~ LOIS DE CONSERVATION ~

*** Quantité de mouvement d'un système:**

Considérons, par rapport à R (réf. galiléen), l'ensemble des vecteurs quantité de mouvement $p_i = m_i v_i$ associés aux points $\{A_i\}$ d'un système matériel Sd de N corps ponctuels. La quantité de mouvement du système est la somme vectorielle des quantités de mouvement:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p_i} = \sum_i m_i \vec{v_i}$$

i
m_i
v_i

Comme $\vec{v_i} = \left(\frac{d\vec{OA_i}}{dt}\right)_R$, $\vec{P}$ s'écrit aussi, en permutant les opérateurs sommation et dérivation:

$$\vec{P} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{OA_i}$$

- Introduisons le centre de masse C, c'est à dire le barycentre des corps ponctuels A_i affectés des masses m_i comme:

$$\vec{OC} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{OA_i} \quad \text{où} \quad M = \sum_i m_i$$

M désigne la masse totale de Sd, il vient:

$$\vec{P} = M \cdot \frac{d\vec{OC}}{dt} = M . \vec{v_C}$$

<u>La quantité de mouvement d'un système est celle de son centre de masse affecté de la masse totale.</u>

- Référentiel du centre de masse. Pour simplifier le problème on va se placer en R^* galiléen.

On appelle référentiel du centre de masse R^*, associé à R, le référentiel en translation par rapport à R et tel que $\boxed{\vec{P^*} = 0}$. Comme $\boxed{\vec{p^*} = M . \vec{v_C^*}}$, on en déduit que $v_C^* = 0$. Par conséquent, le centre de masse est fixe dans R^*; aussi choisit-on généralement le centre de masse comme origine de R^*.

- Forces extérieures et forces intérieures d'un système.

Considerons un système déformable Sd de N corps ponctuels, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen. L'un de ces points A_i est soumis à la force $\vec{F_i}$ exercée par l'ensemble des autres corps de Sd et par des corps extérieurs à Sd

La force $\vec{F_i}$ qui agit sur le corps ponctuel A_i est la somme de deux contributions:

i) l'une $\vec{F}_{ext \to i}$ due à tout corps étranger à Sd; c'est une force extérieure.
ii) l'autre $\sum_j \vec{F}_{j \to i}$ due à tout corps de Sd distinct de A_i; c'est une force intérieure.

* théorème de la quantité de mouvement.

Par rapport à un référentiel galiléen, appliquons la loi fondamentale à chaque corps ponctuel A_i :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{ext\to i} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

En sommant tous les i de Sd :

$$\underbrace{\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\frac{d\vec{P}}{dt}} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_{ext\to i}}_{\vec{S}_{ext}} + \underbrace{\sum\sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}}_{\vec{S}_{int}}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{S}_{ext} + \vec{S}_{int}$$

quantité de mouvement totale du système = somme des forces extérieures et la somme des forces intérieures.

La quantité de mouvement d'un système est une grandeur vectorielle additive.

a) Propriété fondamentale de la somme des forces intérieures.

En raison de la troisième loi de Newton : → L'action est toujours égale à la réaction, c'est à dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires.

$$\vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i} = 0 \quad \to \quad \boxed{\vec{S}_{int} = 0}$$

b) La somme des forces intérieures étant nulle, la quantité de mouvement d'un système matériel soumis aussi à des forces extérieures, satisfait au théorème de la quantité de mouvement : (Ref. galiléen).

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{S}_{ext}} \quad \text{où } \vec{P} = M\cdot\vec{V}_C \qquad \vec{S}_{ext} = M\cdot\vec{a}_C$$

Remarque : le centre de masse C n'est pas nécessairement matériel ! Par exemple celui associé à deux points A_1 et A_2, de même masse, se trouve à chaque instant au milieu du segment qui les joint. Son mouvement est celui d'un point géométrique, doté de la masse totale et soumis à une force égale à la somme des forces.

c) Condition de conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement $\vec{P}$ se conserve si la somme des forces extérieures est nulle, c'est à dire :

i) si le système est isolé (pas de forces extérieures)

ii) si le système est pseudo-isolé (forces extérieures dont la somme vectorielle est nulle).

Exemples : (1) Problème à deux corps
(2) Collisions

Exemple de la fusée ?

$\vec{\alpha} = \frac{u}{M} \sum m_i \vec{OA_i}$

$\sum m_i \vec{CA_i} = \vec{0}$

$\sum m_i \frac{d\vec{CA_i}}{dt} = \vec{0}$ $\quad \sum m_i \vec{v_i^*} = \vec{0}$

* Moment cinétique du système

a) Définition et propriétés

Le moment cinétique d'un système de N corps ponctuels en un point O, par rapport au référentiel R, est la somme vectorielle des moments cinétiques en O de chaque élément:

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{O/R} = \sum_i \vec{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_{i/R}}$$

Si O' désigne un autre point, on a:

$$\vec{\mathcal{L}}_{O'/R} = \sum_i \vec{O'A_i} \wedge m_i \vec{v_i} = \sum_i (\vec{O'O} + \vec{OA_i}) \wedge m_i \vec{v_i} = \underbrace{\sum_i \vec{OA_i} \wedge m_i \vec{v_i}}_{\vec{\mathcal{L}}_{O/R}} + \overbrace{\vec{O'O}}^{\text{terme cste}} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \vec{v_i}}_{\vec{P}} =$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{L}}_{O/R} = \vec{\mathcal{L}}_{O'/R} + \vec{OO'} \wedge \vec{P}$$

ou $\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{O/R} = \vec{\mathcal{L}}_{C/R} + \vec{OC} \wedge \vec{P}}$

Il en résulte que, dans R^* où $P^* = 0$, on a:

$$\vec{\mathcal{L}}^*_{O/R} = \vec{\mathcal{L}}^*_{O'} = \vec{\mathcal{L}}^*_C$$

$a \vec{b} \wedge \vec{d}$

$= ac \vec{b} \wedge \vec{d}$

Ainsi dans R^*, le moment cinétique est indépendant du point où on le calcule. Donc:

$$\boxed{\mathcal{L}^*_{/R} = \sum_i \vec{CA_i} \wedge m_i \vec{v_i}^*}$$

b) Théorème de Koenig relatif au moment cinétique

Ce théorème permet de relier le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}_O}$ relatif à R au moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}^*$:

$$\vec{\mathcal{L}_O} = \sum_i \vec{OA_i} \wedge m_i \vec{v_i} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{L}}^* = \sum_i \vec{CA_i} \wedge m_i \vec{v_i}^*$$

Comme $\vec{OA_i} = \vec{OC} + \vec{CA_i}$ et $\vec{v_i} = \vec{v_i}^* + \vec{v_C}$, d'après la composition des vitesses entre les deux référentiels R et R^* en translation, il vient:

$$\vec{\mathcal{L}_O} = \sum_i (\vec{OC} + \vec{CA_i}) \wedge m_i (\vec{v_i}^* + \vec{v_C}) = \vec{OC} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \vec{v_i}^*}_{=0} + \vec{OC} \wedge \underbrace{\sum_i m_i}_{M} \vec{v_C} +$$

$$\underbrace{\sum_i \vec{CA_i} \wedge m_i \vec{v_i}^*}_{\mathcal{L}^*} + \underbrace{\sum_i \vec{CA_i} \wedge m_i \vec{v_C}}_{\sum m_i \vec{CA_i} = 0} \Rightarrow$$

$\sum m_i \vec{CA_i} = 0$ (suite de triangle)

$\hookrightarrow \sum m_i \frac{d\vec{CA_i}}{dt} = 0 \rightarrow \sum m_i \vec{v_i}^* = 0$, avec $\frac{d\vec{CA_i}}{dt} = \vec{v_i}^*$

propriété du prod vectoriel

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$
$= (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$

$\sum m_i \vec{CA_i} = 0$ (déf. de centre barycentrique)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}_O} = \vec{OC} \wedge M \vec{v_C} + \vec{\mathcal{L}}^* = \vec{OC} \wedge \vec{P} + \vec{\mathcal{L}}^*}$$

Le moment cinétique d'un système matériel, par rapport à R, est la somme du moment cinétique de son centre de masse affecté de la masse totale et de son moment cinétique par rapport à R^*

En comparant le théorème de Koening à la relation $\vec{\mathcal{L}_O} = \vec{\mathcal{L}_C} + \vec{OC} \wedge \vec{P}$ →

→ $\vec{\mathcal{L}_O} = \vec{\mathcal{L}_C} + \vec{OC} \wedge \vec{P} = \vec{OC} \wedge \vec{P} + \vec{\mathcal{L}^*}$ d'où $\boxed{\vec{\mathcal{L}_C} = \vec{\mathcal{L}^*}}$

Le moment cinétique par rapport à R^* est égal au moment cinétique en C par rapport à R.

$$\vec{\mathcal{L}_O} = \vec{OC} \wedge \vec{P} + \vec{\mathcal{L}}^*$$

Cette expression contient deux termes:

- Le premier est le moment cinétique en O d'un point matériel placé en C et affecté de la masse totale du système. Ce terme n'est autre que celui utilisé lorsqu'un objet est assimilé à un point matériel, il caractérise son mouvement d'ensemble par rapport à O.
- Le second est le moment cinétique du système dans R^*. Il caractérise la rotation du système sur lui-même, autour de C.

Exemple du ballon de rugby.

Exemple: moment cinétique de la Terre par rapport au centre du Soleil.

Le moment cinétique de la Terre par rapport au centre du soleil s'écrit;

$$\vec{\mathcal{L}_S} = \vec{ST} \wedge M_T \vec{V_T} + \vec{\mathcal{L}_T}^*$$

où $\vec{ST} \wedge M_T \vec{V_T}$ qui est porté par un axe ⊥ au plan de l'écliptique, a pour valeur:

$$ST M_T V_T \approx 2{,}68 \times 10^{40} \text{ J.s}$$

Quant au moment cinétique de la Terre par rapport à $R^* = R_g$, il est porté par l'axe sud-nord, qui fait l'angle 23° 26' avec l'axe précédent et vaut: $\mathcal{L}_C^* = \underbrace{J \cdot \dot{\theta}}_{\text{solide!! } \Omega} = \frac{2}{5} M_T R^2 \cdot \Omega = 7{,}18 \times 10^{31}$ J.s.

On compare les normes des deux: On voit que le moment cinétique de la Terre est principalement dû au moment de son centre de masse.

* Théorème du moment cinétique:

- Propriété fondamentale du moment des forces intérieures.

Appliquons, par rapport à un référentiel galiléen, en un point fixe O, le théorème du moment cinétique à chaque corps ponctuel A_i:

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}_{Oi}}}{dt} = \vec{OA_i} \wedge \vec{F}_{ext \to i} + \vec{OA} \wedge \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \to i}$$

En sommant sur tous les points i, il vient:

$$\sum_i \frac{d\vec{\mathcal{L}_{Oi}}}{dt} = \underbrace{\sum_i \vec{OA_i} \wedge \vec{F}_{ext \to i}}_{\vec{M}_{O,ext}} + \underbrace{\sum_i \vec{OA_i} \wedge \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \to i}}_{\vec{M}_{O,in}} \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{\mathcal{L}_O}}{dt} = \vec{M}_{O,ext} + \vec{M}_{O,in}$$

désignent respectivement le moment cinétique total du système, la somme des moments des forces extérieures et la somme des moments des forces intérieures. Notons que, comme la quantité de mouvement, le moment cinétique est une grandeur vectorielle additive.

En raison de l'opposition des actions réciproques (troisième loi de Newton), il vient :

$$\overrightarrow{M_{O,int}} = \sum_{ij} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i} = \sum_{\text{couple}(ij)} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i} + \overrightarrow{OA_j} \wedge \overrightarrow{F}_{i\to j} = \sum_{\text{couple}(ij)} (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j}) \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i}$$

puisque $F_{i\to j} = -F_{j\to i}$. Comme la force d'interaction est portée par le vecteur $\overrightarrow{A_jA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j}$, les différents produits vectoriels de la somme sont nuls. Il en résulte que : $\boxed{\overrightarrow{M_{O,in}} = 0}$

b) Énoncé du théorème :

Le moment des forces étant nul, le mouvement d'un système matériel, soumis à des forces extérieures, satisfait au théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{M_{O,ext}} \quad \text{(Réf. galiléen).}$$

si non galiléen ⇒ il faut ajouter les moments des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

c) Condition de conservation du moment cinétique.

Le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ d'un système matériel se conserve si la somme des moments des forces extérieures est nulle, c'est à dire :

i) si le système est isolé (pas de moments de forces extérieures)

ii) si le système est pseudo-isolé (somme vectorielle des moments des forces extérieures nulle).

Exemples :

(1) Problème à deux corps

(2) patineuse

---

* Théorème de l'énergie mécanique

Par définition, on appelle énergie mécanique d'un système Sd la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle des forces intérieures et extérieures

- théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{d\mathcal{E}_{K,i}}{dt} = P_{ext\to i} + \sum_{j\neq i} P_{j\to i}$$

En sommant sur tous les corps i, on obtient :

$$\sum_i \frac{d\mathcal{E}_{K,i}}{dt} = \frac{d\sum_i \mathcal{E}_{K,i}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = \underbrace{\sum_i P_{ext\to i}}_{P_{ext}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j\neq i} P_{j\to i}}_{P_{int}} \quad \text{où } \mathcal{E}_K = \sum_i \mathcal{E}_{K,i}$$

Donc alors on déduit : $\boxed{\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = P_{ext} + P_{int}} \Rightarrow \boxed{d\mathcal{E}_K = \delta W_{ext} + \delta W_{int}}$.

système isolé $\boxed{\delta W_{ext} = 0} \rightarrow \boxed{d\mathcal{E}_K = \delta W_{int}} \rightarrow$ Non conservative

- Énergie potentielle.

Certaines forces extérieures et intérieures sont telles que leurs travaux ne dépendent pas du chemin suivi par les points d'application. Ces travaux peuvent alors s'écrire sous la forme de différentielles de fonctions appelées énergies potentielles.

$$\delta W_{ext} = -d\mathcal{E}_{p,ex} \quad \text{et} \quad \delta W_{int} = -d\mathcal{E}_{p,int}.$$

- Théorème de l'énergie mécanique:

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_p} \qquad \text{avec } \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,ext} + \mathcal{E}_{p,int}.$$

$$\delta W_{ext} = \underbrace{\delta W_{ext}^{(c)}}_{-d\mathcal{E}_{p,ext}} + \delta W_{ext}^{(nc)} \qquad \delta W_{int} = \underbrace{\delta W_{int}^{(c)}}_{-\mathcal{E}_{p,int}} + \delta W_{int}^{(nc)}.$$

$\delta W_{ext}^{(nc)}$ et $\delta W_{int}^{(nc)}$ désignent les travaux élémentaires des forces qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle. En remplaçant dans l'expression de l'énergie cinétique, il vient:

$$\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = -\frac{d\mathcal{E}_{p,ext}}{dt} + P_{ext}^{(nc)} - \frac{d\mathcal{E}_{p,int}}{dt} + P_{int}^{(nc)}$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_K + \underbrace{\mathcal{E}_{p,ext} + \mathcal{E}_{p,int}}_{\mathcal{E}_p}\right) = P_{ext}^{(nc)} + P_{int}^{(nc)}$$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = P_{ext}^{(nc)} + P_{int}^{(nc)} \rightarrow d\mathcal{E}_m = \delta W_{ex}^{(nc)} + \delta W_{int}^{(nc)}}$$

La variation d'énergie mécanique est égal à la somme des travaux des forces extérieures et intérieures qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle

- Conservation de l'énergie mécanique.

i) Les forces extérieures et intérieures sont conservatives.

Exemples: i) problème à deux corps.

L'énergie mécanique.

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_K.$$

→ Th de l'énergie cinétique. $\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = P_{ext} + P_{int} \rightarrow \boxed{d\mathcal{E}_K = \delta W_{ext} + \delta W_{int}}$

→ Énergie pot:

$$\boxed{-d\mathcal{E}_p = \delta W_{ext}^{(c)} + \delta W_{int}^{(c)}} \qquad \begin{cases} \delta W_{ext} = \delta W_{ext}^{(c)} + \delta W_{ext}^{(nc)} \\ \delta W_{int} = \delta W_{int}^{(c)} + \delta W_{int}^{(nc)} \end{cases}$$

En mettant tout dans le théorème de l'énergie mécanique:

$$d\mathcal{E}_K = -d\mathcal{E}_p + \delta W_{ext}^{(nc)} + \delta W_{int}^{(nc)} \rightarrow \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = P_{ext}^{(nc)} + P_{int}^{(nc)}$$

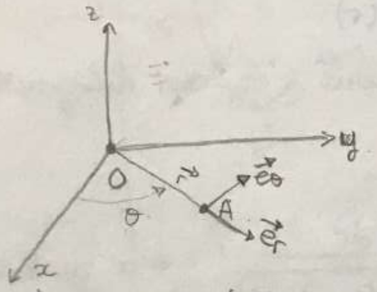
* Corps ponctuel soumis à une force centrale conservative

Le mouvement d'un corps ponctuel A soumis à une force centrale est celui pour lequel la force passe ~~constamment~~ constamment par O fixe dans le référentiel R. considéré. Si cette force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p, cette dernière ne dépend que de la norme r du vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$; en effet $\vec{e}_r$ étant le vecteur unitair $\frac{\vec{r}}{r}$. → Je crois qu'il ne faut pas dire ça.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{e}_r$$

L'intérêt de l'étude de ce mouvement est lié au problème à deux corps, lequel est d'une importance considérable puisque l'étude concerne toutes les intéractions fondamentales gravitationnelle, électromagn, forte, faible.

- Conservation du moment cinétique



$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \overrightarrow{M_{O,ext}}$$

La force étant centrale, son moment au centre O est nul. → conservation du moment cinétique

Le moment cinétique en O du corpuscule A, de masse m, par rapport au référentiel galiléen R, est donc un vecteur constant $\vec{L}$:

$$\vec{L_O} = \overrightarrow{OA} \wedge m.\vec{V_A} = \overrightarrow{Cte} = \vec{L}$$

Comme $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{V_A}$ doivent être constamment perpendiculaires à $\vec{L}$, la trajectoire de A est contenue dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}$ passant par O.

$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{L} = 0$ et $\vec{V_A}\cdot\vec{L} = 0$

Ainsi le mouvement d'un corps ponctuel soumis à une force centrale est plan.

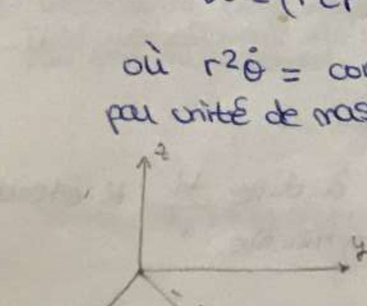
On va considérer l'axe Oz du référentiel R suivant $\vec{L}$ et Oxy le plan dans lequel s'effectue le mouvement. En coordonées polaires, $\vec{L}$ s'écrit :

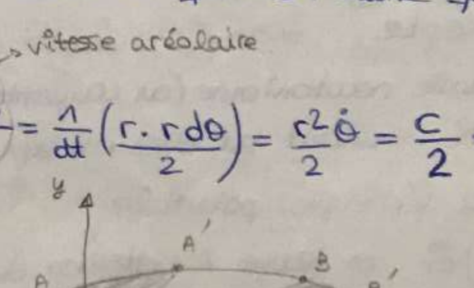
$$\vec{L} = (r\vec{e_r}) \wedge m(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}) = \underbrace{mr^2\dot{\theta}}_{L_z}\vec{e_z} = \overrightarrow{cste}$$

où $r^2\dot{\theta}$ = constante des aires C qui n'est autre que le moment cinétique par unité de masse.

→ vitesse aréolaire

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{dt}\left(\frac{r.\,r\,d\theta}{2}\right) = \frac{r^2}{2}\dot{\theta} = \frac{C}{2} = \frac{L_z}{2m} = L$$





Cas AA' → r↓ → $\dot{\theta}$↑

Cas BB' → r↑ → $\dot{\theta}$↓

On parcourt la même surface pour un intervalle de temps donné

- Conservation de l'énergie

Exprimons, en coordonées polaires, la conservation de l'énergie mécanique de ce corps ponctuel soumis à une force qui dérive de l'énergie pot. $\mathcal{E}_p(r)$:

Force conservative $\rightarrow$ $\mathcal{E}_m = \text{cste}$

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_p(r) = \text{Cte} \quad \rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}_m.$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \mathcal{E}_p(r)$$

où $\dot{\theta}r^2 = \frac{L}{m}$ Donc $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{L^2}{m^2r^4} + \mathcal{E}_p(r)$

$\hookrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m^2r^4}$

$$\boxed{\underbrace{\mathcal{E}_m}_{\text{cste}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + \mathcal{E}_p(r)}_{\mathcal{E}_{p,eff}(r)}} \Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r)$$

Comme nous savons que $\mathcal{E}_m$ est cste, nous pouvons obtenir l'équation differentiel pour r

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{p,eff}(r)\right)}$$

$$\text{où } dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{p,eff}(r))}} \quad ; \quad t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{p,eff}(r))}}$$

$\rightarrow$ on en déduit $r(t)$

Si l'on veut la trajectoire $\rightarrow$ on veut r en fonction de θ $(r(\theta))$

grâce à la loi des aires on peut se debarasser du temps

$\left\{ \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2} \right.$ on injecte $r(t)$ $\rightarrow$ on trouve $t(\theta)$

✱ on injecte $t(\theta)$ en $r(t)$ et on trouve $\boxed{r(\theta)}$

La trajectoire ~~n'est pas~~ n'est pas nécessairement fermée ; elle peut l'être uniquement dans les deux cas suivants:

i) L'énergie potentielle est de la forme $\mathcal{E}_p = \frac{K}{r}$ $\rightarrow$ c'est le problème de Kepler si $K<0$

ii) L'énergie potentielle est quadratique $\mathcal{E}_p = \frac{Kr^2}{2}$; c'est l'oscillateur bidi-

- Problème de Kepler

Force centrale newtonienne (ou coulombienne), c'est à dire $\frac{K}{r^2}$, K étant positif ou négatif suivant qu'elle est répulsive ou attractive.

• Expression de l'énergie potentielle.

$\vec{F} = \left(\frac{K}{r^2}\right)\vec{e}_r$ on trouve l'expression de l'énergie potentielle associée à $\vec{F}$ en exprimant le travail élémentaire δW:

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = \frac{K}{r^2}dr = -d\left(\frac{K}{r}\right) = -d\mathcal{E}_p \quad \text{avec } \boxed{\mathcal{E}_p = \frac{K}{r}}$$

si l'on adopte comme origine de l'énergie potent celle pour r infini

• Discussion qualitative du mouvement.

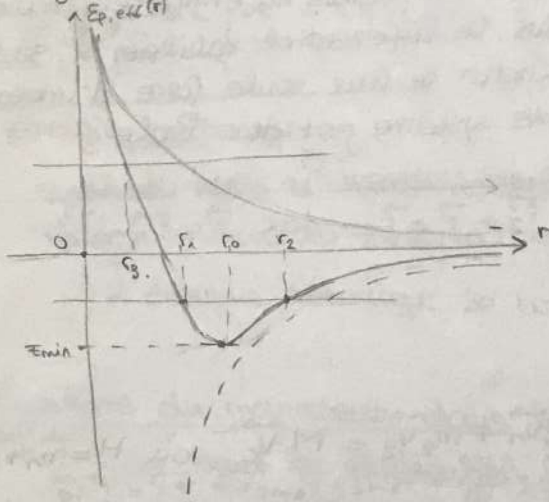
L'énergie potentielle effective a pour expression :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,eff}(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}}$$

- cas répulsif ($K>0$)
- cas attractif ($K<0$).

on étudie la courbe et on obtient pour chaque cas :

→ force attractive : ($K<0$).



on distingue quatre possibilités :

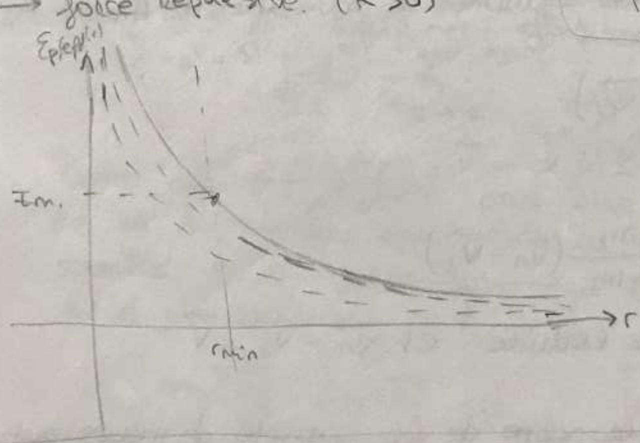
- $E_m < E_{min}$, le mouvement est impossible
- $E_m = E_{min}$, le mouvement est réalisé à $r = r_0$ fixé.

  Comme $C = r^2\dot\theta$; on obtient $\dot\theta = \frac{C}{r_0^2} = \underline{cste}$

  le mouvement est alors circulaire uniforme.

- Si $E_{min} < E_m < 0$ → l'ensemble des distances r accessibles est un intervalle borné compris entre r_1 et r_2. Le système est dans un état lié. Il reste dans le puit de potentiel créé par l'astre A. → Trajectoire : elliptique où r_1 est appelée péricentre et r_2 apocentre
- Si $E_m \geq 0$, l'ensemble des distances r accessibles est un intervalle non borné de la forme $[r_3, +\infty[$. Le système est dans un état de diffusion. Il peut sortir du puits de potentiel créé par l'astre A. Trajectoire → branche d'hyperbole

→ force répulsive. ($K>0$)



Dans ce cas :

$r > r_{min}$, état de diffusion, M ne peut pas s'approcher du centre de force à une distance inférieure à r_{min}, cette position s'appelle péricentre. La trajectoire correspondante est une branche d'hyperbole.

⊛ Vecteur de Runge Lenz

Loi fond. du mouvement. $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r = -\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$ → $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{K}{mr^2}\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$ → $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{K}{mr^2\dot\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

$= \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta}$; $mr^2\dot\theta = L_z$

on intègre → $\vec{V} = -\frac{K}{L_z}\vec{e}_\theta + \vec{W}$ → cste. donc $\boxed{\vec{W} = \vec{v} + \frac{K}{L_z}\vec{e}_\theta = \vec{cte}}$

Vecteur de Runge Lenz : $\vec{R} = \vec{W}\wedge\vec{L}$

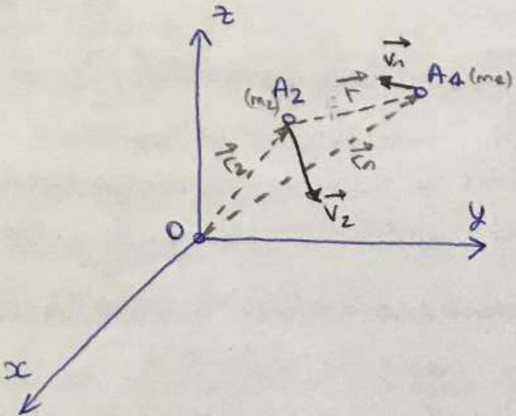
$\vec{R} = \vec{v}\wedge\vec{L} + \frac{K}{L_z}\vec{e}_\theta\wedge\vec{L}$ ($\vec{L} = L\vec{e}_z$) $\Rightarrow \boxed{\vec{R} = \vec{v}\wedge\vec{L} + K\vec{e}_r}$

- Équation de la trajectoire, Formule de Binet.

Les formules de Binet donnent les expressions de la vitesse $\vec{V}_A$ et de l'accélération du point A en fonction des variables $u = \frac{1}{r}$ et φ

---

* Problème à deux corps. → Introduction. Intérêt de cette étude pag 217.



Soient deux corps ponctuels A_1 et A_2, de masses respectives m_1 et m_2, en mouvement dans le référentiel galiléen R, sous l'action de leur seule force d'interaction. Le système est donc isolé.

De ce graphique on peut déduire:
$\vec{r_2} + \vec{r} = \vec{r_1}$ donc $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$

a) Quantité de mouvement.

Par rapport à R: $\vec{P} = \vec{p_1} + \vec{p_2} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = M.\vec{V_C}$ ... → alors $\vec{V_C} = cste$

De même → $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} = F_{2\to1} + F_{1\to2} = 0 \to \vec{P} = Cte$

Par rapport à R*: $\vec{P}^* = \vec{p_1}^* + \vec{p_2}^* = M\vec{V_C}^* = 0.$

de mouv. du centre de masse est donc rectiligne unif.

Il en résulte que, dans R*, les quantités de mouvement de A_1 et A_2 sont opposées.

→ comp. des vitesses → $\vec{V_{1/R}} = \underbrace{\vec{V_{1/R^*}}}_{V_1^*} + \underbrace{\vec{V_{R^*/R}}}_{V_C} \Rightarrow \vec{V_1^*} = \vec{V_1} - \vec{V_C}$

$\vec{p_1}^* = m_1\vec{v_1}^* = m_1(\vec{v_1} - \vec{v_C})$

où $\vec{V_C} = \frac{1}{M}\sum m_i v_i \to \vec{V_C} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

donc $\vec{p_1}^* = -\vec{p_2}^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\underbrace{(\vec{v_1} - \vec{v_2})}_{\vec{V}}$

où $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ est la masse réduite et $\vec{v_1} - \vec{v_2} = \vec{V}$

Ainsi, $\boxed{p^* = p_1^* = -p_2^* = \mu\vec{V}}$, la norme de la quantité de mouvement de chacune des particules est égale à celle d'une particule fictive A, de masse μ et de vitesse $\vec{V}$.

b) Moment cinétique.

D'après le théorème de Koenig : $\left(\vec{\mathcal{L}_O} = \vec{OC} \wedge \vec{P} + \mathcal{L}^*\right)$.

$$\vec{\mathcal{L}_O} = \vec{OC} \wedge (\vec{P_1} + \vec{P_2}) + \mathcal{L}^*$$

Ainsi, par rapport au réf. R^*, le moment cinétique du système des deux corps ponctuels est égal au moment cinétique de la particule A dont la position dans R^* est définie par $\vec{CA} = \vec{r}$

avec $\mathcal{L}^* = \vec{CA_1} \wedge \vec{p_1}^* + \vec{CA_2} \wedge \underbrace{\vec{p_2}^*}_{-p_1^*} = \left(\vec{CA_1} - \vec{CA_2}\right) \wedge p_1^* = \underbrace{\vec{A_2A_1}}_{\vec{r}} \wedge p_1^*$

$-\vec{A_1C} - \vec{CA_2}$

$-(\vec{A_1C} + \vec{CA_2})$

$\parallel$

$-\vec{A_1A_2} = \vec{A_2A_1}$

$= \vec{r} \wedge \mu\vec{v}$.

Donc $\boxed{\mathcal{L}^* = \vec{CA} \wedge \mu\vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{p}^*}$

c) Énergie mécanique.

Système isolé $\rightarrow$ pas de Forces extérieures

Forces intérieures conservatives donc: $\dfrac{d(\mathcal{E}m)}{dt} = 0$.

L'énergie mécanique se conserve. $\boxed{\mathcal{E}m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = 0.}$

- Équations du mouvement dans le référentiel du centre de masse

En choisissant ce référentiel, le problème à deux corps est réduit à celui d'un seul corps

Le syst. des deux corps ponct étant isolé, le mouv de transl. de R^* par rapport à R est rectil. unif. donc :

$$\frac{d\vec{p_1}^*}{dt} = \vec{F}_{2\to 1} \quad \text{soit} \quad p^* = p_1^* = \mu\vec{v} \quad \mu\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{2\to 1}$$

Cette dernière équation peut être considérée comme la loi fondamentale de la dynamique appliquée à la particule A, de masse μ, de vitesse $\vec{v}$ et soumise à la force $\vec{F}_{2\to 1}$ qui est centrale puisqu'elle passe par C. $\vec{v_1} - \vec{v_2}$

situé sur le vecteur $\vec{A_1A_2}$.

$$\underbrace{m_1\vec{CA_1} + m_2\vec{CA_2} = 0.}_{\text{def de barycentre.}} \qquad \frac{\vec{CA_1}}{m_2} = -\frac{\vec{CA_2}}{m_1} = \frac{\vec{A_2A_1}}{m_1+m_2} = \frac{\vec{CA}}{m_1+m_2}$$

$\vec{p_1^*} = \mu\vec{v} \Leftrightarrow m_1\vec{v_1^*} = \mu\vec{v}$

$\int$

$\Leftrightarrow m_1\vec{r_1} = \mu\vec{r}$

$\vec{CA_1} - \vec{CA_2}$

$\Leftrightarrow m_1\vec{CA_1} = \mu(\vec{r_1} - \vec{r_2})$

$\vec{A_2C} + \vec{CA_1}$

$\Leftrightarrow \vec{CA_1} = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \times \dfrac{1}{m_1}\vec{A_2A_1}$

$\Leftrightarrow \vec{CA_1} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{A_2A_1}$

donc: $\begin{cases} \vec{CA_1} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{CA} \\ \vec{CA_2} = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{CA} \end{cases}$

Les trajectoires de A_1 et A_2 sont donc homothétiques de la trajectoire de A, le centre d'homothétie est C et ses rapports sont $\dfrac{m_2}{(m_1+m_2)}$ et $-\dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}$ respect. Notons que si l'une des particules a une masse beaucoup plus faible que l'autre, elle peut être assimilée à la particule fictive A, la position de la seconde coïncidant avec C.

- Conséq. de la conserv. du moment cinétique.

La force d'intéraction qui s'exerce sur la particule fictive A étant centrale car passant par le centre de masse C, le mouvement est plan.

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_z^* \vec{e}_z = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}_A = r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \overline{cste}$$

Donc $\mathcal{L}_z^* = \mu r^2 \dot{\theta} = \mu C = \underline{cste}$

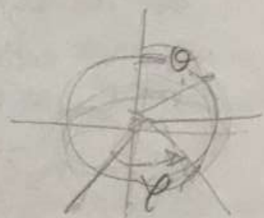
- Conséq. de la conserv. de l'énergie

D'après la conserv. de l'énergie mec. en $\mathcal{R}^*$, on a :

$$\mathcal{E}_m^* = \mathcal{E}_K^* + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p = cte$$

On obtient $\rightarrow$ $\mathcal{E}_m^* = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \underbrace{\mathcal{E}_{p,ef}}_{\frac{L^2}{2\mu r^2} + \mathcal{E}_p(r)}$

<u>On revient au cas d'un seul point</u>



$$\frac{m}{V}\iiint r^2\, dV \rightarrow \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \; dr\; r d\theta \; r\sin\theta d\varphi$$

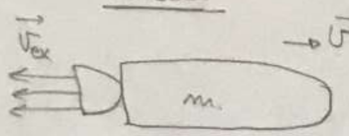
$$\frac{m}{V} \cdot 2\pi \int_0^2\int_0^{\pi} r^2 dr \sin\theta\, d\theta.$$

$$\frac{m}{V} \cdot 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_0^R \Rightarrow \frac{2\pi m}{3V} \times 2 = \frac{4\pi m R^5}{5V}$$

$$\frac{4}{5}\frac{\pi m . R^5}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \frac{3}{5} m R^2.$$

- **Exemple** conservation de la quantité de mouvement.

Fusée



Système isolé → $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P} = cste$

Lors de sa propulsion, une fusée consomme son carburant et éjecte par ses réacteurs le gaz résultant de cette combustion. Sa masse diminue au fur et à mesure de cette ~~combustion~~ consommation.

À l'instant $t \rightarrow p(t) = m(t) \cdot v(t)$.

À l'instant $t+dt \rightarrow$ fusée $(m - dm)$; carb dm

$\vec{P}_{fusée} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v})$

$\vec{P}_{carburant} = dm \cdot (\vec{v} - \vec{v_{ex}})$

Quantité de mouvement totale (fusée + carburant) à $t+dt$ ~~est~~ :

$$\vec{p}(t+dt) = (m - dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + d\vec{v} - \vec{v_{ex}})$$
$$= m\vec{v} + md\vec{v} - \cancel{dm\vec{v}} - \cancel{dmd\vec{v}} + \cancel{dm\vec{v}} + \cancel{dmd\vec{v}} - dm\vec{v_{ex}}$$
$$= m \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) - dm\vec{v}_{ex}$$

La variation de qté de mouv. totale :

$$d\vec{P} = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = m(\vec{v} + d\vec{v}) - dm\vec{v}_{ex} - m\vec{v}$$
$$= md\vec{v} - dm\vec{v}_{ex}$$

$d\vec{P} = 0 \rightarrow md\vec{v} = dm\vec{v}_{ex}$ $\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = v_{ex}\frac{dm}{dt}}$

- Exemple Conservation du moment cinétique

On considère une personne portant un haltère dans chaque main et assise sur un tabouret pivotant d'axe de rotation (Oz) vertical ascendant. On le met en rotation alors qu'il a les bras tendus et il replie les bras. Sa vitesse de rotation augmente significativement, et d'autant plus que les haltères qu'il porte sont lourds.

On peut expliquer ce changement de vitesse en considérant le système constitué de la personne assise, de la partie mobile du tabouret (rotor) et des haltères.

Les forces extérieures s'exerçant sur le système sont réduites au poids dirigé selon $-\vec{u_z}$ et à l'action de la liaison pivot d'axe (Oz) supposée idéale. Le moment de ces deux actions par rapport à l'axe de rotation (Oz) est nul. En effet :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{poids}) = (\vec{OG} \wedge (-mg\vec{u_z})) \cdot \vec{u_z} = 0$$

$\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison}) = 0$ dans le cas d'une liaison idéale

D'après la loi du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \Sigma\vec{\mathcal{M}} \xrightarrow{\text{sur } (Oz)} \mathcal{L}_{(Oz)} = cste$$

- bras tendus, moment d'inertie J_T
- bras repliés, mom. d'inertie $J_R < J_T$

$$\boxed{J = \int_V r^2 \underbrace{dm}_{\rho dV} = \int_V r^2 \rho dV}$$