LP 22 - Rétroaction et oscillations

Objectifs

Pré-Requis

- Amplificateur opérationnel
- Électrocinétique (théorèmes généraux)
- Transformation de Laplace
- Filtres (passe-bande) et analyse harmonique des circuits

Introduction:

Dans cette leçon, nous allons introduire la notion de système bouclé. Un système est un dispositif physique qui fait correspondre une grandeur de sortie à une grandeur d'entrée. Cette définition extrêmement générale et abstraite s'invite dans tous les domaines de la physique, de la chimie ou encore de la biologie :

- l'amplificateur opérationnel, en électronique, fait correspondre une tension de sortie à une tension d'entrée
- une lentille associe une répartition de la lumière dans un plan objet à une autre répartition dans le plan image
- un organisme vivant utilise l'énergie qu'il absorbe en s'alimentant pour assurer le fonctionnement de ses fonctions vitales : déplacement, respiration, synthèse d'hormones, régulation thermique.

$\Rightarrow$ énergie chimique en entrée, tout un tas d'autres formes d'énergie en sortie

Il ne suffit pas de connaître exactement (et c'est rarement possible d'ailleurs) le fonctionnement interne du système pour caractériser totalement sa réponse à une entrée donnée, car cette réponse dépend aussi du milieu extérieur (contribution qui fluctue sans cesse, et qui peut être déterminante) :

- le corps humain doit maintenir 37°C à l'intérieur : qu'il pleuve, qu'il vente ou qu'on soit dans le désert
- la vitesse d'une voiture dépend de l'alimentation du moteur <u>et</u> de l'état de la route, de son profil, du vent etc...

L'environnement est rarement contrôlable, encore moins avec précision et de surcroît complexe à modéliser : on ne peut pas tout prévoir, et même si on pouvait, il faudrait réussir à tout modéliser, y compris les fluctuations.

⇒ Le système doit pouvoir s'adapter à son environnement.

Ex: automobiliste à 80 km/h sur la route : il regarde toujours son compteur et agit sur l'accélérateur ou le frein selon que la voiture va à moins ou plus de 80 km/h.

On réalise un asservissement en vitesse : on compare en permanence la grandeur mesurée à la grandeur souhaitée et on ajuste le comportement du système en conséquence : cela nécessite une consigne, un capteur et un comparateur. Il y a rétroaction puisqu'on utilise la réponse du système pour influer sur son évolution ultérieure.

Un système est dit BOUCLÉ s'il comporte au moins une BOUCLE DE RÉTROACTION.

On se limitera aux systèmes bouclés linéaires : si $s_1(t)$ est la réponse à $e_1(t)$
$s_2(t)$ " " " à $e_2(t)$,

alors la réponse à $e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$ où λ_1 et λ_2 constantes sera :

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t).$$

Tout système ne vérifiant pas cette condition est non-linéaire.

Cette leçon a trois objectifs, chacun faisant l'objet d'une partie :

- on développera la notion d'asservissement en introduisant les éléments de modélisation des systèmes bouclés et on étudiera un cas concret d'asservissement en vitesse de moteur à courant continu

- on se posera la question de la stabilité d'un système bouclé au cours du temps (celle-ci n'est pas toujours recherchée, notamment lorsqu'on souhaite fabriquer des oscillateurs)

- on évoquera plusieurs cas où la rétroaction n'est pas un effet voulu, mais plutôt un effet à supprimer ou un mécanisme naturel à étudier.

I - Système bouclé. Asservissement d'une grandeur physique

1/ Principe

Un système asservi est un dispositif permettant d'asservir une grandeur physique à une consigne. Il doit être automatique.

Rq: si la consigne dépend du temps : asservissement
si consigne constante : régulation

Exemple: régulateur de vitesse pour un moteur à courant continu

Projeter schéma + Formules (diapos)

- un moteur électrique M est alimenté par une alim. de puissance (hacheur), tension u
- une génératrice tachymétrique (moteur à courant continu fonctionnant à l'envers) mesure la vitesse angulaire Ω de rotation de l'arbre moteur et produit une tension proportionnelle à celle-ci :

$$\boxed{r = \underbrace{\alpha}_{>0} . \Omega}$$ ⇒ capteur

V ← r, Ω → rad/s

- AO1 est monté en soustracteur, de gain unité : $\boxed{\mathcal{E} = e - r}$
où e est la consigne (tension)

- AO2 est monté en amplificateur non inverseur, de gain $1 + \frac{R_3}{R_2}$
d'où $\boxed{u = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)\mathcal{E}}$ la tension en sortie de AO2

- l'amplificateur de puissance fournit u_M au moteur : $\boxed{u_M = \beta u}$ $(\beta > 0)$

Rq: préciser que les 2 AO sont supposés fonctionner en régime linéaire

Fonctionnement:

. si Ω diminue (ex: la voiture grimpe une pente), r diminue, donc $\mathcal{E} = e - r$ augmente, donc u augmente aussi, donc u_M, donc le moteur tourne plus vite, donc Ω augmente.

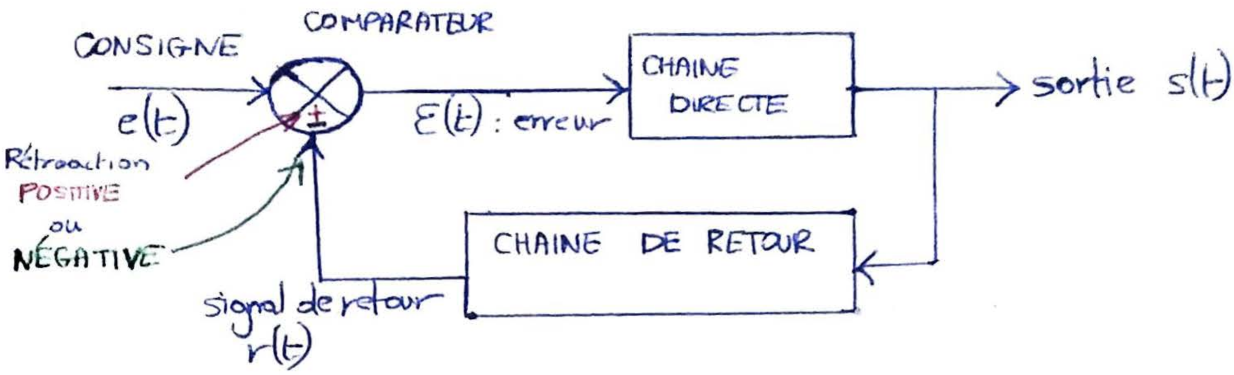
- raisonnement similaire si Ω augmente, la chaîne provoque une baisse de Ω.

⇒ L'asservissement fonctionne automatiquement : u_M s'adapte au besoin et tout ne dépend que de e, choisi par un opérateur extérieur au système.

- Remarque : si $\mathcal{E} = e + r$, la baisse initiale est renforcée : système instable

2°/ Modélisation

a/ Représentation synoptique (ou schéma-blocs) d'un système bouclé



Commentaires : chaine directe : commande de la grandeur à asservir
$\Rightarrow$ amplificateur (hacheur, AO_2) + actionneur (moteur)

chaine de retour : surveillance de la grandeur à asservir
$\Rightarrow$ capteur (géné. tachymétrique)

comparateur : additionneur (rétro. positive)
ou soustracteur (rétronégative)
$\Rightarrow$ compare la consigne au signal de retour $\quad \underline{\varepsilon(t) = e(t) \pm r(t)}$
$\Rightarrow$ linéaire

Montrer : schéma synoptique du régulateur de vitesse

b/ Fonction de transfert :
le système étant linéaire, il est commode de travailler en formalisme de Laplace.

Pour rappel : $TL(f(t)) = \int_0^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{-pt} \equiv F(p)$ où $p = p_R + j p_I \in \mathbb{C}$
$p_R, p_I \in \mathbb{R}$

ex : $TL\ \delta(t) = 1$

$TL\ \frac{df}{dt} = pF(p) - f(t=0_+)$

$TL\ \frac{d^2f}{dt^2} = p^2F(p) - pf(t=0_+) - \frac{df}{dt}(t=0_+)$

$= 0$ si conditions de Heaviside

$TL\ e^{p_\alpha t} = \frac{1}{p - p_\alpha}$

La TL tient compte des conditions initiales et permet l'étude des régimes transitoires et permanents, ce que ne fait pas l'analyse harmonique

Ainsi, on remplace $e(t) \rightarrow E(p)$ $\quad s(t) \rightarrow S(p)$ et $r(t) \rightarrow R(p)$

Un système linéaire, en formalisme de Laplace, est caractérisé par sa fonction de transfert :

$E(p) \rightarrow \boxed{T(p)} \rightarrow S(p)$ $\qquad \boxed{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}} \qquad \Rightarrow S(p) = T(p)E(p)$

b/ Fonction de transfert

La linéarité des systèmes implique que l'équation reliant $s(t)$ à $e(t)$ soit une équation différentielle linéaire, du type :

$$a_k \frac{d^k s}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_\ell \frac{d^\ell e}{dt^\ell} + \dots + b_1 \frac{d e}{dt} + b_0 e$$

a_k, b_ℓ étant des constantes

Il est commode de travailler avec les transformées de Laplace

$$TL(e) \equiv E(p) = \int_0^\infty dt\, e(t) e^{-pt} \qquad \text{où } p \in \mathbb{C}$$

$$TL(s) \equiv S(p)$$

$$TL\left(\frac{d^k f}{dt^k}\right) = p^k F(p)$$

Ainsi, on obtient $\left(a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k\right) S(p) = \left(b_0 + b_1 p + \dots + b_\ell p^\ell\right) E(p)$

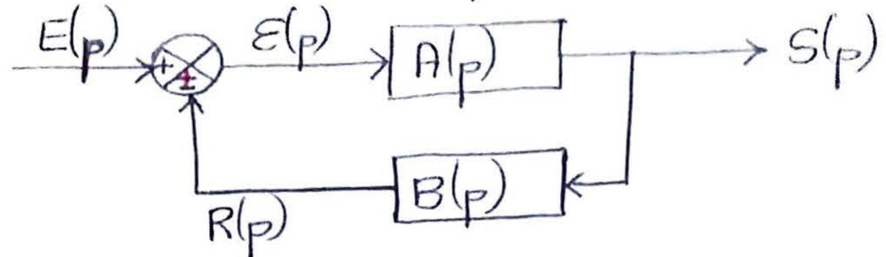
d'où, la fonction de transfert :

$$\boxed{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_\ell p^\ell}{a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k} \cancel{= \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_k)}}$$

~~où p_i désigne un pôle~~

$T(p)$ caractérise un système linéaire et a la forme d'une fraction de 2 polynômes

c/ Fonction de transfert d'un système bouclé



où $S(p) = A(p)\,\varepsilon(p)$

et $R(p) = B(p)\,S(p)$

A et B sont les fonctions de transfert de la chaine directe et de la chaine de retour.

$$\boxed{\frac{R(p)}{\varepsilon(p)} \equiv H_{BO}(p) = A(p)B(p)}$$ est la fonction de transfert en boucle ouverte

On définit $\boxed{H(p) \equiv \frac{S(p)}{E(p)}}$ la fonction de transfert en boucle fermée :

or $\varepsilon(p) = E(p) \pm R(p) = E(p) \pm H_{BO}(p)\,\varepsilon(p)$

d'où $E(p) = \varepsilon(p)\left(1 \mp H_{BO}(p)\right) = \frac{S(p)}{A(p)}\left(1 \mp H_{BO}(p)\right)$

et donc : $H(p) = \frac{A(p)}{1 - H_{BO}(p)}$ si rétroaction positive
⇒ instable, donc non utilisable pour un asservissement

et $H(p) = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)}$ si rétroaction négative
⇒ utilisation pour les asservissements

d/ Application au régulateur de vitesse : rétroaction négative

- Fonctions de transfert des blocs de la chaine directe.
  - $\underline{AO_2}$: $T_{AO_2}(p) = 1 + \frac{R_3}{R_2}$ (AOP non inverseur)
    $= \frac{U(p)}{\varepsilon(p)}$
  - Amplificateur de puissance : $T_\beta(p) = \frac{U_M(p)}{U(p)} = \beta$
  - Moteur à courant continu : on montre que, en l'absence de couple résistant et en négligeant l'inductance du rotor :

$$T_M(p) = \frac{T_0}{1 + \tau p} = \frac{\Omega(p)}{U_M(p)}$$

où τ : constante de temps électromécanique, $\tau = \frac{RJ}{K^2 + Rf} > 0$

R : résistance interne du rotor (spires bobinées) $\quad T_0 = \frac{K}{K^2 + Rf} > 0$
J : moment d'inertie du rotor
K : constante électromagnétique, caractéristique du moteur
$f\Omega$: couple de frottements fluides exercé sur le rotor

On a : $A(p) = \dfrac{\Omega(p)}{\mathcal{E}(p)} = \dfrac{\Omega(p)}{U_M(p)} \times \dfrac{U_M(p)}{U(p)} \times \dfrac{U(p)}{\mathcal{E}(p)} = T_M(p)\,T_\beta(p)\,T_{AO_2}(p)$

$$= \frac{T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \tau p}$$

• Chaine de retour :

$$B(p) = \frac{R(p)}{S(p)} = \frac{\Omega(p)\,\alpha}{\Omega(p)} = \alpha$$

D'où : $\boxed{H_{BO}(p) = \dfrac{\alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \tau p}}$ en boucle ouverte

• Fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \tau p + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}$$

On veut une forme du type $H(p) = \dfrac{C_1}{1 + C_2 p}$:

$$H(p) = \frac{T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)} \times \frac{1}{1 + \dfrac{\tau}{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}\, p}$$

$$= \frac{H_0}{1 + \tau_{BF}\, p}$$ avec $\tau_{BF} = \dfrac{\tau}{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}$

et $H_0 = \dfrac{T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}$

e/ Remarques importantes

* Chaine directe à grand gain : $|H_{BO}(p)| = |A(p)\,B(p)| \gg 1$: $H(p) \to \dfrac{1}{B(p)}$

⇒ la fonction de transfert ne dépend que de la chaine de retour si l'amplification de la chaine directe est assez grande ! ainsi, on peut s'affranchir des imperfections de la chaine directe, qu'on n'a plus besoin de modéliser précisément.

Sans aller jusqu'à $|H_{BO}(p)| \gg 1$, on montre que

$$\Delta H = \frac{1}{(1 + A(p)B(p))^2}\,\Delta A + \frac{A(p)^2}{(1 + A(p)B(p))^2}\,\Delta B$$ et donc $\dfrac{\Delta H}{H} = \dfrac{1}{1+AB}\dfrac{\Delta A}{A} + \dfrac{AB}{1+AB}\dfrac{\Delta B}{B}$

⇒ Toute variation de $A(p)$ est atténuée d'un facteur $1 + A(p)B(p)$.
Ce sont les variations de $B(p)$ qui influent surtout $H(p)$.

* Si $A(p)B(p) = -1$ pour un système bouclé à rétroaction négative ou si $|A(p)||B(p)|$ dans le cas d'une rétroaction positive, $|H(p)| \to \infty$.

En pratique, cela implique l'existence d'une réponse de sortie finie **en l'absence** d'entrée
⇒ des fluctuations au du bruit peuvent déclencher une réponse non-négligeable.
⇒ Cela pose la question de la stabilité des systèmes bouclés.

II - Stabilité des systèmes bouclés. Oscillateurs

Un système bouclé évoluant en régime libre : $e = 0$ pour $t > 0$ est stable lorsque la sortie s tend spontanément vers 0.

Une rétroaction positive tend à amplifier l'écart par rapport à la consigne : ces systèmes ne sont pas stables et ne sont pas utilisés pour des asservissements.

La présence d'une rétroaction négative ne suffit pas pour autant à assurer la stabilité.

1°/ Stabilité d'un système bouclé

Pour un système à rétroaction négative : $H(p) = \dfrac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)}$

~~On appelle pôles les valeurs de p pour lesquelles 1 + H_BO(p) = 0.~~

La linéarité implique que $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ où N et P sont deux polynômes.

On appelle pôles les valeurs de p pour lesquelles $D(p) = 0$.

Ainsi $H(p) = \dfrac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_k)}$

On a donc $S(p) = \dfrac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_k)} E(p)$

$$= \left(\frac{N_1}{p-p_1} + \frac{N_2}{p-p_2} + \dots + \frac{N_k}{p-p_k}\right) E(p)$$ en l'absence de pôles multiples.

Si on envoie une brève impulsion en $t = 0$: $e(t) = E_0 \delta(t)$ ie $e(t) = 0$ pour $t \geq 0^+$,

$E(p) = E_0$ et

$$S(p) = \left(\frac{N_1}{p-p_1} + \frac{N_2}{p-p_2} + \dots + \frac{N_k}{p-p_k}\right) E_0$$

D'où le signal $s(t)$ (Transfo. de Laplace inverse)

$$s(t) = E_0 \left(D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t} + \dots + D_k e^{p_k t} \right) \quad \text{avec } p_k \in \mathbb{C}$$

On pose $p_k = a_k + j b_k$, a_k et $b_k \in \mathbb{R}$.

On a $e^{p_k t} = e^{a_k t} \underbrace{e^{j b_k t}}_{\text{amplitude constante, terme oscillant}}$

a/ Critère algébrique

Si $a_k = \mathrm{Re}(p_k) > 0$: $e^{p_k t}$ diverge

< 0 : $e^{p_k t}$ tend vers 0 avec t

Un système est stable si tous ses pôles ont une partie réelle négative ou nulle.
Un seul pôle réel positif et le système devient instable.

Rq : par des systèmes d'ordre supérieur ou égal à 3 ($D(p)$ polynôme de degré 3 au plus) ce critère est nécessaire mais pas suffisant.

En réalité, le système finit par atteindre une saturation, liée à des effets non linéaires

Rq : Puisque $H(p) = \dfrac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)}$, on peut aussi étudier les zéros de $1 + H_{BO}(p)$.

Il faut résoudre

$$1 + H_{BO}(p) = 0, \quad \text{soit} \quad H_{BO}(p) = -1$$

⇒ Ce raisonnement est à la base d'une méthode géométrique, le critère de Nyquist. Utile si on ne connait que $H_{BO}(p)$ avec précision.

Dans le cas du régulateur de vitesse pour le moteur à courant continu : (à refaire avec $H(p)$)

$$1 + H_{BO}(p) = 1 + \frac{\alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \tau p} = 0$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{\tau} < 0 \quad \text{car} \quad T_0 = \frac{K}{K^2 + Rf} > 0$$

$\alpha > 0$

$\beta > 0$, R_3 et $R_2 > 0$

Cet asservissement est stable.

préparer questions sur le critère de Nyquist

Un système stable à un instant donné peut devenir instable sous l'effet de perturbations

... partie de ... marginale

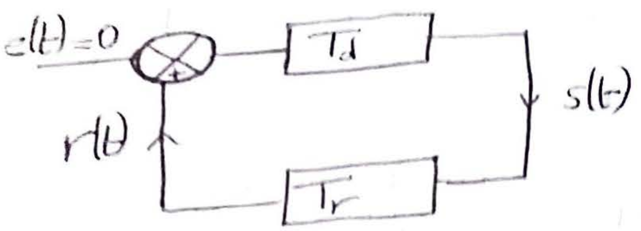
2/ Système bouclé rendu volontairement instable : oscillateur

Les oscillateurs sont des systèmes capables de produire des signaux temporels alternatifs. Leur rôle est essentiel : ils peuvent être utilisés pour concevoir des horloges (mesure de durées, cadencer le fonctionnement de systèmes), produire des signaux classiques en électronique (GBF analogique) ou des porteuses en télécommunications.

Il existe plusieurs façons de construire un oscillateur : on s'intéresse ici aux oscillateurs auto-entretenus. Ceux-ci peuvent délivrer un signal périodique en l'absence de signal périodique extérieur. Ils sont alimentés par une source d'énergie continue. Les oscillateurs dont nous allons parler sont dits quasi-sinusoïdaux :

- le signal produit comporte un mode fondamental, principal, et des harmoniques secondaires à faible effet sur le signal quasi-sinusoïdal en sortie.
- ces oscillateurs utilisent l'instabilité générée par une rétroaction positive
- la fréquence du signal de sortie est choisie grâce à un filtre passe-bande passif
- la présence d'éléments dissipatifs (résistances) dans le circuit implique le recours à un amplificateur pour maintenir le système en oscillation. L'énergie nécessaire pour compenser les pertes provient de l'alimentation continue de l'oscillateur.

a/ Schéma synoptique d'un oscillateur quasi-sinusoïdal (✱✱) après ...



$$S(p) = T_d(p)\,R(p)$$

et $R(p) = T_r(p)\,S(p)$

d'où : $\boxed{T_d(p)\,T_r(p) = 1}$

En réalité, l'entrée n'est jamais nulle : bruit électronique.

Ainsi, au démarrage, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\boxed{H(p) = \frac{T_d(p)}{1 - T_d(p)\,T_r(p)}}$$

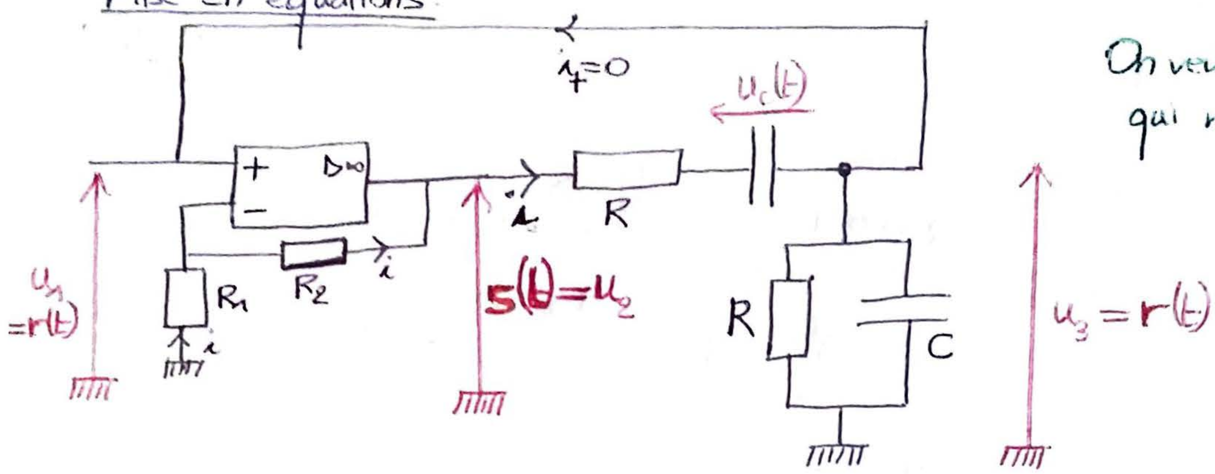
Le système fonctionne en oscillateur si les pôles de $H(p)$, solutions de $0 = 1 - T_d(p)\,T_r(p)$ ont une partie réelle positive.

Dans notre modèle linéaire cela implique que la sortie diverge. En réalité l'amplificateur a des limites (liées aux effets non linéaires) et la sortie sature.

a/ Exemple : l'oscillateur à pont de Wien

Projeter schéma, identifier les blocs et montage
- chaine directe : amplificateur (AO non-inverseur)
- chaine de retour : filtre passe-bande (filtre de Wien)

Mise en équations :



On veut l'équation différentielle qui régit $r(t)$

On suppose un AO idéal en régime linéaire : $V_+ = V_- = u_1$

Par rapport à l'AO : $\boxed{r(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2} s(t) = \frac{s(t)}{G}}$ (1) $\quad G = \frac{R_1+R_2}{R_1}$

Par rapport au filtre de Wien : (RC//) : $i(t) = \frac{r(t)}{R} + C\frac{dr}{dt}$ loi des noeuds

RC(RC//) série : $s(t) = Ri(t) + u_c(t) + r(t)$.

d'où $s(t) = 2r(t) + RC\frac{dr}{dt} + u_c(t)$

d'où $\frac{ds}{dt} = 2\frac{dr}{dt} + RC\frac{d^2r}{dt^2} + \underbrace{\frac{du_c}{dt}}_{=\frac{i(t)}{C}} = RC\frac{d^2r}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt} + \frac{r(t)}{RC} + \frac{dr}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{ds}{dt} = RC\frac{d^2r}{dt^2} + 3\frac{dr}{dt} + \frac{r(t)}{RC}} \quad (2)$$

On combine (1) et (2) :

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{3-G}{RC}\frac{dr}{dt} + \frac{r}{(RC)^2} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = 0}$$

$\tau = \frac{RC}{3-G} \qquad \omega_0 = \frac{1}{RC}$

Valeur de G détermine le comportement du système :

$G < 3$: oscillations amorties $\Rightarrow r(t) \to 0$, on ne récupère que du bruit en sortie

$G > 3$: instabilité $\Rightarrow r(t) \to +\infty$: en réalité, le signal finit par saturer sous l'effet de non-linéarités. Cette divergence est un artefact résultant de l'hypothèse de linéarité de l'AO.

$G = 3$: le système se comporte comme un oscillateur harmonique de fréquence $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC}$ entièrement déterminée par le pont de Wien.

Rq : $G = 3 \Rightarrow \dfrac{R_1 + R_2}{R_1} = 3 \Rightarrow \boxed{R_2 = 2R_1}$

$\Rightarrow$ Manip : montrer les 3 régimes tout en expliquant

$$\begin{cases} R = 10\ k\Omega \\ C = 10\ nF \\ R_1 = 10\ k\Omega \quad R_2 \text{ variable} \end{cases}$$

En pratique : $G = 3$ impossible : si on veut des oscillations les plus "pures" (c'est à dire harmoniques secondaires) possibles, il faut $G \gtrsim 3$.

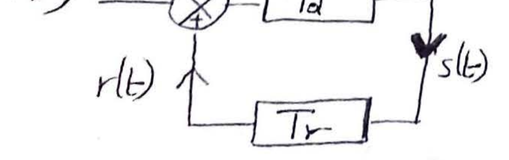
Si $G \gg 3$: on perd le caractère oscillatoire du système car l'AO sature trop vite ou n'arrive plus à suivre.

On évalue la qualité du signal produit par l'oscillateur en mesurant son taux de distorsion harmonique :

$$d = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} (A_k)^2}}{k=1}$$ où A_k est l'amplitude de l'harmonique k sur le spectre de Fourier

$\Rightarrow$ Réaliser la mesure

Généralisation : Fonction de transfert d'un oscillateur quasi sinusoïdal



$S(p) = T_d(p) R(p)$ et $R(p) = T_r(p) S(p)$

d'où : $\boxed{T_d(p) T_r(p) = 1}$

réalité l'entrée n'est jamais nulle : bruit électronique.

fonction de transfert d'un système bouclé à rétroaction positive s'écrit

$$H(p) = \frac{T_d(p)}{1 - T_d(p) T_r(p)}$$ où la condition $T_d(p) T_r(p) = 1 \Rightarrow H(p) \to \infty$

ce qui explique la génération de la quasi-sinusoïde à partir du bruit

La condition pour obtenir une oscillation à fréquence f_0 et d'amplitude stable ($p = j\omega_0$) à partir du bruit s'écrit donc

$$\boxed{T_d(j\omega)\, T_r(j\omega) = 1}$$

Condition de Barkhausen
⇒ condition sur la fonction de transfert en boucle ouverte.

$$\Rightarrow \left| T_d(j\omega)\, T_r(j\omega) \right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(T_d(j\omega)\, T_r(j\omega) \right) = 0$$

Rq: $T_d(j\omega_0)$ et $T_r(j\omega_0)$ se confondent avec les réponses harmoniques de la chaine directe et de la chaine de retour.

Ainsi, pour l'oscillateur à pont de Wien:

$$T_d(j\omega) = \frac{\underline{u_2}}{\underline{u_1}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = G$$

$$T_r(j\omega) = \frac{\underline{u_3}}{\underline{u_2}} = \frac{Z_{RC//}}{Z_{RC} + Z_{RC//}} = \frac{\dfrac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega} + \dfrac{R}{1 + jRC\omega}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{R + \frac{1}{jC\omega}}{R}(1 + jRC\omega)}$$

$$= \frac{1}{2 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega} + 1} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}$$

$$= \frac{1}{3 + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Les conditions de Barkausen: • $\arg\left[T_r(j\omega)\, T_d(j\omega)\right] = \arg \dfrac{1}{3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \arg\left(3 - j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$

$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}}{3}\right) = 0$$

⇒ donc $\omega = \omega_0$

donc $|T_d(\omega_0)\, T_r(\omega_0)| = 1$