LP Corps noir

Maria Ubero Gonzalez

Table des matières

Rapport du jury

Bibliographie :
- PC Tout en un. Dunod (M. N Sanz)
- Physique statistique - Diu.

Pré-requis :
- T

Objectif.

1 Introduction

Les densités spectrales donnent la répartition des photons par fréquence ou longueur d'onde.

La densité spectrale en longueur d'onde d'énergie volumique $u^0_\lambda(\lambda, T)$ est telle que la contribution à la densité volumique d'énergie des photons de longueur d'onde appartenant à l'intervalle $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ est :

$$\mathrm{d}u^0_{em} = u^0_\lambda(\lambda, T)\mathrm{d}\lambda \tag{1}$$

L'énergie est :

$$\epsilon = h\nu = \omega\hbar = kc\hbar = cp \tag{2}$$

car $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ (**Relation de de Broglie**).

Loi de Planck

On a besoin de savoir que le gaz de photons est décrit par la statistique de Bose-Einstein. Mais dans ce cas, $\mu = 0$ car la non conservation du nombre de photons dans l'enceinte permet de s'affranchir de la contrainte sur le numéro de particules, μ. On obtient alors un nombre de photons dans l'état d'énergie i :

$$N_i = \frac{g_i}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon_i} - 1} \tag{3}$$

où g_i est la dégénérescence des niveaux de transalation (dans une boite) et on admet qu'ils sont très proches les uns des autres, regarder Coutur pag 196 et $\epsilon_i = cp$ considérée comme une variable continue.

$$g_i = 2\frac{\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3p}{h^3} \tag{4}$$

Le facteur 2 provient de la dégénérescence de spin du photon. Particule de spin 1 mais dégénérescence de 2 car deux états de polarisation circulaire. Polarisation longitudinale n'existe pas en raison de la traversalité de l'onde EM.

Pour savoir la contribution des divers niveau d'énergie, on calcule l'énergie interne par intervale de fréquence.

$$dN_{r,p} = \frac{2}{h^3}\frac{\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3p}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon}-1} \tag{5}$$

Le nombre dN_p de photons dans tout le volume ayant une impulsion comprise entre p et $p+dp$ s'obtient par intégration sur le volume ($d^3r = V$) et sur les angles de p ($d^3p = p^2dpsin\theta d\theta d\phi = \pi p^2dp$). Ce nombre a pour expression :

$$dN_p = \frac{8\pi V}{h^3}\frac{p^2dp}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon}-1} \qquad \text{où} \qquad \epsilon = cp = h\nu \tag{6}$$

On obtient alors le nombre de photons entre ν et $\nu + d\nu$:

$$dN_p = \frac{8\pi V}{c^3}\frac{\nu^2d\nu}{\mathrm{e}^{\beta h\nu}-1} \tag{7}$$

L'énergie élémentaire correspondant à cette inetrvalle de fréquence est donc :

$$dU_\nu = h\nu dN_\nu = \frac{8\pi Vh}{c^3}\frac{\nu^3d\nu}{\mathrm{e}^{\beta h\nu}-1} \tag{8}$$

et la densité spectrale est d'énergie volumique est définie par :

$$u_\nu = \frac{1}{V}\frac{dU_\nu}{d\nu} \qquad \text{où} \qquad \boxed{u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}} \tag{9}$$

où u_ν est la densité volumique d'énergie à l'équilibre. Cette expression constitue la loi de Planck pour laquelle la quantification de l'énergie et la constante h ont été introduites pour la première fois (M. Plank, 1900).

On peut aussi l'écrire en longueur d'onde en sachant que $\nu = \frac{\lambda}{c}$ et $d\nu = -d(\frac{c}{\lambda}) = \frac{c}{\lambda^2}d\lambda$. Donc $u_\lambda = \frac{c}{\lambda^2}u_\nu$. Dunod PC tout en un pags 162-163. On obtient :

$$\boxed{u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1}} \tag{10}$$

Regarder leçon Pierre et Couture pour explications à basse et à hautes fréquences.

Demo loi de Stefan

$$U_\nu = u_\nu \cdot dV \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \tag{11}$$

où $dV = dS \cdot c\cos\theta dt$ est le volume du cylindre et $d\Omega/4\pi$ la fraction de photons dirigés dans l'angle solide $d\Omega$. On obtient cette fraction en connaissant la définition d'angle solide :

$$d\Omega = \frac{S}{R^2} \tag{12}$$

Regarder wikipedia. La fraction de photons dirigés dans l'angle solide $d\Omega$ s'obtient en faisant le rapport entre l'aire S de l'angle solide et l'aire de la sphère entière :

$$\frac{d\Omega R^2}{4\pi R^2} \tag{13}$$

L'énergie élémentaire rayonnée par l'orifice pendant la durée dt et dans l'intervale de fréquence $d\nu$ s'obtient en sommant l'expréssion précedente sur toutes les directions permettant aux photons de sortir. Ceci fait apparaître l'intégrale :

$$\int \cos\theta \mathrm{d}\Omega = \int \cos\theta \sin\theta \mathbf{d}\phi = \pi \tag{14}$$

où l'intégration porte sur phi variant de 0 à 2π et θ de 0 à $\pi/2$ (les valeurs de θ allant de $\pi/2$ à π correspondent à des directions pour lesquelles les photons s'éloignent de l'orifice) ;

$$U_\nu = u_\nu \mathrm{d}\nu \cdot \mathrm{d}S \cdot c \cdot \pi \cdot \mathrm{dt} \cdot \frac{1}{4\pi} \tag{15}$$

$$\epsilon_\nu \cdot \mathrm{d}S \cdot \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}\nu = u_\nu \mathrm{d}\nu \cdot \frac{\mathrm{d}S \cdot c \cdot \mathrm{d}t}{4} \tag{16}$$

$$\epsilon_\nu = \frac{c}{4} u_\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{h\nu/kT} - 1} \tag{17}$$

L'émittance totale s'obtient par intégration sur tout le domaine des fréquences, soit :

$$E = \int \epsilon_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{c}{4} \int u_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{c}{4} \frac{U}{V} \tag{18}$$

où U est l'énergie interne d'un gaz de photons (il faut faire tout le calcul de la fonction de partition et tout pour remonter à U) ou faire :

$$u_\nu = \frac{1}{V} \frac{dU_\nu}{d\nu} \qquad \frac{U}{V} = \int u_\nu \mathrm{d}\nu \tag{19}$$

On avait trouvé u_ν grâce à la loi de Plank, il faut intégrer sur tout le doamin de fréquences :

$$\frac{U}{V} = \int u_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 \mathrm{d}\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT} - 1} \tag{20}$$

On fait le changement de variable : $x = \beta h\nu$ et on obtient :

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi (kT)^4}{(ch)^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} \mathrm{d}x \tag{21}$$

Cette intégrale est compliquée... Elle vaut $\pi^4/15$, d'où :

$$\boxed{\frac{U}{V} = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} T^4 = aT^4} \tag{22}$$

on trouve finalement :

$$\boxed{E = \frac{ac}{4} T^4 = \sigma T^4} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \quad \mathrm{SI} \tag{23}$$

Ce résultat montre que l'émittance d'un corps noir n'est fonction que de la température : la constante universelle $\sigma = ac/4$ est appelée **constante de Stefan-Boltzmann**. Cette loi est en accord avec les observations ; en particulier la valeur mesurée de σ coincide avec sa valeur théorique

A savoir, deuxieme façon trouver U/V

On le fait grâce à la statistique de Bose-Einstein :

$$\Xi = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{\beta(\mu-\epsilon_k)}} \qquad \Xi = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_k}} \tag{24}$$

car $\mu = 0$. Regarder annexes pour voir comment obtenir cette fonction de partition dans l'ensemble grand canonique. On veut remonter à $\frac{U}{V} = \frac{F+TS}{V}$. Il nous faut alors calculer F et S.

Le grand potentiel : $A = U - TS - \mu\langle N\rangle$ et $A = -kT\ln\Xi$. Dans notre cas, comme $\mu = 0$ on obtient :

$$A = F = U - TS = kT\sum_k g_k \ln(1-\mathrm{e}^{-\beta\epsilon_k}) \tag{25}$$

où $g_k = 2\frac{\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3p}{h^3}$
On obtient

$$F = \frac{2kT}{h^3}\int \mathrm{d}^3r \int \mathrm{d}^3p \ln(1-\mathrm{e}^{-\beta\epsilon_k}) \tag{26}$$

où $\epsilon_k = cp$. L'intégrale en r porte sur le volume de l'enceinte et vaut V. En passant en coordonnées sphériques pour p on obtient :

$$F = \frac{8\pi(kT)^4V}{(hc)^3}\int_0^{\infty} x^2\ln(1-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x \tag{27}$$

où $x = \beta cp$. Intégrale pag 197 Couture... compliquée aussi on obtient :

$$F = -\frac{a}{3}VT^4 \tag{28}$$

On calcule $S = \frac{\partial F}{\partial T}$:

$$S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_V = \frac{4a}{3}VT^3 \tag{29}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\frac{U}{V} = \frac{F+TS}{V} = aT^4} \tag{30}$$