

LP 01 : Gravitation

Nicolas Chastrette

Avril 2020

Pour nous

Rapport du jury

- **2017** : Les applications ne doivent pas nécessairement se limiter à la gravitation terrestre.
- **2016** : Les analogies entre l'électromagnétisme et la gravitation classique présentent des limites qu'il est pertinent de souligner.
- **2015** : «Gravitation», pour laquelle les candidats s'attacheront, dans le cadre de la physique classique, à développer quelques caractéristiques de l'interaction gravitationnelle

biblio

-

0.1 prérequis

- mécanique du point
- électrostatique

Introduction

Bonjour, lors de l'étude d'un système physique nous cherchons à décrire les forces que l'extérieur applique sur le système physique à l'aide de 4 interactions fondamentales : faible, forte (courtes portées), EM (part chargée), grav, c'est sur celle-ci que la leçon porte. La gravitation est la 1ère de ces interactions à avoir été décrite.

De tous temps, l'être humain a cherché à expliquer, à prédire le mouvement des astres qu'il était capable de voir à l'œil nu. Les mesures précises faites par l'astronome

danois Tycho Brahe en 1598 permirent à son élève, Johannes Kepler, de formuler trois lois permettant de décrire le mouvement des astres :

Loi des orbites « Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers. »

Loi des aires « Le mouvement de chaque planète est tel que le segment de droite reliant le Soleil et la planète balaie des aires égales pendant des durées égales. »

Loi des périodes « Pour toutes les planètes, le rapport entre le cube du demi grand axe de la trajectoire et le carré de la période de révolution est le même. Cette constante ne dépend pas de la masse de la planète. »

Newton publia une théorie de la gravitation en 1687, dont une des applications furent de démontrer les lois de Kepler, montrant le succès de sa théorie.

Le but de cette leçon est de décrire dans un premier temps la notion de champ gravitationnel puis de démontrer les lois de Kepler.

1 Force Gravitationnelle

1.1 fondamentaux sur la gravitation

Nous avons vu en meca du pt, que la force exerce par la masse m_1 sur la masse m_2 est donnée par

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{M}_1 \vec{M}_2\|^2} \vec{u}_{12} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

. où \vec{M}_i est la position de la masse m_i et $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{\|\vec{M}_1 \vec{M}_2\|}$ $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ (SI)

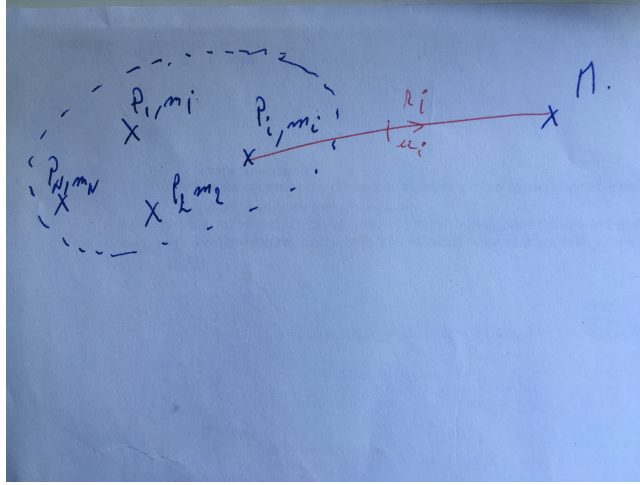
G fut mesuré pour la 1^{ère} fois en 1798 par Cavendish, elle est considérée comme une constante fondamentale de la physique. **au meme titre que h et c (k_B peut être j'ai pas trop compris pk)elles ne sont calculable par une théorie et elles sont indépendante dans l'espace et du temps (en tout cas pour l'instant)**

Conceptuellement on peut distinguer deux types de masse

- la masse grave notée m^* : C'est la masse qui traduit la sensibilité d'un corps à la gravitation.
- la masse inertielle notée m : C'est la masse qui traduit la résistance d'un corps à se mettre en mouvement sous l'action d'une force $\vec{F} = m\vec{a}$

L'expérience démontre une égalité de ces deux masse à une précision relative de 10^{-11} . SI les deux masses étaient différentes ça veut dire que dans le vide un kg de plomb tomberai plus vite qu'un kg de plume dans le vide. Expérience de pensée de l'ascenseur d'Einstein. **Pour la suite on considérera que les deux masses sont égales.**

Or dans le cadre de notre étude nous nous intéressons aux astres qui ne sont pas ponctuels mais sont une distribution de masse. Considérons un ensemble de pts $\{P_i\}$ de masse m_i



La force exercée par P_i sur M : $\vec{F}_i = -G \frac{mm_i}{r_i^2} \vec{u}_i$. La force totale exercée sur M par la distribution de masse est donc $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i -G \frac{mm_i}{r_i^2} \vec{u}_i = m\vec{\mathcal{G}}(\mathcal{M})$. \mathcal{G} est le champ de gravitation exercée en M . Pour passer à la limite continue, on découpe la distribution de masse en volume élémentaire $d\tau$ centré autour du point considéré P , P décrit alors l'ensemble de la distribution de masse. Le volume $d\tau$ a une masse volumique $\rho(P)$, d'où $dm = \rho(P)d\tau$. On peut alors exprimer

$$\vec{\mathcal{G}} = \iiint -G \frac{\rho(P)}{\|PM\|^3} P\vec{M} d\tau$$

\mathcal{G} dépend donc alors de $\rho(P)$ et de la géométrie de l'astre.

1.2 Analogie électrostatique

On trouve un champ gravitationnel qui décroît en $\propto 1/r^2$ comme en électrostatique. On peut alors faire une analogie :

$$F_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} u_{12} \quad \leftrightarrow \quad F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

$$\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}} \quad \leftrightarrow \quad \vec{F} = q\vec{E}$$

$$m \leftrightarrow q$$

$$-G \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\vec{\mathcal{G}} \leftrightarrow \vec{E}$$

En électrostatique on a le thrm de Gauss

$$\oiint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho_e d\tau$$

on peut alors par analogie introduire de théorème de Gauss grav dire

$$\oiint \vec{\mathcal{G}} d\vec{S} = -4\pi G \iiint \rho d\tau$$

. En utilisant le thrm de Gauss grav on peut alors calculer le champ grav crée par une distribution sphérique en M. Il convient maintenant de donner des limites à cette analogie :

- Il convient de remarquer que l'interaction gravitationnelle est exclusivement attractive, ce qui n'est pas le cas de l'interaction électrostatique qui peut être répulsive ou attractive selon le signe des charges en interaction
- valable qu'en statique

1.3 Calcul du champ gravitationnel d'un corps homogène

Par symétrie $\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(\nabla)\vec{1}_V$, en prenant une sphère pour surface de Gauss, il vient d'une part

$\oiint \vec{\mathcal{G}} d\vec{S} = \oiint r^2 \cos\theta d\theta d\phi \mathcal{G} = 4\pi r^2 \mathcal{G}$ de l'autre part si la masse volumique est homogène

$$\iiint \rho d\tau = \rho \iiint d\tau = \rho V = M$$

, d'où $\mathcal{G} = -\frac{G M}{r^2}$ le champ créé à l'extérieur de cet astre est identique au champ créé par une masse M ponctuelle placée au centre de l'astre. C'est très important, car dans toute la suite on pourra donc considérer des masses ponctuelles sans trop de perte de généralité.

On trouve pour la terre ($M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, $r = 6371$ km), $g = G = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Calculons la force que le soleil applique sur la Terre $F_{ST} = -G \frac{M_S M_T}{d_{ST}^2} = 35,6 \cdot 10^{17}$ N. Comparons aussi la force grav et electrostatique pour un atome d'hydrogène :

$$\frac{F_{1 \leftrightarrow 2}^G}{F_{1 \leftrightarrow 2}^E} = \frac{\frac{-G m_p m_e}{a_0^2}}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{m_p m_e}{e^2} 4,4 \cdot 10^{-40} \ll 1$$

c'est pourquoi on néglige la gravité dans l'étude des atomes.

1.4 Mesure de \mathcal{G}

ici je sais pas trop pour l'instant soit pendule de cavendish (biblio?) sinon autre idée trajectoire d'une balle filmé en chute libre, on en mesure donc v à l'aide d'un logiciel de tracking (imageJ). On en déduit donc $a = g$ comparaison.

Étudions maintenant au mouvement d'une masse dans un champ grav

2 Mouvement dans un potentiel newtonnien attractif

2.1 Position du problème

Du aux différences de masse entre les corps célestes on peut considérer en 1e approche un problème à deux corps. (terre/soleil ou terre/satellite) donc système isolé. Considérons deux points M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 . Étudions leurs mouvements dans un référentiel R galiléen.

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \end{aligned} \quad (1)$$

système d'équations couplées car $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ dépend de r_1 et r_2 faut simplifier le système. d'où en prenant la somme des deux équations

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0$$

En introduisant $\vec{r}_g = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ la position du barycentre du système, on trouve que $\vec{v}_g = \vec{C}st$ dans le référentiel R . Donc le référentiel \mathcal{R}^* centré sur le point G barycentre du système est aussi galiléen. D'où dans ce référentiel $\vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1^*$ (distance entre G et M_i). On cherche maintenant à démontrer la trajectoire des particules dans \mathcal{R}^* . Pour ce faire introduisons la masse réduite

2.2 Masse Réduite

* [PCSI tout en un 2002 p688etc](#) Dans \mathcal{R}^* (Galiléen) le PFD donne

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1^*}{dt^2} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (2)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2^*}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (3)$$

en multipliant m_1^2 et m_2^3 , on obtient

$$m_1 m_2 \frac{d^2 (\vec{r}_1^* - \vec{r}_2^*)}{dt^2} = m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (m_1 + m_2) \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

avec $\vec{r} = M_1 \vec{M}_2$ d'où en posant $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ on obtient

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \quad (4)$$

Tout se passe comme si la particule fictive M de masse μ subissait la même force fictive que M_2 dans \mathcal{R}^* . D'où

$$\vec{r}_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \vec{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Si on connaît le mouvement M On peut alors trouver le mvt des deux autres astres.

Dans le cas d'un système où $m_2 \ll m_1$ alors les points M_1 et G sont confondus et les points $M_2 = M$. Dans le système solaire $m_{\text{Terre}} = 10^{24} \text{ kg} \ll m_{\text{soleil}} = 10^{30} \text{ kg}$ (p726), on est donc dans ce cas. Cherchons donc le mouvement d'un corps de masse μ dans un potentiel newtonien

2.3 Mouvement à force central

PCSI tout en un 2002 p710etc Considérons le système planète de masse M_p qui est dans le champ gravitationnel du soleil de masse M_s , la planète est à une distance r du soleil. La force qui s'exerce sur la planète est $\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r$. Le théorème du moment cinétique appliqué au point O nous donne

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = r \vec{u}_r \wedge -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r = \vec{0}$$

D'où $\vec{L}_O = \vec{C}st = r \vec{u}_r \wedge M_p \vec{v}$ le mouvement est plan. (\vec{L}_O est fixe et orthogonal au vecteur position et vitesse).

$$\vec{L}_O = mr \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = cst$$

, d'où $r^2 \dot{\theta} = cst$. On appelle cette quantité la constante des Aires, voyons pourquoi.
 $dA = \text{aire balayée par une variation } d\theta$

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v} dt| = \frac{1}{2} C$$

, d'où $dA/dt = C/2 = cst$ l'aire balayée est constante c'est la loi des Aires.

Nous avons démontré une des lois de Kepler intéressons nous maintenant à la trajectoire des Astres.

2.4 Trajectoires des Astres

Le PFD appliqué à la planète donne en notant $K = GMm$

$$M_p \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$$

D'où

$$\vec{L}_O \wedge M_p \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (-M_p \vec{v} \wedge \vec{L}_O) = -\frac{K}{r^2} mr^2 \theta \vec{e}_\theta = -Km \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

d'où

$$A = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{K} - \vec{e}_r = \vec{C}st$$

vecteur de Runge-Lenz. $\vec{A} = \left(\frac{mC^2}{Kr} - 1 \right) \vec{e}_r - \frac{r}{K} \vec{e}_\theta$

$\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{mC^2}{K} - r = \|\vec{A}\| \|\vec{r}\| \cos \theta$. En posant $e = \|\vec{A}\|$, on obtient

$$er \cos \theta = \frac{mC^2}{K} - r$$

, d'où

$$r = \frac{mC^2/K}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (5)$$

conique d'excentricité e de paramètre p . dont un des foyers est le soleil. Afin de finir l'étude des trajectoires des planètes, qui dépendent du paramètre e faisons maintenant une étude énergétique.

2.5 étude énergétique

PCSI tout en un 2002 p714etc

L'énergie méca du système $E_M = E_c + E_p$ $E_c = \frac{1}{2} M_p \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r}$ et $E_p = -\frac{K}{r}$ d'où

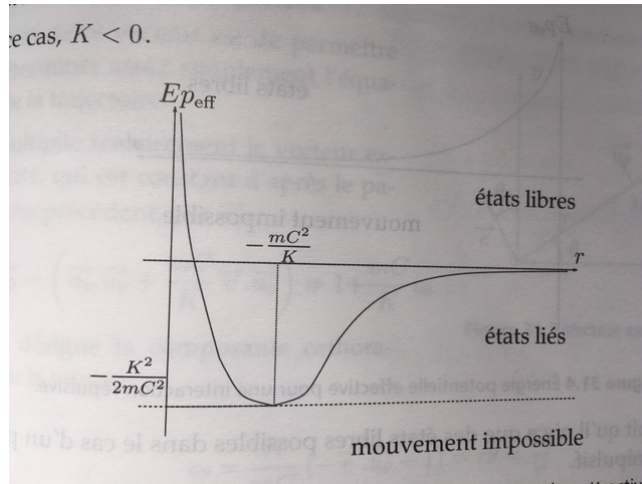
$$E_m = \frac{1}{2} M_p \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r} - \frac{K}{r} = \frac{1}{2} M_p \dot{r}^2 + E_{p,eff}$$

. Force conservative donc E_m conservée

$$e^2 = \left(\frac{mC^2}{Kr} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\dot{r} mC}{K} \right)^2 = \frac{2mC^2}{K^2} \left[\frac{1}{2} M_p \cdot \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} - \frac{K}{r} \right] + 1 = \frac{2mC^2}{K^2} E_M + 1$$

d'où

$$E_m = \frac{K^2}{2mC^2} (e^2 - 1) \quad (6)$$



tire de Sanz et al

On a deux expressions de $E_{p,eff}$ et E_M en fonction de e . On peut donc étudier les variations de $E_{p,eff}(r)$ suivant les valeurs de E_M donc de e .

- $e > 1$, $E_m > 0$ état libre où de diffusion la conique de l'équation 5 est une hyperbole. c
- $e = 1$, $E_m = 0$ état libre et trajectoire parabolique

- $e < 1$, $E_m < 0$ état lié et traj elliptique. Oscille entre r_{min} et r_{max} ex planètes du système solaire, comètes périodique (tye Hayley)

Dans le système solaire les trajectoires sont donc des ellipse dont un des foyer est le soleil. C'est la 1^{ère} loi de Kepler.

2.6 3^{ème} loi de Kepler

p730

La loi des Aires nous donne $\frac{A}{T} = C/2$, où $A = \pi ab$ est l'aire de l'ellipse où a et b sont les demis axes de l'ellipse. et T la période de révolution de l'astres. Or $b = \sqrt{ap} \sqrt{\frac{a\mu C^2 p}{K}}$. Donc dans la limite $M_p \ll M_S$, en remettant tous dans la loi des aies

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi C}{GM_S} = cst \quad (7)$$

C'est la 3eme loi de Kepler. Cette loi sert aux astronomes à mesurer la masse des objet autours duquel les corps tournent.

3 application

p732

Nous avons étudié pour l'instant les trajectoire des planètes autour d'un astres beaucoup plus lourd. étudions maintenant certaines propriétés de satellites. Comme dans le cas des astres, la masse de la terre (M_T) est très grande devant la masse des satellites (m), ils sont aussi soumis à un potentiel newtonien. regardons quelques propriétés dans le cas où que le référentiel terrestre est galiléen.

3.1 Vitesse circulaire

On cherche à mettre en orbite circulaire proche (de sorte que $r \simeq r_0$) un satellite. Projétons le PFD sur \vec{e}_r et dans le cas d'un mvt circulaire $\dot{\theta} = V_1/R$ ($v^2/R^2 = \frac{GM_T}{r_0^2}$),

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$$

On trouve alors $v_1 = 7,9 \text{ km/s}$

Considérons la comète 67p, comète où la Philae s'est posée, à une masse $m = 1,0 \cdot 10^{13} \text{ kg}$ à un rayon d'environ 2 km. On trouve comme vitesse circulaire 57,8 cm/s, ce qui veut dire que si l'atterrisseur se pose à une vitesse supérieur à 57,8 cm/s, en rebondissant il retourne "en orbite" de la comète.

3.2 Vitesse de libération

Cette fois ci on cherche la vitesse minimal qu'il faut donner au satellite pour qu'il prenne une trajectoire diffusive, c'est à dire qu'il faut que $E_m = 0 = 1/2 m v_2^2 - \frac{GM_T m}{R_0}$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}} = \sqrt{2} v_1$$

$v_1 = 11,3 \text{ km/s}$

Considérons le trou noir de M87(+photo) de masse $M_{TN} = 6,5 \cdot 10^9 M_S = 13 \cdot 10^{39} \text{ kg}$, dont la vitesse de libération est égale à c , on peut calculer $r_0 = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ m} = 31 \text{ orbites de pluton}$ Ce rayon est appelée rayon de Schwarzschild.

Conclusion

Dans cette leçon nous avons introduit la notion de potentiel gravitationnel, nous avons montré que l'on peut assimiler les astres à des systèmes ponctuels, puis démontrer les 3 lois de Kepler à l'aide des outils donnés par la mécanique.

Des la fin du 19eme siècle des observations ne sont pas expliquées à l'aide de la théorie newtonnienne de la gravitation, ar exemple le problème de l'avance du périhélie de Mercure. La trajectoire d'une planète autour du Soleil n'est pas invariante dans le temps. Le périhélie (point où la planète est la plus proche du Soleil) se déplace lentement au fil des siècles. Le désaccord entre observation et la théorie newtonienne est d'autant plus prononcé que la planète se trouve proche du Soleil. Ce phénomène a plusieurs causes, notamment l'attraction de la planète test par les autres corps du système solaire. Urbain Le Verrier a établi la théorie de l'orbite de Mercure en tenant compte des perturbations dues à d'autres planètes, et a montré l'existence d'un désaccord résiduel entre l'observation et son modèle plus complet. La prise en compte d'effets relativistes permet d'obtenir un accord avec les relevés. Une description plus exhaustive de la gravitation requiert l'utilisation de la théorie de la relativité générale publiée par Albert Einstein en 1915. Ce dernier a notamment prédit l'existence d'ondes gravitationnelles en 1916, soit un siècle avant leur observation en laboratoire, en 2015 par les chercheurs du LIGO aux États-Unis.