

LP n°1 – Gravitation

Pré-requis :

- Théorèmes généraux de mécanique
- *Dynamique en référentiel non-galiléen*
- Electrostatique

Objectifs :

- Définir la force d'interaction gravitationnelle *et le champ gravitationnel*
- Démontrer les lois de Kepler
- *Calculer le champ gravitationnel généré par une distribution de masse*
- Applications à l'astrophysique *et à la dynamique terrestre*

INTRODUCTION

Des quatre interactions fondamentales, l'interaction gravitationnelle est celle qui a été découverte en premier. De tous temps, l'être humain a cherché à expliquer, à prédire le mouvement des astres qu'il était capable de voir à l'œil nu. Les mesures précises faites par l'astronome danois Tycho Brahe en 1598 permirent à son élève, Johannes Kepler, de formuler trois lois permettant de décrire le mouvement des astres :

Loi des orbites

« Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers. »

Loi des aires

« Le mouvement de chaque planète est tel que le segment de droite reliant le Soleil et la planète balaie des aires égales pendant des durées égales. »

Loi des périodes

« Pour toutes les planètes, le rapport entre le cube du demi grand axe de la trajectoire et le carré de la période de révolution est le même. Cette constante ne dépend pas de la masse de la planète. »

Ce travail lui prit environ vingt années, que l'on peut expliquer par la nécessité d'améliorer les instruments d'optique nécessaires à l'observation et par le temps requis pour se détacher des vieilles conceptions en astronomie, encore dominantes à son époque (datant pour la plupart de l'époque d'Aristote). En témoignent, à la même époque, les déboires de Galilée avec l'Inquisition et la censure de la théorie héliocentrique de Copernic.

C'est Isaac Newton, plus d'un demi-siècle après, qui proposa le premier modèle mathématique de l'interaction gravitationnelle dans ses Principes, la « Loi Universelle de la Gravitation ». Ce modèle lui permit de démontrer les Trois Lois de Kepler et servit de référence longtemps après sa mort, jusqu'à l'avènement de la relativité générale en 1915, grâce aux travaux d'Albert Einstein. On utilise encore aujourd'hui la théorie de Newton lorsque les effets relativistes sont négligeables (vitesses et champs gravitationnels de faible intensité).

L'objectif de cette leçon est de présenter la théorie de la gravitation classique découlant des idées de Newton, *de démontrer les lois de Kepler* puis de faire le lien entre la gravitation et la notion de pesanteur telle qu'elle est perçue dans la vie de tous les jours. On abordera des thématiques d'astrophysique et de dynamique terrestre pour illustrer la leçon.

I - L'INTERACTION GRAVITATIONNELLE

A/ Force d'attraction gravitationnelle

1°) Expression

Énoncé : la force d'attraction gravitationnelle ou force de gravitation exercée par un corps ponctuel A_2 sur un corps ponctuel A_1 est inversement proportionnelle à la distance $r = A_2A_1$ séparant ces deux corps et proportionnelle à leurs masses graves m_1^* et m_2^* :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G m_1^* m_2^* \frac{\vec{A}_2 \vec{A}_1}{\|\vec{A}_2 \vec{A}_1\|^3}$$

avec $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$, $m_1^* = \rho_1 V_1$ et $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$

La constante de proportionnalité G est appelée « constante de gravitation » ou « constante de Newton » et vaut

$$G \sim 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} (\text{SI})$$

On peut recourir à l'analyse dimensionnelle à partir de l'expression de la force d'attraction gravitationnelle pour retrouver l'unité de G .

Remarques :

1 – G est une constante fondamentale de la physique au moment où nous parlons. Elle fut mesurée pour la première fois par Cavendish, en 1798.

Les valeurs des constantes fondamentales ne peuvent pas être déduites d'une théorie sous-jacente et sont supposées invariantes dans le temps et dans l'espace. Il existe trois constantes fondamentales à notre époque :

- G
- la vitesse de la lumière, c
- la constante de Planck, \hbar

Le statut de la constante de Boltzmann fait débat.

2 – Conceptuellement, on distingue deux types de masses :

- la masse grave, notée m^* , qui traduit la sensibilité d'un corps à l'interaction gravitationnelle. Elle est à l'interaction gravitationnelle ce que la charge électrique est à l'interaction électrostatique. On peut dire qu'elle « crée » une force.
- la masse inerte, notée m , qui traduit la capacité d'un corps à résister à sa mise en mouvement, comme l'indique la seconde loi de Newton,

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Elle détermine l'accélération communiquée par une force donnée à un corps.

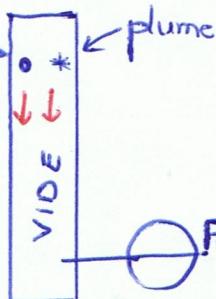
L'expérience montre une égalité de ces deux masses avec une précision relative de 10^{-11} . Ce principe d'équivalence entre masse grave et masse inerte, discuté notamment par Einstein, est un fondement de la théorie de la relativité générale, et est à l'origine d'une réinterprétation de la gravitation comme manifestation d'une déformation de l'espace temps.

On omettra donc de distinguer la masse grave de la masse inerte dans le reste de la leçon.

Une différence entre ces deux masses impliquerait que, dans le vide, un kilo de plume tombe avec une accélération différente d'un kilo de plomb. L'expérience du tube de Newton permet d'illustrer ce principe d'équivalence :

bille d'acier → plume

3J



$$m_1 a_1 = m_1^* g \quad \text{et} \quad m_2 a_2 = m_2^* g$$

$$\text{Ainsi: } \frac{m_1}{m_1^*} a_1 = \frac{m_2}{m_2^*} a_2$$

$$\text{Si on veut } a_1 = a_2, \text{ il faut } \frac{m_1}{m_1^*} = \frac{m_2}{m_2^*} \Rightarrow m_1 \propto m^*$$

→ Par un choix d'unités judicieux : $m = m^*$

3 – Il est important de souligner une analogie profonde entre l'interaction gravitationnelle et l'interaction électrostatique (coulombienne) : toutes deux ayant la même expression mathématique. Il convient de remarquer que l'interaction gravitationnelle est exclusivement attractive, ce qui n'est pas le cas de l'interaction électrostatique qui peut être répulsive ou attractive selon le signe des charges en interaction. Toutes deux satisfont la troisième loi de Newton.

4 – L'intensité de la force exercée par le Soleil sur la Terre est donnée par

$$F_{S \rightarrow T} = \frac{GM_S M_T}{ST^2} = 35,6 \times 10^{17} \text{ N}$$

avec $M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$; $M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$; $(ST) = 150 \times 10^9 \text{ m}$

Comparons les interactions gravitationnelle et électrostatique pour l'atome d'hydrogène : (rayon : $a_0 = 52,9 \text{ pm}$)

$$\frac{F_{2 \rightarrow 1}^{\text{GRAV}}}{F_{2 \rightarrow 1}^{\text{ELEC}}} = \frac{G \frac{m_p m_e}{a_0^2}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2}} = 4\pi\epsilon_0 G \frac{m_p m_e}{e^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11}}{9 \times 10^9} \times \frac{1,67 \times 10^{-27} \times 9,1 \times 10^{-31}}{(1,6 \times 10^{-19})^2} \approx 0,44 \times 10^{-39} \ll 1$$

On voit qu'en présence de charges électriques, l'interaction gravitationnelle peut être négligée devant l'interaction coulombienne dans la plupart des cas. À contrario, sur des échelles astronomiques, la matière est globalement neutre et les masses ont des valeurs considérables : c'est donc la gravitation, et non l'interaction électromagnétique, qui régit essentiellement le mouvement des corps dans l'Univers.

5 – La force de gravitation exercée par une masse ponctuelle sur une autre masse ponctuelle est une force centrale (dont la direction passe constamment par le même point) et conservative : elle dérive d'une énergie potentielle E_p telle que

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$$

Le travail qu'elle fournit au corps sur lequel elle s'exerce est nul sur un tour complet, si ce corps décrit une trajectoire fermée.

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p \Rightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B)$$

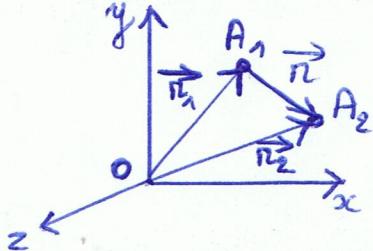
$$\text{Si } A = B : \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

3°) Expérience de Cavendish (calcul facultatif, seulement si le temps le permet)

Cavendish, physicien britannique des XVIII^e et XIX^e siècles, est le premier à avoir mesuré la constante G, en utilisant le principe de la balance de torsion, utilisé par Coulomb dans le contexte de l'électrostatique :

B/ Démonstration des lois de Kepler

Nous allons maintenant redémontrer les lois de Kepler à partir des théorèmes généraux de la mécanique des systèmes de points matériels. Considérons deux astres : le Soleil de masse m_1 , et une planète de masse m_2 . Ces astres sont suffisamment éloignés l'un de l'autre pour qu'on puisse les considérer tous deux comme ponctuels. On repère le Soleil grâce au vecteur \mathbf{r}_1 et la planète grâce au vecteur \mathbf{r}_2 : on travaille dans le repère (Oxyz) associé à un référentiel galiléen R.



La seule force agissant sur A_1 (et resp. sur A_2) est la force de gravitation générée par A_2 (resp. A_1). On note ces forces

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{n}}{n^3} \text{ et } \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_1}{n^3}$$

avec $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Le système est donc mécaniquement isolé : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

1°) Le problème à deux corps : se ramener à l'étude du mouvement d'une seule particule

On doit résoudre les équations du mouvement

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \Big|_R = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad \text{et} \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \Big|_R = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

ce qui est fastidieux par une approche directe.

On va donc utiliser des lois de conservation et les constantes du mouvement associées pour simplifier le problème.

a/ Quantité de mouvement totale du système

Soit P la quantité de mouvement totale du système dans R : $\vec{P} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} \Big|_R + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} \Big|_R = (m_1 + m_2) \frac{d\vec{R}}{dt} \Big|_R$

où le vecteur R défini comme $\vec{R} = \vec{OC} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

désigne la position du centre de masse C dans R.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} \Big|_R = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \Big|_R + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \Big|_R = \vec{0} = (m_1 + m_2) \frac{d\vec{R}}{dt^2} \Big|_R \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} \Big|_R = \text{constante}$$

On montre ainsi que le centre de masse est en mouvement de translation rectiligne uniforme dans R : il est donc intéressant de se placer dans le référentiel du centre de masse pour étudier ce problème, auquel on associe le repère (CXYZ).

Ce référentiel est galiléen (puisque en TRU par rapport à un référentiel galiléen) et vérifie

$$\begin{aligned} \text{de sorte que } \vec{P}^* &= \vec{P}_1^* + \vec{P}_2^* \\ &= m_1 \frac{d\vec{CA}_1}{dt} \Big|_{R^*} + m_2 \frac{d\vec{CA}_2}{dt} \Big|_{R^*} = \frac{d}{dt} \left(m_1 \vec{CA}_1 + m_2 \vec{CA}_2 \right) = \vec{0} \end{aligned}$$

par déf. de C

$$\text{Ainsi : } \vec{P}_1^* = -\vec{P}_2^*$$

$$\frac{d\vec{P}_2}{dt} \Big|_{R^*} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{Remarquons que : } \vec{CA}_2 - \vec{CA}_1 = \vec{AA}_2$$

$$= \vec{OA}_2 - \vec{OA}_1 + \vec{AA}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \vec{P}_2^* &= \vec{P}_1 - m_2 \vec{v}_{CR} = \vec{P}_1 - m_2 \frac{d\vec{R}}{dt} \Big|_R \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt} \Big|_R - \frac{d\vec{r}_2}{dt} \Big|_R \right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{d\vec{CA}_2}{dt} \Big|_{R^*} - \frac{d\vec{CA}_1}{dt} \Big|_{R^*} \right) \\ &\equiv \mu \vec{v} \end{aligned}$$

\uparrow
 R^* est en TRU dans R

$$\text{où : } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad : \text{masse réduite}$$

$$\text{Si } m_2 \ll m_1 : \mu \sim m_2$$

$$\text{Si } m_2 = m_1 = m : \mu = \frac{m}{2}$$

$$\text{et } \vec{v} = \vec{v}_{A_2/R^*} - \vec{v}_{A_1/R^*}$$

Dans R^* : tout se passe comme si on avait une particule fictive unique de masse μ , repérée par $\vec{r} = \vec{AA}_2$ et de vitesse \vec{v} , soumise à la force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$.

b/ Moment cinétique dans R*

Dans R*, le moment cinétique total s'écrit, par définition :

$$\vec{L}^* = \vec{CA}_1 \times \vec{P}_1^* + \vec{CA}_2 \times \vec{P}_2^*$$

$$\vec{L}^* = (\vec{CA}_2 - \vec{CA}_1) \times \vec{P}_2^* = \vec{A}_1 \vec{A}_2 \times \vec{P}_2^*$$

$$= \vec{r} \times \mu \vec{v}$$

ce qui correspond au moment cinétique d'une particule fictive de masse μ repérée par \vec{r} dans R* et animée de la vitesse \vec{v} définie au paragraphe précédent.

c/ Énergie cinétique dans R*

Dans R*, l'énergie cinétique totale s'écrit, par définition :

$$E_k^* = \frac{\vec{P}_1^{*2}}{2m_1} + \frac{\vec{P}_2^{*2}}{2m_2} = \frac{\mu^2 v^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{2} \mu v^2$$

ce qui correspond à l'énergie cinétique d'une particule fictive de masse μ repérée par \vec{r} dans R* et animée de la vitesse \vec{v} définie aux deux paragraphes précédents.

On peut étudier le mouvement des deux astres en le réduisant à celui d'une particule fictive dans le référentiel du centre de masse, cette particule étant soumise à la force de gravitation « exercée » par le centre de masse de l'ensemble.

Le problème à deux corps joue un rôle important en mécanique classique. Si on considère le système solaire en le réduisant au Soleil et à ses huit planètes, il est possible, compte tenu de la dissymétrie en terme de masse ($M_{\text{Soleil}} \gg M_{\text{planètes}}$), de simplifier ce problème à 9 corps, en 8 problèmes indépendants à 2 corps, impliquant chacun le Soleil et une planète. L'influence des autres planètes sur le mouvement de la Terre (par exemple) peut être traité comme une perturbation de faible amplitude.

2°) Point matériel soumis à une force centrale conservative

a/ La force de gravitation est une force centrale

Dans R*, la force de gravitation agissant sur la particule fictive est une force centrale, sa direction passant toujours par le centre de masse C :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{CA}|^3} \vec{CA}$$

Ainsi, le moment de cette force est toujours nul,

$$\vec{M}_{F_{2 \rightarrow 1}} = \vec{CA} \times \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \propto \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$$

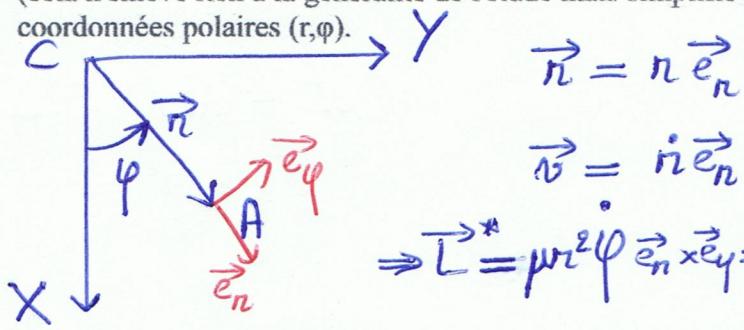
impliquant la conservation du moment cinétique dans R* en vertu du théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} \Big|_{R^*} = \vec{M}_{F_{1 \rightarrow 2}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}^* = \text{cte}$$

On en tire deux conclusions :

- le mouvement est plan
- la norme du moment cinétique \vec{L}^* est constante

Orientons le repère CXYZ de sorte que les axes X et Y soient contenus dans le plan du mouvement (cela n'enlève rien à la généralité de l'étude mais simplifie grandement les calculs) et travaillons en coordonnées polaires (r, φ) .



$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{L}^* = \mu r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z : \dot{\varphi} = \frac{L^*}{\mu r^2} \text{ et } r^2 \dot{\varphi} = \text{cte}$$

Il est donc possible d'écrire \mathbf{r} et \mathbf{v} en fonction de la seule variable r .

b/ La force de gravitation est conservative

Il est possible d'écrire $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ sous la forme du gradient d'une fonction (énergie potentielle E_p).

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\nabla \left(-\frac{Gm_1 m_2}{r} \right) \Rightarrow E_p = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$$

Ainsi, dans R, l'énergie mécanique s'écrit :

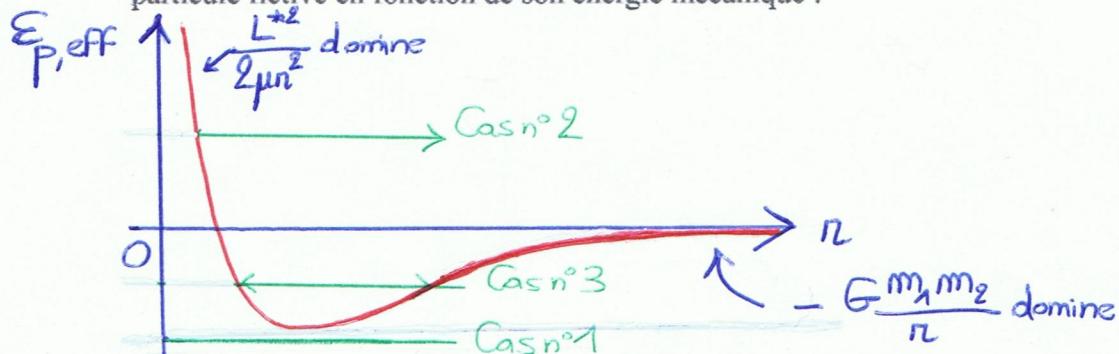
$$E_m = E_k^* + E_p = \frac{1}{2} \mu (r^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{Gm_1 m_2}{r} = \text{cte}$$

$$= \frac{1}{2} \mu r^2 + \left[\frac{L^*^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1 m_2}{r} \right]$$

terme centrifuge $\propto \frac{1}{r^2}$ *$E_{p,\text{eff}}$* *terme de gravitation $\propto \frac{1}{r}$*

Les deux derniers termes de la somme constituent une énergie potentielle effective : tout se passe comme si la particule, dans son mouvement radial, est soumise à deux forces : d'une part la gravitation qui l'attire vers le centre du repère et d'autre par une force centrifuge (d'autant plus intense que la particule fictive tourne vite et est proche du centre du repère).

Traçons cette énergie potentielle effective et décrivons qualitativement le comportement de la particule fictive en fonction de son énergie mécanique :



L'énergie potentielle effective constitue un puits de potentiel et présente une valeur minimale pour une certaine valeur de r , et on peut calculer ces valeurs en résolvant l'équation

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} = 0 = -\frac{L^*^2}{\mu} r^{-3} + Gm_1 m_2 r^{-2}$$

$$\Rightarrow \text{Solution pour } r = \frac{L^*^2}{\mu G m_1 m_2}$$

$$\text{et } E_{p,\text{eff},\min} = \min(E_{p,\text{eff}})$$

$$= -\frac{\mu G^2 m_1 m_2}{2 L^* r^2}$$

7

On distingue alors trois zones sur ce diagramme :

Cas n°1 : $E_m < \min(E_{p,\text{eff}})$

Cette configuration est **impossible** car elle impliquerait une énergie cinétique négative. On la laisse donc de côté.

Cas n°2 : $E_m \geq 0$

La particule a trop d'énergie pour être piégée par la force de gravitation, cette situation décrit donc un état libre et un phénomène de diffusion. On ne détaillera pas cette situation davantage car elle n'est pas décrite par les lois de Kepler, mais on soulignera que la trajectoire de la particule fictive est une hyperbole (ou une parabole si $E_m = 0$). Le raisonnement est similaire à celui que nous allons mettre en œuvre pour le cas n°3.

Cas n°3 : $\min(E_{p,\text{eff}}) \leq E_m < 0$

C'est la configuration d'un état lié, pour lequel r oscille entre deux valeurs extrêmes (distances apsidales). La particule ne peut pas acquérir suffisamment d'énergie cinétique pour s'extraire du puits de potentiel. Dans le cas du problème de Kepler que nous étudions, la trajectoire est fermée.

Remarquons que si $E_m = \min(E_{p,\text{eff}})$, $\frac{1}{2} \mu r^2 = 0 \Rightarrow r = \text{cte}$

ce qui implique une trajectoire circulaire (et donc une valeur unique de r).

Nous allons détailler le cas n°3 et trouver les lois de Kepler dans la section suivante.

3°) Les lois de Kepler

a/ Démonstration de la première loi : la loi des orbites

Énoncé : « Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers. »

Il faut calculer la trajectoire de la particule fictive : $r(\phi)$ ou $\phi(r)$. Plusieurs méthodes étant possibles, nous allons utiliser la **conservation de l'énergie mécanique**.

Nous avons vu que l'énergie mécanique s'écrivait

$$E_m = \frac{1}{2} \mu r^2 + \frac{L^* r^2}{2 \mu u^2} - G \frac{m_1 m_2}{r}$$

et qu'elle était constante, la force de gravitation étant une force conservative (i.e. dont le travail sur une trajectoire fermée est nul).

Effectuons le **changement de variable** suivant : $r = \frac{1}{u} \Leftrightarrow u = \frac{1}{r}$ $\begin{cases} r \neq 0 \\ u \neq 0 \end{cases}$

$$\text{Donc } \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \dot{\phi} = -\frac{L^*}{\mu} \frac{du}{d\phi} \quad \text{car } \frac{L^*}{\mu} = r^2 \dot{\phi}$$

D'où :

$$E_m = \frac{L^*^2}{2\mu} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - Gm_1 m_2 u = \text{cte} \quad (\text{A})$$

Dérivons par rapport à φ l'expression de E_m :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = Gm_1 m_2 \frac{\mu}{L^*^2}$$

On trouve une équation différentielle du second ordre, à coefficients et à second membre constants, dont la solution est de la forme :

$$u(\varphi) = A \cos(\varphi - \varphi_0) + Gm_1 m_2 \frac{\mu}{L^*^2}$$

La valeur de φ_0 correspond à une condition initiale, mais elle n'influe pas sur la forme de la trajectoire. Compte tenu de l'objectif de ce paragraphe, on peut donc poser $\varphi_0 = 0$ sans perdre de généralité. En remplaçant u par r , on obtient l'équation d'une conique dont l'un des foyers est C, le centre de masse du système Soleil/Planète,

$$\frac{1}{r} = Gm_1 m_2 \frac{\mu}{L^*^2} \left(1 + \frac{L^*^2}{Gm_1 m_2 \mu} A \cos \varphi \right) \Rightarrow r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi}$$

$\equiv e$

de paramètre p et d'excentricité e , définis tels que

$$P = \frac{L^*^2}{Gm_1 m_2 \mu} \quad \text{et} \quad e = Ap$$

Remarquons que p est homogène à une longueur.On peut relier e à E_m : On injecte $u = \frac{1+e \cos \varphi}{P}$ dans (A)

$$E_m = \frac{L^*^2}{2\mu} \left[\frac{e^2}{P^2} \sin^2 \varphi + \frac{(1+e \cos \varphi)^2}{P^2} \right] - \frac{Gm_1 m_2}{\frac{L^*^2}{MP}} \frac{e \cos \varphi + 1}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{L^*^2}{2\mu} \left[\frac{e^2}{P^2} - \frac{1}{P^2} \right] = E_m \Rightarrow e^2 = \frac{2\mu P^2}{L^*^2} E_m + 1 \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{2\mu E_m}{Gm_1 m_2}}$$

Comme $-\frac{\mu G m_1 m_2}{2 L^*^2} \leq E_m < 0$ les valeurs de e sont comprises entre 0 (inclus) et 1 (exclue).Le cas $e = 0$ ($E_m = -\frac{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}{2 L^*^2} = \min(E_{p,\text{eff}})$) décrit une trajectoire circulaire comme montré précédemment.

Nous allons démontrer que $0 < e < 1$ correspond à une trajectoire elliptique :

Soit X et Y, les coordonnées de la particule fictive dans le repère (CXYZ) (schéma). L'équation de la conique s'écrit donc :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{P}{1 + e \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Rightarrow P = \sqrt{x^2 + y^2} + eX$$

puisque $\cos \varphi = X / \sqrt{x^2 + y^2}$

Ainsi (passer le calcul si manque de temps)

$$(P - eX)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow P^2 - 2PeX - X^2 = x^2(1 - e^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} + \frac{2PeX}{1 - e^2} = \frac{P^2}{1 - e^2} \quad (\text{B})$$

On pose $a = \frac{P}{1 - e^2}$ et on divise (B) par a^2 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} + \frac{2ea}{a^2} X = 1 - e^2$

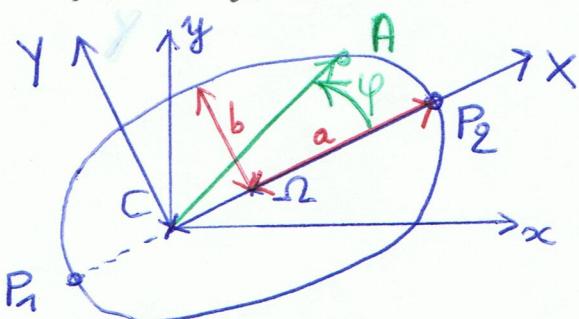
On trouve finalement :

$$\frac{(X + ea)^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

que l'on reconnaît comme l'équation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes de demi-grand axe a et demi-petit axe b définis tels que :

$$a = \frac{P}{1 - e^2}; \quad b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{P}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Traçons cette trajectoire :



- C est un foyer de l'ellipse
- O : centre de l'ellipse
- P₁ : Perihélie → le plus proche de C
- P₂ : Aphélie → le plus éloigné de C

Oui mais : la trajectoire elliptique n'est pas celle de la planète mais bien celle de la particule fictive ! On peut remonter de façon générale aux équations de r_1 et r_2 dans R grâce aux relations :

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1$$

En fait, le système Soleil/Planète correspond à une situation pour laquelle $m_1 \gg m_2$. Dans ce cas, la masse réduite devient :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \sim m_2$$

et les expressions de \vec{r}_1 et \vec{r}_2 deviennent :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &\sim \vec{R} \\ \vec{r}_2 &\sim \vec{R} + \vec{r}\end{aligned}$$

Dans R^* : $\begin{aligned}\vec{CA}_1 &\sim \vec{0} \\ \vec{CA}_2 &\sim \vec{r} = \vec{CA}\end{aligned}$

La particule fictive se confond avec l'objet de faible masse (la planète) alors que le centre de masse se confond avec l'objet le plus lourd (le Soleil), d'où les trajectoires elliptiques mesurées par Kepler et sa première loi.

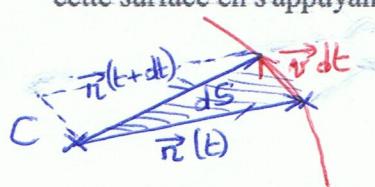
b/ Démonstration de la deuxième loi : loi des aires

Énoncé : « Le mouvement de chaque planète est tel que le segment de droite reliant le Soleil et la planète balaie des aires égales pendant des durées égales. »

Cette démonstration est bien plus rapide. On définit la vitesse aréolaire comme étant la quantité

$$v_A = \frac{dS}{dt}$$

où dS désigne la surface balayée par le vecteur \vec{r} pendant la durée élémentaire dt . On peut évaluer cette surface en s'appuyant sur le schéma ci-dessous :



$$\begin{aligned}dS &= \frac{1}{2} dt \text{ (Parallélogramme)} = \frac{1}{2} \|\vec{r} \times \vec{v} dt\| \\ &= \frac{1}{2} dt r^2 \dot{\varphi} = \frac{L^*}{2\mu} dt\end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse aréolaire s'écrit

$$v_A = \frac{dS}{dt} = \frac{L^*}{2\mu} = \text{constante}$$

et est donc constante, en vertu de la conservation du moment cinétique. On vient de démontrer la deuxième loi de Kepler.

c/ Démonstration de la troisième loi : loi des périodes

Énoncé : « Pour toutes les planètes, le rapport entre le cube du demi grand axe de la trajectoire et le carré de la période de révolution est le même. Cette constante ne dépend pas de la masse de la planète. »

La vitesse aréolaire étant constante durant tout le mouvement, on peut écrire :

$$v_A = \frac{\pi ab}{T} \quad \text{aire d'une ellipse}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi ab}{v_A} = \frac{2\pi \mu ab}{L^*}$$

On remplace b par son expression en fonction de a, puis e par son expression en fonction de p et a.

$$T = \frac{2\pi\mu a^2 \sqrt{1-e^2}}{L^*} = \frac{2\pi\mu a^2}{L^*} \times \sqrt{\frac{P}{a}} = \frac{2\pi\mu a^{3/2} P^{1/2}}{L^*}$$

On remplace p par sa définition puis on élève au carré :

$$T = \frac{2\pi\mu a^{3/2}}{\sqrt{Gm_1 m_2 \mu}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \mu^2 a^3}{Gm_1 m_2 \mu} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{Gm_1 m_2}$$

D'où la troisième loi de Kepler : le rapport est bien constant, et il ne dépend pas de la masse de la planète considérée dans la limite $m_1 \gg m_2$: $\mu \sim m_2$

$$\frac{T^2}{a^3} \sim \frac{4\pi^2}{Gm_1}$$

C/ Applications

a/ Vitesse de libération et notion de trou noir classique

Vitesse de libération (ou vitesse d'évasion) : vitesse minimale pour laquelle la particule fictive est libérée de l'attraction gravitationnelle. Dans la limite $m_1 \gg m_2$, c'est la vitesse que doit avoir l'objet A2 pour échapper à l'objet A1. Cette situation correspond à $E_m = 0$:

$$\frac{1}{2} m_2 v_{lib}^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} = 0 \quad \text{dans } R^* \\ \Rightarrow v_{lib} = \sqrt{\frac{2Gm_1}{r}}$$

Exemple : vitesse d'évasion de la Terre par rapport au Soleil

$$M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg} ; \quad r \approx 150 \times 10^6 \text{ km}$$

$$v_{lib} \approx 42,2 \text{ km/s}$$

Trou noir classique : distribution de masse sphérique de rayon r telle que $v_{lib} = c$.

On a donc la condition :

$$c = \sqrt{\frac{2Gm_1}{r}} \Rightarrow r = \frac{2Gm_1}{c^2}$$

La valeur de r satisfaisant cette condition est notée r_s et est appelée rayon de Schwarzschild.

Exemple : rayon de Schwarzschild du Soleil

$$\underline{\text{A.N.}} \quad r_s \approx 3 \text{ km} \quad \leftarrow R_s \approx 696000 \text{ km}$$

Cette expression ne tient évidemment pas compte des effets relativistes qui sont incontournables dès lors que l'on parle de trous noirs.

b/ Vitesse de satellisation

Vitesse de satellisation : vitesse pour laquelle un satellite artificiel a une trajectoire circulaire (le mouvement est donc circulaire uniforme) à une distance r_0 du centre de la Terre. On se place dans la limite $m_1 \gg m_2$, de sorte que la particule fictive se confond avec le satellite.

On a montré que la trajectoire était circulaire pour $E_m = \min(E_{p,\text{eff}})$, correspondant à

$$r_0 = \frac{L^2}{\mu G m_1 m_2} \sim \frac{(m_2 r_0 / v_{\text{SAT}})^2}{m_2 G m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow v_{\text{SAT}}^2 \sim \frac{G m_1 r_0}{r_0^2} = \frac{G m_1}{r_0}$$

$$\Rightarrow v_{\text{SAT}} = \sqrt{\frac{G m_1}{r_0}}$$

II – LE CHAMP GRAVITATIONNEL

Nous avons vu que les forces de gravitation étaient souvent négligeables par rapport aux forces d'origine électromagnétique, sauf en présence de masses considérables. Des objets aussi gros ne sont assimilables à des points matériels que lorsqu'on les observe à une distance suffisante (sauf cas particuliers). Comment faire pour mettre en équations l'interaction gravitationnelle réunissant des corps matériels de taille finie lorsqu'ils sont trop proches l'un de l'autre pour pouvoir être considérés comme ponctuels ? Cette partie fera également l'objet de l'introduction des notions de champ et de potentiel gravitationnels, par analogie avec l'électrostatique.

A/ Champ et potentiel de gravitation

Soit un corps matériel de taille finie. On peut le représenter comme un ensemble de points matériels $\{P_i\}$, de masses $\{m_i\}$ et de positions $\{r_i = OP_i\}$. Soit un point matériel A, de masse m, repéré par la position $r = OA$. La force exercée par le corps matériel sur A s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{GRAV}}(A) = -G \sum_i \frac{m_i m}{\|P_i A\|^3} \vec{P}_i \cdot \vec{A} = -G \sum_i \frac{m m_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (\text{II.1})$$

1°) Champ gravitationnel

On définit le **champ gravitationnel** \vec{g} produit par le corps matériel comme la force de gravitation qu'il exerce sur A par unité de masse :

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_{\text{GRAV}}(A)}{m} = -G \sum_i m_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

Si on modélise le corps matériel par une distribution de masse continue, le champ gravitationnel généré par le corps matériel au point A s'écrit finalement :

$$\vec{g} = G \iiint_V d\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

De façon analogue à ce qui est fait en électrostatique, on remplace la somme sur i par une intégrale portant sur le volume V du corps matériel. La quantité dV représente la masse d'un élément de volume $dV = d^3r'$ centré au point r' , et ρ désigne la densité volumique de masse du corps matériel.

Il est important de noter que \vec{g} est indépendant de la masse « test » subissant la force de gravitation. Le champ de gravitation peut donc être vu comme une propriété du corps matériel.

2°) Potentiel de gravitation

La force de gravitation étant une force conservative, il est possible de définir une énergie potentielle de gravitation, telle que : $\vec{F}_{\text{GRAV}} = -\nabla \phi_{\text{grav}}$

$$-\nabla \phi_{\text{grav}} = \int \vec{F}_{\text{GRAV}} \cdot d\vec{r} = -G \int \sum_i \frac{m m_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} d\|\vec{r} - \vec{r}_i\| \Rightarrow \phi_{\text{grav}} = -G m \sum_i \frac{m_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} + \text{Cte}$$

On définit le potentiel de gravitation généré par le système de points matériel comme

$$\phi = \frac{\phi_{\text{grav}}}{m} = -G \sum_i \frac{m_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}$$

ou, dans une modélisation continue, comme

$$\phi(\vec{r}) = -G \iiint_V d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = -G \iiint_V dV \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

car $\phi_{\text{grav}} = 0$ si $\|\vec{r} - \vec{r}_i\| \gg \infty$
(Choix)

3°) Relation entre champ et potentiel

a/ Forme locale

On peut établir une relation directe entre le potentiel et le champ de gravitation en divisant l'équation : $\vec{F}_{\text{GRAV}} = -\text{grad } \phi$ par m :

$$\vec{g} = -\text{grad } \phi \quad (\text{II.2})$$

Remarques :

- 1 - Comme $\text{rot}(\text{grad}) = 0$, le champ de gravitation est irrotationnel, donc $\text{rot } \vec{g} = 0$
- 2 - Cette relation est valable en tout point de l'espace, d'où son caractère local
- 3 - On voit que le champ de gravitation est toujours dirigé vers les potentiels décroissants.

b/ Forme globale

(II.2)

Calculons le produit scalaire de l'équation par l'élément de longueur $d\vec{r}$ puis intégrons par rapport à r :

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{r} = - \int \text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = - \int d\phi = -\phi + \text{cte}$$

d'où

$$\phi(\vec{r}) = - \int \vec{g} \cdot d\vec{r} + \text{cte}$$

et donc, entre deux points A et B quelconques

Choix arbitraire de référence. C'est $d\phi$ qui a un sens.
 $\Rightarrow \phi(\vec{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$: $\vec{g} \propto \frac{1}{r^2} \rightarrow 0$ donc $d\phi \rightarrow 0$
 (en général) → exception pour une distribution infinie!

La différence de potentiel entre deux points correspond à la circulation du champ de gravitation entre ces deux points. Elle ne dépend pas de la trajectoire considérée, puisque la force de gravitation, et par extension le champ, sont conservatifs. Ainsi, sur une trajectoire fermée, la circulation de \vec{g} est nulle.

4°) Éléments de structure

a/ Lignes de champ

Les lignes de champ sont les courbes qui, en chaque point, sont tangentes au champ \vec{g} .

Elles vérifient donc l'équation :

$$\vec{g} \times d\vec{r} = 0$$

où $d\vec{r}$ désigne un élément d'une ligne de champ.

b/ Surfaces équipotentielles

Les surfaces équipotentielles sont les ensembles de points tels que le potentiel a une valeur constante. Ainsi, lors d'un déplacement $d\vec{r}$ sur une telle surface,

$$d\phi = 0 \Rightarrow \vec{g} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{g} \perp d\vec{r}$$

⇒ en un point \vec{r} d'une équipotentielle, $\vec{g} \perp$ surface

Le champ de gravitation est donc normal en tout point d'une surface équipotentielle.

c/ Symétrie : propriétés équivalentes à celles du champ électrostatique

En \vec{r} , \vec{g} est contenu dans tous les plans de symétrie auxquels \vec{r} appartient

B/ Théorème de Gauss

1°) Forme globale

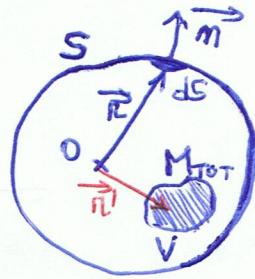
Le flux du champ de gravitation à travers une surface fermée S s'écrit :

$$\iint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

avec $d\vec{S} = \vec{n} dS$
 "normale" ↗ élément de surface de S
 extérieure à la surface

avec $\vec{g}(\vec{r}) = \iiint d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} (-G)$

volume de matière : il peut être totalement inclus dans S ou en déborder

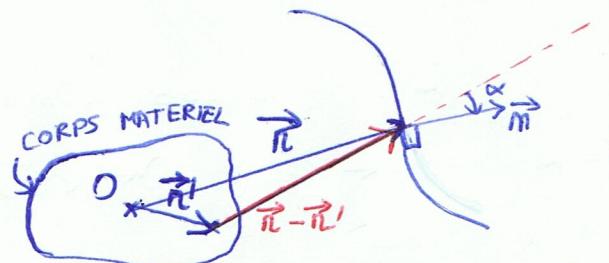


d'où : $\iint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{m} dS = -G \iint_S \vec{m} \cdot \iint d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$ $\vec{m} = \vec{m}(\vec{r})$

$$= -G \iint_S d^3 r' \rho(\vec{r}') \iint_S \vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dS \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

\downarrow

$\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dS = \cos \alpha dS$



$\equiv d\Omega$: angle solide
 sous lequel on perçoit dS
 depuis \vec{r}'

$$\iint d\Omega = \begin{cases} 4\pi & \text{si } \vec{r}' \text{ est dans le volume délimité par } S, \text{ noté } V \\ 0 & \text{si } \vec{r}' \text{ est hors du volume inclus dans } S, \text{ noté } V' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{m} dS = -4\pi G \iint d^3 r' \rho(\vec{r}')$$

2°) Forme locale

volume délimité par S

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}') = 0 & \text{si il n'y a pas de matière en } \vec{r}' \\ \rho(\vec{r}') \neq 0 & \text{là où il y a } \end{cases} \rightarrow \forall V, \text{ donc aussi si } V \rightarrow 0$$

$$\iint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{m} dS = \iint_V \operatorname{div} \vec{g}(\vec{r}) dV = -4\pi G \iint_V d^3 r' \rho(\vec{r}')$$

\uparrow Green Ostrogradsky

$$S \text{ est donc si } V \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r}')$$

3°) Équation de Poisson

Comme : $\vec{g} = -\operatorname{grad} \phi$: $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = -4\pi G \rho(\vec{r}')$

$$\equiv \Delta \phi$$

Donc : $\Delta \phi = 4\pi G \rho(\vec{r}')$ en \vec{r}' (équation de Poisson)

Dans le vide : $\Delta \phi = 0$: équation de Laplace

Soleil: Boule de masse M , rayon R , de volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$g = \text{homogène donc } g = \frac{GM}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

\Rightarrow symétric sphérique (invariance par rotations d'angle ϕ et θ en coordonnées sphériques)

Principe de Curie: si $\vec{g} = \vec{g}(n, \varphi, \theta) = \vec{g}(n)$
alors $\vec{g} = \vec{g}(n, \varphi, \theta) = \vec{g}(n)$

En \vec{n} quelconque, tout plan de symétrie contenant \vec{n} est

En \vec{n} , tout plan contenant \vec{n} est plan de symétrie de la distribution.
L'élément commun à tous les plans de symétrie passant par \vec{n} est \vec{n}

Ainsi: \vec{g} est radial

$$\vec{g} = \vec{g}(n) = g(n) \vec{e}_n$$

On choisit S comme étant une sphère de rayon n : $dS = n^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{n}$

Deux cas: $n < R$: S ne contient qu'une partie de V
 $n > R$: S contient la totalité de V + du vide.

$$\star n < R: \oint \vec{g}(n) n^2 \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi n^2 (\vec{g}(n)) = \iint g dV (-\nabla G)$$

$$\vec{g}(n) = -\frac{G}{n^2} \iint \vec{p} dV$$

$$= -\frac{G}{n^2} \iint n^2 \sin\theta d\theta d\phi dV = -\frac{4\pi G}{n^2} \frac{R^3}{3}$$

$$= -\frac{4\pi G n^2}{3} = -\frac{4\pi G n}{3} \frac{3M}{4\pi R^3} = -\frac{GM}{R^3} \neq \text{champ généré par un point matériel}$$

D'où: $\vec{g}(n) = -\frac{d\vec{\phi}}{dn} \Rightarrow \vec{\phi} = +\frac{GM}{2R^3} n^2 + A$ à lever une fois pour une fois \vec{g} connu dans tout l'espace.

$$\star n > R: \iint n^2 \vec{g}(n) = \iint \vec{p} dV = \iint g dV = -M \nabla G$$

$$\Rightarrow \vec{g}(n) = -\frac{GM}{n^2} \vec{e}_n : \text{à l'extérieur du corps matériel}, le champ est équivalent à celui d'un point matériel de masse M placé en$$

érosion et la contamination du plasma par des espèces neutres ou pas totalement ionisées et donc susceptibles de rayonner (notamment dans le domaine optique). Or, il est indispensable de maintenir suffisamment longtemps une énergie thermique élevée dans un réacteur de fusion pour que celui-ci soit suffisamment rentable (on envisage une température de $150 \cdot 10^6$ K au cœur du réacteur ITER, pour un plasma constitué de deutérium et de tritium, l'objectif étant de permettre à deux noyaux de vaincre la répulsion coulombienne les empêchant de se rapprocher en favorisant l'effet tunnel). C'est en faisant cet effort de contextualisation de mon travail de stage que j'ai décidé d'intégrer le M2 Sciences de la Fusion et des Plasmas, en me spécialisant notamment dans la physique de la fusion par confinement magnétique et la physique théorique des plasmas. Cette filière n'étant pas présente à Bordeaux, je me suis inscrit à l'Université de Lorraine, ayant entendu parler de la possibilité d'obtenir un contrat doctoral en fin d'année.

c/ PROVISOIRE : STAGE DE M2, CHOIX DE LA THESE

d/ Récapitulatif

2008 – Baccalauréat S, série Sciences de l'Ingénieur, spécialité Physique-Chimie, mention Très Bien

2008-2009 – PCEM 1, Faculté de Médecine de Rangueil (Toulouse), ajourné

2009-2012 – Licence de Physique Fondamentale à l'Université Paul Sabatier, mention Très Bien

2012-2013 – M1 Physique Fondamentale à l'Université de Bordeaux, mention Bien

2013-2014 – M2 Sciences de la Fusion et des Plasmas à l'Université de Lorraine, mention Très Bien

2014-2017 – Doctorat en physique des plasmas Physique des instabilités de type Weibel

$$q_g^+(r) = -\frac{d\phi^+}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \Rightarrow \phi^+ = -\frac{GM}{r} + B$$

Le potentiel est une grandeur continue en tout point où q_g existe :

$$\text{En } r=R: q_g^+ = q_g^- = -\frac{GM}{R^2}$$

$$\text{Donc } \phi^+(r=R) = \phi^-(r=R) : \frac{GM}{2R} + A = -\frac{GM}{R} + B$$

De plus: $q_g(r) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow +\infty$

Comme il n'y a pas de masse appartenant au Soleil en $r \rightarrow +\infty$: $\phi(r) \rightarrow 0$ aussi

$$\text{Donc } \lim_{r \rightarrow +\infty} \phi^+ = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\text{Donc } A = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R}$$

Ainsi: $\vec{q}_g = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} r \hat{e}_r & \text{si } r \leq R \\ -\frac{GM}{r^2} \hat{e}_r & \text{si } r \geq R \end{cases}$ et $\phi = \begin{cases} \frac{GM}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) & \text{si } r \leq R \\ -\frac{GM}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$

~~5.~~ $r \geq R$: \vec{q}_g et ϕ sont ceux d'un point matériel concentrant toute la masse de l'étoile, grâce à la symétrie sphérique.

3°/ Cas général: développement multipolaire O origine du repère au centre de masse

$$\phi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

On suppose: $\|\vec{r}'\| \ll \|\vec{r}\|$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \|\vec{r}\left(1 - \frac{\vec{r}'}{\vec{r}}\right)\|$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \left\| \vec{r} \left(\vec{e}_n - \frac{\vec{r}'}{n} \right) \right\| \sqrt{n^2 + n'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \quad (\text{approximation})$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \left[(\vec{r} - \vec{r}')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{n^2 + n'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} = n \sqrt{1 + \frac{n'^2}{n^2} - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{n^2}}$$

$$= n \sqrt{1 + \left(\frac{n'}{n}\right)^2 - 2 \vec{e}_n \cdot \frac{\vec{r}'}{n}}$$

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = n^{-1} \left(1 + \left(\frac{n'}{n}\right)^2 - 2 \vec{e}_n \cdot \frac{\vec{r}'}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{n'}{n}\right)^2 + \frac{\vec{e}_n \cdot \vec{r}'}{n} \right. \\ \left. + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2} \left(\frac{n'^2}{n^2} - 2 \frac{\vec{e}_n \cdot \vec{r}'}{n} \right)^2 \right)$$

$$\approx \frac{1}{n} \left[1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{n^2} - \frac{n'^2}{2n^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{n'^2}{n^2} - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{n^2} \right)^2 \right] + \dots$$

$$\approx \frac{1}{n} \left[\boxed{1} + \boxed{\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{n^2}} - \boxed{\frac{n'^2}{2n^2}} + \boxed{\frac{3}{8} \frac{n'^4}{n^4}} + \boxed{\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2n^4}} - \boxed{\frac{3}{2} \frac{n'^2 \vec{r} \cdot \vec{r}'}{n^4}} \right] + \dots$$

$$\phi(\vec{r}) \approx -G \int dV \frac{1}{n} \left(\underbrace{\boxed{1}}_0 + \underbrace{\boxed{\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{n^2}}}_1 + \underbrace{\boxed{\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2n^4}}}_2 - \underbrace{\frac{n'^2}{2n^2}}_3 - \underbrace{\frac{3}{2} \frac{n'^2 \vec{r} \cdot \vec{r}'}{n^4}}_4 + \dots \right)$$

on s'arrête à l'ordre 2 en $\frac{\vec{r}'}{n}$

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0(\vec{r}) + \phi_1(\vec{r}) + \phi_2(\vec{r}) + \dots$$

$$\phi_0(\vec{r}) = -G \int dV \frac{\rho}{n} = -\frac{GM}{n} \Rightarrow \text{particule ponctuelle (jamais nul)}$$

donc a_0 est moins important qu'en électrostatique

$$\phi_1(\vec{r}) = -G \int dV \rho \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{n^3} = -G \int dV \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{n^3} = -G \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{n^3} \text{ où } \vec{d} = \int dV \rho \vec{r}$$

$$\phi_2(\vec{r}) = -G \int dV \rho \left[\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2n^5} - \frac{n'^2}{2n^3} \right] = -\frac{G}{2r^5} \int dV \rho \left(3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - n'^2 n'^2 \right)$$

moment dipolaire