

**Intro:** Beaucoup, dans cette lesson nous allons étudier la propagation dispersive des ondes, pour cela nous avons besoin en prérequis de: sur les ondes planes progressives et l'équation de d'Alambert, l'électromagnétisme, et les signaux  
au sens large de la corde vibrante, les ondes acoustiques et le  
câble coaxial

On se place à un niveau de deuxième année de Licence ou CPGE  
(Nous pouvons observer la dispersion avec les arcs en ciel où lorsque une onde lumineuse traverse un prisme.)  
Nous allons baser notre étude à travers l'exemple des télécommunications qui occupe une place centrale dans l'échange d'information.  
Ces informations sont envoyées sous forme d'onde et on souhaite donc qu'elles soient le moins déformées, nous allons voir que la notion de dispersion intervient alors.

Prenons par exemple le cas d'un câble coaxial.

## 1- Propagation dans un milieu dispersif : câble coaxial

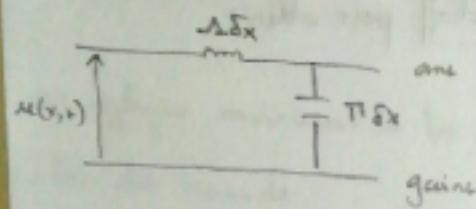
Nous allons caractériser le phénomène de propagation avec dispersion à travers l'étude du câble coaxial, nous allons revenir sur le modèle à constante répartie

### 1-1- Modélisation:

On rappelle qu'un câble coaxial se compose de deux conducteurs cylindriques de même axe, l'anneau et la gaine, séparés par un isolant  
→ schéma

Nous avons vu que certains modes se propagent dans le câble (les modes TEM) peuvent être décrits par le modèle électrocinétique suivant

→ schéma



une portion  $\Delta x$  du câble se modélise par un circuit LC

une bobine d'inductance  $L_{0x}$  qui modélise les phénomènes d'inductions (entre les deux conducteurs parcourus par des courants variables)

et un condensateur de capacité  $C_{0x}$  qui modélise les phénomènes capacitifs entre les deux conducteurs se faisant face

Nous avons alors montré que les lois de Kirchhoff nous amènent à l'équation de d'Alembert pour l'intensité et la tension, les deux grandeurs couplées.

→ projet

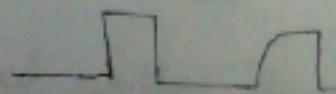
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$$

Nous pouvons regarder la propagation d'un signal dans un câble coaxial de 50 m

[Manip] → observation de la dispersion et l'atténuation d'un signal

on envoie en entrée un signal rectangulaire, la fréquence  $f_0$

et on observe ce même signal à la sortie du câble de 50 m



on voit alors que le signal ~~se longe~~ durant la propagation a été atténué mais aussi déformé

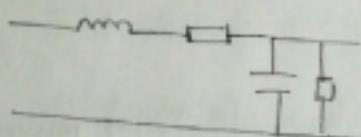
On a envoyé un signal rectangulaire, donc une superposition de sinusoides, le signal a été déformé différemment selon les fréquences correspondantes, cela est caractéristique d'un phénomène de dispersion dont nous donnerons une définition rigoureuse plus tard

Néanmoins, l'équation de d'Alembert, qui en étudiant les ondes planes progressives harmoniques, nous amène à la relation de dispersion  $k = \frac{\omega}{c}$  ne nous permet pas de décrire notre phénomène.

Il faut alors raffiner notre modèle.

On ajoute alors deux sources dissipatives

→ schéma



une résistance en série avec la bobine qui modélise l'effet Joule et une seconde résistance en parallèle avec le condensateur qui modélise les pertes de charge due au caractère imparfait de l'isolant.

De la même façon, nous allons appliquer les lois de Kirchhoff pour obtenir l'équation de propagation dites des télégraphistes

## 1-2- Équation des télégraphistes:

Commengons par appliquer la loi des mailles

• loi des mailles

la notre modélisation nous donne:

$$u(x,t) - u_2 - r\delta x i(x,t) - u(x+\delta x, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow u(x+\delta x, t) - u(x, t) = -\Delta \delta x \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) - r\delta x i(x, t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u(x+\delta x, t) - u(x, t)}{\delta x} = -\Delta \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) - ri(x, t)$$

si  $\delta x \rightarrow 0$  alors  $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Delta \frac{\partial i}{\partial t} - ri} \quad (1)$

on applique maintenant la loi des noeuds en A et en B on a alors

• loi des noeuds

$$i(x+\delta x, t) + i_g = i(x, t) - i_e$$

$$\Leftrightarrow i(x+\delta x, t) - i(x, t) = -T\delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - g\delta x u$$

$$\Leftrightarrow \frac{i(x+\delta x, t) - i(x, t)}{\delta x} = -T \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - gu$$

si  $\delta x \rightarrow 0$  alors  $\boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -T \frac{\partial u}{\partial t} - gu} \quad (2)$

Pour trouver l'équation de propagation pour, par exemple, la tension  $u$ , on dérive la première équation par rapport à  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} (1) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Delta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i}{\partial x} \right) - r \frac{\partial i}{\partial x} \quad \text{où on a utilisé le théorème de Schatz}$$

On peut substituer  $\frac{\partial i}{\partial x}$  en utilisant l'équation (2)

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Delta \frac{\partial}{\partial t} \left[ -T \frac{\partial u}{\partial t} - gu \right] - r \left( -T \frac{\partial u}{\partial t} - gu \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} (\Delta g + rT) + rg u} \quad \text{où } c^2 = \frac{1}{\Delta T}$$

C'est l'équation des télégraphistes qui modélise le phénomène de transmission dans le câble  
 $i$  et  $u$  sont des variables couplées, on obtiendrait la même équation pour l'intensité.

On remarque que le terme de gauche est l'équation de d'Alembert, le terme de droite provient des sources dissipatives que l'on a ajoutée.

On a alors une équation de propagation linéaire qui est une équation de d'Alembert avec second membre linéaire.

Nous avons vu dans le cas de l'équation de d'Alembert que les ondes planes progressives harmoniques constituaient une base des solutions de l'équation.  
L'équation des télégraphiste obtenue est elle aussi linéaire, nous allons alors de la même façon chercher les solutions sous forme d'ondes planes progressives harmoniques et chercher la relation de dispersion.

### 1-3-Relation de dispersion

La relation de dispersion est la relation entre le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et la pulsation  $\omega$  nécessaire pour que l'OPAH

$$u(x,t) = \underline{U}_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

soit solution de l'équation de propagation, on considère donc que le milieu est excité depuis l'extérieur à la pulsation  $\omega$  et ~~avec~~

On injecte donc l'expression dans l'équation des télégraphiste

$$\underline{U}_0 (ik)^2 e^{-i(\omega t - kx)} - \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 \underline{U}_0 e^{-i(\omega t - kx)} = (-i\omega) \underline{U}_0 e^{-i(\omega t - kx)} (\Lambda g + r\bar{P}) + rg \underline{U}_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

$$\Leftrightarrow (ik)^2 - \frac{(-i\omega)^2}{c^2} = (-i\omega)(\Lambda g + r\bar{P}) + rg$$

$$\Leftrightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = (-i\omega)(\Lambda g + r\bar{P}) + rg$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega(\Lambda g + r\bar{P}) - rg \quad \text{équation de dispersion}$$

Nous avons vu l'équation de dispersion pour les phénomènes de propagation régit par l'équation de d'Alembert  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

→ tableau

En plus que pour le câble coaxial on peut la déterminer dans le cas d'ondes électromagnétiques se propageant dans un plasma ou un dielectrique par exemple

Dans les cas autres que ceux définis par l'équation de d'Alembert on remarque que  $\mathbf{k}$  est au peu être imaginaire

Les résultats de l'analyse complexe permettent de recevoir le vecteur d'onde sous la forme:

$$\mathbf{k} = \sqrt{\frac{\alpha + \frac{\omega^2}{c^2} - rg}{2}} + i \sqrt{\frac{\alpha - \frac{\omega^2}{c^2} + rg}{2}} \quad \text{où } \alpha = \sqrt{(\frac{\omega^2}{c^2} - rg)^2 + \omega^2(\Lambda g + r\bar{P})^2}$$

$$= k' + ik''$$

la solution de la tension est alors

$$u(x,t) = U_0 e^{-i(\omega t - (k' + ik'')x)} = U_0 e^{-k''x} e^{-i(\omega t - k'x)}$$

et donc en repartant en réel:

$$u(x,t) = U_0 e^{-k''x} \cos(\omega t - k'x)$$

le terme  $e^{-k''x}$  caractérise l'atténuation, que l'on a pu voir à l'oscilloscope  
c'est à dire que :

la partie imaginaire du vecteur d'onde caractérise l'atténuation sur une  
longueur caractéristique  $\delta = \frac{1}{k''}$

le terme  $\cos(\omega t - k'x)$  est un terme de propagation de l'OPPH

on peut recrire la phase:

$$\omega t - k'x = -k'(x - \frac{\omega t}{k'})$$

on a la phase  $q = \omega t - k'x$

une surface équiphasée vérifie  $q = \text{cte}$

donc la vitesse de la surface équiphasée vérifie

$$dq = 0 \Leftrightarrow d(\omega t - k'x) = 0 \Leftrightarrow \omega dt - k'dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k'}$$

on voit alors apparaître le rapport  $\frac{\omega}{k'}$  qui a la dimension d'une vitesse et qui  
s'interprète comme la vitesse à laquelle se propage la phase de l'OPPH  
c'est donc la vitesse à laquelle il faut se déplacer pour voir l'onde l'OPPH immobile  
→ projeté

La vitesse de phase  $v_q$  est la vitesse de propagation de la phase  
d'une onde plane progressive harmonique

$$v_q = \frac{\omega}{k'}$$

→ animation

On peut la calculer pour les différents cas que l'on a cité.

→ tableau

Ce que l'on remarque c'est que pour les cas où la propagation n'est pas  
décrise par l'équation de d'Alembert, la vitesse de phase dépend de la  
pulsation et donc de la fréquence

C'est dans ce cas que l'on parle de propagation avec dispersion

→ project:

La propagation est dite dispersion lorsque toutes les OPH n'ont pas les mêmes vitesses de phase.

Cela se traduit par une dépendance en fréquence de la vitesse de phase de l'OPH.

→ bâton

On peut comprendre que c'est cette dépendance en fréquence qui est à l'origine de la déformation observée du signal à l'oscilloscope.

On a envoyé un signal rectangulaire, donc de spectre composé de différentes fréquences, les signaux que l'on pouvait associer à chacune de ces fréquences ne se déplaçant pas à la même vitesse et donc se décalent les uns par rapport aux autres durant la propagation et alors le signal observé ne correspond pas à celui envoyé.

Cela est alors problématique lorsque l'on veut transmettre une information  
↓ On peut alors se demander si il est possible d'atteindre un régime où cette dispersion disparaît. Cela fait alors intervenir la condition d'Heaviside

## 1-4- Condition de Heaviside:

Tout d'abord, remarquons que l'on peut factoriser l'équation de dispersion sous la forme suivante:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{g}{\omega \tau} \right) \left( 1 + i \frac{r}{\omega \tau} \right)$$

cherchons une solution sans dispersion, c'est à dire de la forme  
→ proche

$$u(x,t) = f(x-ct) e^{-x/\delta}$$

$$\text{on a : } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-ct) e^{-x/\delta} + f(x-ct) \left( -\frac{1}{\delta} \right) e^{-x/\delta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-ct) e^{-x/\delta} + 2f'(x-ct) \left( -\frac{1}{\delta} \right) + f(x-ct) \left( \frac{1}{\delta^2} \right) e^{-x/\delta} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -cf'(x-ct) e^{-x/\delta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) e^{-x/\delta} \end{cases}$$

$$\text{on injecte dans : } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} (\Lambda g + r \tau) + rg u$$

$$\Rightarrow f'(x-ct) e^{-x/\delta} \left( -\frac{2}{\delta} + c(\Lambda g + r \tau) \right) - f(x-ct) e^{-x/\delta} \left( rg - \frac{1}{\delta^2} \right) = 0$$

vrai pour tout  $(x,t)$  donc :

$$\frac{1}{\delta^2} = rg \quad \text{et} \quad \frac{2}{\delta} = c(\Lambda g + r \tau)$$

$$\Rightarrow 4rg = c^2 (\Lambda g + r \tau)^2$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{\Lambda g}{r \tau} + \frac{r \tau}{g \Lambda} \quad \text{vrai si } \boxed{g \Lambda = r \tau} \quad \text{condition de Heaviside}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{r}{\Lambda} = \frac{\delta}{2F}}$$

si la condition est vérifiée on peut refactoriser l'équation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{r}{\omega}\right)^2 \Leftrightarrow k = \pm \frac{\omega}{c} \left(1 + i \frac{r}{\omega}\right)$$

on peut donc avoir:  $k' = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \sigma_p = c$  pas dispersion

Le câble n'est alors plus dispersif

Le signal n'est plus déformé mais seulement atténué

En réalité, les câbles, comme nous l'avons vu, ne respectent pas la condition de Heaviside. Par exemple, pour des lignes téléphoniques souterraines

ODG: ligne téléphonique

$$r = 4 \cdot 10^{-2} \Omega \cdot \text{mm}^{-1}$$

$$\Delta = 3 \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{mm}^{-1}$$

$$g = 2 \cdot 10^{-9} \Omega^{-1} \cdot \text{mm}^{-1}$$

$$T = 4 \cdot 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{mm}^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{\Delta} = 1 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{g}{T} = 50 \text{ s}^{-1}$$

Nous avons mis en avant certaines caractéristiques des phénomènes de propagation dispersif mais pour cela nous avons utilisé les OPPH.

Nous savons qu'elles ont une extension spatiale infini et une énergie infinie et n'ont donc pas de sens physique

Il nous faut donc une manière de localiser un signal dans l'espace et dans le temps, en se basant sur le fait que les OPPH forment une base des solutions nous allons construire un paquet d'onde.

# 6 Propagation d'un paquet d'ondes

## 2-1- Paquet d'ondes : définition

Commentons pour définir un paquet d'onde.

L'analyse de Fourier nous permet d'écrire un signal quelconque comme une ~~somme de~~ combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux

$$s(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{s}(k,\omega) e^{-i(\omega t - kx)} \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Mais ce signal n'est pas solution de l'équation de propagation du phénomène que on étudie.

Pour cela il faut que les signaux sinusoïdaux soit les OPHT vérifiant l'équation de dispersion

On décrit donc une onde de la manière suivante

onde :

$$s(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{s}(k,\omega) e^{-i(\omega t - kx)} \delta(k - k(\omega)) \frac{dk}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi}$$

où  $k$  est la variable de Fourier et  $k(\omega)$  la relation de dispersion et où la fonction de Dirac force donc les signaux sinusoïdaux à être solution de l'équation de propagation

on peut intégrer sur  $k$  et

$$\Leftrightarrow s(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{s}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)x)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

→ schéma paquet d'onde

Un paquet d'onde est donc une combinaison linéaire continue d'ondes planes progressives harmoniques dont les fréquences spatiale  $k$  et temporelle  $\omega$  sont reliées par la relation de dispersion

Il a un spectre de Fourier continu

On peut interpréter l'expression d'un point de vue ~~ter~~ interferentielle.

Le paquet d'onde est issu de l'interférence d'un nombre infini d'OPPH cohérents chaque OPPH contribuant au paquet d'onde par l'amplitude  $\beta(\omega)$ .

Cette écriture sous forme de transformée de Fourier contraint ~~ter~~ son extension.

L'écriture à 3 dimension se fait de façon analogue.

Maintenant que nous avons l'expression de notre onde, sous forme de paquet d'ondes, nous allons regarder comment elle se propage dans un milieu dispersif.

LP2 6

## PROPAGATION AVEC DISPERSION

(B)

## 2-2- Propagation en présence de dispersion

On considère que l'atténuation est négligeable  $\Rightarrow k$  réel.

Pour faciliter l'interprétation des équations on considère un paquet d'onde dont les fréquences temporelles sont comprises entre:  $\omega \in [\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$   
de plus on considère que  $\Delta\omega \ll \omega_0$

On peut alors faire un développement limité de la relation de dispersion autour de  ~~$\omega_0$~~   $\omega_0$

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \delta\omega$$

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2k}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \mathcal{O}((\omega - \omega_0)^3)$$

Dans un premier temps on va considérer que soit le paquet d'onde est extrêmement étroit, soit que les propriétés du milieu nous permettent de négliger le terme du second ordre

2-2-1 - Dispersion au premier ordre:

On peut insérer notre développement limité dans notre expression du paquet d'onde

$$s(x,t) = \int \tilde{s}(\omega) e^{-i(\omega t + (\omega_0 - \omega)t - \frac{dk}{d\omega}(\omega - \omega_0)x)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

où on a ajouté et  
retiré  $\omega_0 t$

or  $\tilde{s}(\omega)$  est complexe

$$\tilde{s}(\omega) = |\tilde{s}(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$$

et on peut également faire un développement limité de sa phase

$$\approx |\tilde{s}(\omega)| e^{i\phi(\omega)} e^{i\phi'(\omega_0)(\omega - \omega_0)}$$

donc

$$s(x,t) = e^{i\phi(\omega_0)} e^{-i\omega_0 t} e^{i\tilde{k}(\omega_0)x} \int |\tilde{s}(\omega)| e^{i\phi'(\omega_0)(\omega - \omega_0)} e^{-i((\omega - \omega_0)t - \frac{dk}{d\omega}(\omega - \omega_0)x)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

on fait un changement de variable:  $\delta\omega = \omega - \omega_0$

$$s(x,t) = e^{i(\phi(\omega_0) + \tilde{k}(\omega_0)x - \omega_0 t)} \int \underbrace{|\tilde{s}(\omega_0 + \delta\omega)| e^{i\phi'(\omega_0)\delta\omega}}_{\tilde{s}_e(\delta\omega)} e^{i[\delta\omega(t - \frac{dk}{d\omega}x)]} \frac{d\delta\omega}{2\pi}$$

en regardant notre intégrale on voit que l'on a maintenant la transformée de Fourier de  $\tilde{s}_e(\delta\omega)$  mise en  $t - \frac{dk}{d\omega}x$   
Donc

$$s(x,t) = \tilde{s}_e(t - \frac{dk}{d\omega}x) e^{i(\phi(\omega_0) + \tilde{k}(\omega_0)x - \omega_0 t)}$$

On en conclut que :

Un paquet d'onde est constitué d'une onde porteuse modulée par une enveloppe

→ animation schéma

L'onde porteuse se propage à la vitesse de phase prise au nombre pulsation d'onde centrale  $v_p = \frac{w_0}{k(w_0)}$

L'enveloppe se propage à la vitesse de groupe prisé <sup>à la pulsation</sup> au nombre d'onde centrale du paquet

$$v_g = \frac{1}{\left. \frac{dk}{dw} \right|_{w_0}} = \left. \frac{dw}{dk} \right|_{k_0}$$

c'est la vitesse qu'on associe intuitivement au déplacement du paquet d'onde. Et on peut la mesurer par mesure du temps de vol dans ces conditions elle est ~~aussi~~ la vitesse de propagation de l'énergie donc

Pour un phénomène régis par l'équation de d'Alembert  $v_p = v_g$  et porteuse et enveloppe se déplace à la même vitesse

→ animation

En revanche, ~~dans un mil~~ avec dispersion l'enveloppe et la porteuse n'ont pas même vitesse donc:

→ animation

La dispersion au 1<sup>er</sup> ordre se traduit par un glissement de la porteuse dans l'enveloppe appelé glissement de phase.

La forme de l'enveloppe est conservée au cours de la propagation, le paquet d'onde se propage sans étalement ni déformation.

↓ On va donc aller voir à l'ordre 2 de notre développement

## 2-2-2- Dispersion au second ordre

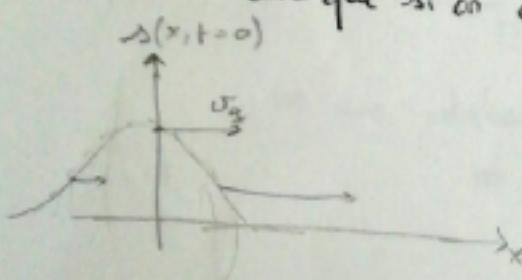
On suppose donc que la dispersion est un peu plus forte et le terme du second ordre du développement limité de l'équation de dispersion n'est plus négligeable.

La portance est issue du terme d'ordre 0, on peut toujours faire la décomposition portance et enveloppe

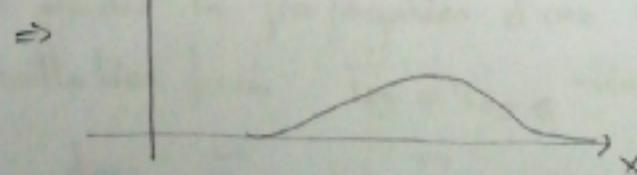
$$\psi(x,t) = e^{i(\phi(\omega_0) + k\omega_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_k(\delta\omega) e^{i(\delta\omega(t - \frac{dk}{d\omega}x - \frac{1}{2}\frac{dk^2}{d\omega^2}|\delta\omega|))} \frac{d\delta\omega}{2\pi}$$

on a donc un terme en plus de l'inverse de la vitesse de groupe qui lui dépend de  $\omega$

c'est à dire que si on considère un paquet d'ordre à  $t=0$



Le deuxième terme entraîne une vitesse des points de l'enveloppe différentes et donc lors de l'intégrale les états d'interférence ne sont plus constant au cours de la propagation, l'enveloppe va se déformer



Il est possible d'étudier l'évolution de l'enveloppe et d'établir ce résultat rigoureusement, on peut résumer alors résumer

La dispersion au deuxième ordre se traduit par un étalement de l'enveloppe du paquet d'ordre

Le temps caractéristique de l'étalement dépend des propriétés du milieu et de la largeur initiale du paquet d'ordre

Plus le paquet est initialement étroit, plus l'étalement est rapide.

si l'on transmet une information qui est codée par l'enveloppe, elle sera alors délivrée.

↓  
Dans les télécommunications, les échanges et le transport de l'information  
~~ne se fait pas~~ se fait également peut aussi ce faire dans l'air comme pour  
les radios.

La ionosphère, partie haute de l'atmosphère est un plasma dont on  
peut étudier la propagation des ondes

### 3 - Propagation dans un plasma: ionosphère.

#### 3-1 - Position du problème.

Un plasma est un milieu ionisé, les électrons et les ions positifs qui le constituent assurent une neutralité électrique globale, mais la présence des particules chargées lui confère des propriétés électromagnétiques: c'est un conducteur. C'est le cas de la ionosphère qui est échauffée par le rayonnement solaire.

On fait l'hypothèse: plasma peu dense  $\Rightarrow$  pas interactions entre particules

On peut écrire le PFD pour

$$\text{électrons: } m \frac{d\vec{v}_-}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}_- \times \vec{B})$$

$$\frac{|\vec{v}_- \times \vec{B}|}{|E|} \sim \frac{|\vec{v} \times \frac{\vec{E}}{c}|}{|E|} \sim \frac{v}{c}$$

$\Rightarrow$  non relativiste:

$$m \frac{d\vec{v}_-}{dt} = -e \vec{E}$$

$$\text{ions: } M \frac{d\vec{v}_+}{dt} = e \vec{E} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

On étudie la propagation d'une O.P.P.H: les particules effectuent donc des oscillations forcées  $\vec{v}_\pm = v_{0\pm} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

$$\text{donc } \vec{v}_- = \frac{e i}{m \omega} \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{v}_+ = \frac{-i e}{M \omega} \vec{E}$$

Le vecteur courant est:

$$\vec{J} = ne^- \vec{v}_- + ne^+ \vec{v}_+ = ne(\vec{v}_+ - \vec{v}_-) = -\frac{ine^2}{\omega} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E}$$

or la masse d'un proton est 1836 fois supérieure à celle de l'électron  
on peut négliger le terme  $\frac{1}{M}$  devant  $\frac{1}{m}$

$$\vec{J} = -\frac{ine^2}{wm} \vec{E} = -i \frac{\omega_p^2}{\omega} E_0 \vec{E} \quad \text{où} \quad \omega_p^2 = \frac{n e^2}{m \epsilon_0} \quad \text{lo: d'Ohm}$$

On remarque que  $\vec{E}$  est le vecteur densité de courant soit en quadrature, il n'y a pas d'échange d'énergie avec la loi d'Ohm et les équations de Maxwell nous pouvons trouver entre l'onde et le plasma l'équation de propagation

$$\vec{\nabla}_n (\vec{\nabla}_n \vec{E}) = -\Delta \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_n \vec{B})$$

||  
O dielectroutralité

$$\Rightarrow -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_n \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Leftrightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \left( -i \frac{\omega_p^2}{\omega} \epsilon_0 \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'Maxwell-Ampère.  
c'est l'équation de Klein Gordon, là encore on à l'équation de d'Alambert plus un second membre linéaire  
l'Ohm

Pour chercher l'équation de dispersion on cherche les solutions sous forme d'OPPH:  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kx)}$

propre selon x

$$\Rightarrow (-ik)^2 - \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 = -\mu_0 \epsilon_0 i \frac{\omega_p^2}{\omega} (-i\omega)$$

$$\Leftrightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2} \omega_p^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)} \quad \text{relation de dispersion}$$

On remarque alors deux cas

$\omega > \omega_c$ : la réflexion  $\rightarrow$  propagation ( $k' \neq 0$ ) sans atténuation ( $k'' = 0$ )

$\omega < \omega_c$ :  $k$  imaginaire pur  $\rightarrow$  pas de propagation, l'onde est réfléchie à l'interface.

On étudie la dispersion, on va alors se placer dans le cas où  $\omega > \omega_c$  et voir les implications

3-2-  $\omega > \omega_p$ : vitesses de phase/groupe

on a  $\omega > \omega_p$ , pour la ionosphère  $n \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$   
 $\Rightarrow f_p \approx 9 \text{ MHz}$

on peut calculer la vitesse de phase

$$v_q = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

et la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{dw}{dk|_{\omega}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

on remarque plusieurs choses

- $v_q$  est fonction de  $\omega \Rightarrow$  milieux dispersifs
- $v_q v_g = c^2$  typique des relation de dispersion en  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \text{ct}$
- $v_q < c$  ne viol pas la relativité car  $v_q$  ne s'applique pas à la vitesse de propagation de l'information
- $v_g < c$  peut s'appliquer à la vitesse de propagation de l'énergie

on a  $v_g < v_q \rightarrow$  dispersion normale

mais il existe des cas où:

$v_g > v_q \rightarrow$  dispersion anormale

la vitesse de groupe peut devenir supérieur à  $c$

en réalité, au voisinage de forte dispersion on ne peut pas effectuer le développement limité fait en deuxième partie  
 il faut dans ce cas calculer explicitement la vitesse du signal référé par l'avant du paquet d'onde

On reliendra:

La vitesse de groupe ne décrit de façon satisfaisante la propagation du signal et de l'énergie que lorsque la dispersion est suffisamment faible. Lorsqu'elle est trop forte, il faut revenir à la notion de vitesse des signaux.

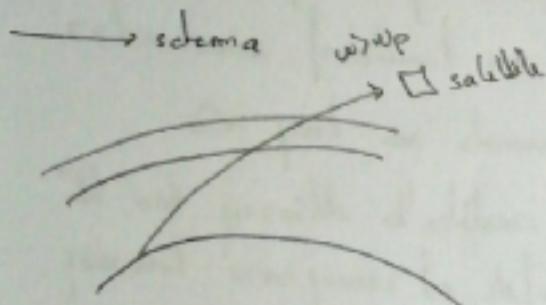
On peut regarder comment nos résultats permettent d'optimiser les réseaux de télécommunications.

LP26

## PROPAGATION AVEC DISPERSION

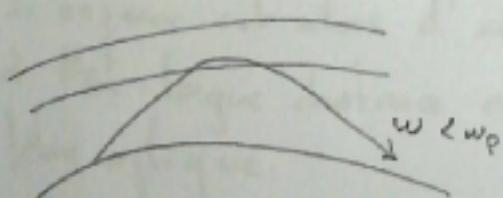
## 3-3- Application au télécommunications:

on a vu dans le cas de la ionosphère que l'onde se propage sans atténuation  
 si des fréquences supérieures à la pulsation plasma



cela permet de communiquer avec les satellites

en revanche, l'onde est réfléchie par des fréquences inférieures à la pulsation plasma



et on peut communiquer autour de la Terre

## PROPAGATION AVEC DISPERSION

(14)

Conclusion: Nous avons vu que la dispersion  $\alpha$  est un enjeux majeur pour les télécommunications.

Il faut que cette dispersion soit faible si l'on souhaite retranscrire fidèlement une information.

On peut se demander comment faire si cela n'est pas le cas. Il est possible d'utiliser des milieux non linéaire, ces milieux peuvent compenser la déformation d'un paquet d'onde.

On a alors une onde se propageant sans déformation dans un milieu dispersif : c'est un soliton.

L'enjeux est alors d'utiliser des solitons pour réaliser des communications à très longue distance où très haut débit par exemple de fibre optique.

De plus, la dispersion est caractéristique d'un milieu, l'onde de la propagation dispersif d'une onde peut donc permettre de remonter aux propriétés du milieu.