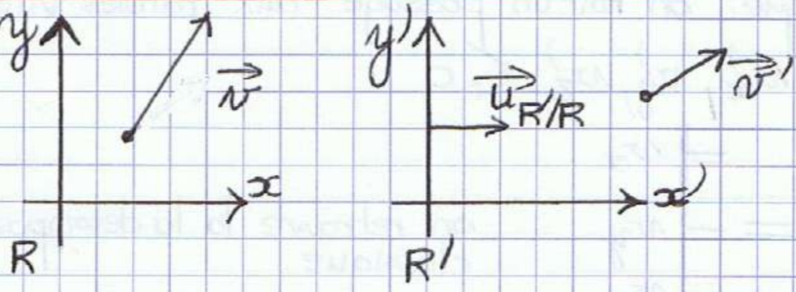
III - Transformation des vitesses



avec
$$x = \gamma(x' + \beta c t')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

<u>Rq:</u> R' en TRU dans R selon x. La transformation de Lorentz ne porte donc que sur x et ct.

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \left(\frac{dx}{dt}\right)_R = v_x \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_R = v_y \\ \left(\frac{dz}{dt}\right)_R = v_z \end{vmatrix} \quad \text{en fonction de } \vec{v}' = \begin{vmatrix} \left(\frac{dx'}{dt'}\right)_{R'} \\ \left(\frac{dy'}{dt'}\right)_{R'} \\ \left(\frac{dz'}{dt'}\right)_{R'} \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow dx = \gamma\, dx' + \gamma\beta c\, dt'$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{c\,dt} = \frac{\cancel{\gamma} dx' + \cancel{\gamma}\beta c\, dt'}{c\cancel{\gamma} dt' + \beta \cancel{\gamma} dx'} = \frac{\cancel{dt'}\left(\frac{dx'}{dt'} + \beta c\right)}{\cancel{dt'}\left(c + \underbrace{\frac{dx'}{dt'}}_{v_x'}\right)}$$

D'où $$\boxed{v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{u}{c^2} v_x'}}$$

Pour y et z : $y = y'$ et $z = z' \Rightarrow dy = dy'$
$$dz = dz'$$

<u>Mais</u> $dt \neq dt'$ Donc $v_y \neq v_y'$
$$v_z \neq v_z'$$

De sorte que : $$\frac{v_y}{c} = \frac{1}{c}\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(c\,dt' + \beta\, dx')}$$

$$\boxed{\Rightarrow v_y = \frac{v_y'}{\gamma\left(1 + \frac{u}{c^2} v_x'\right)}}$$

Et : $$\boxed{v_z = \frac{v_z'}{\gamma\left(1 + \frac{u}{c^2} v_x'\right)}}$$

Remarques:

1°/ Mécanique classique: on fait un passage aux faibles vitesses $u \ll c$

$$\Rightarrow u \ll c, \quad v'_x, v'_y, v'_z \ll c$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{vmatrix} v'_x + u \\ v'_y \\ v'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}$$

on retrouve la loi de composition classique.

2°/ Dans R': on a un photon: sa vitesse est c

Dans R: il va à c également:

(En mécanique classique on aurait $v_R = u + c > c$)

$$v_x = \frac{c+c}{1+\frac{c.c}{c^2}} \qquad \text{si } u = c$$

$$= \frac{2c}{2} = c$$

CQFD. c est encore et toujours un invariant.

Rq si $u = -c$: $\frac{0}{0}$ mais c quand même

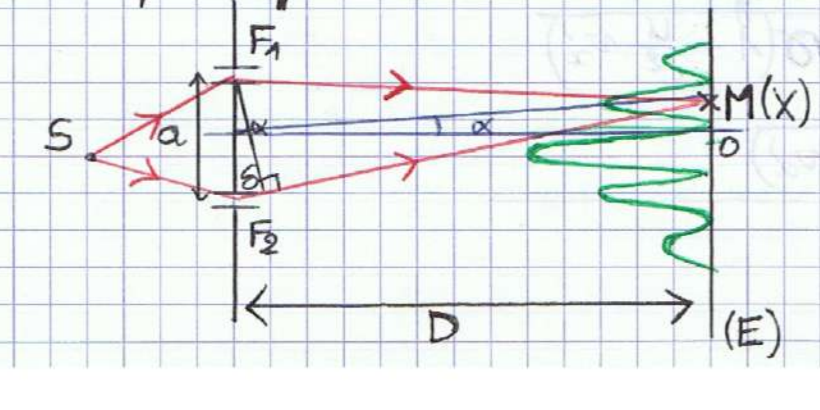
Composition inverse

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} \\ v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)} \\ v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)} \end{cases}$$

$u \to -u$

$v_x \Leftrightarrow v'_x$

Exemple: expérience de Fizeau 1851



Interférences constructives si

$$\delta = m\lambda$$

$$a \sin\alpha = m\lambda$$

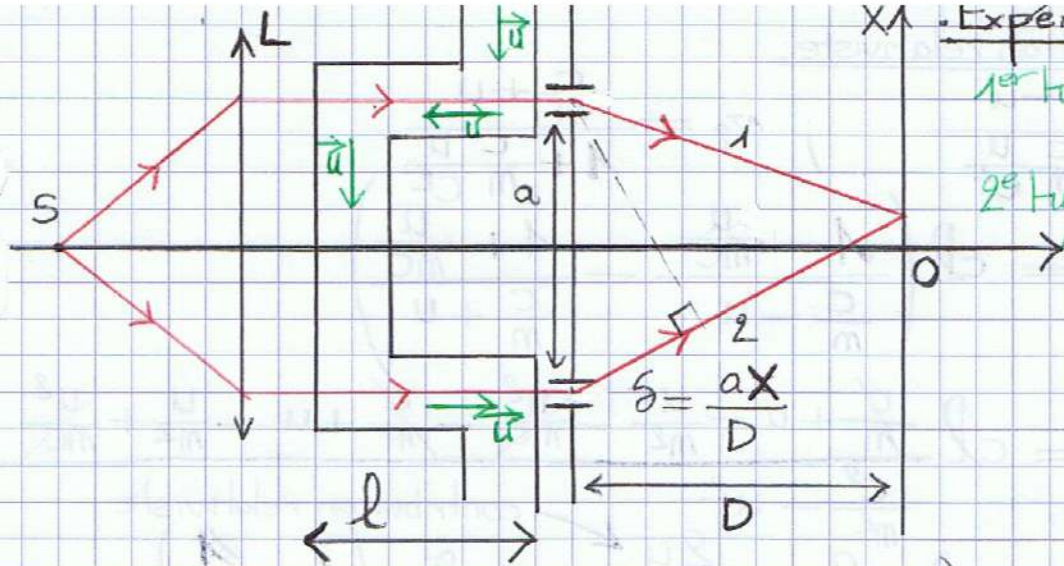
or $\tan\alpha = \frac{X}{D} \simeq \sin\alpha$ si $X \ll D$

D'où $\delta \simeq \frac{aX}{D}$

· Expérience de Fizeau

1er tuyau : eau s'opposant à l'onde

2e tuyau : onde se propageant dans le sens de l'écoulement



· Franges brillantes : $\delta = m\lambda$ (m entier)

Ici : $\delta = m\lambda + \Delta L$; $\delta = \dfrac{aX}{D}$

ΔL : du au liquide

Ainsi : $X_m = \dfrac{\delta D}{a} = \left(\dfrac{m\lambda D}{a} + \dfrac{\Delta L\, D}{a}\right)$

$\Rightarrow$ la figure d'interférences est décalée de ΔL

__Avec la composition classique des vitesses :__

observateur dans l'air

$$\Delta L = c.\,(t_1 - t_2) = c\left(\frac{\ell}{v_1} - \frac{\ell}{v_2}\right)$$ différence de chemin optique

t_1 : temps de trajet dans le bras 1

t_2 : temps de trajet dans le bras 2

avec $\begin{cases} v_1 = \dfrac{c}{n} - u \\ v_2 = \dfrac{c}{n} + u \end{cases}$

$$\Rightarrow \Delta L = c\left(\frac{\frac{c}{n} + u - \frac{c}{n} + u}{\left(\frac{c}{n}\right)^2 - u^2}\right)\ell = \frac{2c\ell u}{\frac{c^2}{n^2} - u^2}$$

or $u^2 \sim (1\,m.s^{-1})$

$n^2 = (1,33)^2$ donc $\dfrac{c^2}{n^2} \gg u^2$

$$\text{D'où } \Delta L \simeq \frac{2c\ell n^2 u}{c^2} = \frac{2n^2 \ell u}{c}$$

Le décalage "classique" est proportionnel à la vitesse du liquide

Avec la composition relativiste:

$$v_1 = \frac{\frac{c}{n} - u}{1 - \frac{c}{n}\frac{u}{c^2}} \quad ; \quad v_2 = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{c}{n}\frac{u}{c^2}}$$

D'où $$\Delta L = cl\left(\frac{1 - \frac{u}{nc}}{\frac{c}{n} - u} - \frac{1 + \frac{u}{nc}}{\frac{c}{n} + u} \right)$$

$$= cl\,\frac{\cancel{\frac{c}{n}} + u - \frac{u}{n^2} - \cancel{\frac{u^2}{nc}} - \cancel{\frac{c}{n}} + u - \frac{u}{n^2} + \cancel{\frac{u^2}{nc}}}{\frac{c^2}{n^2} - u^2}$$

contribution relativiste

$$= cl\,\frac{2u - \frac{2u}{n^2}}{\frac{c^2}{n^2} - u^2} = \frac{2clu\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{c^2}{n^2} - u^2}$$

$$\simeq \frac{2\cancel{n^2}\, l u}{c\,\cancel{n^2}}\,(n^2 - 1) = \boxed{\frac{2lu}{c}\,(n^2-1)}$$

<u>A.N</u>: $l = 1\,m$ $\quad u = 10\,m.s^{-1}$

$n = 1{,}33$ $\quad \lambda = 0{,}6\,\mu m$

D'où $\Delta L_{classique} = 11{,}8 \cdot 10^{-8}\,m \Rightarrow \frac{\Delta L}{\lambda} = 0{,}2$

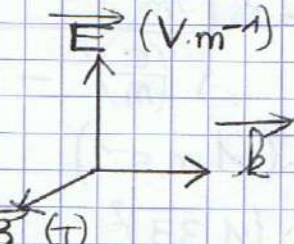
$\Delta L_{relativiste} = 5{,}1 \cdot 10^{-8}\,m \Rightarrow \frac{\Delta L}{\lambda} = 0{,}085$

<u>Rq</u>: $10^{-8}\,m$ impossible ou presque à mesurer. Fizeau a utilisé u et l plus importants

<u>Conclusion</u>: pas besoin d'avoir $u \sim c$ pour que la théorie classique foire.

III - Effet Doppler

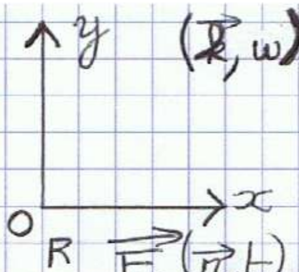
Une onde électromagnétique:



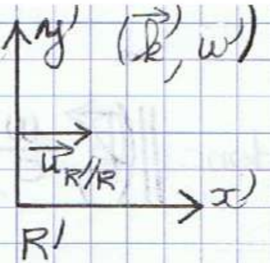
polarisation

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \underbrace{\vec{E_0}}_{amplitude} \times e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \text{avec } \omega = ck$$

Comme $\vec{E}$ dépend de $\vec{r}$ et t, $\vec{E}$ dépend du référentiel d'étude.



$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$



Onde émise dans R' perçue dans R

$\vec{E}(\vec{r}', t') = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}' - \omega t')}$

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta c t') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases} \qquad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\vec{E}(\vec{r}', t') = \vec{E}_0 e^{i\left(k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' \frac{ct'}{c}\right)}$$

$$= \vec{E}_0 e^{i\left[k'_x \gamma(x - \beta c t) + k'_y y + k'_z z - \frac{\omega'}{c}\gamma(ct - \beta x)\right]}$$

$$= \vec{E}_0 e^{i\left[\gamma\left(k'_x + \frac{\omega' \beta}{c}\right)x + k'_y y + k'_z z - \gamma\left(\frac{\omega'}{c} - \beta k'_x\right)ct\right]}$$

D'où : $$\begin{cases} k_x = \left(k'_x + \frac{\beta}{c}\omega'\right)\gamma \\ k_y = k'_y \\ k_z = k'_z \\ \frac{\omega}{c} = \left(\frac{\omega'}{c} + \beta k'_x\right)\gamma \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On a un quadrivecteur d'onde $\left(\vec{k}, \frac{\omega}{c}\right)$

Rq : On a aussi un quadrivecteur d'espace-temps $(\vec{r}, t)$

$$\|(\overset{m}{\vec{r}}, \hat{t})\|^2 = s^2 = c^2t^2 - r^2 \Rightarrow \text{invariante par Lorentz}$$

$$\|(\vec{k}, \tfrac{\omega}{c})\|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \Rightarrow \text{invariante par Lorentz}$$

m^{-1} ou ($rad \cdot m^{-1}$) $rad \cdot s^{-1}$

$$\frac{\omega'^2}{c^2} - k'^2 = \gamma^2\left(\frac{\omega}{c} - \beta k_x\right)^2 - \left[\gamma^2\left(k_x - \beta\frac{\omega}{c}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2\right]$$

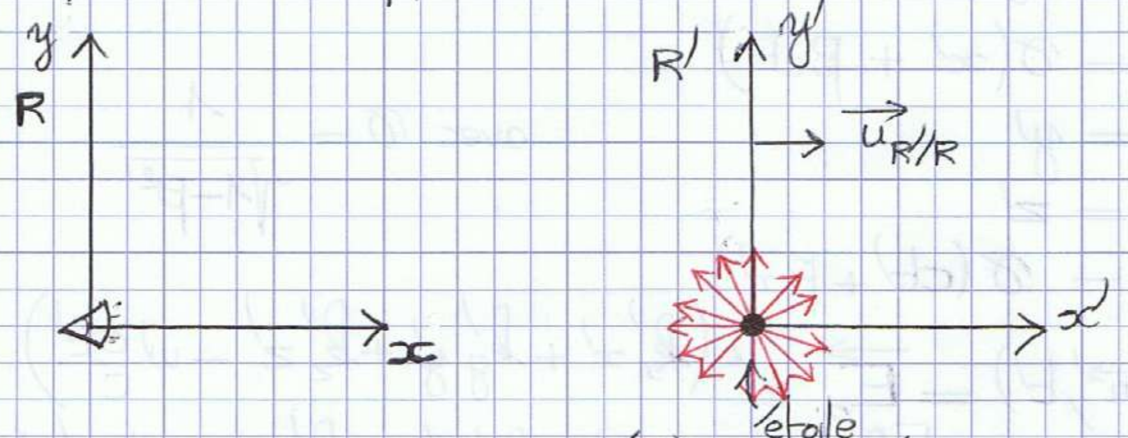
$$= \gamma^2\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \beta^2 k_x^2 - \frac{2\beta\omega k_x}{c}\right) - \left(\gamma^2 k_x^2 + \gamma^2\frac{\beta^2\omega^2}{c^2} - 2\gamma^2 k_x \frac{\beta\omega}{c} + k_y^2 + k_z^2\right)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)}_{1} - \left[k_x^2\underbrace{(-\gamma^2\beta^2 + \gamma^2)}_{=1} + k_y^2 + k_z^2\right]$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

Or $\omega = ck$ donc $\left\|\left(\vec{k}, \frac{\omega}{c}\right)\right\|^2 = 0$

<u>Exemple: effet Doppler longitudinal</u> $(\vec{k_e} // \vec{u})$



$$\left(\vec{k_e}, \frac{\omega}{c}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{observation}}}{=} \left(-k_e \vec{e_{x'}}, \frac{\omega_e}{c}\right)$$

$$\frac{\omega}{c} = \gamma\left(\frac{\omega'}{c} + \beta k_x'\right)$$

$$= \gamma\left(\frac{\omega_e}{c} - \beta k_e\right) \Rightarrow \frac{\omega}{c} = \gamma\left(\frac{\omega_e}{c} - \beta\frac{\omega_e}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega &= \gamma(1-\beta)\,\omega_e \\ &= \sqrt{\frac{(1-\beta)^2}{1-\beta^2}}\,\omega_e = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega_e \end{aligned}}$$

<u>Rq:</u> comme $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\frac{c}{\lambda}$

$$\Rightarrow \underset{\text{dans } R}{\lambda_{obs}} = \underset{\text{dans } R'}{\lambda_{émise}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$\lambda_{obs} \neq \lambda_e$: pas la même couleur dans les 2 référentiels

Si $u \ll c \Rightarrow \beta \lll 1 \Rightarrow \lambda_{obs} \simeq \lambda_{émise}$

Si $\beta > 0$ (éloignement) $\Rightarrow \lambda_{obs} > \lambda_{émis}$: red-shift

Si $\beta < 0$ (rapprochement) $\Rightarrow \lambda_{obs} < \lambda_{émis}$: blueshift

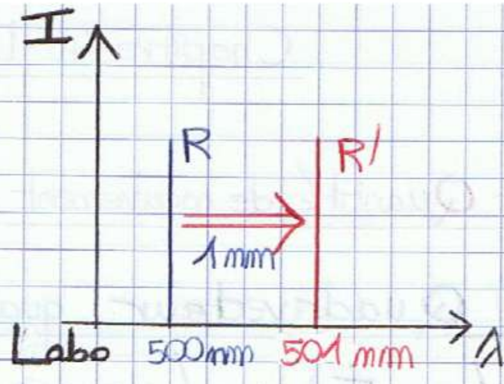
Si $\lambda_e = 500$ mm

$\lambda_{obs} = 501$ mm

$\Rightarrow \beta = 2 \times 10^{-3} > 0$

$\Rightarrow$ éloignement

$\Rightarrow$ expansion de l'Univers



Spectre d'une étoile

<u>Rq</u> : $\lambda_{obs} \simeq \lambda_e \sqrt{(1+\beta)(1+\beta)} = \lambda_e (1+\beta)$ si $\beta \simeq 0$

$\beta \simeq 2 \times 10^{-3}$ (Doppler classique, mais suffisant pour l'étoile)