Chapitre 4 : Dynamique Relativiste

I - Quantité de mouvement - Energie

1°) Quadrivecteur quantité de mouvement / énergie

- $$\left(\vec{p}, \frac{E}{c}\right) = \left(\gamma m \vec{v}, \frac{\gamma m c^2}{c}\right) \Rightarrow \begin{cases} \vec{p} = \gamma m \vec{v} \\ E = \gamma m c^2 \end{cases}$$

avec $E = mc^2 + \mathcal{E}_k$ (on zappe l'énergie potentielle)

D'où : $\boxed{\mathcal{E}_k = (\gamma - 1) mc^2}$

Rq : si $\beta < 1$: $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\beta^2$$
$$= (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\simeq 1 + \frac{\beta^2}{2}$$

d'où $$\mathcal{E}_k \simeq \frac{m\beta^2 c^2}{2}$$
$$= \frac{1}{2} m v^2$$ pour une particule non-relativiste

et $\vec{p} \simeq m\vec{v}$ car $\beta^2 \simeq 0$

Et $$E = \frac{1}{2} m v^2 + mc^2$$

NB : 1899 : Poincaré a été le premier à dire $E = mc^2$

- $$\left\|\left(\vec{p}, \frac{E}{c}\right)\right\|^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$ invariant par transformation de Lorentz

Comme $E = \gamma mc^2$ et $p = \gamma m v$

on a : $$\left\|\left(\vec{p}, \frac{E}{c}\right)\right\|^2 = \frac{\gamma^2 m^2 c^4}{c^2} - \gamma^2 (c^2 - v^2) m^2$$
$$= \gamma^2 (1 - \beta^2) m^2 c^2 = m^2 c^2$$

$$\Rightarrow \left\|\left(\vec{p}, \frac{E}{c}\right)\right\|^2 = m^2 c^2$$

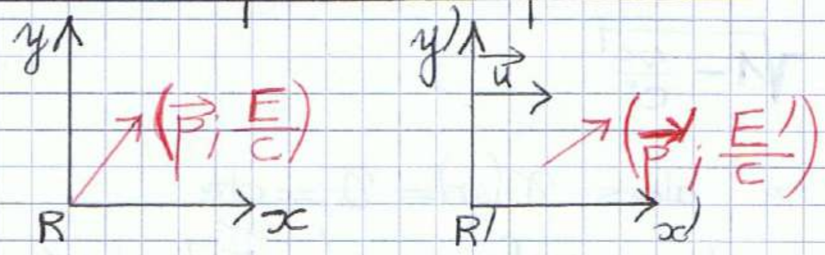
• D'où $\boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2c^4}$: applicable à toutes les particules
⇒ provient de la conservation de $\|(\frac{E}{c}, \vec{p})\|^2$

Si photon : $m = 0 \Rightarrow E = pc \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}$ et $E = \hbar\nu$

Si $m \neq 0 \Rightarrow E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = pc\sqrt{1 + \frac{m^2c^4}{p^2c^2}}$

$\simeq \frac{p^2}{2m} + mc^2$
si particule non relativiste

• <u>Transformation du quadrivecteur par Lorentz</u>



On a : $\begin{cases} k_x = \gamma(k_x' + \beta\frac{\omega'}{c}) \\ k_y = k_y' \\ k_z = k_z' \\ \frac{\omega}{c} = \gamma(\frac{\omega'}{c} + \beta k_x') \end{cases}$

Or $\begin{cases} p = \hbar k \\ E = \hbar\omega \end{cases}$, donc en multipliant par $\hbar$

$\begin{cases} p_x = \gamma(p_x' + \beta\frac{E'}{c}) \\ p_y = p_y' \\ p_z = p_z' \\ \frac{E}{c} = \gamma(\frac{E'}{c} + \beta p_x') \end{cases}$

II - Loi Fondamentale de la Dynamique :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \neq m\vec{a} \quad \text{en dynamique relativiste}$$

car $\vec{p} = \gamma m\vec{v} \neq m\vec{v}$ en général

(sauf si $\gamma \to 1$)

D'où

· D'où : $$\boxed{\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\gamma(v)\, m\vec{v}\right) = m\frac{d}{dt}\left(\gamma(v)\vec{v}\right)}$$

avec $\gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

* Si $\|\vec{v}\| = v = cte$ alors $\gamma(v) = \gamma = cte$

ex: mouvement circulaire uniforme (particule chargée dans $\vec{B} = \vec{cte}$)

Donc $\vec{F} = \gamma m \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \gamma m \vec{a}$

↳ accélération normale

* Si la direction de la vitesse est constante mais $v \neq cte$

ex: mouvement rectiligne non-uniforme (particule chargée dans $\vec{E} = \vec{cte}$)

Donc $\vec{F} = m\underbrace{\dfrac{d\gamma}{dt}}\vec{v} + m\gamma\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

disparaît en dynamique classique

or $$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{d\gamma}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{+2\beta}{2\sqrt{1-\beta^2}} \times \frac{1}{1-\beta^2}\frac{d\beta}{dt}$$

$$= \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\beta}{dt} = \beta\gamma^3\frac{d\beta}{dt}$$

$$= \frac{1}{c^2}\gamma^3 v\frac{dv}{dt} = \frac{\gamma^3}{2c^2}\frac{dv^2}{dt}$$

D'où $$\vec{v}\frac{d\gamma}{dt} = \vec{v}\cdot\frac{\gamma^3}{c^2}v\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{\gamma^3}{c^2}v^2\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{le mouvement étant rectiligne}$$

Comme $\beta^2 = (1-\gamma^{-2})^{-1}$: $\vec{v}\dfrac{d\gamma}{dt} = \gamma(\gamma^2-1)\vec{a}$

D'où : $\vec{F} = m\left[\gamma(\gamma^2-1)+\gamma\right]\vec{a} = m\gamma^3\vec{a}$

En résumé : $\vec{F} = m\dfrac{d(\gamma\vec{v})}{dt}$

si MCU $\vec{F} = \gamma m\vec{a}$

si MRA $\vec{F} = \gamma^3 m\vec{a}$

III – Théorème de l'énergie cinétique, de l'énergie mécanique

$\boxed{\Delta\mathcal{E}_k = W_{Forces}}$ ou : $\dfrac{d\mathcal{E}_k}{dt} = \mathcal{P}_{Forces}$

$\boxed{\Delta\mathcal{E} = W^{NC}}$

Travail des forces non-conservatives

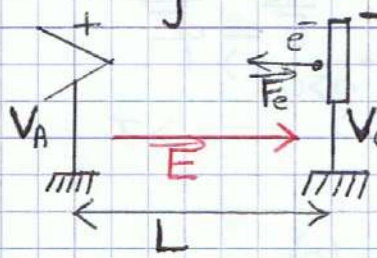
Ici, on pose $E = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p + mc^2$: cela ne change pas les théorèmes si m ne change pas

Mais avec des collisions… m varie

IV – Particule chargée dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$

1 – Dimensions et ordres de grandeur

Energie : ML^2T^{-2} : $kg\,m^2s^{-2}$; J ; eV ; C.V



$E = \dfrac{V_A - V_C}{L}$ E en $V.m^{-1}$

$\mathcal{E}_k^C - q_eV_C = \mathcal{E}_k^A - q_eV_A$

$\Rightarrow \mathcal{E}_k^A = \underbrace{\mathcal{E}_k^C}_{=0 \text{ si } v(0)=0} + q_e(V_A - V_C) \Rightarrow \mathcal{E}_k^A = q_eV$

Si $V = 1$ volt : $\mathcal{E}_k^A = 1{,}6\times10^{-19}\,J = 1\,eV$

$= 1{,}6\times10^{-19}\,kg\,m^2s^{-2}$

* **Energie de masse d'un électron** : $m_e c^2 = 8{,}1 \times 10^{-14}$ J
$= 511$ keV

$$\boxed{m_e c^2 = 0{,}511 \text{ MeV}}$$

* $$\boxed{\gamma = 1 + \frac{\mathcal{E}_k}{mc^2}}$$

Si $v \ll c \Leftrightarrow \mathcal{E}_k \ll mc^2 \Rightarrow \gamma \simeq 1$

Si $v \simeq c \Leftrightarrow \mathcal{E}_k \gg mc^2 \Rightarrow \gamma \gg 1$

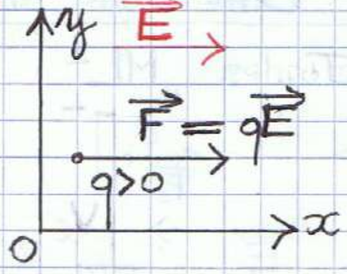
Pour $\mathcal{E}_k = 0{,}511$ MeV $\Rightarrow \gamma = 2$: relativiste

· Il faut une ddp de 0,511 MV pour lui faire acquérir cette énergie

· Si $V = 5$ MV : $\mathcal{E}_k = 5$ MeV
$\Rightarrow \gamma = 11$
$\beta = 0{,}996 \Rightarrow v$: 99,6% de c

V - Particule chargée dans $\vec{E}$: équations horaires

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{(mouvement accéléré)}$$



$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dp_x}{dt} = qE \\ \dfrac{dp_y}{dt} = 0 \\ \dfrac{dp_z}{dt} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} p_x = qEt + \cancel{p_x(0)} \\ p_y = \cancel{p_y(0)} \\ p_z = \cancel{p_z(0)} \end{array}$$

(on prend $\vec{v}(0) = \vec{0}$)

Or $E = \gamma mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$

On calcule E, puis γ puis v : $v(t) = \dfrac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}}$

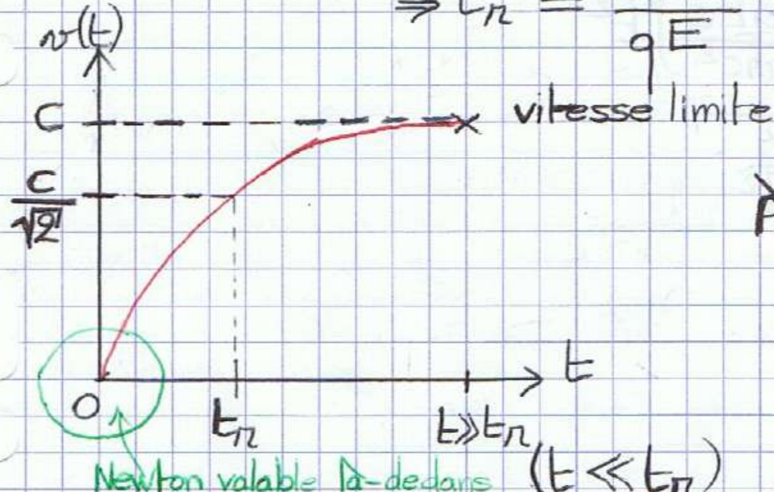
$$v(t) = \frac{qEtc^2}{\sqrt{m^2c^4 + q^2E^2t^2c^2}}$$

$\left(\underline{Rq} : \text{ si } pc \ll m^2c^4 \Rightarrow v(t) = \dfrac{p}{m} \right)$

$$v(t) = \frac{\cancel{qEtc}^{\,c}}{\cancel{qEtc}\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{q^2E^2t^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m^2c^4}{c^2q^2E^2t^2}}}$$

On pose $t_r^2 = \dfrac{m^2c^2}{q^2E^2}$; un temps caractéristique

$$\Rightarrow t_r = \frac{mc}{qE}$$



À $t = t_r$: $v = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$

$(t \ll t_r) \Rightarrow v(t) = \dfrac{ct}{t_r} = \dfrac{qEt}{m}$ (TADAAA !)

Reste à intégrer pour avoir la position :

$$v(t) = \frac{ct}{t_r\sqrt{1 + \frac{t^2}{t_r^2}}} = \frac{c}{t_r} t \left(1 + \frac{t^2}{t_r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$x(t) = \frac{c}{t_r} t_r^2 \left(1 + \frac{t^2}{t_r^2}\right)^{\frac{1}{2}} + cte$$

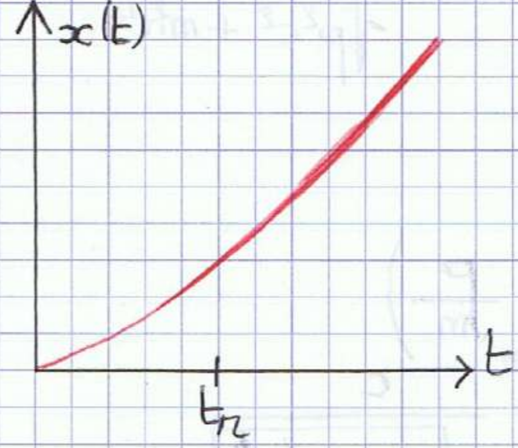
$$x(t) = ct_r \left(1 + \frac{t^2}{t_r^2}\right)^{\frac{1}{2}} + cte$$

On élimine la constante avec les CI.

$$x(t) = ct_r \left[\sqrt{1 + \frac{t^2}{t_r^2}} - 1 \right]$$

$$t_r = \frac{mc}{qE}$$

Si $t \gg t_r \Rightarrow x(t) = ct_r\left(\frac{t}{t_r} - 1\right) \simeq ct$ ⇒ ultrarelativiste



Si $t \ll t_r$

$$x(t) \simeq ct_r\left[1 + \frac{t^2}{2t_r^2} - 1\right]$$

$$\simeq \frac{ct^2}{2t_r} = \frac{\cancel{c}t^2}{2m\cancel{c}}qE$$

$$= \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2$$

⇒ classique

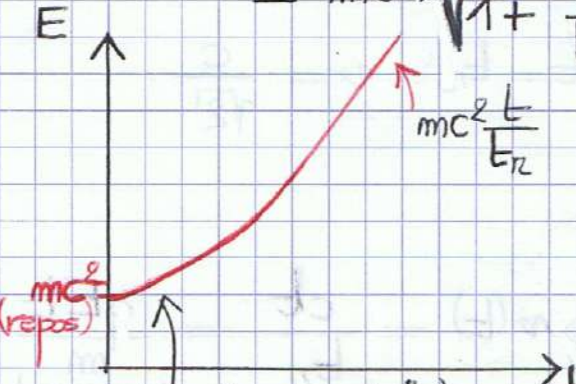
Qu'en est-il de l'énergie ?

On a $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

$$\Rightarrow E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \sqrt{q^2E^2t^2c^2 + m^2c^4}$$

$$= mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{qE\cancel{c}}{mc^{\cancel{2}}}\right)^2 t^2}$$

$$= mc^2\sqrt{1 + \frac{t^2}{t_r^2}}$$



$$mc^2\left(1 + \frac{t^2}{2t_r^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}m\frac{c^2}{t_r^2}t^2 \quad \text{(classique)}$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}m\frac{q^2E^2}{m^2}t^2$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(classique)}$$

Applications :

- Accélérateur linéaire : électrons accélérés jusqu'à 50 GeV

3 km de long

$$t_r = \frac{mc}{qE} = 10^{-10}\,s \quad \text{avec} \quad U = 50\ GV$$
$$= 0{,}1\,ns \qquad E = \frac{50\times10^9}{3\times10^3} = \frac{50}{3}10^6\ V.m^{-1}$$

$$\Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{2}} \quad \text{à } t = t_r$$

Quelle est la vitesse finale ? $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ $\quad p = \gamma m v$

ou bien $E = \gamma mc^2$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}mc^2$$

$$\Rightarrow 1-\beta^2 = \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \Rightarrow \beta = 1 - \frac{m^2c^4}{E^2}$$

$$\Rightarrow v = c\left(1 - \frac{m^2c^4}{E^2}\right)$$

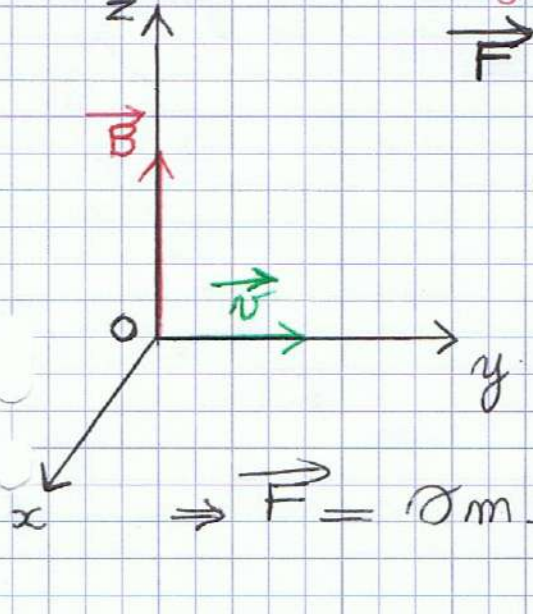
Sauf que 50 GeV est une énergie cinétique

$$\Rightarrow \mathcal{E}_k = (\gamma - 1)mc^2$$

$$\Rightarrow \gamma = 1 + \frac{\mathcal{E}_k}{mc^2} \simeq 10^5$$

$$1-\beta = 0{,}5\times10^{-10}$$
$$\beta = 1 - 0{,}5\times10^{-10}$$

VI - Particule chargée dans un champ magnétique



$$\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

or $\vec{F}.\vec{v} = \vec{0}$: puissance nulle

$\Rightarrow$ elle ne travaille pas

$\Rightarrow$ Pas de modification de v, donc γ = cte au cours du mouvement.

$$\Rightarrow \vec{F} = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma m \vec{a_N}$$

↳ accélération normale

or $\vec{a_N} = -\frac{v^2}{R}\vec{e_m}$
↳ $\vec{e_m}$ "sortant"

$\Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{R}\gamma$

On pose $\boxed{BR = \frac{mv}{q}\gamma}$ rigidité magnétique

Période de rotation : $T = \frac{2\pi R}{v}$

$$\nu = \frac{v}{2\pi R} \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{v}{R}}$$ pulsation cyclotron

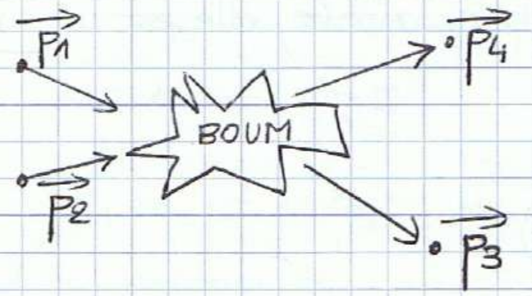
$$\boxed{\Rightarrow \omega_c = \frac{qB}{\cancel{\gamma} m}}$$

Chapitre 5 : Collisions

I - Collisions élastiques

⇒ Conservation du nombre et de la nature des particules

1°) Lois de conservations



* Conservation de l'impulsion $\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_3} + \vec{p_4}$

OU $\boxed{\vec{p}_{AVANT} = \vec{p}_{APRÈS}}$ constante du mouvement liée à une invariance dans l'espace

* Conservation de l'énergie totale

$\boxed{\mathcal{E}_{AVANT} = \mathcal{E}_{APRES}}$ invariance dans le temps

Rq: l'énergie potentielle n'intervient pas car elle est la même avant et après du fait que la collision = phénomène localisé

Ici : $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$

$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{k1} + m_1c^2 + \mathcal{E}_{k2} + m_2c^2 = \mathcal{E}_{k3} + m_3c^2 + \mathcal{E}_{k4} + m_4c^2$

or $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ et $m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$ car la nature et le nombre des particules ne varient pas

D'où : $\boxed{\mathcal{E}_{k,AVANT} = \mathcal{E}_{k,APRES}}$

⇒ Dans le cadre d'une collision élastique, l'énergie cinétique est conservée

* Masse totale d'un système de particules

$$\mathcal{E}_{TOT}^2 - p_{TOT}^2c^2 = M_{TOT}^2c^4$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{TOT} = \frac{1}{c^2}\sqrt{\mathcal{E}_{TOT}^2 - p_{TOT}^2c^2}}$$

avec $\vec{p}_{TOT} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$ et $\mathcal{E}_{TOT} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$

$\Rightarrow$ Il en découle la conservation de la masse totale (on condense les deux autres lois en une seule)

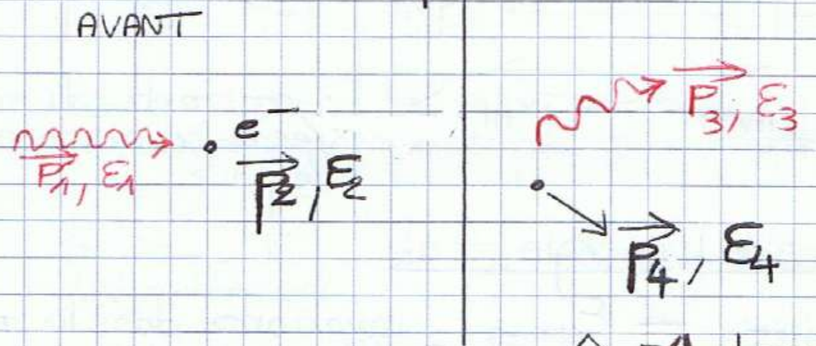
$$\boxed{M_{TOT,AV} = M_{TOT,AP}}$$

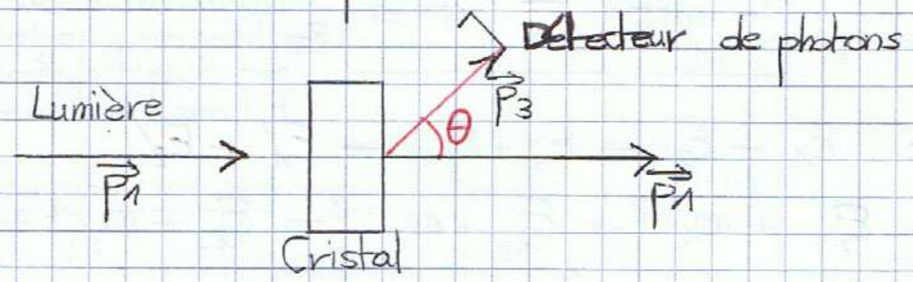
Comme la masse totale est la norme du quadrivecteur $\left\{\vec{P}, \frac{E}{c}\right\}$, en plus d'être conservée, elle est un <u>invariant</u>

<u>Rq</u>: $M_{TOT} \neq \sum_i m_i$

2°) Diffusion Compton (1927)

Collision entre un photon et un électron libre





La collision est élastique, donc $M^2_{TOT,AV} = M^2_{TOT,AP}$

$$\Rightarrow M^2_{TOT,AV}c^4 = M^2_{TOT,AP}c^4$$

$$\Leftrightarrow E^2_{TOT,AV} - \vec{P}^2_{TOT,AV}c^2 = E^2_{TOT,AP} - \vec{P}^2_{TOT,AP}c^2$$

$$\Leftrightarrow (E_1+E_2)^2 - (\vec{p_1}+\vec{p_2})^2c^2 = (E_3+E_4)^2 - (\vec{p_3}+\vec{p_4})^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{E_1^2 - p_1^2c^2} + \cancel{E_2^2 - p_2^2c^2} + 2E_1E_2 - 2\vec{p_1}\vec{p_2}c^2$$
$$= \cancel{E_3^2 - p_3^2c^2} + \cancel{E_4^2 - p_4^2c^2} + 2E_3E_4 - 2\vec{p_3}\vec{p_4}c^2$$

Or $E_i^2 - p_i^2c^2 = m_i^2c^4$

si $i=1$ ou $i=3$ photons donc $m_1 = m_3 = 0 \Rightarrow$

$i=2$: $\varepsilon_2^2 - p_2^2c^2 = m_e^2c^4$

$\varepsilon_4^2 - p_4^2c^2 = m_e^2c^4$ car collision élastique $\Rightarrow$

Il reste : $\varepsilon_1\varepsilon_2 - \vec{p_1}\vec{p_2}c^2 = \varepsilon_3\varepsilon_4 - \vec{p_3}\vec{p_4}c^2$

Si $\vec{p_2} = \vec{0}$ (électron initialement immobile :

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_3\varepsilon_4 - \vec{p_3}\vec{p_4}c^2$$

$$\text{et } \varepsilon_2 = m_ec^2$$

D'où : $\varepsilon_1 m_ec^2 - \varepsilon_3\varepsilon_4 + \vec{p_3}\vec{p_4}c^2 = 0$

photon diffusé

électron Compton

photon incident

Dans le détecteur : $I(\lambda)$ à θ fixé : on ne mesure que les photons diffusés

On a : $\vec{p_1} = \vec{p_3} + \vec{p_4}$

$$\varepsilon_1 + m_ec^2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

Donc $\varepsilon_1 m_ec^2 - \varepsilon_3(\varepsilon_1 + m_ec^2 - \varepsilon_3) + \vec{p_3}(\vec{p_1} - \vec{p_3})c^2 = 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1 m_ec^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_3 m_ec^2 + \cancel{\varepsilon_3^2 - p_3^2c^2} + \vec{p_1}\cdot\vec{p_3}c^2 = 0$

or $\varepsilon_3^2 - p_3^2c^2 = m_{PH}^2c^4 = 0 \Rightarrow$

et $\vec{p_1}\cdot\vec{p_3} = p_1p_3\cos\theta$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1 m_ec^2 - \varepsilon_3(\varepsilon_1 + m_ec^2) + p_1p_3\cos\theta c^2$

or 1 et 3 : photons $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = p_1c \\ \varepsilon_3 = p_3c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1 m_ec^2 - \varepsilon_3(\varepsilon_1 + m_ec^2) + \varepsilon_1\varepsilon_3\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1 m_e c^2 = \varepsilon_3\left[\varepsilon_1(1-\cos\theta) + m_ec^2\right]$

D'où : $\boxed{\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon_1 m_ec^2}{\varepsilon_1(1-\cos\theta) + m_ec^2}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{E_3} = \frac{1}{E_1} + \frac{(1-\cos\theta)}{m_e c^2}$$ or, pour un photon, $E = h\frac{c}{\lambda}$

$$\Leftrightarrow \lambda_3 = \lambda_1 + \frac{(1-\cos\theta)}{m_e c^2} hc$$

D'où : $\boxed{\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_{COMPTON}(1-\cos\theta)}$

A.N. $\lambda_{COMPTON} = 2{,}42 \text{ pm}$ $\boxed{\lambda_{COMPTON} = \frac{h}{m_e c}}$

Remarques : $\lambda_1 \neq \lambda_3 \Rightarrow$ énergie différente

Comme $\lambda_3 > \lambda_1$: le photon a perdu de l'énergie. Cette énergie, l'électron l'a récupéré

Si $\theta = 0$: $\lambda_3 = \lambda_1$: pas de perte d'énergie, donc pas de collision.

$\Rightarrow$ si on place le détecteur sur l'axe, on recueille des photons n'ayant pas subi un effet Compton.

Si $\theta = \pi$ (rétrodiffusion) $\Rightarrow \lambda_3 - \lambda_1 = 2\lambda_{COMPTON} = (\lambda_3 - \lambda_1)_{MAX}$
$= 4{,}84 \text{ pm}$

Les photons rétrodiffus sont ceux qui ont perdu le plus d'énergie

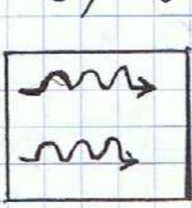
II - Collisions inélastiques

Collisions avec changement de la nature ou du nombre de particules mises en jeu.

1°) Masse totale d'un système de 2 photons

Masse d'un photon : $m_{Photon} = 0$
Masse de 2 photons : $M \neq 0$ $\Rightarrow M_{TOT} \neq \sum_i m_i$

E_γ, $P_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$ puisque $E_\gamma^2 - P_\gamma^2 c^2 = 0$



$$M_{TOT}^2 c^4 = E_{TOT}^2 - P_{TOT}^2 c^2$$
$$\Leftrightarrow M_{TOT}^2 c^4 = (E_\gamma + E_\gamma)^2 - (\vec{P_\gamma} + \vec{P_\gamma})^2 c^2$$
$$= 4(E_\gamma^2 - P_\gamma^2 c^2) = 0 \Rightarrow M_{TOT} = 0$$