

Electromagnétisme dans les milieux

Chapitre V : Equations de Maxwell dans la matière

Objectifs :

- Polarisation et aimantation d'un milieu matériel
- Equations de Maxwell dans la matière
- Application au cas du transformateur

1. Rappels (cf. cours de 1^{ère} année)

1.1. Dipôle électrique

Considérons une distribution de charges ponctuelles $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$ situées en des points P_i se trouvant à l'intérieur d'un domaine D de l'espace vide.

Soit O un point de D que l'on choisit comme origine d'un repère.

1.1.1. Potentiel scalaire d'un dipôle

D'après le principe de superposition le potentiel scalaire de la distribution précédente est

$$V(M) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M}$$

On se place dans le cas particulier où le point M est "loin" de D :

$$\begin{aligned} \forall i \quad r_i &= OP_i \ll r = OM \\ \text{on a alors} \quad \frac{1}{P_i M} &= \sqrt{\left(\overrightarrow{P_i M}\right)^{-2}} = \sqrt{\left(\overrightarrow{P_i O} + \overrightarrow{OM}\right)^{-2}} = \sqrt{\left(-\overrightarrow{OP_i} + \overrightarrow{OM}\right)^{-2}} \\ &= \left(r_i^2 + r^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r}{r}\right) \\ \Rightarrow V(M) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r}{r}\right) \right] \end{aligned}$$

d'où l'expression du potentiel

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i\right) \cdot \vec{e}_r}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

- Si la **distribution est globalement chargée** alors $Q = \sum_{i=1}^n q_i \neq 0$ et le potentiel scalaire est donnée par l'expression approchée qui correspond au cas d'une charge ponctuelle Q placée en O

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

- Si la **distribution est globalement neutre** alors $Q = \sum_{i=1}^n q_i = 0$ et le potentiel scalaire est donnée par l'expression approchée

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i\right) \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

on introduit alors le **moment dipolaire électrique** \vec{p} de la distribution

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i$$

et le potentiel s'écrit

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

Remarques :

1) Dans le cas $Q = 0$ la distribution de charges est équivalente au dipôle électrostatique suivant : charge égale à la somme des charges positives (ou négatives) placée au barycentre de ces mêmes charges.

2) Toujours dans le cas $Q = 0$ le moment dipolaire \vec{p} ne dépend pas du choix de l'origine O :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{i=1}^n q_i (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_i}) = \sum_{i=1}^n q_i \overrightarrow{OO'} + \sum_{i=1}^n q_i \overrightarrow{O'P_i} = \vec{p}'$$

3) Dans le cas des distributions non discrètes le moment dipolaire est

$$\vec{p} = \iiint_D \rho(P) \overrightarrow{OP} d\tau \text{ ou } \vec{p} = \iint_D \sigma(P) \overrightarrow{OP} dS \text{ ou } \vec{p} = \int_D \lambda(P) \overrightarrow{OP} d\ell$$

1.1.2. Champ électrique d'un dipôle

On obtient le champ électrique \vec{E} créé par la distribution de charges (toujours dans le cas où elle est modélisable par un dipôle électrique i.e. $Q = 0$) grâce à la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$:

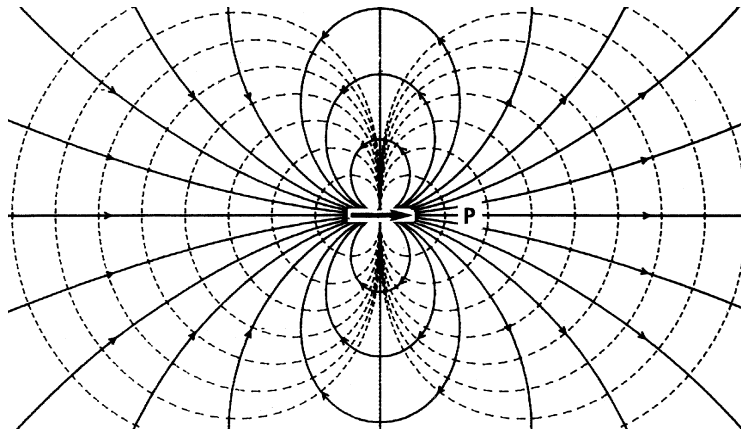
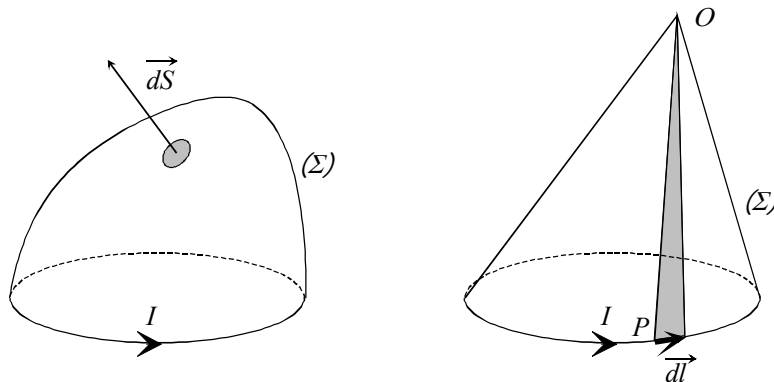
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}]$$

soit en coordonnées sphériques

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta]$$

1.1.3. Diagramme électrique

Les équipotentielles ont pour équation $r = r_0 \sqrt{|\cos \theta|}$ et les lignes de champ : $r = r_0 \sin^2 \theta$, d'où le diagramme électrique :

**1.2. Dipôle magnétique****1.2.1. Moment magnétique d'une boucle de courant**

Soit une boucle de courant parcourue par un courant I et Σ une surface quelconque s'appuyant sur la boucle. Par définition le moment magnétique de la boucle est

$$\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S} = I \iint_{\Sigma} d\vec{S}$$

Nous choisissons pour Σ le cône de sommet O (O point quelconque au voisinage de la boucle) s'appuyant sur la boucle :

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{OP} \wedge d\vec{\ell} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \int_{\text{boucle}} \vec{OP} \wedge I d\vec{\ell}$$

Cette dernière expression, obtenue pour des courants linéiques, peut être généralisée au cas des courants surfaciques et volumiques :

Dans le cas d'une distribution de courant localisée

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \int_{\text{boucle}} \vec{OP} \wedge I d\vec{\ell} ; \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iint_{\text{surface}} \vec{OP} \wedge \vec{j}_s(P) dS ; \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Volume}} \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) d\tau}$$

1.2.2. Champ magnétique créé par un dipôle magnétique

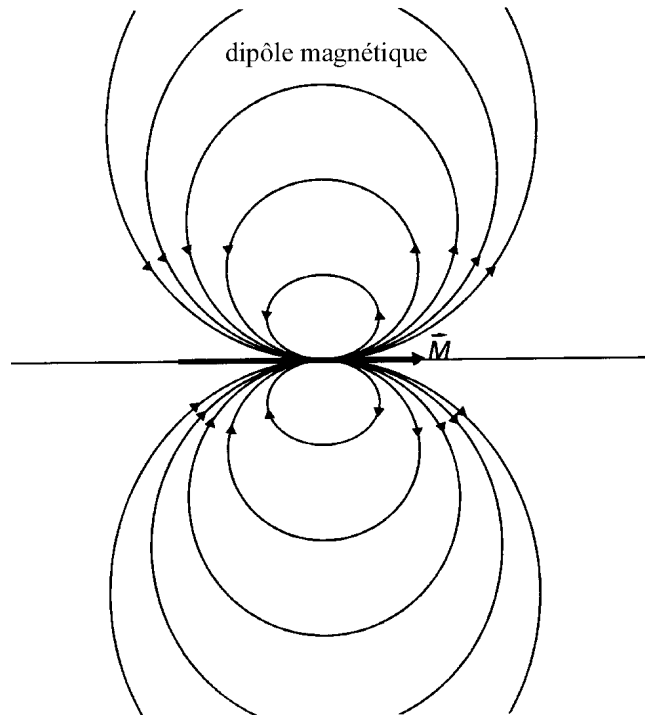
Par analogie avec le champ électrique du dipôle électrostatique nous obtenons le champ magnétique \vec{B} du dipôle magnéto-statique :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[3 \left(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_r \right) \vec{e}_r - \vec{\mathcal{M}} \right]}$$

soit en coordonnées sphériques

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta]}$$

d'où les lignes de champ



1.3. Action d'un champ permanent sur un dipôle

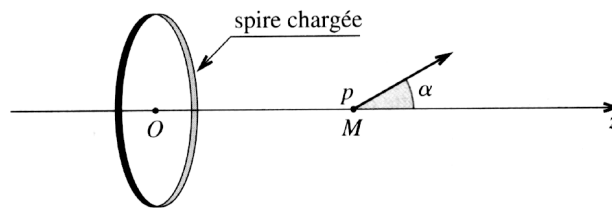
Le tableau ci-dessous résume les actions d'un champ permanent sur un dipôle :

	dipôle électrique	dipôle magnétique
champ uniforme	moment : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ force : $\vec{F} = \vec{0}$	moment : $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ force : $\vec{F} = \vec{0}$
champ non uniforme	moment : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ force : $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}$	moment : $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ force : $\vec{F} = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$
énergie potentielle d'interaction \mathcal{E}_p dans le cas d'un dipôle rigide	$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$

Exercice n° 01 : Action d'un champ permanent sur un dipôle

Démontrer qu'un dipôle électrostatique plongé dans un champ légèrement inhomogène est soumis à une force $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}$.

Exercice n° 02 : Interaction d'une spire et d'un dipôle



Le cerceau, de rayon R , porte la charge linéique λ uniforme.

- 1) Calculer le champ électrostatique créé par le cerceau sur son axe, ainsi qu'au voisinage de celui-ci.
- 2) Quelles sont les actions mécaniques exercées par la spire sur le dipôle ? On proposera trois méthodes pour effectuer ce calcul.
- 3) On prend désormais $\alpha = 0$. Le dipôle peut coulisser sans frottement sur l'axe horizontal. Déterminer la ou les positions d'équilibre. Discuter leur stabilité et calculer éventuellement la période des petites oscillations du dipôle de masse m le long de l'axe.

Exercice n° 03 : Expression du potentiel vecteur d'un dipôle magnétique

On considère un dipôle magnétique constitué d'une spire C parcourue par un courant constant I . Son potentiel vecteur a alors pour expression $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell}}{r_{PM}}$. Montrer par deux méthodes que le potentiel vecteur s'exprime également sous la forme $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mathcal{M}} \wedge \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$ où $\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S}$ et O est le centre du dipôle. On utilisera la formule de Kelvin $\oint_C u d\vec{\ell} = \iint_S d\vec{S} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} u$.

Exercice n° 04 : Vérification de l'expression du potentiel vecteur

En supposant que pour un dipôle magnétique $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mathcal{M}} \wedge \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$ montrer que $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}}}{OM^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta]$. Que peut-on en déduire ?

Exercice n° 05 : Dipôle magnétique parfait

On considère une sphère de centre O et de rayon R parcourue par un courant surfacique $\vec{j}_s = \sigma \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$. Calculer \vec{A} et en déduire \vec{B} à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère. Vérifier les relations de discontinuité à la traversée de la surface.

2. Polarisation d'un milieu matériel

2.1. Polarisation dans les milieux isolants

Rappels :

- Dans un milieu conducteur les **charges libres** ou **charges de conduction** (électrons ou ions) peuvent se déplacer dans l'ensemble du matériau. Ce déplacement est à l'origine des **densités volumiques de charges libres** ρ_m et de **courant libre** \vec{j} qui intervenaient dans les équations de Maxwell.
- Dans un milieu isolant (ou milieu diélectrique) il n'y a pas de charges libres mais les **charges liées** peuvent tout de même se déplacer légèrement. Ces déplacements peuvent provoquer l'apparition de moments dipolaires induits : le milieu se polarise.

2.1.1. Polarisation électronique ou atomique

Un milieu isolant constitué d'atomes ou de molécules sans moment dipolaire électrique permanent (entité suffisamment symétrique pour que le barycentre des charges positives soit confondu avec celui des charges négatives : H_2 , N_2 , O_2) peut se polariser sous l'action d'un champ électrique \vec{E} : ce champ déforme les nuages électroniques et provoque l'apparition de moments dipolaires induits. Un élément de volume $d\tau$ possède alors un moment dipolaire. On dira que le milieu possède une **polarisation électronique** ou **polarisation atomique**.

2.1.2. Polarisation dipolaire ou polarisation d'orientation

Un milieu isolant constitué d'atomes ou de molécules possédant un moment dipolaire électrique permanent (entité asymétrique telle que le barycentre des charges positives ne soit confondu avec celui des charges négatives : H_2O , NH_3 , HCl) ne possède pas de polarisation à l'échelle mésoscopique ; en effet, dans un élément de volume $d\tau$ les orientations des moments dipolaires sont aléatoires (agitation thermique) et le moment dipolaire résultant est nul.

Mais ce milieu peut se polariser sous l'action d'un champ électrique \vec{E} : ce champ exerce un couple $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ sur les entités ce qui a tendance à les orienter dans le sens de \vec{E} . **Un élément de volume $d\tau$ possède alors un moment dipolaire.** On dira que le milieu possède une **polarisation dipolaire** ou **polarisation d'orientation**.

2.1.3. Polarisation ionique

Un milieu isolant constitué de cations et d'anions régulièrement répartis ne possède pas de polarisation à l'échelle mésoscopique.

Mais ce milieu peut se polariser sous l'action d'un champ électrique \vec{E} : ce champ écarte les ions de leur position d'équilibre. **Un élément de volume $d\tau$ possède alors un moment dipolaire.** On dira que le milieu possède une **polarisation ionique**.

2.2. Vecteur polarisation

Plongé dans un champ électrique, un milieu diélectrique se polarise : chaque volume mésoscopique $d\tau$ de matière acquiert un moment dipolaire électrique $d\vec{p}$ induit par le champ, caractérisé par un moment dipolaire volumique \vec{P} appelé vecteur polarisation et défini par $d\vec{p} = \vec{P}d\tau$.

Unités : \vec{P} s'exprime en coulomb/mètre carré dans le système S.I.

Remarques :

1) Le vecteur \vec{P} est un vecteur macroscopique défini comme une valeur moyenne spatiale sur un volume mésoscopique. Il en est de même pour les champs \vec{E} et \vec{B} .

2) Certains cristaux, appelés *piézo-électrique*, peuvent présenter une polarisation sous l'effet d'une contrainte mécanique et peuvent se déformer sous l'action d'une polarisation induite par un champ électrique.

2.3. Densités de charges équivalentes à la polarisation

Le vecteur polarisation est relié à la densité macroscopique de charges liées. On se propose sur un modèle simple d'établir ce lien.

Soit un domaine arbitraire D du diélectrique, limité par la surface fermée S de dimensions grandes devant les dimensions atomiques. Il contient divers types de particules, de charges q_i et de densités correspondantes n_i (nombre par unité de volume) non nécessairement uniformes. En l'absence de polarisation ($\vec{P} = \vec{0}$), le milieu est supposé neutre, ce qui entraîne : $\sum n_i q_i = 0$. La polarisation est créée par les déplacements moyens $\vec{\delta}_i$ des porteurs de charge q_i et le vecteur polarisation \vec{P} est donné par

$$\vec{P} = \sum n_i q_i \vec{\delta}_i$$

À ces déplacements $\vec{\delta}_i$ correspond un flux sortant de charges à travers S :

les porteurs de charge q_i qui, à un instant donné, ont traversé un élément de surface $d\vec{S}$ sont contenus dans le cylindre de base $d\vec{S}$ et de génératrices $\vec{\delta}_i$; le volume de ce cylindre est $\vec{\delta}_i \cdot d\vec{S}$ et les porteurs qu'il contient sont au nombre de $n_i \vec{\delta}_i \cdot d\vec{S}$.

La charge correspondante transportée à l'extérieur est donc

$$\sum n_i q_i \vec{\delta}_i \cdot d\vec{S} = \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Ce calcul est algébrique et valable quel que soit le signe de q_i et le sens de $\vec{\delta}_i$. La charge totale δQ ayant traversé S , donc quitté D , en y laissant la polarisation \vec{P} , est donnée par

$$\delta Q = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Le domaine D étant initialement neutre, contient alors une charge totale Q_P qui est l'opposé de δQ

$$Q_P = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Le théorème de Green-Ostrogradsky donne

$$Q_P = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \iiint_D \text{div } \vec{P} d\tau$$

Ce résultat étant valable quel que soit le domaine D , il s'ensuit que la polarisation, d'un point de vue macroscopique, est équivalente à une densité volumique de charges

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

À la surface du diélectrique, les charges qui tendent à sortir à travers un élément de surface $d\vec{S} = dS \vec{n}$ s'accumulent localement (celle de signe opposé au contraire dégarnissent la surface) ; le résultat global est l'apparition d'une charge surfacique $\vec{P} \cdot d\vec{S}$ donc d'une densité surfacique de charge

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Ce calcul montre que **les charges de polarisation**, de densités ρ_p et σ_p , ne sont pas seulement des équivalents mathématiques ou des « charges fictives » comme elles sont parfois nommées, mais **correspondent à des excédents locaux de charges liées, excédents réels, dus à la polarisation**.

2.4. Polarisation variable et courant de polarisation

Le lien entre polarisation et densité de charges équivalente, effectué au paragraphe précédent, n'est pas limité au régime statique et est valable même si la polarisation dépend du temps

$$\rho_p(t) = -\text{div } \vec{P}(t)$$

Pour une polarisation variable dans le temps, les porteurs de charge q_i sont animés d'une vitesse moyenne $\vec{v}_i = d(\vec{\delta}_i)/dt$; il leur correspond donc un courant, dit **courant de polarisation**, de densité volumique \vec{j}_p , donnée par

$$\vec{j}_p = \sum n_i q_i \vec{v}_i = \sum n_i q_i \frac{d(\vec{\delta}_i)}{dt}$$

soit, avec $\vec{P} = \sum n_i q_i \vec{\delta}_i$

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Cette densité de courant est une grandeur macroscopique, correspondant à la moyenne des courants microscopiques produits par les faibles déplacements relatifs des charges liées. Ce courant n'a rien de fictif et produit les mêmes effets, en particulier magnétiques, qu'un courant de conduction ; la différence essentielle est que, les charges étant liées, ce courant ne peut être conduit et « utilisé » à l'extérieur du diélectrique.

Cette densité de courant joue un rôle essentiel en régime variable, notamment pour la propagation des ondes électromagnétiques dans la matière.

2.5. Conclusion

Lors de l'étude, à l'échelle macroscopique, du champ électromagnétique dans un milieu matériel, on peut **substituer** à la polarisation \vec{P} du milieu :

- une densité volumique de charges de polarisation $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$;
- une densité surfacique de charges de polarisation $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ (\vec{n} étant orienté vers l'extérieur du milieu matériel) ;
- une densité de courant volumique de polarisation $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ en régime variable.

Ainsi, dans un milieu matériel, nous pouvons utiliser les équations de Maxwell "dans le vide", à condition de tenir compte de ces différentes densités de charges et de courants.

Remarque :

La densité volumique de charges de polarisation ρ_p et la densité de courant volumique de polarisation \vec{j}_p vérifient l'équation locale de conservation de la charge

$$\text{div } \vec{j}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$$

Exercice n° 06 : Modèle de polarisation électronique d'un atome

On modélise un atome d'hydrogène par un nuage électronique sphérique de centre O et de rayon R , dont la charge $-e$ est uniformément répartie, et un noyau ponctuel situé en O de charge $+e$. Placé dans un champ électrique uniforme \vec{E} , on admet que le nuage électronique se déplace, sans se déformer, d'une distance d par rapport au noyau ($d \ll R$). Déterminer le moment dipolaire \vec{p}_{micro} de cet atome induit par le champ \vec{E} en fonction de ϵ_0 , R et \vec{E} .

Exercice n° 07 : Détermination des charges de polarisation à partir du potentiel électrostatique

Un milieu diélectrique de volume V , limité par une surface Σ possède en tout point M une polarisation (induite ou permanente) $\vec{P} = \vec{P}(M)$.

1) Quelle est l'expression du potentiel électrostatique $V(H)$ créé par l'ensemble du milieu diélectrique polarisée en tout point H extérieur au diélectrique ?

2) Transformer l'expression obtenue afin de faire apparaître les densités volumiques $\rho_{pol} = -\text{div } \vec{P}$ et surfacique $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{N}$ de charges de polarisation.

3. Aimantation d'un milieu matériel

3.1. Les différents milieux magnétiques

Nous ne distinguons pas, dans ce paragraphe, isolants et conducteurs. Dans une image classique (et donc particulièrement simpliste), nous pouvons nous imaginer qu'un atome, une molécule, un ion sont constitués d'électrons tournant autour de noyaux. Ainsi, il nous est possible d'assimiler l'atome, la molécule ou l'ion à des petites boucles de courants, c'est-à-dire à des dipôles magnétiques.

Le moment magnétique orbital ne peut expliquer à lui seul les propriétés magnétiques de la matière. Il faut impérativement faire appel à la mécanique quantique (seule théorie utilisable à une échelle microscopique) pour comprendre celles-ci. Dans cette théorie, on montre que les électrons, mais aussi les protons et les neutrons possèdent un moment cinétique intrinsèque appelé *spin* et donc un *moment magnétique intrinsèque* (on donne parfois du spin de l'électron l'image classique d'une particule qui tourne sur elle-même : cette image conduisant à des résultats erronés est à rejeter). Par suite, le moment magnétique des atomes, des molécules ou des ions résulte de la superposition des moments orbitaux et des moments de spin des électrons et des noyaux qui constituent ces particules. En fait, ce moment résultant est dû essentiellement aux moments magnétiques des électrons célibataires de la particule.

On distingue deux types de corps :

- **Les corps constitués de particules qui ne possèdent pas de moments magnétiques.**

Ces particules ne contiennent pas d'électrons célibataires (diazote N_2 , dichlore Cl_2). Ces corps ne présentent pas évidemment d'aimantation permanente à l'échelle macroscopique et sont appelés **diamagnétiques**.

- **Les corps constitués de particules qui possèdent un moment magnétique.**

En raison de l'agitation thermique, ces moments sont orientés de manière aléatoire les uns par rapport aux autres et, en général, ces corps ne présentent pas d'aimantation permanente à l'échelle macroscopique ; ils sont appelés **paramagnétiques** (par exemple le monoxyde d'azote NO , le dioxygène O_2).

Cependant, il peut exister, dans certains corps, des interactions très fortes entre les moments magnétiques d'atomes voisins. Ces moments ont alors tendance à s'orienter parallèlement les uns par rapport aux autres et l'agitation thermique n'arrive pas à détruire complètement cette orientation privilégiée. Ces corps peuvent présenter une aimantation permanente très forte et sont appelés **ferromagnétiques**.

3.2. Action de \vec{B} sur un matériau magnétique

Lorsque le matériau est plongé dans un champ magnétique \vec{B} , ce dernier agit sur les électrons et les noyaux constituant le milieu matériel (l'influence de \vec{B} étant d'ailleurs nettement plus importante sur les électrons beaucoup plus légers que les noyaux).

3.2.1. Cas d'une substance diamagnétique

Sur une substance diamagnétique, \vec{B} déforme les nuages électroniques et fait ainsi apparaître au sein des atomes et des molécules des moments magnétiques induits.

La loi de Lenz nous indique que les champs magnétiques produits par ces moments microscopiques s'opposent au champ \vec{B} initial. À l'échelle macroscopique, le milieu acquiert donc, sous l'action du champ \vec{B} , une aimantation de sens opposé à \vec{B} . Cette aimantation induite, toujours très faible, reste quasiment indépendante de la température.

3.2.2. Cas d'une substance paramagnétique

Sur une substance paramagnétique, en plus de l'action précédente, \vec{B} a tendance à orienter les dipôles atomiques dans sa direction car un champ \vec{B} exerce un couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ sur un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$.

Cet effet étant plus important que le diamagnétisme, le milieu acquiert une aimantation induite de même sens que \vec{B} .

Cette aimantation induite $\vec{\mathcal{M}}$, reste également très faible, mais elle dépend fortement de la température, car l'agitation thermique entrave l'orientation privilégiée des dipôles.

3.2.3. Cas d'une substance ferromagnétique

Plongé dans un champ \vec{B} , un matériau ferromagnétique acquiert une aimantation très importante, sans commune mesure avec celles des corps diamagnétiques ou paramagnétiques.

En outre, cette aimantation subsiste en général après disparition du champ initial.

3.2.4. Vecteur aimantation

Plongé dans un champ magnétique, un milieu s'aimante : chaque volume mésoscopique $d\tau$ de matière acquiert un moment dipolaire magnétique $d\vec{M}$ induit par le champ, caractérisé par un moment dipolaire volumique \vec{M} appelé vecteur aimantation et défini par :

$$d\vec{M} = \vec{M} d\tau$$

Certains milieux, appelés milieux ferromagnétiques, peuvent présenter une aimantation permanente.

Unités : l'aimantation \vec{M} se mesure en $A \cdot m^{-1}$.

3.3. Aimantation et distribution de courants équivalents

Dans le cas du magnétisme orbital, ce sont les porteurs de charges en mouvement mais liés (essentiellement les électrons) qui forment des courants localisés, dits «**courants particuliers**», auxquels sont associés des moments magnétiques. On peut montrer qu'il existe un lien direct entre la moyenne spatiale \vec{j}_m des densités de courants de ces courants particuliers microscopiques et l'aimantation \vec{M} . Dans l'approximation où les dimensions des boucles de courants particuliers sont très faibles devant les dimension du volume sur lequel on effectue la moyenne, ce lien est donné par :

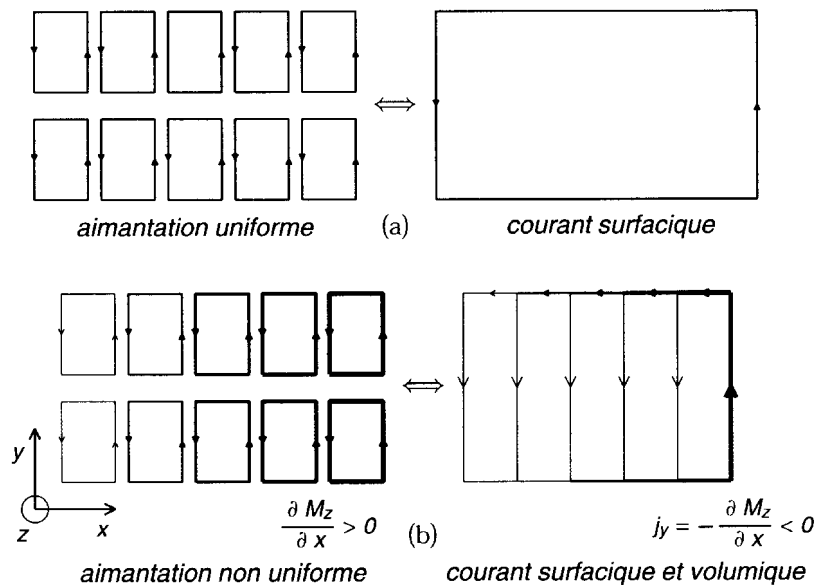
$$\vec{j}_m = \vec{rot} \vec{M}$$

À la surface du matériau, cela se traduit par un courant surfacique, de densité \vec{j}_{sm} donnée par :

$$\vec{j}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{n}$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal sortant à la surface du matériau et \vec{M} l'aimantation à l'intérieur au voisinage immédiat de la surface.

La figure ci-dessous (a) vise à schématiser ce résultat : un matériau aimanté uniformément et perpendiculairement au plan de la figure y est modélisé par de petites boucles de courants localisés, identiques et jointives ; en volume les courants adjacents s'annulent, par contre subsiste un courant en surface. La figure (b) schématise une situation analogue mais où l'aimantation M_z croît dans la direction Ox ; au courant surfacique, s'ajoute en volume un courant moyen dirigé selon Oy en sens inverse.



À l'échelle macroscopique, une fois le nivellement spatial effectué, l'origine du magnétisme, orbital ou de spin, n'est plus apparent. Aussi la relation d'équivalence entre aimantation et courant : $\vec{j}_m = \vec{rot} \vec{M}$ est encore valable pour du magnétisme de spin, mais \vec{j}_m n'a plus alors l'interprétation simple de moyenne de densité de courants particuliers donnée ci-dessus. On peut alors parler de courants équivalents « fictifs ».

3.4. Conclusion

Lors de l'étude, à l'échelle macroscopique, du champ électromagnétique dans un milieu matériel, on peut substituer à l'aimantation \vec{M} du milieu :

- une densité de courant volumique d'aimantation $\vec{j}_m = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M}$;
- une densité de courant surfacique d'aimantation $\vec{j}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{n}$ (\vec{n} étant la normale orientée vers l'extérieur du milieu matériel).

Dans un milieu matériel, nous pouvons utiliser les équations de Maxwell "dans le vide", à condition de tenir compte de la densité volumique de courant d'aimantation.

4. Equations de Maxwell dans un milieux matériels

4.1. Equations pour \vec{E} et \vec{B}

En rassemblant les résultats précédents on obtient :

- équation de Maxwell-Gauss (M-G) : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}$
- équation de Maxwell-Ampère (M-A) : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_p + \vec{j}_m \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- équation du Flux magnétique (M- Φ) : $\text{div} \vec{B} = 0$
- équation de Maxwell-Faraday (M-F) : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Soit en utilisant $\rho_p = -\text{div} \vec{P}$, $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ et $\vec{j}_m = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M}$:

- équation de Maxwell-Gauss (M-G) : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\text{div} \vec{P}}{\epsilon_0}$
- équation de Maxwell-Ampère (M-A) : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- équation du Flux magnétique (M- Φ) : $\text{div} \vec{B} = 0$
- équation de Maxwell-Faraday (M-F) : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Ces équations ne suffisent pas pour déterminer le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) car la polarisation \vec{P} et l'aimantation \vec{M} ne sont pas en général des fonctions données à priori mais elles dépendent elles-mêmes de \vec{E} et \vec{B} .

4.2. Vecteurs \vec{D} et \vec{H}

On cherche à se ramener à des équations semblables à celles obtenues dans le vide. Pour cela on introduit deux nouveaux vecteurs :

$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ vecteur induction électrique ou vecteur \vec{D} $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ vecteur excitation magnétique ou vecteur \vec{H}
--

4.3. Equations de Maxwell

On obtient alors :

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • équation de Maxwell-Gauss (M-G) : $\text{div} \vec{D} = \rho$ • équation de Maxwell-Ampère (M-A) : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ • équation de Flux magnétique (M-Φ) : $\text{div} \vec{B} = 0$ • équation du Maxwell-Faraday (M-F) : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |
|--|

L'ensemble de ces quatre équations ne suffit pas à la résolution d'un problème car il faut également connaître les relations entre \vec{P} et \vec{E} (soit entre \vec{D} et \vec{E}) d'une part et \vec{M} et \vec{B} (soit \vec{H} et \vec{B}) d'autre part.

4.4. Théorème de Gauss

D'après l'équation de Maxwell-Gauss, le théorème de Gauss s'applique au champ \vec{D} sous la forme :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{int} \quad \text{théorème de Gauss}$$

4.5. Théorème d'Ampère

D'après l'équation de Maxwell-Ampère, le théorème d'Ampère s'applique au champ \vec{H} sous la forme :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{théorème d'Ampère}$$

4.6. Champs à la surface de séparation entre deux milieux

Deux milieux matériels (un isolant et un conducteur ou bien deux isolants, mais aussi un isolant et le vide, ...) ont une surface S commune qui peut contenir une densité surfacique $\sigma(M, t)$ de charges libres et une densité surfacique $\vec{j}_S(M, t)$ de courants libres. Les équations de Maxwell-Faraday et de Flux magnétique ayant la même expression dans le vide et dans les milieux matériels, les résultats obtenus pour les conditions sur les champs à la surface de séparation entre deux milieux sont inchangés.

En tout point M de la surface S , il y a :

- continuité de la composante tangentielle du champ \vec{E} : $\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2}$;
- continuité de la composante normale du champ \vec{B} : $\vec{B}_{N_1} = \vec{B}_{N_2}$.

En adoptant la même démarche que celle qui a été suivie au chapitre II : Equations de Maxwell dans le vide, nous obtiendrions à partir des équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère, en tout point M de la surface S :

- pour la composante normale de \vec{D} : $\vec{D}_{N_2} - \vec{D}_{N_1} = \sigma \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$;
- pour la composante tangentielle de \vec{H} : $\vec{H}_{T_2} - \vec{H}_{T_1} = \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$;

en désignant par $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire normal à la surface S en M orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

4.7. Vecteur de Poynting dans un milieu matériel

Établir un bilan d'énergie électromagnétique dans un milieu matériel s'avère être toujours une opération très délicate. En effet, le champ électromagnétique interagit avec la matière en y créant une polarisation et une aimantation qui, elles aussi, créent un champ électromagnétique qui se superpose au champ initial : les divers champs qui interviennent dans les équations de Maxwell représentent évidemment les champs macroscopiques résultants. Seule une étude approfondie à l'échelle microscopique, permet d'apporter une réponse sérieuse à tout bilan d'énergie.

Introduisons donc le vecteur de Poynting, par simple analogie.

Dans le milieu matériel, les équations de Maxwell liant les vecteurs \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} et \vec{H} permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\vec{E} \wedge \vec{H} \right) &= -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} + \vec{H} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \\ &= -\vec{E} \cdot \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \vec{H} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \text{soit } \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\text{div} \left(\vec{E} \wedge \vec{H} \right) - \vec{E} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

Par identification, on pose :

Dans un milieu, le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ est

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Le flux de ce vecteur à travers une surface représente le flux d'énergie (la puissance) électromagnétique qui traverse cette surface.

5. Les milieux linéaires, homogènes et isotropes (L.H.I.)

5.1. Permittivité diélectrique d'un milieu matériel

5.1.1. Cas statique

- Milieu linéaire

La plupart des milieux ne présente pas de polarisation permanente. On constate expérimentalement que, lorsque le champ électrique \vec{E} n'est pas trop important, la relation entre la polarisation \vec{P} du milieu et \vec{E} est linéaire ; si de plus \vec{E} ne varie pas trop vite alors *la polarisation suit instantanément le champ électrique* ; on a alors une relation du type $\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi_e] \vec{E}$.

Un milieu est dit linéaire si \vec{P} et \vec{E} sont liés par une relation du type

$$\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi_e] \vec{E}$$

$$\text{soit} \quad \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{exx} & \chi_{exy} & \chi_{exz} \\ \chi_{eyx} & \chi_{eyy} & \chi_{eyz} \\ \chi_{ezx} & \chi_{ezy} & \chi_{ezz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Remarque : la matrice $[\chi_e]$ est symétrique.

- Milieu isotrope

Un milieu est dit isotrope si ses propriétés ne dépendent pas de la direction considérée.

Dans un tel milieu, la matrice χ_e est proportionnelle à la matrice unité et la polarisation \vec{P} est parallèle localement au champ \vec{E} : $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$.

- Milieu homogène

Un milieu est dit homogène si ses propriétés ne dépendent pas du point M où on se place.

Dans un tel milieu, χ_e a la même valeur en tout point du volume occupé par le matériau.

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (L.H.I.), lorsque le champ électrique ne varie pas trop vite dans le temps, les vecteurs \vec{E} , \vec{P} et \vec{D} sont liés par les relations :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \text{ et } \vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

χ_e est un nombre *positif* (donc sans dimension) appelé susceptibilité électrique du milieu

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ est la permittivité diélectrique relative du milieu (paramètre sans dimension)

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ est la permittivité (absolue) du milieu et s'exprime en F.m^{-1}

Susceptibilités et permittivités relatives de quelques fluides et solides

gaz (20°C – 1 atm)	$10^6 \cdot \chi_e$	liquides (20°C)	ε_r	solides	ε_r
Hélium	65	Eau	80,36	Diamant	5,5
Néon	127	CCl_4	2,238	Silice pure	3,78
Argon	517	Benzène	2,284	Paraffine	2,20
Hydrogène	254	Nitrobenzène	35,74	Nylon	3,5
Oxygène	495	Acide acétique	6,15	Polyéthylène	2,3
Azote	547	Éthanal	4,34	Verres	4 à 7
Gaz carbonique	921	Éthanol	25,1	Plexiglass	3,4
Air sec	537	Glycérol	43,5	Téflon	2,1
		Acétone	21,2	Titane de Baryum	1500

5.1.2. Cas dynamique

Si les variations de \vec{E} sont trop rapides il apparaît un *retard entre la polarisation et le champ électrique*.

Dans un milieu linéaire, en régime variable la relation entre \vec{P} et \vec{E} est une équation différentielle linéaire.

Dans la suite on suppose que le milieu est linéaire, homogène et isotrope.

Si le champ électrique est sinusoïdal alors la polarisation est, en régime permanent, une fonction sinusoïdale de même pulsation : il existe un déphasage entre \vec{P} et \vec{E} et l'amplitude de \vec{P} peut être fonction de la fréquence de \vec{E} . On peut alors adopter la notation complexe et définir une susceptibilité électrique complexe

$$\underline{\chi}(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \underline{\chi} \vec{E}}$$

Remarques :

- 1) on introduit également la permittivité diélectrique complexe $\underline{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$
- 2) en travaillant sur le module et l'argument de $\underline{\chi}$ on obtient l'amplitude et le déphasage de la polarisation (cf. fonction de transfert complexe en électrocinétique).
- 3) pour une étude des phénomènes liés à la valeur complexe de $\underline{\varepsilon}(\omega)$ voir Cours "Physique des ondes" Chapitre VIII : Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique

Exercice n° 08 : Sphère conductrice gainée de diélectrique

On considère une sphère parfaitement conductrice de rayon a et de charge Q . On place autour un matériau diélectrique linéaire, isotrope et homogène de permittivité relative ε_r . Le rayon extérieur vaut b . On appelle O le centre de la sphère.

- 1) Trouver le champ \vec{E} en tout point M de l'espace.
- 2) Calculer la densité volumique de charges de polarisation ρ_{pol} et la densité surfacique de charges de polarisation σ_{pol} .

Exercice n° 09 : Sphère uniformément polarisée, calcul direct

Soit une sphère de centre O et de rayon R uniformément polarisée, de vecteur polarisation \vec{P} . Calculer les charges de polarisation et le champ créé par ces charges au centre O .

Exercice n° 10 : Deux sphères décalées, sphère polarisée

- 1) Retrouver les résultats de l'exercice précédent en considérant la sphère polarisée comme deux sphères de charges respectives ρ_+ et $\rho_- = -\rho_+$ uniformes, de même rayon mais de centres légèrement décalés : $\overrightarrow{O_-O_+} = a\vec{u}_z$, \vec{u}_z vecteur unitaire et $a \ll R$.
- 2) Déterminer les lignes du champ macroscopique.

Exercice n° 11 : Condensateur plan rempli de diélectrique

Un condensateur plan est constitué de deux armatures planes entre lesquelles est placé un diélectrique LHI de permittivité ε . Les armatures sont chargées en surface uniformément. On notera σ_{lib} la densité surfacique de charge sur les armatures. On négligera en outre les effets de bords.

- 1) Déterminer les charges de polarisation et le champ électrique \vec{E} .
- 2) Calculer le champ dépolarisant \vec{E}_{pol} créé par les charges de polarisation. Trouver une relation liant \vec{E}_{pol} et la polarisation \vec{P} .
- 3) Trouver une relation entre \vec{E} et \vec{E}_0 , champ électrique en l'absence de diélectrique.
- 4) L'introduction du milieu LHI peut se faire soit à charge constante, soit à potentiel constant. Déterminer la capacité du condensateur dans chaque cas.

5.2. Perméabilité magnétique d'un milieu matériel

5.2.1. Milieux diamagnétiques et paramagnétiques

La plupart des milieux sont diamagnétiques ou paramagnétiques. Ils présentent des propriétés magnétiques extrêmement faibles et, sauf cas très exceptionnels, l'aimantation induite \vec{M} est proportionnelle au champ magnétique \vec{B} (même lorsque \vec{B} varie rapidement dans le temps) : ces milieux sont linéaires et isotropes quant à leurs propriétés magnétiques. Nous les supposons également homogènes. Pour des raisons historiques, on définit la **susceptibilité magnétique** χ_m d'un tel milieu par :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Sachant que $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, nous en déduisons :

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$$

en posant $\mu_r = 1 + \chi_m$, où μ_r est la **perméabilité magnétique relative** du milieu et $\mu = \mu_0\mu_r$ est la **perméabilité** du milieu (ou **perméabilité absolue**).

χ_m et μ_r sont sans dimensions et μ (comme μ_0) s'exprime en H.m⁻¹.

Contrairement à la susceptibilité électrique χ_e , χ_m peut être positive ou négative et le signe de χ_m distingue les milieux diamagnétiques des milieux paramagnétiques :

- les matériaux diamagnétiques ont une susceptibilité magnétique χ_m négative qui dépend peu de la température ;
- les matériaux paramagnétiques ont une susceptibilité magnétique χ_m positive qui décroît (en général) avec la température.

Susceptibilité magnétique de quelques milieux.

corps diamagnétiques : $10^6 \cdot \chi_m$	corps paramagnétiques : $10^6 \cdot \chi_m$
dihydrogène -0,002	dioxygène +4,8
diazote -0,006	air +0,37
eau -9,1	sodium +8,5
diamant -21,6	aluminium +20,7
cuivre -9,6	calcium +19,5
plomb -15,8	chlorure ferrique $FeCl_3$ +3300
argent -23,8	

La plupart des milieux présentent des propriétés magnétiques extrêmement faibles. Ils sont, en général, linéaires, homogènes et isotropes (L.H.I.). Dans ce cas, les vecteurs \vec{B} , \vec{M} et \vec{H} sont reliés par

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \text{ et } \vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$$

χ_m est négative pour les milieux diamagnétiques et positive pour les milieux paramagnétiques.

Remarques :

1) La susceptibilité χ_m étant très faible, nous écrirons en général, pour un milieu diamagnétique ou paramagnétique

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{\mu_0\mu_r} \vec{B} = \frac{\chi_m}{\mu_0(1+\chi_m)} \vec{B} \approx \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B}$$

2) Dans la matière, le champ \vec{B} total résulte de la superposition du champ créé par les sources extérieures au milieu (courants électriques ou aimants) et du champ créé par la matière elle-même (c'est-à-dire les dipôles magnétiques atomiques). Dans un milieu diamagnétique ou paramagnétique, ce dernier champ est souvent négligé et l'on suppose $\vec{B} \approx \mu_0\vec{H}$.

5.2.2. Milieux ferromagnétiques

Les milieux ferromagnétiques peuvent présenter une aimantation très importante lorsqu'ils sont plongés dans un champ \vec{B} et cette aimantation peut subsister lorsque le champ extérieur est supprimé. Des métaux comme le fer (**ferromagnétique**), le nickel, le cobalt, certains de leurs alliages ou de leurs oxydes sont ferromagnétiques.

Ces matériaux ne sont pas linéaires. Il est toutefois possible de définir, pour certains de ces matériaux (ils sont alors nécessairement isotropes et homogènes) et dans certains domaines de champs, une perméabilité relative μ_r par $\|\vec{B}\| = \mu_0\mu_r \|\vec{H}\|$.

Cette perméabilité peut dépendre de manière assez compliquée de l'intensité de l'excitation magnétique et peut prendre des valeurs très importantes, de l'ordre de plusieurs milliers, sans commune mesure avec celles des corps diamagnétiques ou paramagnétiques.

Au-delà d'une certaine température caractéristique du matériau et appelée température de Curie, le corps perd ses propriétés ferromagnétiques et devient paramagnétique : à l'échelle microscopique, les interactions très fortes entre les moments magnétiques des atomes voisins disparaissent.

Les matériaux ferromagnétiques sont devenus indispensables. On les rencontre dans les moteurs et les générateurs électriques, dans les transformateurs, les haut-parleurs (parce que l'on souhaite y avoir des champs magnétiques intenses qui engendrent des flux importants), mais aussi sur les disquettes informatiques, les tickets de métro, etc.

Exercice n° 12 : Lignes de champ dans un milieu magnétique

Montrer que les lignes du champ magnétique \vec{B} s'écartent au passage dans un milieu diamagnétique et, au contraire, se ressèrent dans un milieu paramagnétique. (On considérera l'excitation magnétique comme uniforme).

Exercice n° 13 : Bobine à noyau de fer doux

Un solénoïde de section S , de très grande longueur, possédant n spires par unité de longueur, est parcouru par un courant I . À l'intérieur on glisse un long barreau de fer doux, considéré comme LHI, de perméabilité μ , cylindrique et de même axe, mais de section s .

1) Calculer le champ magnétique \vec{B} en tout point intérieur au solénoïde en régime permanent. Pour cela, on négligera les effets de bords.

2) Calculer l'auto-inductance linéique du solénoïde. Application numérique : $n = 10000 \text{ m}^{-1}$, $S = 100 \text{ cm}^2$, $s = 40 \text{ cm}^2$, $\mu_r = 10^4$.

Exercice n° 14 : Barreau aimanté uniformément selon son axe

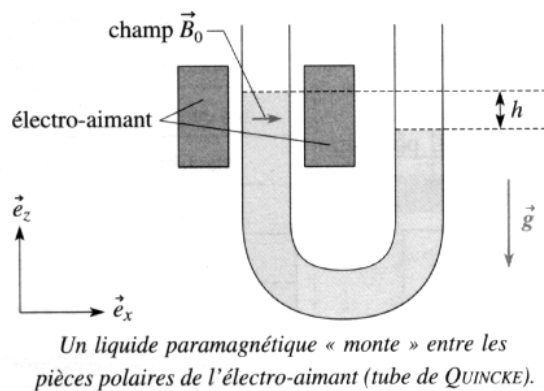
On considère un cylindre de révolution uniformément aimanté selon son axe, d'aimantation \vec{M} .

- 1) Calculer le champ sur son axe.
- 2) Retrouver d'une autre manière le résultat pour un cylindre infiniment long.

Exercice n° 15 : Sphère uniformément aimantée

Une sphère S de centre O et de rayon R est constituée d'un milieu magnétique uniformément aimanté suivant la direction Oz : $\vec{M} = M \vec{u}_z$, \vec{u}_z vecteur unitaire de l'axe Oz .

- 1) Exprimer les densités de courants d'aimantation. Quelle analogie leur expression vous suggère-t-elle ?
- 2) Déterminer le champ magnétique et l'excitation magnétique au centre O de la sphère.
- 3) Calculer la valeur du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ en tout point M , on écrira pour cela l'intégrale triple pour des courants de polarisation étendus en volume. En déduire que le champ \vec{B} est uniforme à l'intérieur de la sphère et qu'à l'extérieur c'est le champ d'un dipôle magnétique placé au centre O .
- 4) Application : le matériau est plongé dans un champ extérieur \vec{B}_0 , on note χ_m la susceptibilité du matériau, déterminer \vec{M} .

Exercice n° 16 : Mesure d'une susceptibilité magnétique

1) Un liquide diamagnétique ou paramagnétique, de susceptibilité magnétique χ_m , est plongé dans un champ non uniforme $\vec{B} = B(z) \vec{e}_z$.

1.a) En assimilant un élément de volume $d\tau = dx dy dz$ de liquide à une petite spire rectangulaire de côtés dy et dz , et de vecteur surface $d\vec{S} = dy dz \vec{e}_x$, déterminer le courant dI qui traverse cette spire.

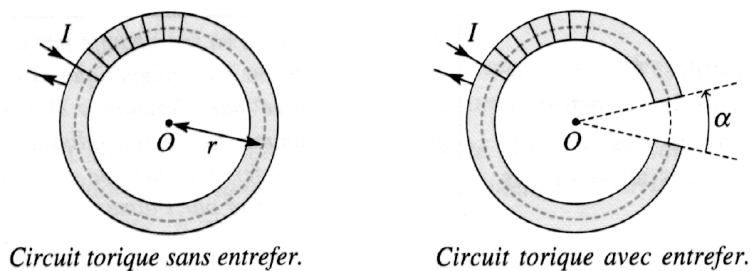
1.b) En déduire la force magnétique $d\vec{F}$ qui agit sur cette spire et donc sur l'élément de volume $d\tau$ de liquide.

2) Ce liquide, de masse volumique ρ , est placé dans un tube en U, de section s constante (cf. figure ci-dessus). Une des branches du tube est placée dans l'entrefer d'un électro-aimant. Au niveau de la surface libre du liquide règne un champ $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$ horizontal, à peu près uniforme.

2.a) Déterminer la dénivellation h entre les deux surfaces libres du liquide. Peut-on différencier le comportement des liquides diamagnétiques et paramagnétiques ?

2.b) Calculer la susceptibilité χ_m d'une solution de chlorure ferrique paramagnétique pour laquelle on mesure $h = 10 \text{ mm}$.

Données : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $B_0 = 1 \text{ T}$; $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

Exercice n° 17 : Champ dans l'entrefer d'un électro-aimant

1) Sur un matériau L.H.I., en forme de tore de rayon moyen $r = 10 \text{ cm}$ et de perméabilité relative μ_r , sont régulièrement enroulées $n = 500$ spires jointives parcourues par un courant $I = 0,1 \text{ A}$ indépendant du temps. Déterminer le champ \vec{B}_0 dans le matériau, à la distance r de l'axe du tore.

2) On découpe dans le matériau un petit entrefer défini par l'angle α . En supposant que la présence de l'entrefer ne perturbe pas la forme des lignes de champ (ce qui est d'autant mieux vérifié que α est petit), déterminer le champ \vec{B} dans le matériau, à la distance r de l'axe du tore.

- 3.a) Déterminer, la norme du champ \vec{B}_0 dans le cas d'un tore fermé ($\alpha = 0$)
 en aluminium (paramagnétique) : $\mu_r = 1,00002$;
 constitué d'un alliage fer-silicium (ferromagnétique) : $\mu_r = 5000$.

3.b) Déterminer numériquement la norme du champ \vec{B} dans le cas d'un tore avec entrefer d'angle $\alpha = 5^\circ$, en aluminium, puis en fer-silicium.

Comparer les normes des champs \vec{B}_0 et \vec{B} .

6. Application : le transformateur

6.1. Courbe de première aimantation

6.1.1. Détermination d'une « première aimantation »

On désire étudier l'aimantation volumique \vec{M} d'un échantillon en fonction du champ magnétique \vec{B} appliqué. Cette aimantation dépend de l'histoire antérieure de l'échantillon il faut donc le *désaimanter*. Pour cela on le soumet à un champ magnétique alternatif, par exemple de fréquence 50 Hz, d'abord très intense et que l'on réduit progressivement jusqu'à zéro. L'aimantation, que l'on mesurera dans ces conditions, est appelée « **première aimantation** ».

Par ailleurs, la forme de l'échantillon joue un rôle important dans l'aimantation d'une substance. Aussi utilise-t-on un échantillon en forme de tore pour lequel le champ \vec{H} est entièrement contrôlé et imposé par l'expérimentateur à l'aide du courant I dans la bobine torique qui crée l'aimantation.

Dans cette géométrie particulière, en effet, la symétrie de révolution (avec un matériau isotrope) permet de postuler que \vec{B} , \vec{H} et \vec{M} sont colinéaires et possèdent des lignes de champ circulaires fermées ayant pour axe celui du tore. Le théorème d'Ampère suffit alors à déterminer \vec{H} en fonction de I et du rayon de la ligne de champ.

On peut aussi utiliser avantageusement comme paramètre $\mu_0 H$, exprimé en Teslas, qui, dans la géométrie torique, est simplement le champ B_0 qui serait créé par le courant de la bobine torique dans le tore en l'absence d'échantillon. On obtient alors point par point la courbe $B(H)$; on en déduit

$$M(H) = \frac{1}{\mu_0} B(H) - H$$

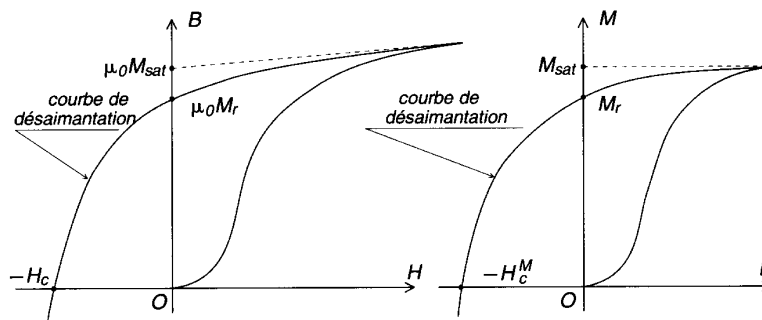
6.1.2. Manipulation

Pour le tracé de la courbe cf. *TP Cycle d'hystérésis et courbe de première aimantation des milieux ferromagnétiques (III.2.)*.

6.2. Hystérésis

6.2.1. Rémanence. Champ coercitif

Après avoir décrit la courbe de première aimantation jusqu'à la saturation, faisons décroître l'intensité du courant électrique dans la bobine magnétisante; H décroît et l'on constate que le champ B , donc aussi l'aimantation M , ne reprennent pas, pour un même champ H , les valeurs obtenues en champ H croissant; elles sont supérieures et la courbe de désaimantation $B(H)$ est différente. On dit qu'il y a **hystérésis**. Ce retard à la désaimantation est source d'irréversibilité au sens thermodynamique.



Courbes de désaimantation après saturation, appelées aussi « courbes de recul ».

Lorsque le courant est redevenu nul, il en est de même pour \vec{H} , mais il subsiste une aimantation résiduelle non nulle M_r , appelée « **aimantation rémanente** », et le champ magnétique correspondant, dit « **champ rémanent** » a alors la valeur $B_r = \mu_0 M_r$.

Pour diminuer encore l'aimantation, il faut inverser le sens de \vec{H} , en inversant le sens du courant dans la bobine ; on constate que le champ magnétique \vec{B} s'annule pour une valeur de H , négative : $-H_c$, où H_c est appelé le « **champ coercitif** ». L'aimantation ne s'annule que pour un champ H encore un peu plus négatif : $-H_c^M$ (avec $H_c^M > H_c$). La différence entre H_c et H_c^M est faible pour de nombreux matériaux ; la distinction doit cependant être faite pour les matériaux modernes qui servent à la fabrication des aimants permanents, et dont le champ coercitif H_c est élevé.

6.2.2. Ferromagnétiques « doux » et « durs »

L'étude de l'hystérésis magnétique permet de classer les substances ferromagnétiques en deux grandes catégories :

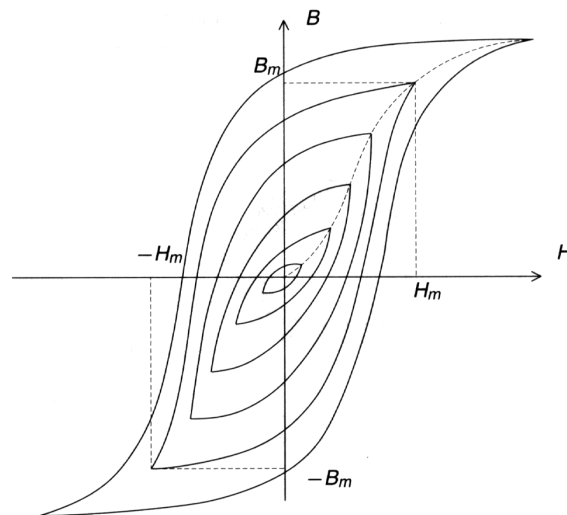
- les matériaux ferromagnétiques « **doux** » sont caractérisés par un faible champ coercitif inférieur à $100 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ et parfois à $1 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$; leur aimantation peut donc être facilement modifiée. Ils possèdent en général une grande perméabilité, en particulier une forte perméabilité initiale. Ces matériaux sont utilisés dans les transformateurs, électro-aimants, relais, écrans magnétiques, bobines téléphoniques,... Le plus utilisé est le fer au silicium.
- les matériaux ferromagnétiques « **durs** » sont caractérisés par un fort champ coercitif supérieur à $10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ et qui atteint $10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$; leur magnétisme rémanent est alors assez difficile à supprimer et ces matériaux sont utilisés pour faire des aimants permanents. Les plus simples et les plus anciens sont les aciers (fer avec 1% de carbone), avec éventuellement du tungstène, du cobalt ou du manganèse.

6.2.3. Cycles d'hystérésis

Cf. TP Cycle d'hystérésis et courbe de première aimantation des milieux ferromagnétiques (II).

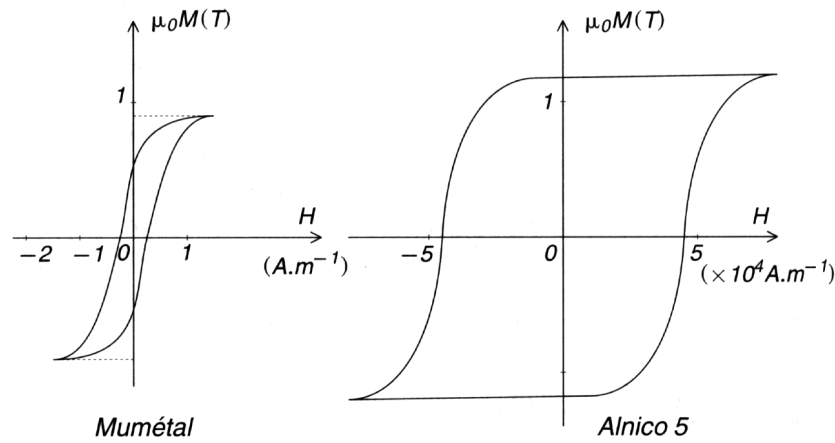
Lorsqu'on envoie dans la bobine entourant l'échantillon torique un courant alternatif, le champ H dans le matériau varie alors entre la limite supérieure H_m et la limite inférieure $-H_m$. Maintenons l'échantillon à température constante ; après un certain nombre de périodes on constate que le graphe $B = f(H)$ se stabilise et le point représentatif décrit une courbe fermée, symétrique par rapport à l'origine, appelée cycle d'hystérésis.

À différentes valeurs maximales H_m du champ H , correspondent des cycles différents. Si H_m est très élevé, on peut atteindre l'aimantation à saturation ; on retrouve alors sur ce cycle particulier le champ rémanent B_r et le champ coercitif H_c .



Cycles d'hystérésis d'un matériau correspondant à des H_m différents.

Un matériau doux a des cycles étroits, un matériau dur des cycles larges :



Exemples de cycles d'hystérésis (à saturation). On peut noter la différence entre les échelles horizontales de ces deux graphes (facteur 20 000) typique entre un matériau « doux » le Mumetal et un matériau « dur » l'Alnico 5.

- Pour un matériau doux on atteint l'aimantation à saturation avec un champ $B_0 = \mu H$ facilement réalisable en utilisant une bobine torique ou un solénoïde allongé entourant le matériau, alimentés par exemple par une tension sinusoïdale à 50 Hz ; une résistance en série donne une tension proportionnelle au courant donc à H ; un circuit intégrateur donne une tension proportionnelle à B , à partir de la f.é.m. induite dans la bobine secondaire. On peut alors visualiser le cycle d'hystérésis à l'oscilloscope cathodique, ou l'enregistrer sur une table traçante en opérant à très basse fréquence.
- Pour un matériau dur, si l'on veut tracer un cycle d'hystérésis à saturation, il est difficile d'obtenir le champ H_m nécessaire avec une bobine ; on utilise un échantillon en forme de barreau que l'on place dans l'entrefer d'un électroaimant ; la bobine entourant le barreau permet d'atteindre dB/dt à l'intérieur de l'échantillon ; une bobine voisine d'axe parallèle, donne un signal proportionnel à dB_0/dt , avec $B_0 \approx \mu_0 H$; on obtient le cycle, point par point, à l'aide de deux circuits intégrateurs.
- Certains matériaux comme les ferrites ont des cycles d'hystérésis « carrés », c'est-à-dire que l'aimantation est toujours voisine de l'aimantation à saturation, la transition d'un sens à l'autre s'effectuant brusquement dès que $|H|$ atteint la valeur H_c . Cette propriété permet de réaliser des systèmes bistables (à deux états stables).

6.2.4. Pertes par hystérésis

La connaissance des cycles d'hystérésis est importante pour évaluer les pertes énergétiques des matériaux soumis à des champs magnétiques alternatifs. En effet, considérons le système constitué par l'échantillon et la bobine qui l'aimante, supposés immobiles ; le courant I qui la parcourt est produit par un générateur, extérieur au système ; en plus de l'énergie dissipée par effet Joule dans la bobine, ce générateur lutte contre la f.é.m. d'induction $e = -d\phi/dt$ et fournit pour cela le travail élémentaire $\delta W = I \delta\phi$ où ϕ est le flux du champ \vec{B} qui traverse la bobine et $\delta\phi$ la variation due à celle $\delta\vec{B}$ du champ \vec{B} .

On se place dans le cas particulier de la bobine comportant N spires et de l'échantillon torique de section S : $\phi = NBS$; Le théorème d'Ampère donne : $\ell H = NI$ où ℓ est la circonférence moyenne du tore.

Il vient alors

$$\delta W = I \delta\phi = \left(\frac{\ell}{N} H \right) (NS \delta B) = \ell S H \delta B = V H \delta B$$

où V est le volume de l'échantillon, qui dans cette géométrie particulière est le seul espace où B est non nul.

Pour un cycle, le travail reçu s'écrit :

$$W_{cycle} = V \oint H \delta B$$

on en déduit que w_{cycle} est proportionnel à l'aire enclose par le graphe fermé $B(H)$, ou le graphe $M(H)$, ces deux aires étant égales.

On montre que ce résultat est tout à fait général et ne dépend pas de la géométrie utilisée et conduit au travail reçu par *unité de volume*

$$w_{cycle} = \oint H \delta B$$