

# LP21 INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

2 décembre 2016

Lucien Causse & Corentin Gourichon

*"Et le temps passe, passe..."*

POÈTES URBAINS DE LA FIN DU XXÈME SIÈCLE

## Niveau : L2

2015 ; Leçon 20 : Induction électromagnétique

L'algébrisation rigoureuse des grandeurs électriques et mécaniques est nécessaire lors de la paramétrisation.

2014 ; Leçon 20 : Induction électromagnétique

Il n'est pas admissible à ce niveau de confondre les forces de Lorentz et de Laplace.

2012 ; Leçon 22 : Induction électromagnétique et applications

Dans cette leçon, le plus grand soin dans la définition des orientations et conventions de signe s'impose. Les applications doivent occuper une place signification dans la présentation. Pour la leçon, il n'est pas nécessaire de traiter en détail les deux types d'induction.

2008 ; Leçon 23 : Induction électromagnétique : circuit mobile dans un champ magnétique permanent, circuit fixe dans un champ variable. Applications

Il faut des conventions précises et s'y tenir tout au long de la leçon. En outre, il est impératif de faire le lien en f.e.m. et courant induits.

2006 Leçon 23 : Induction électromagnétique. Aspects énergétiques. Applications

Cette leçon est consacrée à un phénomène particulièrement important, tant du point de vue de la physique fondamentale que de celui des applications technologiques. Le sujet ne doit pas être traité de manière trop formelle et un temps suffisant doit être consacré aux applications.

2005 ; Leçon 24 : Induction électromagnétique. Aspects énergétiques. Applications

Il faut orienter les circuits filiformes et ne pas s'y limiter : les applications mettant en jeu des courants volumiques induits sont particulièrement appréciées.

## Bibliographie

✦ *Electromagnétisme 3*, M. Bertin, J.P. Fa- → La base.  
roux et J. Renault

✦ *Physique PSI PSI\**, C. More et S. Olivier → Livre type de prépa avec application.

✦ *Physique tout-en-un PC-PC\**, B. Salamito, S. → Autre source  
Cardini, D. Jurine et M.N. Sanz

## Prérequis

- Bases de l'électromagnétisme
- Force de Lorentz et de Laplace
- Mécanique du point

## Expériences

- ☞ Expérience de Faraday (1831)
- ☞ Calcul du rapport de transformation d'un transformateur
- ☞ Les rails de Laplace

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le phénomène d'induction</b>	<b>2</b>
1.1	Lois sur l'induction . . . . .	2
1.2	Induction de Neumann . . . . .	3
1.3	Induction de Lorentz . . . . .	3

<b>2 Couplage électromagnétique : Induction de Neumann</b>	<b>4</b>
2.1 Autoinduction : Flux propre et inductance propre . . . . .	4
2.2 Inductance mutuelle de deux circuits . . . . .	4
2.3 Application aux transformateurs . . . . .	4
2.4 Chauffage par courants de Foucault . . . . .	6
<b>3 Couplage électromécanique : Les rails de Laplace</b>	<b>7</b>
3.1 Analyse qualitative . . . . .	7
3.2 Recherche de l'équation électrique et de l'équation mécanique . . . . .	7
3.2.1 Recherche de l'équation électrique . . . . .	8
3.2.2 Recherche de l'équation mécanique : étude du mouvement de la tige . . . . .	8
3.3 Résolution . . . . .	9

## Introduction

Les phénomènes d'induction électromagnétique sont la première manifestation importante que nous rencontrons de champs variables dans le temps. Ils furent découverts par Faraday en 1831. Les courants permanents produisent des champs magnétiques, et c'est en cherchant à mettre en évidence, mais sans succès, une réciprocité stricte, que Faraday découvrit l'effet des variations de flux magnétiques à travers un circuit.

### Expérience de Faraday (1831)



⌚ 1 minute

#### Matériel

- Microvoltmètre
- Bobine
- Aimant

## 1 Le phénomène d'induction

### 1.1 Lois sur l'induction

MN Sanz PC page 283

On a pu constater qu'une variation du flux magnétique  $\Phi_B$  à travers le circuit provoque l'apparition d'un courant dans celui-ci. C'est le phénomène d'induction électromagnétique. En 1831, Faraday déduisit de ses expériences la loi de Faraday : le courant induit dans le circuit est égal à celui que produirait un générateur de force électromotrice induite  $e$  telle que :

$$e = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1)$$

$e$  est donc reliée à la variation du flux magnétique.

MN Sanz PC page 290

Comment interpréter le signe - qui apparaît dans la loi de Faraday ?

Si le flux magnétique augmente, la force électromotrice induite est négative. Elle tend à faire circuler un courant électrique dans le circuit créant un champ magnétique, appelé champ magnétique induit, dans un sens tel que son flux s'oppose à l'augmentation de flux magnétique imposée.

En approchant le pôle nord lors de l'expérience introductive, on a provoqué une augmentation du flux magnétique à travers la bobine. Cette variation de flux induit une force électromotrice à l'origine d'un courant qui crée un champ magnétique induit : le flux du champ induit diminue le flux magnétique global à travers le circuit. Inversement, si on recule l'aimant, le flux magnétique diminue (en valeur absolue) et le champ induit doit être dans un sens tel qu'il va

contribuer à une augmentation du flux global.

En résumé le signe - de la loi de Faraday traduit le fait que la force électromotrice induite crée un courant dont les effets s'opposent à la variation de flux, c'est-à-dire à la cause qui lui a donné naissance. La loi de modération de Lenz (Heinrich Lenz en 1834) s'exprime de manière très générale de la manière suivant :

**Les effets de l'induction s'opposent à la cause qui les a produits**

## 1.2 Induction de Neumann

Dans cette situation, le circuit est fixe et le champ magnétique dépend du temps.

On a :  $\vec{E}(M, t) = -\overrightarrow{grad}V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t)$ .

Le premier terme est un gradient donc à une circulation conservative. La partie du champ électrique qui est à circulation non conservative  $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . On l'appelle souvent *champ électromoteur*. La force électromotrice induite dans un circuit filiforme fermé est ainsi :

$$e(t) = \oint_{M \in \Gamma} \vec{E}_m(M, t) \cdot d\vec{l}_M = \oint_{M \in \Gamma} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \quad (2)$$

puisque le terme  $-\overrightarrow{grad}V$  est à circulation conservative.

On peut retrouver la loi de Faraday à partir de cette dernière formule. Le contour étant fixe et indéformable, la dérivée par rapport au temps et l'intégrale le long du contour commutent. Nous pouvons en déduire :

$$e(t) = -\frac{d}{dt} \left( \oint_{M \in \Gamma} \vec{A}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \right) \quad (3)$$

Le théorème de Stokes nous donne :

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{A}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = \iint_{P \in S} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S}_P \quad (4)$$

puisque  $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$ . Nous obtenons ainsi

$$e(t) = -\frac{d}{dt} \iint_{P \in S} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (5)$$

## 1.3 Induction de Lorentz

Dans cette situation, le circuit est mobile et le champ magnétique indépendant du temps.

Dans des référentiels galiléens  $\mathcal{R}$ , et  $\mathcal{R}'$  qui est animé par rapport à  $\mathcal{R}$  d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v}_e$ , on a :

$$\begin{cases} \vec{E}_{/\mathcal{R}'}(M, t) = \vec{E}_{/\mathcal{R}}(M, t) + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_{/\mathcal{R}}(M, t) \\ \vec{B}_{/\mathcal{R}'}(M, t) = \vec{B}_{/\mathcal{R}}(M, t) \end{cases}$$

Les équations constituent les formules de transformations classiques des champs.

Pour des référentiels galiléens :

$$\vec{j}_{/\mathcal{R}'}(M, t) = \vec{j}_{/\mathcal{R}}(M, t) \quad (6)$$

On a donc

$$\vec{j}_{/\mathcal{R}}(M, t) = \gamma(\vec{E}_{/\mathcal{R}}(M, t) + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_{/\mathcal{R}}(M, t)) \quad (7)$$

Or dans le cas d'un conducteur fixe  $\vec{j}_{/\mathcal{R}}(M, t) = \gamma(-\overrightarrow{grad}V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t))$ . Le terme  $\vec{v}_e \wedge \vec{B}_{/\mathcal{R}}(M, t)$  remplace ici le terme  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t)$  à circulation non conservation. Par analogie, on appelle champ électromoteur le champ vectoriel :

$$\vec{E}_m(M, t) = \vec{v}_e \wedge \vec{B}_{/\mathcal{R}}(M, t) \quad (8)$$

## 2 Couplage électromagnétique : Induction de Neumann

### 2.1 Autoinduction : Flux propre et inductance propre

Si on considère un circuit fixe et indéformable, parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$ . Ce circuit crée un champ magnétique, que nous appelons *champ propre* et qui est noté  $\vec{B}_p(M, t)$ . Le flux de champ à travers le circuit lui-même est appelé *flux propre*. Il s'exprime par :

$$\Phi_P(t) = \sum_{spires} \int_{M \in \mathcal{S}_{spire}} \vec{B}_p(M, t) \cdot d\vec{S}_M \quad (9)$$

où  $\mathcal{S}_{spire}$  est la surface s'appuyant sur une spire

Le champ magnétique propre en  $M$  et à l'instant  $t$  est proportionnel à l'intensité  $i(t)$  dans le circuit puisque nous sommes dans l'ARQS. Le flux propre est donc lui-même proportionnel à  $i(t)$ , le facteur de proportionnalité ne dépendant pas du temps mais uniquement de la géométrie du circuit. On note :

$$\Phi_P(t) = Li(t) \quad (10)$$

Cette relation définit le coefficient  $L$  appelé *inductance propre* du circuit. L'inductance propre est constante pour un circuit indéformable. Elle s'exprime en henry.

### 2.2 Inductance mutuelle de deux circuits

MN Sanz page 301

On considère deux circuits fixes et indéformables, parcourus par des courants d'intensités respectives  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ . Notons  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  le flux du champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé par le circuit  $\mathcal{C}_1$  à travers le circuit  $\mathcal{C}_2$  :

$$\phi_{1 \rightarrow 2}(t) = \sum_{spires \in \mathcal{C}_2} \iint_{P_2 \in \mathcal{S}_{spire}} \vec{B}_1(P_2, t) \cdot d\vec{S}_2 \quad (11)$$

Le champ magnétique est proportionnel puisque nous sommes dans l'ARQS. Le flux est donc lui-même proportionnel à  $i_1(t)$  puisque nous sommes dans l'ARQS. Nous pouvons donc écrire :

$$\phi_{1 \rightarrow 2}(t) = M_{12}i_1(t) \quad (12)$$

où  $M_{12}$  le coefficient est déterminé par la géométrie des circuits. Lorsqu'ils sont fixes et indéformables, ce coefficient ne dépend pas du temps.

De même, le flux du champ magnétique  $\phi_{2 \rightarrow 1}$  créé par le circuit  $\mathcal{C}_2$  à travers le circuit  $\mathcal{C}_1$  est proportionnel à  $i_2(t)$  et s'écrit :

$$\phi_{2 \rightarrow 1}(t) = M_{21}i_2(t) \quad (13)$$

Nous admettrons le théorème de Neumann :

$$M_{12} = M_{21} \quad (14)$$

Nous noterons alors  $M_{12} = M_{21} = M$ . En résumé, il existe un coefficient  $M$  appelé inductance mutuelle tel que :

$$\phi_{1 \rightarrow 2}(t) = Mi_1(t)$$

et

$$\phi_{2 \rightarrow 1}(t) = Mi_2(t) \quad (15)$$

$M$  dépend uniquement de la géométrie des circuits. L'unité d'inductance mutuelle est le henry.

### 2.3 Application aux transformateurs

Le couplage entre les deux bobines est augmenté en positionnant les deux bobines avec leurs axes parallèles et en les reliant par une carcasse de fer qui canalise les lignes de champ :

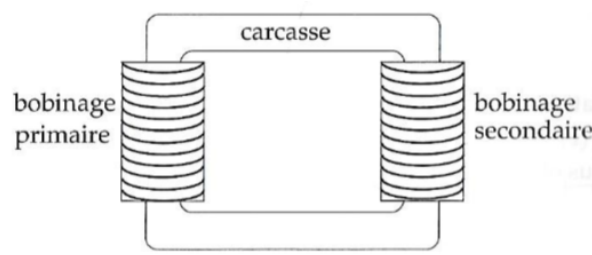
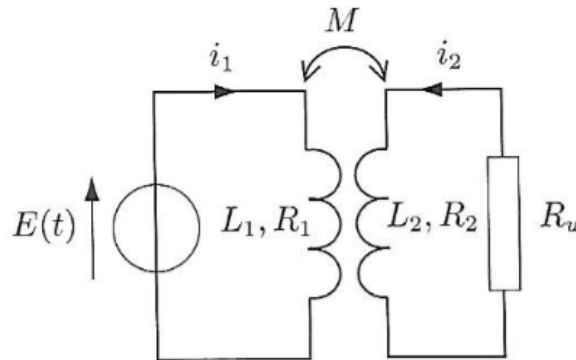
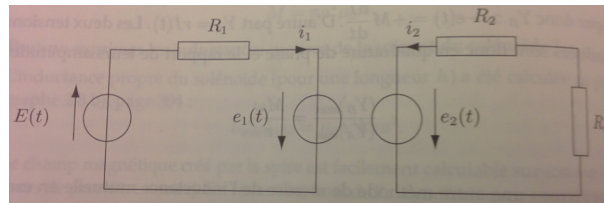


Figure 8.19 – Transformateur.

Le schéma de l'expérience est le suivant :



Le schéma électrique est :



avec

$$\begin{cases} e_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 &= -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Les lois des mailles des deux circuits s'écrivent :

$$\begin{cases} E(t) = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 = (R_2 + R_u) i_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Dans le cadre du modèle du transformateur parfait, le couplage est parfait et il n'y a pas de pertes par effet Joule, donc :  $R_1 = R_2 = 0$  et  $M^2 = L_1 L_2$ .

Les bobines sont identiques (cylindres de rayon  $a$ , de longueur  $l$ ), le bobinage primaire comporte  $N_1$  spires, le bobinage secondaire  $N_2$  spires.

Le champ magnétique créé par le solénoïde est nul à l'extérieur de celui-ci et vaut  $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$  à l'intérieur. Le flux du champ propre à travers une des spires du solénoïde est :

$$\phi = (\mu_0 n i(t) \vec{u}_z) (\pi a^2 \vec{u}_z) = \mu_0 n i(t) \pi a^2$$

Le flux propre à travers une portion de solénoïde de longueur  $l$  est donc :

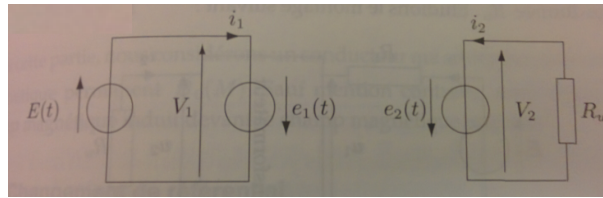
$$\Phi_p(t) = n l \phi = \mu_0 n^2 h \pi a^2 i(t)$$

L'inductance propre de cette portion de solénoïde de longueur  $l$  est alors :

$$L = \mu_0 n^2 h \pi a^2$$

Soit  $L_1 = \mu_0 N_1^2 \frac{\pi a^2}{l} = N_1^2 L_0$ , en posant  $L_0 = \mu_0 \frac{\pi a^2}{l}$ , et  $L_2 = N_2^2 L_0$ . Nous en déduisons, dans l'hypothèse d'un couplage parfait que  $M = \sqrt{L_1 L_2} = N_1 N_2 L_0$ .

On a le schéma électrique équivalent :



Les équations électriques donnant les tensions  $V_1$  et  $V_2$  aux bornes du primaire et du secondaire sont donc :

$$\begin{cases} E(t) = V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ V_2 = -R_u i_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Une des principale utilisation d'un transformateur est le transformateur de tension. Les expressions des inductances propres du primaire et du secondaire et celle de l'inductance mutuelle permettent d'écrire :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (16)$$

Le rapport des tensions au secondaire et au primaire est égal au rapport du nombres de spires des deux bobinages, appelé rapport de transformation, et noté en général  $m$ .

### Calcul du rapport de transformation d'un transformateur

⚡ Référence

⌚ 4 minutes

Matériel

- Transformateur
- Alimentation continue 220V
- 2 rhéostats
- 2 wattmètre

## 2.4 Chauffage par courants de Foucault

MN Sanz page 294

Un cylindre conducteur, de rayon  $a$ , d'hauteur  $b$  et de conductivité électrique  $\gamma$  est placé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . Le cylindre est un conducteur soumis à un champ magnétique variable. Il apparaît donc un champ électrique et des courants à l'intérieur de ce conducteur (courants de Foucault) induits par les variations temporelles de  $\vec{B}$ . Ces courants vont dissiper de l'énergie par effet Joule, ce qui aura pour effet de chauffer le cylindre. C'est le principe des plaques à induction.

On va négliger le champ magnétique créé par les courants induits devant le champ magnétique extérieur.

On considère un point  $M$  du cylindre repéré par ses coordonnées cylindriques. Le plan contenant  $M$  et l'axe  $O_z$  est plan de symétrie du cylindre et du champ magnétique. Mais le champ magnétique étant un pseudo-vecteur, un plan de symétrie pour  $\vec{B}$  est en fait un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants. Donc le courant  $\vec{j}$  est orthogonal à ce plan d'antisymétrie. Donc :

$$\vec{j} = j(r, \theta, t) \vec{u}_\theta$$

Les lignes de courants sont donc des cercles d'axe  $O_z$ . Nous pouvons considérer le tube de courant compris entre  $r$  et  $r + dr$ , et entre  $z$  et  $z + dz$  comme une spire et calculer la force électromotrice induite dans cette spire grâce à la loi de Faraday. On oriente la spire dans le sens direct autour de  $O_z$ . Le flux magnétique à travers cette spire est le flux à travers le disque d'axe  $O_z$  et de rayon  $r$ , soit :

$$\phi_B = (B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z) (\pi r^2 \vec{u}_z) = B_0 \pi r^2 \cos(\omega t)$$

Il vient :

$$e(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = B_0 \omega \pi r^2 \sin(\omega t) \quad (17)$$

La petite spire est un circuit filiforme, de longueur  $L = 2\pi r$ , de section  $ds$  donc de conductance  $dG = \gamma \frac{ds}{L} = \gamma \frac{ds}{2\pi r}$ . L'équation électrique cette petite spire s'écrit :

$$i(t) = dG e(t) = \gamma \frac{ds}{2\pi r} B_0 \omega \pi r^2 \sin(\omega t) \quad (18)$$

Or  $i(t) = j(M, t)ds$  d'où :

$$j(M, t) = \gamma \frac{\omega B_0}{2} r \sin(\omega t) \quad (19)$$

La puissance dissipée par effet Joule dans le volume élémentaire  $d\tau$  est égale à

$$d\mathcal{P}_J = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{j^2}{\gamma} d\tau \quad (20)$$

La puissance moyenne dissipée dans toute le cylindre est :

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \iiint_{\text{cylindre}} \gamma \left( \frac{\omega B_0}{2} r \right)^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle r dr dz d\theta \quad (21)$$

$$= \gamma \left( \frac{\omega B_0}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \iiint_{\text{cylindre}} r^3 dr dz d\theta \quad (22)$$

$$= \gamma \left( \frac{\omega B_0}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{a^4}{4} b 2\pi \quad (23)$$

### 3 Couplage électromécanique : Les rails de Laplace

Page 320 MN Sanz

On branche un générateur de force électromotrice constante  $E_0$  entre les deux rails. La tige est lâchée sans vitesse initiale.

#### Les rails de Laplace

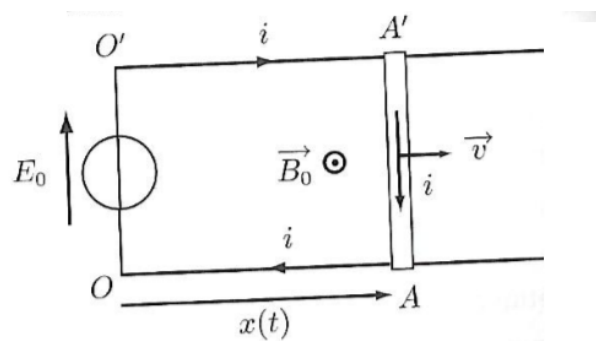
⚡ Référence

⌚ 2 minutes

Matériel

- Dispositif des rails de Laplace (support) + rail mobile
- Rhéostat
- Alimentation

#### 3.1 Analyse qualitative



Le générateur fait passer un courant dans le circuit qui va de A' vers A si  $E_0$  est positif, de A vers A' si elle est négative. La tige est alors soumise à une force de Laplace dirigée dans le sens de  $-\vec{u}_x$  si  $E_0$  est positif ou dans le sens de  $\vec{u}_x$  si  $E_0$  est négatif, sous l'action de laquelle elle est mise en mouvement. La tige étant en mouvement dans le champ magnétique, il apparaît une force électromotrice induite dans le circuit. D'après la loi de Lenz, cette force électromotrice s'oppose à celle du générateur.

#### 3.2 Recherche de l'équation électrique et de l'équation mécanique

### 3.2.1 Recherche de l'équation électrique

La première chose à faire est d'orienter le circuit électrique. On présente le schéma avec nos conventions. Dans notre cas présent, nous orientons donc la tige dans le sens du courant, de A' vers A.

Nous calculons donc la force électromotrice induite de A' vers A soit :

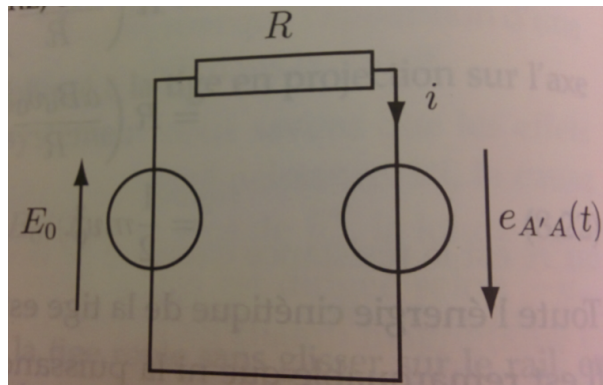
$$e_{A'A}(t) = \int_{A'}^A (\vec{v}(t) \wedge \vec{B}_0) \cdot d\vec{l} \quad (24)$$

$$= \int_{A'}^A (v(t)\vec{u}_x \wedge B_0\vec{u}_z) \cdot d\vec{l} \quad (25)$$

$$= \int_{A'}^A v(t)B_0 dl \quad (26)$$

$$= av(t)B_0 \quad (27)$$

Le schéma électrique du circuit est :



L'expression de la force électromotrice induite dans le circuit  $e(t)$  est :

$$E_0 + e_{A'A}(t) = Ri(t)$$

soit

$$E_0 + av(t)B_0 = Ri(t) \quad (28)$$

### 3.2.2 Recherche de l'équation mécanique : étude du mouvement de la tige

On doit établir l'équation mécanique régissant le mouvement de la tige. Pour cela, on effectue un pfd :

- son poids  $P = -mg\vec{u}_z$ , appliqué en son centre de masse  $G$  ;
- aux réactions du rail en A et A', points de contact de la tige sur les rails ; ces deux réactions sont parallèles à  $\vec{u}_z$  car la tige glisse parfaitement ;
- à la force de Laplace

On calcule la résultante de cette dernière force :

$$\vec{F}_{Lap} = \int_{A'}^A i(t) d\vec{l} \wedge \vec{B}_0 \quad (29)$$

$$= \int_{A'}^A i(t) (-dl\vec{u}_y) \wedge (B_0\vec{u}_z) \quad (30)$$

$$= \int_{A'}^A -i(t)B_0 dl\vec{u}_x \quad (31)$$

$$= -aB_0i(t)\vec{u}_x \quad (32)$$

On projette sur l'axe  $O_x$ , on obtient l'équation mécanique du système :

$$m \frac{dv}{dt} = -aB_0i(t) \quad (33)$$



### 3.3 Résolution

On va éliminer  $i(t)$  des équations. Il vient

$$\tau \frac{dv}{dt} + v(t) = -\frac{E_0}{aB_0} \quad (34)$$

en posant  $\tau = \frac{mR}{(aB_0)^2}$ . La solution de cette équation vérifiant la condition initiale  $v(0) = 0$  est :

$$v(t) = -\frac{E_0}{aB_0} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) \quad (35)$$

On peut en déduire l'intensité :

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \exp(-\frac{t}{\tau}) \quad (36)$$

On atteint en un temps de l'ordre de quelque fois  $\tau$  un régime permanent pour lequel la tige a une vitesse constante non nulle et l'intensité dans le circuit est nulle. A partir de ce moment, la force électromotrice induite annule la force électromotrice du générateur ; l'intensité s'annulant, la tige n'est plus soumise à une force de Laplace et a donc une vitesse constante.

### Conclusion

## Remarques, questions