

Approche expérimentale de l'équation de diffusion

par **Renaud MATHEVET**

Laboratoire national des champs magnétiques intenses (LNCMI)
Université Paul Sabatier (Toulouse III) - 31062 Toulouse Cedex 9
renaud.mathevet@lncmi.cnrs.fr

NOUS PRÉSENTONS un montage permettant d'étudier expérimentalement la propagation quasi unidimensionnelle de la chaleur. L'utilisation d'un élément Peltier permet l'étude détaillée non seulement du régime stationnaire, mais aussi du régime harmonique. Le régime impulsionnel est malheureusement trop difficile à observer. Aussi nous avons réalisé une analogie électrocinétique sous la forme d'une chaîne de cellules RC avec laquelle on peut observer et reconstruire intégralement la réponse spatio-temporelle du système.

INTRODUCTION

Nous donnons tout d'abord quelques rappels théoriques en soulignant quelques similitudes et différences entre l'équation de diffusion et l'équation d'onde. Nous introduisons ensuite dans la partie 1 les expressions permettant d'exploiter quantitativement les données. Nous décrirons partie 2 le montage expérimental qui nous permet d'étudier la propagation de la chaleur dans une barre. Les mesures obtenues sont comparées au modèle théorique et nous soulignons les difficultés inhérentes à ce type de montage. Alors, dans la partie 3, nous introduisons un montage électrocinétique à base de cellules RC. La tension s'y « propage » de cellule en cellule par une version discrète de l'équation de diffusion. Cette fois, la réponse impulsionnelle du système peut être quantitativement étudiée.

1. RAPPELS THÉORIQUES

1.1. Équation de diffusion et équation d'onde

L'Équation de diffusion (équation (1)) est une Équation aux dérivées partielles (EDP) qui se rencontre fréquemment en physique : diffusion de particules, de la chaleur, effet de peau en induction... Ses propriétés et solutions sont nettement moins intuitives que celles de l'équation d'ondes (équation (2)), autre EDP abordée dès la première année post-bac.

On se restreindra dans la suite à un milieu homogène caractérisé par un coefficient de diffusion D , à une dimension spatiale et temporelle, notées x et t . On notera

$u(x, t)$ la grandeur physique étudiée (densité de particule, température...) de sorte que l'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1),$$

et l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2),$$

où c désigne la célérité de l'onde dans le milieu supposé non dispersif.

1.2. Réponses harmoniques

Ces deux équations ont en commun d'être linéaires et on sait le rôle central qu'a joué l'équation de la chaleur dans l'introduction par Joseph Fourier de l'analyse harmonique. Ainsi, si l'on cherche des solutions sous la forme $u(x, t) = u_0 \text{Exp } i(kx - \omega t)$, nous obtenons les équations de dispersion suivantes :

$$i\omega = Dk^2 \quad \text{et} \quad \omega^2 = k^2 c^2 \quad (3).$$

Pour un milieu semi-infini ($x > 0$), au repos à l'instant initial $u(x, 0) = 0$, puis soumis à une perturbation $u(0, t) = u_0 \text{Exp}(-i\omega t)$ pour $t > 0$, les solutions sont respectivement :

$$\begin{aligned} u_{\text{diff.}}(x, t) &= u_0 \text{Exp}(-Kx) \text{Exp } i(Kx - \omega t) \\ \text{et} \quad u_{\text{prop.}}(x, t) &= u_0 \text{Exp } i\omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \end{aligned} \quad (4),$$

où $K = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$. Contrairement à l'onde qui se propage indéfiniment dans le milieu, la solution de l'équation de diffusion s'amortit exponentiellement : c'est l'effet de peau.

Si l'on se restreint à la réponse harmonique, ces deux résultats peuvent sembler assez similaires et l'on parle souvent, à tort, nous semble-t-il, « d'onde thermique ». En effet, la propagation d'une onde dans un milieu absorbant produit le même genre de décroissance exponentielle (Loi de Beer-Lambert). Pourtant ces deux phénomènes sont fondamentalement bien différents.

1.3. Réponses indicielles et impulsionnelles

L'objet n'est pas ici de rentrer dans le détail du formalisme et nous ne traiterons pas le sujet dans toute sa rigueur. Considérons le système soumis à son extrémité à un échelon, modélisé par une fonction de Heaviside $u(0, t) = u_0 H(t)$, ou une impulsion modélisée par une « fonction » de Dirac $u(0, t) = v_0 \delta(t)$ (rappelons au passage que la « fonction » de Dirac possède une dimension – l'inverse de son argument – de sorte que v_0 a la dimension de u_0 fois un temps).

Les solutions de l'équation d'onde sont alors $u_{\text{prop.}}(x, t) = H\left(t - \frac{x}{c}\right)$ ou $\delta\left(t - \frac{x}{c}\right)$

et correspondent à la propagation du front lumineux ou de l'impulsion qui se déplacent sans se déformer vers les x croissants avec la célérité c . L'équation d'onde conserve le caractère singulier de l'excitation (propriété des EDP *hyperboliques*).

Les solutions de l'équation de diffusion sont plus délicates à trouver. On peut vérifier (cf. figure 1) que la réponse indicielle est :

$$u_{diff}(x, t) = u_0 \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \quad (5),$$

où Erfc désigne la fonction erreur complémentaire à savoir :

$$\operatorname{Erfc}(y) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-v^2} dv.$$

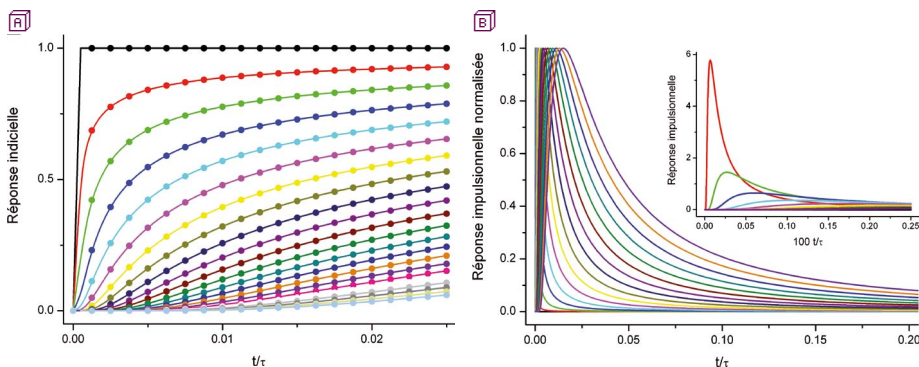


Figure 1 - (A) réponse indicielle de l'équation de la chaleur à différentes distances de l'origine (noir : $x/L = 0$, rouge : $x/L = 0,1$, vert : $x/L = 0,2$...). Les points sont issus d'un calcul numérique, les traits pleins de l'équation 5 - (B) la réponse impulsionnelle normalisée. En insert, réponse impulsionnelle non normalisée aux premiers instants (Équation (6)). L et τ sont les longueurs et temps caractéristiques du problème de sorte que $D = L^2/\tau$.

Par conséquent, la réponse impulsionnelle, qui peut s'obtenir par dérivation temporelle de la réponse indicielle, s'écrit :

$$u_{diff}(x, t) = v_0 \frac{x}{\sqrt{4\pi Dt^3}} \operatorname{Exp}\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (6),$$

à ne pas confondre avec $w_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \operatorname{Exp}\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$, solution fondamentale de l'équation de la chaleur, qui correspond à un point source localisé à l'origine c'est-à-dire $u(x, 0) = \delta(x)$ et $[w_0] = [u_0] L$.

On constate que contrairement à l'équation d'onde, les solutions sont régulières dès que $t > 0$ (propriété des EDP *paraboliques*). Il est de plus facile de montrer que, à x fixé, cette solution présente un maximum en $t_{\max} = \frac{x^2}{6D}$ et que, inversement, à t fixé,

le maximum se situe en $x_{\max} = (2Dt)^{1/2}$. Cette dépendance quadratique, par opposition à linéaire pour l'équation d'onde, est souvent introduite à partir d'une analyse dimensionnelle de D et ϵ .

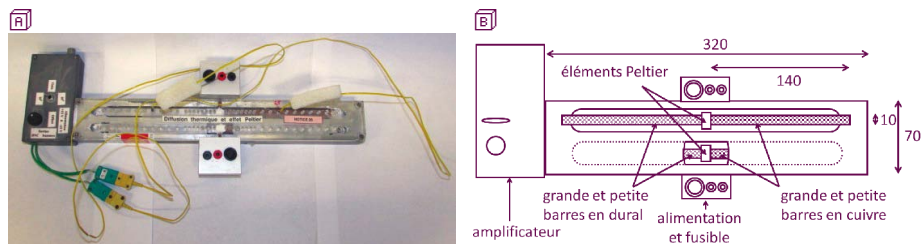
2. MONTAGE POUR L'ÉTUDE DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR

2.1. Principe et description

Une source de courant thermique (élément Peltier, TEC1-00703) est disposée entre deux barres métalliques. L'extrémité de chacune de ces barres est mécaniquement et thermiquement reliée au socle de l'appareil que l'on peut en première approximation supposer isotherme. Les barres sont formées de matériaux différents (cuivre et dural) et de longueurs différentes (15 et 140 mm). Elles sont percées de trous permettant d'y glisser un thermocouple afin de mesurer la température locale. Ces trous sont régulièrement disposés tous les 5 mm puis tous les 10 mm. Ils ont 2 mm de diamètre et 5 mm de profondeur. L'ensemble est recouvert d'un capot en plexiglas, percé de trous en vis-à-vis.

Les thermocouples sont connectés à un amplificateur (INA128) fixé sur l'appareil. Les différences de températures étant faibles ($\approx 1^\circ$), celui-ci présente un fort gain (commutable $G = 10^4$ ou 10^5), une faible bande passante (10 Hz) et un réglage de ligne de base (*offset*). Les thermocouples doivent être isolés électriquement des barres. Pour un meilleur contact thermique, on remplit les trous avec de la pâte thermoconductrice.

Les petites barres (15 mm) permettent l'étude de l'effet Peltier, non décrite ici.



2.2. Étude en régime stationnaire

On alimente l'élément Peltier par un courant électrique stationnaire. Il se comporte comme une source qui fait circuler un courant thermique I_{th} d'une barre à l'autre.

On attend une dépendance affine de la température avec la distance à l'élément Peltier dont la pente permet de mesurer la conductivité thermique λ des matériaux.

En effet la loi de Fourier s'écrit $\frac{I_{th}}{S} = -\lambda \nabla T$ où S est la section de la barre, $S = 1 \text{ cm}^2$ ici. C'est bien ce que l'on constate sur la figure 3.

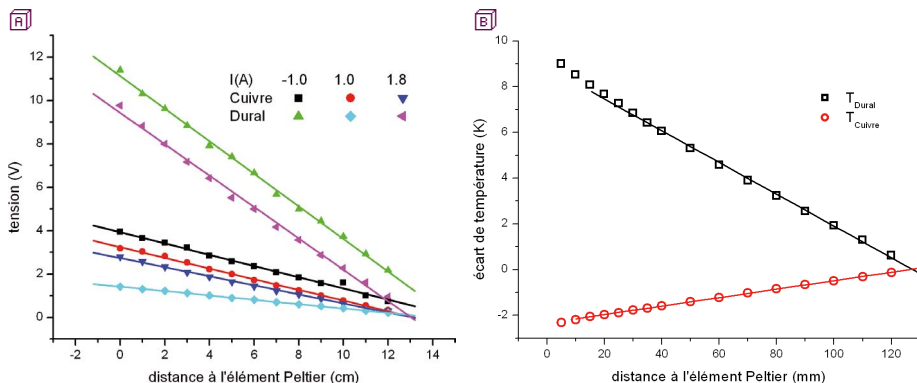


Figure 3 - [A] variation de la tension mesurée par les thermocouples le long des barres pour différents courants dans l'élément Peltier. Pour une comparaison plus directe, toutes les pentes ont été rendues de même signe - **[B]** acquisition dans les meilleures conditions pour une exploitation quantitative (noir : dural $G = 10^4$, rouge : cuivre $G = 10^5$).

Sur la figure 3B, nous nous sommes placés dans les « meilleures » conditions possibles : prise des données en moins de dix minutes (soit $3 L^2/D$ qui est de l'ordre de trois minutes côté cuivre), dix minutes après le début de l'expérience (car l'ensemble du dispositif s'échauffe progressivement).

D'après les données du constructeur on peut estimer une puissance côté froid (cuivre) $Q_f = 1,15 \text{ W}$ et une puissance Joule $P = 0,25 \text{ W}$. En écrivant $Q_f = I_{th} - P$, on obtient du côté chaud (dural) $Q_c = I_{th} + P = 1,65 \text{ W}$. Les gradients thermiques mesurés sont respectivement 18 K/m et 69 K/m d'où l'on tire une valeur de conductivité du dural $\lambda_D = 240 \text{ W/K/m}$ et du cuivre $\lambda_{Cu} = 620 \text{ W/K/m}$. Ces valeurs sont un facteur 2 environ au-dessus des valeurs tabulées qui sont respectivement 134 et 390 W/K/m .

Plusieurs facteurs contribuent au désaccord très significatif des conductivités mesurées aux valeurs tabulées. Les données du constructeur des éléments Peltier ne concernent que le côté froid. Elles sont obtenues dans des conditions optimales qui ne sont pas celles de l'expérience. De plus, il faudrait aussi tenir compte de la résistance thermique entre l'élément et chacune des barres qui, même si elle est minimisée par de la pâte thermoconductrice, est difficile à estimer d'une part et n'a aucune raison d'être égale de chaque côté. Notons cependant que le rapport $\frac{\lambda_{Cu}}{\lambda_D} = 2,6$ qui s'affranchit de nombre de ces difficultés est assez proche de la valeur tabulée $2,68$.

2.3. Étude en régime harmonique

L'élément Peltier est cette fois alimenté par un générateur de courant très basse fréquence, typiquement 10 mHz à 1 Hz avec une amplitude 1,7 A. À l'aide d'un oscilloscope numérique, on relève la température en fonction du temps en différents points de la barre en dural et on mesure l'amplitude et la phase de l'oscillation thermique en fonction de la distance.

En prenant la partie réelle de l'équation (4) on s'attend à une variation de la température du type $T(x, t) = T_0 + \Delta T \exp(-Kx) \cos(Kx - \omega t)$ c'est-à-dire une phase linéaire et une amplitude des oscillations qui décroît exponentiellement avec la distance. C'est l'effet de peau thermique clairement mis en évidence sur la figure 4A (noter l'échelle logarithmique pour l'amplitude).

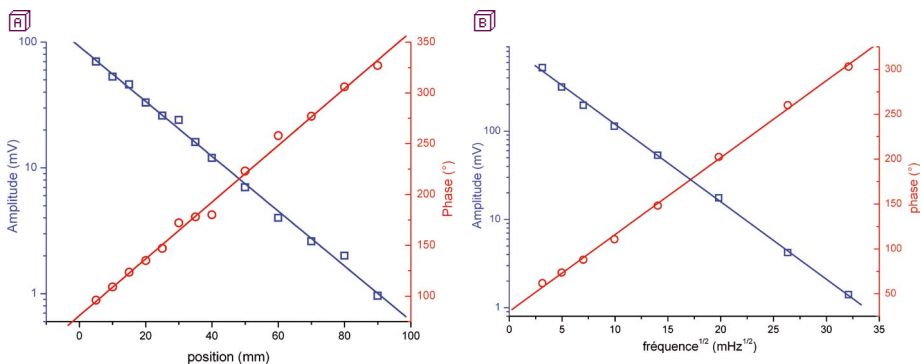


Figure 4 - [A] amplitude et phase des oscillations en fonction de la position pour une excitation à la fréquence $f = 89$ mHz - [B] amplitude et phase des oscillations en fonction de la racine carrée de la fréquence à la distance $x_0 = 5$ mm de la source.

On peut aussi, se placer à une distance donnée et faire varier la fréquence d'excitation. Il est préférable de se placer près de la source ($x_0 = 5$ mm) et il faut prendre soin d'attendre plusieurs oscillations pour que le régime soit bien établi. Comme $K = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$ on s'attend alors à ce que la phase φ varie linéairement et que l'amplitude A des oscillations décroisse exponentiellement avec la racine carrée de la fréquence d'excitation. C'est ce que l'on constate sur la figure 4B.

La régression linéaire $\text{Log}(A) = a + b\omega^{1/2}$ donne $a_{\text{mes.}} = -0,02 (\pm 0,13)$ et $b_{\text{mes.}} = -1,45 (\pm 0,13)$. La valeur de l'ordonnée à l'origine $a_{\text{mes.}}$ est compatible avec 0 à mieux que deux écarts type. La pente s'identifie à $x_0(2D)^{-1/2}$ d'où l'on déduit une première estimation de la diffusivité du dural $D_{D1} = 95 (\pm 9) 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Concernant la phase, la régression linéaire $\varphi = a + b\omega^{1/2}$ donne $a_{\text{mes.}} = -13 (\pm 5)$

et $b_{mes.} = 112 (\pm 5)$. La valeur de l'ordonnée à l'origine $a_{mes.}$ diffère beaucoup de 0 (2,6 écarts type). On peut soupçonner qu'elle ne doit toutefois pas être précisément nulle à cause de la résistance thermique de contact entre l'élément Peltier et la barre. Toutefois, il n'est pas possible d'en donner une estimation. Enfin, la pente s'identifie ici à $\left(\frac{180}{\pi}\right) x_0 (2D)^{-1/2}$ d'où l'on déduit une seconde estimation de la diffusivité du dural $D_{D2} = 53 (\pm 2,5) 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

La valeur attendue de la diffusivité du Dural est $D = \frac{\lambda}{\rho C_p} = 54,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ où ρ et C_p sont ses masse volumique et capacité calorifique massique. Il ne faut sans doute pas surestimer l'excellent accord obtenu lors de l'étude de la phase : les deux estimations obtenues de la diffusivité du dural ne sont malheureusement pas compatibles entre elles sans que l'on puisse avancer d'argument déterminant. Elles sont toutefois du bon ordre de grandeur.

2.4. Commentaires

Les données collectées dans les figures 3 et 4 démontrent que le montage permet d'illustrer certains aspects de la diffusion thermique et, en particulier, l'effet de peau. Les mesures sont toutefois délicates :

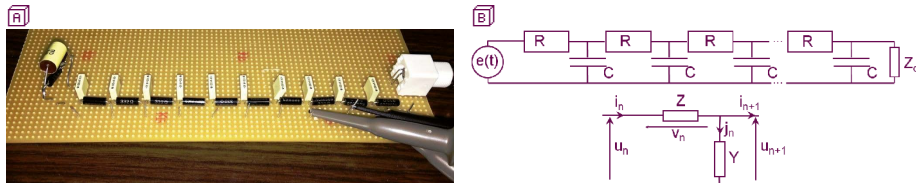
- ◆ Le gain de l'amplificateur est très important, car les différences de températures sont petites. La mesure est sensible par exemple à l'échauffement par les doigts des thermocouples lors de leur déplacement d'un trou à l'autre (voir manchons isolants sur la photo de la figure 2A). Les signaux sont bruités et il faut moyenner les traces à l'oscilloscope.
- ◆ Comme bien souvent en thermodynamique, les mesures sont longues, car il faut attendre l'établissement du régime souhaité. L'effet Joule se superpose à l'effet Peltier et s'accumule tout au long de la séance. La température du bloc qui maintient les barres s'élève peu à peu et les mesures de fin de séance ne sont pas toujours quantitativement reproductibles avec celles du début (surtout en régime stationnaire).
- ◆ La réponse impulsionnelle n'est pas mesurable du fait du peu d'énergie thermique déposée dans le milieu. On ne peut pas vraiment l'obtenir en dérivant la réponse indicelle qui est déjà assez bruitée.

Or, comme rappelé dans la partie 1, c'est sur ces réponses temporelles que l'on met le plus clairement en évidence la différence avec la propagation d'une onde dans le milieu. De façon générale, les mesures électriques sont bien plus rapides, sensibles et précises que les mesures thermiques et les laboratoires en sont habituellement bien mieux équipés. Nous présentons maintenant un système électrocinétique simple permettant d'illustrer quantitativement la diffusion.

3. ANALOGIE ÉLECTROKINÉTIQUE

3.1. Description du montage

Le montage est constitué d'une chaîne de cellules RC identiques (10 ou 50 dans la suite) éventuellement bouclées sur une impédance terminale Z_c (cf. figure 5).



Le raisonnement se fait comme pour la chaîne de cellules LC (équation des télégraphistes). On note en majuscule les amplitudes en notation complexe. La loi des nœuds s'écrit

$$I_{n+1} - I_n = -J_n = -Y U_{n+1} = -jC\omega U_{n+1}$$

tandis que la loi des mailles donne

$$U_{n+1} - U_n = -V_n = -Z I_n = -R I_n$$

puis, de même $U_{n+2} - U_{n+1} = -V_{n+1} = -Z I_{n+1} = -R I_{n+1}$.

Il vient donc

$$U_{n+2} - 2U_{n+1} + U_n = -R(I_{n+1} - I_n) = jRC\omega U_{n+1}$$

soit : $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = \tau \frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}$ (7),

où $\tau = RC$. On obtient une version discrète de l'équation de diffusion.

À la lumière de ce que l'on sait de l'effet de peau, cherchons une solution sous la forme : $u_n(t) = u_0 \exp(-nka) \exp(j(nka - \omega t))$, où a est la longueur d'une cellule. On obtient alors l'équation de dispersion :

$$4 \operatorname{Sh}^2 \left[(1+j) \frac{ka}{2} \right] = j\omega\tau \quad (8).$$

Ce qui précède est analogue à ce que l'on fasse lors de l'étude du modèle de cristal à partir d'une chaîne d'oscillateurs masse-ressort couplés de fréquence propre ω_0 pour laquelle nous avons :

$$4 \operatorname{Sin}^2 \left[\frac{ka}{2} \right] = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2.$$

Poursuivons le parallèle et faisons ce qui correspond à l'approximation des grandes longueurs d'onde qui, par passage au continu, mène à l'équation de d'Alembert.

Elle signifie que le déphasage et l'amplitude varient peu d'une cellule à la suivante, soit $\omega\tau \ll 2\pi$ ici. Introduisons alors la fonction d'interpolation $v(x, t)$ telle que $v(na, t) = u_n(t)$. Dans cette limite,

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \approx a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}((n+1)a, t)$$

et l'équation (7) devient l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (9),$$

avec $D = \frac{a^2}{\tau}$. De même, l'équation de dispersion (équation (8)) donne :

$$[(1+j)ka]^2 \approx j\omega\tau$$

soit $ka \approx \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}$. On notera $n_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}}$ la profondeur de peau exprimée en nombre de cellules.

Enfin, on sait qu'il convient de boucler un câble BNC, analogue à une ligne LC finie, sur une terminaison d'impédance $Z_0 = \sqrt{Z_L Z_C} = \sqrt{L/C} = 50 \Omega$ pour éviter les réflexions en bout de ligne. De même ici on pourra fermer la ligne sur son impédance caractéristique :

$$Z_0 = \sqrt{Z_R Z_C} = \sqrt{\frac{R}{jC\omega}} \quad (10).$$

Contrairement à la ligne LC pour laquelle l'impédance caractéristique est réelle et indépendante de la fréquence (milieu non absorbant et non dispersif), l'impédance caractéristique est ici complexe avec une dépendance typique des phénomènes de diffusion en $\omega^{-1/2}$. Nous allons voir son importance sur une première série d'expériences.

3.2. Réponse harmonique

Nous avons choisi pour les résistances $R = 332 \Omega$ (0,1 %) et des condensateurs de capacité $C = 100 \text{ nF}$ (1 %) de sorte $\tau = 33,2 \mu\text{s}$ dont nous déduisons la fréquence caractéristique $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = 4790 \text{ Hz}$.

Dans une première expérience, nous avons choisi comme fréquence d'excitation $f = 4370 \text{ Hz}$, proche de f_0 . D'après l'analyse du paragraphe précédent, l'amplitude complexe s'écrit : $U_n = U_0 e^{-(1+i)n/n_0}$ avec une portée caractéristique de :

$$n_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega\tau}} = \sqrt{\frac{2f_0}{f}} = 1,48$$

cellules ici. La chaîne de dix cellules constitue donc une chaîne quasi infinie et l'amplitude à son extrémité est négligeable comme on peut le constater sur la figure 6A (cf. page ci-après) en jaune.

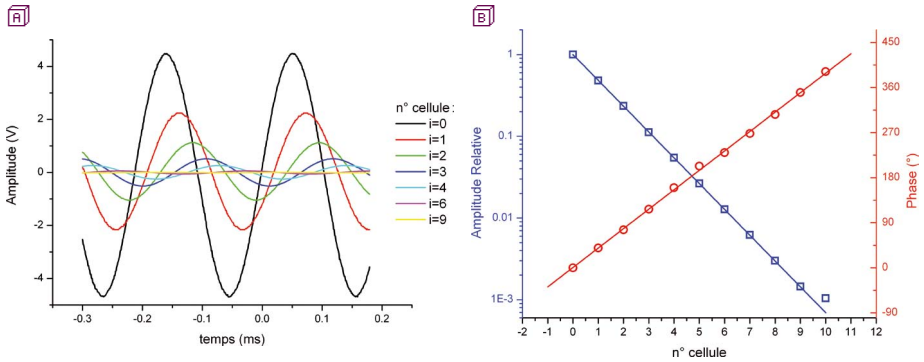


Figure 6 - [A] signaux bruts au niveau de différentes cellules - [B] amplitudes et phases correspondantes.

Sur la figure 6B, nous traçons la phase et l'amplitude relative du signal mesuré :

$$\frac{u_n}{u_0} = e^{-\frac{n}{n_0}} \cos\left(\omega t - \frac{n}{n_0}\right) \quad (11).$$

La régression linéaire sur la phase conduit à un déphasage par cellule $\delta_{\phi_{mes.}} = 38,8^\circ$ ($\pm 0,4$) compatible avec la valeur attendue $\delta_{\phi_{att.}} = 38,7^\circ$.

Pour l'amplitude relative, nous pouvons soit faire directement un ajustement exponentiel soit faire un ajustement linéaire sur son logarithme. La première méthode tend à privilégier les premiers points où le signal est important en valeur absolue, la seconde, que nous préférons, accorde un poids relativement égal à tous les points. Les portées caractéristiques trouvées sont respectivement $1,37 (\pm 0,02)$ et $1,41 (\pm 0,02)$ significativement plus faible que la valeur attendue $n_0 = 1,48$.

Nous ne sommes toutefois pas dans la limite $\omega\tau \ll 2\pi$ qui nous a permis le passage au continu. La résolution numérique de l'équation de dispersion (équation (8)) donne $ka = 0,67 - 0,03i$ d'où l'on tire les valeurs attendues $n'_0 = 1,43$ et $\delta\phi' = 37,1^\circ$. C'est cette fois la phase qui n'est pas compatible avec la valeur mesurée. Remarquons cependant qu'il faudrait estimer l'incertitude sur ces valeurs. C'est délicat, car l'incertitude sur les composants entraîne non seulement une incertitude systématique sur τ mais une dispersion aléatoire de τ de cellule en cellule dont l'impact sur l'évolution du signal est plus indirect. Une étude numérique donne quelques indications que nous ne détaillons pas ici.

3.3. Impédance caractéristique

Pour se rapprocher de la limite continue, nous avons choisi de travailler à plus basse fréquence, à $\frac{f_0}{100} = 48$ Hz. Mais alors l'épaisseur de peau est $n_0 = 14,2$ cellules, nette-

ment plus grande que la chaîne qui ne peut donc plus être considérée comme infinie. Sur la figure 7, les courbes noires qui représentent l'amplitude (échelle logarithmique) et la phase à chaque cellule s'écartent très nettement du comportement linéaire attendu.

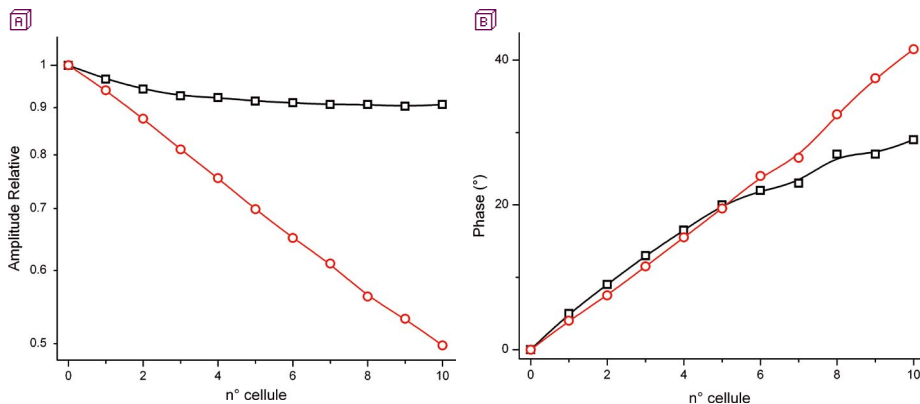


Figure 7 - À gauche et à droite l'amplitude (échelle logarithmique) et la phase du signal au niveau de chaque cellule, sans (noir) ou avec (rouge) l'impédance caractéristique pour une fréquence d'excitation de 48 Hz.

Comme rappelé au sous-paragraphe 3.1. on peut s'affranchir des effets de taille finie en bouclant la chaîne sur son impédance caractéristique :

$$Z_0 = (1 - j) 2,35 \text{ k}\Omega$$

ce que l'on réalise approximativement avec deux résistances en série,

$$R = 4,64 \text{ k}\Omega + 60,4 \text{ }\Omega = 4,7 \text{ k}\Omega,$$

en parallèle avec deux condensateurs de capacité totale $C = 680 + 22 = 702 \text{ nF}$. On constate une amélioration spectaculaire sur les courbes rouges de la figure 7 : l'ajout de l'impédance caractéristique simule pratiquement une chaîne infinie.

3.4. Réponse impulsionnelle

Comme nous l'avons déjà souligné plus haut, l'étude de la réponse temporelle du système met bien en évidence certaines différences fondamentales entre diffusion et propagation. Mais ce type d'excitation contient essentiellement toutes les fréquences et il n'est pas simple de construire une impédance variant comme $\omega^{-1/2}$ (appelée *fractance*) autrement que comme une chaîne infinie... Nous avons donc construit un second prototype, de cinquante cellules cette fois.

Le système est excité à une extrémité par un générateur d'impulsion. À l'aide d'un oscilloscope numérique, on enregistre les tensions aux bornes de chaque cellule. Nous nous sommes arrêtés à la cellule 35, car au-delà le signal devient très faible. On intègre

le tout dans un tableur (Origin) pour former une matrice qui échantillonne en position et en temps la réponse impulsionnelle.

On peut naturellement visualiser la tension aux bornes d'une cellule en fonction du temps comme on le fait à l'oscilloscope, mais aussi, en transposant la matrice, la tension le long de la chaîne à un instant donné (cf. figure 8B). On constate alors que les courbes, pourtant prises à des instants régulièrement espacés, se resserrent : la tension ne progresse pas à « vitesse » constante par diffusion contrairement à une onde (équation (7)).

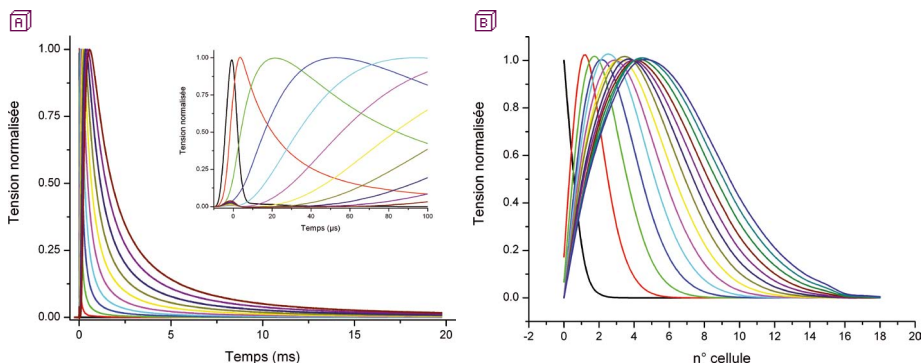


Figure 8 - [A] tension mesurée en fonction du temps au niveau de la source (noir) puis de la première cellule (rouge), la deuxième (vert)... (comparer au modèle théorique figure 1B) - [B] tension en fonction de la position pour des instants croissants séparés de 32 μs. Les tensions ont été normalisées à 1 pour plus de visibilité.

Nous pouvons alors faire un traitement détaillé des données à l'aide de l'équation (6), selon une coupe soit temporelle soit spatiale. L'accord est remarquable comme on peut le constater sur la figure 9 (cf. page ci-contre).

Par exemple, nous trouvons pour l'enregistrement temporel de la figure 9A (cf. page ci-contre) un numéro de cellule issu de l'ajustement de 15,04 très proche de la valeur « vraie » $n = 15$ de la cellule sur laquelle a été fait l'enregistrement. De même, l'instant déduit de l'ajustement pour la coupe effectuée dans la matrice des données représentée à la figure 9B (cf. page ci-contre) est très proche de la valeur « vraie » voisine de 2,5 ms après l'impulsion.

Ces ajustements peuvent être automatisés dans un logiciel de calcul scientifique (*Mathematica*) et l'on obtient de bons résultats qui permettent d'évaluer le coefficient de diffusion $D = \frac{a^2}{\tau}$ avec une précision de l'ordre de quelques pour cent. C'est toutefois une procédure assez technique et nous préférons présenter pour conclure des résultats plus simples à interpréter.

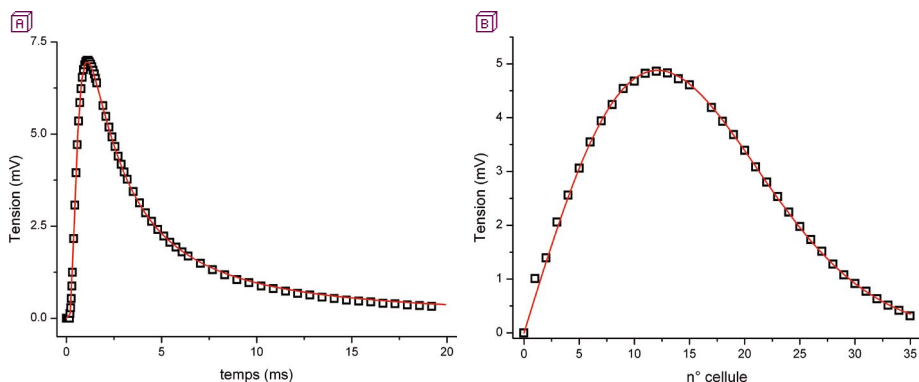


Figure 9 - [A] tension en fonction du temps au niveau de la quizième cellule - [B] tension en fonction de la position 2,5 ms environ après l'impulsion. Dans les deux cas, les valeurs mesurées sont représentées par des carrés noirs, les ajustements selon l'équation (6) en trait continu rouge.

Conformément à l'analyse de l'équation (6), nous traçons sur la figure 10 l'instant $t_{\max} = \frac{x^2}{6D}$, ou $x_{\max} = (2Dt)^{1/2}$, du maximum du signal en fonction du carré de la position, ou la racine carrée du temps. Dans la pratique, on repère la position par le numéro de cellule ce qui revient à faire formellement $a = 1$. Si de plus on normalise le temps par le temps caractéristique τ , alors on travaille en unités réduite et $D = 1$. On attend donc des droites de pentes respectives $1/6 \approx 0,167$ et $2^{1/2} \approx 1,414$. Les valeurs mesurées sont $p_1 = 0,172 (\pm 0,001)$ et $p_2 = 1,408 (\pm 0,001)$. Ces valeurs diffèrent légèrement (3 % et 1 %) des valeurs attendues.

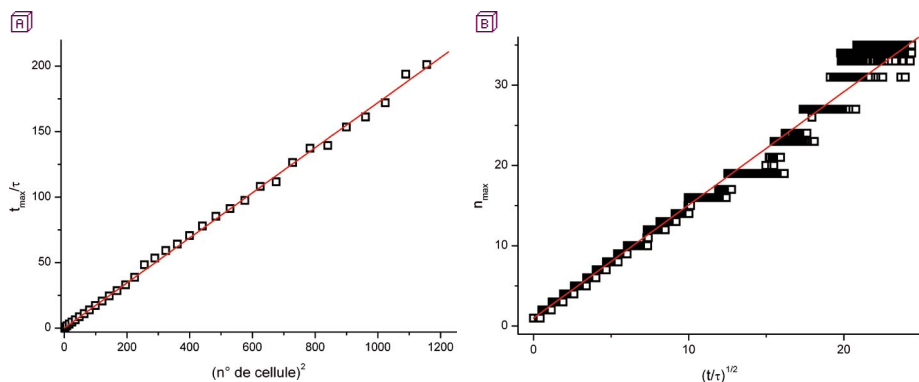


Figure 10 - [A] instant où le signal est maximum en fonction du carré du numéro de cellule - [B] numéro de cellule sur lequel le signal est maximum en fonction du temps. En rouge, ajustements linéaires.

Pour p_1 , cela pourrait provenir de la taille finie du système. En effet, si on retire

les trois derniers points, les plus proches du bout de la chaîne, la pente estimée devient 0,170, ce qui est compatible avec la valeur attendue aux incertitudes sur les composants près.

3.5. Commentaires

Ces réserves concernant la taille finie de la chaîne étant faites, nous pouvons conclure des mesures effectuées que le modèle de l'équation de diffusion décrit avec une précision de quelques pour cent la chaîne de cellules RC.

Soulignons au passage que s'il est difficile de construire une impédance caractéristique qui présente la bonne dépendance en fréquence ($\omega^{-1/2}$), les simulations numériques pour une chaîne de cinquante cellules couplées ne posent pas de difficultés avec de simples ordinateurs personnels modernes. Elles peuvent ouvrir la voie à des études plus poussées comme par exemple l'effet de la dispersion des composants.

CONCLUSION

Nous avons présenté un montage qui permet l'étude du régime stationnaire et du régime harmonique de la propagation de la chaleur dans une barre. Les mesures sont délicates, laborieuses et certains paramètres échappent à une détermination expérimentale. Dans ces conditions, même si la forme des lois est assez bien respectée, mais nous n'avons pas pu obtenir un accord réellement quantitatif.

Pour pallier ces difficultés, nous avons alors introduit un modèle électrocinétique sous la forme d'une chaîne de cellules RC. Les mesures sont alors beaucoup plus aisées et se prêtent à une interprétation détaillée. En particulier, la réponse impulsionnelle, et la réponse indicielle, non présentée ici, sont facilement mesurables. Elles mettent bien en évidence le caractère fondamentalement différent de l'équation de diffusion et de l'équation d'onde qui n'est pas toujours si clair sur la seule réponse harmonique.

REMERCIEMENTS

Nous remercions Arthur Larrouy et Gauthier Le Traon avec qui le premier modèle électrocinétique a été réalisé à l'occasion de leur TIPE (Travaux d'initiative personnelle encadrée).

BIBLIOGRAPHIE

Articles du Bup relatifs à la diffusion

- ◆ P. Jenffer, C. Bétrencourt, J.-C. Deroche et E. Guyon, « Mesure de la conductivité et de la diffusivité thermique d'un solide en travaux pratiques », *Bull. Un. Phys.*, vol. 84, n° 728 (1), pp. 1185-1194, novembre 1990.

- ◆ J. Randon, « Au hasard de la diffusion : simulation par automates moléculaires », *Bull. Un. Phys.*, vol. 90, n° 785 (2), pp. 95–100, juin 1996.
- ◆ C. Jai, R. Wunenburger et R. Boisgard, « Sur les traces de Jean Perrin avec une webcam », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 102, n° 905, pp. 817–835, juin 2008.
- ◆ J. Roussel, « Marches aléatoires », *Bull. Un. Phys.*, vol. 96, n° 845 (1), pp. 1087–1111, juin 2002.

Sujets de concours

- ◆ Sujet de physique I, filière PC, concours Centrale–Supélec 2009.
- ◆ G. Philippe, Sujet corrigé de DS :
<http://gerald.philippe.free.fr/files/2010/Onde%20thermique.pdf>
(dernière consultation le 30 janvier 2014).

Références « techniques »

- ◆ A. Alastuey, M. Magro et P. Pujol, *Physique et outils mathématiques : méthodes et exemples*, EDP Sciences, 2008.
- ◆ http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation
(la page en anglais est plus fournie que celle en français et contient, entre autre, les réponses impulsionsnelles indiquées dans le texte, dernière consultation le 30 janvier 2014).

Références sur la simulation analogique

- ◆ Y. D. Save, H. Narayanan and S. B. Patkar, « Solution of partial differential equations by electrical analogy », *Journal of Computational Science*, **2**, 18, 2011.
- ◆ R. H. MacNeal, « The solution of partial differential equations by means of electrical networks », *Thèse de Doctorat*, California Institute of Technology (1949).
<http://thesis.library.caltech.edu/1529/>
(dernière consultation le 30 janvier 2014).



Renaud MATHEVET

Maître de conférences

Laboratoire national des champs magnétiques intenses (LNCMI)

Université Paul Sabatier (Toulouse III)

Toulouse (Haute-Garonne)