

# Introduction

Bonjour, la leçon présentée aujourd'hui sur les aspects ondulatoires de la matière et sur la notion de fonction d'onde se place dans la continuité d'une leçon portant sur l'aspect corpusculaire de la lumière et l'étude du rayonnement du corps noir et de l'effet photoélectrique.

Nous aurons besoin en prérequis de notions de physique ondulatoire, de diffraction par un réseau périodique, du principe de moindre action.

On se place à un niveau de troisième année de Licence.

Depuis la précédente leçon nous avons la relation suivante pour un photon :

$$\text{Diapo } E = h\nu$$

mechanique                              ondulatoire

Nous avons à gauche une quantité mécanique, l'énergie, et à droite une quantité caractéristique de la physique ondulatoire, la fréquence.

On a alors pour la lumière une dualité onde-corpuscule.

Reste néanmoins l'explication du spectre de raie de l'atome d'hydrogène

Diapo spectre

Niels Bohr s'inspira des travaux de Planck et d'Einstein et établit un modèle planétaire où il fit deux hypothèses

Diapo modèle planétaire  
les hypothèses

Cela lui permit de retrouver les résultats expérimentaux et sera à la base du raisonnement de Louis De Broglie et de l'Aspect ondulatoire de la matière.

# 1 Aspect ondulatoire de la matière

Lorsque Bohr établit son modèle de l'atome basé sur la quantification par des nombres entiers, Louis De Broglie, physicien français, vit un lien entre la physique ondulatoire, où une quantification apparaît de part les phénomènes d'interférences, et la physique mécanique. C'est en se basant sur cette analogie qu'il établit sa relation.

## 1.1 Relation de De Broglie (1924) :

Comme dit en introduction, lorsque l'on observe une figure d'interférence lumineuse sur un écran on associe la lumière à une onde, mais aussi à une particule lorsque la lumière arrache un électron. L'idée de de Broglie consistait alors à considérer que les toutes les particules physique possèdent un caractère à la fois ondulatoire et corpusculaire.

*argument avec les mains*

Pour comprendre cela regardons tout d'abord le **principe de Fermat**. La trajectoire de l'onde effective suivie par les rayons lumineux lorsqu'une onde relie deux points A et B de l'espace correspond à un extremum de chemin optique :

$$\delta \int_A^B n ds = 0$$

si l'on considère la relation de dispersion :

$$k = \frac{\omega}{c} n$$

pour le milieu de propagation étudié, alors :

$$\delta \left( \int_A^B \frac{c}{\omega} k ds \right) = 0$$

Puisque le terme  $c/\omega$  ne dépend pas de la trajectoire entre A et B et donc :

$$\boxed{\delta \int_A^B k ds = 0}$$

De même le principe de moindre action appliqué au mouvement d'une particule massique qui suit une trajectoire reliant deux points A et B, pour un système conservatif, se résume au **principe de Maupertuis** :

$$\boxed{\delta \int_A^B p ds = 0}$$

où  $p$  est la quantité de mouvement de la particule sur la trajectoire.

On observe que  $k$  et  $p$  vont jouer un rôle similaire dans les deux équations que l'on peut illustrer

(schéma diapo).

Si on veut une théorie cohérente à la fois ondulatoire et corpusculaire il faut satisfaire le principe de moindre action pour les ondes et corpuscules. On peut alors supposer que  $p$  et  $k$  sont proportionnels et donc comme  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  on a que la longueur d'onde doit être inversement

proportionnelle à la quantité de mouvement. On pose cette constante égale à la constante de Planck :

$$\lambda = \frac{h}{p} \text{ où } h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (5)$$

On retrouve l'hypothèse de De Broglie :

### Diapo

A toute particule de matière, de quantité de mouvement  $p$ , doit être associée une longueur d'onde donnée par :

$$\begin{aligned}\lambda_{DB} &= \frac{h}{\gamma m v} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{h}{mv} \quad \text{en non relativiste}\end{aligned}$$

Ce qui lui vaudra le prix Nobel de physique en 1929.

Remarque : Dans sa thèse, De Broglie établit sa relation en utilisant la relation du quantum et la théorie de la relativité restreinte.

Remarque : Tout comme les aspects ondulatoire de la lumière apparaissent pour des longueurs d'onde non négligeables devant la taille caractéristique du système étudié les conséquences d'une modélisation ondulatoire d'une particule massive devrait apparaître dans les mêmes conditions.

|| (schema).

Regardons quelques ordre de grandeur

|| (schema tableau).  $E_C \sim qq_eV \Rightarrow \lambda \sim 99 \text{ Å}$  ← compensation des actions mecanique classique R suffit  
bille lourde :  $m \sim 60 \text{ g}$ ,  $v \sim 35 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow \lambda = 3 \cdot 10^{-34} \text{ m} \ll \text{taille caractéristique terrain, fil et fibres}$

La très faible valeur de la constante de Planck explique que ces effets ne puissent pas être observé à notre échelle.

Cette relation permis à De Broglie d'expliquer immédiatement la règle de quantification de Bohr. L'idée est la suivante, si on a des orbites stables, il faut que l'onde associée à l'électron sur cette orbite soit stationnaire, c'est à dire qu'il y ait interférence constructive.

|| (schema).

donc que la longueur de la trajectoire contient exactement un nombre entier de fois la longueur d'onde.

$$\begin{aligned}2\pi R = n\lambda_{DB} &\Leftrightarrow 2\pi R = n \frac{h}{mv} \\ &\Leftrightarrow mvR = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \\ &\Leftrightarrow L = n\hbar\end{aligned}$$

comme  
cavili  
Fabry R<sub>tot</sub><sup>(6)</sup>

On retrouve la condition de quantification du moment cinétique postulé par Bohr.

A ce stade, l'association d'une onde à une particule a permis d'expliquer, en partie, le modèle de Bohr. Par ailleurs, elle rétablissait une symétrie entre matière et rayonnement et la dualité onde-corpuscule. Néanmoins, on peut se demander quelle en est la réalité physique. Nous avons

vu que pour la longueur d'onde associée à un électron d'énergie 1 eV était de 12.2 Å, soit les dimensions d'un atomique ou d'une maille cristalline, ou la longueur d'onde des rayons X. D'où l'idée d'effectuer avec des électrons des expériences de diffraction sur des cristaux, analogues à celles de Max von Laue en 1914 avec des rayons X.

Il faut alors trouver une source d'électrons et une méthode de détection. On peut utiliser un tube à vide dans lequel un filament chauffé émet des électrons. Ces derniers sont accélérés par un champ électrique et frappent un cristal. Les électrons qui sortent du cristal sont détectés par un détecteur.

On peut alors mesurer la longueur d'onde des électrons en utilisant la relation de Bragg :  $\lambda = \frac{2d}{n}$ , où  $d$  est la distance entre les plans de réflexion et  $n$  est le nombre de réflexions. Si l'on connaît la distance  $d$  et le nombre de réflexions  $n$ , on peut déterminer la longueur d'onde  $\lambda$ .

Il faut également trouver une manière de produire des électrons avec un cristal de graphite. On peut utiliser un tube à vide dans lequel un cristal de graphite est placé devant un filtre chauffé. Les électrons émis par le filtre sont accélérés par un champ électrique et frappent le cristal de graphite. Les électrons qui sortent du cristal sont détectés par un détecteur.

On peut alors mesurer la longueur d'onde des électrons en utilisant la relation de Bragg :  $\lambda = \frac{2d}{n}$ , où  $d$  est la distance entre les plans de réflexion et  $n$  est le nombre de réflexions. Si l'on connaît la distance  $d$  et le nombre de réflexions  $n$ , on peut déterminer la longueur d'onde  $\lambda$ .

Il faut également trouver une manière de produire des électrons avec un cristal de graphite. On peut utiliser un tube à vide dans lequel un cristal de graphite est placé devant un filtre chauffé. Les électrons émis par le filtre sont accélérés par un champ électrique et frappent le cristal de graphite. Les électrons qui sortent du cristal sont détectés par un détecteur.

On peut alors mesurer la longueur d'onde des électrons en utilisant la relation de Bragg :  $\lambda = \frac{2d}{n}$ , où  $d$  est la distance entre les plans de réflexion et  $n$  est le nombre de réflexions. Si l'on connaît la distance  $d$  et le nombre de réflexions  $n$ , on peut déterminer la longueur d'onde  $\lambda$ .

Il faut également trouver une manière de produire des électrons avec un cristal de graphite. On peut utiliser un tube à vide dans lequel un cristal de graphite est placé devant un filtre chauffé. Les électrons émis par le filtre sont accélérés par un champ électrique et frappent le cristal de graphite. Les électrons qui sortent du cristal sont détectés par un détecteur.

On peut alors mesurer la longueur d'onde des électrons en utilisant la relation de Bragg :  $\lambda = \frac{2d}{n}$ , où  $d$  est la distance entre les plans de réflexion et  $n$  est le nombre de réflexions. Si l'on connaît la distance  $d$  et le nombre de réflexions  $n$ , on peut déterminer la longueur d'onde  $\lambda$ .

Il faut également trouver une manière de produire des électrons avec un cristal de graphite. On peut utiliser un tube à vide dans lequel un cristal de graphite est placé devant un filtre chauffé. Les électrons émis par le filtre sont accélérés par un champ électrique et frappent le cristal de graphite. Les électrons qui sortent du cristal sont détectés par un détecteur.

## 1.2 Expérience de Davisson et Germer (1927)

|| (schema).

Davisson et Germer veulent tester l'hypothèse de De Broglie en faisant diffracter des électrons comme pour des rayons X.

On accélère des électrons et les envoie sur un monocristal de nickel, chaque atomes jouent le rôle de fente. Si l'hypothèse du caractère ondulatoire de l'électron est juste on s'attend à avoir comme pour une onde à observer des directions de diffraction particulière.

L'observation montre des pics d'intensité à des endroits précis, comme pour une onde lumineuse. Cette expérience a démontré le bien fondé de l'hypothèse de De Broglie.

Nous pouvons reproduire cette expérience à l'aide d'un canon à électron et une cible en graphite.

*pk e<sup>-</sup>? car m petit => phénomène fort*

### 1.3 Diffraction d'électron par le graphite :

Manip : On a donc sur la table un canon à electron, une ampoule où se trouve une paroi fluorescente au centre un cristal de graphite.

Lorsque l'on alimente le dispositif on observe deux cercles, qui correspond à une figure de diffraction.

Dingo

Tout d'abord on peut vérifier que ce sont bien des électrons en approchant un aimant, il y a déviation.

Ensuite pour comprendre ce que l'on observe, rappelons ce qu'il se passe lorsque on envoie une onde monochromatique sur un réseau périodique.

(schéma).

Si les atomes jouent le rôle de fente d'Young, il y a interférence constructive lorsque la différence de marche entre les deux ondes est égale à un multiple entier de la longueur d'onde. Ici la différence de marche est de  $2ds\sin(\theta)$  et donc on obtient la relation de Bragg :

$$2ds\sin\theta = n\lambda \quad \text{Dingo} \quad (7)$$

Regardons maintenant l'agencement des atomes dans un cristal de graphite (schéma). Avec l'expérience on peut observer la diffraction par deux séries de plans correspondant aux distances  $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  et  $d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

Les deux cercles que l'on observe correspondent aux premiers ordres de diffraction pour  $d_1$  et  $d_2$ . Pour relier ces données à la théorie ondulatoire il nous faut regarder comment sont accélérés les électrons.

(schéma).

On chauffe un filament ce qui va arracher des électrons qui sont ensuite accélérés par une différence de potentiel  $U$ .

On a donc l'énergie cinétique d'un électron qui est égale à l'énergie qu'il acquiert sous la différence de potentiel :

$$\frac{P^2}{2m} = eU \Leftrightarrow p = \sqrt{2meU} \quad \begin{matrix} \text{c'est à dire que les} \\ \text{électrons sont relativistes?} \end{matrix} \quad (8)$$

On a donc la longueur d'onde de De Broglie :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \quad (9)$$

De plus d'après la figure

(schéma) :

$$\tan(2\theta) = \sin(2\theta) = 2\sin(\theta) = \frac{D_i}{2L} \quad \text{où } i = 1, 2 \quad \text{pour des petits angles}$$

$\leftarrow$  d'après figure.

(10)

et donc en utilisant la relation de Bragg pour  $n = 1$  on peut réécrire :

$$D_i = \frac{\lambda_{DB} 2L}{d_i} = \frac{h 2L}{d_i \sqrt{2meU}} \quad (11)$$

Qualitativement on observe bien que si on augmente la tension U on a le diamètre des cercles qui diminues.

On se place maintenant à une tension fixe, et on réarange notre équation.

$$d_1 = \frac{\lambda_{PB} 2L}{D_1} \quad d_2 = \frac{\lambda_{PB} 2L}{D_2} \quad (12)$$

On peut donc remonter grâce à la mesure de  $D_1$  et  $D_2$  au paramètre  $d_1$  et  $d_2$  avec  $U = 45V$  on a  $\lambda_{PB} = 1,23 \cdot 10^{-11} m$

On mesure  $D_1 = \dots$  et  $D_2 = \dots$

On obtient alors  $d_1 = \dots$  et  $d_2 = \dots$  ce qui correspond aux valeurs attendues.

En plus d'avoir une méthode permettant de sonder la matière nous venons de montrer les bien fondés de la théorie de De Broglie. Nous venons de voir que les électrons ont des vitesses déterminées par le dispositif et que l'on peut compter leurs impacts avec un détecteur : c'est le caractère corpusculaire. En revanche les électrons diffractent au même titre qu'une onde lumineuse : c'est le caractère ondulatoire.

Il est alors impossible de disposer de deux modèles qui s'exclut l'un l'autre pour représenter la même entité physique, ici l'électron. Il nous faut une des modélisations rigoureuses de la mécanique quantique formulées dans les années 1920 par Erwin Schrödinger et faisant appelle à la notion de fonction d'onde.

## 2 Notion de fonction d'onde

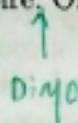
Pour comprendre le formalisme que nous allons développer nous allons nous intéresser à l'expérience de fentes d'Young que nous avons déjà vu en optique mais cette fois-ci encore avec des électrons.

### 2.1 Expérience des fentes d'Young

Re rappelle optique  $\vec{x}_i \rightarrow P_x$  ?

Nous avons vu qu'il était possible de créer l'équivalent d'un mitraillette à électrons et on place deux fentes sur la trajectoire. On s'attend, comme en optique géométrique, à observer la figure suivante.

|| (schéma).



En réalité ce que l'on observe est la figure suivante :

|| (schéma).

On a donc une figure qui correspond à une figure d'interférence, non pas lumineuse mais avec des particules massives. On pourrait à ce stade penser que cette figure provient par exemple des interactions entre électron. Ce que l'on peut faire alors c'est envoyer un à un les électrons, en baissant la fréquence de tir du canon, sur les fentes, de telle sorte qu'un électron est le temps d'arriver sur l'écran avant que le suivant soit émis

|| (animation). <https://www.youtube.com/watch?v=zq58TjWk1HI>

On observe que chaque électron provoque une tache lumineuse sur l'écran, ce qui montre son caractère corpusculaire, mais ces points d'impact sont aléatoires. Peu à peu on voit se construire une alternance de bande clair et sombre.

Les électrons un par un viennent former une figure d'interférence. Et cette fois ci, on ne peut pas soutenir que cela provient d'interaction entre particule.

Pour y voir plus clair on peut essayer de voir quels électrons sont passés par la première fente et lesquels par la deuxième.

Il suffit de boucher alternativement une fente puis l'autre.

Si on ouvre qu'une seule des deux fentes, voilà la figure que l'on obtient : (schéma). ||

La conclusion que l'on tire est que la figure avec les deux fentes ouvertes n'est pas égale à celle que l'on obtient en additionnant les deux figures avec une fente bouchée. ||

On se retrouve dans le même cas où l'on considère l'optique géométrique et l'optique ondulatoire.

En terme de probabilité, si on note,  $P_i(x)$  — la probabilité de détecter un électron en  $x$  passé par la fente  $i$  on a pas la probabilité totale de détecter l'électron :

$$|| P(x) \neq P_1(x) + P_2(x)$$

la théorie mécanique  
(13)

Comme cela serait le cas pour des probabilités utilisées en physique par manque d'information. LE caractère probabiliste est intrinsèque.

Le comportement de l'électron va dépendre du fait que les fentes soient bouchées ou non, comme si il savait l'état des fentes. On pourrait même dire que les électrons, lorsque les deux fentes sont ouvertes, passent tous par les deux fentes, comme une onde (éclairément) et on attribue plus de trajectoire à l'électron. Et l'électron va se localiser sur l'écran préférentiellement où l'onde est forte. Il nous faut un nouveau outils utilisant le caractère probabiliste.

|| Schéma

intuitif : les amplitudes de chaque trajet associé à chaque chemin.

## 2.2 Fonction d'onde

Toujours par analogie avec l'optique, nous allons utiliser la notion de fonction d'onde pour décrire une particule : La description complète de l'état dynamique d'une particule de masse  $m$  dans l'espace à l'instant  $t$  se fait au moyen d'une fonction d'onde complexe  $\psi(\vec{r}, t)$ .

Comment interpréter cette fonction au vu de nos expériences ? Par analogie avec l'optique et à l'éclairage observé en optique, Born fait l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde suivante : interprétation de Born

La probabilité de trouver la particule à l'instant  $t$  dans un volume  $d^3\vec{r}$  entourant  $\vec{r}$  est :

$$dP(\vec{r}) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r} \quad (14)$$

On dit aussi que la fonction d'onde est appelée amplitude de probabilité de présence et son module au carré est appelé densité de probabilité de présence.

En physique, la particule ne peut pas se balader n'importe où et a un domaine d'accessibilité noté par exemple  $D$ . Alors on va pouvoir avoir une condition de normalisation (puisque la particule existe forcément quelque part) :

$$\int_D |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r} = 1 \quad (15)$$

Cette interprétation probabiliste de Born permet de réconcilier la vision corpusculaire et ondulatoire. Il nous manque plus qu'une équation permettant de prévoir l'évolution de notre système.

## 2.3 Equation de Schrodinger :

En se basant sur l'analogie entre optique et mécanique et le principe de moindre action, Schrodinger déduit l'équation suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) \quad (16)$$

où  $V(\vec{r}, t)$  est l'énergie potentielle.

Nous pouvons faire plusieurs remarques sur cette équation :

Elle est déterministe : Comme pour le principe fondamental de la dynamique elle fait intervenir une dérivée premier en temps. La connaissance de la fonction d'onde à un instant t permet, connaissant le potentiel de connaître la fonction d'onde à un instant t' supérieur à t.

Elle est réversible : bien que si on considère par exemple  $V = 0$ , l'équation peut s'apparenter à une équation de diffusion. Mais attention on a une fonction complexe et si on renverse le temps on doit aussi prendre le conjugué de la fonction d'onde ce qui ne change pas le module. On obtient alors le même objet.

Et finalement, elle est linéaire. et donc toute combinaison linéaire de fonction d'onde est aussi une solution de l'équation.

Ainsi, comme en optique on peut choisir une base et par analogie on peut prendre des ondes planes progressives harmoniques.

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{-i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (17)$$

ce qui nous permet d'obtenir la relation de dispersion suivante :

$$i\hbar(-i\omega) = -\frac{\hbar^2}{2m}(ik^2) + V \longrightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \quad (18)$$

De plus on sait que :

$$E = \hbar\omega \quad \text{et} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (19)$$

ce qui nous permet de réécrire :

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad (20)$$

Ce qui nous permet d'interpréter le premier terme du membre de droite comme l'énergie cinétique du système.

Remarque : cela permet aussi, en faisant le raisonnement inverse de retrouver l'équation de Schrödinger

Nous venons de donner un cadre à la théorie ondulatoire, la question est alors : quelles sont les implications de ce formalisme et les prédictions que cela permet de faire.

### 3 Application et conséquences :

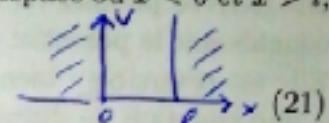
La première application de Schrodinger et de sa théorie fut l'atome d'hydrogène. La résolution exacte du problème demande un peu de travail, néanmoins nous pouvons tirer des conclusions en étudiant un particule dans un puit de potentiel infini.

#### 3.1 Particule dans un puit infini :

*ana cavil Fabry-Perrot*

Considérons une particule de masse  $m$  pouvant se déplacer librement le long de l'axe des abscisses entre  $x = 0$  et  $x = l$ . Cette situation correspond à un potentiel  $V(x) = 0$  si  $x \in [0; l]$  et  $V(x) = \infty$  sinon (on parle alors de puits de potentiel de largeur  $l$ ). (schéma). La particule à une probabilité nulle de se situer dans les domaines de l'espace où  $x < 0$  et  $x > l$ , la fonction d'onde étant continue on a alors les conditions :

$$\psi(x=0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x=l, t) = 0$$



Comme en physique des ondes, lorsque que l'on a des noeuds, la recherche de solutions sous forme d'onde stationnaire est approprié. on cherche donc des solutions de la forme :

$$\psi(x, t) = \phi(x)\chi(t) \quad (22)$$

On a donc :

$$i\hbar\phi(x)\frac{d\chi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\chi(t)\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

$$\rightarrow i\hbar\frac{1}{\chi(t)}\frac{d\chi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\phi(x)}\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

(23)

on a égalité entre une fonction du temps seul et de l'espace seul. Chacunes de ces fonctions doivent être égale à une constante que nous poserons être l'énergie. ainsi :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} = E\phi \iff \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi = 0 \quad (24)$$

La solution de cette équation est :

$$\phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \text{où} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (25)$$

De plus avec la condition :

$$\phi(0) = 0 \quad \text{on a} \quad A = -B \Rightarrow \phi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \quad (26)$$

Ainsi :

$$\phi(x) = 2Ais\sin(kx) \quad (27)$$

Avec la deuxième condition :

$$\phi(l) = 0 \quad \text{on a} \quad \sin(kl) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{l} \quad (28)$$

Finalement, on a des fonctions d'onde stationnaire :

$$\phi_n = 2Ais\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{d'énergies} \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \quad (29)$$

D) cette quantification = onde stationnaire  
→ onde var en 1-1.

traci

~~modélisation par deux murs infini~~

La résolution de l'équation de Schrödinger à une dimension conduit donc, pour une particule libre dans un espace limité, à des fonctions d'ondes n et à des énergies En quantifiées par un nombre quantique n.

On comprend que dans le cas où l'on utilise un potentiel electrostatique pour l'atome d'hydrogène on retrouve les orbites stationnaires et la quantification de leur niveau d'énergie vu en partie 1. En faisant le calcul détaillé de ce cas on retrouve l'expression des énergies du spectre de l'atome d'hydrogène trouvé pour le modèle de l'atome de Bohr.

Revenons maintenant sur le formalisme développé dans la partie précédente, nous allons voir que pour écrire une particule nous allons avoir besoin de la notion de paquet d'onde

### 3.2 Paquet d'onde :

Nous avons vu que les ondes planes harmoniques monochromatiques formaient une base des solutions de l'équation de Schrödinger. En optique nous savons que les OOPH n'ont pas de sens physique car elle possède une énergie infinie. Dans le cadre de la théorie ondulatoire de la matière une fonction d'onde décrite par une OOPH n'a pas de sens physique car elle n'est pas normalisable, en effet :

$$\int_{\text{espace}} |\psi|^2 d^3r = \int_{\text{espace}} \psi \psi^* d^3r = \int_{\text{espace}} A e^{-i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{r})} A^* e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3r = |A|^2 \int_{\text{espace}} d^3r \rightarrow \infty \quad (30)$$

Il est nécessaire de construire alors un objet, le paquet d'onde, comme superposition linéaire à coefficients complexes d'OOPH, ceci est possible grâce au principe de superposition :

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \phi(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad (31)$$

Les fonctions  $\psi(\vec{r}, t)$  et  $\phi(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} Et}$  sont transformées de Fourier l'une de l'autre.

Le paquet d'onde résulte donc de l'interférence des OOPH pondéré par la fonction  $\phi(p)$  dont voici une représentation (schéma).

On peut considérer un paquet d'onde dont l'étendue de la fonction  $\phi(p)$  soit faible autour de son centre (schéma) de telle sorte que l'on puisse effectuer le développement limité suivant :

$$E(p) = E(p_0) + \left. \frac{dE}{dp} \right|_{p=p_0} (p - p_0) \quad (32)$$

On a alors en injectant dans l'expression de notre paquet d'onde à une dimension

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \int \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} (p_x x - (E(p_0) + \left. \frac{dE}{dp} \right|_{p=p_0} (p - p_0))t)} \frac{dp_x}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \left( \left. \frac{dE}{dp} \right|_{p=p_0} p_0 \right) t - E(p_0)t} \int \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} p_x (x - \left. \frac{dE}{dp} \right|_{p=p_0} t)} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \left( \left. \frac{dE}{dp} \right|_{p=p_0} p_0 \right) t - E(p_0)t} \psi(x - \left( \frac{dE}{dp} \right)_{p=p_0} t, 0) \end{aligned} \quad (33)$$

Et donc :

$$|\psi(x, t)|^2 = \left| \psi(x - \left( \frac{dE}{dp} \right)_{p=p_0} t, 0) \right|^2 \quad (34)$$

Cette équation montre que la probabilité de présence se propage le long de l'axe x à la vitesse, que l'on appelle vitesse de groupe :

$$v_g = \left. \frac{dE}{dp} \right|_{p=p_0} \quad (35)$$

schéma

Pour une particule libre :

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} \quad (36)$$

On a donc que :

$$v_g = \frac{p_0}{m} \quad (37)$$

la vitesse du paquet d'onde est alors celle d'une particule classique de quantité de mouvement égal à la valeur moyenne  $p_0$  du paquet d'onde. Cela permet de relier la description quantique à une description classique.

Une dernière conséquence de l'écriture de la fonction d'onde sous forme de paquet d'onde que nous allons aborder est l'inégalité d'Heisenberg.

### 3.3 Inégalité d'Heisenberg :

L'analyse de Fourier nous permet d'écrire les inégalités suivantes :

$$\left| \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \right. \quad (38)$$

Ces relations sont appelées relations d'inertilité d'Heisenberg.

On peut se demander quel est le contenu physique de ces relations.

Soit  $N \gg 1$ , on prépare en particulier dans mêmes conditions on mesure la position de  $N$  particule et l'imposition de  $N$  particule

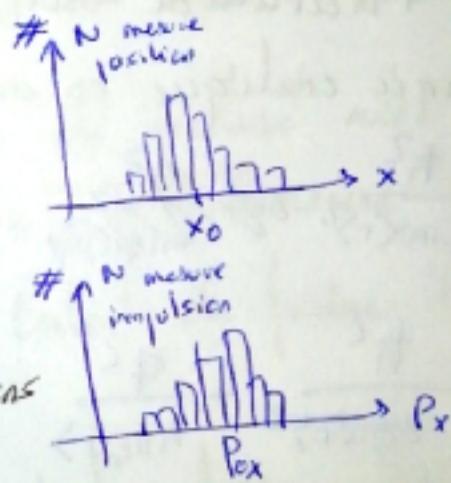
on obtient une distribution:

les histogrammes ont des dispersions  $\Delta x$  et

$\Delta p_x$

et le produit des dispersions vérifie la relation d'Heisenberg

l'inégalité d'Heisenberg.



Ces relations sont des propriétés intrinsèques à la description quantique d'un système.

On ne peut pas concevoir une particule à la fois localisée en position et en impulsion.

Etant donné la faible valeur de  $\hbar$ , à la limite classique la précision des instruments de mesure ne permet pas de détecter ces incertitudes quantiques.

De plus ces relations permettent d'expliquer la stabilité de la matière

stabilité de la matière: atome d'hydrogène.

l'électron en mouvement circulaire accéléré rayonne et perd de l'énergie, il devrait s'effondrer sur le noyau.

L'énergie de l'électron est:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \begin{matrix} \text{somme de l'énergie cinétique et du} \\ \text{potentiel coulombien.} \end{matrix}$$

soit  $\langle r \rangle \hat{=} \text{distance moyenne de l'électron au proton}$

il mesure l'inertie de sur la position de l'électron  
donc l'énergie cinétique en ordre de grandeur

$$E_c > \frac{\hbar^2}{2mr^2} \quad \cancel{\text{et } E_c > E}$$

$$\Leftrightarrow E > \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

le minimum est donné pour

$$\langle r \rangle = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{mq^2} \sim 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\Rightarrow E_{\min} = -\frac{me}{2\hbar^2} \left( \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = -13,6 \text{ eV}$$

ce qui est l'énergie des niveaux fondamentaux du modèle de Bohr.

On a une borne inférieure pour la distance électron-proton et on explique la stabilité de la matière.

## Conclusion

Nous avons vu que comme pour la lumière, il existe une dualité onde-corpuscule pour les particules matérielles.

Cela a amené le développement d'une nouvelle physique fondamentale basé sur la fonction d'onde.

Dans le même temps, un autre formalisme équivalent fut développé sur la base de l'algèbre matriciel par Heisenberg, Born, Jordan et Dirac.

Il faut de plus noter que durant la leçon l'exemple de l'électron à l'argentum fut utilisé.

Les expériences d'interférences ont été réalisées avec d'autres particules et aussi moléculas <sup>ainsi des expériences avec atomes</sup> plus volumineuses et complexes.

Aujourd'hui des chercheurs tentent de faire interférer des virus

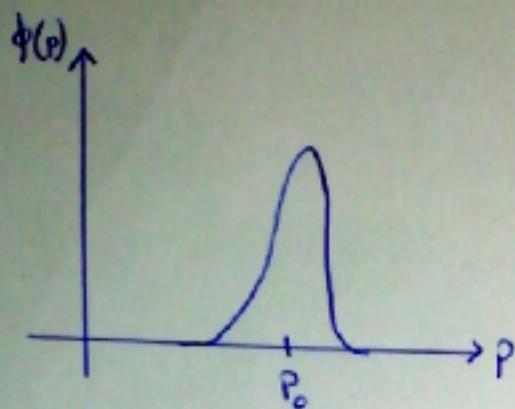
Outre l'aspect technique de la chose cela permet de sonder la limite entre classique et quantique, entre onde et corpuscule.

## D Θ de dates

- plus mesure → non inversible.

L'opinion Feynman dans 2-1-

### 3-2 - Paquet d'onde:



$$E(p) = E(p_0) + \frac{dE}{dp} \Big|_{p=p_0} (p - p_0) + O((p - p_0)^2)$$

on injecte dans l'expression du paquet d'onde à une dimension

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \int \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} (p_x x - (E(p_0) + \frac{dE}{dp} \Big|_{p=p_0} (p_x - p_0)) t)} \frac{dp_x}{\sqrt{2\pi\hbar}} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{dE}{dp} \Big|_{p=p_0} p_0 - E(p_0) \right] t} \int \phi(p_x) e^{\frac{i}{\hbar} p_x (x - \frac{dE}{dp} \Big|_{p=p_0} t)} \frac{dp_x}{\sqrt{2\pi\hbar}} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \left[ \frac{dE}{dp} \Big|_{p=p_0} p_0 - E(p_0) \right] t} \Psi\left(x - \frac{dE}{dp} \Big|_{p=p_0} t, 0\right)\end{aligned}$$

Et donc

$$|\Psi(x,t)|^2 = |\Psi(x - \frac{dE}{dp} \Big|_{p=p_0} t, 0)|^2$$

