II.3. Application au câble coaxial

a) Impédance.

Nous avons vu que les grandeurs v et i suivent l'équation de d'Alembert. Intéressons nous dans un premier temps à une onde progressive se propageant selon les x croissants.

$$i(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

D'après les deux équations de couplage:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t} = -\Lambda f'\left(t - \dfrac{x}{c}\right) & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\Gamma}\dfrac{\partial i}{\partial x} = +\dfrac{1}{\Gamma c} \cdot f'\left(t - \dfrac{x}{c}\right) & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) p/r à x : $\boxed{v(x,t) = \Lambda c f\left(t - \frac{x}{c}\right) + H(t)}$

En reportant cette expression dans (2):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Lambda c f'\left(t - \frac{x}{c}\right) + H'(t) = \frac{1}{\Gamma c} f'\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

où $\Lambda c = \dfrac{1}{\Gamma c} = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$

ce qui donne $H'(t) = 0 \rightarrow H(t) = K$ cte.

Comme nous ne nous intéressons qu'aux phénomènes qui se propagent, donc variant dans le temps, nous prenons $K = 0$.

On obtient finalement: $v(x,t) = \Lambda c\, f\left(t - \frac{x}{c}\right)$

$$\boxed{v(x,t) = \underbrace{\Lambda c}_{= Z_c} \cdot i(x,t)}$$

$$\frac{v(x,t)}{i(x,t)} = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c.$$

Z_c est l'impédance caractéristique et dépend du milieu de propagation

Dans le cas d'une onde qui ~~se propage~~ progressive se déplaçant dans le sens des x décroissants, on obtient: $\boxed{v(x,t) = -Z_c\, i(x,t)}$

diapo !!

Ainsi, dans le cas général, nous en déduisons que la ligne est parcourue par l'onde unidimensionnelle la plus générale, donc de la forme:

$$i(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$v(x,t) = Z_c\left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right)\right].$$

b) Aspects énergétiques

En utilisant les deux équations couplées:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{\Gamma}\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{\Lambda}\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}. & (2) \end{cases}$$

on fait apparaître la puissance en multipliant (1)×u et (2)×i

$$u \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(v^2) = -\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial i}{\partial x} \cdot v$$

$$i\,\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(i^2) = -\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial v}{\partial x} \cdot i$$

on somme les deux équations:

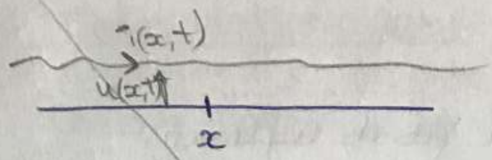
$$-\left(v\frac{\partial i}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\frac{\partial (v^2)}{\partial t} + \frac{1}{2}\Lambda\frac{\partial}{\partial t}(i^2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x}(u \cdot i)} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\Gamma v^2 + \frac{1}{2}\Lambda i^2\right)$$

diapo, dessin

$$\underbrace{iu(x,t)}_{\substack{\text{Puissance donnée} \\ \text{en aval car} \\ \text{convention} \\ \text{générateur.}}} - \underbrace{iu(x+dx,t)}_{\substack{\text{Puissance} \\ \text{reçue en} \\ \text{amont car} \\ \text{convention} \\ \text{récepteur.}}} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{2}\Gamma v^2 + \frac{1}{2}\Lambda i^2\right)}^{e_l} . dx}_{\substack{\text{énergie emmagasinée} \\ \text{par l'élément } dx \text{ de} \\ \text{la ligne}}}\Big)$$

~~pas le temps~~



L'énergie qui passe par x de la gauche vers la droite est

$$dW = i(x,t)\cdot u(x,t)\cdot dt \qquad u(x,t) = Z_c \cdot i(x,t)$$

$dW = i^2 \cdot Z_c \, dt$. car on considère une OP droite.

De plus, $e_l = \frac{1}{2}\Gamma u^2 + \frac{1}{2}\Lambda i^2 \qquad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$

$= \frac{1}{2}\Gamma Z_c^2 i^2 + \frac{1}{2}\Lambda i^2 \qquad Z_c^2 = \frac{\Lambda}{\Gamma}$

$= \Lambda i^2 \quad \rightarrow i^2 = \frac{e_l}{\Lambda}$

$$dW = \frac{e_l}{\Lambda} \cdot \underset{\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}}{Z_c} \cdot dt = \underbrace{e_l \overset{"c"}{\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}\right)} dt}_{\text{énergie emmagasinée dans une portion de ligne de longueur } dx = c\,dt.}$$

$$v_E = \frac{dx}{dt} = c$$

La vitesse de l'énergie d'une OP s'assimile à la vitesse de la perturbation. Propriété générale d'une OP.

c) Détermination de l'impédance caractéristique

Considérons une onde plane se propageant selon les x croissants (ie générateur situé à gauche).

Plaçons à l'extrémité de la ligne une résistance

La puissance transmise à la résistance par l'OP vers la droite est:

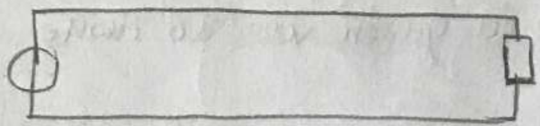
$$P_d = u(L,t)\cdot i(L,t) = i^2(L,t) \times Z_c$$

La puissance dissipée par effet Joule est:

$$P_J = i^2 \times R.$$

$P_d = P_J + P_g$.

si $R = Z_c$, $P_d = P_J \Rightarrow P_g = 0$ donc pas de réflexion.



Phrase $\longrightarrow$ par inte. ond. stat.

3. Ondes stationnaires

3.1. Définition et propriétés

Une onde stationnaire est une onde dont les dépendances spatiale et temporelle sont découplées. Le champ d'une onde plane stationnaire s'écrit : $s(x,t) = f(x) \cdot g(t)$

Cherchons les ondes stationnaires solutions de l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0.$$

Ce qui donne :

$$f''(x) \cdot g(t) - \frac{1}{c^2} f(x) \cdot g''(t) = 0.$$

$$\text{soit} \quad c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}$$

Dans cette égalité, les variables temps et espace sont séparées, ce qui implique que chacun des termes est en fait constant.

Si cette constante est positive ou nulle, on obtient une solution divergente en temps qui n'est pas physiquement possible. Par conséquent, elle est négative et on la nomme $-\omega^2$. Chaque membre donne alors :

$$\begin{cases} f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0 \rightarrow f(x) = f_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi'\right) \\ g''(t) + \omega^2 g(t) = 0 \rightarrow g(t) = g_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

On obtient : $\boxed{s(x,t) = s_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) \cdot \cos(kx + \phi')}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.

Développons le produit de cosinus :

$$s(x,t) = \frac{1}{2} s_0 \cdot \left[\cos(\omega t + kx + \phi + \phi') + \cos(\omega t - kx + \phi - \phi')\right].$$

Ainsi, une OS est la somme de deux OPPH de même amplitude, déphasées et se propageant dans des sens opposés.

↳ VIDÉO !!

diapo !!

Si on développe le cosinus de l'expression d'une OPPH :

$\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos(a)\cos b$

$$s(x,t) = s_0 \cos(\underbrace{\omega t}_{a} - \underbrace{kx + \phi}_{b})$$

$$= s_0\left[\cos(\omega t + \phi)\cdot\cos(kx) + \sin(\omega t + \phi)\cdot\sin(kx)\right]$$

$$= s_0\left[\cos(\omega t + \phi)\cdot\cos(kx) + \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Ainsi, une OPPH s'écrit comme la somme de deux OS. Et comme les OPPH forment une base de solutions de l'équation de d'Alembert, on en déduit :

Les ondes stationnaires forment une base des solutions de l'équation de d'Alembert, toute solution de l'équation de d'Alembert peut être écrit comme une combinaison linéaire d'OS.

Comme les OPPH forment une base des solutions de l'équation de d'Alembert et les ondes stationnaires aussi, on peut se demander quand utiliser les OPPH ou les OS. Nous allons voir un exemple où les conditions aux limites imposent un noeud de vibration, nous reviendrons sur cette terminologie. Dans ce cas, il est naturel de chercher des solutions sous forme d'onde stationnaire pour reconstruire toutes les solutions par combinaison linéaire.

Prenons l'exemple de la corde de Melde :

3.2. Oscillations libres. La corde de melde.

Une corde de melde est une corde vibrante dont les deux extrémités sont fixes.

Les conditions aux limites imposent un mouvement nul aux deux extrémités de la corde. Pour trouver le mouvement des oscillations libres d'une corde de melde, il est donc logique de chercher des solutions parmi les ondes stationnaires et de trouver lesquelles sont compatibles avec les cond. aux limites. Ces solutions sont les modes propres de la corde.

$$\Psi(x;t) = \Psi_0 \cos(kx+\phi).\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{C.L.} \begin{cases} \Psi(0,t) = 0 \\ \Psi(L,t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\phi = 0 & (1) \\ \cos(kL+\phi) = 0. & (2) \end{cases}$$

On obtient grâce à (1) $\phi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ à π près, on prend $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$.

On peut réécrire:

$$\boxed{\Psi(x;t) = \Psi_0 \cdot \sin(kx).\cos(\omega t + \varphi).}$$

On obtient grâce à (2) $\sin(kL) = 0 \rightarrow \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}$ et donc

$k_n = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \boxed{L = \frac{n.\lambda}{2}}$

La pulsation ω dépend de n en raison de la relation de dispersion:

$$\boxed{\omega_n = k_n.c = n\cdot\frac{\pi}{L}c = \omega_1 n} \quad \text{où} \quad \boxed{\omega_1 = \frac{\pi}{L}.c.}$$

Ainsi on obtient:

$$\boxed{\Psi(x,t) = \Psi_{0,n} \cos(n\omega_n \cdot t + \varphi)\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}$$

diapo 16

regardons ce qu'on a pour ≠ modes: ⊛ → déf. noeud et ventre.

En toute généralité, le mouvement d'une oscillation libre de la corde s'écrit comme une combinaison linéaire de modes propres,

diapo !!

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Psi_{0n} \cdot \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)\right] \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right).$$

où les coeff. A_n et B_n peuvent être obtenus à partir des conditions initiales.

$$\xi(x,t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right).$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(x,t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\omega_1 B_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

A_n et B_n s'identifient donc aux coeff. du développement en série de Fourier des fonctions définissant les c.i. Ainsi:

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right) \xi(x,t=0)\, dx$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi c}\int_{-L}^{+L} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \frac{\partial \xi}{\partial t}(x,t=0)\, dx$$

$$\boxed{\text{VIDÉO}}$$

3.3. Oscillations forcées : corde de Melde.

* manip.

Forçons maintenant l'extrémité de la corde situé en $x=0$ à osciller à une pulsation ω_0 fixée de l'extérieur. Les nouvelles C.L s'écrivent :

$$\begin{cases} \Psi(x=0,t) = A\cdot\cos(\omega_0 t) \quad (1) \\ \Psi(x=L,t) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

diap si pas le temps

Puisque les C.L imposent un noeud de ~~..~~ vibration, cherchons une OS qui vérifie les C.L.

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cos(\omega t + \phi')\cdot\cos(Kx+\phi)$$

L'équation (1) donne :

$$\Psi(0,t) = \Psi_0\cdot\cos(\omega t+\phi')\cdot\cos(\phi) = A\cdot\cos(\omega_0 t).$$

d'où
$$\begin{cases} A = \Psi_0\cdot\cos\phi. \quad (3) \\ \phi' = 0 \\ \omega = \omega_0 \end{cases}$$

La pulsation de l'onde stationnaire est donc la pulsation de forçage, que ce soit une pulsation propre ou non, ainsi $K_0 = \frac{\omega_0}{c}$.

La condition (2) donne : $\cos(K_0 L + \phi) = 0.$

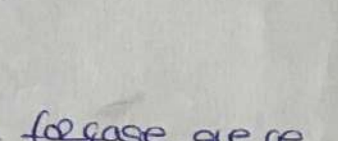
$$K_0 L + \phi = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi$$

$$\phi = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\pi - K_0 L$$

$$\cos(K_0 x + \phi) = \cos\left(K_0(x-L) + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n\cdot\overbrace{\sin(K_0(L-x))}^{\text{o j o j b}}$$

En appliquant ce résultat en $x=0$:

$$\cos\phi = (-1)^n \sin(K_0 L)$$



On en déduit de (3) : $\Psi_0 = \dfrac{A}{\cos\phi} = \dfrac{A}{(-1)^n \sin(K_0 L)}$

$\boxed{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)}$

$\boxed{\sin x = -\sin(-x) = \sin(-x)}$

Ce qui donne finalement :

$$\boxed{\Psi(x,t) = \frac{A}{\cancel{(-1)^n}\sin(k_0 L)} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \cancel{(-1)^n}\sin(k_0(L-x))}$$

Lorsque $k_0 L = n.\pi$, $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire lorsque la fréquence de forçage ω_0 correspond à une fréquence propre $n\omega_1$ de la corde, la corde est en résonance. D'après le calcul, l'amplitude des oscillations tendrait alors vers l'infini. Toutefois, des phénomènes dissipatifs et de non-linéarités dans le comportement de la corde qui n'ont pas été pris en compte ici empêchent cette incongruité physique.

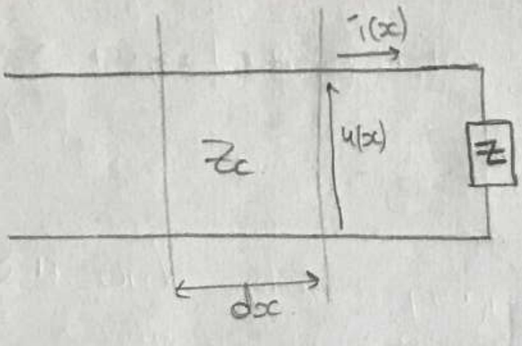
Manip. diapo !

Conclusion : Dans cette leçon nous avons vu le caractère général des ondes, que le couplage entre deux grandeurs permet la propagation. Nous avons vu le lien entre différents types d'ondes et l'influence de la limitation de l'extension du propagation.

Néanmoins, dans notre étude nous avons fait plusieurs hypothèses, petites déformations pour la corde, pas de pertes, pas de dissipation.

Pour aller plus loin et comprendre les phénomènes d'absorption ou d'atténuation d'une onde incidente dans un milieu, il faut alléger certaines de ces hypothèses.

Néanmoins les conclusions générales que nous avons énoncées restent vraies.



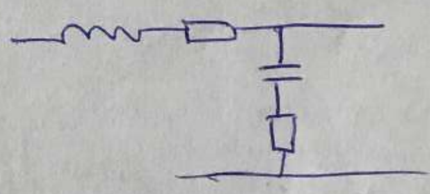
$$u(x) = Z_c \cdot i(x)$$
$$P = u(x) \cdot i(x)$$
$$P = \frac{u^2(x)}{Z_c}$$

$$u(x) = Z \cdot i(x) \; ; \; P = u(x) \cdot i(x)$$
$$P = \frac{u(x)^2}{Z}$$

si $Z_c = Z$, la puissance dissipée sera la même que la puissance transmise par l'onde incidente. Par conséquence, l'intégralité de l'énergie transmise par l'onde sera dissipée par la résistance. (Pas d'onde transmise).

Cable coax: effet capacitif: deux conducteurs séparés en influence électrostatique, qui peuvent créer un champ $\vec{E}$. Comme un armature condensateur.

Pertes



Influence relation de dispersion: partie complexe.
↳ atténuation des ondes

Ondes stationnaires → si forcées : solution (→ en ondes stationnaires) quelque soit la fréquence. ~~…~~ mais pas dans le cas ~~d'une onde~~ de la corde libre.