LP2 - Lois de Conservation en Dynamique

Niveau :

Pré-requis : Mécanique des systèmes de points
Mécanique du solide
Formalismes Lagrangien et Hamiltonien

Matériel :

Voitures PASCO + logiciel CAPSTONE
Banc et masses
Ordinateur

Introduction :

La dynamique étudie les corps en mouvement sous l'influences d'actions mécaniques. Les corps matériel d'un système étudié obéissent à des lois physiques qui décrivent l'évolution de grandeurs mécaniques comme la quantité de mouvement, le moment cinétique ou l'énergie mécanique. Sous certaines conditions, toutes ou partie de ces grandeurs peuvent être des invariants, des constantes lors du mouvement. Il est alors possible d'introduire des lois de conservation qui vont aider à résoudre des problèmes.

Dans une première partie nous allons nous baser sur nos acquis en mécanique pour introduire trois lois de conservation et leurs conditions d'application. Dans un second temps, nous examinerons plusieurs problèmes de mécanique dans lesquels plusieurs particules sont en interaction on dégagera les lois de conservation existant dans chaque cas et leurs conséquences immédiates. Enfin, on abordera l'origine de ces lois, en établissant un lien entre l'existence de quantités conservées et celle de symétries.

I - Énoncé des lois de conservation

Un solide peut être représenté par un ensemble de points matériels.

1°/ Conservation de la quantité de mouvement

On rappelle que pour un système de N points matériels A_i,

$$\vec{P}_{/\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{A_i/\mathcal{R}} = M \vec{v}_{C/\mathcal{R}} \quad \text{où} \quad \vec{OC} = \sum_i \frac{m_i \vec{OA_i}}{M}$$

est la quantité de mouvement totale dans R. $\Leftrightarrow$ résultante cinétique

et $M = \sum_i m_i$

C. barycentre de la distribution de masse $\Leftrightarrow$ centre de masse

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left.\frac{d\vec{v}_{A_i/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$\text{or } m_i \left.\frac{d\vec{v}_{A_i/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{F}_{ext \to i}}_{\substack{\text{résultante des} \\ \text{forces extérieures} \\ \text{agissant sur } i}} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \to i}}_{\substack{\text{résultante des} \\ \text{forces intérieures (exercées par les } j\text{)} \\ \text{agissant sur } i}}$$

$= 0$ ($3^{ème}$ Loi de Newton) le montrer avec 2 particules

d'où $\boxed{\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{ext}}$ Théorème de la quantité de mouvement

avec $\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{ext \to i}$ somme des forces extérieures.

Pour un système isolé : pas de forces extérieures

ou pseudo-isolé $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ car compensation des forces extérieures (ex : un livre posé sur une table horizontale)

$$\underbrace{\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}}_{\text{intégrale première}} \Rightarrow \vec{P} = \vec{cte} \quad \text{constante du mouvement}$$

$\Rightarrow$ conservation de la quantité de mouvement

Exemple : un homme sur un radeau

On néglige la résistance de l'eau au déplacement (**pas de frottement visqueux**).

Un homme (masse m_1) se repose sur un radeau (masse m_2) à la surface d'un lac, au repos.

L'homme se déplace de $\vec{r}_1'$ sur le radeau. Le radeau va bouger. En effet, le système homme - bateau est pseudo isolé, initialement au repos ($\vec{P}$ et $\vec{R}$ du support se compensent)

$$D'\text{où } \vec{P} = \vec{0} = m_1\left(\vec{v}_1{}' + \vec{v}_{2/R}\right) + m_2 \vec{v}_{2/R}$$

si $\vec{v}_1{}'$ est la vitesse de l'homme par rapport au bateau

$$d'\text{où } \vec{v}_{2/R} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1{}'$$

$$\text{et } \Delta\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_1{}'.$$

2/ Conservation du moment cinétique

Soit le même système de points et O un point fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$

$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \sum_i m_i \vec{OA_i} \times \vec{v}_{i/\mathcal{R}}$ est le moment cinétique total du système

$$\left.\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0} + \sum_i \vec{OA_i} \times \underbrace{m_i \left.\frac{d\vec{v}_{i/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}}_{= \vec{F}_{ext\to i} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}}$$

$$= \sum_i \vec{OA_i} \times \vec{F}_{ext\to i}$$

Rq: $\sum_i \vec{OA_i} \times \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$

$= \sum \vec{OA_i}\times\vec{F}_{j\to i} + \vec{OA_j}\times\vec{F}_{i\to j}$

$\overset{\text{couples }(i,j)}{=} \sum_{(i,j)} \left(\vec{OA_i} - \vec{OA_j}\right) \times \underbrace{\vec{F}_{j\to i}}_{\text{dirigée selon } A_iA_j}$

$= \vec{0}$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_{ext}}$$

où $\vec{\mathcal{M}}_{ext}$ est la résultante des moments des actions mécaniques extérieures.

Pour un système isolé ou pseudo-isolé $\vec{\mathcal{M}}_{ext} = \vec{0}$ et $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}$ est une constante du mouvement, donc il y a conservation du moment cinétique.

$\left.\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ intégrale première

Exemple: tabouret d'inertie

Un homme tend les bras sur le côté en tenant des haltères et s'assoit sur un tabouret qui tourne autour de l'axe vertical à vitesse angulaire constante ω_I.

Système: homme, tabouret + haltères

" La force de ses bras compense le moment du poids des haltères par rapport aux épaules, "
reformuler mieux
le réaction du tabouret compense le poids $\Rightarrow$ système pseudo isolé.

Le moment d'inertie du système est I_i par rapport à la verticale et

$$\vec{L}_{O\in(z)/\mathcal{R}} = I_i \,\omega_I \vec{z} = \text{cte}$$

Lorsqu'il replie les bras, rapprochant de la masse vers l'axe de rotation, I diminue: $I_f < I_i$ (I homogène à ML^2 avec M constante) donc ω augmente, $\|\vec{L}\|$ étant constant: $\omega_f = \omega_I$.

3°/ Conservation de l'énergie

- Théorème de l'énergie cinétique

$$dE_k = \delta W_{ext} + \delta W_{INT} \quad \text{où} \quad \delta W_{ext} = \sum \vec{F}_{ext \to i} \cdot \vec{dOA_i}$$

TRAVAIL DES FORCES EXTÉRIEURES

$$\text{et} \quad \delta W_{INT} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \to i} \cdot \vec{dOA_i}$$

TRAVAIL DES FORCES INTERNES

- Théorème de l'énergie mécanique

On distingue les forces conservatives, qui dérivent d'une énergie potentielle et dont le travail $\delta W^c = \vec{F}_i^c \cdot \vec{dOA_i} = -\vec{\nabla} E_p \cdot \vec{dOA_i} = -dE_p$

et les forces non-conservatives, d'où :

$$dE_k = \delta W_{ext}^C + \delta W_{INT}^C + \delta W_{ext}^{NC} + \delta W_{INT}^{NC}$$
$$= -dE_{p,ext} - dE_{p,INT} + \delta W_{ext}^{NC} + \delta W_{INT}^{NC}$$

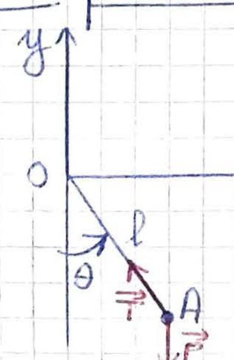
d'où $\boxed{dE_m = \delta W_{ext}^{NC} + \delta W_{INT}^{NC}}$

D'un point de vue thermodynamique, δW_{ext}^{NC} est un terme d'échange d'énergie avec le milieu extérieur et δW_{INT}^{NC} un terme de "création-destruction", qui a motivé l'invention du concept d'énergie interne et de celui de chaleur. L'énergie mécanique est une grandeur non conservative de façon générale, même si le système est isolé : $\delta W_{ext}^C = 0$ et $\delta W_{ext}^{NC} = 0$ mais $\delta W_{INT}^{NC} \neq 0$

$$dE_m = \delta W_{INT}^{NC}$$

L'énergie mécanique n'est conservée que si les forces non-conservatives ne travaillent pas ou n'existent pas : $\boxed{\frac{dE_m}{dt} = 0}$ Intégrale première

Ex : pendule simple (ou accélération d'électrons par une ddp dans le vide)



Si le fil est inextensible, $\vec{T}$ ne travaille pas car le mouvement de A est circulaire de centre O.

Dans ce cas $E_p = E_{p,ext}^c = -mgl\cos\theta$ (origine en $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\vec{g}$)

et $E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = \text{cte}$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

II - Applications

1/ Chocs élastiques (2) ou (1)

Lorsque la loi d'interaction entre deux particules n'est pas parfaitement connue, il est intéressant de considérer le problème comme un **choc**. L'analyse d'un tel problème s'effectue en termes de bilans et de lois de conservation:

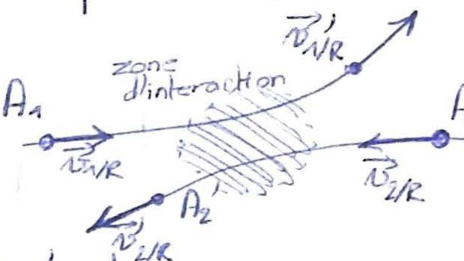
⇒ On renonce à modéliser ce qu'il se passe au cours du choc, de l'interaction.

- Soit un système de deux particules, mécaniquement isolé donc

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}}$$

d'où la conservation de la quantité de mouvement totale et :

$$\underbrace{\vec{P}_{1/R} + \vec{P}_{2/R}}_{\text{avant le choc}} = \underbrace{\vec{P}'_{1/R} + \vec{P}'_{2/R}}_{\text{après le choc}}$$



Rq: osef des forces finies, leur effet est négligeable sur la durée du choc.

- Conservation de l'énergie totale : toujours vrai (on ajoute l'énergie interne)

$$\mathcal{E}_{TOT} = \underbrace{\mathcal{E}_k}_{\text{énergie cinétique totale}} + \underbrace{\mathcal{E}_{p,ext}}_{\text{énergie potentielle des forces extérieures}} + \underbrace{U}_{\text{énergie interne}}$$

$$\boxed{U = \underbrace{\mathcal{E}_{p,int}}_{\text{énergie d'interaction}} + \underbrace{\sum_i U_i}_{\text{énergie interne de } i}}$$

Hors de la zone d'interaction : $\mathcal{E}_{p,INT} = 0$

Choc élastique : le nombre et la nature des particules ne change pas

d'où, en l'absence d'énergie potentielle extérieure (en fait "juste avant" et "juste après" la zone d'interaction ≈ même point, donc $\mathcal{E}_{p,ext}$ ≈ constante durant le choc), on a la conservation de l'énergie cinétique :

Résumé :

$$\boxed{\vec{P}_{1/R} + \vec{P}_{2/R} = \vec{P}'_{1/R} + \vec{P}'_{2/R}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{P_{1/R}^2}{2m_1} + \frac{P_{2/R}^2}{2m_2} = \frac{P'^2_{1/R}}{2m_1} + \frac{P'^2_{2/R}}{2m_2}}$$

⇒ Manip et discussion

$T_{ech} = 50\,Hz$ pour bien évaluer "l'avant" et l'après "choc". Une voiture à l'arrêt, choc par répulsion magnétique (savoir expliquer).
Souligner que $E_{k_{TOT}}^{f} \leq E_{k_{TOT}}^{i}$ mais jamais l'inverse donc il y a des pertes par frottements

Dans le référentiel du centre de masse : $\vec{P}_{TOT}^{*} = \vec{0}$ par définition : $\|\vec{p_1}^*\| = \|\vec{p_2}^*\|$
Le système étant isolé : $\vec{p_1}^* + \vec{p_2}^* = \vec{p_1}'^* + \vec{p_2}'^*$
donc : $\boxed{p_1^* = p_2^* = p_1'^* = p_2'^*}$ ⇒ implique la conservation de $\mathcal{E}_{k_{TOT}}^{*}$ par ailleurs.

2°/ Problème à Force centrale (1) ou (2)

Soit un point matériel M soumis à une Force centrale conservative
- passe toujours par un point fixe O
- ne dépend que la norme du vecteur $\vec{OM}$: $r = \|\vec{OM}\|$

$$\vec{F} = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr}\vec{e}_r$$

• Conservation du moment cinétique :

$\vec{L}_{O/R}$

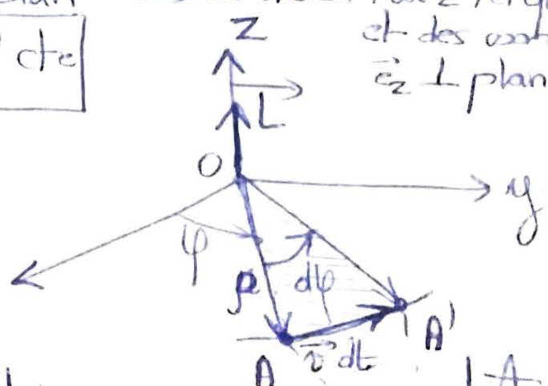
$$\left.\frac{d\vec{L}_{O/R}}{dt}\right|_R = \vec{OM} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_{O/R} = \vec{cte}} \Rightarrow \|\vec{L}_{O/R}\| = L = cte$$

Conséquences : le mouvement est plan ⇒ on choisit l'axe z tel que $z = 0\ \forall t$ et des coordonnées cylindriques $\vec{e}_z \perp$ plan du mouvement.
En cylindriques $\boxed{m\rho^2\dot{\varphi} = L = cte}$

⇒ $\boxed{\text{Loi des Aires}}$

$$\rho^2\dot{\varphi} = Cte = \frac{L_z}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\rho^2\dot{\varphi}}{2}} \text{ vitesse aréolaire}$$



$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\vec{r} \times \vec{v}\,dt\| = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\,dt$$

• Conservation de l'énergie mécanique

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p(\rho) = C^{te}}$$ puisque la force est conservative

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \mathcal{E}_p(\rho) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2m\rho^2} + \mathcal{E}_p(\rho)}_{\mathcal{E}_{p,\text{effective}}}$$

$\Rightarrow$ Tout se passe comme si on avait un mouvement 1D dans un puits de potentiel.

$\Rightarrow$ Ce problème et ces résultats sont très généraux :

* $\mathcal{E}_p = \dfrac{K}{\rho}$: problème de Képler

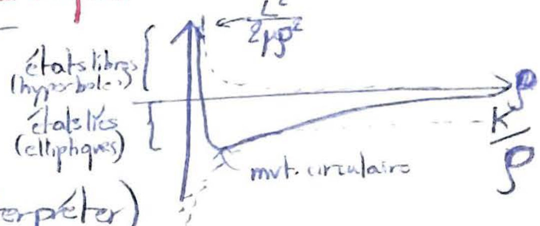
$\Rightarrow$ La conservation de $\vec{L}$ implique la Deuxième Loi de Képler

Gravitation $K<0$ $\begin{cases}\text{hyperbole}\\ \text{ellipse}\end{cases}$

Coulomb $K \gtrless 0$ hyperbole

ex : diffusion Rutherford

* $\mathcal{E}_p = K\dfrac{\rho^2}{2}$ oscillateur $(K>0)$



Képler attractif

• Vecteur de Runge-Lenz (compliqué à interpréter)

Il existe une loi de conservation supplémentaire caractéristique du problème de Képler

PFD : $m\left.\dfrac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}\right|_R = \dfrac{K}{\rho^2}\vec{e}_\rho$, $K<0$ $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p(\rho)$ $\mathcal{E}_p = \dfrac{K}{\rho}$

$\vec{e}_r = -\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}$ d'où : $\left.\dfrac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}\right|_R = -\dfrac{K}{m\rho^2}\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\dfrac{K}{L}\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$

d'où, en intégrant : $\vec{v}_{M/R} = -\dfrac{K}{L}\vec{e}_\varphi + \underbrace{\vec{w}}_{=c^{te}\text{ d'intégration}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{w} = \vec{v}_{M/R} + \dfrac{K}{L}\vec{e}_\varphi}$

On définit le vecteur de Runge-Lenz : $\boxed{\vec{R} = \vec{w} \times \vec{L}_{O/R}}$

$$\vec{R} = \vec{v}_{M/R} \times \vec{L}_{O/R} + K\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{v}_{M/R} \times \vec{L}_{O/R} + K\vec{e}_r = \vec{c^{te}}$$

III - Lois de conservation et symétries

1°/ Théorème de Noether et conséquences

- Établi par Emmy Noether en 1915, ce théorème exprime l'équivalence qui existe entre les lois de conservation et l'invariance du Lagrangien par certaines transformations des coordonnées.

  À toute transformation infinitésimale qui laisse le Lagrangien d'un système invariant à une dérivée temporelle près correspond une grandeur physique conservée.

- On rappelle que le principe de moindre action implique que la trajectoire du système dans l'espace des configurations (q_i, $\dot{q}_i$; respectivement coordonnées et vitesses généralisées) soit solution des équations d'Euler-Lagrange :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}} \quad \text{avec } \mathcal{L} = \mathcal{E}_k - \mathcal{E}_p$$

le Lagrangien

Si la variable q_j n'apparaît pas dans $\mathcal{L}$ (variable cyclique) alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d}{dt} p_j = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}}$$

on retrouve une intégrale première

est l'impulsion généralisée conjuguée à p_j

$$\boxed{\Rightarrow p_j \text{ est conservé si } \mathcal{L} \text{ ne dépend pas de } q_j}$$

- De même, H et $\mathcal{L}$ sont reliés par une transformation de Legendre

$$H = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = H(p_i, q_i, t)$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \cancel{p_i d\dot{q}_i} + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt - \underbrace{\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i}}_{\text{EEL}} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{\dot{p}_i} dq_i$$

Or On a donc : $\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}}$ et $\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$ équations canoniques

d'où $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

et $\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{dH}{dt}}$

Si $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps, $\boxed{H = cte = \mathcal{E}_m}$

- **Exemple**

$*$ Particule dans un puits de potentiel $\mathcal{E}_p(x)$

En coordonnées cartésiennes :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \mathcal{E}_p(x)$$

$\mathcal{L}$ invariant par translation selon y et z

donc $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}$ conservés : $m\dot{y}$ et $m\dot{z}$, quantités de mouvement selon y et z constantes.

C'est logique, $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p$ donc $F_y = F_z = 0$ dans ce cas.

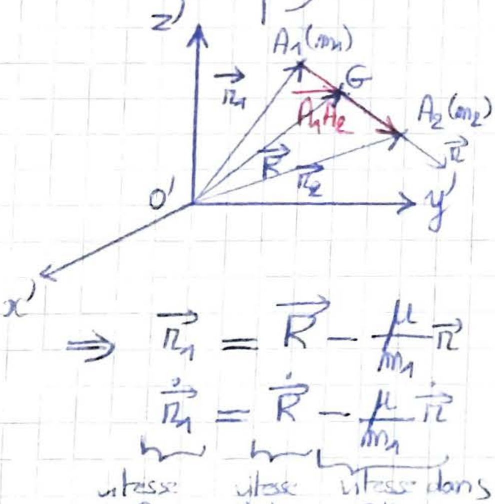
En outre $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps, donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \mathcal{E}_p(x) = \text{cte}$$

et $H = \mathcal{E}_m$ $\Rightarrow$ conservation de l'énergie mécanique, $\mathcal{L}$ étant invariant par translation dans le temps

2°/ Retour vers le problème de Képler

Deux corps interagissant par l'intermédiaire d'une force centrale (gravitation, électrostatique). Dans R.



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} - \mathcal{E}_p(r)$$

On pose $\begin{cases} \vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} & \text{position du centre de mass} \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 & r = \|\vec{r}\| \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{\mu}{m_1}\vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{\mu}{m_2}\vec{r}$$

$$\underbrace{\dot{\vec{r}}_1}_{\text{vitesse dans R}} = \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{\text{vitesse centr. de R}^*} - \underbrace{\frac{\mu}{m_1}\dot{\vec{r}}}_{\text{vitesse dans R}^*}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2} - \mathcal{E}_p(r)} \qquad M = m_1 + m_2$$

À la lumière du théorème de Koenig : $\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2}$ est l'énergie cinétique dans R^* et s'interprète comme l'énergie d'une particule fictive de masse μ, de vitesse $\dot{\vec{r}}$ en $\vec{r}$ dans R^*, soumise à une force centrale $\vec{F} = -\nabla \mathcal{E}_p(r)$

- $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du vecteur $\vec{R}$ $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{R}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} = \vec{cte}$

d'où $\boxed{M\dot{\vec{R}} = \vec{cte}}$ conservation de la quantité de mouvement totale dans $\mathcal{R}$: $m_1\dot{\vec{r}_1} + m_2\dot{\vec{r}_2} = \vec{cte}$

C'est ce que nous avons utilisé pour traiter les chocs élastiques, (et $\mathcal{E}_p(r) = 0$ puisqu'on regarde "hors" de la zone d'interaction) ici $\vec{F} = -\nabla \mathcal{E}_p(r)$ est une force intérieure au système, donc $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$, d'où la conservation de $\vec{P}_{TOTAL/\mathcal{R}}$. Si la somme des forces est nulle dans une direction, c'est bien que $\mathcal{E}_p(\ )$ est homogène selon cette direction $\Leftrightarrow$ invariance par translation

- $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du temps : conservation de l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}$, d'où la conservation de l'énergie cinétique dans le cas des chocs élastiques puisqu'on prend $\mathcal{E}_p(r) = 0$, dans $\mathcal{R}$, mais aussi dans $\mathcal{R}^*$.

En traitant $\mathcal{E}_p(r)$, comme $\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 = cte$, on peut définir $\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - \mathcal{E}_p(r)$, indépendant de t, d'où la conservation de l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}^*$ (et la conservation de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}^*$ par un choc élastique)

- Le problème à force centrale du II peut donc décrire 2 points en interaction dans le référentiel du centre de masse.

En coordonnées cylindriques dans $\mathcal{R}^*$: $\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z, \\ \vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z \\ r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \end{cases}$

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - \mathcal{E}_p(\rho)$$

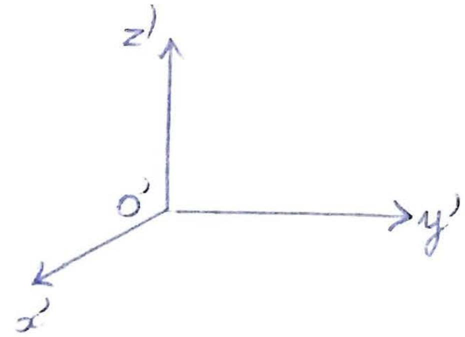
or : invariance selon z : $\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{z}} = p_z = m\dot{z} = cte}$ Mouvement plan $z = z_0 \ \forall t$

invariance par rotation autour de Oz : $\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi = \mu\rho^2\dot{\varphi} = L_z}$

$\Rightarrow$ conservation du moment cinétique.

On retrouve bien les résultats du II, expliqués ici en termes de symétries.

Réduction du problème à 2 corps



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} - \mathcal{E}_p(r)$$

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ r = \|\vec{r}\| \end{cases}$$

On pose : $\vec{OG} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \vec{R}$ et $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

d'où : $\boxed{\vec{r}_1 = \vec{R} - \dfrac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r} = \vec{R} - \dfrac{\mu}{m_1} \vec{r}}$ $\qquad \mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ masse réduite

$\boxed{\vec{r}_2 = \vec{R} + \dfrac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r} = \vec{R} + \dfrac{\mu}{m_2} \vec{r}}$

Si on dérive : $\underbrace{\dot{\vec{r}}_2}_{\text{vitesse dans } R} = \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{\text{vitesse d'entraînement}} + \underbrace{\frac{\mu}{m_2} \dot{\vec{r}}}_{\dot{\vec{r}}_2 \text{ vitesse dans } R^*}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{\mu}{m_1} \dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{\mu}{m_2} \dot{\vec{r}}\right)^2 - \mathcal{E}_p(r)$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \underbrace{\left(\frac{\mu}{m_1} + \frac{\mu}{m_2}\right)}_{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\mu = 1} - \mathcal{E}_p(r)$$

les termes croisés s'annulent mutuellement

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(m_1 + m_2)}_{\text{MASSE TOTALE}} \underbrace{\dot{\vec{R}}^2}_{\text{VITESSE DU CENTRE DE MASSE}} + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - \mathcal{E}_p(r)$$

Énergie cinétique du centre de masse affecté de la masse totale.

énergie cinétique d'une particule fictive de masse μ et de vitesse $\dot{\vec{r}}$ (2) interprétation qui est aussi l'énergie cinétique du système dans R^* (König) (1)

(*) plongée dans l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ invariante par changement de référentiel.

Rq : dans R^* : $\mathcal{E}_k^* = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\mu}{m_1} \dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\mu}{m_2} \dot{\vec{r}}\right)^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \underbrace{\left(\frac{\mu}{m_1} + \frac{\mu}{m_2}\right)}_{=1}$