétique aux charges du matériau conducteur. Dans le cas générale, seule une partie de cette énergie sert à mettre les charges en mouvement dans le circuit : on parle de **travail électromoteur** δW_m . On définit la force électromotrice à partir de ce travail électromoteur :

$$e(t) \equiv \frac{\delta W_m}{\delta q}. \quad (8)$$

On calcule le travail électromoteur de la façon suivante. Pour un élément de conducteur $d\mathcal{V}$, ce travail se résume à

$$\delta_m^2 W = d\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{u} dt \quad (9)$$

$$= \rho_m d\mathcal{V} dt [\mathbf{E} + (\mathbf{u} + \mathbf{V}) \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{u} \quad (10)$$

$$= d\mathcal{V} dt [\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{J} \quad (11)$$

puisque les charges dites fixes n'ont aucun mouvement dans \mathcal{R}' . Sur tout le circuit

$$\delta W_m = dt \iiint_{\mathcal{V}} [\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] d\mathcal{V} = i dt \oint_C [\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{r} \quad (12)$$

la dernière équation étant vraie pour un conducteur filiforme C .

Par conséquent, dans un circuit en mouvement quelconque, déformable ou non, la force électromotrice a pour expression

$$e(t) = \oint_C [\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{V}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r}. \quad (13)$$

où $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ désigne la vitesse de l'élément de circuit situé au point \mathbf{r} .

Dans le cas où le circuit est immobile, cas particulier mais très important en termes d'applications pratiques, cette expression se réduit à

$$e(t) = \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (14)$$

c'est à dire à la circulation du champ électrique le long du circuit. En régime variable et contrairement à ce que l'on rencontre en électrostatique, cette circulation n'est pas nulle (nous le verrons plus loin).

Remarque : l'expression de $e(t)$ paraît dépendre du référentiel dans lequel on se place, puisque la vitesse du circuit intervient explicitement dans le calcul. En réalité, $e(t)$ (et c'est vérifié expérimentalement) est la même dans tout référentiel galiléen, du fait de l'invariance des lois physiques entre deux référentiels galiléens. À un instant donné et en un point M quelconque du circuit, il est possible de définir un référentiel galiléen \mathcal{R}' en translation dans \mathcal{R} . On peut alors utiliser les notations suivantes

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{/\mathcal{R}'} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}. \quad (15)$$

On reconnaît alors sous l'intégrale l'expression du champ électrique \mathbf{E}' perçu par une charge située au point \mathbf{r} dans le conducteur, écrite en fonction des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} relatifs au référentiel \mathcal{R} . Dans le référentiel où le circuit (s'il est indéformable) est immobile,

$$e(t) = \oint_C \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C [\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{V}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r}. \quad (16)$$

Remarque : on vérifie bien que la différence entre δW et δW_m correspond au travail des forces de Laplace :

$$\delta^2 W - \delta^2 W_m = \rho_m \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V}dt - \rho_m [\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V}dt \quad (17)$$

$$\delta^2 W - \delta^2 W_m = -\rho_m [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{u} d\mathcal{V}dt \quad (18)$$

$$\delta^2 W - \delta^2 W_m = [\mathbf{B} \times \mathbf{V}] \cdot \mathbf{J} d\mathcal{V}dt \quad (19)$$

$$\delta^2 W - \delta^2 W_m = [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{V} d\mathcal{V}dt \quad (20)$$

d'où

$$\delta W_L = \delta^2 W - \delta^2 W_m = dt \iiint [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{V} d\mathcal{V}. \quad (21)$$

Ces forces ne travaillent qu'en cas de mouvement d'une portion du circuit ou du circuit dans sa totalité.

3 Lois de l'induction

3.1 Relations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Thomson

Relation de Maxwell-Faraday

Une équation fondamentale de l'électromagnétisme permet de modéliser et de décrire le phénomène d'induction. Il s'agit de l'équation de Maxwell-Faraday (une des quatre équations de Maxwell), que nous écrirons sous sa forme locale (valable en tout point) :

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (22)$$

Cette équation est souvent qualifiée de **relation structurelle** du champ électromagnétique : les densités de charge et de courant n'interviennent pas dans son écriture. Cette équation permet de relier la création d'un champ électrique à la variation temporelle d'un champ magnétique, phénomène que nous avons mis en évidence dans la section précédente puisque nous avons relié l'apparition d'une force électromotrice à la variation du flux du champ magnétique.

Pour préciser les choses, établissons la formulation globale de cette loi : soit un contour quelconque \mathcal{C} (qui peut ou non coïncider avec un circuit électrique C) sur lequel s'appuie une surface ouverte notée \mathcal{S} . L'intégration sur \mathcal{S} de l'équation de Maxwell-Faraday conduit à

$$0 = \iint_{\mathcal{S}} \left[\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} \quad (23)$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (24)$$

en appliquant le théorème de Stokes, $d\mathbf{r}$ désignant un élément de longueur du contour \mathcal{C} . On obtient finalement

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (25)$$

En régime variable, le champ électrique n'est pas à circulation conservative, contrairement au régime stationnaire. La valeur de cette circulation dépend directement de la variation du champ magnétique au cours du temps. Les conséquences de cette équation sur la nature des potentiels électrique V et magnétique \mathbf{A} seront détaillées dans une leçon ultérieure.

Relation de Maxwell-Thomson

Il existe une seconde relation structurelle du champ électromagnétique, qui nous aidera à établir les lois de l'induction mais qui ne décrit pas ces phénomènes contrairement à Maxwell-Faraday. C'est la relation de Maxwell-Thomson, qui s'écrit, sous sa forme locale

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (26)$$

Soit un volume \mathcal{V} quelconque (contenant ou non de la matière), délimité par une surface **fermée** \mathcal{S} . L'intégration sur \mathcal{S} conduit à la formulation globale de la relation de Maxwell-Thomson :

$$0 = \iiint \text{div } \mathbf{B} d\mathcal{V} \quad (27)$$

$$= \oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi. \quad (28)$$

par application du théorème de Green-Ostrogradsky. Le flux total de champ magnétique Φ transitant à travers toute surface fermée \mathcal{S} est nul : l'équation de Maxwell-Thomson implique donc la **conservation du flux magnétique**. Si on divise \mathcal{S} en deux parties \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , cette relation implique que le flux sortant par \mathcal{S}_1 revient par \mathcal{S}_2 et vice-versa. C'est cette équation qui interdit l'existence d'un monopole magnétique en électromagnétisme classique.

3.2 Lois de l'induction

Expression générale de la force électromotrice induite

Reprenons notre circuit électrique C , qui peut être en mouvement dans le référentiel d'étude \mathcal{R} . On combine l'expression générale de la force électromotrice induite $e(t)$ avec la forme globale de l'équation de Maxwell-Faraday, appliquée à un contour \mathcal{C} coïncidant avec le circuit C . Tout élément de contour $d\mathbf{r}$ coïncide avec un élément $d\mathbf{l}$ du circuit C :

$$e(t) = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (29)$$

$$= \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (30)$$

$$= - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (31)$$

On en déduit une expression générale de la force électromotrice induite $e(t)$ en fonction de la variation temporelle de \mathbf{B} . Cette expression ne fait appel qu'à des grandeurs, des contours et des surfaces bien définis à chaque instant dans le référentiel d'étude \mathcal{R} . La vitesse \mathbf{V} désigne la vitesse d'un point du circuit C (par rapport à \mathcal{R}) qui coïncide à l'instant t avec un point du contour \mathcal{C} . Cette expression est valable quelque soit le mouvement du conducteur et dépend naturellement du référentiel choisi.

On distingue deux contributions à la force électromotrice induite :

- une contribution liée à la seule variation temporelle de \mathbf{B} (première situation présentée dans la première partie de la leçon). En effet, si le circuit est immobile, $\mathbf{V} = 0$ en tout point de C et par conséquent

$$e(t) = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (32)$$

En effet, si le circuit ne bouge pas il est forcément indéformable : la surface d'intégration est invariante au cours du temps. Cette situation est appelée **induction statique** (circuit fixe) ou **induction de Neumann**.

- une contribution liée au déplacement du conducteur. Ce déplacement peut être un déplacement d'ensemble ou une déformation du circuit. Si le champ magnétique est stationnaire,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{et donc} \quad e(t) = \oint_C (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (33)$$

On parle dans ce cas d'**induction motionnelle** ou encore d'**induction de Lorentz**. Une illustration classique de ce type d'induction est le problème des Rails de Laplace, que l'on traitera en détail en TD. Donnons cependant une brève présentation de ce système : un barreau conducteur est posé sur deux rails, également conducteurs. Le contact entre barreau et rails est glissant : le barreau se déplace le long des rails avec une vitesse $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$. Le circuit est fermé par un voltmètre connecté entre les rails. On place le système dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, de direction perpendiculaire au plan formé par les rails. Tant que le barreau bouge, le voltmètre mesure une force électromotrice que l'on peut calculer à partir de l'expression générale de $e(t)$.

Loi de Faraday et loi de Lenz

On ne s'intéresse ici qu'à des circuits électriques de constitution invariante dans le temps (pas de déformation du circuit au cours du temps, mais celui-ci peut se déplacer en bloc dans le référentiel d'étude \mathcal{R}). On a établi expérimentalement un lien entre la force électromotrice induite $e(t)$ et la variation temporelle du flux magnétique Φ à travers le circuit. Essayons d'établir mathématiquement une relation entre ces deux grandeurs.

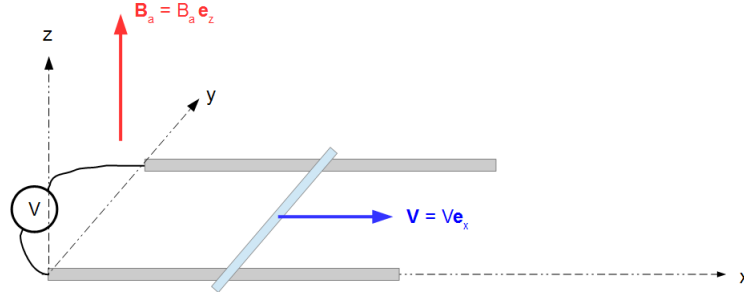


FIGURE 1 – Rails de Laplace

Dans ce but, considérons un circuit C auquel on superpose à chaque instant un contour \mathcal{C} de sorte que le contour bouge avec le circuit avec la vitesse \mathbf{V} par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} . Le champ magnétique \mathbf{B} dans lequel est plongé le circuit dépend du temps et de la position (non stationnaire et non homogène).

Mathématiquement :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Phi(t+dt) - \Phi(t)}{dt} = \frac{1}{dt} \left[\iint_{S(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t+dt) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \right] \quad (34)$$

On ajoute deux intégrales opposées pour faire apparaître deux variations de flux,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{dt} \iint_{S(t+dt)} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t+dt) - \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{dt} \left[\iint_{S(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \right] \quad (35)$$

- la première due à la variation temporelle intrinsèque de \mathbf{B} ,
 - la seconde due au déplacement de C à travers la structure de \mathbf{B} .
- On peut démontrer que, puisque $\text{div } \mathbf{B} = 0$,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} - \oint_{C(t)} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (36)$$

On reconnaît là $-e(t)$, d'où la **loi de Faraday** :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (37)$$

Le flux est calculé à partir d'une surface ouverte quelconque s'appuyant sur C , de sorte que $\Phi(t)$ ne dépend que du temps et de la géométrie du circuit C .

Interprétons cette loi : une augmentation du flux à travers C ($d\Phi/dt > 0$) entraîne l'apparition d'une f.e.m $e(t)$ qui tend à faire circuler un courant. Ce courant va générer un champ magnétique dont le flux s'oppose à l'augmentation de flux que l'on impose : ce constat est la **Loi de Lenz**. La loi de Faraday est souvent appelée loi de Lenz, voire parfois loi de Lenz-Faraday. Cette loi permet d'interpréter le comportement constaté lors de l'expérience d'introduction.

Le phénomène d'induction dans un circuit indéformable en mouvement (cas particulier de l'induction de Lorentz) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen obéit à la loi de Faraday, tout comme l'induction au sens de Neumann c'est à dire dans un circuit fixe. En effet, il est possible de trouver à chaque instant un référentiel d'étude en translation par rapport au référentiel du laboratoire dans lequel chaque élément de ce circuit est au repos. Les lois de la physique (donc la force de Lorentz, donc la force électromotrice puisque le circuit ne se déforme pas) doivent être les mêmes dans deux référentiels galiléens. On peut illustrer ceci assez facilement en se plaçant dans le régime non relativiste (ou faiblement relativiste) : on peut appliquer

la transformation de Galilée, qui implique que le champ magnétique est identique quelque soit le référentiel galiléen utilisé comme cadre d'étude. Il y a donc égalité du champ magnétique dans deux référentiels galiléens à chaque instant, et donc égalité du flux magnétique puisque le circuit est de forme invariante. Par conséquent la variation du flux magnétique à travers le circuit est la même dans les deux référentiels. C'est pour cela que l'on retrouve la loi de Faraday pour l'induction statique et pour l'induction motionnelle dans un circuit de forme constante.

Pour ces raisons, la loi de Faraday ne s'applique qu'au cas d'un circuit non-déformable. La loi de Faraday ne peut donc pas fonctionner pour résoudre le problème des rails de Laplace puisque le circuit n'a pas une constitution invariante dans le temps : il n'existe pas de référentiel où chaque point du contour coïncidant avec le circuit soit au repos. On doit utiliser l'expression générale de la f.e.m pour mener son calcul sans commettre d'erreur.

Remarque : démonstration utilisable avec schéma du Pérez La première variation peut s'écrire en fonction de la dérivée temporelle partielle de \mathbf{B} :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{dt} \iint_{\mathcal{S}(t+dt)} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t+dt) - \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \cdot d\mathcal{S} + \frac{1}{dt} \left[\iint_{\mathcal{S}(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathcal{S} - \iint_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathcal{S} \right] \quad (38)$$

Nous n'avons pas encore caractérisé précisément les surfaces d'intégration. Nous allons faire un choix qui nous permettra de réécrire la seconde variation de flux dans l'expression du dessus. La surface $\mathcal{S}(t)$ s'appuie sur $\mathcal{C}(t) \equiv C(t)$ et $\mathcal{S}(t+dt)$ s'appuie sur $\mathcal{C}(t+dt) \equiv C(t+dt)$. Ce sont les seules conditions que doivent satisfaire ces surfaces. On a le droit de choisir ces surfaces comme sur le schéma. On ajoute $\Delta\mathcal{S}$ la surface balayée par le contour lors de son déplacement entre t et $t+dt$. L'ensemble $\mathcal{S}(t) + \mathcal{S}(t+dt) + \Delta\mathcal{S}$ forme une surface fermée :

$$- \iint_{\mathcal{S}(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathcal{S} + \iint_{\mathcal{S}(t+dt)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathcal{S} + \iint_{\Delta\mathcal{S}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}_c d\mathcal{S} = 0, \quad (39)$$

avec $\mathbf{n}_c d\mathcal{S} = \mathbf{V}dt \times d\mathbf{r}$. Rotation du produit mixte et CQFD.

4 Conséquences et applications du phénomène d'induction

4.1 Potentiel électromagnétique

Potentiel vecteur

L'équation de Maxwell-Thomson $\text{div } \mathbf{B} = 0$ implique que le champ magnétique puisse être écrit sous la forme d'un rotationnel, comme en régime stationnaire :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (40)$$

où \mathbf{A} est appelé **potentiel vecteur**.

Potentiel scalaire

Pour une surface \mathcal{S} s'appuyant sur un contour \mathcal{C} ,

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (41)$$

d'après le théorème de Stokes. La formulation globale de Maxwell-Faraday se réécrit

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} \quad (42)$$

d'où

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (43)$$

Il en résulte que le champ $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ est à circulation conservative. On peut donc définir en régime variable une fonction V , appelée **potentiel scalaire** telle que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } V. \quad (44)$$

D'où une réécriture de \mathbf{E} en fonction des potentiels :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (45)$$

- Dans le cas général, les potentiels scalaire et vecteur sont indissociables : on parle de **potentiel électromagnétique** (V, \mathbf{A}) .
- En régime stationnaire (distributions de charges et de courants invariantes dans le temps), ce couple se dissocie entre un potentiel scalaire électrique et un potentiel vecteur magnétique et on retrouve les équations bien connues :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (46)$$

- En régime statique (charges immobiles), le potentiel électrique V s'identifie au **potentiel électrostatique** (et $\mathbf{A} = 0$).

4.2 Tension aux bornes d'un dipôle en régime variable

La notion de tension aux bornes d'un dipôle, mesurée au moyen d'un voltmètre, est fréquemment utilisée en électrocinétique. La tension u_{AB} aux bornes d'un dipôle est, par définition,

$$u_{AB} = \int_{\text{AVB}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (47)$$

la circulation du champ électrique le long de la branche de mesure dans laquelle est inséré le voltmètre V et qui est connectée aux bornes A et B . Cette grandeur s'apparente à une différence de potentiel électrique en régime stationnaire, puisque $\mathbf{E} = -\text{grad } V$. Nous allons voir que ce n'est

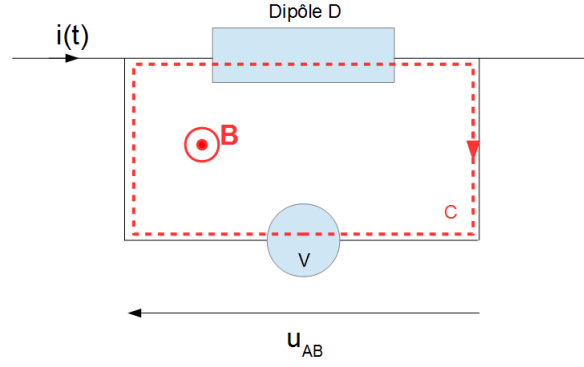


FIGURE 2 – Mesure de la tension u_{AB} en régime variable

plus le cas en régime variable, notamment en présence d'un champ magnétique. On applique la relation de Maxwell-Faraday définissant le contour \mathcal{C} :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ADB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BVA} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (48)$$

$$= \int_{ADB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - u_{AB} \quad (49)$$

$$= - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (50)$$

D'où

$$u_{AB} = \int_{ADB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_{ADB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \frac{d\Phi}{dt} \quad (51)$$

la dernière égalité n'étant vraie que pour un circuit de constitution invariante dans le temps (ce qui est souvent le cas). La tension n'est plus une mesure de la différence de potentiel électrique entre A et B du fait de la variation temporelle du potentiel vecteur.

Un déplacement du voltmètre modifie en théorie la valeur de tension qu'il affiche, puisque ce déplacement altère le flux magnétique à travers la surface délimitée par le circuit. On ne peut donc mesurer une tension sans ambiguïté que si la variation temporelle de \mathbf{B} est négligeable dans la boucle de mesure, ce qui sous entend un **régime suffisamment lentement variable**. En pratique, les champs magnétiques intenses sont localisés à l'intérieur des machines électriques et non dans la boucle de mesure, aussi ces conditions sont peu contraignantes.

Si le dipôle est purement résistif (résistor) de résistance R , on a

$$u_{AB}(t) = Ri(t) + \frac{d\Phi}{dt} \simeq Ri \quad (52)$$

Un dipôle purement inductif (bobine idéale) est caractérisé par

$$u_{AB}(t) = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (53)$$

le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parfait (conductivité infinie ou résistance nulle) étant nul (une bobine n'est rien d'autre qu'un fil électrique enroulé). En réalité, les bobines possèdent toujours une petite résistance interne r , d'où

$$u_{AB}(t) = ri(t) + \frac{d\Phi}{dt}, \quad (54)$$

Ces expressions ne sont valables que si les grandeurs physiques sont lentement variables, ce qui est le cas pour des grandeurs électriques alternatives de fréquence 50 Hz (réseau EDF).

4.3 Inductances

Auto-induction et inductance propre

Tout circuit parcouru par un courant électrique d'intensité I crée un champ magnétique dans lequel il est plongé. Le flux Φ de ce champ à travers le circuit (**flux propre**) est proportionnel à I , et on définit

$$L \equiv \frac{\Phi}{I}, \quad (55)$$

où L est appelé coefficient d'**inductance propre** (ou d'auto-induction), mesuré en Henry (H) dans le système international. On peut démontrer que L est une grandeur positive.

À titre d'exemple, calculons L pour un solénoïde infini [SCHÉMA] : le champ magnétique généré par un tel solénoïde parcouru par un courant d'intensité I est uniforme à l'intérieur de la bobine et vaut

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{e}_z, \quad (56)$$

où n désigne le nombre de spires par unité de longueur ($n = N/\mathcal{L}$, N étant le nombre total de spires et \mathcal{L} la longueur du solénoïde) et où \mathbf{e}_z désigne l'axe de symétrie de révolution du solénoïde, le courant étant orienté dans le sens direct par rapport à cet axe. La **section du solénoïde** à prendre en compte est la **somme des sections de chaque spire traversée par le champ magnétique**¹, donc NS si S désigne la section du solénoïde. Le flux propre s'écrit donc :

$$\Phi = \mu_0 \frac{N^2 S}{\mathcal{L}} I, \quad (57)$$

d'où le coefficient d'**inductance propre du solénoïde infini**

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\mathcal{L}}. \quad (58)$$

Donnons maintenant l'expression de la **tension aux bornes d'une bobine** en régime lentement variable :

$$u_{AB}(t) = ri(t) + L \frac{di}{dt}, \quad (59)$$

puisque $\Phi = LI$. Une variation du courant dans le circuit implique une variation du champ magnétique qu'il génère et donc une variation de son flux magnétique propre. D'après la loi de Faraday, une telle variation entraîne l'apparition d'une f.e.m dans le circuit. Si le courant $i(t)$ augmente, alors le flux propre $\Phi = Li(t)$ augmente aussi et la f.e.m vaut

$$e(t) = -L \frac{di}{dt} \quad (60)$$

si le circuit est rigide. La f.e.m est dans ce cas négative et tend à faire circuler un courant dans le sens opposé à i , comme prévu par la loi de Lenz. La principale conclusion de tout ceci est que **dans un circuit inductif le courant ne peut pas varier brutalement**, ce que l'on peut illustrer aisément au moyen d'une expérience. **MANIP : circuit RL parallèle avec lampe dans chaque branche. Manip qualitative.**

Lorsqu'on ouvre un circuit parcouru par un courant intense, le phénomène d'auto-induction s'oppose à l'extinction brutale du courant $i(t)$ (observé par exemple en débranchant un appareil en retirant la prise du mur alors qu'il est encore alimenté) et provoque parfois l'apparition d'une étincelle de rupture [PHOTO]. S'il est nécessaire d'interrompre un fort courant dans un temps très bref, il est indispensable de prendre en compte le phénomène d'auto-induction.

1. Un solénoïde n'est pas un empilement de spires contrairement à ce que l'on suppose en faisant le calcul de \mathbf{B} , mais un seul câble décrivant une spirale.

Couplage magnétique de circuits électriques et inductance mutuelle

Deux circuits C_1 et C_2 sont parcourus par des courants stationnaires I_1 et I_2 . Chaque circuit va donc générer un champ magnétique dans lequel va baigner l'autre circuit. On définit le **coefficient d'inductance mutuelle** M comme

$$M \equiv \frac{\Phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2} = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} \quad (61)$$

où $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ (resp. $\Phi_{1 \rightarrow 2}$) désigne le flux à travers C_1 (resp. C_2) du champ magnétique \mathbf{B}_2 (resp. \mathbf{B}_1) créé par C_2 (resp. C_1). La grandeur M se mesure elle aussi en Henry (H) et est une grandeur algébrique dont le signe dépend de l'orientation relative choisie pour les circuits.

Exemple : inductance mutuelle entre deux solénoïdes imbriqués [SCHEMA]

Soient deux solénoïdes de longueurs respectives \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 ($\mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_1$) et de sections respectives S_1 et S_2 ($S_2 \leq S_1$) parcourus respectivement par des courants d'intensités I_1 et I_2 . Le solénoïde 2 pénètre sur une longueur h dans le solénoïde 1. On souhaite déterminer le coefficient d'inductance mutuelle M de ce système. On utilisera le modèle du solénoïde infini pour déterminer le champ magnétique généré par chacun de ces solénoïdes.

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 \quad (62)$$

où S_1 désigne la surface du circuit constituant le solénoïde 1 traversée par le champ \mathbf{B}_2 . Puisque le champ généré par un solénoïde infini est nul à l'extérieur de celui-ci, seules les spires de 1 directement en vis à vis de celles de 2 sont traversées par le flux de \mathbf{B}_2 mais seulement sur une section égale à $S_2 \times h N_1 / \mathcal{L}_1$, où $\times h N_1 / \mathcal{L}_1$ est le nombre de spires de 1 en vis à vis de celles de 2 sur la longueur d'interpénétration h . Le champ magnétique généré par 2 vaut $B_2 = \mu_0 N_2 I_2 / \mathcal{L}_2$, d'où

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 \frac{h S_2 N_1 N_2}{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2} I_2 \quad (63)$$

et donc

$$M = \mu_0 \frac{h S_2 N_1 N_2}{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2}. \quad (64)$$

Un calcul similaire pour $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M / I_1$ restitue la même expression pour M , comme attendu. On constate que plus la longueur d'interpénétration est grande, plus M l'est aussi.

On définit

$$k \equiv \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (65)$$

le **facteur de couplage magnétique** entre les deux circuits. Il est possible de démontrer que $k \leq 1$. Dans l'exemple évoqué plus haut, on montre que

$$k = \frac{h}{\sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2}} \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \leq 1, \quad (66)$$

puisque $h \leq \mathcal{L}_1 \leq \mathcal{L}_2$ et $S_2 \leq S_1$. Si $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ et $S_2 = S_1$, $k = 1$ et on parle de **couplage serré** (le couplage est lâche si $k \ll 1$). Dans le cas du couplage serré, la totalité du flux de \mathbf{B}_2 traverse le solénoïde 1 et vice versa (on rappelle qu'on suppose des solénoïdes infinis, qui gardent dans le volume qu'ils délimitent l'énergie magnétique qu'ils créent). Il n'y a donc pas de pertes d'énergie magnétique vers l'extérieur, car celle-ci ne fait que passer d'un solénoïde à l'autre au gré des variations d'intensité.

Le transformateur électrique

Le couplage magnétique par induction de circuits électriques a de très nombreuses applications dans la vie quotidienne. L'une des plus importantes est le transformateur électrique. Un transformateur électrique permet de modifier les valeurs de tension et d'intensité du courant délivrées par une source d'énergie électrique alternative, en un système de tension et de courant de valeurs différentes, mais de même fréquence et de même forme. Ceci est très important dans la distribution du courant électrique : le transport sur de longues distances étant moins coûteux lorsque la tension utilisée est plus grande, des transformateurs élèvent jusqu'à 400 kV la tension alternative de 25 kV délivrée en sortie de centrale nucléaire. Pour une utilisation domestique, il faut réaliser l'opération inverse et ramener la tension à 220 V. On utilise plusieurs échelons de transformation pour cela.

Dans un transformateur statique, l'énergie est transférée d'un enroulement (une bobine de N_1 spires, souvent en cuivre) dit **primaire** à l'enroulement dit **secondaire** (une autre bobine en cuivre, mais de N_2 spires) par l'intermédiaire du **circuit magnétique** que constitue la carcasse du transformateur. Les deux **enroulements sont couplés par induction mutuelle** et ne sont pas reliés électriquement. Le rendement de l'installation est d'autant plus bon que le couplage entre les circuits est serré ($k \simeq 1$). Pour améliorer ce rendement, le circuit magnétique est conçu en matériau ferromagnétique (généralement du fer doux) ce qui permet de canaliser le champ magnétique généré par les enroulements à l'intérieur du circuit magnétique).

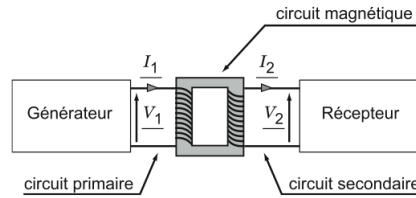


FIGURE 3 – Représentation simplifiée d'un transformateur électrique

On suppose que la résistance interne des enroulements est négligeable et on néglige tout phénomène d'induction dans le circuit magnétique. Ainsi

$$u_1 \simeq \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 \simeq \frac{d\Phi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad (67)$$

On trouve alors

$$u_2 = \frac{M}{L_1} u_1 + \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1} \right) \frac{di_2}{dt}. \quad (68)$$

En supposant un couplage serré, $|M| \simeq \sqrt{L_1 L_2}$ et donc

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} \simeq \frac{M}{L_1}. \quad (69)$$

Ceci est le rapport de transformation du transformateur supposé idéal.

On suppose maintenant que le transformateur fonctionne à vide ($i_2 = 0$). Puisque $k = 1$, le flux Φ à travers la section des deux solénoïdes est le même et est proportionnel à i_1 . Ainsi le flux total à travers le premier vaut $N_1 \Phi$ et celui à travers le second vaut $N_2 \Phi$ d'où

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi}{i_1} \quad \text{et} \quad M = \frac{N_2 \Phi}{i_1}, \quad (70)$$

d'où l'expression du rapport de transformation du transformateur idéal

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} \simeq \frac{N_2}{N_1}. \quad (71)$$

- En réalité, il existe plusieurs sources de pertes dans un transformateur. Voici les principales :
- **les pertes fer** : ce sont les pertes dans le circuit magnétique. Leur origine physique est double : les courants induits (on parle souvent de courants de Foucault) générés dans le noyau de fer doux (celui-ci étant résistif, il s'échauffe par effet Joule) et les pertes par hystérésis causées par le changement de direction permanent du flux magnétique dans un matériau ferromagnétique (**ce point sera abordé ultérieurement dans une autre leçon**). On minimise ces pertes en choisissant un matériau ferromagnétique doux (réduction des pertes par hystérésis) et en privilégiant un circuit magnétique constitué de tôles isolées électriquement les unes des autres (feuilletage, pour réduire les pertes par courants de Foucault).
 - **les pertes cuivre** : ce sont les pertes par effet Joule dans les enroulements, qui possèdent eux aussi une résistance interne.
 - **les fuites de flux** : on considère dans notre modèle que le flux est entièrement canalisé par le circuit magnétique, ce qui n'est pas le cas. Le flux circule donc partiellement hors du noyau.

5 Conclusion

De nombreuses applications techniques (certaines seront étudiées plus en détail en travaux dirigés) utilisent le phénomène d'induction électromagnétique. On citera notamment :

- le four et les plaques à induction (couplage entre une bobine et le métal liquide/la casserole qui forment le circuit secondaire),
- le freinage par induction,
- la pince ampèremétrique [PHOTO], pour mesurer l'intensité d'un courant variable circulant dans un fil sans avoir à connecter un ampèremètre,

On retiendra trois points importants :

- la variation du flux magnétique à travers un circuit conducteur entraîne l'apparition d'une force électromotrice induite dans le conducteur, susceptible de mettre en mouvement les électrons : c'est le phénomène d'induction. Le flux magnétique peut varier si le champ magnétique est variable, si le circuit se déplace ou se déforme ;
- sur un plan qualitatif, la loi de Lenz (et sur un plan quantitatif la loi de Faraday) permet de prévoir le phénomène d'induction pourvu que la forme du circuit soit invariante dans le temps ;
- la relation de Maxwell-Faraday, qui est l'une des quatre équations de Maxwell et dont l'utilité ne se limite pas aux phénomènes d'induction ;

6 Annexes

6.1 Champ magnétique généré par une bobine infinie

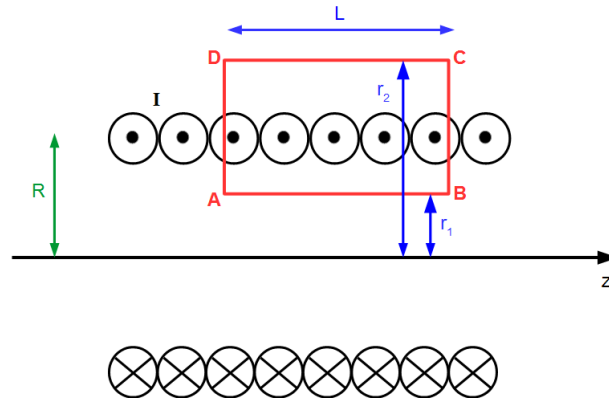


FIGURE 4 – Solénoïde infini

On se place en coordonnées cylindriques au vu de la symétrie du problème et on applique le théorème d'Ampère (équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale, en régime stationnaire) au contour rouge $\mathcal{C} \equiv ABCD$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_{S/\mathcal{C}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (72)$$

Soit M un point courant du contour \mathcal{C} et $\mathbf{B}(M)$ le champ magnétique en ce point. Tout plan passant par M et perpendiculaire à l'axe z est un plan de symétrie de la distribution de courant. Ainsi, au point M, le champ magnétique est perpendiculaire à ce point :

$$\mathbf{B}(M) = B(M)\mathbf{e}_z \quad (73)$$

La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe z et par translation le long de cet axe. La valeur de \mathbf{B} en M ne dépend donc que de la distance de M par rapport à l'axe z , que l'on note r :

$$\mathbf{B}(M) = B(r)\mathbf{e}_z. \quad (74)$$

Explicitons les deux intégrales du théorème d'Ampère. Commençons par le membre de gauche :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B B(r_1)dz + \int_D^A B(r_2)dz = L(B(r_1) - B(r_2)). \quad (75)$$

puisque \mathbf{B} est perpendiculaire au déplacement élémentaire le long des côtés BC et DA du contour \mathcal{C} . *Remarque : l'élément de longueur $d\mathbf{r}$ en tout point de \mathcal{C} est orienté selon le sens de parcours de \mathcal{C} .*

La valeur du membre de droite dépend de la position du contour par rapport au solénoïde. Du fait de la symétrie cylindrique du problème, on ne s'intéressera qu'au demi-plan supérieur par rapport à l'axe z . Trois cas sont possibles :

— r_1 et $r_2 < R$: le contour \mathcal{C} n'entoure pas de courant électrique, par conséquent

$$\iint_{S/\mathcal{C}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (76)$$

et donc

$$B(r_1) = B(r_2). \quad (77)$$

Le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde puisque cette équation est valable quelque soient r_1 et r_2 inférieurs au rayon de la bobine.

— $r_1 < R$ et $r_2 > R$: le contour \mathcal{C} entoure un courant électrique, donc

$$\iint_{\mathcal{S}/\mathcal{C}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = nIL, \quad (78)$$

où n désigne le nombre de spires par unité de longueur (nL est le nombre de spires entourées par le contour). On a donc

$$B(r_1) - B(r_2) = \mu_0 nI. \quad (79)$$

— r_1 et $r_2 > R$: le contour, placé à l'extérieur du solénoïde, ne contient pas de courant électrique. On a donc à nouveau

$$B(r_1) = B(r_2), \quad (80)$$

ce qui traduit l'uniformité du champ magnétique hors du solénoïde, y compris en un point situé infiniment loin du système. L'énergie magnétique contenue dans un volume quelconque est proportionnelle au carré de la norme du champ magnétique et au volume si B est uniforme. Or cette grandeur doit être finie. Ceci implique $B = 0$ hors du solénoïde.

On en déduit que

$$\mathbf{B} = \mu_0 nI \mathbf{e}_z \quad \text{dans le solénoïde} \quad (81)$$

et

$$\mathbf{B} = 0 \quad \text{hors du solénoïde.} \quad (82)$$

Ceci n'est valable que pour un solénoïde de longueur infinie (et donc valable uniquement à l'intérieur de la bobine et loin des sections d'entrée et de sortie pour un solénoïde de longueur finie). Les lignes de champ ne quittent pas le solénoïde puisque celui-ci est infini. Pour un solénoïde réel, le champ magnétique (et son flux) est rayonné dans tout l'espace. Loin du solénoïde, il est similaire à celui d'un dipôle magnétique.