

LP15 - Propagation guidée des ondes

Réquis :

- Ondes acoustiques et équation de d'Alembert
- Écoulement parfait
- Ondes électromagnétiques

} Propagation libre.

Introduction :

• Qu'est-ce que le guidage ?

- On contraint une onde à se propager dans un volume donné, à suivre un chemin choisi, délimité par un matériau, par exemple un tuyau pour une onde acoustique.

• À quoi sert de guider les ondes ?

- Transport d'énergie et d'information d'une source vers un récepteur, plus optimal que la propagation libre du point de vue de l'utilisation de l'énergie et de la sécurité.

- Manip. guidage d'ondes acoustiques \Rightarrow on met en évidence l'existence de modes, ainsi qu'une dispersion (le signal reçu est déformé)

I - Guidage d'ondes acoustiques

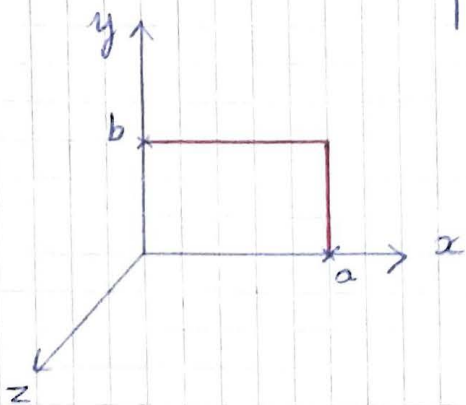
Essayons de modéliser et de comprendre le phénomène observé en introduction.

1° Position du problème

- * L'évolution de la pression lors du passage d'une onde acoustique est donnée par une équation de d'Alembert

$$\Delta p - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1) \xrightarrow{\text{linéarité}} \Delta p - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

- * On s'intéresse à la propagation dans un guide rectangulaire :



- le guidage implique l'ajout de conditions de bord à l'équation d'ondes. En supposant un écoulement parfait :

$\vec{u} \cdot \vec{m} = 0$ en tout point des parois, \vec{m} étant la normale locale à la paroi et \vec{u} étant le champ des vitesses fluides.

$$\text{Donc : } \underline{u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0 \quad \forall y} \quad \text{et} \quad \underline{u_y(x,0) = u_y(x,b) = 0 \quad \forall x}$$

- * Comment se répercutent ces conditions sur p ?

$$\Rightarrow \text{Équation d'Euler : } \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p$$

Il va y avoir réflexion sur les parois et donc superposition des ondes incidente et réfléchie. On cherche une solution à (1) de la forme

$$p(x,y,z,t) = X(x) Y(y) \cos(\omega t - kz)$$
$$\Rightarrow \underline{p(x,y,z,t) = X(x) Y(y) e^{-i(\omega t - kz)}} \quad (2)$$

ondes stationnaires propagation selon z
selon x et y

$$\text{donc } \begin{cases} u_x = -\frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{dX}{dx} Y(y) e^{i(kz - \omega t)} \\ u_y = -\frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{dY}{dy} X(x) e^{i(kz - \omega t)} \\ u_z = \frac{X(x) Y(y)}{\rho_0} \frac{k}{\omega} e^{i(kz - \omega t)} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \underline{X'(0) = X'(a) = 0 \quad \forall y, z, t}$$

$$\text{et } \underline{Y'(0) = Y'(b) = 0 \quad \forall x, z, t}$$

2°/ Dispersion dans un guide d'ondes

* Reportons (2) dans (1):

$$(3) \quad \frac{d^2 X}{dx^2} Y(y) + X(x) \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - k^2 \right) X(x) Y(y) = 0 \quad \forall x, y, z, t$$

* En x_0 tel que $X(x_0) \neq 0$: on divise par $X(x_0)$:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - k^2 + \frac{d^2 X}{dx^2} \bigg|_{x_0} \frac{1}{X(x_0)} \right) Y(y) = 0,$$

de la forme
$$Y''(y) + K_y^2 Y(y) = 0$$

Si $K_y^2 < 0$: solutions exp réelles, incapables de satisfaire simultanément les deux conditions de bord.

$$\Rightarrow K_y^2 > 0 \quad Y(y) = Y_0 \cos(K_y y) \Rightarrow Y'(y) = -Y_0 K_y \sin(K_y y)$$

$$Y'(0) = Y'(b) = 0 \Rightarrow K_y = \frac{m\pi}{b} \quad m \in \mathbb{N}$$

Rq. $m \in \mathbb{N}$ et pas \mathbb{N}^* car la condition de bord porte sur la dérivée
 $\Rightarrow m=0$ implique $Y(y) = \text{cte}$

* On conduit le même raisonnement en y_0 tel que $Y(y_0) \neq 0$:

$$X''(x) + K_x^2 X(x) = 0$$

$$\text{avec } K_x^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} - k^2 + \frac{1}{Y(y_0)} \frac{d^2 Y}{dy^2} \bigg|_{y_0} > 0 \quad K_x = \frac{m\pi}{a} \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\text{et donc } X(x) = X_0 \cos(K_x x)$$

* On injecte $X(x)$ et $Y(y)$ dans (3):

$$\text{d'où } \omega^2 = k^2 c_s^2 + (K_x^2 + K_y^2) c_s^2 \Rightarrow \omega^2 = k^2 c_s^2 + \pi^2 c_s^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

$$\text{et } p(x, y, z, t) = p_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(kz - \omega t)$$

Il apparaît des modes de propagation (m, n) , absents dans un problème de propagation libre.

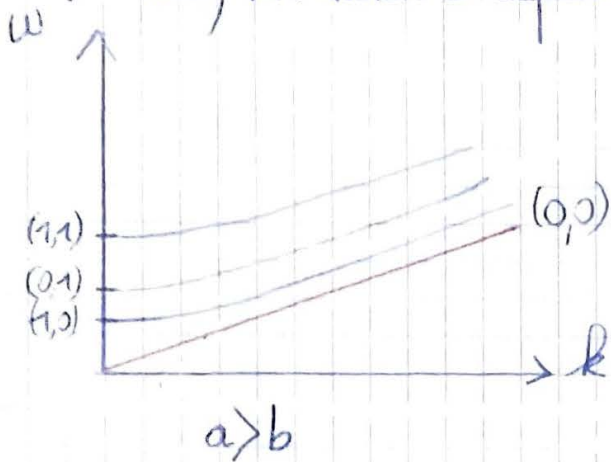
* $(0,0)$ OPM, comme en propagation libre $\omega^2 = k^2 c_s^2$ (non dispersif)

* Si m ou $n \neq 0$, le mode (m, n) ne se propage (k réel) que si

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{mn}^2}{c_s^2} > 0 \Rightarrow \omega^2 > \omega_{mn}^2 = \pi^2 c_s^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

où ω_{mn} désigne la pulsation de coupure du mode (m, n) considéré.

⇒ Ainsi, la relation de dispersion possède des branches : les modes.



Quelque soit le mode : lorsque $k c_s \gg \omega_{mn}$
 $\omega \sim k c_s^2 \Leftrightarrow k a, k b \ll 1$
 $\Leftrightarrow \lambda \gg a, b$

$$* \frac{(2\pi)^2}{\lambda_{\text{guide}}^2} = \frac{(2\pi)^2}{\lambda_{\text{libre}}^2} - \frac{(2\pi)^2}{\lambda_{\text{cmm}}^2} \quad (\text{réécriture})$$

(celle qui est réelle)

$$* v_p = \frac{\omega}{k} = f(k, m, n) \quad \text{et} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = g(k, m, n) \quad \text{pour } (m, n) \neq (0,0)$$

le guidage "rend" le milieu dispersif : les modes ne se propagent pas aux mêmes vitesses. La vitesse de groupe dépend de k

(donc de ω) et du mode (m, n) . Idem pour la vitesse de phase. (**)

* On remarque que pour un guide de section carrée ($a=b$), les branches $(1,0)$ et $(0,1)$ fusionnent, comme $(2,0)$ et $(0,2)$ et plus généralement les branches telles que $m^2 + n^2 = \text{cte}$.

⇒ La symétrie implique une dégénérescence des modes de propagation.

(**) Remarque : la vitesse "moyenne" d'un paquet d'ondes est la vitesse de phase. La vitesse de l'enveloppe est la vitesse de groupe. C'est elle qu'on peut mesurer dans la manip d'intro, chaque mode étant un paquet.

Matériaux On peut

3/ Guidage dans un tuyau cylindrique

Le modèle précédent nous fournit les ingrédients physiques nécessaires à la compréhension de l'expérience introductive. On souhaite maintenant identifier les modes observés tout à l'heure. On doit pour cela tenir compte de la géométrie cylindrique du guide pour avoir une discussion quantitative.

* Résultats de la théorie en géométrie cylindrique

(BUP Moreau
Champion Thibierge
Physique Exp)

⇒ projeter par comparaison avec la manip

Dans un tel guide, la relation de dispersion a une forme similaire:

$$\frac{1}{\lambda_{g\,mm}^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{c\,mm}^2} \Rightarrow \text{propag si } \omega > \omega_{mm} \Leftrightarrow \lambda < \lambda_{mm}$$

longueur d'onde du mode mm coupure du mode mm

$$\lambda_{c\,mm} = \frac{\pi a}{\mu_{mm}}$$

où μ_{mm} est le m -ième zéro de la dérivée de la m -ième fonction de Bessel de 1^{ère} espèce
 $\Leftrightarrow J'_m(\mu_{mm}) = 0$

* Protocole de mesure

INTRO { Aligner émetteur et récepteur on doit observer un signal sur le récepteur
⇒ via un oscillo connecté aux 2 systèmes
Intercaler un tuyau de diamètre a entre les 2 systèmes
⇒ observer

Essayer de séparer les modes et remonter à la vitesse de groupe du mode, identifier: $v_{g\,mm} = \frac{d\omega}{dk_{g\,mm}} = c \frac{\lambda_{(lib)}}{\lambda_{g\,mm}}$

* A-t-on de la dispersion dans le domaine audible?

Coupure du premier mode:

Conclusion:

II - Guidage d'ondes électromagnétiques

Motivation: on peut canaliser un signal électromagnétique depuis une source jusqu'à un détecteur. Le guidage d'ondes électromagnétiques permet de canaliser l'énergie et l'information vers l'endroit où on les requiert au lieu de les envoyer dans toutes les directions.

On utilise pour le guidage la réflexion des ondes électromagnétiques sur une interface. Deux solutions sont possibles:

- une interface vide / milieu conducteur est réfléchissante tant que

$$\omega < \omega_p \quad \text{pulsation plasma du métal / milieu conducteur}$$

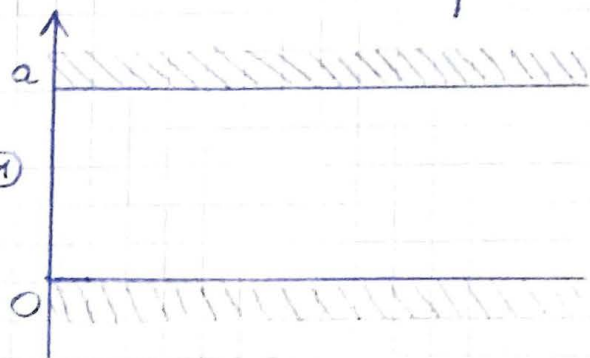
Par des fréquences suffisamment élevées: $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ où τ est le temps de relaxation des électrons (comprendre par là la durée qu'ils mettent pour réagir à une variation des champs), la réflexion est même totale: on peut alors assimiler le conducteur à un conducteur parfait.

Rq: si $\omega < \frac{1}{\tau}$ le milieu absorbe par effet de peau, sur une épaisseur $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \gamma}}$ d'autant plus faible que ω est grande.

- une interface entre deux diélectriques: on confine l'onde EM dans le milieu le plus réfringent ($n_1 > n_2$) en jouant sur l'angle d'incidence au dioptre (il doit être supérieur à l'angle limite, par lequel il y a réflexion totale et pas réfraction).

1/ Propagation guidée entre deux plans conducteurs parfaits

Milieu 1: vide
Milieu 2: conducteurs parfaits $\vec{E}_2 = \vec{0}$



Invariance par translation selon y et z
Propagation selon z

$$\vec{E} = \vec{E}_m(x) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m(x) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\text{avec } \vec{E}_m(x) = E_{mx}(x) \vec{e}_x + E_{mz}(x) \vec{e}_z$$

• Dans le vide, les champs vérifient les équations de Maxwell dans le vide;

$$\text{div } \underline{E} = 0$$

$$\frac{dE_{mx}}{dx} + i k E_{mz} = 0$$

$$\text{div } \underline{B} = 0$$

$$\frac{dB_{mx}}{dx} + i k B_{mz} = 0$$

$$\text{rot } \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} -k E_{my} = \omega B_{mx} \\ i k E_{mx} - \frac{dE_{mz}}{dx} = i \omega B_{my} \\ \frac{dE_{ym}}{dx} = i \omega B_{mz} \end{cases}$$

$$\text{rot } \underline{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} -\frac{\omega}{c^2} E_{mx} = k B_{my} \\ -\frac{i \omega}{c^2} E_{my} = i k B_{mx} - \frac{dB_{mz}}{dx} \\ -\frac{i \omega}{c^2} E_{mz} = \frac{dB_{my}}{dx} \end{cases}$$

que l'on peut combiner pour obtenir deux équations vectorielles de d'Alembert:

$$\Delta \underline{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \underline{0}$$

et

$$\Delta \underline{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = \underline{0}$$

$$\text{Pour } \underline{E}_x: \frac{d^2 E_{mx}}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_{mx} = 0 \quad (1)$$

$$\text{et } \underline{B}_x: \frac{d^2 B_{mx}}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) B_{mx} = 0 \quad \text{par exemple. } (2)$$

\Rightarrow généralisable à chaque composante.

• À ces équations s'ajoutent des conditions de bord, en $x=0$ et $x=a$:

- continuité des composantes tangentielles de \underline{E} : $E_{my}(0) = E_{my}(a) = 0$

RELATIONS DE PASSAGE

$$E_{mz}(0) = E_{mz}(a) = 0$$

- continuité de la composante normale de \underline{B} : $B_{mx}(0) = B_{mx}(a) = 0$

À partir de là, on cherche des solutions particulières:

Définition: $\vec{E} \perp \vec{k}$ et $\vec{B} \perp \vec{k} \Rightarrow \begin{cases} E_{mx} = 0 \\ B_{mx} = 0 \end{cases} \quad \forall x, t$

$E_{zm} = 0 \xrightarrow{\text{GAUSS}} \underline{E_{mx}} = \text{cte} \quad \forall x$

$B_{mx} = 0 \xrightarrow{\text{THOMSON}} B_{mx} = \text{cte}$ or en $x=0$ a.a. $B_{mx} = 0$
donc $\underline{B_{mx}} = 0 \quad \forall x$

$B_{my} = 0 \xrightarrow{\text{FARADAY}} \underline{E_{my}} = 0 \quad \forall x$

d'où: $\vec{E} = E_m e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$ et donc $\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_m \vec{e}_y$

(1) $\Rightarrow \omega = kc$ Relation de dispersion $\underline{B} = \underline{E}$

- Mode non dispersif \Rightarrow pas de déformation du signal.
- Pas d'atténuation: k est réel et $k^2 > 0$

Les relations de passage impliquent l'existence de charges et courants de surface

- discontinuité de $\underline{E_{ox}}$: $\vec{m}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
" $\vec{\sigma}$ (cond. parfait)

en $x = a$: $\vec{m}_{12} = \vec{e}_x \quad -E_{mx} = \frac{\sigma(a)}{\epsilon_0}$

en $x = 0$: $\vec{m}_{12} = -\vec{e}_x \quad E_{mx} = \frac{\sigma(0)}{\epsilon_0} = -\frac{\sigma(a)}{\epsilon_0}$

d'où $\underline{\sigma(a)} = -\underline{\sigma(0)}$

- discontinuité de $\underline{B_y}$: $\vec{m}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{J}_s$
on prend $\vec{B}_2 = \vec{0}$

donc: en $x = a$: $-\underline{B_y} \vec{e}_z = \mu_0 \vec{J}_s \Rightarrow \vec{J}_s(a) = -\frac{B_y}{\mu_0} \vec{e}_z$

en $x = 0$: $\vec{J}_s(0) = \frac{B_y}{\mu_0} \vec{e}_z = -\vec{J}_s(a)$ car $B_y = \text{cte}$

et $\vec{J}_s(0) = \epsilon_0 c E \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z$

/ Modes TE

On relâche la contrainte sur \vec{B}

Définition. $\vec{E} \perp \vec{k} \Rightarrow E_{mx} = 0 \forall x, t \Rightarrow E_{mx} = \text{cte}$
Gauss

Donc, d'après (1)

$$\star \text{ soit } \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 \quad (2) \Rightarrow \frac{dB_{mx}}{dx} = \text{cte} \text{ or } B_{mx}(a) = B_{mx}(0)$$

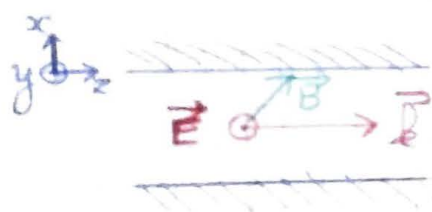
$$\Rightarrow B_{mx} = \text{cte} = 0 \text{ (bords)}$$

donc $E_{my} = 0$, donc $B_{mx} = 0$ on retrouve le mode TEM

$$\star \text{ soit } E_{mx} = 0 \Rightarrow B_{my} = 0$$

$$\begin{cases} \underline{E} = E_{my} \text{ et } \vec{E} = E_m(x) e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_y \\ \text{et } \vec{B} = B_{xm} \vec{e}_x + B_{zm} \vec{e}_z \end{cases}$$

$$\text{avec } B_{zm} = \frac{1}{i\omega} \frac{dE_{my}}{dx} \text{ et } B_{xm} = -\frac{k}{\omega} E_{my}$$



Mode transverse électrique $\vec{k} \cdot \vec{B} \neq 0$

Si on détermine $E_{my}(x)$, on connaît \vec{B}

$$\frac{d^2 E_{my}}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_{my} = 0 \text{ et } \frac{\omega^2}{c^2} \neq k^2$$

On pose $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ et, de façon similaire à ce qu'on a fait

pour les ondes acoustiques on montre que seul $K^2 > 0$ est compatible avec les conditions de bord, d'où

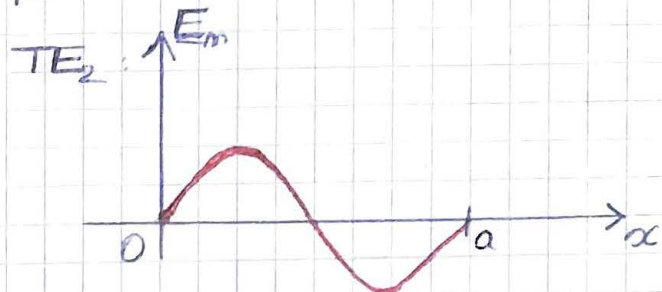
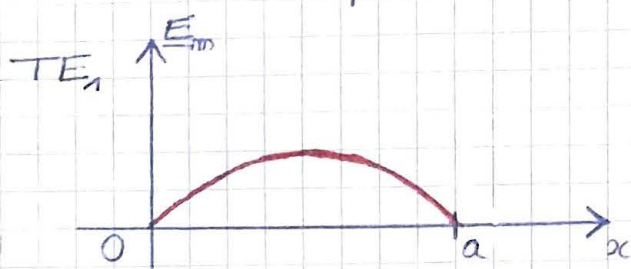
$$E_{my} = E_0 \cos(Kx + \varphi) \text{ et comme } E_{my}(0) = E_{my}(a) = 0$$

on en déduit $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et $Ka = m\pi$, $m \in \mathbb{N}^*$ ($m < 0$ $E_0 \leftarrow$)

$$\text{d'où } \underline{E} = \underline{E}_m = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right)$$

d'où $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{cm}^2}{c^2}$ avec $\omega_{cm} = \frac{m\pi c}{a}$ Coupure

On retrouve là aussi une structure d'onde stationnaire dans la direction où l'onde est limitée spatialement, et plusieurs modes (quantification de k_z)

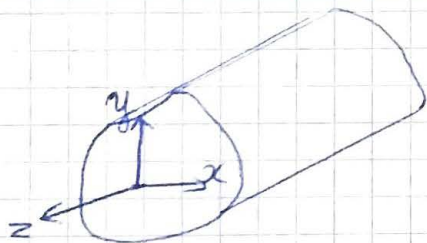


La relation reliant k_z à ω n'est pas linéaire, le guide est donc dispersif.

La plus petite valeur de ω_{cm} est $\omega_c = \frac{\pi c}{a}$ pulsation de coupure

A.N. pour $a = 3 \text{ cm}$, $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2a} = 5 \text{ GHz}$

2° Guide de section quelconque



Les parois sont toujours supposées parfaitement conductrices mais on perd l'invariance par translation selon y par rapport au cas précédent.

Cette géométrie est comparable à celle traitée par les ondes acoustiques.

On cherche des solutions de la forme:

$$\underline{E} = (E_z \underline{e}_z + \underline{E}_\perp) e^{i(kz - \omega t)} \text{ et } \underline{B} = (B_z \underline{e}_z + \underline{B}_\perp) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\text{div } \underline{E} = 0 \Rightarrow ik E_z + \underline{\nabla}_\perp \cdot \underline{E}_\perp = 0 \quad \underline{\nabla}_\perp = \frac{\partial}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{e}_y$$

$$\text{rot } \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \underline{0} \Rightarrow i\omega \underline{B} = \underbrace{\underline{\nabla}_\perp \times \underline{E}_\perp}_{\parallel \underline{e}_z} + \underbrace{\underline{\nabla} E_z \times \underline{e}_z}_{\perp \underline{e}_z} + \underbrace{ik \underline{e}_z \times \underline{E}_\perp}_{\perp \underline{e}_z}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} i\omega \underline{B}_z = \underline{\nabla}_\perp \times \underline{E}_\perp \\ i\omega \underline{B}_\perp = \underline{\nabla} E_z \times \underline{e}_z + ik \underline{e}_z \times \underline{E}_\perp \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Si } E_z = 0 \text{ et } B_z = 0 \quad \begin{aligned} \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{E}_\perp &= 0 \\ \vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp &= 0 \Rightarrow \vec{E}_\perp = -\text{grad } \phi(x,y) \end{aligned}$$

(ce qui peut se réécrire comme $\begin{cases} \Delta E_x = 0 \\ \Delta E_y = 0 \end{cases}$ avec les conditions de bord $\vec{m}_z \times \vec{E}_\perp = \vec{0}$ en tout point de la paroi)

et donc $\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{E}_\perp = 0 = \Delta \phi(x,y)$

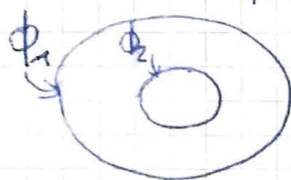
\Rightarrow on se ramène à un problème d'électrostatique.

Comme $\phi = \text{cte}$ dans tout le conducteur parfait, $\Delta \phi = 0$ dans le vide implique $\phi = \text{cte}$ dans tout le volume délimité par le guide et donc

$$\vec{E}_\perp = \vec{0}$$

\Rightarrow Le mode TEM, dont la propagation est non dispersive, ne peut pas exister. Seuls les modes TE et TM peuvent s'y propager, impliquant une déformation du signal durant sa propagation, ce qui peut être embêtant pour transporter de l'information.

- Pour avoir un mode TEM, on a besoin d'un deuxième conducteur. C'est par exemple le principe du câble coaxial



: on peut avoir $\Delta \phi = 0$ mais $\vec{E}_\perp \neq \vec{0}$

- Dans un guide d'ondes constitué d'un seul conducteur, seules les ondes telles que $\omega > \omega_c$ pourront se propager (ω_c étant la coupure la plus basse des modes autorisés). On peut envisager des les utiliser à partir de $\omega > \omega_c$ et tant que $\omega < \omega_{pe}$ (au-delà, le conducteur devient transparent).

Typiquement, pour le cuivre $\omega_{pe} \sim 1,6 \times 10^{16} \text{ rad/s}$ soit $f_{pe} = 2.5 \times 10^{15} \text{ Hz}$ et on a vu $f_c \sim 10^9 \text{ Hz}$. On se sert des guides d'ondes pour guider des

ondes dont la fréquence est de l'ordre de la dizaine de gigahertz (micro-ondes)
(quelques)

Pourquoi n'utilise-t-on pas de câble coaxial dans cette gamme de fréquences pour s'affranchir des problèmes de dispersion? C'est lié aux problèmes d'atténuation de l'onde lors du guidage.

3° Atténuation dans un câble coaxial (si le temps, improviser)