# Fiche révision Modèle de l'électron élastiquement lié

PIANKO Yanis

Prépa Moulay Idriss, Fès

*Complément culturel mais utile pour l'oral ou les ADS. Il est difficile. Ainsi, il est réservé en priorité aux étudiants qui visent des concours type X. Il s'agira bien entendu de NE RIEN APPRENDRE PAR CŒUR, mais comprendre la démarche et les méthodes qui sont utilisées pour pouvoir les retrouver lors d'un oral difficile ou d'un ADS.*
*Technique : Une fois que vous avez compris, attendez 1 ou 2 semaines et tenter de retrouver les résultats rapidement sans regarder. Recommencez régulièrement.*
*Il est essentiel de connaître son cours sur l'électromagnétisme avant d'essayer de comprendre ce complément. Il pourra même s'avérer utile de connître le cours de physique quantique.*

## I Expression de la polarisabilité d'un atome alcalin

On considère un noyau immobile, et un électron qui effectue des révolutions autour de ce dernier. Il est repéré par son vecteur position $\vec{r} = r\vec{e_r}$ (atome alcalin : un seul électron de valence). *Faire un schéma :*

Une onde électromagnétique éclaire l'atome.

— On modélise le *confinement* de lélectron autour du noyau (le fait qu'il ne puisse pas séchapper) par une force de rappel élastique $-m\omega_0^2\vec{r}$. La pulsation propre $\omega_0$ est caractéristique de la transition entre un état excité et un état fondamental pour lélectron.

— L'électron ne reste pas infiniment dans son état excité : on modélise ce phomène par un amortissement (perte dénergie) : une force de frottement fluide $-m\Gamma\dot{\vec{r}}$. Durée moyenne de vie à l'état excité de $\dfrac{1}{\Gamma}$. On admet que la puissance de cette force là est la puissance rayonnée par l'atome, sous forme d'onde électromagnétique.

On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron, ce qui nous donne après regroupement des termes

$$\ddot{\vec{r}} + \Gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

C'est un oscillateur amorti, excité par le champ électromagnétique, de facteur de qualité $Q = \dfrac{\omega_0}{\Gamma}$. On se place en régime sinusoïdal forcé, et on calcule $\underline{\vec{r_0}}$ tel que $\underline{\vec{r}} = \underline{\vec{r_0}}e^{i\omega t}$. On obtient :

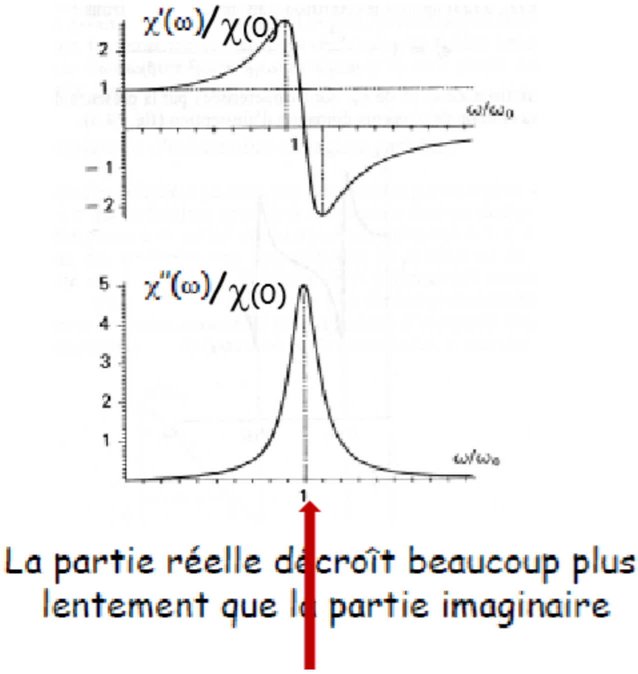
$$\boxed{\underline{\vec{r_0}} = \frac{\frac{-e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}\underline{\vec{E_0}}}$$

On peut introduire le moment dipolaire $\vec{p}$ de l'atome, orienté de l'électron vers le noyau :

$$\vec{p} = -e\vec{r} \text{ donc } \underline{\vec{p_0}} = \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}\underline{\vec{E_0}}$$

Or, on sait que le moment dipolaire s'exprime en fonction de la polarisabilité $\alpha$ comme $\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$. On an donc la polarisabilité complexe suivante : $\underline{\alpha(\omega)} = \dfrac{\frac{e^2}{m\varepsilon_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$. En posant $\alpha_0 = \dfrac{e^2}{m\varepsilon_0}$ la polarisabilité statique, on a les parties réelle et imaginaire de la polarisabilité

$$\begin{aligned}\alpha'(\omega) = \quad & \Re\left(\alpha(\omega)\right) = \quad \alpha_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \\ \alpha''(\omega) = \quad & -\Im\left(\alpha(\omega)\right) = \quad \alpha_0 \frac{\Gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2}\end{aligned}$$




Il y a résonnance pour $\omega = \omega_0$, et on voit que la partie imaginaire ne prend des valeurs signifiatives qu'aux alentours de la résonnance.

# II Force qu'une onde électromagnétique exerce sur un atome

*On passe vite ici sur le calcul des champs grâce aux équations de Maxwell, essayez de les refaire seuls.*

On reprend la même modélisation que précédemment. La force qui s'exerce sur l'atome est la somme des forces qui séxercent sur le noyau, repéré par son vecteur position $\vec{R}$, et des forces qui s'exercent sur l'électron, repéré par son vecteur position $\vec{R} + \vec{r}$. Ainsi,

$$\vec{F} = e\vec{E}\left(\vec{R}\right) - e\vec{E}\left(\vec{R} + \vec{r}\right) - e\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}$$

Seul l'électron est mobile, donc lui seul subit la force magnétique. Les deux premiers termes de la force peuvent être exprimés comme $\left(\vec{p}.\vec{\text{grad}}\right)\vec{E}$ (c'est dans le cours, on exprime les différentielles). On sait d'autre part que $\vec{p} = -e\vec{r}$, donc $\dot{\vec{p}} = -e\dot{\vec{r}}$. Ainsi,

$$\boxed{\vec{F} = \left(\vec{p}.\vec{\text{grad}}\right)\vec{E} + \dot{\vec{p}} \wedge \vec{B}}$$

Pour tous les calculs qui suivent, le terme $\left(\vec{p}.\vec{\text{grad}}\right)\vec{E}$ sera nul. Démontrer le à chaque fois cependant.

## 1) Loin de la résonnance :

$\alpha'' \approx 0$, $\vec{p} \approx \varepsilon_0 \alpha'(\omega) \vec{E}$.

**Cas d'une onde plane :** $\begin{aligned} \vec{E} = & \quad E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \vec{e_y} \\ \vec{B} = & \quad \frac{E_0}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \vec{e_z} \end{aligned}$. On remplace dans l'expression de $\vec{F}$, on effectue les calculs (à faire en entraînement), et l'on obtient $\vec{F} = K \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \vec{e_x}$, donc nécessairement $\langle \vec{F} \rangle = \vec{0}$.

**Cas d'une onde progressive non plane :** $\begin{aligned} \vec{E} = & \quad E_0(z) \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \vec{e_y} \\ \vec{B} = & \quad \frac{E_0'(z)}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \vec{e_x} + \frac{E_0(z)}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \vec{e_z} \end{aligned}$. En posant $\varphi = \omega t - \frac{\omega}{c} x$, on calcule la force $\vec{F}$ et on trouve :

$$\vec{F} = \left| \begin{array}{c} -\omega E_0(z) B_z \sin\varphi \\ 0 \\ \omega E_0(z) B_x \sin\varphi \end{array} \right.$$

Or, $B_z$ contient un $\cos\varphi$, donc la moyenne temporelle de la composante selon $\vec{e_x}$ de $\vec{F}$ est nulle. Cependant, la moyenne temporelle de la composante selon $\vec{e_z}$ est proportionnelle à celle d'un $\sin^2$, donc non nulle. On calcule et on obtient :

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \alpha'(\omega) E_0(z) E_0'(z) \vec{e_z} = -\vec{\text{grad}} \left( -\frac{1}{4} \varepsilon_0 \alpha'(\omega) E_0^2(z) \right)$$

On a ici fait apparaître une énergie potentielle dipolaire $\mathcal{E}_p = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 \alpha'(\omega) E_0^2(z) = -\alpha'(\omega) \frac{\Pi(z)}{2c}$. L'apparition du vecteur de Poynting nous dit que l'atome va être sensible à l'éclairement de l'onde. On peut donc considérer lorsque l'on voit des franges brillantes et des franges sombres (ondes stationnaires) que l'on a des minima et maxima d'énergie potentielle (selon le signe de la polarisabilité).

## 2) Au voisinage de la résonnance :

$\omega \approx \omega_0$, et $\underline{\vec{p}} = -i\alpha''(\omega) \underline{\vec{E}}$.

**Cas d'une onde plane :** $\begin{aligned} \underline{\vec{E}} = & \quad E_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)} \vec{e_y} \\ \underline{\vec{B}} = & \quad \frac{E_0}{c} e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)} \vec{e_z} \end{aligned}$. Premier terme de $\vec{F}$ nul, donc

$$\langle \vec{F} \rangle = \langle \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \wedge \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \Re\left( i\omega \underline{\vec{p}} \wedge \underline{\vec{B}}^* \right)$$

Faire les calculs vous mêmes. En posant $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e_x}$, on obtient :

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \alpha''(\omega) \vec{k}$$

C'est la force de pression de radiation. Puisque l'on est proche de la résonnance, cette force est liée à l'absorption des photons par l'atome. Chaque fois que l'atome absorbe un photon, il emmagasine la quantité de mouvement $\hbar \vec{k}$ du photon absorbé.

Il émet aussi des photons ! Par *emission spontannée*, seulement, la direction d'émission étant aléatoire, la quantité de mouvement associée est nulle en moyenne dans le temps. Seule reste celle associée à l'absorption, car tous les photons « vont dans la même direction », celle de l'onde électromagnétique (direction de $\vec{k}$).

Cela rejoint la vision particulaire du champ énoncé dans la fiche de révision sur les équations de Maxwell (propriétés mécaniques du champ électromagnétique). On va revenir sur cette description particulaire, et décrire cette force de façon plus précise en terme d'absorption de photons.

# III Vision particulaire des champs

On reprend le r'esultat établi pour l'électron élastiquement lié : $\underline{\vec{r}} = \dfrac{\frac{-e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}\underline{\vec{E}}$. La force de frottement introduite modélise le ralentissement de l'électron, donc sa perte dénergie et donc le retour à l'état fondamental. Ce dernier se fait par l'émission de photons, et donc on peut dire que la puissance de cette force de frottement va correspondre à la puissance de l'onde électromagnétique émise par l'électron. En moyenne dans le temps, l'atome émet autant de photons qu'il n'en absorbe. Donc

$$P_{abs} = -\left(-m\Gamma\dot{\vec{r}}.\dot{\vec{r}}\right)$$

Donc, en notation complexe :

$$\langle P_{abs}\rangle = \frac{1}{2}m\Gamma\left|i\omega\underline{\vec{r}}\right|^2$$
$$\langle P_{abs}\rangle = \frac{1}{2}m\Gamma\frac{\omega^2\frac{e^2}{m^2}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}E_0^2$$

Or, chaque fois que l'atome absorbe un photon, il absorbe l'énergie $\hbar\omega$. En posant $\dot{N}$ le nombre moyen de photons absorbés dans le temps, on a :

$$\begin{aligned}\dot{N} &= \frac{\langle P_{abs}\rangle}{\hbar\omega}\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\frac{\alpha''(\omega)}{\hbar}\end{aligned}$$

On retrouve que l'absorption de photons va être importante au voisinage de la résonnance. En faisant un bilan de quantité de mouvement, on retrouve la force moyenne exercée sur l'atome :

$$\begin{aligned}\langle\vec{F}\rangle &= \dot{N}\hbar\vec{k}\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\alpha''\vec{k}\end{aligned}$$

(Force de pression de radiation)

Utilisons ces résultats pour trouver le spin du photon :
On considère une onde de polarisation circulaire gauche, qui se proprage selon $\vec{e_x}$ :

$$\underline{\vec{E}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{i\left(\omega t-\frac{\omega}{c}x\right)}\left|\begin{array}{c}0\\1\\-i\end{array}\right.$$

Au voisinage de la résonnance : $\underline{\vec{p}} = \varepsilon_0\dfrac{E_0}{\sqrt{2}}e^{i\left(\omega t-\frac{\omega}{c}x\right)}\left|\begin{array}{c}0\\-i\\-1\end{array}\right.$ . On peut donc calculer le couple exercé par l'onde sur l'atome :

$$\begin{aligned}\langle\vec{M}\rangle &= \langle\vec{p}\wedge\vec{E}\rangle\\ &= \frac{1}{2}\Re\left(\underline{\vec{p}}\wedge\underline{\vec{E}}^*\right)\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0\alpha''(\omega)E_0^2\vec{e_x}\end{aligned}$$

Chaque fois que l'atome absorbe un photon, son moment cinétique est augmenté de la valeur du moment cinétique d'un photon. D'où, en notant $L_x$ le moment cinétique du photon qui est absorbé,

$$L_x = \frac{1}{2\dot{N}}\varepsilon_0\alpha'' E_0^2 = \hbar$$

Or on définit (cf cours sur la quantique) le spin du photon, en projection sur l'axe des $x$, par $L_x = S_x\cdot\hbar$, d'où $S_x = 1$. On aurait obtenu $-1$ pour une onde de polarisation circulaire droite, et $S_x = 0$ pour une onde polarisée rectilignement (somme d'une onde PCG et PCD).

On retrouve ainsi et explique plus en détail les propriétés mécaniques des champs électromagnétiques, cf fiche sur les équations de Maxwell.