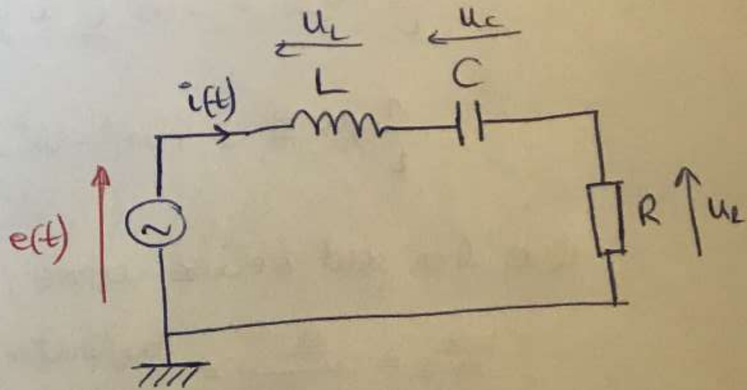
LP.24. Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

I. Réponse linéaire d'un système d'ordre 2.

I.1. Oscillateur amorti en régime forcé / Mise en équations.

1 degré de liberté

Soit circuit RLC



• Loi des mailles : $e(t) = u_L + u_C + u_R$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

donc $$e(t) = L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + i \cdot R$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{de(t)}{dt} = L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt}$$

$$q = C \cdot u$$

$$u_C = \frac{q}{C}$$

$$\boxed{\frac{1}{L}\frac{de}{dt} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} i + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\frac{1}{\tau}} \frac{di}{dt}}$$

où $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

• Système linéaire : $e_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = e(t)$

la réponse à $e_m \cos(\omega t + \varphi_u) + j e_m \sin(\omega t + \varphi_u) = e^{j(\omega t + \varphi_u)}$

sera $S_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_s) + j\, S_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$. Cela justifie le passage en complexes!

Solution physique → partie réelle.

Donc : $$\boxed{\frac{1}{L}\frac{de}{dt} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i}$$

↓

$$\frac{1}{L} j\omega \underline{e} = -\omega^2 \underline{i} + \frac{j\omega}{\tau}\underline{i} + \omega_0^2 \underline{i}.$$

$$\frac{1}{L} j\omega \cdot \underline{e} = \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}\right)\underline{i}$$

Que l'on peut réécrire comme :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{e}}{\underline{i}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}{j\frac{\omega}{L}} = -\frac{L}{\omega}\cdot\left[\omega_0^2 j - \omega^2 j - \frac{\omega}{\tau}\right].$$

$$= \frac{L}{\underset{L/R}{\tau}} + j\left[\omega L - \frac{L\omega_0^2}{\omega}\right] \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\boxed{\underline{Z_e} = R + j\left[L\omega - \frac{1}{C\omega}\right].}$$ impédance du système.

$\tau = L/R.$

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$Q = \omega_0 \tau = \omega_0 \frac{L}{R}$. facteur de qualité

$$Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$ diminue avec R.

ou :

$$\frac{\underline{e}}{\underline{i}} = \frac{1 + j\left[\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right]}{\frac{1}{R}} = \frac{1 + j\left[Q\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{Q}{\omega_0 LC\omega}\right]}{1/R = \frac{\tau}{L}} \quad \frac{1}{\omega_0^2}$$

$R = \dfrac{\omega_0 L}{Q}$

$$\boxed{\frac{\underline{e}}{\underline{i}} = \frac{1 + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]}{\tau/L}} = R\cdot\left[1 + jQ\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right]$$

$= \underline{Z_e}$

On pose $\underline{Z_e} = |\underline{Z_e}| \cdot \exp(j\varphi_m)$. avec $\varphi_m = \varphi_u - \varphi_i$.

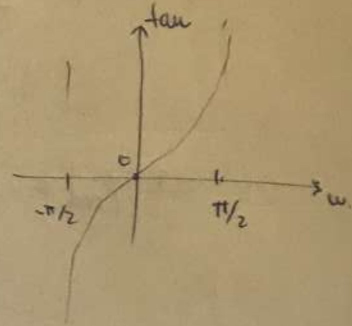
car $|\underline{e}| \cdot \exp(j\varphi_u) = |\underline{Z_e}| \exp(j\varphi_m) \cdot |\underline{i}| \exp(j\varphi_i)$.

donc $\varphi_m = \varphi_u - \varphi_i$

d'où : $$\boxed{|\underline{Z_e}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

et $$\boxed{\varphi_m = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\cancel{R}Q\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]}{\cancel{R}}\right)}$$

De plus : $\frac{\underline{e}}{\underline{i}} = \frac{e_m}{i_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \underline{Z_e}$



amplitude du courant : $i_m = \frac{e_m}{|\underline{Z_e}|}$

$$\boxed{i_m = \frac{e_m}{R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

Quelque soit Q :
- Z_e passe par un minimum
- i_m passe par un maximum.
- φ_m passe par 0.

lorsque $\boxed{\omega = \omega_0}$

À la résonance, réponse et excitation sont en phase.

($\varphi_u = \varphi_i$ car $\varphi_m = 0$)

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$

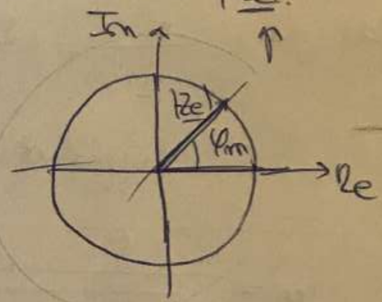
Aspect énergétique

Puissance fournie par le générateur :

$$P = e_m \cdot i_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{e_m^2}{R\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \cdot \underbrace{\langle \cos(\overbrace{\omega t+\varphi_u}^{a}) \cdot \cos(\overbrace{\omega t+\varphi_i}^{b}) \rangle}_{\frac{1}{2}\langle \cos(\underbrace{\varphi_u-\varphi_i}_{=\varphi_m}) + \cos(2\omega t+\varphi_i+\varphi_u)\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{e_m^2 \cos\varphi_m}{2R\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad \text{avec} \quad \cos\varphi_m = \frac{Re(Z_e)}{|Z_e|}$$



$$\cos\varphi_m = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P \rangle = \frac{e_m^2}{2R\left(1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)}}$$

$\Rightarrow$ Puissance dissipée par la résistance :

$$\boxed{\langle P_d \rangle = R\langle i(t)^2 \rangle = R \cdot \langle \left(i_m \exp(j\varphi_i)\right)^2 \rangle = \frac{R \cdot i_m^2}{2} = \frac{e_m^2}{2R} \cdot \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

On obtient $\boxed{\langle P \rangle = \langle P_d \rangle}$ évidemment la puissance est dissipée par la résistance

$\langle P \rangle$ est maximale lorsque $\omega = \omega_0$ Et s'annule lorsque $\omega = 0, +\infty$.

La résonance est obtenue quand on excite un système sur sa fréq. propre. Dans ce cas, excitation et réponse sont en phase, permettant un échange d'énergie maximal.

II. - Résonance dans un système à plusieurs degrés de liberté.

RLC sans dissipation → osc. harmonique $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}$ et $\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$ $q = r$.

$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} k^2 (r - r_e)$ et $\dot r = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$.

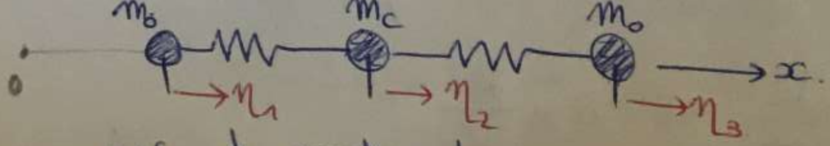
$H(q_i, p_i, t) = \sum_k^N \dot q_k p_k - \mathcal{L}(q_i, \dot q_i, t)$

d'où : $m\dot r = p$. donc $m\ddot r = \dot p = -k^2 (r - r_e)$.

$$m\ddot r = -k^2 (r - r_e)$$

$\boxed{\ddot r + \frac{k}{m}(r - r_e) = 0}$ 1 degré de liberté

III. 1. Vibration molécule triatomique



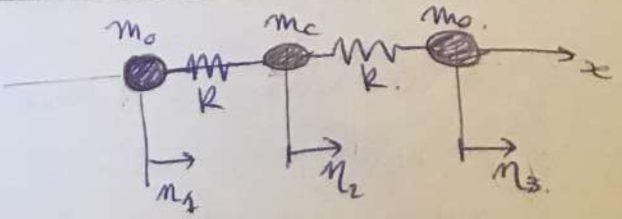
molécule de CO_2
deux ressorts identiques

ref. du centre de masse. $\sum_i \vec p_i = 0$

m_O.

?

sur m_0



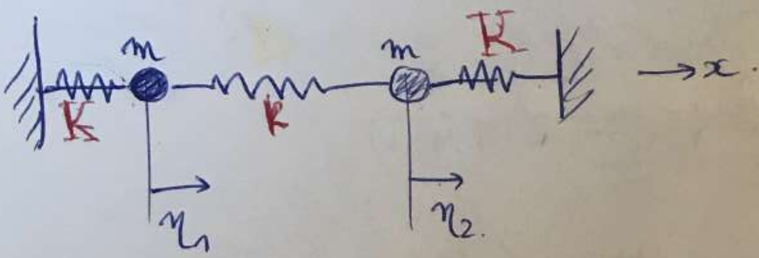
$$m_0 \ddot{\eta}_1 = -k\eta_1 + k\eta_2$$

$$\cancel{m_c \ddot{\eta}_2 = -k\eta_2 + k\eta_3 + k\eta_1}$$

$$m_c \ddot{\eta}_2 = +k(\eta_3 - \eta_2) - k(\eta_2 - \eta_1) = k\eta_3 - 2k\eta_2 + k\eta_1.$$

$$m_0 \ddot{\eta}_3 = -k(\eta_3 - \eta_2)$$

1°/ Deux degrés de liberté



$$\begin{cases} (1) & m \ddot{\eta}_1 = k(\eta_2 - \eta_1) - K\eta_1 \\ (2) & m \ddot{\eta}_2 = -k(\eta_2 - \eta_1) - K\eta_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -K-k & k \\ k & -K-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

on pose : $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ et $\varepsilon = \frac{k}{K}$

$$\boxed{\ddot{\vec{\eta}} + \omega_0^2 [M] \vec{\eta} = \vec{0}} \quad \text{où} \quad [M] = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

symétrique réelle donc diagonalisable.

Diagonalisons $[M]$ on cherche ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

$$[M]\cdot\vec{y} = \lambda\,\vec{y} \Rightarrow \det\left([M]-\lambda\mathbb{1}\right)=0$$

$$(1+\varepsilon-\lambda)^2-\varepsilon^2=0$$

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2\lambda_1 & 0 \\ 0 & \omega_0^2\lambda_2 \end{bmatrix} \quad \omega_1^2,\ \omega_2^2$$

$$1+\varepsilon-\lambda = \pm\varepsilon \nearrow \lambda_1 = 1, \quad \searrow \lambda_2 = 1+2\varepsilon$$

valeurs propres

$$\ddot{\vec{\eta}} + \omega_0^2[M]\vec{\eta} = \vec{0}$$

d'où deux fréquences propres : donc pour λ_1 : $\omega_1^2 = \omega_0^2$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2\cdot(1+2\varepsilon)$$

On cherche $\vec{y}_1$ tel que $[M]\vec{y}_1 = \lambda_1\vec{y}_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \vec{e}_1 \\ \to \vec{e}_2 \end{matrix}$$

$$(1+\varepsilon)y_1 - \varepsilon y_2 = y_1 \Rightarrow \cancel{\varepsilon} y_1 = \cancel{\varepsilon} y_2$$

$$-\varepsilon y_1 + (1+\varepsilon)y_2 = y_2 \Rightarrow (y_1 = y_2)$$

Donc $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha$. où $\alpha = $ cte

on cherche $\vec{y}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1+2\varepsilon\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(1+\varepsilon)y_1 - \varepsilon y_2 = (1+2\varepsilon)y_1$$

$$(-\varepsilon)y_1 + (1+\varepsilon)y_2 = (1+2\varepsilon)y_2$$

$$\to -\varepsilon y_2 = \varepsilon y_1 \to y_1 = -y_2.$$

Donc $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\beta$ où $\beta = $ cte.

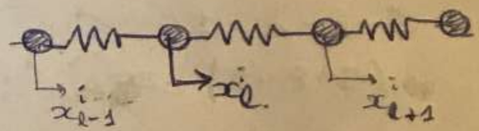
on normalise : $\boxed{\vec{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\vec{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Interprétation physique :

Mathieu.

2°/ Passage à un modèle continu. Il faut $\lambda \gg a$.

N très grand.



Soit le i-ème mode propre : tous les x_ℓ oscillent à ω_i, fréquence propre du mode i.

chaque x_ℓ est caractérisé par : $\begin{cases} \text{phase} : \varphi_\ell^i \\ \text{amplitude} : x_\ell^i \end{cases}$

i : mode i de vibration (N degrés → N modes)
ℓ : position atome

- Invariance par translation.

$\forall \ell \quad |x_\ell^i| = x_0^i$ vibration à la même amplitude

$$\varphi_{\ell+1}^i - \varphi_\ell^i = \varphi_\ell^i - \varphi_{\ell-1}^{i-1} ?? = \underbrace{\varphi_0^i}_{} = k^i a$$

j'aurais fait ça !

constante, que l'on écrit en fonction de a, le coeff de proportionalité étant k^i une constante pour le mode i.

ℓ fois la diff

d'où $\varphi_\ell^i = \underbrace{\varphi_0^i}_{\text{initial}} + \ell k^i a$

modèle linéaire → passage en complexe. et on cherche des solutions du type $\underline{x}_\ell^i(t) = \underline{x}_0^i \exp\left(j\left[\ell k^i a - \omega^i t\right]\right)$

où $\underline{x}_0^i = |x_0^i| \exp(j\varphi_0^i)$

Il reste à trouver la relation entre ω^i et k^i : relation de dispersion.

$\Rightarrow$ PFD $\Rightarrow$ $\boxed{m\ddot{x}_\ell^i = +k(x_{\ell+1}^i - x_\ell^i) - k(x_\ell^i - x_{\ell-1})}$

$$-\omega^{i2} \cdot \cancel{m x_0^i \exp(j(\ell k^i a - \omega t))} = k\left(\cancel{x_0^i} \exp\left[j[(\ell+1)k^i a - \cancel{\omega t}]\right] - \cancel{2x_0^i} \exp(j(\ell k^i a - \omega t))\right)$$
$$+ k\left(\cancel{x_0^i} \exp[j(\ell-1)k^i a - \cancel{\omega t}]\right)$$

$$-\omega^{i2} = \frac{k}{m}\left(\underbrace{\exp(jk^i a) - 2 + \exp(-jk^i a)}_{2\cdot\cos(k^i \cdot a)}\right)$$

$$-\omega^{i2} = \frac{2k}{m}\left(\cos(k^i a) - 1\right)$$

$$\boxed{\omega^{i2} = \frac{2k}{m}\left(1 - \cos(k^i a)\right)} = \boxed{\frac{4k}{m}\left(\sin^2\left(\frac{k^i a}{2}\right)\right)}$$

ω_0^2

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

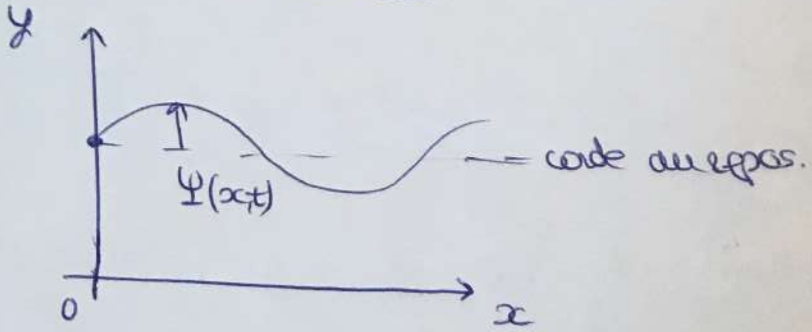
$\Leftrightarrow 1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$

$\boxed{\text{Donc } \omega^{i2} = 4\omega_0^2\left(\sin^2\left(\frac{k^i a}{2}\right)\right)}$ relation de dispersion, on se limite à la 1ère zone de Brillouin

(le cristal sous-échantillonné).

Corde de Melde

Éq. de d'Alembert.



$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \text{avec } C_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

corde fixée à ses extrémités : $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$.

ondes stationnaires : $\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin(kx)\sin(\omega t)$.

$\Psi(0,t) = 0$

$\Psi(L,t) = 0 \rightarrow \Psi(L,t) = \Psi_0 \sin(kL) \cdot \sin(\omega t) = 0 \quad \forall t$.

donc $\sin(kL) = 0$.

donc $\boxed{k_n L = n\pi}$

où $n \in \mathbb{N}^*$

$k_n = \frac{n\pi}{L}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\lambda = cT = c \cdot \frac{2\pi}{\omega}$

$k_n = \frac{\omega_n}{C_0} \rightarrow \boxed{\omega_n = k_n \cdot C_0}$

Résonance atomique

Relation dispersion de Schrödinger $\qquad k_n = \frac{n\pi}{L}.$

$$\underbrace{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(r,t)}_{\text{si } V=0}$$ (pour une particule libre)

Relation de dispersion : $E = \hbar\omega = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ et $\vec{p} = \hbar k$.

on trouve : $\boxed{\omega = \frac{\vec{p}^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}}$

la dispersion est quadratique en $\vec{k}$ et non plus linéaire comme pour une particule sans masse comme le photon ($\omega = ck$). ou dans le cas de la corde - - - ~~sans~~

→ donc $v_\varphi = f(\omega)$. toujours dispersion même dans le vide !