

LP 41 - Effet tunnel

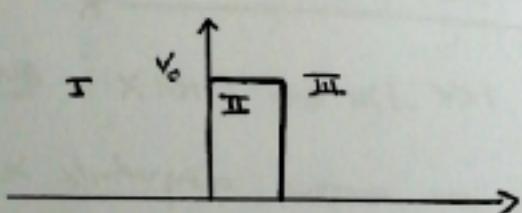
Introduction.

- en mécanique classique \Rightarrow une particule à une énergie mécanique + petite qu'une barrière de pot. \rightarrow elle ne passe pas et rebondit
- En étudiant les ondes (OETI) on a vu la propagation d'une onde exolette à la surface d'un conducteur parfait par exemple
- méca Q = dualité onde-corps-particule dont l'effet tunnel est l'exemple parfait de la méca Q ondulatoire.
- intérêt théorique (radioactivité) et pratique (SEM).

Prérequis: Méca Q (potentiel, Schrödinger, quantification) + électromagn.

I - Description de l'effet tunnel

1. Position du problème (Prix de Cohen)



→ On peut faire un rappel du pit de pot. fin et noter les résultats par myself. La proba n'est pas nulle hors du pit. par les cartes \rightarrow cf. Prix chap 7.

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

→ une source S émet un faisceau de particules en $\alpha = -\infty$ se propageant selon $\propto P$, de même énergie E

Classification: $E = E_0 + E_p = \text{cte}$ (seul force conservatrice).

\propto de la région I : $E < V_0$ alors elle ne pourra pas franchir la barrière car cela signifierait $E_c < 0$ dans II. d'où $T = 0$.

$$E > V_0 \rightarrow T = 1$$

(Analogie physique avec E_c rest franchir une montagne).

→ Traitement quantique : on utilise un état ondulatoire car qu'on associe une fonction d'onde à la particule et on résoud l'équation de Schrödinger.

2. Résolution quantique (Perez)

→ potentiel indépendant du temps \Rightarrow on peut séparer les variables et rechercher des solutions de l'état stationnaire vérifiant :

$$\left| -\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) + V(x)\phi(x) = E\phi(x) \right. \quad \begin{array}{l} \text{(il suffit ensuite de multiplier} \\ \text{par } e^{-i\frac{Et}{\hbar}}. \end{array}$$

On divise dans les 3 zones :
$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hbar^2}{2m} \phi''_{\text{I}}(x) = E\phi_{\text{I}}(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \phi''_{\text{II}}(x) + V_0\phi_{\text{II}}(x) = E\phi_{\text{II}}(x). \end{array} \right.$$

→ aller vite sur les calcul ou projeter ?

en posant $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $q^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$ $\Delta q^2 = i\alpha$ avec $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

Bref $\phi_{\text{I}}(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$

$\phi_{\text{II}} = A_2 e^{i\alpha x} + B_2 e^{-i\alpha x}$

$\phi_{\text{III}} = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$

on peut supposer que $B_1 = B_2 = B_3 = 0$.

Condition aux limites.

→ continuité de la fonction d'onde car conservé de la densité de probabilité $\rho = |\psi|^2$.

→ continuité de la dérivée de la fonction d'onde car le pot. est finie.

$(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \text{div}(J)) = 0$: conservé localement de la proba et $\exists x \quad \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = 0$
donc $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ à la dérivée de ψ . a stat. $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial x} = 0$

alors $\phi_{\text{I}}(0) = \phi_{\text{II}}(0) \quad \left| \begin{array}{l} \phi'_{\text{I}}(0) = \phi'_{\text{II}}(0) \\ \phi_{\text{II}}(L) = \phi_{\text{III}}(L) \quad \left| \begin{array}{l} \phi'_{\text{II}}(L) = \phi'_{\text{III}}(L) \end{array} \right. \end{array} \right. \right.$

→ relation entre les amplitudes (\approx projeter)

3. Probabilité de transmission

on définit: $T = \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2 \quad R = \left| \frac{A'_1}{A_1} \right|^2 \rightarrow$ le corré vient du fait qu'on perte en proba. d'où $T = \frac{\| \vec{A}_2 \|^2}{\| \vec{A}_1 \|^2} = \frac{\| A_2 \|^2}{\| A_1 \|^2}$.

On donne directement (on a projete sur l'axe de la chaleur).

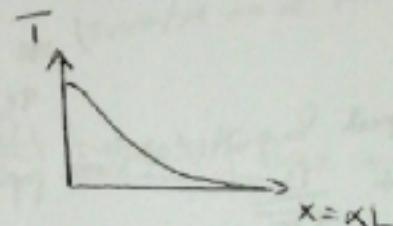
$$T = \frac{1}{1 + \Pi \sinh^2(x)} \quad \begin{cases} x = \alpha L \\ \Pi = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{\alpha} + \frac{\alpha}{k} \right)^2 \quad \text{et} \quad R + T = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{R = \frac{\Pi \sinh^2(x)}{1 + \Pi \sinh^2(x)}}$$

Discussion:

$T \neq 0$ ou 1 en général.

on regarde l'influence de L .



si barrière mince $x \ll 1 \rightarrow T \approx \frac{1}{1 + \Pi x^2} \approx 1 - \Pi x^2$,

si barrière épaisse $x \gg 1$

$$\text{d'où: } \boxed{\ln(T) = \ln(T_0) - 2x} \quad \sinh^2(x) \sim \frac{1}{4} e^{2x} \rightarrow T \approx T_0 e^{-2x} \quad (T_0 = \frac{4}{\Pi})$$

NB $x \gg 1 \Leftrightarrow \alpha L \gg 1$ c'est à dire $L \gg \frac{1}{\alpha}$.

α s'interprète comme une grandeur caractéristique: prof. de pénétration.

lorsque $x \rightarrow +\infty \quad T \rightarrow 0$ l'énergie est réfléchie.

2^{ème} facteur influent: $\alpha = \sqrt{\frac{m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$ → le masse joue un rôle.

ex: proton $a = 1 \text{ Å}$ et $V_0 = 2 \text{ eV}$.

alors si e^- : ($m = 10^{-31} \text{ kg}$) $\rightarrow T \approx 0,78$

si proton ($m = 10^{-19} \text{ kg}$) $\rightarrow T \approx 4 \cdot \underline{10^{-19}}$

c'est un effet purement quantique
→ on ne pourra jamais traverser un mur!

II. Effet tunnel permet de comprendre la théorie de la radioactivité

- on peut aussi faire un exemple bien traité du Césium, mais il n'est pas compris.
- Le Prof. traite un peu, mais ya un Bill (faut chercher "Effet tunnel" mais il n'y a pas accès).

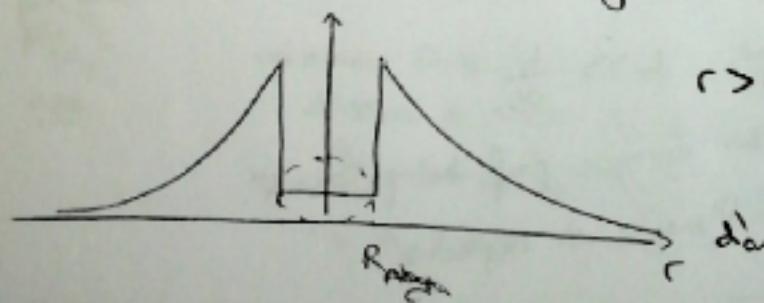
1. Radioactivité α:

- = émission d'un noyau d'hélium 4 selon:
(on peut donc faire exemple et voir si on entende)
- $${}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{2}^{4}\text{He} + {}_{Z-2}^{A-4}Y$$
- $${}_{92}^{238}\text{U} \rightarrow {}_{82}^{206}\text{Th} + \alpha.$$

Réponse: $\ln(\tau_{1/2}) = A + \frac{B}{E}$

2. Modèle de Gamow.

- interprété par Gamow en 1928, si une particule α est assez stable pour exister à l'intérieur du noyau & une entité individuelle dans un champ à l'intérieur forte \Rightarrow puit de potentiel de



$$r > R_0 \rightarrow \text{répulsion électrostatique}$$

prédomine $\Rightarrow V(r) \propto \frac{1}{r}$.

$$\begin{cases} V = \frac{2(2-E)}{r} & r > R_0 \\ V = 0 & r < R_0 \end{cases}$$

Or pour uranium la barrière $\Rightarrow E_{\text{part}} \approx 50 \text{ MeV}$. ($\approx r = r_0$).
tandis que l'énergie des particules α moves $\approx 4.9 \text{ MeV}$. } effet tunnel.

- on se place dans l'approximation de la barrière égale à q. $\ln(T) \approx -2 \times X''$

où $X = f(r)$:

$$\boxed{\ln(T) = -2 \int_{r_0}^R \alpha dr} = -2 \int_{0}^R \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar^2} dr.$$

- on peut tout suivre de l'ordre ou sur l'ordre corrigé du Prof.

$$\rightarrow \text{on mettre alors que } P_n(T) = a + \frac{b}{T^E}$$

$$\text{or selon la loi de radioactive: } \frac{dN}{N} = -\frac{\Delta t}{\tau} \quad \tau = \frac{\tau_{1/2}}{P_n(2)}$$

est lié au facteur de transmission.

en effet pendant Δt il est passé: $\Delta N = T \times N$ partielle.

$$\text{d'où } \frac{\Delta N}{N} = T \approx \frac{\Delta t}{\tau} \quad \text{d'où } \left[\frac{\Delta t P_n(2)}{\tau_{1/2}} \approx T \right]$$

→ donc il donne.

III - Microscopie à effet tunnel [Binnig + Rohrer]

1. Description et mise en éqn.

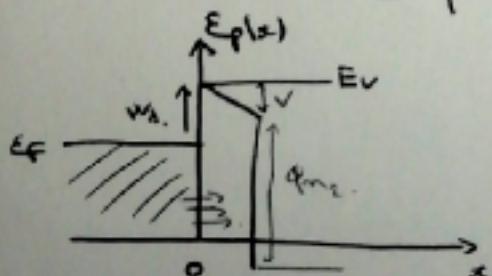
1982: Binnig et Rohrer., Prix nobel en 1986.



→ on peut arracher un électron au métal si on fournit une énergie minimum W_0 = travail de sortie (cf effet photoélectrique)

→ mais si si il a une énergie + faible, il a une probabilité d'être à l'ext. de ce métal (à une distance d) tq qu'il va: la proba $\propto e^{-\frac{Bqdm}{\hbar}} \Rightarrow$ peut être capté par une partie + q de Q.

⇒ on a un circuit I qui donne une information.



si barrière épaisse: $T(x) = T(x)e^{-2\alpha x}$

$$\begin{cases} T(x) = T(x)e^{-2\alpha x} \\ \rho(x) = \rho(x)e^{-2\alpha x} \\ \text{ou } \alpha = \frac{\sqrt{2m_e W_0}}{\hbar} \end{cases}$$

→ on applique une dép ⇒ on abaisse l'énergie potentielle de la ride par pour la collecter.

→ on a aussi accès prélevé à d par l'intermédiaire de I

2. SETI : Balayage

- on déplace latéralement la partie devant la surface et on impinge $I(x)$ des piétons corrigé donc directement x = on a accès à la topographie du système
- super résolu car la major partie des e^- passe par la partie (grâce à étalement e-)
- si on a une partie atomique → rendu latérale d'un atome!
- il faut montrer des images!

3. En spectroscopie

- on fait varier ψ tout en maintenant la partie fixe.
- on a de ce cartes I & nbr d'e- trouvés cad ceux avec une énergie comprise entre E_F et $E_F - \Delta E$. ⇒ on a accès à la structure de bande
- on montre une fois encore des images.

(4. Populations d'atomes)

- on joue sur la partie du microscope et le signe de ψ par avion interactif attractive → vidéo célèbre "A boy and his atom"