CÁLCULO I

Demostraciones y ejercicios

por FODE

Índice general

1

Axiomas de Cuerpo

Axioma 1 (Propiedad conmutativa)

$$x+y=y+x, \quad xy=yx$$

Axioma 2 (Propiedad Asociativa)

$$x+(y+z)=(x+y)+z, \quad x(yz)=(xy)z$$

Axioma 3 (propiedad distributiva)

$$x(y+z)=xy+xz$$

Axioma 4 (Existencia de elementos neutros) *Existen dos números reales distintos, que se indican por 0 y 1 tales que para cada número real x se tiene:*

$$0+x=x+0=x \;\; y \;\; 1\cdot x=x\cdot 1=x$$

Axioma 5 (Existencia de negativos) *Para cada número real x existe un número real y tal que:*

$$x+y=y+x=0$$

Axioma 6 (Existencia del recíproco) *Para cada número real $x\neq 0$ existe un número real y tal que:*

$$xy=yx=1$$

1.1. Teoremas[1]

Teorema 1.1 (Ley de simplificación para la suma) *Si $a+b=a+c$ entonces $b=c$ (En particular esto prueba que el número 0 del axioma 4 es único)*

Demostración.- *Dado a+b=a+c. En virtud de la existencia de negativos, se puede elegir y de manera que $y+a=0$, con lo cual $y+(a+b)=y+(a+c)$ y aplicando la propiedad asociativa tenemos $(y+a)+b=(y+a)+c$ entonces, $0+b=0+c$. En virtud de la existencia de elementos neutros, se tiene $b=c$.*
por otro lado este teorema demuestra que existe un solo número real que tiene la propiedad del 0 en el axioma 4. En efecto, si 0 y $0^{'}$ tuvieran ambos esta propiedad, entonces $0+0^{'}=0$ y $0+0=0$; por lo tanto, $0+0^{'}=0+0$ y por la ley de simplificación para la suma $0=0^{'}$

[1] Tom Apostol Vol. 1 pag. 22-23

Teorema 1.2 (Posibilidad de la sustracción) *Dado a y b existe uno y sólo un x tal que $a+x=b$. Este x se designa por $b-a$. En particular $0-a$ se escribe simplemente $-a$ y se denomina el negativo de a*

Demostración.- *Dados a y b por el axioma 5 se tiene y de manera que $a+y=0$ ó $y=-a$, por hipótesis y teorema tenemos que $x=b-a$ sustituyendo y tenemos $x=b+y$ y propiedad conmutativa $x=y+b$, entonces $a+x=a+(y+b)=(a+y)+b=0+b=b$ esto por sustitución, propiedad asociativa y propiedad de neutro, Por lo tanto hay por lo menos un x tal que $a+x=b$. Pero en virtud del teorema 1.1, hay a lo sumo una. Luego hay una y sólo una x en estas condiciones.*

Teorema 1.3 $b-a=b+(-a)$

Demostración.- *Sea $x=b-a$ y sea $y=b+(-a)$. Se probará que $x=y$. por definición de $b-a$, $x+a=b$ y $y+a=[b+(-a)]+a=b+[(-a)+a]=b+0=b$, por lo tanto, $x+a=y+a$ y en virtud de teorema 1.1 $x=y$*

Teorema 1.4 $-(-a)=a$

Demostración.- *Se tiene $a+(-a)=0$ por definición de $-a$ incluido en el teorema 1.1. Pero esta igualdad dice que a es el opuesto de $-a$, es decir, que si $a+(-a)=0$ entonces $a=0-(-a)=a=-(-a)$*

Teorema 1.5 $a(b-c)=ab-ac$

Demostración.- *Sea $a(b-c)$ por teorema 1.3 tenemos que $a\left[b+(-c)\right]$ y por la propiedad distributiva $[ab+a(-c)]$, y en virtud de los teorema 1.12 y 1.3 nos queda $ab-ac$*

Teorema 1.6 $0\cdot a=a\cdot 0=0$

Demostración.- *Sea $0\cdot a$ por la propiedad conmutativa $a\cdot 0$, $a\cdot 0+0$ y $a\cdot 0+[a+(-a)]$ y en virtud la propiedad asociativa y distributiva $a(0+1)+(-a)$ después $1(a)+(-a)$, luego por elemento neutro y existencia de negativos tenemos 0, Así queda demostrado que cualquier número multiplicado por cero es cero.*

Teorema 1.7 (Ley de simplificación para la multiplicación) *Si $ab=ac$ y $a\neq 0$, entonces $b=c$. (En particular esto demuestra que el número 1 del axioma 4 es único)*

Demostración.- *Sea b, $a\neq 0$, y por el existencia del recíproco tenemos $a\cdot a^{'}=1$ luego, $b=b\cdot 1=b\left[a(a^{'})\right]=(ab)(a^{'})=(ac)(a^{'})=c(a\cdot a^{'})=c\cdot 1=c$ por lo tanto queda demostrado la ley de simplificación.*

Teorema 1.8 (Posibilidad de la división) *Dados a y b con $a\neq 0$, existe uno y sólo un x tal que $ax=b$. La x se designa por b/a ó $\dfrac{b}{a}$ y se denomina cociente de b y a. En particular $1/a$ se escribe también a^{-1} y se designa recíproco de a*

Demostración .- Sea a y b por axióma 6 se tiene un y de manera que $a \cdot y = 1$ ó $y = a^{-1}$. Por hipótesis y teorema se tiene $x = b \cdot a^{-1}$, sustituyendo tenemos $x = y \cdot b$ entonces $ax = a(y \cdot b) = (a \cdot y)b = 1 \cdot b = b$ por lo tanto hay por lo menos un x tal que $ax = b$ pero en virtud del teorema 1.7 hay por lo mucho uno, luego hay una y sólo una x en estas condiciones.

Teorema 1.9 *Si $a \neq 0$, entonces $b/a = b \cdot a^{-1}$*

Demostración.- Sea $x = b/a$ y sea $y = b \cdot a^{-1}$ se probará que $x = y$, por definición de b/a, $ax = b$ y $ya = (b \cdot a^{-1})a = b(a^{-1}a) = b \cdot 1 = 1$, entonces $ya = xa$ y por la ley de simplificación para la multiplicación $y = x$

Teorema 1.10 *Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$*

Demostración.- Si $a \neq 0$ entonces $(a^{-1})^{-1} = 1 \cdot (a^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{a^{-1}} = a$ esto por axioma de neutro, definición de a^{-1} y teorema 1.9, así concluimos que $(a^{-1})^{-1} = a$

Teorema 1.11 *Si $ab = 0$, entonces ó $a = 0$ ó $b = 0$*

Demostración.- Veamos dos casos, cuando $x \neq 0$ y cuando $x = 0$
Si $x \neq 0$ y $ab = 0$ entonces $b = b \cdot 1 = b(a \cdot a^{-1}) = (ab)a^{-1} = 0a^{-1} = 0$, ahora si $a = 0$ y virtud del teorema 1.6 nos queda demostrado que la multiplicación de dos números cualesquiera es igual a cero si $a = 0$ ó $b = 0$

Teorema 1.12 $(-a)b = -(ab)$ *y* $(-a)(-b) = ab$

Demostración.- Empecemos demostrando la primera proposición, Por la ley de simplificación para la suma podemos escribir como $(-a)b + ab = 0$ entonces por la propiedad distributiva $b\left[(-a) + a\right]$ por lo tanto $b \cdot 0$, luego por el teorema 1.6 queda demostrado la primera proposición.
Para demostrar la segunda proposición acudimos a la primera proposición, $(-a)(-b) = -\left[a(-b)\right]$ y luego, $-\left[a(-b) + b + (-b)\right] = -\left[(-b)(a+1) + b\right] = -\left[(-b)(a+1) - 1(-b)\right] = -\left[(-b)(a+1-1)\right] = -\left[(-b)a\right] = -\left[-(ab)\right]$ y en virtud del el teorema 1.4 $(-a)(-b) = ab$ así queda demostrado la proposición.

Teorema 1.13 $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)\,/\,(bd)$ *si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.*

Demostración.- Si $(a/b) + (c/d)$ entonces por definición de a/b, $a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot d^{-1}) \cdot 1 = (a \cdot b^{-1}) \cdot 1 + (c \cdot d^{-1}) \cdot 1 = (a \cdot b^{-1}) \cdot dd^{-1} + (c \cdot d^{-1}) \cdot bb^{-1}$ por las propiedades asociativa conmutativa y distributiva, $(b^{-1}d^{-1})(ad) + (b^{-1}d^{-1})(cb) = (b^{-1}d^{-1})(ad + cb)$, por lo tanto $(ad + bc)/bd$ esto por definición.

Teorema 1.14 $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ *si $b \neq 0$ y $d \neq 0$*

Demostración.- Por definición, $(ab^{-1})(cd^{-1})$, propiedades conmutativa y asociativa $(ac)(b^{-1}d^{-1})$, y por definición queda demostrado la proposición.

Corolario 1.1 *Si* $c \neq 0$ *y* $d \neq 0$ *entonces* $(cd^{-1}) = c^{-1}d$

Demostración.- *Por definición de* a^{-1} *tenemos que* $(cd^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{cd^{-1}}$, *por el teorema de posibilidad de la división* $1 = (c^{-1}d)(cd^{-1})$ *y en virtud de los axiomas de conmutatividad y asociatividad* $1 = (c^{1}c)(dd^{-1})$, *luego* $1 = 1$. *quedando demostrado el corolario.*

Teorema 1.15 $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ *si* $b \neq 0$, $c \neq 0$ *y* $d \neq 0$

Demostración.- *Sea* $(a/b)/(c/d)$ *entonces por definición* $(ab^{-1})(cd^{-1})^{-1}$, *en virtud del corolario 1 se tiene que* $(ab^{-1})(c^{-1}d)$, *y luego por axioma conmutativa y asociativa* $(ad)(c^{-1}b^{-1})$, *así por definición concluimos que* $(ad)/(cd)$

1.2. Ejercicios y Demostraciones

1.2.1. Ejercicios[2]

Teorema 1.16 $-0 = 0$

Demostración.- *Sabemos que por el axioma 5* $a + (-a) = 0$, $-[a + (-a)] = 0$ *y* $-a + -(-a) = 0$ *en virtud de teorema 1.12 y propiedad conmutativa* $a + (-a) = 0$, *por lo tanto* $0 = 0$.

Teorema 1.17 $1^{-1} = 1$

Demostración.- *Por la existencia de elementos nuestros tenemos* $1^{-1} \cdot 1$ *y por axioma de existencia de reciproco* $1 = 1$

Teorema 1.18 *El cero no tiene reciproco*

Demostración.- *Supongamos que el cero tiene reciproco es decir* $0 \cdot 0^{-1} = 1$ *pero por el teorema 1.6 se tiene que* $0 \cdot 0^{-1} = 0$ *y* $0 = 1$ *esto no es verdad, por lo tanto el cero no tiene reciproco.*

Teorema 1.19 $-(a + b) = -a - b$

Demostración.- *Por existencia de reciproco* $-[1(a + b)]$ *y teorema 1.12* $(-1)(a + b)$ *luego por la propiedad distributiva* $[(-1)b] + [(-1)b]$, *una vez mas por el teorema 1.12* $-(1a) + [-(1b)]$, *en virtud del axioma 4* $-a + (-b)$, *y teorema 1.3,* $-a - b$

Teorema 1.20 $-(-a - b) = a + b$

Demostración

[2] Calculus Vol 1, Tom M. Apostol Pag. 24

Si $-(-a-b)$ *entonces por axioma* $-[1(-a-b)]$, *luego* $(-1)(-a-b) = (-1)(-a)-[(-1)b]) = (1\cdot a)-[-(1\cdot b)]$ *y por axioma* $a-[-(b)]$, *así por teorema* $a+b$.

Teorema 1.21 $(a-b)+(b-c) = a-c$

Demostración.- *Por definición tenemos* $[a+(-b)]+[b+(-c)]$, *y axiomas de asociatividad y conmutatividad* $[a+(-c)]+[b+(-b)]$, *luego por existencia de negativos* $[a+(-c)]+0$,, *así* $a+(-c)$ *y* $a-c$.

Teorema 1.22 $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ *si* $b \neq 0$

Demostración.- *Primero demostremos que* $-(a/b) = (-a/b)$, *Sea* $b \neq 0$, *en virtud de definición de la división y teorema 1.12 no queda que* $-(a/b) = (-a)\cdot b^{-1} = -a/b$.
Ahora demostramos que $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$, *sea* $b \neq 0$, *luego* $-(b^{-1}\cdot a) = [-(b^{-}1)]\cdot a = a/-b$.

Teorema 1.23 $(a/b)-(c/d) = (ad-bc)/(bd)$ *si* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$

Demostración.- *Sea* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$ *y por definición* $ab^{-1}-cd^{-1}$, *luego por axiomas* $(ab^{-1})(d\cdot d^{-1})-(cd^{-1})(b\cdot b^{-1})$, *y en virtud del teorema 1.5 y propiedad asociativa* $b^{-1}\cdot d^{-1}(ad-bc)$ *y* $(ad-bc)/bd$

1.2.2. Demostraciones[3]

Teorema 1.24 *Si* $ax = a$ *para algún número* $a \neq 0$, *entonces* $x = 1$

Demostración.- *Sea* $a \neq 0$ *entonces por la ley de simplificación* $x = 1$

Teorema 1.25 $(x^2-y^2) = (x-y)(x+y)$

Demostración.- *Partamos de* $(x-y)(x+y)$ *donde por la propiedad distributiva tenemos* $(x-y)x+(x-y)y$, *luego* $x^2-xy+xy-y^2$, *por lo tanto por los axioma de inverso y neutro* x^2-y^2

Corolario 1.2 *Si* $a = b$ *entonces* $ac = bc$

Demostración.- *vemos por la propiedad reflexiva de los números que* $ac = ac$ *y por hipótesis no queda que* $ac = bc$

Teorema 1.26 *Si* $x^2 = y^2$, *entonces* $x = y$ *o* $x = -y$

Demostración.- *Dada la hipótesis aplicamos el corolario anterior* $x^2+\left[-(y^2)\right] = y+\left[-(y^2)\right]$ *y por axioma de neutro y definición* $x^2-y^2 = 0$, *por ejercicio 1.10* $(x-y)(x+y)$ *donde en virtud del teorema* $ab = 0$ *entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$ *no queda* $x-y = 0$ *ó* $x+y = 0$, *por lo tanto* $x = y$ *ó* $x = -y$

[3] Cálculo infinitesimal, Michael Spivak pag 17 al 26

Teorema 1.27 $(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Demostración.- *Dado* $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ *y por la propiedad distributiva* $(x-y)x^2+(x-y)xy+(x-y)y^2 = x^3 - x^2y + x^2y - xy^2 + xy^2 - y^3$ *por lo tanto en virtud de los axiomas de inverso y neutro* $x^3 - y^3$.

Teorema 1.28 $x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$

Demostración.-

$$\begin{array}{rl} & (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}) \\ = & x(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}) - y(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1} \\ = & x^n + x^{n-1}y + ... + x^2y^{n-2} + xy^{n-1} - (x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + ... + xy^{n-1} + y^n) \\ = & x^n - y^n \end{array}$$

Teorema 1.29 $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Demostración.- *La demostración es similar al teorema 1.12.*

Teorema 1.30 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$ *si* $b,\ c \neq 0$

Demostración.- *Por definición tenemos que* $\dfrac{a}{b} = ab^{-1}$, *como* $b,\ c \neq 0$ *entonces* $(ab)(c \cdot c^{-1})$, *por las propiedades asociativa y conmutativa,* $(ac)(b^{-1}c^{-1})$, *y en virtud del corolario 1* $(ac)(bc)^{-1}$ *y* $\dfrac{ac}{bc}$

Teorema 1.31 *Si* $b,\ c \neq 0$, *entonces* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *si sólo si* $ad = bc$, *Determinar también cuando es* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$

Demostración.- *Sea* $b,\ c \neq 0$ *si sólo si* $ab^{-1} = cd^{-1}$ *por corolario 2* $(ab^{-1})b = cd^{-1}b$ *y por propiedades asociativa y conmutativa* $a(b \cdot b^{-1}) = (bc)d^{-1}$, $a = (bc)d^{-1}$ *luego* $ad = bc(d \cdot d^{-1})$, *por lo tanto* $ad = bc$. *Análogamente* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = b^2$

2

Axiomas de orden

Axioma 7 *Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, lo mismo ocurre a $x+y$ y $x \cdot y$*

Axioma 8 *Para todo real $x \neq 0$, ó $x \in \mathbb{R}^+$ ó $-x \in \mathbb{R}^+$*

Axioma 9 $0 \notin \mathbb{R}^+$

Definición 2.1 *Símbolos de desigualdad*

- $x < y$ *significa que* $y - x$ *es positivo.*
- $y > x$ *significa que* $x < y$.
- $x \leq y$ *significa que ó* $x < y$ *ó* $x = y$.
- $y \geq x$ *significa que* $x \leq y$.

Nota

- Si $x < 0$ se dice que x es negativo.
- Si $x \geq 0$ se dice que x es no negativo.

2.1. Teoremas[4]

Teorema 2.1 (Propiedad de Tricotomía) *Para a y b números reales cualesquiera se verifica se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$*

demostración.- *Sea $x = b - a$. Si $x = 0$, entonces $x = a - b = b - a$, por axioma 9, $0 \notin \mathbb{R}^+$ es decir:*

$$a < b, \;\; b - a \in \mathbb{R}^+$$

$$b < a, \;\; a - b \in \mathbb{R}^+$$

pero como $a - b = b - a = 0$ entonces no ser $a < b$ ni $b < a$
Si $x0 \neq 0$, el axioma 8 afirma que ó $x > 0$ ó $x < 0$, pero no ambos, por consiguiente, ó es $a < b$ ó es $b < a$,

[4] Tom Apostol Vol. 1, pag. 25

pero no ambos. Pro tanto se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a = b$, $a < b$, $b < a$.

Teorema 2.2 (Propiedad Transitiva) *Si $a < b$ y $b < c$, es $a < c$*

Demostración.- *Si $a < b$ y $b < c$, entonces por definición $b - a > 0$ y $c - b > 0$. En virtud del axioma 7 $(b - a) + (c - b) > 0$, es decir, $c - a > 0$, y por lo tanto $a < c$.*

Teorema 2.3 *Si $a < b$ es $a + c < b + c$*

Demostración.- *Sea $x = a + c$*

Teorema 2.4 *Si $a < b$ y $c > 0$ es $ac < bc$*

Demostración.- *Si $a < b$ por definición $b - a > 0$, dado que $c > 0$ y por el axioma 7 $(b - a)c > 0$ y $bc - ac > 0$, por lo tanto $ac < bc$*

Teorema 2.5 *Si $a \neq 0$ es $a^2 > 0$*

Demostremos por casos..- *Si $a > 0$, entonces por axioma 7 $\quad a \cdot a > 0 \quad$ y $\quad a^2 > 0$. Si $a < 0$, entonces por axioma 7 $\quad (-a)(-a) > 0 \quad$ y $\quad a^2 > 0$*

Teorema 2.6 *1>0*

Demostración.- *Por el anterior teorema, si $1 > 0$ ó $1 < 0$ entonces $1^2 > 0$, y $1^2 = 1$, por lo tanto que $1 > 0$*

Teorema 2.7 *Si $a < b$ y $c < 0$, es $ac > bc$*

Demostración.- *Si $c < 0$, por definición $-c > 0$, en virtud del axioma 7 $-c(b - a) > 0$, y $ac - cb > 0$, por lo tanto $ab < ac = ac > bc$*

Teorema 2.8 *Si $a < b$, es $-a > -b$. En particular si $a < 0$, es $-a > 0$*

Demostración.- *Si $1 > 0$, por la existencia de negativos $-1 < 0$ y por teorema 2.7 tenemos que $-1a > -1b$ por lo tanto $-a > -b$*

Teorema 2.9 *Si $ab > 0$ entonces a y b son o ambos positivos o ambos negativos*

Demostración.- *Sea $a > 0$ y $b > 0$, por axioma 7 $\quad ab > 0$, y sea $a < 0$ y $b < 0$, por definición $-a > 0$ y $-b > 0$, por lo tanto $(-a)(-b) > 0$ y por teorema 1.12 $\quad ab > 0$.*

Teorema 2.10 *Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$*

Demostración.- Si $a < c$ y $b < d$ por definición $c - a > 0$ y $d - b > 0$, en virtud del axioma 6:

$$(c - a) + (d - b) > 0 \Rightarrow c - a + d - b > 0 \Rightarrow (c + d) - (a + b) > 0$$

por lo tanto $a + b < c + d$.

Teorema 2.11 *Para $b \geq 0$ $a^2 > b \Rightarrow a > \sqrt{b}$ ó $a < -\sqrt{b}$*

Demostración.- Por hipótesis $a^2 > b$ y $a^2 - b > 0$, por ejercicio 1.10 $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) > 0$, y por teorema 2.9 $a - \sqrt{b} > 0$ y $a + \sqrt{b} < 0$ ó $a - \sqrt{b} < 0$ y $a + \sqrt{b} < 0$, por lo tanto $a - \sqrt{b} < 0$ ó $a < -\sqrt{b}$

Ejercicios y Demostraciones

2.1.1. Ejercicios[5]

Encontrar todos los números x para los que:

Ejercicio 2.1 $4 - x < 3 - 2x$

$$\begin{array}{rrcll} \Rightarrow & 4 - x + 2x & < & 3 - 2x + 2x & \textit{teorema 2.3} \\ \Rightarrow & x + 4 & < & 3 & \textit{Axiomas} \\ \Rightarrow & 4 + (-4)x & < & 3 + (-4) & \textit{teorema 2.3} \\ \Rightarrow & x & < & -1 & \textit{axiomas} \end{array}$$

Ejercicio 2.2 $5 - x^2 < 8$

$$\begin{array}{rrcll} \Rightarrow & (-5) + 5 - x^2 + (-8) & < & (-8) + 8 + (-5) & \textit{teorema 2.3} \\ \Rightarrow & -x^2 - 8 & < & -5 & \\ \Rightarrow & -x^2 - 3 & < & 0 & \\ \Rightarrow & -(-x^2 - 3) & > & -0 & \textit{teorema 2.8} \\ \Rightarrow & x^2 + 3 & > & 0 & \textit{Ejercicio 1.5} \end{array}$$

Sea $x \neq 0$ entonces por teorema 2.5 $x^2 > 0$ y por axioma 7 se cumple que $x^2 + 3$ siempre es positivo, y como $3 > 0$ entonces el valor de x son todos los números reales.

Ejercicio 2.3 $5 - x^2 < -2$

$$\begin{array}{rrcll} \Rightarrow & (-5) + 5 - x^2 & < & -2 + (-5) & \\ \Rightarrow & -x^2 & < & -7 & \\ \Rightarrow & x^2 & > & 7 & \textit{teorema 2.8} \\ \Rightarrow & x > \sqrt{7} & \text{ó} & x < -\sqrt{7} & \textit{teorema 2.11} \end{array}$$

Ejercicio 2.4 $(x - 1)(x - 3) > 0$

[5] Calculo infinitesimal Michael Spivak, pag 18

$$\begin{array}{cccccl}
\Rightarrow & x-1>0 & y & x-3>0 & \textit{teorema 2.9} \\
 & & \text{ó} & & \\
 & x-1<0 & y & x-3<0 & \\
 & & & & \\
\Rightarrow & x>1 & y & x>3 & \\
 & & \text{ó} & & \\
 & x<1 & y & x<3 & \\
 & & & & \\
\Rightarrow & x>3 & \text{ó} & x<1 &
\end{array}$$

Ejercicio 2.5 $x^2-2x+2>0$

Completando cuadrados obtenemos que $x^2-2x+1^2-1^2+2>0$*, después* $(x-1)^2+1^2>0$*, luego* $x^2>0$*, y en virtud de teorema nos queda que la desigualdad dada satisface a todos los números reales.*

Ejercicio 2.6 $x^2+x+1>2$

Aplicando el teorema 2.25 se tiene $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{2^2-4(-1)}}{2}$*. luego por teorema 2.9 obtenemos*

$$\left(x>\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad y \quad x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ó} \left(x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad y \quad x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

por lo tanto,

$$x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cup x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Ejercicio 2.7 $x^2-x+10>16$

$$\begin{array}{rrcll}
\Rightarrow & x^2-x-6 & > & 0 & \\
\Rightarrow & (x-3)(x+2) & > & 0 & \textit{teorema 2.9} \\
\Rightarrow & x>3 & y & x>-2 & \\
 & & \text{ó} & & \\
 & x<3 & y & x<-2 & \\
 & x>3 & \text{ó} & x<-2 &
\end{array}$$

Ejercicio 2.8 $(x-\pi)(x+5)(x-3)>0$ *por la propiedad asociativa* $(x-\pi)\left[(x+5)(x-3)\right]>0$

$$\begin{array}{clcl}
\Rightarrow & x>\pi & \wedge & [(x>-5\wedge x>3)\vee(x<-5\wedge x<3)] \\
 & & \vee & \\
 & x<\pi & \vee & [(x<-5\wedge x>3)\vee(x>-5\wedge x<3)] \\
 & & & \\
\Rightarrow & x>\pi & \wedge & (x>3\vee x<-5) \\
 & & \vee & \\
 & x<\pi & \wedge & -5<x-3 \\
 & & & \\
\Rightarrow & x<\pi & \vee & -5<x-3
\end{array}$$

Ejercicio 2.9 $(x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt{2})>0$

$$\begin{array}{lccc} \Rightarrow & x>\sqrt[3]{2} & y & x>\sqrt{2} \\ & & \text{ó} & \\ & x<\sqrt[3]{2} & y & x<\sqrt{2} \\ \\ \Rightarrow & x>\sqrt{2} & \text{ó} & x<\sqrt[3]{2} \end{array}$$

Ejercicio 2.10 $2^x<8$

Podemos reescribir como $2^2<8^x$ *y por propiedad de logaritmos que se vera mas adelante se tiene que* $x<3$

Ejercicio 2.11 $x+3^x<4$

Por resolver xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Ejercicio 2.12 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}>0$

$$\begin{array}{lrcll} \Rightarrow & \dfrac{1}{x(1-x)} & > & 0 & \textit{teorema 1.13} \\ \\ \Rightarrow & \dfrac{1\cdot[x(1-x)]^2}{x(1-x)} & > & 0\cdot[x(1-x)]^2 & \\ \\ \Rightarrow & x(1-x) & > & 0 & \\ \\ \Rightarrow & x>0 & y & x<1 & \\ & & \text{ó} & & \\ & x<0 & y & x>1 & \\ \\ \Rightarrow & 0\ < & x & <\ 1 & \end{array}$$

Ejercicio 2.13 $\dfrac{x-1}{x+1}>0$

$$\begin{array}{lrcl} \Rightarrow & \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{>} & > & 0(x+1)^2 \\ \\ \rightarrow & (x-1)(x+1) & > & 0 \\ \\ \Rightarrow & x>1 & y & x>-1 \\ & & \text{ó} & \\ & x<1 & y & x<-1 \\ \\ \Rightarrow & x>1 & \text{ó} & x<-1 \end{array}$$

2.1.2. Demostraciones [6]

Teorema 2.12 *Si* $a<b$*, entonce* $-b<-a$

[6] Cálculo infinitesimal, Michael Spivak, pag 18-19

Demostración.- *Sea* $-1 < 0$, *por teorema 2.7* $-1(a) > -1(b)$, *luego por existencia de elementos neutros* $-a > -b$ *por lo tanto* $-b < -a$

Teorema 2.13 *Si* $a < b$ *y* $c > d$, *entonces* $a - c < b - d$

Demostración.- *Si* $a < b = b - a > 0$ *y* $c > d = d < c = c - d > 0$, *por axioma 7* $(b - a) + (c - d) > 0$, *luego* $(b - d) + (-a + c) > 0$ *y en virtud del teorema 1.19 y definición* $(b - d) - (a - c) > 0$, *por lo tanto* $a - c < b - d$

Teorema 2.14 *Si* $a > 1$ *entonces* $a^2 > a$

Demostración.- *Sea* $1 < a$ *y* $a - 1 > 0$, *por axioma 7* $a(a - 1) > 0 = a^2 - a > 0$, *luego* $a < a^2$ *y* $a^2 > a$

Teorema 2.15 *Si* $0 < a < 1$, *entonces* $a^2 < a$

Demostración.- *La demostración es similar al teorema 2.14. Por definición* $0 < a$ *y* $a < 1$ *por lo tanto* $1 - a > 0$ *y* $a(1 - a) > 0$, $a^2 < a$.

Teorema 2.16 *Si* $a \leq a < b$ *y* $0 \leq c < d$, *entonces* $ac < bd$

Demostración.- *Tenemos que* $a \geq 0$, $c \geq 0$, $a < d$ *y* $a < b$, *en virtud del teorema 2.4* $ac \leq bc$ *y* $ac \leq ad$ *(cabe recalcar que por hipótesis podría dar el caso de* $0 \leq 0$ *por ello el símbolo* "$\leq$"*) por lo tanto* $bc - ac \geq 0$ *y* $ad - ac \geq 0$. *luego en virtud del teorema 2.10* $ac - ac \leq ad + bc$ *y* $-ad - bc \leq -2ac$.
Por otro lado sea $b - a > 0$ *y* $d - c > 0$ *entonces por axioma 7* $(b - a)(d - c) > 0$ *y* $db - ad - bc + ac > 0$.
Si $-ad - bc \leq -2ac$ *entonces* $db - 2ac + ac > 0$ *así* $ac < bd$.

Teorema 2.17 *Si* $0 \leq a < b$, *entonces* $a^2 < b^2$.

Demostración.- *Por el teorema anterior si* $0 \leq a < b$ *entonces* $a \cdot a < b \cdot b$ *y* $a^2 < b^2$

Teorema 2.18 *Si* $a,\ b \geq 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$

Demostración.- *Si* $b^2 - a^2 > 0$, *por teorema 1.25* $(b - a)(b + a) > 0$, *y por teorema 2.9* $(b - a > 0 \ \wedge \ b + a > 0) \ \vee \ (b - a < 0 \ \wedge \ b + a < 0)$. *Sea* $a,\ b \geq 0$ *que da* $(b - a > 0 \ \wedge \ b + a > 0)$ *por lo tanto* $a < b$.

Teorema 2.19 *Demostrar que si* $0 \leq x < y$ *entonces* $x^n < y^n$

Demostración.- *Si* $0 \leq x < y$ *por el teorema 2.17* $x \cdot x < y \cdot y$, *si aplicamos el teorema una vez mas* $x \cdot x \cdot x < y \cdot y \cdot y$, *si aplicamos n veces dicho teorema* $x \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x < y \cdot y \cdot y \cdot ... \cdot y$ *es decir* $x^n < y^n$

Teorema 2.20 *Demostrar que si $x < y$ y n es impar, entonces $x^n < y^n$*

Demostración.- *Si $0 \leq x < y$ por teorema anterior. Después si $x < y \leq 0$, entonces $0 \leq -y < -x$, así $(-y)^n < (-x)^n$; esto significa que $-y^n < -x^n$ ya que n es impar, por lo tanto $x^n < y^n$. Finalmente, si $x < 0 \leq y$, entonces $x^n < 0 \leq y^n$ siempre que n sea impar. Por lo tanto en todos los casos, si $x < y$, entonces $x^n < y^n$.*

Teorema 2.21 *Demostrar que si $x^n =^n y$ n es impar, entonces $x = y$*

Demostración.- *Sea $n = 2k - 1$ y $x^n = y^n$ entonces $x^{2k-1} - y^{2k-1} = 0$ y por teorema 1.28 $(x^{2k-1} - y^{2k-1})(x^{(2k-1)-1} + x^{(2k-1)-2}y^{2k-1} + ... + x^{2k-1}y^{(2k-1)-2} + y^{(2k-1)-1}) = 0$ Sea $x,\ y \neq 0$ entonces por la propiedad de existencia de reciproco o inverso $x - y = 0$ por lo tanto $x = y$*

Teorema 2.22 *Demostrar que si $x^n = y^n$ y n es par, entonces $x = y$ ó $x = -y$*

Demostración.- *Si n es par, usando el teorema 2.19, en lugar del teorema 2.20 vemos que si $x, y \geq 0$ y $x^n = y^n$, entonces $x = y$. Además, si $x, y \leq 0$ y $x^n = y^n$, entonces $-x, -y \geq 0$ y $(-x)^n = (-y)^n$, entonces nuevamente $x = y$. La única posibilidad es que x e y sea positivo y el otro negativo. En este caso, x e $-y$ son ambos positivos o negativos. Además $x^n = (-y)^n$, dado que n es par se sigue de los casos anteriores que $x = -y$.*

Teorema 2.23 *Demostrar que si $0 < a < b$, entonces*

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

Demostremos por casos:

1. $a < \sqrt{ab}$

   Si $4a < b$ entonces $a^2 < ab$ y por raíz cuadrada dado que $a,\ b > 0$ entonces $a < \sqrt{ab}$

2. $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

   En vista de que $a,\ b > 0$ y $a < b$ entonces $a - b > 0$, $(a-b)^2 > 0$ por lo tanto, $a^2 - 2ab + b^2 > 0 \Rightarrow 2ab < a^2 + b^2 \Rightarrow 2ab - 2ab + 2ab < a^2 + b^2 \Rightarrow 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 4ab < (a+b^)2 \Rightarrow ab < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$

3. $\dfrac{a+b}{2} < b$

   Si $a < b$ entonces $a + b < 2b$ por lo tanto $\dfrac{a+b}{2} < b$

Y por la propiedad transitiva queda demostrado.

Teorema 2.24 *Demostrar que si x e y son 0 los dos, entonces:*

- $x^2 + xy + y^2 > 0$

  Demostración.- *Sea* $(x-y)^2 > 0$ *entonces* $x^2 + y^2 > xy$. *Por otro lado si* $x, y \neq 0$ *por teorema* *2.5* $x^2 + y^2 > 0$, *dado que* $x^2 + y^2 > xy$ *entonces se cumple* $x^2 + y^2 + xy > 0$.

- $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

  Demostración.- *Sea* $(x^5 - y^5)^2 > 0$, *por teorema* $\left[(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)\right]^2 > 0$, *así* $(x-y)^2(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)^2 > 0$, $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)^2 > 0$, *por lo tanto* $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) > 0$

Lema 2.1 *Demostrar que:*

a)

- $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ *solamente cuando* $x = 0$ *ó* $y = 0$

  Demostración.- *Sea* $x = 0$ *y* $x^2 + xy + y^2$ *por teorema* $0 \cdot y = 0$ *entonces* $x^2 + y^2$. *Se demuestra de la misma manera para* $y = 0$

- $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ *solamente cuando* $x = 0$ *ó* $y = 0$ *ó* $x = -y$

  Demostración.- *Es evidente para* $x = 0$ *é* $y = 0$. *Solo faltaría demostrar para* $x = -y$.
  Si $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ *entonces* $(x+y)^3 = x^3 + 3(-y)^2y + 3(-y)y^2 + y^3 = x^3 + 3y^3 + 3(-y)^3 + y^3$, *por lo tanto* $x^3 + y^3$.

b) *Haciendo uso del hecho que*

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geq 0$$

demostrar que el supuesto $4x^2 + 6xy + 4y^2 < 0$ *lleva una contradicción.*

Demostración.-

$$\begin{aligned} 4^2 + 8xy + 4y^2 &< 2xy \\ 4(x^2 + 2xy + y^2) &< 2xy \\ x^2 + 2xy + y^2 &< xy/2 \end{aligned}$$

Dado que $2xy < xy/2$ *es falso, concluimos que* $4x^2 + 6xy + 4y^2 < 0$ *también es falso y así llegamos a una contradicción.*

c) *Utilizando la parte (b) decir cuando es* $(x+y)^4 = x^4 + y^4$

Se tiene $(x+y)^2(x+y)^2$, *por lo tanto se cumple que* $x^4 + y^4$, *si* $x = 0$ *ó* $y = 0$

d) *Hallar cuando es* $(x+y)^5 = x^5 + y^5$. *Ayuda: Partiendo del supuesto* $(x+y)^5 ? x^5 + y^5$ *tiene que ser posible deducir la ecuación* $x^3 + 2x^2y + y^3 = 0$, *si* $xy \neq 0$. *Esto implica que* $(x+y)^3 = x^2y + xy^2 = xu(x+y)$. *El lector tendría que ser ahora capaz de intuir cuando* $(x+y)^n = x^n + y^n$.

Demostración.- *Si* $x^5 + y^5 = (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$, *entonces* $0 =$

$5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4\ 0=5xy(x^3+2x^2+y+2xy^2+y^3)$. *Así* $x^3+2x^2+y+2xy^2+y^3=0$. *restando esta ecuación de* $(x+y)^3=x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$ *obtenemos,* $(x+y)^3=x^2y+xy^2=xy(x+y)$. *Así pues, ó bien* $x+y=0$ *ó* $(x+y)^2=xy$*; la última condición implica que* $x^2+xy+y^2=0$*, con lo que* $x=0$ *ó* $y=0$. *por lo tanto* $x=0$ *ó* $y=0$ *ó* $x=-y$.

Ejercicio 2.14 *Hallar:*

a) *El valor mínimo de* $2x^2-2x+4$

Para poder hallar el valor mínimo debemos llevar la ecuación a su forma canónica es decir,

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+4 &= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+4 \\ &= 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]+4 \\ &= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-2\left(\frac{3}{4}\right)^2+4 \end{aligned}$$

El mínimo valor posible es $\frac{23}{8}$*, cuando* $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=0$ *ó* $x=\frac{3}{4}$

b) *El valor mínimo de* $x^2-3x+2y^2+4y+2$

$$x^2-3x+2y^2+4y+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2(y+1)^2-\frac{9}{4}$$

así el valor mínimo es $-\frac{9}{4}$*, cuando* $x=\frac{3}{2}$ *y* $y=-1$

c) *Hallar el valor mínimo de* $x^2+4xy+5y^2-4x-6y+7$

$$\begin{aligned} x^2+4xy+5y^2-4x-6y+7 &= x^2+4(y-1)x+5y^2-6y+7 \\ &= [x+2(y-1)]^2+5y^2-6y+7-4(y-1)^2 \\ &= [x+2(y-19]^2+(y+1)^2+2 \end{aligned}$$

Así el valor mínimo es 2, cuando $y=-1$ *y* $x=-2(y-1)=4$

Teorema 2.25 *Demostrar:*

a) *Supóngase que* $b^2-4c\geq 0$. *Demostrar que los números*

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2},\quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

satisfacen ambos la ecuación $x^2+bx+c=0$

Demostración.- *Para probar que satisfaga a la ecuación dada, podemos empezar a completar al cuadrado de la siguiente manera:* $x^2 + bx + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$, *así* $\left(x^2 + \dfrac{b}{2}\right)^2 = -c + \dfrac{b^2}{4}$. *Por existencia de raíz cuadrada de los números reales no negativos* $x + \dfrac{b}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{b^2-4c}{4}}$, *luego* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$.

b) *Supóngase que* $b^2 - 4c < 0$. *Demostrar que no existe ningún número* x *que satisfaga* $x^2 + bx + c = 0$; *de hecho es* $x^2 + bx + c > 0$ *para todo* x.

Demostración.- *Tenemos*

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \geq c - \frac{b^2}{4}$$

pero por hipótesis $c - \dfrac{b^2}{4} > 0$, *así* $x^2 + bx + c > 0$ *para todo* x.

c) *Utilizar este hecho para dar otra demostración de que si* x *e* y *no son ambos* 0, *entonces* $x^2 + xy + y^2 > 0$

Demostración.- *Aplicando la parte b con* y *para* b *e* y^2 *para* c, *tenemos* $b^2 - 4c = y^2 - 4y^2 < 0$ *para* $x \neq 0$, *entonces* $x^2 + xy + y^2 > 0$ *para todo* x.

d) *¿Para qué número* α *se cumple que* $x^2 + \alpha xy + y^2 > 0$ *siempre que* x *e* y *no sean ambos* 0*?*

Demostración.- α *debe satisfacer* $(\alpha y)^2 - 4y^2 < 0$, *o* $\alpha^2 < 4$, *o* $|\alpha| < 2$

e) *Hállese el valor mínimo posible de* $x^2 + bx + c$ *y de* $ax^2 + bx + c$, *para* $a > 0$

Demostración.- *Por ser*

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \geq c - \frac{b^2}{4},$$

y puesto que $x^2 + bx + c$ *tiene el valor* $c - \dfrac{b^2}{4}$ *cuando* $x = -\dfrac{b}{2}$, *el valor mínimo es* $c - \dfrac{b^2}{4}$.
Después

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

el mínimo es

$$a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$$

Teorema 2.26 *El hecho de que* $a^2 \geq 0$ *para todo número* a, *por elemental que pueda parecer, es sin embargo la idea fundamental en que se basan en último instancia la mayor parte de las desigualdades. La premerísima de todas las desigualdades es la desigualdad de Schwarz:*

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Las tres demostraciones de la desigualdad de Schwarz que se esbozan más abajo tienen solamente una cosa en común: el estar basadas en el hecho de ser $a^2 \geq 0$ *para todo* a.

a) *Demostrar que si* $x_1 = \lambda y_1$ *y* *y* $x_2 = \lambda y_2$ *para algún número* λ*, entonces vale el signo igual en la desigualdad de Schwarz. Demuéstrese lo mismo en el supuesto* $y_1 = y_2 = 0$*: supóngase ahora que* y_1 *e* y_2 *no son ambos* 0 *y que no existe ningún número* λ *tal que* $x_1 = \lambda y_1$ *y* $x_2 = \lambda y_2$*. Entonces*

$$\begin{aligned} 0 &< (\lambda y_1 - x_1)^2 + (\lambda y_2 - x_2)^2 \\ &= \lambda^2(y_1^2 + y_2^2) - 2\lambda(x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Utilizando el teorema anterior, completar la demostración de la desigualdad de Schwarz.

Demostración.- *Primero, Si* $x_1 = \lambda y_1$ *y* $x_2 = \lambda y_2$*., entonces remplazando en la desigualdad de Schwarz,* $\lambda \cdot (y_1)^2 + \lambda \cdot (y_2)^2 = \sqrt{(\lambda y_1)^2 + (\lambda y_2)^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ *luego por propiedades de raíz se cumple*

$$\lambda(y_1^2 + y_2^2) = \sqrt{\left[\lambda(y_1^2 + y_2^2)\right]^2}$$

Vemos que también se cumple la igualdad para $y_1 = y_2 = 0$ *.*
Por último Si un tal λ *no existe, entonces la ecuación carece de solución en* λ*, de modo que por el teorema 1.25 tenemos,*

$$\left[\frac{2(x_1y_1 + x_2y_2)}{y_1^2 + y_2^2}\right]^2 - \frac{4(x_1^2 + y_1^2)}{y_1^2 + y_2^2} < 0$$

lo cual proporciona la desigualdad de Schwartz.

b) *Demostrar la desigualdad de Schwarz haciendo uso de* $2xy \leq x^2 + y^2$ *(¿Cómo se deduce esto?) con*

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad y = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

primero para $i = 1$ *y después para* $i = 2$*.*

Demostración.- *En vista de que* $(x - y)^2 \geq 0$*, tenemos* $2xy \leq x^2 + y^2$*. Realizando el respectivo remplazo tenemos:*

1)

$$2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

2)

$$2\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_2^2}{\sqrt{x_2^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

Luego sumando 1) *y* 2)

$$2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + 2\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + \frac{x_2^2}{\sqrt{x_2^2 + x_2^2}} + \frac{y_1^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

nos queda

$$\frac{2(x_1y_1 + x_2y_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leq 2$$

c) *Demostrar la desigualdad de Schwarz demostrando primero que*

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

Demostración.- *Es fácil ver que la igualdad se cumple,*

$$(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) = (x_1y_1)^2+2x_1y_1x_2y_2+(x_2y_2)^2+(x_1y_2)^2-2x_1y_1x_2y_2+(x_2y_1)^2 = (x_1y_1+x_2y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

Ya que $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$ *entonces,*

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2$$

d) *Deducir de cada una de estas tres demostraciones que la igualdad se cumple solamente cuando* $y_1 = y_2 = 0$ *ó cuando existe un número* λ *tal que* $x_1 = \lambda y_1$ *y* $x_2 = \lambda y_2$

Demostración.- *La parte a) ya prueba el resultado deseado.*
En la parte b) la igualdad se mantiene sólo si se cumple en (1) y (2). Sea $2xy = x^2 + y^2$ *sólo cuando* $(x-y)^2 = 0$ *es decir* $x = y$ *esto significa*

$$\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \; ; \; para\ x = 1, 2$$

para que podamos elegir $\lambda = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}/\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$.
En la parte (c), la igualdad se cumple solamente cuando $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$. *Una posibilidad es* $y_1 = y_2 = 0$. *Si* $y \leq 0$, *entonces* $x_l = (x_1y_1)y_1$ *y también* $x_2 = (x_1/y_1)y_1$ *análogamente, si* $y_2 \leq 0$, *entonces* $\lambda = x2/y2$.

2.2. Más demostraciones[7]

Teorema 2.27 *No existe ningún número real tal que* $x^2 + 1 = 0$

Demostración.- *Sea* $Y = x^2 + 1 = 0$ *de acuerdo con la propiedad de tricotomía:*

- *Si* $x > 0$ *entonces por teorema 2.5* $x^2 > 0$ *y por axioma 7* $x^2 + 1 > 0$ *esto es* $Y > 0$ *y no satisface* $Y = 0$ *para* $x > 0$.
- *Si* $x = 0$ *entonces* $x^2 = 0$ *y* $x^2 + 1 = 1$ *esto es* $Y = 1$ *pero no satisface a* $Y = 1$ *para* $x = 0$.
- *Si* $x < 0$ *entonces* $-x > 0$ *y* $x^2 + 1 > 0$, *esto es* $Y = 0$ *pero tampoco satisface a* $y = 0$ *para* $x < 0$.

Teorema 2.28 *La suma de dos números negativos es un número negativo.*

Demostración.- *Si* $a < 0$ *y* $b < 0$ *entonces* $-a > 0$ *y* $-b > 0$ *por axioma 7* $(-a) + (-b) > 0$ *y en virtud del teorema 1.19* $-(a + b) > 0$ *es decir* $a + b < 0$

Teorema 2.29 *Si* $a > 0$, *también* $1/a > 0$; *Si* $a < 0$ *entonces* $1/a < 0$

Demostración.-

- *Si* $a > 0$ *entonces* $(2a)^{-1} \cdot a > 0 \cdot (2a)^{-1}$ *por lo tanto* $1/a > 0$
- *Si* $a < 0$ *entonces* $-a > 0$ *y* $(-2a)^{-1} \cdot (-a) > 0 \cdot (-2a)^{-1}$ *por lo tanto* $1/a > 0$ *y* $-1/a < 0$

[7] Tom Apostol Vol 1, pag 26

Teorema 2.30 *Si* $0 < a < b$, *entonces,* $0 < b^{-1} < a^{-1}$

Demostración.- *Si* $b > 0$ *entonces por el teorema anterior* $b^{-1} > 0$ *ó* $0 < b^{-1}$.
Si $a > 0$ *entonces* $a^{-1} > 0$, *dado que* $a < b$ *y por teorema 2.4* $a \cdot a^{-1} < a^{-1}b$ *así* $1 < a^{-1}b$, *luego* $b{-}1 < a^{-1} \cdot bb^{-1}$, *por lo tanto* $b^{-1} < a^{-1}$. *Y por la propiedad transitiva queda demostrado que* $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

Teorema 2.31 *Si* $a \leq b$ *y* $b \leq c$ *es* $a \leq c$

Demostración.- *Si* $a < b$ *ó* $a = b$ *y* $b < c$ *ó* $b = c$ *demostremos por casos: Si* $a < b$ *y* $b < c$ *por la propiedad transitiva* $a < c$, *después si* $a < b$ *y* $b = c$ *entonces* $a < c$, *luego si* $a = b$ *y* $b < c$ *entonces* $a < c$, *por último si* $a = b$ *y* $b = c$ *entonce* $a = c$, *por lo tanto* $a \leq c$

Corolario 2.1 *Si* $c \leq b$ *y* $b \leq c$ *entonces* $c = b$

Demostración .- *Si* $b - c > 0$ *y* $c - b > 0$ *entonces* $(b - c) + (c - b) > 0$ *y* $0 < 0$ *es Falso, entonces queda que* $c = b$ *(Usted puede comprobar para cada uno de los casos que se suscita parecido al teorema anterior.)*

Teorema 2.32 *Si* $a \leq b$ *y* $b \leq c$ *y* $a = c$ *entonces* $b = c$

Demostración.- *Si* $a \leq b$ *y* $a = c$ *entonces* $c \leq b$. *Sea* $c \leq b$ *y* $b \leq c$ *y por corolario 2.1* $b = c$.

Teorema 2.33 *Para números reales a y b cualquiera, se tiene* $a^2 + b^2 \leq 0$. *Si* $ab \geq 0$, *entonces es* $a^2 + b^2 > 0$.

Demostración.- *Si* $ab > 0$ *por teorema 2.9* $(a > 0$ *y* $b > 0$ $)$ *ó* $(a < 0$ *y* $b < 0)$ *luego por teorema 2.5* $a^2 > 0$ *y* $b^2 > 0$ *por lo tanto por axioma 7 y ley de tricotomía* $a^2 + b^2 > 0$.

Teorema 2.34 *No existe ningún número real a tal que* $x \leq a$ *para todo real* x

Demostración.- *Supongamos que existe un número real "a" tal que* $y \leq a$. *Sea* $n \in \mathbb{R}$ *y* $x = y + n$ *entonces por teorema 1.18* $y + n \leq a + n$ *y* $x \leq a + n$ *esto contradice que existe un número real a tal que* $y \leq a$, *por lo tanto no existe ningún número real tal que para todo* x, $x \leq a$.

Teorema 2.35 *Si* x *tiene la propiedad que* $0 \leq x < h$ *para cada número real positivo* h, *entonces* $x = 0$

Demostración .- *Por el teorema anterior ni* $0 < x$ *ni* $x < h$ *satisfacen la proposición por lo tanto queda* $x = 0$

3

Axioma del supremo (axioma de completitud)

Definición 3.1 (Definición de extremo superior (Supremo)) *Un número B se denomina extremo superior o supremo de un conjunto no vacío S si B tiene las dos propiedades siguientes:*

a) *B es una cota superior de S.*

$$x \leq B, \;\; \forall x \in S$$

b) *Ningún número menor que B es cota superior para S.*

$$Si\; t \in \mathbb{R},\; cumple\; x \leq t \;\; para\; todo\; x \in S,\; entonces\; B \leq t$$

Se designa por $B = supS$.

Definición 3.2 (Definición de extremo inferior (Ínfimo)) *Un número L se llama extremo inferior (o ínfimo) de S si:*

a) *L es una cota inferior para S,*

$$L \leq x, \; \forall x \in S$$

b) *Ningún número mayor que L es cota inferior para S.*

$$Si\; t \leq x, \;\; \forall x \in S, \;\; entonces\, t \leq L$$

El extremo inferior de S, cuando existe, es único y se designa por $infS$. Si S posee mínimo, entonces $minS = infS$

Teorema 3.1 *Dos números distintos no pueden ser extremos superiores para el mismo conjunto.*

Demostración.- Sean B y C dos extremos superiores para un conjunto S. La propiedad b) de la definición 3.1 implica que $C \geq B$ puesto que B es extremo superior; análogamente, $B \geq C$ ya que C es extremo superior. Luego $B = C$

Axioma 10 *Todo conjunto no vacío S de números reales acotado superiormente posee extremo superior; esto es, existe un número real B tal que $B = supS$.*

Teorema 3.2 *Todo conjunto no vacío S acotado inferiormente posee extremo inferior o ínfimo; esto es, existe un número real L tal que $L = infS$.*

Demostración.- *Sea $-S$ el conjunto de los números opuestos de los de S. Entonces $-S$ es no vacío y acotado superiormente. El axioma 10 nos dice que existe un número B que es extremo superior de $-S$. Es fácil ver que $-B = infS$.*

Propiedad Arquimediana del sistema de los números reales

Teorema 3.3 *El conjunto P de los enteros positivos 1,2,3,... no está acotado superiormente.*

Demostración.- *Supóngase P acotado superiormente. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción. Puesto que P no es vacío, el axioma 10 nos dice que P tiene supremo, sea este b. El número $b-1$, siendo menor que b, no puede ser cota superior de P. Por b) de la definición 3.1 existe $n > b-1$ es decir $b-1 \in P,\ b-1 < b\ \ \exists n \in P:\ b-1 < n$. Para este n tenemos $n+1 > b$. Puesto que $n+1$ pertenece a P, esto contradice el que b sea una cota superior para P.*

Teorema 3.4 *Para cada real x existe un entero positivo n tal que $n > x$*

Demostración.- *Si no fuera así, x sería una cota superior de P, en contradicción con el teorema 3.3.*

Teorema 3.5 *Si $x > 0$ e y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$*

Demostración.- *Aplicar teorema 3.4 cambiando x por y/x.*

Teorema 3.6 *Si tres números reales a, x, e y satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq a + \dfrac{y}{n}$ para todo entero $n \geq 1$, entonces $x = a$*

Demostración.- *Si $x > a$, el teorema 3.5 nos menciona que existe un entero positivo que satisface $n(x-a) > y$, en contradicción de la hipótesis, luego $x > a$ no satisface para todo número real x y a, con lo que deberá ser $x = a$.*

Propiedades fundamentales del extremo superior ó supremo

Teorema 3.7 *Sea h un número positivo dado y S un conjunto de números reales.*

a) *Si S tiene extremo superior o supremo, para un cierto x de S se tiene*

$$x > supS - h$$

Demostración.- *Si es $x \leq supS - h$ para todo x de S, entonces $supS - h$ sería una cota superior de S menor que su supremo. Por consiguiente debe ser $x > supS - h$ por lo menos para un x de S.*

b) *Si S tiene extremo inferior o ínfimo, para un cierto x de S se tiene*

$$x < infS + h$$

Demostración.- *Si es $x \geq supS + h$ para todo x de S, entonces $supS + h$ sería una cota inferior de S mayor que su ínfimo. Por consiguiente debe ser $x < supS + h$ por lo menos para un x de S.*

Teorema 3.8 (Propiedad aditiva) *Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, sea C el conjunto*

$$C = \{a + b/a \in A,\ b \in B\}$$

a) *Si A y B poseen supremo, entonces C tiene supremo, y*

$$supC = supA + supB$$

Demostración.- *Supongamos que A y B tengan supremo. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente $c \leq supA + supB$; de modo que $supA + supB$ es una cota superior de C. esto demuestra por el axioma 10 que C tiene supremo y que*

$$supC \leq supA + supB$$

Sea ahora n un entero positivo cualquiera. Según el teorema 3.7 (con $h = 1/n$) existen un a en A y un b en B tales que:

$$a > supA - \frac{1}{n} \text{ y } b > supB - \frac{1}{n}$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$a + b > supA + supB - \frac{2}{n}, \text{ ó } supA + supB < a + b + \frac{2}{n} \leq supC + \frac{2}{n}$$

puesto que $a + b \leq supC$. Por consiguiente hemos demostrado que

$$supC \leq supA + supB < supC + \frac{2}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. En virtud del teorema 3.6, debe ser $supC = supA + supB$. Esto demuestra a)

b) *Si A y B tienen ínfimo, entonces C tiene ínfimo, e*

$$infC = infA + infB$$

Demostración.- *Supongamos que A y B tengan ínfimo. Si $c \in C$, entonces $c = a + b$, donde $a \in A$ y $b \in B$. Por consiguiente $c \geq infA + infB$; de modo que $infA + infB$ es una cota inferior de C. esto demuestra por el axioma 10 que C tiene ínfimo y que*

$$infC \geq infA + infB$$

Sea ahora n un entero positivo cualquiera. Según el teorema 3.7 (con $h = 1/n$) existen un a en A y un b en B tales que:

$$a < infA + \frac{1}{n} \text{ y } b < infB + \frac{1}{n}$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$a + b < infA + infB + \frac{2}{n}, \text{ ó } infA + infB \leq infC \leq a + b < infA + infB + \frac{2}{n}$$

puesto que $a + b \geq infC$ Por consiguiente hemos demostrado que

$$infA + infB \leq infC < infA + infB + \frac{2}{n}$$

para todo entero $n \geq 1$. En virtud del teorema 3.6, debe ser $supA + supB = infC$. Esto demuestra b)

Teorema 3.9 *Dados dos subconjuntos no vacíos S y T de $\mathbb{R}$ tales que*

$$s \leq t$$

para todo s en S y todo t en T. Entonces S tiene supremo, T ínfimo, y se verifica

$$supS \leq infT$$

Demostración.- Cada t de T es corta superior para S. Por consiguiente S tiene supremo que satisface la desigualdad $supS \leq T$ para todo t de S. Luego $supS$ es una cota inferior de T, con lo cual T tiene ínfimo que no puede ser menor que $supS$. Dicho de otro modo, se tiene $supS \leq infT$, como se afirmó.

Ejercicios y demostraciones

3.0.1. Demostraciones[8]

Teorema 3.10 *Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demostrar que existe por lo menos un número real z tal que $x < z < y$*

Demostración.- Sea S un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$, por axioma 10 se tiene un supremo llamemosle z, por definición $x \leq z$ para todo $x \in S$, ahora si $y \in \mathbb{R}$ que cumple $x \leq y$, para todo $x \in S$, entonces $z \leq y$, por lo tanto $x \leq z \leq y$ esto nos muestra que existe por lo menos un número real que cumple la condición $x < z < y$.

Teorema 3.11 *Si x es un número real arbitrario, probar que existen enteros m y n tales que $m < x < n$*

Demostración.- Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ en virtud del axioma 5 se verifica $n + m = 0$, donde m es el opuesto de n, esto nos dice que $m < n$ y por teorema anterior se tiene $m < x < n$.

Teorema 3.12 *Si $x > 0$, demuestre que existe un entero positivo n tal que $1/n < x$*

Demostración.- Sea $y = 1$ entonces por teorema 3.5 $nx > 1$, por lo tanto $1/n < x$

Teorema 3.13 *Si x es un número real arbitrario, demostrar que existe un entero n único que verifica las desigualdades $n \leq x < n + 1$. Este n se denomina la parte entera de x, se delega por $[x]$. Por ejemplo, $[5] = 5$, $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $\left[-\frac{8}{2}\right] = -3$*

Demostración.- Primero probemos la existencia de n,

- Sea $1 \leq a$ y $S = \{m \in \mathbb{N}/\ m \leq a\}$
  Vemos que S es no vacío pues contiene a 1, y a es un cota superior de S, luego por axioma del supremo, existe un número $s = supS$, entonces por teorema 3.7 con $h = 1$ resulta:

$$n > s - 1 \text{ ó } s < n + 1, \text{ para algúnn de } S \quad (1)$$

  Como $z \in S$, se cumple $z \leq a$ y solo falta probar que $a < z + 1$. En efecto, si fuese $z + 1 \leq a$, entonces $n + 1 \in S$ y por la propiedad a), se tendría $n + 1 \leq s$, en contradicción con (1).
  Por tanto, el número entero positivo n cumple con $n \leq a < n + 1$

[8] Tom Apostol Vol 1, pag. 34-35

- $0 \leq a < 1$
  En este caso, el entero $n = 0$ cumple con la propiedad requerida.

- $a < 0$ *Entonces* $-a > 0$ *y por los dos casos anteriores, existe un entero u tal que $u \leq a < u + 1$ de donde $-u - 1 < a \leq -u$.*
  Definiendo n por
  $$n = \begin{cases} -u - 1 & si \quad a < -u \\ \text{si} & x \leq 5 \quad a = -u \end{cases} \tag{3.1}$$
  se prueba fácilmente que $z \leq a < z + 1$

Luego demostramos la unicidad. Sea w y z dos números enteros tal que, $w \leq a < w + 1$ y $z \leq a < z + 1$ debemos probar que $w = z$. Si fuesen distintos, podemos suponer que $z < w$. Entonces $w - z \geq 1$, esto es $z + 1 \leq w$, y de $a < z + 1 \leq w \leq a$ resulta una contradicción ya que $a < a$ luego se cumple que $w = z$.

Teorema 3.14 *Si a e b son números reales arbitrarios, $a < b$, probar que existe por l menos un número racional r tal que $a < r < b$ y deducir de ello que existen infinitos. Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto de los números racionales es denso en el sistema de los números reales.*

Demostración.- *Por la propiedad arquimediana, para el número $\dfrac{1}{b-a}$ existe un número natural d tal que $\dfrac{1}{b-a}$, de donde*
$$db - da > 1 \text{ ó } da + 1 < da \quad (1)$$
y también si z=parte entera de da
$$z \leq da < z + 1 \quad (2)$$
Sea $q = \dfrac{n}{d}$, con $n = z + 1$. Entonces q es un número racional y cumple $x < q < y$ pues:
$$a = d\frac{a}{d} < \frac{z+1}{d} < q = \frac{z+1}{d} \leq \frac{da+1}{d} < d\frac{b}{d} = b$$
. y por ser $\dfrac{z+1}{d}$ deducimos que existen infinitos números racionales entre a e b

Teorema 3.15 *Si x es racional, $x \neq 0$, e y es irracional, demostrar que $x + y$, $x - y$, xy, x/y, son todos irracionales.*

- $x + y, \quad x - y$
  Supongamos que la suma nos da un racional, es decir $\dfrac{q}{p} + y = \dfrac{s}{t}$ para $s, t \neq 0$, por lo tanto $y = \dfrac{qt + sp}{tp}$, así llegamos a una contradicción, en virtud del axioma 7 (la suma y multiplicación de dos racionales nos da otros racionales).
  $x - y$ Se puede comprobar de similar manera a la anterior demostración.

- $xy, \quad x/y, \quad y/x$
  Supongamos que el producto nos da un número racional, por lo tanto $\frac{p}{q} \cdot y = \dfrac{t}{s}$ para $q, s \neq 0$ y $y = \dfrac{sq}{pt}$ en contradicción con la hipótesis. De igual manera se comprueba que x/y es irracional.

Teorema 3.16 *¿La suma o el producto de dos números irracionales es siempre irracional?*

Demostración.- *No siempre se cumple la proposición, veamos dos contra ejemplos.*

Sea a un número irracional entonces por teorema anterior $1-a$ es irracional, así $a+(1-a)=1$, sabiendo que $1\in\mathbb{R}$. Por otro lado sabemos que $\dfrac{1}{a}$ es irracional, por lo tanto $1\in\mathbb{R}$.

Teorema 3.17 *Si x e y son números reales cualesquiera, $x<y$, demostrar que existe por lo menos un número irracional z tal que $x<z<y$ y deducir que existen infinitos*

Demostración.- *Sea $0<x<y$ e i un número irracional, por propiedad arquimediana $y-x>\dfrac{i}{n}$ ó $x+\dfrac{i}{n}<y$.*

por teorema 3.15 se tiene que $\dfrac{i}{n}$ es irracional llamemosle z por lo tanto $x+z>x$, luego existe $x<z<y$. Y de $\dfrac{i}{n}$ deducimos que existen infinitos números irracionales que cumplen la condición.

Teorema 3.18 *Un entero n se llama par si $n=2m$ para un cierto entero m, e impar si $n+1$ es par demostrar las afirmaciones siguientes:*

a) *Un entero no puede ser a la vez par e impar.*

Demostración.- *Sean $2k$ y $2i+1$ dos enteros par e impar a la vez entonces $2k=2i+1$ ó $(k-i)=\dfrac{1}{2}$ lo cual no es cierto, ya que la resta de dos números pares siempre da par, por lo tanto es par o es impar pero no los dos al mismo tiempo.*

b) *Todo entero es par o es impar.*

Demostración.- *Por inciso a) $2k\neq 2k-1$ para $k\in\mathbb{Z}$, por la tricotomía ó $2k<2k-1$ ó $2k>2k-1$ lo cual se cumple pero no ambos a la vez.*

c) *La suma o el producto de dos enteros pares es par. ¿ Qué se puede decir acerca de la suma o del producto de dos enteros impares ?*

Demostración.- *Sea $k\in\mathbb{R}$ entonces $2k+2k=4k=2(2k)$. Luego para el producto $2k\cdot 2k=4k^2=2(2k^2)$ Por otra parte $(2k-1)+(2k-1)=4k-2=2(2k-1)$. No pasa lo mismo para el producto ya que $(2k-1)(2k-1)=2k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$*

d) *Si n^2 es par, también lo es n. Si $a^2=2b^2$, siendo a y b enteros, entonces a y b son ambos pares.*

Demostración.- *Si n es impar entonces n^2 es impar, reciprocamente hablando, entonces sea $n^2=(2k-1)^2$ para $k\in\mathbb{R}$, por lo tanto $2(2k^2+4k)-1$ es impar.*
Por otro lado, sea $a=2k$, $b=2k-1$ '; y $k\in\mathbb{Z}$ entonces $(2k)^2=2(2k-1)^2$, por lo tanto $k=\dfrac{1}{2}$, esto contradice $k\in\mathbb{Z}$.

e) *Todo número racional puede expresarse en la forma a/b, donde a y b enteros, uno de los cuales por lo menos es impar.*

demostración.- *Sea r un número racional con $r=\dfrac{a}{b}$. Si a y b son ambos pares, entonces tenemos*

$$a=2c \text{ y } b=2d \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}=\frac{2c}{2d}=\frac{c}{d},$$

con $c < a \quad y \quad d < b$. ahora, si $c \quad y \quad d$ ambos son pares, repita el proceso. Esto dará una secuencia estrictamente decreciente de enteros positivos, por lo que el proceso debe terminar por el principio de buen orden. Por lo tanto debemos tener algunos enteros $r \quad y \quad s$, no ambos con $n = \dfrac{a}{b} = \dfrac{r}{s}$.

Teorema 3.19 *Demostrar que no existe número racional cuyo cuadrado sea 2.*

Demostración.- *Utilizaremos el método de reducción al absurdo. Supongamos que n es impar, es decir, $n = 2k+1$ $k \in \mathbb{Z}$, ahora operando:*

$$n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2+2k) + 1$$

Sabemos que $2k^2 + 2k$ es un número entero cualquiera, por lo tanto podemos realizar un cambio de variable, $2k^2 + 2k = k^{'}$, entonces:

$$n^2 = 2k^{'} + 1$$

Se tiene una contradicción ya por teorema anterior se de dijo que n^2 es par, por lo tanto queda demostrado la proposición. Ahora si estamos con la facultad de demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.
Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir, existen números enteros tales que:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Supongamos también que p y q no tienen divisor común mas que el 1. Se tiene:

$$p^2 = 2q^2$$

Esto nos muestra que p^2 es par y por la previa demostración tenemos que p es par. En otras palabras $p = 2k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

Esto demuestra que q^2 es par y en consecuencia que q es par. Así pues, son pares tanto p como q en contradicción con el hecho de que p y q no tienen divisores comunes. Esta contradicción completa la demostración.

Teorema 3.20 *La propiedad arquimediana del sistema de números reales se dedujo como consecuencia del axioma del supremo. Demostrar que el conjunto de los números racionales satisface la propiedad arquimediana pero no la del supremo. Esto demuestra que la propiedad arquimediana no implica el axioma del supremo.*

Demostración.- *Está claro que que el conjunto de los racionales satisface la propiedad arquimediana ya que si $x = \dfrac{p}{q}$ e $y = \dfrac{s}{t}$ para $q,\ t \neq 0$ entonces $\dfrac{p}{q} \cdot n > \dfrac{s}{t}$.*
Por otra parte sea S el conjunto de todos los racionales y supongase que esta acotado superiormente, por axioma 10 se tiene supremo, llamemosle B, entonces $x \leq B, \quad x \in S$, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $B \leq t$, así por teorema 3.14 $\quad B < x < t$, esto contradice que B sea supremo.

3.1. Existencia de raíces cuadradas de los números reales no negativos

Nota Los números negativos no pueden tener raíces cuadradas, pues si $x^2 = a$, al ser a un cuadrado ha de ser no negativo (en virtud del teorema 2.5). Además, si $a = 0$, $x = 0$ es la única raíz cuadrada (por el teorema 1.11). Supóngase, pues $a > 0$. Si $x^2 = a$ entonces $x \leq 0$ y $(-x)^2 = a$, por lo tanto, x y su opuesto son ambos raíces cuadradas. Pero a lo sumo tiene dos, porque si $x^2 = a$ e $y^2 = a$, entonces $x^2 = y^2 \quad$ y

$(x+y)(x-y)=0$, en virtud del teorema 1.11, ó $x=y$ ó $x=-y$. Por lo tanto, si a tiene raíces cuadradas, tiene exactamente dos.

Definición 3.3 *Si $a \geq 0$, su raíz cuadrada no negativa se indicará por $a^{1/2}$ o por $\sqrt{a}$. Si $a > 0$, la raíz cuadrada negativa es $-a^{1/2}$ ó $-\sqrt{a}$*

Teorema 3.21 *Cada número real no negativo a tiene una raíz cuadrada no negativa única.*

Demostración.- *Si $a=0$, entonces 0 es la única raíz cuadrada. Supóngase pues que $a>0$. Sea S el conjunto de todos los números reales positivos x tales que $x^2 \leq a$. Puesto que $(1+a)^2 > a$, el número $(a+1)$ es una cota superior de S. Pero, S es no vacío, pues $a/(1+a)$ pertenece a S; en efecto $a^2 \leq a(1+a)^2$ y por lo tanto $a^2/(1+a)^2 \leq a$. En virtud del axioma 10, S tiene un supremo que se designa por b. Nótese que $b \geq a/(1+a)$ y por lo tanto $b>0$. Existen sólo tres posibilidades: $b^2>a$, $b^2<a$, $b^2=a$.*
Supóngase $b^2 > a$ y sea $c = b-(b^2-a)/(2b)/(2b) = \dfrac{1}{2}(b+a/b)$. Entonces $a<c<b$ y $c^2 = b^2-(b^2-a)+(b^2-a)^2/4b^2 = a+(b^2-a)^2/(4b^2) > a$. Por lo tanto, $c^2>x^2$ para todo $x \in S$, es decir, $c>x$ para cada $x \in S$; luego c es una cota superior de S, y puesto que $c<b$ se tiene una contradicción con el hecho de ser b el extremo superior de S. Por tanto, la desigualdad $b^2>a$ es imposible.
Supóngase $b^2<a$. Puesto que $b>0$ se puede elegir un número positivo c tal que $c<b$ y tal que $c < (a-b^2)7(3b).Setieneentonecs$

$$(b+c)^2 = b^2+c(2b+c) < b^2+3bc < b^2+(a-b^2)=a$$

es decir, $b+c$ pertenece a S. Como $b+c>b$, esta desigualdad está en contradicción con que b sea una cota superior de S. Por lo tanto, la desigualdad $b^2<a$ es imposible y sólo queda como posible $b^2=a$

3.2. Raíces de orden superior. Potencias racionales

El axioma del extremo superior se puede utilizar también para probar la existencia de raíces de orden superior. Por ejemplo, si n es un entero positivo impar, para cada real x existe un número real y, y uno sólo tal que $x^n=x$. Esta y se denomina raíz n-sima de x y se indica por:

Definición 3.4

$$y = x^{\frac{1}{n}} \text{ ó } y=\sqrt[n]{x}$$

Si n es par, la situación es un poco distinta. En este caso, si x es negativo, no existe un número real y tal que $y^n=x$, puesto que $y^n \geq 0$ para cada número real y. Sin embargo, si x es positivo, se puede probar que existe un número positivo y sólo uno tal que $y^n=x$. Este y se denomina la raíz n-sima positiva de x y se indica por los símbolos anteriormente mencionados. Puesto que n es par, $(-y)^n=y^n$ y, por tanto, cada $x>0$ tiene dos raíces n-simas reales, y e $-y$. Sin embargo, los símbolos $x^{\frac{1}{n}}$ y $\sqrt[n]{x}$; se reservan para la raíz n-sima positiva.

Definición 3.5 *Si r es un número racional positivo, sea $r=m/n$, donde m y n son enteros positivos, se define como:*

$$x^r = x^{m/n} = (x^m)^{\frac{1}{n}},$$

es decir como raíz n-sima de x^m, siempre que ésta exista.

Definición 3.6 *Si $x \neq 0$, se define*

$$x^{-r} = \frac{1}{x^r},$$

con tal que x^r esté definida.

Partiendo de esas definiciones, es fácil comprobar que las leyes usuales de los exponentes son válidas para exponentes racionales:

Propiedades 3.1 *Propiedades de potencia.*

1. $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$
2. $(x^r)^s = x^{rs}$
3. $(xy)^r = x^r \cdot y^r$
4. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$

4

Valor absoluto

Definición 4.1

$$|x| = \begin{cases} \text{si} & x, \quad x \geq 0 \\ \text{si} & -x, \quad x \leq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Teorema 4.1 *Probemos que* $|x| = \sqrt{x^2}$

Sea $x < 0$, *entonces por definición* $|x| = -x > 0$. *Después vemos que* $(-x)^2 = x^2$.
Decimos que hay dos raíces cuadradas de cualquier número positivo, y e $-y$, *por lo tanto por el teorema 3.21 y tiene una raíz cuadrada no negativa única* $\sqrt{y}$. *Así* $\sqrt{x^2} = -x = |x|$ *cuando* $x < 0$ *y* $\sqrt{x^2} = x = |x|$ *cuando* $x \geq 0$

Teorema 4.2 *Si* $a \geq 0$, *es* $\quad |x| \leq a \quad$ *si y sólo si* $\quad -a \leq x \leq a$

Demostración.- *Debemos probar dos cuestiones: primero, que la desiguadad* $|x| \leq a$ *implica las dos desigualdades* $-a \leq x \leq a$ *y recíprocamente, que* $-a \leq x \leq a$ *implica* $|x| \leq a$.
Ya supuesto $|x| \leq a$ *se tiene también* $-a \leq -|x|$. *Pero ó* $\quad x = |x| \quad$ *ó* $\quad x = -|x|$ *y, por lo tanto,* $x \leq a \quad$ *y* $-a \leq x$, *lo cual prueba la primera parte del teorema.*
Para probar el recíproco, supóngase $-a \leq x \leq a$. *Si* $x \leq 0$ *se tiene* $|x| = x \leq a$; *si por el contrario es* $x \leq 0$, *entonces* $|x| = -x \leq a$. *En ambos casos se tiene* $|x| \leq a$, *lo que demuestra el teorema.*

Teorema 4.3 (Desigualdad triangular) *Para todos los números a* $\quad$ *y* $\quad$ *b se tiene*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración.- *Vamos a considerar cuatro casos:*

$$\begin{array}{lrr} (1) & a \geq 0 & b \geq 0 \\ (2) & a \geq & b \leq 0 \\ (4) & a \leq & b \geq 0 \\ (5) & a \leq 0 & b \leq 0 \end{array}$$

En el caso (1) *tenemos también* $a + b \geq 0$, *esto es evidente; en efecto por definición*

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

de modo que en este caso se cumple la igualdad.
En el caso (4) *se tiene* $a+b \leq 0$ *y de nuevo se cumple la igualdad:*

$$|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) = |a|+|b|$$

En el caso (2)*, cuando* $a \geq 0$ *y* $b \leq 0$*, debemos demostrar que*

$$|a+b| \leq a-b$$

Este caso puede dividirse en dos subcasos. Si $a+b \geq 0$*, entonces tenemos que demostrar que*

$$a+b \leq a-b$$

es decir,

$$b \leq -b,$$

lo cual se cumple ciertamente puesto que b *es negativo y* $-b$ *positivo. Por otra parte, si* $a+b \leq 0$ *debemos demostrar que*

$$-a-b \leq a-b$$

es decir

$$-a \leq a,$$

lo cual es verdad puesto que a *es positivo y* $-a$ *negativo.*
Nótese finalmente que el caso (3) *puede despacharse sin ningún trabajo adicional aplicando el caso* (2) *con* a *y* b *intercambiados.*

Se puede dar una demostración mas corta dado que

$$|a| = \sqrt{a^2} \text{ ó } |a|^2 = a^2$$

. *Sea* $(|a+b|)^2 = (a+b)$ *Entonces*

$$\begin{aligned}(|a+b|)^2 = (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ &\leq a^2+2|a|\dot{|}b|+b^2 \\ &= |a|^2 2|a|\dot{|}b|+|b|^2 \\ &= (|a|+|b|)^2\end{aligned}$$

De esto podemos concluir que $|a+b| \leq |a|+|b|$ *porque* $x^2 < y^2$ *implica* $x < y$

Hay una tercera forma de probar que es utilizando el teorema anterior.
Puesto que $x = |x| \quad ó \quad x = -|x|$*, se tiene* $-|x| \leq x \leq |x|$*. Análogamente* $-|y| \leq y \leq |y|$*. Sumando ambas desigualdades se tiene:*

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

y por tanto en virtud del teorema 4.2 se concluye que: $|x+y| \leq |x|+|y|$

Teorema 4.4 *Demostrar que* $|a| \geq b$ *entonces* $a \leq -b$ *ó* $a \geq b$

Demostración.- *Por definición se tiene que*

$$|a| = \begin{cases} \text{si} & a, \quad a \geq b \\ \text{si} & -a, \quad a \leq b \end{cases} \tag{4.2}$$

Entonces $a \geq b \quad \vee \quad -a \geq b = a \leq -b$

4.1. Ejercicios y Demostraciones

4.1.1. Ejercicios[9]

Ejercicio 4.1 *Dese una expresión equivalente de cada una de las siguientes utilizando como mínimo una vez menos el signo de valor absoluto.*

$$\begin{array}{crcl}
(i) & |\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}| & \Rightarrow & \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7} \\
(ii) & ||a+b|-|a|-|b|| & \Rightarrow & |a+b|-|a|-|b| \\
(iii) & |\left(|a+b|+|c|-|a+b+c|\right)| & \Rightarrow & |a+b|+|c|-|a+b+c| \\
(iv) & |x^2-2xy+y2| & \Rightarrow & x^2-2xy+y2 \\
(v) & |\left(|\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}|\right)| & \Rightarrow & \sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}
\end{array}$$

Ejercicio 4.2 *Expresar lo siguiente prescindiendo de signos de valor absoluto, tratando por separado distintos casos cuando sea necesario.*

*(*i*)* $|a+b|-|b|$

$$\begin{array}{rcccccccc}
a & si & a & \geq & -b & y & b & \geq & 0 \\
-a & si & a & \leq & -b & y & b & \leq & 0 \\
a+2b & si & a & \geq & -b & y & b & \leq & 0 \\
-a-2b & si & a & \leq & -b & y & b & \geq & 0
\end{array}$$

*(*ii*)* $|x|-|x^2|$

$$\begin{array}{rcccc}
x-x^2 & si & x & \geq & 0 \\
-x-x^2 & si & x & \leq & 0
\end{array}$$

Ejercicio 4.3 *Encontrar todos los números x para los que se cumple.*

*(*i*)* $|x-3|=8$

$$\begin{array}{ccccc l}
-8 & = & x-3 & = & 8 & \textit{teorema 4.1} \\
-5 & = & x & = & 11 &
\end{array}$$

*(*ii*)* $|x-3|<8$

$$\begin{array}{ccccc l}
-8 & < & x-3 & < & 8 & \textit{teorema 4.1} \\
-5 & < & x & < & 11 &
\end{array}$$

*(*iii*)* $|x+4|<2$

$$\begin{array}{ccccc l}
-2 & < & x+4 & < & -2 & \textit{teorema 4.1} \\
-6 & < & x & < & -2 &
\end{array}$$

[9]Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag 19-26

(iv) $|x-1|+|x-2|>1$

Por definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si \quad x \geq 2 \\ 2-x & si \quad x \leq 2 \end{cases} \tag{4.4}$$

Por lo tanto queda comprobar:

$$\begin{array}{lcccccc} Si & x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)+(2-x)>1 & \Rightarrow & x<1 \\ Si & 1 \leq x \leq 2 & \Rightarrow & (x-1)+(2-x)>1 & \Rightarrow & 1>1 \\ Si & x \geq 2 & \Rightarrow & (x-1)+(x-2)>1 & \Rightarrow & x>2 \end{array}$$

Así: $x<1 \ \vee \ x>2$

(v) $|x-1|+|x+1|<2$

Por definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -1-x & si \quad x \leq -1 \end{cases} \tag{4.6}$$

Por lo tanto queda comprobar:

$$\begin{array}{lcccccc} Si & x \leq -1 & \Rightarrow & (1-x)+(1-x)<2 & \Rightarrow & x>-1 \\ Si & -1 \leq x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)+(x+1)<2 & \Rightarrow & 2<2 \\ Si & x \geq 1 & \Rightarrow & (x-1)+(x+1)<2 & \Rightarrow & x<1 \end{array}$$

Pero es falso que x satisface a $-1 \leq x \leq 1$, y contradice a que x satisface a todos los reales, por lo tanto no existe solución

(vi) $|x-1|+|x+1|<1$

De la misma manera que el anterior ejercicio no tiene solución para ningún x.

(vii) $|x-1| \cdot |x+1| = 0$

Por definición:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x \leq 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -1-x & si \quad x \leq -1 \end{cases} \tag{4.8}$$

queda comprobar:

$$\begin{array}{llcrcl} Si & x \leq -1 & \Rightarrow & (1-x)+(-1-x)=0 & \Rightarrow & x \leq -1 \cup x=1 \cup x=-1 \\ Si & -1 \leq x \leq 1 & \Rightarrow & (1-x)\dot{(}x+1)=0 & \Rightarrow & -1 \leq x \leq 1 \cup x=1 \cup x=-1 \\ Si & x \geq 1 & \Rightarrow & (x-1)\dot{(}x+1)=0 & \Rightarrow & x \notin \mathbb{R} \end{array}$$

Por lo tanto $x = 1$ *ó* $x = -1$

(viii) $|x-1| \cdot |x+2| = 3$

4.2. Demostraciones [10]

Teorema 4.5 $|xy| = |x| \cdot |y|$

Demostración.- *Si* $|xy|$ *Por teorema 4.1* $\sqrt{(xy)^2}$ *luego por propiedad 3.1* $\sqrt{x^2 \cdot y^2}$*, así* $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}$ *y* $|x| \cdot |y|$

Teorema 4.6 $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$

Demostración.- *Si* $\left|\frac{1}{x}\right|$ *por definición* $\sqrt{(x^{-1})^2}$*, después* $\left(\frac{1}{x}\right)^{2/2}$*, por propiedad 3.1* $\frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{x^2}}$*, luego* $\frac{1}{|x|}$

Teorema 4.7 $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$ *si* $y \neq 0$

Demostración.-

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{x^{2/2}}{y^{2/2}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{2/2} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

Teorema 4.8 $|x-y| \leq |x| + |y|$

Demostración.- *Sea* $(|x-y|)^2 \leq (|x|+|y|)^2$*, entonces:*

---

[10] Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag 20

$$\begin{aligned}
(|x-y|)^2 &= (x-y)^2 \\
&= x^2-2xy+y^2 \\
&\leq |x|^2+|-2xy|+|y|^2 \qquad \textit{Ya que } -2xy \leq |-2xy| \\
&= |x|^2+|-2||x||y|+|y|^2 \quad \textit{Por teorema 4.4.} \\
&= |x|^2+2|x||y|+|y|^2 \\
&= (|x|+|y|)^2
\end{aligned}$$

luego por teorema 2.18 $|x-y| \leq |x|+|y|$

Teorema 4.9 $|x|-|y| \leq |x-y|$

Demostración.- Su demostración es parecida al anterior teorema,

$$\begin{aligned}
(|x|-|y|)^2 &= |x|^2-2|x||y|+|y|^2 \\
&\leq x^2-2xy+y^2 \qquad \textit{por el contrareciproco de } |2xy| \geq 2xy \\
&= (x-y)^2 \\
&= |x-y|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|x|-|y| \leq |x-y|$

Teorema 4.10 $||x|-|y|| \leq |x-y|$ *(¿ Por qué se sigue esto inmediatamente del anterior teorema ?)*

Demostración.- Sea $\sqrt{(|x|-|y|)^2}$ *entonces,*

$$\sqrt{(|x|-|y|)^2} = \sqrt{(x^2-2|x||y|+y^2} \leq \sqrt{x^2-2xy+y^2}$$

y por definición se tiene $|x-y|$

Teorema 4.11 $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$

Demostración.- Sea $\sqrt{(x+y+9)^2}$ *entonces,*

$$\sqrt{x^2+z^2++y^2+2xy+2xz+2yz} \leq \sqrt{|x|^2+|z|^2++|y|^2+2|x||y|+2|x||z|+2|y||z|}$$

por lo tanto $\sqrt{(|x|+|y|+|z|)^2}$*. La igualdad se prueba si* $\forall x,y,z \geq 0$ *ó* $\forall x,y,z \leq 0$

Teorema 4.12 *El máximo de dos números* x *e* y *se denota por* $max(x,y)$*. Así* $max(-1,3) = max(3,3)$ *y* $max(-1,-4) = max(-4,-1 = -1)$*. El mínimo de* x *e* y *se denota por* $min(x,y)$*. Demostrar que:*

1. $max(x,y) = \dfrac{x+y+|y-x|}{2}$

2. $min(x,y) = \dfrac{x+y-|y-x|}{2}$

Derivar una fórmula para $max(x,y,z)$ y $min(x,y,z)$, utilizando. por ejemplo, $max(x,y,z) = max(x, max(x,y))$

Demostración.- *Por definición de valor absoluto se tiene:*

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & si, \quad x \geq y \\ y-x & si, \quad x \leq y \end{cases} \tag{4.9}$$

Por lo tanto

- $max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+x-y}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$

- $max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+y-x}{2} = \dfrac{2y}{2} = y$

La demostración es parecido para para $min(x,y)$
Se deriva una formula para $mas(x,y,z) = max(x, max(y,z))$ de la siguiente manera

$$max(x, max(y,z)) = \frac{x + \dfrac{y+z+|y-z|}{2} + \left| x - \dfrac{y+z+|y-z|}{2} \right|}{2}$$

Teorema 4.13 *Demostrar que $|a| = |-a|$*

Demostración.- *Si $a \geq 0$, para $|a|^2$ entonces a^2, en virtud del teorema 2.5 $(-a)^2 = |-a|^2$, así se demuestra que $|a| = |-a|$. Luego es evidente para $a \leq 0$*

Teorema 4.14 [11] *Demostrar que si*

$$|x-x_0| < \frac{\epsilon}{2} \qquad y \qquad |y-y_0| < \frac{e}{2}$$

entonces

$$|(x+y) - (x_o+y_0)| < \epsilon,$$
$$|(x-y) - (x_o-y_0)| < \epsilon.$$

Demostración.- *primeramente si $|(x+y)-(x_o+y_0)| = |(x-x_0)+(y-y_0)|$, por desigualdad triangular e hipótesis,*

$$|(x-x_0)+(y-y_0)| \leq |x-x_0| + |y-y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Demostramos de similar manera y por teorema 1.7,

$$|(x-y)-(x_o-y_0)| = |(x-x_0)-(y-y_0)| \leq |x-x_0| + |y-y_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Teorema 4.15 [12] *Demostrar que si*

$$|x-x_0| < min\left(1, \frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}\right) \qquad y \qquad |y-y_0| < \frac{\epsilon}{2(x_0+1)}$$

[11] Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag 23-24
[12] Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag 23-24

entonces $|xy - x_0y_0| < \epsilon$.

La primera igualdad de la hipótesis significa precisamente que:

$$|x - x_0| < 1 \quad y \quad |x - x_0|\frac{\epsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

Demostración.- *puesto que* $|x - x_0| < 1$ *se tiene*

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1$$

de modo que

$$|x| < 1 + |x_0|$$

Así pues

$$\begin{array}{rcll} |xy - x_0y_0| & = & |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| & \\ & = & |x(y - y_0) + y_0(x - x_0)| & \\ & \leq & |x| \cdot |y - y_0| + |y_0| \cdot |x - x_0| & \\ & < & (1 + |x_0|) \cdot \dfrac{\epsilon}{2(|x_0| + 1|)} + |y_0| \cdot \dfrac{\epsilon}{2(|y_0| + 1|)} & ya\ que\ |y_0|\dfrac{\epsilon}{2(|y_0| + 1|)} < |y_0|\dfrac{\epsilon}{2|y_0|}\ para\ |y_0| \neq 0 \\ & \leq & \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} & ó\ |y_0|\dfrac{\epsilon}{2(|y_0| + 1|)} = \dfrac{\epsilon}{2}\ si\ |y_0| = 0 \\ & = & \epsilon & \end{array}$$

Teorema 4.16 *Demostrar que si* $y_0 \neq 0$ *y*

$$|y - y_0| < min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

entonces $y \neq 0$ *y*

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{|y_0|}\right|$$

Demostración.- *Se tiene*

$$|y_0| - |y| < |y - y_0| < \frac{y_0}{2},$$

de modo que $|y| < \dfrac{|y_0|}{2}$. *En particular,* $y \neq 0$, *y*

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{y_0}.$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} < \frac{2}{y_0} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\epsilon|y_o|^2}{2} = \epsilon$$

Teorema 4.17 *Sustituir los interrogantes del siguiente enunciado por expresiones que encierren ϵ, x_0 e y_0 de tal manera que la conclusión sea válida:*
Si y_0 y

$$|y-y_0|<? \quad y \quad |x-x_0|<?$$

entonces $y\neq 0$ y

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{x_0}{y_0}\right|<\epsilon$$

Sea $|x\frac{1}{y}-x_0\frac{1}{y_0}|<\epsilon$ entonce $|x\cdot y^{-1}-x_o\cdot y_0^{-1}|<\epsilon$ por teorema 4.14

$$|x-x_0|<min\left(1,\frac{\epsilon}{2(|y_0^{-1}|+1)}\right) \quad y \quad |y^{-1}-y_0^{-1}|<\frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}$$

luego por teorema 4.15

$$|y-y_0|<min\left(\frac{\frac{\epsilon}{2(|x_o|)+1}\cdot|y_0|^2}{2}\right)=\text{mín}\left(\frac{\epsilon\cdot|y_0|^2}{4(|x_o|+1)}\right)$$

4.3. Demostraciones [13]

Teorema 4.18 $|x|=0$ *si sólo si* $x=0$

Demostración.- *Si $|x|=0$, por definición $x=0$. Luego, si $x=0$, entonces por teorema $\sqrt{x^2}=\sqrt{0^2}=0$*

Teorema 4.19 $|x-y|=|y-x|$

Demostración.- *Por teorema $|x-y|=\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{x^2-2xy+y^2}=\sqrt{y^2-2yx+x^2}=\sqrt{(y-x)^2}=|y-x|$*

Teorema 4.20 $|x|^2=x^2$

Demostración.- *Si $|x|^2$, por teorema $\left(\sqrt{x^2}\right)^2$, por propiedad de potencia x^2*

4.4. Ejercicios [14]

Ejercicio 4.4 *Cada desigualdad (a_i), de las escritas a continuación, equivale exactamente a una desigualdad (b_j). Por ejemplo, $|x|<3$ si y sólo si $-3<x<3$ y por tanto (a_1) es equivalente a (b_2). Determinar todos los pares equivalentes.*

[13] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag 53-54
[14] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag 53-54

$\|x\| < 3$	$\longrightarrow$	$-3 < x < 3$	$\|x+2\| \geq 5$	$\longrightarrow$	$x \geq 3 \ \vee \ x \leq -7$
$\|x-1\| < 3$	$\longrightarrow$	$-2 < x < 4$	$\|5 - x^{-1}\| < 1$	$\longrightarrow$	$4 < x < 6$
$\|3-2x\| < 1$	$\longrightarrow$	$1 < x < 2$	$\|x-5\| < \|x+1\|$	$\longrightarrow$	$x > 2$
$\|1+2x\| \leq 1$	$\longrightarrow$	$-1 \leq x \leq 0$	$\|x^2 - 2\| \leq 1$	$\longrightarrow$	$-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ ó $1 \leq x \leq \sqrt{3}$
$\|x-1\| > 2$	$\longrightarrow$	$x > 4 \ \vee \ x < -1$	$x < x^2 - 12 < 4x$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$

Ejercicio 4.5 *Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa. En cada caso razonar la decisión.*

a) $x < 5$ *implica* $|x| < 5$

Es falso ya que $|-6| < 5$ *entonces* $6 > 5$.

b) $|x-5| < 2$ *implica* $3 < x < 7$

Es verdad ya que por teorema $-2 < x-5 < 2$ *entonces* $3 < x < 7$.

c) $|1+3x| \leq 1$ *implica* $x > -\frac{2}{3}$

es verdad ya que $-1 \leq 1+3x \leq 1$ *entonces* $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$.

d) *No existe número real* x *para el que* $|x-1| = |x-2|$

Es falso ya que se cumple para $\frac{3}{2}$.

e) *Para todo* $x > 0$ *existe un* $y > 0$ *tal que* $|2x+y| = 5$

Es falso ya que si tomas $x = 3$ *será* $y < 0$

5

Distintas clases de números

5.1. El principio de la inducción matemática

Teorema 5.1 (Principio de inducción matemática) *Sea S un conjunto de enteros positivos que tienen las dos propiedades siguientes:*

a) *El número 1 pertenece al conjunto S.*

b) *Si un entero k pertenece al conjunto S, también $k+1$ pertenece a S.*

Entonces todo entero positivo pertenece al conjunto S.

Demostración.- *Las propiedades a) y b) nos dicen que S es un conjunto inductivo. Por consiguiente S tiene cualquier entero positivo.*

5.2. Teoremas y Ejercicios

5.2.1. Ejercicios[15]

Ejercicio 5.1 *Demostrar por inducción las fórmulas siguientes:*

a) $1+2+3+...+n = n(b+1)/2$

Demostración.- *Sea $n = k$ entonces $1+2+3+...+k = k(k+1)/2$.*
Para $k=1$ se tiene $1 = 1(1+1)/2$.
Por ultimo si $k = k+1$ nos queda probar que $1+2+3+...+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, luego $\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$. Así $\dfrac{k^2+3k+2}{2}$ y $\dfrac{(x+1)(x+2)}{2}$

b) $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

Demostración.- *Sea $n = k$ entonces $1+3+5+...+(2k-1) = k^2$.*
Para $k=1$ se tiene $[2(1)-1] = 1^2$, así $1 = 1$
Luego, si $k = k+1$ entonces $1+3+5+...+[2(k+1)-1] = (k+1)^2$. Por lo tanto $k^2+2k+1 = (k+1)^2$.

[15] Tom Apostol Vol 1, pag 44

c) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$

Demostración.- *Sea $n=k$ entonces,*

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3=(1+2+3+...+k)^2$$

Para $k=1$

$$1=1,$$

Luego $k=k+1$,

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=(1+2+3+...+k)^2,$$

Así,

$$\begin{array}{rcl}
\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3= & = & \left(\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)\right)^2 \\
\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3 & = & \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}+k(k+1)^2+(k+1)^2 \\
\dfrac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4} & = & \dfrac{k^2(k+1)^2+4k(k+1)^2+4(k+1)^2}{4} \\
\dfrac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} & = & \dfrac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}
\end{array}$$

d) $1^3+2^3+...+(n-1)^3<n^4/4<1^3+2^3+...+n^3$

Demostración.- *Sea $n=k$ entonces*

$$1^3+2^3+...+(k-1)^3<k^4/4 \quad (1)$$

Para $k=1$, $0<1/4$ se observa que se cumple.
Después, para $k=k+1$,

$$1^3+2^3+...+k^3<(k+1)^4/4,$$

sumando k^3 a (1),

$$1^3+2^3+...+k^3<k^4/4+k^3$$

y para deducir como consecuencia de $k+1$, basta demostrar,

$$k^4/4+k^3<(k+1)^4/4$$

, Pero esto es consecuencia inmediata de la igualdad

$$(k+1)^4/4=(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)/4=k^4/4+k^3+(3k^2)/2+k+1$$

Por tanto se demostró que $k+1$ es consecuencia de k

Ejercicio 5.2 *Obsérvese que:*

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & 1 \\
1-4 & = & -(1+2) \\
1-4+9 & = & 1+2+3 \\
1-4+9-16 & = & -(1+2+3+4)
\end{array}$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por inducción

Demostración.- *Verificando tenemos que la ley general es* $1-4+9-16+...+(-1)^{n+1}\cdot n^2=(-1)^{n+1}(1+2+3+...+n)$.
Ahora pasemos a demostrarlo. Sea $n=k$ *entonces,*

$$1-4+9-16+...+(-1)^{k+1}\cdot k^2=(-1)^{k+1}(1+2+3+...+k)$$

Si $k=1$, *se sigue,* $(-1)^2\cdot 1^2=(-1)^2\cdot 1$, *vemos que satisface para* $k=1$. *Luego* $k=k+1$,

$$1-4+9-16+...+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2=(-1)^{k+2}\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]$$

.
Sumando $(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2$ *a la segunda igualdad dada, se tiene,*

$$1-4+9-16+...+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2=(-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2$$

Por lo tanto, basta demostrar que $(-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2=(-1)^{k+2}\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]$

$$\begin{aligned}
(-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}\cdot(k+1)^2 &= (-1)^{k+2}\left\{\frac{[(-1)(k+1)k]+2(k^2+2k+1)}{2}\right\}\\
&= (-1)^{k+2}\left(\frac{-k^2-k+2k^2+4k+2}{2}\right)\\
&= (-1)^{k+2}\left(\frac{k^2+3k+2}{2}\right)\\
&= (-1)^{k+2}\left[\frac{(x+1)(x+2)}{2}\right]
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.3 *Obsérvese que*

$$\begin{aligned}
1+\tfrac{1}{2} &= 2-\tfrac{1}{2}\\
1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4} &= 2-\tfrac{1}{4}\\
1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8} &= 2-\tfrac{1}{8}
\end{aligned}$$

Demostración.- *Se verifica que* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2^n}=2-\dfrac{1}{2^n}$.

Para $n=k$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^k}=2-\frac{1}{2^k}$$

$k=1$

$$1+\frac{1}{2^1}=2-\frac{1}{2^1}$$

Luego $k=k+1$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^{k+1}}$$

Así solo falta demostrar que,

$$2-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\begin{aligned} 2-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}} &= 2+\frac{-2+1}{2^{k+1}} \\ &= 2-\frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.4 *Obsérvese que*

$$\begin{aligned} 1-\tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{2} \\ (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3}) &= \tfrac{1}{3} \\ (1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4}) &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por inducción.

Demostración.- *Se induce que* $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}$ *para todo* $n>1$.
Sea $n=k$, *entonces* $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{1}{k}$. *Después para* $k=2$, $\quad 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. *Si* $k=k+1$ *tenemos* $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)...\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{1}{k+1}$. *Luego es fácil comprobar que* $\dfrac{1}{k}\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{1}{k+1}$.

Ejercicio 5.5 *Hallar la ley general que simplifica al producto*

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)..\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

y demuéstrese por inducción.

Demostración.- *Inducimos que* $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)..\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$,*para todo* $n>1$. *Después* $n=k=1$,

$$1-\frac{1}{2^2}=\frac{2+1}{2\dot{2}}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

Luego $k+1$,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)..\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$$

Así,

$$\begin{aligned} \left(\frac{k+1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \frac{(k+1)+1}{2(k+1)} \\ \left(\frac{k+1}{2k}-\frac{1}{2k(k+1)}\right) &= \frac{k+2}{2k+2} \\ \frac{(k+1)^2-1}{2k(k+1)} &= \frac{k+2}{2k+2} \\ \frac{k+2}{2k+2} &= \frac{k+2}{2k+2} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.6 *Sea* $A(n)$ *la proporción:* $1+2+...+n=\dfrac{1}{8}(2n+1)^2$.

a) *Probar que si $A(k)$, $A(k+1)$ también es cierta.*

Demostración.- *Para $A(k+1)$,*

$$\frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1) = \frac{1}{8}\left[2(k+1)+1\right]^2$$
$$\frac{4k^2+12k+9}{8} = \frac{4k^2+12k+9}{8}$$

b) *Critíquese la proposición "de la inducción se sigue que $A(n)$ es cierta para todo n ".*

Se ve que no se cumple para ningún entero $A(n)$ pero si para $A(n+1)$.

c) *Transfórmese $A(n)$ cambiando la igualdad por una desigualdad que es cierta para todo entero positivo n*

Primero comprobemos para $A(1)$, $1 < \frac{9}{8}$.
Luego para $A(k)$,

$$1+2+...+(k+1) < \frac{1}{8}(2k+1)^2$$

Después para $A(k+1)$

$$1+2+...+(k+1) < \frac{1}{8}(2k+1)^2$$

Remplazando $(k+1)$ a $A(k)$

$$1+2+...+(k+1) < \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1)$$

por último solo nos queda demostrar

$$\frac{1}{8}(2k+1)^2 < \frac{1}{8}(2k+1)^2 + (k+1)$$

Así $\frac{4k^2+12k+9}{8} < \frac{4k^2+12k+9}{8} + (k+1)$, *vemos que la inecuación se cumple para cualquier número natural.*

Ejercicio 5.7 *Sea n_1 el menor entero positivo n para el que la desigualdad $(1+x)^n > 1+nx+nx^2$ es cierta para todo $x>0$. Calcular n_1, y demostrar que la desigualdad es cierta para todos los enteros $n \geq n_1$*

Demostración.- *vemos que la proposición es validad para $n_1 = 3$,*

$$(1+x)^3 > 1+3x+3x^2,$$

y no así para $n=1$ y $n=2$ entonces $A(n) = A(k) \geq 3$, $(1+x)^k > 1+kx+kx^2$. Después para un $A(k+1)$, $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x+(k+1)x^2$, así $(1+kx+kx^2)(1+k) > 1+(k+1)x+(k+1)x^2$, luego se cumple la desigualdad $x(kx^2)+x^2+kx+x+1+x^2 > kx^2+x^2+kx+x+1$.

Ejercicio 5.8 *Dados números reales positivos $a_1, a_2, a_3, ...,$ tales que $a_n \leq ca_{a-1}$ para todo $n \geq 2$. Donde c es un número positivo fijo, aplíquese el método de inducción para demostrar que $a_n \leq a_1c^{n-1}$ para cada $n \geq 1$*

Demostración.- *Primero, para el caso* $n = 1$*, tenemos* $a_1 c^0 = a_1$*, por lo tanto la desigualdad es validad. Ahora supongamos que la desigualdad es válida para algún número entero* k*:* $a_k \leq a_1 c^{k-1}$*, luego multiplicamos por c,* $ca_k \leq a_1 c^k$*, pero dado que se asume por hipótesis* $a_{k+1} \leq ca_k$*, entonces* $a_{k+1} \leq a_1 c^k$*, por lo tanto, la declaración es válida para todo* n*.*

Ejercicio 5.9 *Demuéstrese por inducción la proposición siguiente: Dado un segmento de longitud unidad, el segmento de longitud* $\sqrt{n}$ *se puede construir con regla y compás para cada entero positivo* n*.*

Demostración.- *Dada una línea de longitud 1, podemos construir una línea de longitud* $\sqrt{2}$ *tomando la hipotenusa del triángulo rectángulo con patas de longitud 1.*
Ahora, supongamos que tenemos una línea de longitud 1 y una línea de longitud $\sqrt{k}$ *para algún número entero* k*. Luego podemos formar un triángulo rectángulo con patas de longitud 1 y longitud* $\sqrt{k}$*. La hipotenusa de este triángulo es* $\sqrt{k+1}$*. Por lo tanto, si podemos construir una línea de longitud* $\sqrt{k}$*, entonces podemos construir una línea de longitud* $\sqrt{k+1}$*. Como podemos construir una línea de longitud* $\sqrt{2}$ *en el caso base, podemos construir una línea de longitud* $\sqrt{n}$ *para todos los enteros* n*.*

Ejercicio 5.10 *Sea* b *un entero positivo. Demostrar por inducción la proposición siguiente: Para cada entero* $n \geq 0$ *existen enteros no negativos* q *y* r *tales que:*

$$n = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

Demostración.- *Sea* b *ser un entero positivo fijo. Si* $n = 0$ *, luego* $q = r = 0$*, la afirmación es verdadera (ya que* $0 = 0b + 0$*).*
Ahora suponga que la afirmación es cierta para algunos $k \in \mathbb{N}$*. Por hipótesis de inducción sabemos que existen enteros no negativos* q *y* r *tales que*

$$k = qb + r, \quad 0 \leq r < b,$$

Por lo tanto, sumando 1 a ambos lados tenemos,

$$k + 1 = qb + (r + 1).$$

Pues $0 \leq r < b$ *entonces sabemos que* $0 \leq r \leq (b - 1)$*. Si* $0 \leq r < b - 1$*, entonces* $0 \leq r + 1 < b$*, y la declaración aún se mantiene con la misma elección* q *y* $r + 1$ *en lugar de* r*.*
Por otro lado, si $r = b - 1$*, entonces* $r + 1 = b$ *y tenemos,*

$$k + 1 = qb + b = (q + 1)b + 0$$

Por lo tanto, la declaración se mantiene de nuevo, pero con $q + 1$ *en lugar de* q *y con* $r = 0$ *(que es válido ya que si* $r = 0$ *tenemos* $a \leq r < b$*). Por ende, si el algoritmo de división es válido para* k*, entonces también es válido para* $k + 1$*. Entonces, es válido para todos* $n \in \mathbb{N}$*.*

Ejercicio 5.11 *Explíquese el error en la siguiente demostración por inducción.*
Proposición.- Dado un conjunto de n *niñas rubias, si por 10 menos una de las niñas tiene ojos azules, entonces las* n *niñas tienen ojos azules.*
Demostración.- La proposición es evidentemente cierta si $n = 1$*. El paso de* k *a* $k + 1$ *se puede ilustrar pasando de* $n = 3$ *a* $n = 4$*. Supóngase para ello que la proposición es cierta para* $n = 3$ *Y sean* G_1, G_2, G_3, G_4 *cuatro niñas rubias tales que una de ellas, por lo menos, tenga ojos azules, por ejemplo, la* G_1*, Tomando* G_1, G_2, G_3*, conjuntamente y haciendo uso de la proposición cierta para* $n = 3$*, resulta que también* G_2 *y* G_3 *tienen ojos azules. Repitiendo el proceso con* G_1, G_2 *y* G_4*, se encuentra igualmente que* G_4 *tiene ojos azules. Es decir, las cuatro tienen ojos azules. Un razonamiento análogo permite el paso de* k *a* $k + 1$ *en general.*

Corolario. *Todas las niñas rubias tienen ojos azules.*
Demostración.- *Puesto que efectivamente existe una niña rubia con ojos azules, se puede aplicar el resultado precedente al conjunto formado por todas las niñas rubias.*

Esta prueba supone que la afirmación es cierta n = 3, es decir, supone que si hay tres chicas rubias, una de las cuales tiene ojos azules, entonces todas tienen ojos azules. Claramente, esta es una suposición falsa.

5.3. Teoremas[16]

Teorema 5.2 (principio de buena ordenación) *Todo conjunto no vacío de enteros positivos contiene uno que es el menor*

Demostración.- *Sea T una colección no vacía de enteros positivos. Queremos demostrar que t_0 tiene un número que es el menor, esto es, que hay en T un entero positivo t.; tal que $t_0 \leq t$ para todo t de T.*
Supongamos que no fuera así. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción. El entero 1 no puede pertenecer a T (de otro modo él sería el menor número de T). Designemos con S la colección de todos los enteros positivos n tales que $n < t$ para todo t de T. Por tanto 1 pertenece a S porque $1 < t$ para todo t de T. Seguidamente, sea k un entero positivo de S. Entonces $k < t$ para todo t de T. Demostraremos que $k+1$ también es de S. Si no fuera así, entonces para un cierto t, de T tendríamos $t_1 \leq k+1$. Puesto que T no posee número mínimo, hay un entero t_2 en T tal que $t_2 < t_1$ Y por tanto $t_2 < k+1$. Pero esto significa que $t_2 \leq k$, en contradicción con el hecho de que $k < t$ para todo t de T. Por tanto $k+1$ pertenece a S. Según el principio de inducción, S contiene todos los enteros positivos. Puesto que T es no vacío, existe un entero positivo t en T. Pero este t debe ser también de S (ya que S contiene todos los enteros positivos). De la definición de S resulta que $t < t$, lo cual es absurdo. Por consiguiente, la hipótesis de que T no posee un número mínimo nos lleva a una contradicción. Resulta pues que T debe tener un número mínimo, y a su vez esto prueba que el principio de buena ordenación es una consecuencia del de inducción.

5.4. Ejercicios[17]

Ejercicio 5.12 *Demostrar por inducción la siguiente fórmula:* $1^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Demostración.- *Sea $n = k$:*

$$1^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

Para $k = 1$,

$$1^2 = \frac{1(1+2)(2+1)}{6}$$

por lo tanto se cumple para $k = 1$, Luego para $k = k+1$,

$$1^2 + ... + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

así cabe demostrar que:

[16]Calculus, Tom Apostol, pag. 45-46
[17]Cálculo infinitesimal, Michael Spivak,Pag. 35 al 45

$$
\begin{aligned}
\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
\frac{2k^3+k^2+2k^2+k+6k^2+12k+6}{6} &= \frac{2k^3+3k^2+6k^2+9k+4k+6}{6}\\
\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} &= \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 5.13 *Encontrar una fórmula para*

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=1+3+5+...+(2n-1)$

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 = 1^2\\
1+3 &= 4 = 2^2\\
1+3+5 &= 9 = 3^2\\
1+3+5+7 &= 16 = 4^2\\
1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2=1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2$

$$
\begin{aligned}
1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2 &= \left[1^2+2^2+...+(2n)^2\right]-\left[2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2\right] \quad \textit{verifique sustrayendo}\\
&= \left[1^2+2^2+...+(2n)^2\right]-4\left[1^2+2^2+3^2+...+n^2\right]\\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \textit{por ejercicio 5.13}\\
&= \frac{2n(2n+1)\left[4n+1-2(n+1)\right]}{6}\\
&= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{6}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 5.14 *Si* $0\le k\le n$*, se define el coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ *por*

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!},\ si\ k\neq 0,\ n$$

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1.$$

Esto se convierte en un caso particular de la priera fórula si se define $0!=1$.

a) *Demostrar que*

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$$

Esta relación de lugar a la siguiente configuración, conocida por triángulo de Pascal: Todo número que no esté sobre uno de los lados es la suma de los dos números que tiene encima: El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ *es el número k-ésimo de la fila* $(n+1)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Demostración.-

$$\begin{aligned}
\tbinom{n}{k}+\tbinom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)(n-k+1)}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{kn!}{k!(n+1-k)!}+\frac{(n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!}\\
&= \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!}\\
&= \tbinom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

b) *Obsérvese que todos los números del triángulo de Pascal son números naturales. Utilícese la parte (a) para demostrar por inducción que* $\binom{n}{k}$ *es siempre un número natural.*

Demostración.- *Se ve claramente que* $\binom{1}{1}$ *es un número natural. Supóngase que* $\binom{n}{p}$ *es un número natural para todo* $p \leq n$. *Al ser:*

$$\binom{n+1}{p}=\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p} \text{ para } p\leq n,$$

se sigue que $\binom{n+1}{p}$ *es un número natural para todo* $p \leq n$, *mientras que* $\binom{n+1}{n+1}$ *es también un número natural. Así pues,* $\binom{n+1}{p}$ *es un número natural para todo* $p \leq n+1$

c) *Dése otra demostración de que* $\binom{n}{k}$ *es un número natural, demostrando que* $\binom{n}{k}$ *es el número de conjuntos de exactamente* k *enteros elegidos cada uno entre* $1,...,n$.

Demostración.- *Existen* $n(n^-1)\cdot ...\cdot(n^-k+1)$ k*-tuplas de enteros distintos elegidos entre* $1,...,n$, *ya que el primero puede ser elegido de* n *maneras, el segundo de* n^-1 *maneras, etc. Ahora bien, cada conjunto formado exactamente por* k *enteros distintos, da lugar a* $k!$ k*-tuplas, de modo que el número de conjuntos será* $n(n^-1)\cdot ...\cdot(n^-k+l)/k! = \binom{n}{k}$

d) *Demostrar el teorema del binomio: Si* a *y* b *son números cualesquiera, entonces* $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+...+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j$.

El teorema del binomio resulta claro para $n=1$. *Supónganse que*

$$(a+b)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n+1-j}b^j + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n+1-j}b^j + \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^{n+1-j}b^j \quad \textit{sustituimos } j \textit{ por } j-1 \textit{ en la 2da suma} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^{n+1-j}b^j
\end{aligned}
$$

Según la parte a), con lo que el teorema del binomio es válido para $n+1$.

6

Otra forma de demostrar

El conjunto de los números reales, tiene definido dos operaciones básicas: la adición, la multiplicación y una relación de orden menor que, denotada por $<$, que satisfacen las siguientes propiedades básicas, llamadas axiomas de números reales.

6.1. Axiomas de adición

A1	$\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$	Clausura o cerradura
A2	$a + b = b + a$	Conmutatividad para la Adición
A3	$a + (b + c) = (a + b) + c$	Asociatividad para la Adición
A4	$\exists\ !\ 0 : a + 0 = a \forall a \in \mathbb{R}$	Neutro Aditivo
A5	$\forall a \in \mathbb{R} \exists ! -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$	Inverso Aditivo

6.2. Axiomas de multiplicación

M1	$\forall a, b \in \mathbb{R} \to ab \in \mathbb{R}$	Clausura o cerradura
M2	$ab = ba$	Conmutatividad para la Multiplicación
M3	$a(bc) = (ab)c$	Asociatividad para la Multiplicación
M4	$\exists !1 : a \cdot 1 = a\ \forall a \in \mathbb{R}$	Neutro Multiplicativo
M5	$\forall a \neq 0 \exists ! \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$	Inverso Multiplicativo

6.3. Axioma de orden:

O1	$\forall a, b : a < b$ ó $b < a$ ó $a = b$	Tricotomía
O2	$a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$	Transitividad
O3	$a < b \Rightarrow a + c < b + c\ \forall c \in \mathbb{R}$	Monotonía con la adición
O4	$a < b$ y $0 < c \Rightarrow ac < bc$	Monotonía con la multiplicación positiva

6.4. Otros axiomas

D	$a(b+c)=ab+ac$	Distributividad
L	Axioma del supremo	Se mencionará en otro capítulo

Teorema 6.1 $\forall a \in \mathbb{R},\ a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$
Demostración:

$$\begin{array}{rcll}
a \cdot 0 & = & a \cdot 0 + 0 & \textit{neutro aditivo} \\
& = & a \cdot 0 + [a + (-a)] & \textit{inverso aditivo} \\
& = & (a \cdot 0 + a) + (-a) & \textit{asociatividad para la adición} \\
& = & (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) & \textit{neutro multiplicativo} \\
& = & a(0+1) + (-a) & \textit{distributividad} \\
& = & a(1) + (-a) & \textit{neutro aditivo} \\
& = & a + (-a) & \textit{neutro multiplicativo} \\
& = & 0 & \textit{inverso aditivo}
\end{array}$$

Teorema 6.2 $-a = (-1)a,\ \forall a \in \mathbb{R}$
Demostración:
Según el axioma de inverso aditivo, el inverso aditivo de a es único. De donde si demostramos que a+(-1)a=0, entonces (-1)a=-a.

$$\begin{array}{rcll}
a + (-a) & = & a \cdot 1 + (-a) & \textit{neutro multiplicativo} \\
& = & a(1 + (-1)) & \textit{distributividad} \\
& = & a(0) & \textit{inverso aditivo} \\
& = & 0 & \textit{teorema 1.1.1}
\end{array}$$

Corolario 6.1 $a(-b) = -(ab) = (-a)b,\ \textit{Para cualquier } a\ b \in \mathbb{R}$
Demostración:

$$\begin{array}{rcll}
a(-b) & = & a\left[(-1)b\right] & \textit{Teorema 1.1.2} \\
& = & (-1)(ab) & \textit{asociatividad y conmutatividad para la multiplicación} \\
& = & -(ab) & \textit{teorema 1.1.2} \\
& = & (-1)(ab) & \textit{teorema 1.1.2} \\
& = & \left[(-1)a\right]b & \textit{asociatividad para la multiplicación} \\
& = & (-a)b & \textit{teorema 1.1.2}
\end{array}$$

Teorema 6.3 $-(-a) = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$
Demostración:

$$\begin{array}{lrcll}
\textit{1.} & a + (-a) & = & 0 & \textit{inverso aditivo} \\
\textit{2.} & (-a) + (-(-a)) & = & 0 & \forall a, -a \in \mathbb{R} \\
& 0 & = & 0 & \textit{todo número es imagen de si mismo}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
a + (-a) & = & (-a) + (-(-a)) & \textit{1. y 2. y axioma de sustitución} \\
a + (-a) & = & -(-a) + (-a) & \textit{conmutatividad para la adición} \\
a & = & -(-a) & \textit{ley cancelativa para la adición}
\end{array}$$

Teorema 6.4 $(-a)(-b) = ab;\ \forall a,\ b \in \mathbb{R}$
Demostración:

$$\begin{array}{rcll}
(-a)(-b) & = & -\left[a(-b)\right] & \textit{corolario 1.1.1} \\
& = & -(-(ab)) & \textit{corolario 1.1.1} \\
& = & ab & \textit{teorema 1.1.3}
\end{array}$$

Definición 6.1
$$a - b = a + (-b) \quad \forall\, a,\ b \in \mathbb{R}$$

Definición 6.2
$$\frac{a}{b} = ab^{-1} \quad \forall\, a,\ b \in \mathbb{R}\ y\ b \neq 0$$

Note que 0 no tiene inverso multiplicativo y , por tanto, la división por cero no está definida. La hipótesis de que cero tuviera inverso multiplicativo no es consistente con los otros axiomas.
Si 0 tuviese un inverso multiplicativo, llamémosle a, entonces $0 \cdot a = 1$ Esto está en contradicción con el teorema 1.1

Teorema 6.5 $-0 = 0$
Demostración:

$$\begin{aligned} -0 &= (-1)0 && \textit{teorema 1.1.2} \\ &= 0 && \textit{conmutatividad para la multiplicación y teorema 1.1.1} \end{aligned}$$

Teorema 6.6 $-a - b = -(a+b)$
Demostración:

$$\begin{aligned} -a - b &= (-1)a + (-1)b && \textit{teorema 1.1.2} \\ &= -1(a+b) && \textit{distributividad} \\ &= -(a+b) && \textit{neutro multiplicativo} \end{aligned}$$

Teorema 6.7 (Ley cancelativa para la adición) *Si* $a + b = a + c$ *entonces*, $b = c$
Demostración:

$$\begin{aligned} b &= b + 0 && \textit{neutro aditivo} \\ &= b + [a + (-a)] && \textit{Inverso aditivo} \\ &= (a+b) + (-a) && \textit{asociatividad y Conmutatividad para la adición} \\ &= (a+c) + (-a) && \textit{hipótesis} \\ &= c + [a + (-a)] && \textit{asociatividad y Conmutatividad para la adición} \\ &= c + 0 && \textit{inverso aditivo} \\ &= c && \textit{neutro aditivo} \end{aligned}$$

Teorema 6.8 *Demostrar* $a - (b - c) = (a - b) + c$

$$\begin{aligned} a - (b-c) &= a + [-(b-c)] && \textit{definición 1.1.1} \\ &= a + \{(-[b + (-c)]\} && \textit{definición 1.1.1} \\ &= a - b - (-c) && \textit{teorema 1.1.6} \\ &= (a-b) - (-c) && \textit{asociatividad para la adición} \\ &= (a-b) + c && \textit{teorema 1.1.3} \end{aligned}$$

Teorema 6.9 *Demstrar* $1^{-1} = 1$

$$\begin{aligned} 1^{-1} &= 1^{-1} \cdot 1 && \textit{neutro Multiplicativo} \\ &= \frac{1}{1} && \textit{definición 1.1.2} \\ &= 1 && \textit{operando} \end{aligned}$$

Teorema 6.10 (Dominio de integridad)

Demostrar que si $ab = 0$ si sólo si $a = 0$ ó $b = 0$

Como o es incluyente debemos demostrar por casos:

1. $(\Leftarrow)$
   $x = 0$ *por teorema 1.1.1 ya queda demostrado*

2. $(\Rightarrow)$
   $ab = 0 \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = 0$

$$\begin{array}{lcll} b & = & b \cdot 1 & \textit{neutro multiplicativo} \\ & = & b \cdot \left[a(a^{-1})\right] & \textit{inverso multiplicativo} \\ & = & (a^{-1})(ab) & \textit{asociatividad y conmutatividad para la multiplicación} \\ & = & (a^{-1}) \cdot 0 & \textit{hipótesis} \\ & = & 0 & \textit{teorema 1.1.1} \end{array}$$

Teorema 6.11

Si $a = b$ entonces $ac = bc$

Demostración:

$$\begin{array}{lcll} ac & = & ac & \textit{Reflexiva entre si} \\ ac & = & bc & \textit{hipótesis} \end{array}$$

Teorema 6.12 *Demostrar que si $ab \neq 0$ entonces $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$*

$$\begin{array}{lrcll} \textit{1} & aa^{-1} & = & 1 & \textit{Inverso y } ab \neq 1 \\ \textit{2} & bb\text{-}1 & = & 1 & \textit{Inverso y } ab \neq 1 \\ & \left(aa^{-1}\right)\left(bb^{-1}\right) & = & 1 & \textit{multiplicación de 1 y 2} \\ & \left(aa^{-1}\right)\left(bb^{-1}\right)(ab)^{-1} & = & 1(ab)^{-1} & \textit{teorema 1.1.7} \\ & \left(a^{-1}b^{-1}\right)(ab)(ab^{-1}) & = & 1(ab)^{-1} & \textit{asociatividad y conmutatividad para la multiplicación} \\ & \left(a^{-1}b^{-1}\right)1 & = & 1(ab)^{-1} & \textit{inverso multiplicativo} \\ & \left(a^{-1}b^{-1}\right) & = & (ab)^{-1} & \textit{neutro multiplicativo} \end{array}$$

Teorema 6.13 *Demostrar que si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$ Demostración:*

$$\begin{array}{lc} (a^{-1})^{-1} & = \\ & = \end{array}$$

Teorema 6.14 (Ley de cancelación para la multipl.) *Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$*
Demostración:

$$\begin{array}{rcll} a^{-1}ab & = & a^{-1}ac & \textit{Como } a \neq 0 \textit{ y teorema 1.1.7} \\ 1b & = & 1c & \textit{[M3]asociatividad e inverso multiplicativo} \\ b & = & c & \textit{neutro multiplicativo y } a \neq 0 \end{array}$$

Teorema 6.15 *Si $a = b$ entonces $a \pm c = b \pm c$*
Demostración:

$$\begin{array}{rcll} a \pm c & = & b \pm c & \textit{hipótesis} \end{array}$$

Teorema 6.16 $a^2 = b^2$ *si sólo si $a = b$ o $a = -b$*
Demostración:

$$
\begin{array}{rcll}
a^2 = b^2 & \Leftrightarrow & a^2 - b^2 = 0 & \textit{teorema 1.1.8} \\
& \Leftrightarrow & (a-b)(a+b) = 0 & \textit{teorema 1.1.20} \\
& \Leftrightarrow & a-b = 0 \ \vee \ a+b = 0 & \textit{teorema 1.1.10} \\
& \Leftrightarrow & a = b \ \vee \ a = -b & \textit{teorema 1.1.15}
\end{array}
$$

Teorema 6.17 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Demostración:

$$
\begin{array}{rcll}
ab^{-1} \cdot cd^{-1} & = & ac \cdot (b^{-1}d^{-1}) & \textit{conmutatividad y asociatividad para la multiplicación} \\
& = & cd \cdot (bd)^{-1} & \textit{teorema 1.1.12}
\end{array}
$$

Teorema 6.18 $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

Demostración:

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} & = & \dfrac{ab^{-1}}{cd^{-1}} & \textit{definición 1.1.2} \\
& = & ab^{-1} \cdot (cd^{-1})^{-1} & \textit{teorema 1.1.13} \\
& = & ab^{-1} \cdot c^{-1}(d^{-1})^{-1} & \textit{teorema 1.1.12} \\
& = & ab^{-1} \cdot c^{-1}d & \textit{teorema 1.1.13} \\
& = & ad \cdot b^{-1}c^{-1} & \textit{conmutatividad y asocioatividad para la multiplicación} \\
& = & \dfrac{ad}{bc} & \textit{definición 1.1.2}
\end{array}
$$

Teorema 6.19 $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

Demostración:

$$
\begin{array}{rcll}
(x+y)(x-y) & = & x(x+y) - y(x+y) & \textit{distributividad} \\
& = & x^2 + yx - xy - y^2 & \textit{distributividad} \\
& = & x^2 - y^2 & \textit{inverso aditivo y neutro aditivo}
\end{array}
$$

Teorema 6.20 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Demostración:

$$
\begin{array}{rcll}
x^2 + 2xy + y^2 & = & x^2 + xy + xy + y^2 & \textit{ya que } a^2 = aa \\
& = & x(x+y) + y(x+y) & \textit{distributividad} \\
& = & (x+y)(x+y) & \textit{distributividad} \\
& = & (x+y)^2 & \textit{a bases iguales exponentes se suman}
\end{array}
$$

Teorema 6.21 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *si sólo si* $ad = bc,\ bd \neq 0$

Demostración:

$$
\begin{array}{llll}
\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} & \Leftrightarrow & ab^{-1} = cd^{-1} & \textit{definición 1.1.2} \\
 & \Leftrightarrow & bd(ab^{-1}) = bd(cd^{-1}) & \textit{teorema 1.1.11, inverso multiplicativo y } bd \neq 0 \\
 & \Leftrightarrow & ad(bb^{-1}) = bc(dd^{-1}) & \textit{Conmutatividad y asociatividad para la multiplicación} \\
 & \Leftrightarrow & ad = bc & \textit{nuetro e inverso multiplicativo}
\end{array}
$$

Teorema 6.22 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

Demostración:

$$
\begin{array}{rlll}
\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} & = & ab^{-1} + cd^{-1} & \textit{def. 1.1} \\
 & = & ab^{-1}dd^{-1} + cd^{-1}bb^{-1} & \textit{neutro aditivo e inverso multiplicativo} \\
 & = & b^{-1}d^{-1}(ad + bc) & \textit{distributividad} \\
 & = & bd^{-1}(ad + bc) & \textit{teorema 1.1.12} \\
 & = & \dfrac{ad + bc}{bd} & \textit{definición 1.1.2}
\end{array}
$$

6.5. Desigualdades

Teorema 6.23 *Si* $a < b$ *y* $c < d$, *entonces* $a + c < b + d$

Demostración:

$$
\begin{array}{lllll}
1 & a < b & \Rightarrow & a + c < b + c & \textit{monotonía para la adición} \\
2 & c < d & \Rightarrow & b + c < b + d & \textit{monotonía para la adición} \\
 & & \Rightarrow & a + c < b + d & \textit{Por 1, 2 y transitividad}
\end{array}
$$

Teorema 6.24 *Si* $a < b$, *entonces* $-a > -b$

Demostración:

$$
\begin{array}{llll}
a < b & \Rightarrow & a + (-a) + (-b) < b + (-a) + (-b) & \textit{monotonía para la adición} \\
 & \Rightarrow & -b < -a & \textit{conmutatividad, neutro e inverso aditivo} \\
 & \Rightarrow & -a > -b & \textit{es equivalente}
\end{array}
$$

Teorema 6.25 *Si* $a > b$ *entonces* $-a < -b$

$$
\begin{array}{llll}
a > b & \Rightarrow & a + (-a) + (-b) > b + (-b)(-a) & \textit{monotonía con la adición} \\
 & \Rightarrow & -b > -a & \textit{Neutro Aditivo Inverso Aditivo} \\
 & \Rightarrow & -a < -b & \textit{Es equivalente a} \quad -b > -a
\end{array}
$$

Teorema 6.26 *Si* $a < b$ *y* $c < 0$, *entonces* $ac > bc$

Demostración:

$$
\begin{array}{lllll}
1 & c < 0 & \Rightarrow & -c > 0 & \textit{teorema 1.2.2 y teorema 1.1.5} \\
 & a < b & \Rightarrow & a(-c) < b(-c) & \textit{Monotonía con la multiplicación positiva y 1} \\
 & & \Rightarrow & -ac < -bc & \textit{corolario 1.1.1} \\
 & & \Rightarrow & -(-ac) > -(-bc) & \textit{teorema 1.2.2} \\
 & & \Rightarrow & ac > bc & \textit{teorema 1.1.3}
\end{array}
$$

Teorema 6.27 *Si* $a \neq 0$, *entonces* $a^2 > 0$

Demostración

$$\textit{Si } a > 0 \text{ ó } a < 0 \textit{ entonces } a^2 > 0$$

- *para* $a > 0$

$$\begin{array}{rcll} a>0 & \Rightarrow & a\cdot a>0\cdot a & \textit{Monotonía con la multiplicación positiva} \\ & \Rightarrow & a^2>0 & \textit{bases iguales exp se suman y teorema 1.1.1} \end{array}$$

- *para* $a<0$

$$\begin{array}{rcll} a<0 & \Rightarrow & a\cdot a>a\cdot 0 & \textit{teorema 1.2.4} \\ & \Rightarrow & a^2>0 & \textit{bases iguales exponentes se suman y teorema 1.1.1} \end{array}$$

Teorema 6.28 *Si* $0\leq a<b$ *y* $0\leq c<d$, *entonces* $ac<bd$
Podemos representar de otra manera: Si $a\geq 0,\ a<b,\ c\geq 0$ *y* $c<d$ *entonces* $ac<bd$

$$\begin{array}{lrcll} \textit{1.} & a\geq 0 \text{ y } a<b & \Rightarrow & b>0 & \textit{Hipótesis} \\ \textit{2.} & & \Rightarrow & c<d & \textit{por hipótesis} \\ \textit{3.} & & \Rightarrow & bc<bd & \textit{por 1., 2. y Monotonía con la multiplicación positiva} \end{array}$$

Consideremos dos casos:

- $c>0$

$$\begin{array}{rcll} c>0 \text{ y } a<b & \Rightarrow & ac<bc & \textit{Monotonía con la multiplicación positiva} \\ & \Rightarrow & ac<bd & \textit{Transitividad y 3} \end{array}$$

- $c=0$

$$\begin{array}{lrcll} & c=0 & \Rightarrow & a\cdot c=0\cdot a & \textit{teorema 1.1.11} \\ \textit{4.} & & \Rightarrow & a\cdot c=0 & \textit{teorema 1.1.1} \\ & c=0 & \Rightarrow & b\cdot c=0\cdot b & \textit{teorema 1.1.11} \\ \textit{5.} & & \Rightarrow & b\cdot c=0 & \textit{teorema 1.1.1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} a\cdot c & = & b\cdot c & \textit{por 4. y 5.} \\ ac & < & bd & \textit{por 3.} \end{array}$$

Teorema 6.29 (Ley de signos para la multiplicación) *Si* a *y* b *tienen el mismo signo, entonces* $ab>0$ *Si* a *y* b *tienen diferente signo, entonces* $ab<0$
Demostración:
Consideremos 4 casos:

C1.- $a>0$ *y* $b>0$ *entonces* $ab>0$

$$\begin{array}{lrcll} & a>0 & \Rightarrow & -a<-0 & \textit{teorema 1.2.3} \\ \textit{1.} & & \Rightarrow & -a<0 & \textit{teorema 1.1.5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} -a<0 \text{ y } b>0 & \Rightarrow & (-a)\cdot b<0\cdot(-a) & \textit{por 1., hipótesis y Monotonía con la multiplicación positiva} \\ & \Rightarrow & -ab<0 & \textit{teorema 1.1.1 y coroloario 1.1.1} \\ & \Rightarrow & -(-ab)>-0 & \textit{teorema 1.2.2} \\ & \Rightarrow & ab>0 & \textit{teorema 1.1.3 teorema 1.1.5} \end{array}$$

C2.- Si $a<0$ *y* $b<0$ *entonces* $ab>0$

$$\begin{array}{rcll} a<0 \text{ y } b<0 & \Rightarrow & ab>0\cdot b & \textit{hipótesis y teorema 1.2.4} \\ & \Rightarrow & ab>0 & \textit{teorema 1.1.1} \end{array}$$

C3.- Si $a>0$ *y* $b<0$ *entonces* $ab<0$

$$\begin{array}{rcll} b<0 \text{ y } a>0 & \Rightarrow & ab<0\cdot a & \textit{hipótesis y monotonía con la multiplicación positiva} \\ & \Rightarrow & ab<0 & \textit{teorema 1.1.1} \end{array}$$

C4.- Si $a<0$ y $b>0$ entonces $ab<0$

$$\begin{array}{rcll} a<0 \text{ y } b>0 & \Rightarrow & ab<0\cdot b & \textit{hipótesis monotonía con la multiplicación positiva} \\ & \Rightarrow & ab<0 & \textit{teorema 1.1.1} \end{array}$$

Teorema 6.30 *a^{-1} tiene el mismo signo de a*
Dividiremos por casos:

I. *$a>0 \Rightarrow a^{-1}>0$ Demostración por reducción al absurdo: $a>0 \Rightarrow a^{-1}<0$*

$$\begin{array}{rcll} a^{-1}<0 & \Rightarrow & a^{-1}\cdot a<0\cdot a & \textit{monotonía con la multiplicación positiva} \\ & \Rightarrow & 1<0 & \textit{inverso multiplicativo y teorema 1.1.1} \\ \textit{Vemos que} \quad 1<0 & & \textit{es absurdo por} & \textit{lo tanto } a>0 \Rightarrow a^{-1}>0 \textit{ es verdad} \end{array}$$

II. *$a<0 \Rightarrow a^{-1}<0$*

$$\begin{array}{rcll} a^{-1}<0 & \Rightarrow & a\cdot a^{-1}>0\cdot a & \textit{hipótesis y monotonía con la multiplicación positiva} \\ & \Rightarrow & 1>0 & \textit{inverso multiplicativo y teorema 1.1.1} \\ \textit{Vemos que} \quad 1>0 & & \textit{es verdad} & \textit{lo tanto } a<0 \Rightarrow a^{-1}<0 \textit{ es verdad} \end{array}$$

Teorema 6.31 *Si a b tienen el mismo signo y $a<b$, entonces $a^{-1}>b^{-1}$*
Consideremos 2 casos:

1. *Si $a>0,\ b>0$ y $a<b$ entonces $a^{-1}>b^{-1}$*

$$\begin{array}{lrcll} 1. & a>0 & \Rightarrow & a^{-1}>0 & \textit{hipótesis y teorema 1.2.8} \\ 2. & & \Rightarrow & 0<a^{-1} & \textit{por 1. y equivalencia} \\ \\ 3. & b>0 & \Rightarrow & b^{-1}>0 & \textit{hipótesis y teorema 1.2.8} \\ \\ & a & < & b & \textit{hipótesis} \\ & a^{-1}a & < & ba^{-1} & \textit{por 1. y Monotonía con la multiplicación positiva} \\ & a^{-1}a & < & ba^{-1} & \textit{nuetro multiplicativo} \\ & b^{-1}a^{-1}a & < & b^{-1}ba^{-1} & \textit{por 3. y Monotonía con la multiplicación positiva} \\ & b^{-1} & < & a^{-1} & \textit{neutro multiplicativo y inverso multiplicativo} \\ & a^{-1} & > & b^{-1} & \textit{equivalente} \end{array}$$

2. *Si $a<0,\ b<0$ y $a<b$ entonces $a^{-1}>b^{-1}$*

$$\begin{array}{lrcll} 1. & a<0 & \Rightarrow & a^{-1}<0 & \textit{hipótesis y teorema 1.2.8} \\ 2. & b<0 & \Rightarrow & b^{-1}<0 & \textit{hipótesis y teorema 1.2.8} \\ \\ & a^{-1}b^{-1} & > & 0\cdot b^{-1} & \textit{teorema 1.2.4} \\ 3. & a^{-1}b^{-1} & > & 0 & \textit{teorema 1.1.1} \\ & a^{-1}ab^{-1} & < & bb^{-1}a^{-1} & \textit{por 3. y Monotonía con la multiplicación positiva} \\ & b^{-1} & < & a^{-1} & \textit{inverso multiplicativo} \\ & a^{-1} & > & b^{-1} & \textit{equivalente} \end{array}$$

Teorema 6.32 *Si $a\geq 0$ y $b\geq 0$, entonces $a^2>b^2$ si y sólo si $a>b$*
Demostración:
Sabemos que $b\geq 0$ es equivalente a $0\leq b$ (1)

- (⇒) $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$

$$
\begin{array}{rcll}
a^2 > b^2 & \Rightarrow & a^2 - b^2 > 0 & \textit{equivalencia y relación de orden} \\
 & \Rightarrow & (a+b)(a-b) > 0 & \textit{teorema 1.1.19} \\
 & \Rightarrow & a+b > 0 \ \text{ó} \ a-b > 0 & \textit{Ley de signos para la multiplicación e hipótesis} \\
 & \Rightarrow & a > b & \textit{equivalencia} \\
 & & a > -b & \textit{equivalencia}
\end{array}
$$

- (⇐) $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$

$$
\begin{array}{rcll}
a > b & \Rightarrow & b < a & \textit{equivalente} \\
 & \Rightarrow & 0 \leq b \wedge b < a & \textit{por (1) y ley lógica de conjunción} \\
 & \Rightarrow & 0 \leq b < a & \textit{por hipótesis y axioma de orden} \\
 & \Rightarrow & 0 \leq b < a \wedge 0 \leq b < a & \textit{por taulogía } p \equiv p \wedge p \\
 & \Rightarrow & b \cdot b < a \cdot a & \textit{teorema 1.2.6} \\
 & \Rightarrow & b^2 < a^2 & \textit{bases iguales exponentes se suman} \\
 & \Rightarrow & a^2 > b^2 & \textit{equivalente}
\end{array}
$$

7

Funciones

Definición 7.1 *Si f y g son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función $f+g$ denominada **suma** de $f+g$ mediante la ecuación:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los x que están a la vez en el dominio de f y en el dominio de g, es decir:

$$dominio\ (f+g) = dominio\ f\ \cap\ dominio\ g$$

Definición 7.2 *El dominio de $f \cdot g$ es dominio $f \cap$ dominio g*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Definición 7.3 *Se expresa por dominio $f \cap$ dominio $g \cap x : g(x) \neq 0$*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definición 7.4 (Función constante)

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

Teorema 7.1 $(f+g)+h = f+(g+h)$

Demostración.- ***La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio.*** *Observese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:*

$$\begin{aligned}
[(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x) \\
&= [f(x)+g(x)]+h(x)
\end{aligned}$$

$$y$$

$$\begin{aligned}
[f+(g+h)](x) &= f(x)+(g+h)(x) \\
&= f(x)+[g(x)+h(x)]
\end{aligned}$$

Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de $(f+g)+h$ y el de $f+(g+h)$ es evidentemente dominio $f \cap$ dominio $g \cap$ dominio h. nosotros escribimos, naturalmente $f+g+h$ por $(f+g)+h = f+(g+h)$

Teorema 7.2 *Es igual fácil demostrar que $(f \cdot g) \cdot g = f \cdot (g \cdot h)$ y ésta función se designa por $f \cdot g \cdot h$. Las ecuaciones $f+g = g+f \quad y \quad f \cdot g = g \cdot f$ no deben presentar ninguna dificultad.*

Teorema 7.3 [18] *Dos funciones f y g so iguales si y sólo si*

a) *f y g tienen el mismo dominio, y*

b) *$f(x) = g(x)$ para todo x del dominio de f.*

Demostración.- *Sea f una función tal que $\forall x \in D_f,\ \exists y \ / \ y = f(x)$ es decir $(x, f(x))$ y g una función tal que $\forall z \in D_g,\ \exists y \ / \ y = g(z)$ es decir $(z, g(z))$, por definición 1.6 dos pares ordenados $(x, f(x)) = (z, g(z))$ si y sólo si $x = z \quad y \quad f(x) = g(z)$*

Definición 7.5 (Composición de función)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{ \ x : x$ está en el dominio de $g \quad y \quad g(x)$ está en el dominio de $f \ \}$

$$D_{f \circ g} = \{x \ / \ x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

Propiedades 7.1 *$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ La demostración es una trivialidad.*

[18] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag. 66

Definición 7.6 [a] *Decimos que dos pares ordenados* (a, b) *y* (c, d) *son iguales si sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.*

$$(a, b) = (c, d) \text{ si sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Definición 7.7 (Definición de función) [b] *Una función* f *es un conjunto de pares ordenados* (x, y) *ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento.*
Por lo tanto,

$$\forall x \in D_f, \exists y \ / \ (x, y) \in f$$

Esto es, para todo x *en el dominio de la* f *existe exactamente un* y *tal que* $(x, y) \in f$ *Es costumbre escribir* $y = f(x)$ *en lugar de* $(x, y) \in f$*, por lo tanto,*

$$\forall x \in D_f, \exists y \ / \ y = f(x)$$

[a]Definición de Tom Apostol
[b]Definición de Tom Apostol

Definición 7.8 [a] *Una* ***función*** *es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si* (a, b) *y* (a, c) *pertenecen ambos a la colección, entonces* $b = c$*; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.*

Definición 7.9 [b] *Si* f *es una función, el* ***dominio*** *de* f *es el conjunto de todos los* a *para los que existe algún* b *tal que* (a, b) *está en* f*. Si* a *está en el dominio de* f*, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número* b *único tal que* (a, b) *está en* f*. Este* b *único se designa por* $f(a)$*.*

[a]Definición de Michael Spivak
[b]Definición de Michael Spivak

7.1. Teoremas y ejercicios

7.1.1. Ejercicios [19]

Ejercicio 7.1 *Sea* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$*, Interpretar lo siguiente:*

i) $f(f(x))$

Vemos que el dominio de $\dfrac{1}{1+x}$ *son todos los reales excepto* -1 *ya que cualquier número dividido entre* 0 *es indeterminado.*
Por otro lado el dominio de $f(f(x))$ *es* $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1+x}{2+x}, \quad x \neq -2$

Así por definición de dominio

$$D_{f \circ g} = \{x \ / \ x \neq -1 \ \wedge \ x \neq -2\}.$$

ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

[19]Calculo infinitesimal, Micheal Spivak, Pag. 61 al 68

El dominio de f esta dada por $(x \neq 0,\ -1)$ ya que $\dfrac{1}{0}$ es indeterminado. Como también $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$

iii) $f(cx)$

$f(cx) = \dfrac{1}{1+cx}$ *por lo tanto* $\dfrac{1}{c\left(\dfrac{1}{c}+x\right)}$ *si* $x \neq \dfrac{1}{c},\ 0$

iv) $f(x+y)$

$f(x+y) = \dfrac{1}{1+(x+y)}$ *para* $x+y \neq -1$

v) $f(x)+f(y)$

$f(x)+f(y) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} = \dfrac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$ *para* $x \neq -1,\ y \neq -1$

vi) *¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?*

Existe para todo c ya que $f(c \cdot 0) = f(0)$ entonces $f(0) = 1$

vii) *¿Para que números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos x?*

Solamente para $c = 1$. Ya que $f(cx) = f(x)$ implica $x = cx$ y esto debe cumplirse por lo menos para un $x \neq 0$

Ejercicio 7.2 *Sea $g(x) = x^2$ y sea*

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional} \end{cases} \tag{7.1}$$

i) *¿Para cuáles y es $h(y) \leq y$?*

Vemos que $h(y)$ sólo puede ser 1 ó 0. Para que se cumpla la condición $h(y) \leq y$, debe ser $y \geq 0$ é y racional ya que si y es irracional, no se cumple la condición, debido a que si y es irracional entonces es 1. También se cumpliría si $y \geq 1$ sea para y racional o irracional.

ii) *¿Para cuáles y es $h(y) \leq g(y)$?*

Se cumple para y racional entre $-1, 1$ inclusive y para todo y tal que $|y| > 1$

iii) *¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?*

Sabemos que

$$h(z) = \begin{cases} 0, & z \; racional \\ 1, & z \; irracional \end{cases} \tag{7.2}$$

Ahora tenemos que $g(0) = 0^2 = 0 \quad y \quad g(1) = 1^2 = 1$ *por lo tanto*

$$g(h(z)) = \begin{cases} 0^2, & z \; racional \\ 1^2, & z \; irracional \end{cases} \tag{7.3}$$

Y restando a $h(z)$ *nos queda* 0.

iv) *¿ Para cuáles* w *es* $g(w) \leq w$*?*

Sabemos que un número cualquiera elevado al cuadrado siempre dará un número positivo entonces el rango del dominio para que se cumple la condición $g(w) \leq w$ *es* $-1 \geq w \geq 1$

v) *¿Para cuales cuáles* ϵ *es* $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$*?*

Solamente se cumple para $-1, \; 0 \; 1$

Ejercicio 7.3 *Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:*

i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene $1 - x^2 \geq 0$ *entonces* $x^2 \leq 1$ *por lo tanto el dominio son todos los* x *tal que* $|x| \leq 1$

ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Se observa claramente que el dominio es $-1 \leq x \leq 1$

iii) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

Operando un poco tenemos

$$f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)},$$

sabemos que el denominador no puede ser 0 *por lo tanto el* $D_f = \{x \; / \; x \neq 1, \; x \neq 2\}$

iv) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Claramente notamos que el dominio de f *es* $[-1, 1]$ *ya que si se tomara un número mayor a este daría un número imaginario.*

v) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

Notamos que no cumple para ningún x ya que si $0 \leq x \leq 1$ entonces no se cumple para $\sqrt{x-2}$ y si $x \geq 2$ no se cumple para $\sqrt{1-x}$

Ejercicio 7.4 *Sea $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$, $s(x) = senx$. Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número.*

1) $(S \circ P)(y)$

Demostración.- *Por definición $S(P(y))$ por lo tanto $S(2^y) = (2^y)^2 = 2^{2y}$ para todo x existe en los números reales*

2) $(S \circ s)(y)$

Demostración.- $(S \circ s)(y) = S(s(y)) = S(\sin y) = \sin^2 y$

3) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$

Demostración.- $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = S(P(s(t))) + s(P(t)) = S(P(\sin t)) + s(2^x) = S(2^{\sin t}) + \sin 2^t = \left(2^{sint}\right)^2 + \sin 2^t = 2^{2\sin t} + \sin 2^t$

4) $s(t^3)$

Demostración.- $s(t^3) = \sin t^3$

Ejercicio 7.5 *Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de S, P, s usando solamente $+$, $\cdot$ y $\circ$ en cada caso la solución debe ser una función.*

i) $f(x) = 2^{\sin x} = (P \circ s)(x)$

ii) $f(x) = \sin 2^x = (s \circ S)(x)$

iii) $f(x) = \sin x^2 = (s \circ S)(x)$

iv) $f(x) = \sin^2 x = (S \circ s)(x)$

v) $f(t) = 2^{2t} = (S \circ P)(t)$

vi) $f(u) = \sin(2^u + 2^{u^2}) = s \circ (P + P \circ S)$

vii) $f(a) = 2^{\sin^2 a} + \sin(a^2) + 2^{\sin(a^2 + \sin a)} = P \circ S \circ s + P \circ s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$

Ejercicio 7.6 *Las funciones polinómicas, por ser sencillas y al mismo tiempo flexibles, ocipan un lugar destacado en el estudio de las funciones. Los dos problemas siguientes ponen de manifiesto su flexibilidad y dan una orientación para deducir sus propiedades elementales más importantes.*

a) *Si $x_1, ..., x_n$ son números distintos, encontrar una función polinómica, f_i de grado $n-1$ que tome el valor 1 en x_i y 0 en x_j para $j \neq i$.Indicación: El produto de todo los $(x - x_j)$ para $j \neq i$ es 0 en x_j si $j \neq i$. (Este producto es designado generalmente por)*

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$$

donde el símbolo Π (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que $\sum$ para sumas).

Solución.- Lo que Spivak afirma es que entre los números $x_1, ..., x_n$ hay un sólo número x_i en el que la función f_i tome el valor 1 y que todas los demás números (x_j con $j \neq i$) son ceros en f_i.
Una forma de pensar sobre esta pregunta es considerar una solución fija n y elegir un conjunto de distintas $x_1, x_2, ..., x_n$. Por ejemplo supongamos que elegimos $n = 3$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Entonces supongamos que queremos encontrar un polinomio $f_i(x_1) = f_1(1) = 1$, pero $f_1(x_2) = f_1(2) = f_1(3) = 0$. Es decir, F_1 es un cuadrático que tiene ceros en $x = 2$ y $x = 3$, pero es igual a 1 en $x = 1$. Naturalmente, esto sugiere mirar un polinomio de la forma

$$a(x-2)(x-3),$$

para que la igualdad sea igual a 1 por alguna constante a. Pero, ¿Qué es esta constante? Bueno, si nos conectamos con $x = 1$, debemos tener

$$f_1(1) = 1 = a(x-2)(x-3) = 2a,$$

por lo tanto $a = 1/2$ y la solución deseada es

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3).$$

Del mismo modo, si tratamos de encontrar un polinomio $f_2(x)$ tal que $f_2(2) = 1$ con raíces en $x = 1, 3$ tendríamos que resolver la ecuación $1 = a(2-1)(2-3)$, lo que da $a = -1$ por lo tanto $f_2(x) = -(x-1)(x-3)$ Ahora veamos el caso general. El polinomio $f_i(x)$ satisface $f_i(x_i)$ y $f_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$, entonces debe tomar la forma

$$f_i(x) = a \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

Para alguna constante a. Para encontrar esta constante, aplicamos $x = x_1$:

$$f_i(x_i) = 1 = a \prod_{j \neq i} (x_i - x_j),$$

por lo tanto:

$$a = \frac{1}{\displaystyle\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Así queda

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

b) *Encontrar ahora una función polinómica de grado $n-1$ tal que $f(x_i) = a_i$, donde $a_i, ..., a_n$ son números dados. (Utilícese las funciones f_i de la parte (a). La fórmula que se obtenga es la llamada formula de interpolación de Lagrange).*

Entonces

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i f_i(x)$$

por lo tanto

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

7.1.2. Demostraciones [20]

Teorema 7.4 *Demostrar que para cualquier función polinómica f y cualquier número a existe una función polinómica g y un número b tales que $f(x) = (x-a)\ g(x) + b$ para todo x.*

Si el grado de f es 1, entones f es de la forma:

$$f(x) = cx + d = (x-a)c + (d + ac)$$

de modo que podemos poner $g(x) = c$ y $b = d + ac$. Supóngase que el resultado es válido para polinomios de grado $\leq k$. Si f tiene grado $k+1$, entonces f tiene la forma:

$$f(x) = a_{k+1}(x-a) = (x-a)\ g(x) + b,$$

ó

$$f(x) = (x-a)[g(x) + a_{k+1}] + b,$$

con lo que tenemos la forma requerida. Completar demostración xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Teorema 7.5 *Demostrar que si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x-a)\,g(x)$ para alguna función polinómica g. (La recíproca es evidente)*

Demostración.- *Por el teorema anterior, $f(x) = (x-a)\ g(x) + b$. Luego*

$$0 = f(a) = (a-a)\ g(a) + b = b,$$

de modo que $f(x) = (x-a)\ g(x)$

Teorema 7.6 *Demostrar que si f es una función polinómica de grado n entonces f tiene a lo sumo n raíces, es decir, existen a lo sumo n números a tales que $f(a) = 0$*

[20] Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag. 63-68

Demostración.- *Supongámos que f tiene n raíces $a_1, ..., a_n$. Entonces según el anterior teorema $f(x) = (x-a)\ g_1(x)$ donde el grado de $g_1(x)$ es $n-1$. Pero*

$$0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)\ g_1(a_2)$$

de modo que $g_1(a_2) = 0$, ya que $a_2 \neq a_1$. Luego podemos escribir

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)g_2(x)$$

donde el grado de g_2 es $n-2$. Prosigue de esta manera, obtenemos que

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2) \cdot ... \cdot (x-a_n)c$$

para algún número $c \neq 0$. Está claro que $f(a) \neq 0$ si $a \neq a_1, ..., a_n$. Así pues, f puede tener a lo sumo n raíces.

Teorema 7.7 *Demostrar que para todo n existe una función polinómica de grado n con raíces. Si n es par, encontrar una función polinómica de grado n sin raíces y sin n es impar, encontrar una con una sola raíz.*

Demostración.- *Si $f(x) = (x-1)(x-2) \cdot ... \cdot (x-n)$, entonces f tiene n raíces. Si n es par, entonces $f(x) = x^n + 1$ no tiene raíces. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ tiene una raíz única, que es 0.*

7.1.3. Ejercicios [21]

Ejercicio 7.7 *Sea $f(x) = x+1$ para todo real x. Calcular:*

- $f(2) = 2 + 1 = 3$
- $f(-2) = -2 + 1 = -1$
- $-f(2) = -(2+1) = -3$
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$
- $\dfrac{1}{f(2)} = \dfrac{1}{3}$
- $f(a+b) = a + b + 1$
- $f(a) + f(b) = (a+1) + (b+1) = a + b + 2$

[21] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag 69-70

- $f(a) \cdot f(b) = (a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$

Ejercicio 7.8 *Sean $f(x) = 1 + x \quad y \quad g(x) = 1 - x$ para todo real x. calcular:*

- $f(2) + g(2) = (1+2) + (1-2) = 2$

- $f(2) - g(2) = (1+2) - (1-2) = 3$

- $f(2) \cdot g(2) = (1+2) \cdot (1-2) = 3 \cdot (-1) = -3$

- $\dfrac{f(2)}{g(2)} = \dfrac{1+2}{1-2} = \dfrac{3}{-1} = -3$

- $f\left[g(2)\right] = f(1-2) = f(-1) = 1 + (-1) = 0$

- $g\left[f(2)\right] = f(1+2) = g(3) = 1 - 3 = -2$

- $f(a) + g(-a) = (1+a) + (1-a) = 2$

- $f(t) \cdot g(-t) = (1+t) \cdot (1+t) = 1 + t + t + t^2 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$

Ejercicio 7.9 *Sea $f(x) = |x-3| + |x-1|$ para todo real x. Calcular:*

- $f(0) = |0-3| + |0-1| = 3 + 1 = 4$
- $f(1) = |1-3| + |1-1| = 2$
- $f(2) = |2-3| + |2-1| = -1 + 1 = 0$
- $f(3) = |3-3| + |3-1| = 2$
- $f(-1) = |-1-3| + |-1-1| = 4 + 2 = 6$
- $f(-2) = |-2-3| + |-2-1| = 5 + 3 = 8$

Determinar todos los valores de t para los que $f(t+2) = f(t)$

$$\begin{aligned}
|t+2-3| + |t+2-1| &= |t-3| + |t-1| \\
|t-1| + |t+1| &= |t-3| + |t-1| \\
|t+1| &= t-3
\end{aligned}$$

Pro lo tanto $t = 1$

Ejercicio 7.10 *Sea* $f(x) = x^2$ *para todo real* x. *Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números erales* x, y t, *etc., para los que la fórmula dada es válida.*

a) $f(-x) = f(x)$

Demostración.- *Se tiene* $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(y) - f(x) = (y - x)(y + x)$

Demostración.- $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (x - y)(x + y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

c) $f(x + h) + f(x) = 2xh + h^2$

Demostración.- $f(x + h) + f(x) = (x + h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$

d) $f(2y) = 4f(y)$

Demostración.- $f(2y) = (2y)^2 = 4y^2 = 4f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$

e) $f(t^2) = f(t)^2$

Demostración.- $f(t^2) = (t^2)^2 = f(t)^2$

f) $\sqrt{f(a)} = |a|$

Demostración.- $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2} = |a|$

Ejercicio 7.11 *Sea* $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ *para* $|x| \leq 2$. *Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de* x, y, s *y* t *son válidas.*

a) $g(-x) = g(x)$

Se tiene $g(-x) = \sqrt{2 - (-x)^2} = \sqrt{2 - (x)^2} = g(x)$, *para* $|x| \leq 2$

b) $g(2y) = 2\sqrt{1 - y^2}$

$g(2y) = \sqrt{4 - (2y)^2} = \sqrt{4(1 - y^2)} = 2\sqrt{1 - y^2}$, *para* $|y| \leq 1$ *Se obtiene* $|y| \leq 1$ *de* $\sqrt{1 - y^2}$ *es decir* $1 - y^2 \geq 0$ *entonces* $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$ *y* $|y| \leq 1$

c) $g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$

$g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \sqrt{4-\left(\dfrac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4t^2-1}{t^2}} = \dfrac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|},$ *para* $|t| \geq \dfrac{1}{2}$

Para hallar los valores correspondientes debemos analizar $\sqrt{4t^2-1}$

d) $g(a-2) = \sqrt{4a-a^2}$

$g(a-2) = \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(a-2)^2} = \sqrt{4a-a^2},$ *para* $0 \leq a \leq 4$

e) $g\left(\dfrac{s}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$

$s\left(\dfrac{s}{2}\right) = \sqrt{4-\left(\dfrac{s}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{16-s^2}}{2},$ *para* $|s| \leq 4$

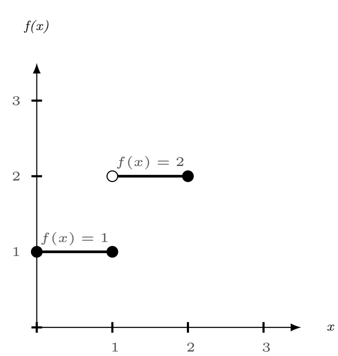
f) $\dfrac{1}{2+g(x)} = \dfrac{2-g(x)}{x^2}$

$\dfrac{1}{2+g(x)} = \dfrac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2-g(x)}{x^2}$ *para* $0 < |x| \leq 2$

Evaluemos $\sqrt{4-x^2}$*. Sea* $4-x^2 \geq 0$ *entonce* $\sqrt{x^2} \leq 2$*. Por otro lado tenemos que la función no puede ser* 0 *por* $\dfrac{1}{x^2}$*, por lo tanto debe ser* $x^2 \leq 0$*.*

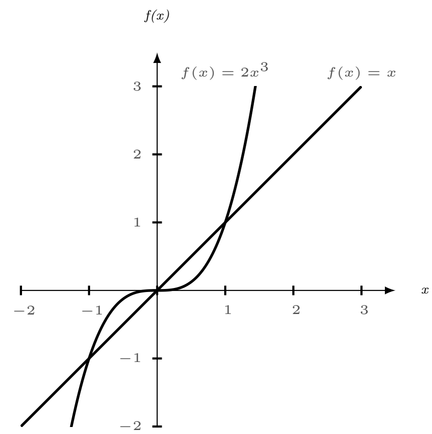
Ejercicio 7.12 *Sea* f *la función definida como sigue:* $f(x) = 1$ *para* $0 \leq x \leq 1$*;* $f(x) = 2$ *para* $1 < x \leq 2$*. La función no está definida si* $x < 0$ *ó si* $x > 2$*.*

a) *Trazar la gráfica de* f



b) *Poner* $h(x) = f(2x)$*. Describir el dominio de* g *y dibujar su gráfica.*

Ejercicio 7.13 *Las gráficas de los dos polinomios* $g(x) = x$ *y* $f(x) = x^3$ *se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.*



f(x)
f(x) = 2x^3
f(x) = x
3
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
3
x