LP 27. Propagation guidée des ondes

Fruit

Introduction.

Pourquoi guider les ondes? ondes radio (beaucoup d'énergie pour les propager (envoyer) dans tout l'espace pour finalement capter qu'une petite partie.
Puissance pour $f \uparrow\uparrow$ → plus grand. Donc canalisation des ondes

Influence sur les propriétés de la propagation?

Conséquence du guidage dans le cas des ondes acoustiques.

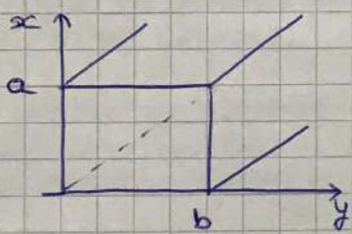
I. Propagation guidée des ondes acoustiques.

Plus facile à traiter mathématiquement qu'EM.

1. Guide d'onde à section rectangulaire.

cylindrique → plus compliqué mathématiquement. (fct. de Bessel)

guide rempli d'air ⇒ fluide parfait.



la surpression p satisfait l'équation de d'Alembert

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1).$$

solution propagative le long de z. ↑

$$p(t,x,y,z) = f(x)g(y)e^{i(k_g z - \omega t)} \qquad (2)$$

(2) dans (1) $\Rightarrow \dfrac{f''}{f}(x) + \dfrac{g''}{g}(y) - k_g^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0.$

Pour que cette éq. soit vérifiée pour $\forall x, y$ $\dfrac{f''(x)}{f} = cte$; $\dfrac{g''(y)}{g} = cte'$

Pour déterminer ces ctes il faut tenir compte des conditions aux limites

Ces cond. l. portent sur la vitesse.

C.L : $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur la paroi.

Eq. d'Euler : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \Rightarrow \begin{cases} v_x \propto \frac{\partial p}{\partial x} \\ v_y \propto \frac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,y,z,t) = \frac{\partial p}{\partial x}(a,y,z,t) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x,0,z,t) = \frac{\partial p}{\partial y}(x,b,z,t) = 0$$

$f'(x) = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha \beta \cos \alpha x$

$\begin{cases} f'(0) = \alpha\beta = 0 \\ f'(a) = -\alpha A \sin \alpha a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \text{et} \\ \sin \alpha a = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad m \in \mathbb{N}$

$f(x) = A \cdot \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right)$

De même $g(y) = A' \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right)$

Pour un couple (m,n) la solution de (1)

est $P_{(m,n)}(x,y,z,t) = P_0 \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) e^{i(k_g z - \omega t)}$ (3)

2) Relation de dispersion - coupure

(3) est solution de (1) si

$$\boxed{k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - m^2\frac{\pi^2}{a^2} - n^2\frac{\pi^2}{b^2}} \qquad k_g \neq \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

$\lambda_g > \lambda_{libre}$

k_g doit rester positif pour qu'il y ait propagation

Pour avoir $k_g^2 > 0$ il faut $\omega > \omega_{c(m,n)}$.

$\omega_{c(m,n)} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$ pulsation de coupure

Si $\omega < \omega_c$ alors $k_g \in i\mathbb{R}$. Onde évanescente
(pas de propagation)
pas d'énergie transférée, transportée dans le guide

→ mode fondamental (énergie la plus faible) $(m=0, n=0)$ $\omega_c = 0$.
Il se propage tout le temps

Champ de pression est uniforme dans la section du guide. ~~On~~

On retrouve une propagation analogue à celle du milieu illimité.

Par contre, si on va à des ↑ freq :

Premier harmonique pour $\omega > \frac{\pi c}{a}$
$(m=1, n=0)$

<u>A.N</u> : Dans le cas d'une flute (en odG ou section cylindrique).

$a \sim 4\text{ cm}$

$f_c = \frac{c}{2a} \approx 4\text{ kHz}$ avec $c \approx 320\text{ m/s}$.

Domain des aigus et des ultrasons

Pour la plupart d'instr de musique, il y aura que le fondamental qui va se propager.

La relation de dispersion n'est pas linéaire.
C'est une disp. diff. à celle étudié avant car celle-ci est due au guidage qui pouvait s'ajouter à celle du milieu

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_g} = f(\omega)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} = f(\omega)$$ risque de déformation

0 et 1 étalement ce qui veut dire que un 0 peut passer devant un 1 et ne plus avoir le même message à cause de la dispersion.
Donc on a une limitation du debit.

?? Dispersion intramode

" intermode → par la fibre. Créer des guides qui puissent créer qu'un seul mode donc monomodal ?

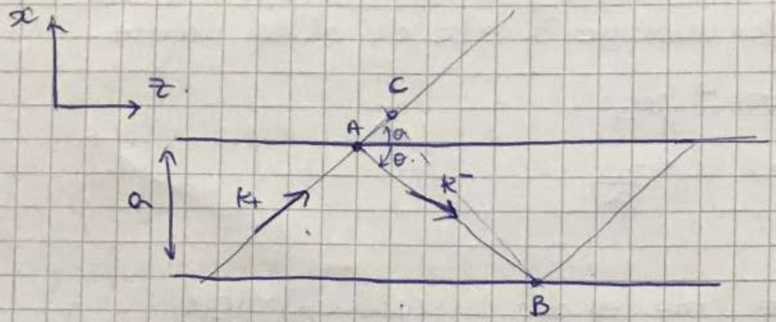
4) Interprétation géométrique du guidage

mode (1,0)

$$p(M,t) = p_0 \cos \pi \frac{x}{a} e^{i(k_g z - \omega t)}$$
$$= \frac{1}{2} p_0 e^{i(\pi \frac{x}{a} + k_g z - \omega t)} + \frac{1}{2} p_0 e^{i(-\pi \frac{x}{a} + k_g z - \omega t)}$$

Onde plane: $\vec{k}_+ = \frac{\pi}{a} \vec{e}_x + k_g \vec{e}_z$

Onde plane: $\vec{k}_- = -\frac{\pi}{a} \vec{e}_x + k_g z \vec{e}_z$.



$(AB) - (AC) = a/\sin\theta - a\cos 2\theta/\sin\theta = 2a\sin\theta$

$\sin\theta = k_{+x}/k_+ = (m\pi/a) \times (\lambda/2\pi) = m\lambda/2a$ donc $(AB)-(AC) = m\lambda$
cond. d'interférences construct.

Si $a \gg \lambda$ il y a beaucoup d'angles possibles $\Rightarrow$ nombreux mode guidés

Pour avoir un guide monomode il faut $a \sim \lambda$.

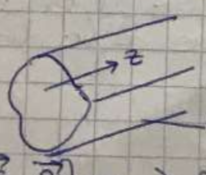
→ ultrasons le long des canalisations pour savoir s'il y a des problèmes, défauts

→ Biblio: Béchaerawy Lavoisier ondes acoustiques

II. Guide d'ondes électromagnétiques

H-prépa: 2 plans //.

Jackson: chap 8.



conducteur métallique qu'on suppose parfait

$[\vec{E}, \vec{B}] = 0$ à l'intérieur

$$\begin{cases} \vec{E}_{tan} = 0 & \text{continue} \\ \vec{B}_{normal} = 0 & \text{continue} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{N}_{1\to 2} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{N}_{1\to 2}. \end{cases}$$

$\vec{E}_{normal}, \vec{B}_{tan} \neq 0.$

$\Rightarrow \sigma, j_s$ à la surface métallique pertes par effet Joule dans métaux de γ finie.

Cause grande de pertes (atténuation du signal dans les guides métalliques).

Est-ce qu'il existe aussi le mode comme en acoustique qui soit comme dans le vide?

<u>NON</u>. $\nexists$ mode TEM à coupure 0 dans un guide mono-conducteur.

Ça vient du fait que : $\perp$ à z

$$\vec{E} = \underbrace{\left(E_z \vec{e}_z + \vec{E}_\perp\right)}_{\text{dépendance de } (x,y)} e^{i(k_g z - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \left(B_z \vec{e}_z + \vec{B}_\perp\right) e^{i(k_g z - \omega t)}$$

Eq de maxwell vérifiées : à l'intérieur.

Regarder le Jackson

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{E}_\perp + k_g E_z = 0.$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\vec{\nabla}_\perp \wedge \vec{E}_\perp}_{/\!/ \vec{e}_z} + \underbrace{ik\vec{e}_z \wedge \vec{E}_\perp}_{\perp \vec{e}_z}}_{\vec{\nabla}\wedge\vec{E}_\perp} + \underbrace{\vec{\nabla}\wedge(E_z \vec{e}_z)}_{\substack{\perp \vec{e}_z \\ \vec{\nabla}E_z \wedge \vec{e}_z}} = i\omega(B_z \vec{e}_z + B_\perp)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_\perp \wedge \vec{E}_\perp = i\omega B_z \vec{e}_z$$

Il existe un mode transverse électromagn ?

s'il existe mode TEM : $B_z = E_z = 0$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{E}_\perp = 0 \\ \vec{\nabla}_\perp \wedge \vec{E}_\perp = 0. \end{cases}$$

(ça ne veut pas dire que c'est nul !)

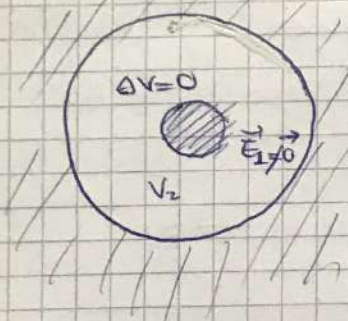
$\Rightarrow \vec{E}_\perp$ est électrostatique : $\vec{E}_\perp = -\vec{\nabla}_\perp V$

$\Delta V = 0 \Rightarrow V$ n'a pas d'extrema en dehors des charges

$\Delta V = 0$ — $V = V_{paroi}$ <u>unique</u>

Donc V ne peut être que constant $\Rightarrow \vec{E}_\perp = \vec{0}$.

Par contre, dans le cas d'un câble coax. on a un $\vec{E}_\perp$ (ce n'est pas monoconducteur)



$\vec{E}_\perp$ peut ne pas être nul

Car pas monomode,

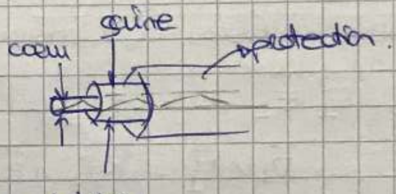
Donc pas de modes transverses EM!

III. Application aux telecom Fibres optiques.

on remplace le métal effet Joule par du verre → isolant donc pertes beaucoup mois importantes.

on travaille à HF. sur les porteuses on peut transmettre beaucoup plus d'information.

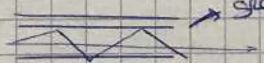
chacun:



$n_c = 1,447$.

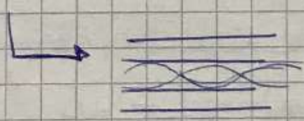
$n_g = 1,443$. (legèrement inférieure)

fibres à saut



→ grand diamètre
$a \gg \lambda$. beaucoup de θ possibles.
(approche Opt. géométrique).
→ problème dispersion.

fibres à gradient d'indice



milieu pas homogène (trajectoires pas rectilignes)
limite la dispersion intermodale
(un peu moins de dispersion).

fibre monomode

→ $a \approx \lambda$.
Pas de dispersion intermodal
utilisé pour les très grandes distances.
mais il y a intermodale!

epreuve A 2003

Dispersion due au milieu et due au guidage on essaie de les compenser car l'une peut être ⊕ et l'autre ⊖.

D'autres référence pour la leçon:

Livre: micro-onde (I) édition Dunod. (Combes)
Il y a aussi le Perez d'optique sur les fibres.