1

Valor absoluto

Definición 1.1

$$|x| = \left\{ \begin{array}{ll} \text{si} & x, \quad x \geq 0 \\ \text{si} & -x, \quad x \leq 0 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1 *Probemos que* $|x| = \sqrt{x^2}$

Sea $x < 0$, *entonces por definición* $|x| = -x > 0$. *Después vemos que* $(-x)^2 = x^2$.
Decimos que hay dos raíces cuadradas de cualquier número positivo, y e $-y$, *por lo tanto por el teorema 3.21 y tiene una raíz cuadrada no negativa única* $\sqrt{y}$. *Así* $\sqrt{x^2} = -x = |x|$ *cuando* $x < 0$ *y* $\sqrt{x^2} = x = |x|$ *cuando* $x \geq 0$

Teorema 1.2 *Si* $a \geq 0$, *es* $\;|x| \leq a\;$ *si y sólo si* $\;-a \leq x \leq a$

Demostración.- *Debemos probar dos cuestiones: primero, que la desiguadad* $|x| \leq a$ *implica las dos desigualdades* $-a \leq x \leq a$ *y recíprocamente, que* $-a \leq x \leq a$ *implica* $|x| \leq a$.
Ya supuesto $|x| \leq a$ *se tiene también* $-a \leq -|x|$. *Pero ó* $\;x = |x|\;$ *ó* $\;x = -|x|$ *y, por lo tanto,* $x \leq a\;$ *y* $-a \leq x$, *lo cual prueba la primera parte del teorema.*
Para probar el recíproco, supóngase $-a \leq x \leq a$. *Si* $x \leq 0$ *se tiene* $|x| = x \leq a$; *si por el contrario es* $x \leq 0$, *entonces* $|x| = -x \leq a$. *En ambos casos se tiene* $|x| \leq a$, *lo que demuestra el teorema.*

Teorema 1.3 (Desigualdad triangular) *Para todos los números a y b se tiene*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración.- *Vamos a considerar cuatro casos:*

$$\begin{array}{rrr} (1) & a \geq 0 & b \geq 0 \\ (2) & a \geq & b \leq 0 \\ (4) & a \leq & b \geq 0 \\ (5) & a \leq 0 & b \leq 0 \end{array}$$

En el caso (1) *tenemos también* $a + b \geq 0$, *esto es evidente; en efecto por definición*

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

de modo que en este caso se cumple la igualdad.
En el caso (4) *se tiene* $a+b \leq 0$ *y de nuevo se cumple la igualdad:*

$$|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) = |a|+|b|$$

En el caso (2)*, cuando* $a \geq 0$ *y* $b \leq 0$*, debemos demostrar que*

$$|a+b| \leq a-b$$

Este caso puede dividirse en dos subcasos. Si $a+b \geq 0$*, entonces tenemos que demostrar que*

$$a+b \leq a-b$$

es decir,

$$b \leq -b,$$

lo cual se cumple ciertamente puesto que b *es negativo y* $-b$ *positivo. Por otra parte, si* $a+b \leq 0$ *debemos demostrar que*

$$-a-b \leq a-b$$

es decir

$$-a \leq a,$$

lo cual es verdad puesto que a *es positivo y* $-a$ *negativo.*
Nótese finalmente que el caso (3) *puede despacharse sin ningún trabajo adicional aplicando el caso* (2) *con* a *y* b *intercambiados.*

Se puede dar una demostración mas corta dado que

$$|a| = \sqrt{a^2} \text{ ó } |a|^2 = a^2$$

. Sea $(|a+b|)^2 = (a+b)$ *Entonces*

$$\begin{aligned}
(|a+b|)^2 &= (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\
&\leq a^2+2|a|\dot{|}b|+b^2 \\
&= |a|^2 2|a|\dot{|}b|+|b|^2 \\
&= (|a|+|b|)^2
\end{aligned}$$

De esto podemos concluir que $|a+b| \leq |a|+|b|$ *porque* $x^2 < y^2$ *implica* $x < y$

Hay una tercera forma de probar que es utilizando el teorema anterior.
Puesto que $x = |x|$ *ó* $x = -|x|$*, se tiene* $-|x| \leq x \leq |x|$*. Análogamente* $-|y| \leq y \leq |y|$*. Sumando ambas desigualdades se tiene:*

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

y por tanto en virtud del teorema 4.2 se concluye que: $|x+y| \leq |x|+|y|$

Ejercicios y Demostraciones

Ejercicios[1]

Ejercicio 1.1 *Dese una expresión equivalente de cada una de las siguientes utilizando como mínimo una vez menos el signo de valor absoluto.*

[1] Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag 19-26

$$\begin{array}{rrcl}
(i) & |\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}| & \Rightarrow & \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7} \\
(ii) & ||a+b|-|a|-|b|| & \Rightarrow & |a+b|-|a|-|b| \\
(iii) & |\left(|a+b|+|c|-|a+b+c|\right)| & \Rightarrow & |a+b|+|c|-|a+b+c| \\
(iv) & |x^2-2xy+y2| & \Rightarrow & x^2-2xy+y2 \\
(v) & |\left(|\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}|\right)| & \Rightarrow & \sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}
\end{array}$$

Ejercicio 1.2 *Expresar lo siguiente prescindiendo de signos de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.*

*(*i*)* $|a+b|-|b|$

$$\begin{array}{rcccccccc}
a & si & a & \geq & -b & y & b & \geq & 0 \\
-a & si & a & \leq & -b & y & b & \leq & 0 \\
a+2b & si & a & \geq & -b & y & b & \leq & 0 \\
-a-2b & si & a & \leq & -b & y & b & \geq & 0
\end{array}$$

*(*ii*)* $|x|-|x^2|$

$$\begin{array}{rcccc}
x-x^2 & si & x & \geq & 0 \\
-x-x^2 & si & x & \leq & 0
\end{array}$$

Ejercicio 1.3 *Encontrar todos los números x para los que se cumple.*

*(*i*)* $|x-3|=8$

$$\begin{array}{ccccc}
-8 & = & x-3 & = & 8 \quad \textit{teorema 4.1} \\
-5 & = & x & = & 11
\end{array}$$

*(*ii*)* $|x-3|<8$

$$\begin{array}{ccccc}
-8 & < & x-3 & < & 8 \quad \textit{teorema 4.1} \\
-5 & < & x & < & 11
\end{array}$$

*(*iii*)* $|x+4|<2$

$$\begin{array}{ccccc}
-2 & < & x+4 & < & -2 \quad \textit{teorema 4.1} \\
-6 & < & x & < & -2
\end{array}$$

*(*iv*)* $|x-1|+|x-2|>1$

Por definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si \quad x \geq 2 \\ 2-x & si \quad x \leq 2 \end{cases} \tag{1.3}$$

Por lo tanto queda comprobar:

$$
\begin{array}{llclcl}
Si & x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)+(2-x)>1 & \Rightarrow & x<1 \\[2ex]
Si & 1 \leq x \leq 2 & \Rightarrow & (x-1)+(2-x)>1 & \Rightarrow & 1>1 \\[2ex]
Si & x \geq 2 & \Rightarrow & (x-1)+(x-2)>1 & \Rightarrow & x>2
\end{array}
$$

Así: $x < 1 \ \vee \ x > 2$

(v) $|x-1| + |x+1| < 2$

Por definición:

$$
|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \\ \end{cases} \tag{1.4}
$$

$$
|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -1-x & si \quad x \leq -1 \end{cases} \tag{1.5}
$$

Por lo tanto queda comprobar:

$$
\begin{array}{llclcl}
Si & x \leq -1 & \Rightarrow & (1-x)+(1-x)<2 & \Rightarrow & x>-1 \\[2ex]
Si & -1 \leq x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)+(x+1)<2 & \Rightarrow & 2<2 \\[2ex]
Si & x \geq 1 & \Rightarrow & (x-1)+(x+1)<2 & \Rightarrow & x<1
\end{array}
$$

Pero es falso que x *satisface a* $-1 \leq x \leq 1$, *y contradice a que* x *satisface a todos los reales, por lo tanto no existe solución*

(vi) $|x-1| + |x+1| < 1$

De la misma manera que el anterior ejercicio no tiene solución para ningún x.

(vii) $|x-1| \cdot |x+1| = 0$

Por definición:

$$
|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \\ \end{cases} \tag{1.6}
$$

$$
|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -1-x & si \quad x \leq -1 \end{cases} \tag{1.7}
$$

queda comprobar:

$$
\begin{array}{llclcl}
Si & x \leq -1 & \Rightarrow & (1-x)+(-1-x)=0 & \Rightarrow & x \leq -1 \cup x=1 \cup x=-1 \\[2ex]
Si & -1 \leq x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)\dot{(}x+1)=0 & \Rightarrow & -1 \leq x \leq 1 \ \cup \ x=1 \ \cup \ x=-1 \\[2ex]
Si & x \geq 1 & \Rightarrow & (x-1)\dot{(}x+1)=0 & \Rightarrow & x \notin \mathbb{R}
\end{array}
$$

Por lo tanto $x = 1 \quad ó \quad x = -1$

(viii) $|x-1| \cdot |x+2| = 3$

Demostraciones [2]

Teorema 1.4 $|xy| = |x| \cdot |y|$

Demostración.- *Si* $|xy|$ *Por teorema 4.1* $\sqrt{(xy)^2}$ *luego por propiedad 3.1* $\sqrt{x^2 \cdot y^2}$, *así* $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}$ *y* $|x| \cdot |y|$

Teorema 1.5 $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$

Demostración.- *Si* $\left|\frac{1}{x}\right|$ *por definición* $\sqrt{(x^{-1})^2}$, *después* $\left(\frac{1}{x}\right)^{2/2}$, *por propiedad 3.1* $\frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{x^2}}$, *luego* $\frac{1}{|x|}$

Teorema 1.6 $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$ *si* $y \neq 0$

Demostración.-

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{x^{2/2}}{y^{2/2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{2/2} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

Teorema 1.7 $|x-y| \leq |x| + |y|$

Demostración.- *Sea* $(|x-y|)^2 \leq (|x|+|y|)^2$, *entonces:*

$$\begin{aligned}
(|x-y|)^2 &= (x-y)^2 \\
&= x^2 - 2xy + y^2 \\
&\leq |x|^2 + |-2xy| + |y|^2 && \textit{Ya que } -2xy \leq |-2xy| \\
&= |x|^2 + |-2||x||y| + |y|^2 && \textit{Por teorema 4.4.} \\
&= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\
&= (|x|+|y|)^2
\end{aligned}$$

luego por teorema 2.18 $|x-y| \leq |x| + |y|$

[2] Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag 20

Teorema 1.8 $|x| - |y| \leq |x - y|$

Demostración.- *Su demostración es parecida al anterior teorema,*

$$\begin{aligned} (|x| - |y|)^2 &= |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \\ &\leq x^2 - 2xy + y^2 && \textit{por el contrareciproco de } |2xy| \geq 2xy \\ &= (x-y)^2 \\ &= |x-y|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $|x| - |y| \leq |x - y|$

Teorema 1.9 $||x| - |y|| \leq |x - y|$ *(¿ Por qué se sigue esto inmediatamente del anterior teorema ?)*

Demostración.- *Sea* $\sqrt{(|x| - |y|)^2}$ *entonces,*

$$\sqrt{(|x| - |y|)^2} = \sqrt{(x^2 - 2|x||y| + y^2} \leq \sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$$

y por definición se tiene $|x - y|$

Teorema 1.10 $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$

Demostración.- *Sea* $\sqrt{(x + y + 9)^2}$ *entonces,*

$$\sqrt{x^2 + z^2 + +y^2 + 2xy + 2xz + 2yz} \leq \sqrt{|x|^2 + |z|^2 + +|y|^2 + 2|x||y| + 2|x||z| + 2|y||z|}$$

por lo tanto $\sqrt{(|x| + |y| + |z|)^2}$. *La igualdad se prueba si* $\forall x, y, z \geq 0$ *ó* $\forall x, y, z \leq 0$

Teorema 1.11 *El máximo de dos números* x *e* y *se denota por* $max(x, y)$. *Así* $max(-1, 3) = max(3, 3)$ *y* $max(-1, -4) = max(-4, -1 = -1)$. *El mínimo de* x *e* y *se denota por* $min(x, y)$. *Demostrar que:*

1. $max(x, y) = \dfrac{x + y + |y - x|}{2}$

2. $min(x, y) = \dfrac{x + y - |y - x|}{2}$

Derivar una fórmula para $max(x, y, z)$ *y* $min(x, y, z)$, *utilizando. por ejemplo,* $max(x, y, z) = max(x, max(x, y))$

Demostración.- *Por definición de valor absoluto se tiene:*

$$|x - y| = \begin{cases} x - y & si, \quad x \geq y \\ y - x & si, \quad x \leq y \end{cases} \tag{1.8}$$

Por lo tanto

- $max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2} = \dfrac{x + y + x - y}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$

- $max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2} = \dfrac{x + y + y - x}{2} = \dfrac{2y}{2} = y$

La demostración es parecido para para $min(x, y)$
Se deriva una formula para $mas(x, y, z) = max(x, max(y, z))$ de la siguiente manera

$$max(x, max(y, z)) = \frac{x + \dfrac{y+z+|y-z|}{2} + \left|x - \dfrac{y+z+|y-z|}{2}\right|}{2}$$

Teorema 1.12 *Demostrar que $|a| = |-a|$*

Demostración.- *Si $a \geq 0$, para $|a|^2$ entonces a^2, en virtud del teorema 2.5 $(-a)^2 = |-a|^2$, así se demuestra que $|a| = |-a|$. Luego es evidente para $a \leq 0$*

Teorema 1.13 [3] *Demostrar que si*

$$|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |y - y_0| < \frac{e}{2}$$

entonces

$$|(x+y) - (x_o + y_0)| < \epsilon,$$
$$|(x-y) - (x_o - y_0)| < \epsilon.$$

Demostración.- *primeramente si $|(x+y) - (x_o + y_0)| = |(x - x_0) + (y - y_0)|$, por desigualdad triangular e hipótesis,*

$$|(x - x_0) + (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Demostramos de similar manera y por teorema 1.7,

$$|(x-y) - (x_o - y_0)| = |(x - x_0) - (y - y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Teorema 1.14 [4] *Demostrar que si*

$$|x - x_0| < min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}\right) \quad y \quad |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2(x_0 + 1)}$$

entonces $|xy - x_0 y_0| < \epsilon$.

La primera igualdad de la hipótesis significa precisamente que:

$$|x - x_0| < 1 \quad y \quad |x - x_0| \frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

Demostración.- *puesto que $|x - x_0| < 1$ se tiene*

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|$$

Así pues

[3] Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag 23-24
[4] Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag 23-24

$$
\begin{aligned}
|xy - x_0y_0| &= |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \\
&= |x(y-y_0) + y_0(x-x_0)| \\
&\leq |x|\cdot|y-y_0| + |y_0|\cdot|x-x_0| \\
&< (1+|x_0|)\cdot\frac{\epsilon}{2(|x_0|+1|)} + |y_0|\cdot\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1|)} \qquad \textit{ya que } |y_0|\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1|)} < |y_0|\frac{\epsilon}{2|y_0|} \textit{ para } |y_0| \neq 0 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \qquad \textit{ó } |y_0|\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1|)} = \frac{\epsilon}{2} \textit{ si } |y_0| = 0 \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

Teorema 1.15 *Demostrar que si* $y_0 \neq 0$ *y*

$$|y - y_0| < min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

entonces $y \neq 0$ *y*

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{|y_0|}\right|$$

Demostración.- *Se tiene*

$$|y_0| - |y| < |y - y_0| < \frac{y_0}{2},$$

de modo que $|y| < \dfrac{|y_0|}{2}$. *En particular,* $y \neq 0$, *y*

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{y_0}.$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y|\cdot|y_0|} < \frac{2}{y_0}\cdot\frac{1}{|y_0|}\cdot\frac{\epsilon|y_o|^2}{2} = \epsilon$$

Teorema 1.16 *Sustituir los interrogantes del siguiente enunciado por expresiones que encierren* ϵ, x_0 *e* y_0 *de tal manera que la conclusión sea válida:*
Si y_0 *y*

$$|y - y_0| <? \quad y \quad |x - x_0| <?$$

entonces $y \neq 0$ *y*

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| < \epsilon$$

Sea $|x\dfrac{1}{y} - x_0\dfrac{1}{y_0}| < \epsilon$ *entonce* $|x\cdot y^{-1} - x_o\cdot y_0^{-1}| < \epsilon$ *por teorema 4.14*

$$|x - x_0| < min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0^{-1}|+1)}\right) \qquad y \qquad |y^{-1} - y_0^{-1}| < \frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}$$

luego por teorema 4.15

$$|y - y_0| < min\left(\frac{\dfrac{\epsilon}{2(|x_o|)+1}\cdot|y_0|^2}{2}\right) = \text{mín}\left(\frac{\epsilon\cdot|y_0|^2}{4(|x_o|+1)}\right)$$

Demostraciones [5]

Teorema 1.17 $|x| = 0$ *si sólo si* $x = 0$

Demostración.- *Si* $|x| = 0$, *por definición* $x = 0$. *Luego, si* $x = 0$, *entonces por teorema* $\sqrt{x^2} = \sqrt{0^2} = 0$

Teorema 1.18 $|x - y| = |y - x|$

Demostración.- *Por teorema* $|x - y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{y^2 - 2yx + x^2} = \sqrt{(y-x)^2} = |y - x|$

Teorema 1.19 $|x|^2 = x^2$

Demostración.- *Si* $|x|^2$, *por teorema* $\left(\sqrt{x^2}\right)^2$, *por propiedad de potencia* x^2

Ejercicios [6]

Ejercicio 1.4 *Cada desigualdad* (a_i), *de las escritas a continuación, equivale exactamente a una desigualdad* (b_j). *Por ejemplo,* $|x| < 3$ *si y sólo si* $-3 < x < 3$ *y por tanto* (a_1) *es equivalente a* (b_2). *Determinar todos los pares equivalentes.*

$\vert x\vert < 3$	$\longrightarrow$	$-3 < x < 3$	$\vert x+2\vert \geq 5$	$\longrightarrow$	$x \geq 3 \lor x \leq -7$
$\vert x-1\vert < 3$	$\longrightarrow$	$-2 < x < 4$	$\vert 5 - x^{-1}\vert < 1$	$\longrightarrow$	$4 < x < 6$
$\vert 3-2x\vert < 1$	$\longrightarrow$	$1 < x < 2$	$\vert x-5\vert < \vert x+1\vert$	$\longrightarrow$	$x > 2$
$\vert 1+2x\vert \leq 1$	$\longrightarrow$	$-1 \leq x \leq 0$	$\vert x^2-2\vert \leq 1$	$\longrightarrow$	$-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ ó $1 \leq x \leq \sqrt{3}$
$\vert x-1\vert > 2$	$\longrightarrow$	$x > 4 \lor x < -1$	$x < x^2 - 12 < 4x$	$\longrightarrow$	$\dfrac{1}{6} < x < \dfrac{1}{4}$

Ejercicio 1.5 *Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa. En cada caso razonar la decisión.*

a) $x < 5$ *implica* $|x| < 5$

Es falso ya que $|-6| < 5$ *entonces* $6 > 5$.

b) $|x - 5| < 2$ *implica* $3 < x < 7$

Es verdad ya que por teorema $-2 < x - 5 < 2$ *entonces* $3 < x < 7$.

[5] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag 53-54
[6] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag 53-54

c) $|1+3x| \leq 1$ *implica* $x > -\dfrac{2}{3}$

es verdad ya que $-1 \leq 1+3x \leq 1$ *entonces* $-\dfrac{2}{3} \leq x \leq 0.$

d) *No existe número real* x *para el que* $|x-1| = |x-2|$

Es falso ya que se cumple para $\dfrac{3}{2}$.

e) *Para todo* $x > 0$ *existe un* $y > 0$ *tal que* $|2x+y| = 5$

Es falso ya que si tomas $x = 3$ *será* $y < 0$