

LP4-Précession dans les domaines macroscopiques et microscopiques

2017 :

Leçon 4 : *Précession dans les domaines macroscopique et microscopique.*

L'étude de l'un des domaines, macroscopique ou microscopique, ne doit pas conduire au sacrifice de l'autre : un certain équilibre est attendu. Il est nécessaire d'avoir suffisamment de recul en mécanique des solides pour préciser l'origine des formules avancées.

2016 : Pas passer trop de temps sur les aspects cinématiques

2015 : La leçon « Précession dans les domaines macroscopique et microscopique » remplace la leçon « Approximation gyroscopique. Effets dans les domaines macroscopique et microscopique », dont l'énoncé pouvait conduire les candidats à des confusions.

Leçon 3 : *Approximation gyroscopique. Effets dans les domaines macroscopique et microscopique.* L'exposé doit être équilibré entre la description des effets macroscopiques et microscopiques. Il n'est pas souhaitable de faire un catalogue exhaustif des applications mais plutôt d'en traiter quelques-unes de manière complète. Le/la candidat(e) doit être capable de trouver l'orientation et le sens des effets gyroscopiques sur des exemples simples.

2011, 2012, 2013, 2014 : Les candidats ignorent trop souvent les principes de fonctionnement et les performances des gyroscopes modernes.

2009, 2010 : Les hypothèses de l'approximation sont très rarement énoncées clairement et encore plus rarement vérifiées dans le traitement des applications. L'équation de précession est un concept utile.

2008 : Une illustration expérimentale aide à faire passer le message de cette leçon. Il faut prévoir assez de temps pour traiter le domaine microscopique. Le lien avec l'approche quantique peut être évoqué en évitant de sombrer dans le détail des calculs. Il est rappelé que le moment cinétique et le vecteur rotation ne sont a priori pas colinéaires.

2006 : Une illustration expérimentale aide à la compréhension de cette leçon. Un temps suffisant doit être consacré au domaine microscopique. Les équations d'évolution du moment magnétique en présence d'un champ magnétique tournant doivent être clairement établies dans le repère tournant. Les conditions de résonance et les applications de la résonance magnétique doivent être discutées. Le lien avec l'approche quantique peut être évoqué mais il faut éviter de sombrer dans le détail des calculs.

2005 : La réalisation d'expériences est toujours appréciée dans cette leçon, surtout si elles sont mises clairement en relation avec les résultats théoriques. Comme dans toute leçon de mécanique, les référentiels doivent être correctement définis. La notion de référentiel barycentrique, quand elle est introduite, est souvent confuse. Le temps imparti au domaine microscopique est trop court.

2002 : Les applications citées ou les expériences présentées pour illustrer la notion de couple gyroscopique sont souvent très mal comprises. L'aspect *paradoxal* peut être évoqué¹⁷.

1997 : Montrer l'unité de la leçon ; l'aspect microscopique (incluant en particulier la résonance magnétique nucléaire et ses applications médicales) est trop souvent négligé. Les gyroscopes employés pour l'illustration expérimentale du sujet sont souvent sous-utilisés et ne sont pas lancés suffisamment fort pour qu'effectivement l'approximation gyroscopique soit valable !

Références :

- **Taylor, Classical Mechanics Section 10** : Pour réviser les bases de mécanique : précession et la nutation. Explication pas à pas
- **BUP 587, page 85 intitulé *Aspects modernes des gyroscopes*** : Intéressant pour comprendre l'approximation gyroscopique et des détails techniques sur les gyroscopes. Les notations sont encore plus pourries que le :
- **Pérez, Mécanique : p437**. Applications multiples mais expliquées de manière aride.

Prérequis

- Mécanique classique (Théorème du moment cinétique, liaison rotule, pivot)
- Mécanique quantique (notion de spin, quantification du spin 1/2)
- Physique statistique (juste facteur de Boltzmann)

Introduction :

- Peut-être que vous avez vu passer sur youtube cette vidéo du youtubeur Dr Nozman <https://www.youtube.com/watch?v=hgjcPnI5qF4> . Il présente un objet qu'il appelle gyroscope. On constate qu'il s'agit en gros (on définira plus formellement ce que c'est dans I-A) d'un rotor qui tourne à grande vitesse (12 000 tours par minutes). Cette rotation rapide permet de faire des expériences dont les effets sont à première vue contre-intuitifs :
- A 22s : visualisation du gyroscope.
- A 45s : on remarque que si on lâche cet objet (solidaire d'une tige), il ne tombe pas mais il tourne (c'est exactement ce qu'il se passe pour les toupies). Nozman dit : « **il se met en mode précession, c'est-à-dire le changement d'orientation de son axe de rotation** ».
- A 2'45 : Nozman fait tester son gyroscope à Squeezie. Ce dernier est impressionné car l'objet lui transmet oppose un couple (c'est ce que nous appellerons couple gyroscopique) dont la direction est assez contre-intuitive. Il dit même cette phrase : « **c'est ma main qui tourne autour !** » (on y reviendra dans le I-A). Il remarque ensuite qu'il n'y a pas de résistance s'il lui impose un couple suivant son axe de rotation mais **dès qu'il essaie de faire bouger son axe de rotation, une force au mouvement**.
- Cette petite vidéo pose les problématiques que nous allons aborder dans cette leçon : Qu'est-ce qui explique la réaction si particulière du gyroscope aux actions extérieures. Pourquoi précesse-t-il¹ ? Au-delà de l'aspect étonnant de l'objet, nous allons comprendre son intérêt pratique du concept de précession : En quoi cela est utilisé pour repérer les angles de gite, roulis... des sous marins, ou des avions.
- Cette présentation s'articulera en 2 temps : **Dans une première partie**, nous partirons de l'objet concret gyroscope que nous avons vu dans la vidéo pour tenter de le modéliser son mouvement grâce aux outils de la mécanique Newtonienne. Nous allons constater qu'une approximation simple (**l'approximation gyroscopique**) permet de simplifier le problème tout en conservant les caractéristiques « importantes » du mouvement. Nous pourrions ainsi comprendre en quoi cet objet peut se révéler utile pour mettre en évidence la rotation de la terre mais aussi plein d'autres applications

¹ Il semblerait que le verbe « précesser » ne soit pas dans le dictionnaire, nous l'utiliserons quand même afin de simplifier notre discours.

mécaniques macroscopiques. **Dans un second temps**, nous verrons qu'on retrouve les mêmes équations pour modéliser le Spin (aspect microscopique) soumis à un champ magnétique, on pourra ainsi à la lumière de nos connaissances que nous aurons construite dans la première partie comprendre le phénomène de Résonance Magnétique Nucléaire.

I- Précession dans le cadre de l'Approximation gyroscopique

A- Qu'est-ce qu'un gyroscope vs un volant d'inertie

- **Définition de Foucault²** : Le gyroscope est un appareil comportant un rotor tournant à grande vitesse et capable de mettre en évidence la rotation de son boîtier. Cette définition fonctionnelle mérite d'être discutée en comprenant comment le rotor est lié au boîtier.
- **Liaison rotule entre le boîtier et le rotor³** : Sur le schéma ci-dessus, 3 liaisons pivots indépendantes sont réalisés techniquement par deux anneaux. C'est ce qu'on appelle une

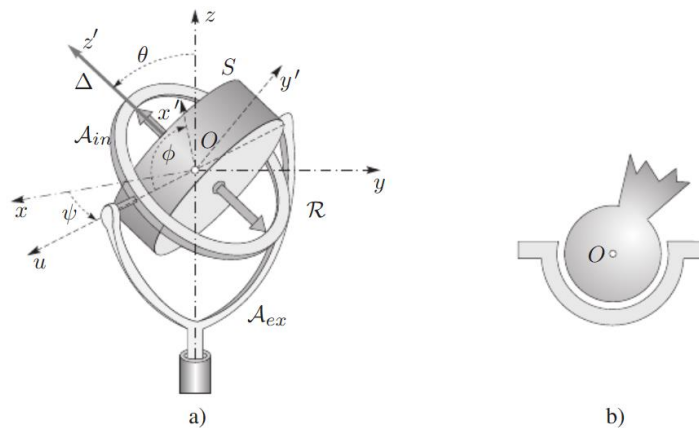


FIG. 26.1.

suspension à la Cardan : Le point O est fixe dans le référentiel du boîtier et il y a 3 degrés de liberté qui sont les 3 angles de rotations. Si l'on néglige les frottements la **liaison rotule est parfaite**. Cela veut dire concrètement que si un opérateur extérieur exerce un couple sur le boîtier, ce dernier n'est pas transmis au rotor car il n'y a pas de frottement. C'est pour cela que Squeezie a dit : « c'est ma main qui tourne autour ! » à 2'43.

- En pratique, un moteur entretient le mouvement de rotation suivant l'axe z' .
- Dans cette présentation, on appellera **volant d'inertie** un rotor dont la liaison avec le boîtier n'est une rotule mais possède des degrés de liberté en moins. C'est le cas du jouet de Nozman qui n'est relié au boîtier par une liaison pivot dont l'axe est le mèle que l'axe de rotation du rotor.

B- Approximation gyroscopique :

- Pour fixer les idées, on dispose d'un gyroscope et on travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen (dans un premier temps).

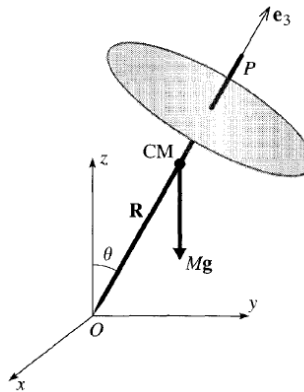
² Léon Foucault (1819-1868) Astronome et physicien français

³ Attention, le « gyroscope » de Nozman n'est pas relié au boîtier par une liaison rotule mais par une simple liaison pivot. Ce qui permis à Squeezie de ressentir un couple résistant lorsqu'il transmet un couple selon une direction différente de l'axe du pivot... Le gyroscope de Nozman est plutôt un volant d'inertie.

- **Moment cinétique par rapport à un point fixe** : $\vec{L}_O = \vec{I} \vec{\omega}$. Si on projette ces grandeurs dans un repère constitué des axes principaux du rotor : $\vec{L}_O = \begin{pmatrix} \lambda_1 \omega_1 \\ \lambda_2 \omega_2 \\ \lambda_3 \omega_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_{1,2,3}$, les moments principaux du rotor.
- **Voici la fameuse Approximation Gyroscopique** :
 - (i) $\lambda_1 \sim \lambda_3$ (ceci est obtenu par le caractère « trapu » du rotor⁴)
 - (ii) $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_3$ [angle $(\vec{\omega}, z')$ petit] $\omega_3 \sim 100 \frac{tr}{s} = 36000 \text{ degré/s}$ et $\omega_{1,2} \sim 1 \text{ degré/s}$
 Donc $\vec{L}_O \approx \lambda_3 \omega \vec{e}_z'$ est parallèle à z' . **C'est comme si le moment cinétique « est accroché à l'axe z' lié au rotor ».**

C- Précession Gyroscopique

- **Précession gyroscopique** : Pour mettre en évidence l'effet dit de *précession*. Travaillons directement sur un exemple. On imagine un gyroscope placé dont le centre de masse est situé sur l'axe de rotation mais est différent du centre de la liaison rotule comme sur le schéma ci-dessous. C'est la configuration de précession que nous avons vu dans la vidéo à 45's.



Le rotor est soumis à un couple provoqué par les forces de pesanteurs. Ce couple est orthogonal à l'axe de rotation et est dirigé vers l'intérieur de la feuille (règle des 3 doigts). Dans l'approximation gyroscopique (toujours valable pour des faibles moments de force (on verra pourquoi plus bas)), le moment cinétique est et restera selon \vec{e}_3 . De plus, étant donné que le moment du poids en O $\vec{C}_O = OG \vec{e}_3 \times M \vec{g}$ est par définition orthogonal à \vec{e}_3 , le moment cinétique a une norme constante ($||\vec{L}_O|| = L_O = \lambda_3 \omega_3$) d'après le théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{C}_O$ ⁵. En explicitant cette équation⁶, on obtient : $\dot{\vec{e}}_3 = \frac{MgR}{L_O} \vec{e}_z \times \vec{e}_3 =$

⁴ $\lambda_1 = \frac{m}{4} (R^2 + \frac{h^2}{3})$ et $\lambda_3 = \frac{1}{2} m R^2$ pour un cylindre de rayon R et de hauteur h.

⁵ Il est important de préciser les hypothèses permettant d'écrire le théorème du moment cinétique : Ici on est dans un Référentiel galiléen avec un point O fixe dans ce repère. S'il n'y a pas de point fixe dans le référentiel galiléen, on peut tout de même écrire le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique : $\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{C}$. En effet, aussi étonnant que cela puisse paraître, le théorème du moment cinétique est valable dans le référentiel barycentrique qui n'est pas galiléen en général !

⁶ On est passé vite sur la conservation de la norme de \vec{L}_O qui s'obtient en multipliant scalairement le théorème du moment cinétique par \vec{L}_O et en se rappelant de l'expression de la dérivée de $\frac{d\vec{L}_O^2}{dt}$.

$$\vec{\Omega}_p \times \vec{e}_3 \text{ avec}$$

$$\vec{\Omega}_p = \frac{MgR}{L_0} \vec{e}_z \quad (0)$$

On peut réécrire les équations précédentes avec les moments cinétiques :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt_{R_g}} = \vec{\Omega}_p \times \vec{L}_O \quad (1)$$

Ces équations expriment que l'axe \vec{e}_3 de la toupie tourne autour de la direction verticale \vec{e}_z avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}_p$. C'est le mouvement de précession. On peut résumer l'effet en une phrase : 'Le moment cinétique essaie de suivre le vecteur couple'.

- **Conclusion** : Un couple orthogonal à l'axe de rotation → Mouvement de précession (« rotation de l'axe de rotation » caractérisé par la vitesse de précession $\vec{\Omega}_p$).
- **Retour sur l'approximation gyroscopique** : On a dit qu'on travaillait avec des moments de forces faibles pour rester dans l'approximation gyroscopique. Mais « faibles » devant quoi ? Divisons l'équation (0) par la vitesse de rotation du rotor. On obtient que le rapport entre la vitesse de précession et la vitesse angulaire est lié au moment des efforts de pesanteurs.

$$\frac{\Omega_p}{\omega} = \frac{MgR}{L_0 \omega}$$

Ainsi, on travaillera avec $MgR \ll L_0 \omega$ ce qui est équivalent à $\frac{\Omega_p}{\omega} \ll 1$.

- **Application** : <https://www.youtube.com/watch?v=Wp2TMG2zSMQ> à 2'37 Si le centre de masse est confondu avec le point fixe, le couple des efforts de pesanteur est nul. Si on rajoute une petite masselotte sur l'axe, le couple n'est plus nul. Dans quel sens va tourner le gyroscope ? Estimation du temps de rotation : $T_p = \frac{2\pi \lambda_3 \omega}{mgr}$ avec $\omega = 137 \text{ tr/min}$ la vitesse de rotation du rotor, λ_3 le moment d'inertie par rapport à l'axe z (Attention on ne prend pas en compte la masselotte car elle ne tourne pas regardez bien !), r la distance entre le point fixe et la masse m . AN : $T_{p_{att}} = 22s$ $T_{p_{exp}} = 26s$. Vérification de l'approximation gyroscopique :

$$\frac{\Omega_p}{\omega} = \frac{2\pi}{T_p} \times \frac{1}{\omega} = 2\%$$

- **Application qualitative** : La précession des équinoxes. De manière qualitative, on comprend que de par son caractère aplati aux pôles et rebondi à l'équateur, la lune (et le soleil) exercent un couple sur la terre (faire schéma).

A- Quel est le lien entre le Spin et la Précession ?

- **Le Spin, c'est juste un moment cinétique⁷** : Le Spin que nous noterons \vec{L}_s est un moment cinétique intrinsèque ! Nous allons lui appliquer le théorème du moment cinétique. Il peut sembler étonnant d'appliquer des lois de la mécanique classique à des objets quantiques. Cela n'a d'intérêt que si l'on raisonne sur des valeurs moyennes des grandeurs quantiques⁸. Le nombre de protons étant gigantesque dans un échantillon analysé, cette démarche est justifiée.
- **Théorème du moment cinétique pour un échantillon soumis à un champ magnétique permanent $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$** : Nous savons qu'un Spin est lié à un moment magnétique ($\vec{\mu} = \gamma \vec{L}_s$) qui, couplé à un champ magnétique, engendre un moment de force $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0$. On applique le théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0 = -\gamma \vec{B}_0 \times \vec{L}_s$, que l'on peut réécrire avec $\vec{\Omega}_L = -\gamma \vec{B}_0$:

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \vec{\Omega}_L \times \vec{L}_s \quad (2)$$

Nous voyons réapparaître l'équation (1), c'est-à-dire celle qui régissait la précession d'un gyroscope soumis à un moment de pesanteur. Par conséquent, nous pouvons visualiser le spin \vec{L}_s , comme un vecteur qui précesse autour du champ magnétique \vec{B}_0 . C'est ce que nous appelons, la **précession de Larmor**⁹. Ω_L est la pulsation de Larmor.

B- Passage d'un Spin up à un Spin down

- Raisonnons pour fixer les idées sur un des 2 états stationnaires propres de l'opérateur \hat{L}_z , l'état $|+\rangle$. Cet état correspond à un niveau d'énergie

$$E_- = -\mu_z B_0 = -\gamma \hbar B_0 = -\frac{ge}{2m_p} \times \frac{1}{2} \times \hbar \times B_0.$$

On désire faire passer cet état stationnaire au niveau E_+ (on verra pourquoi après). Le spin va alors absorber $\Delta E = 2\mu_z B_0 = \hbar \omega_0$ où nous avons introduit une pulsation caractéristique ω_0 .

- Comment passer de l'état + à l'état - ? Pour l'instant, nous avons un spin qui tourne « la tête en haut » (car spin up) autour de \vec{B}_0 . Une première idée pour modifier l'orientation du spin, serait de basculer le champ $\vec{B}_0 \rightarrow -\vec{B}_0$. Cependant, étant donné que les ordres de grandeur de B_0 sont de l'ordre de 1 *Tesla*, faire varier un tel champ rapidement est impossible et produirait de la dissipation joule énorme. La RMN contourne le problème avec l'astuce suivante :
- Si j'impose un petit champ fixe \vec{B}_1 dans le plan xy, le spin \vec{L}_s ne va rien voir car il tourne très vite autour de $-\vec{u}_z$. Si maintenant, j'impose un champ \vec{B}_1 tournant à la même pulsation $\vec{\Omega}_L$, alors le spin va voir ce petit champ et va se mettre à précesser autour. C'est ça la résonance magnétique nucléaire. Cette précession va faire tourner le spin et donc permet le passage de l'état up à l'état down.

⁷ D'ailleurs, on devrait dire moment cinétique de Spin \vec{L}_s , pour ne pas le confondre avec le nombre quantique de spin $s = \frac{1}{2}$ pour le proton.

⁸ Nous avons vu par exemple dans le cours de mécanique quantique que les valeurs moyennes de l'impulsion suivaient les mêmes lois que la mécanique classique en appliquant le théorème d'Ehrenfest.

⁹ **Joseph Larmor (1857-1942), physicien Irlandais**

- Démontrons ce résultat qualitatif par le calcul : Il est nécessaire de se placer dans le référentiel du champ tournant R' pour voir le spin tourner.

Handwritten derivation on grid paper:

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt/R} = -\gamma(\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \wedge \vec{L}_s$$

$\frac{d}{dt/R} \rightarrow$ référentiel du laboratoire

Soit R' , le référentiel tournant à la même pulsation que \vec{B}_1 (ie $\vec{\Omega}_L = -\gamma \vec{B}_0$)

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt/R'} = -\gamma(\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \wedge \vec{L}_s - \vec{\Omega}_L \wedge \vec{L}_s$$

$$= -\gamma(\vec{B}_0 + \vec{B}_1 - \vec{B}_0) \wedge \vec{L}_s$$

$$= -\gamma \vec{B}_1 \wedge \vec{L}_s$$

$$= \vec{\Omega}_L \wedge \vec{L}_s$$

- Ordre de grandeur des ondes émises : Pour un champ magnétique $B_0 = 1T$,

$$\nu = \frac{\Omega_L}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{ge}{2m_p} B_0 = \frac{1}{2\pi} \times 5.6 \times 1.6 \cdot 10^{-19} \times \frac{1}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}} = 43 \text{ MHz}$$

$$\lambda = 7m$$

Il s'agit d'une onde dans le domaine radiofréquence.

C- Un Intérêt de la Résonance Magnétique Nucléaire : la Spectroscopie

- Nous venons de démontrer qu'en introduisant un champ magnétique \vec{B}_1 tournant à la pulsation de Larmor, nous modifions la direction de précession du Spin et forçons les transitions d'un état d'énergie à un autre. On pourrait penser qu'il y a autant d'absorption de photon que d'émissions ce qui serait indétectable.
- Heureusement, les deux niveaux d'énergie ont une différence de population très faible de l'ordre de 10^{-6} car l'échantillon est à l'équilibre avec un thermostat (Calculable à partir du facteur de Boltzmann :

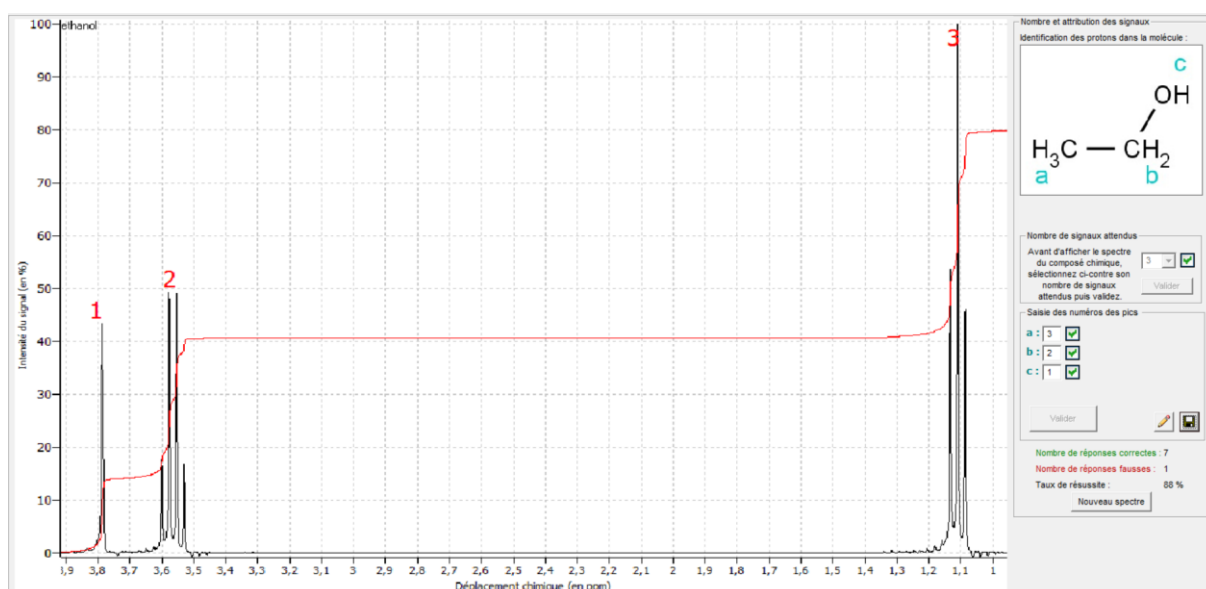
$$\pi^+ - \pi^- = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_b T}\right)} \left(\exp\left(-\frac{\Delta E}{k_b T}\right) - 1 \right) \sim -3,4 \cdot 10^{-6} \text{ (avec } \Delta E = 2\mu_z B_0 =$$

$\hbar \Omega_L = 1.8 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$ et $k_b T = 26 \text{ meV}$, EN FAISANT DES DVT LIMITES SINON LA CALCULATRICE SATURE.) Cette faible différence est compensée par le très grand nombre macroscopique de spin : 10^{23} . Donc, on est capable de mesurer une absorption de l'onde radiofréquence (ie signal B_1).

- Ce que nous venons de décrire ne représente pas d'intérêt pour l'instant car dans notre modèle, tous les spins possèdent la même fréquence de résonance (ie fréquence de Larmor). On peut ajouter un degré supplémentaire de complexité en prenant en compte l'influence des électrons sur le champ magnétique ressenti par le proton. En effet, le champ magnétique B_0 induit des courants dans les nuages électroniques voisins qui (d'après la loi de Lenz) vont produire un champ $\vec{B}_{induit} = -\sigma \vec{B}_0$. Ainsi, $\vec{B}_{ressenti} = \vec{B}_0(1 - \sigma)$. On dit que les électrons « blindent » le proton. Ainsi la

fréquence de résonance est « déplacée », c'est ce que les physiciens ont appelé « déplacement chimique » : $\nu = \frac{\gamma B_0}{2\pi} \times (1 - \sigma_i) \rightarrow \delta = \frac{(\nu - \nu_{ref})}{\nu_{ref}} \times 10^6$.

- Ainsi, chaque proton d'une molécule résonne différemment selon son environnement électronique, il est ainsi possible de différencier de retrouver la structure d'une molécule exemple de l'éthanol. Pourquoi le signal de l'hydrogène du groupe hydroxyle a un déplacement chimique plus fort ? Car O est très électronégatif, le proton est donc déblindé. Il ressent un fort champ B_0 et donc sa fréquence de résonance augmente.



Conclusion

- Dans cette leçon, nous avons montré différent aspect du phénomène de précession d'abord en considérant un objet macroscopique qu'est le gyroscope. **Le point important à retenir est que le moment cinétique du rotor, solidaire de l'axe de rotation va « suivre » le couple imposé.** C'est juste la traduction du théorème du moment cinétique dans l'approximation gyroscopique. Ce phénomène nous a permis de comprendre la précession de la toupie mais aussi la précession des équinoxes
- Ensuite, nous avons pu comprendre que l'interaction entre Spin et champ magnétique était formellement similaire à l'équation de précession d'une toupie. Nous avons compris que le phénomène de résonance magnétique s'obtenait en imposant un champ B_1 tournant à la même vitesse de précession pour provoquer des transitions up-down. La fréquence de résonance étant lié à l'environnement électronique, il est possible de déduire la structure des molécules des spectres RMN.
- **Remarque de G.Fruit :** Insister un peu plus sur le théorème du moment cinétique.