1

Funciones

Definición 1.1 *Si f y g son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función $f+g$ denominada* ***suma*** *de $f+g$ mediante la ecuación:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los x que están a la vez en el dominio de f y en el dominio de g, es decir:

$$dominio\ (f+g) = dominio\ f\ \cap\ dominio\ g$$

Definición 1.2 *El dominio de $f \cdot g$ es dominio $f \cap$ dominio g*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Definición 1.3 *Se expresa por dominio $f \cap$ dominio $g \cap x : g(x) \neq 0$*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definición 1.4 (Función constante)

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

Teorema 1.1 $(f+g)+h = f+(g+h)$

Demostración.- ***La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio.*** *Observese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:*

$$\begin{aligned}
[(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x)\\
&= [f(x)+g(x)]+h(x)
\end{aligned}$$

$$y$$

$$\begin{aligned}
[f+(g+h)](x) &= f(x)+(g+h)(x)\\
&= f(x)+[g(x)+h(x)]
\end{aligned}$$

Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de $(f+g)+h$ *y el de* $f+(g+h)$ *es evidentemente dominio* $f \cap$ *dominio* $g \cap$ *dominio* h*. nosotros escribimos, naturalmente* $f+g+h$ *por* $(f+g)+h = f+(g+h)$

Teorema 1.2 *Es igual fácil demostrar que* $(f \cdot g)\cdot g = f \cdot (g \cdot h)$ *y ésta función se designa por* $f \cdot g \cdot h$*. Las ecuaciones* $f+g = g+f \quad y \quad f \cdot g = g \cdot f$ *no deben presentar ninguna dificultad.*

Teorema 1.3 [1] *Dos funciones* f *y* g *so iguales si y sólo si*

a) f *y* g *tienen el mismo dominio, y*

b) $f(x) = g(x)$ *para todo* x *del dominio de* f*.*

Demostración.- *Sea* f *una función tal que* $\forall x \in D_f,\ \exists y \ /\ y = f(x)$ *es decir* $(x, f(x))$ *y* g *una función tal que* $\forall z \in D_g,\ \exists y \ /\ y = g(z)$ *es decir* $(z, g(z))$*, por definición 1.6 dos pares ordenados* $(x, f(x)) = (z, g(z))$ *si y sólo si* $x = z \quad y \quad f(x) = g(z)$

Definición 1.5 (Composición de función)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ *es* $\{\ x : x$ *está en el dominio de* $g \quad y \quad g(x)$ *está en el dominio de* $f\ \}$

$$D_{f\circ g} = \{x \ /\ x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

Propiedades 1.1 $(f \circ g)\circ h = f \circ (g \circ h)$ *La demostración es una trivalidad.*

[1] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag. 66

Definición 1.6 [a] *Decimos que dos pares ordenados* (a, b) *y* (c, d) *son iguales si sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.*

$$(a, b) = (c, d) \text{ si sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Definición 1.7 (Definición de función) [b] *Una función* f *es un conjunto de pares ordenados* (x, y) *ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento.*
Por lo tanto,

$$\forall x \in D_f, \exists y \;/\; (x, y) \in f$$

Esto es, para todo x *en el dominio de la* f *existe exactamente un* y *tal que* $(x, y) \in f$ *Es costumbre escribir* $y = f(x)$ *en lugar de* $(x, y) \in f$*, por lo tanto,*

$$\forall x \in D_f, \exists y \;/\; y = f(x)$$

[a]Definición de Tom Apostol
[b]Definición de Tom Apostol

Definición 1.8 [a] *Una* ***función*** *es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si* (a, b) *y* (a, c) *pertenecen ambos a la colección, entonces* $b = c$*; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.*

Definición 1.9 [b] *Si* f *es una función, el* ***dominio*** *de* f *es el conjunto de todos los* a *para los que existe algún* b *tal que* (a, b) *está en* f*. Si* a *está en el dominio de* f*, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número* b *único tal que* (a, b) *está en* f*. Este* b *único se designa por* $f(a)$*.*

[a]Definición de Michael Spivak
[b]Definición de Michael Spivak

1.1. Teoremas y ejercicios

1.1.1. Ejercicios [2]

Ejercicio 1.1 *Sea* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$*, Interpretar lo siguiente:*

i) $f\left(f(x)\right)$

Vemos que el dominio de $\dfrac{1}{1+x}$ *son todos los reales excepto* -1 *ya que cualquier número dividido entre* 0 *es indeterminado.*
Por otro lado el dominio de $f\left(f(x)\right)$ *es* $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1+x}{2+x}, \quad x \neq -2$

Así por definición de dominio

$$D_{f \circ g} = \{x \;/\; x \neq -1 \;\wedge\; x \neq -2\}.$$

ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

[2]Calculo infinitesimal, Micheal Spivak, Pag. 61 al 68

El dominio de f esta dada por $(x \neq 0,\ -1)$ ya que $\frac{1}{0}$ es indeterminado. Como también $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$

iii) $f(cx)$

$f(cx) = \dfrac{1}{1+cx}$ *por lo tanto* $\dfrac{1}{c\left(\dfrac{1}{c}+x\right)}$ *si* $x \neq \dfrac{1}{c},\ 0$

iv) $f(x+y)$

$f(x+y) = \dfrac{1}{1+(x+y)}$ *para* $x+y \neq -1$

v) $f(x)+f(y)$

$f(x)+f(y) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} = \dfrac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$ *para* $x \neq -1,\ y \neq -1$

vi) *¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?*

Existe para todo c ya que $f(c \cdot 0) = f(0)$ entonces $f(0) = 1$

vii) *¿Para que números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos x?*

Solamente para $c = 1$. Ya que $f(cx) = f(x)$ implica $x = cx$ y esto debe cumplirse por lo menos para un $x \neq 0$

Ejercicio 1.2 *Sea $g(x) = x^2$ y sea*

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional} \end{cases} \tag{1.1}$$

i) *¿Para cuáles y es $h(y) \leq y$?*

Vemos que $h(y)$ sólo puede ser 1 ó 0. Para que se cumpla la condición $h(y) \leq y$, debe ser $y \geq 0$ é y racional ya que si y es irracional, no se cumple la condición, debido a que si y es irracional entonces es 1. También se cumpliría si $y \geq 1$ sea para y racional o irracional.

ii) *¿Para cuáles y es $h(y) \leq g(y)$?*

Se cumple para y racional entre $-1, 1$ inclusive y para todo y tal que $|y| > 1$

iii) *¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?*

Sabemos que

$$h(z) = \begin{cases} 0, & z \text{ racional} \\ 1, & z \text{ irracional} \end{cases} \tag{1.2}$$

Ahora tenemos que $g(0) = 0^2 = 0 \quad y \quad g(1) = 1^2 = 1$ *por lo tanto*

$$g(h(z)) = \begin{cases} 0^2, & z \text{ racional} \\ 1^2, & z \text{ irracional} \end{cases} \tag{1.3}$$

Y restando a $h(z)$ *nos queda* 0.

iv) *¿ Para cuáles* w *es* $g(w) \leq w$*?*

Sabemos que un número cualquiera elevado al cuadrado siempre dará un número positivo entonces el rango del dominio para que se cumple la condición $g(w) \leq w$ *es* $-1 \geq w \geq 1$

v) *¿Para cuales cuáles* ϵ *es* $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$*?*

Solamente se cumple para $-1,\ 0\ 1$

Ejercicio 1.3 *Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:*

i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene $1 - x^2 \geq 0$ *entonces* $x^2 \leq 1$ *por lo tanto el dominio son todos los* x *tal que* $|x| \leq 1$

ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Se observa claramente que el dominio es $-1 \leq x \leq 1$

iii) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

Operando un poco tenemos

$$f(x) = \frac{2x - 3}{(x-1)(x-2)},$$

sabemos que el denominador no puede ser 0 por lo tanto el $D_f = \{x \mid x \neq 1,\ x \neq 2\}$

iv) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Claramente notamos que el dominio de f *es* $[-1, 1]$ *ya que si se tomara un número mayor a este daría un número imaginario.*

v) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

Notamos que no cumple para ningún x ya que si $0 \leq x \leq 1$ entonces no se cumple para $\sqrt{x-2}$ y si $x \geq 2$ no se cumple para $\sqrt{1-x}$

Ejercicio 1.4 *Sea $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$, $s(x) = senx$. Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número.*

1) $(S \circ P)(y)$

Demostración.- *Por definición $S(P(y))$ por lo tanto $S(2^y) = (2^y)^2 = 2^{2y}$ para todo x existe en los números reales*

2) $(S \circ s)(y)$

Demostración.- $(S \circ s)(y) = S(s(y)) = S(\sin y) = \sin^2 y$

3) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$

Demostración.- $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = S(P(s(t))) + s(P(t)) = S(P(\sin t)) + s(2^x) = S(2^{\sin t}) + \sin 2^t = \left(2^{sint}\right)^2 + \sin 2^t = 2^{2\sin t} + \sin 2^t$

4) $s(t^3)$

Demostración.- $s(t^3) = \sin t^3$

Ejercicio 1.5 *Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de S, P, s usando solamente $+$, $\cdot$ y $\circ$ en cada caso la solución debe ser una función.*

i) $f(x) = 2^{\sin x} = (P \circ s)(x)$

ii) $f(x) = \sin 2^x = (s \circ S)(x)$

iii) $f(x) = \sin x^2 = (s \circ S)(x)$

iv) $f(x) = \sin^2 x = (S \circ s)(x)$

v) $f(t) = 2^{2t} = (S \circ P)(t)$

vi) $f(u) = \sin(2^u + 2^{u^2}) = s \circ (P + P \circ S)$

vii) $f(a) = 2^{\sin^2 a} + \sin(a^2) + 2^{\sin(a^2+\sin a)} = P \circ S \circ s + P \circ s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$

Ejercicio 1.6 *Las funciones polinómicas, por ser sencillas y al mismo tiempo flexibles, ocipan un lugar destacado en el estudio de las funciones. Los dos problemas siguientes ponen de manifiesto su flexibilidad y dan una orientación para deducir sus propiedades elementales más importantes.*

a) *Si $x_1, ..., x_n$ son números distintos, encontrar una función polinómica, f_i de grado $n-1$ que tome el valor 1 en x_i y 0 en x_j para $j \neq i$.Indicación: El produto de todo los $(x - x_j)$ para $j \neq i$ es 0 en x_j si $j \neq i$. (Este producto es designado generalmente por)*

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

donde el símbolo Π (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que $\sum$ para sumas).

Solución.- Lo que Spivak afirma es que entre los números $x_1, ..., x_n$ hay un sólo número x_i en el que la función f_i tome el valor 1 y que todas los demás números (x_j con $j \neq i$) son ceros en f_i.
Una forma de pensar sobre esta pregunta es considerar una solución fija n y elegir un conjunto de distintas $x_1, x_2, ..., x_n$. Por ejemplo supongamos que elegimos $n = 3$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Entonces supongamos que queremos encontrar un polinomio $f_i(x_1) = f_1(1) = 1$, pero $f_1(x_2) = f_1(2) = f_1(3) = 0$. Es decir, F_1 es un cuadrático que tiene ceros en $x = 2$ y $x = 3$, pero es igual a 1 en $x = 1$. Naturalmente, esto sugiere mirar un polinomio de la forma

$$a(x - 2)(x - 3),$$

para que la igualdad sea igual a 1 por alguna constante a. Pero, ¿Qué es esta constante? Bueno, si nos conectamos con $x = 1$, debemos tener

$$f_1(1) = 1 = a(x - 2)(x - 3) = 2a,$$

por lo tanto $a = 1/2$ y la solución deseada es

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 3).$$

Del mismo modo, si tratamos de encontrar un polinomio $f_2(x)$ tal que $f_2(2) = 1$ con raíces en $x = 1, 3$ tendríamos que resolver la ecuación $1 = a(2-1)(2-3)$, lo que da $a = -1$ por lo tanto $f_2(x) = -(x-1)(x-3)$
Ahora veamos el caso general. El polinomio $f_i(x)$ satisface $f_i(x_i)$ y $f_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$, entonces debe tomar la forma

$$f_i(x) = a \prod_{j\neq i} (x - x_j)$$

Para alguna constante a. Para encontrar esta constante, aplicamos $x = x_1$:

$$f_i(x_i) = 1 = a \prod_{j\neq i} (x_i - x_j),$$

por lo tanto:

$$a = \frac{1}{\displaystyle\prod_{j\neq i} (x_i - x_j)}$$

Así queda

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

b) *Encontrar ahora una función polinómica de grado $n-1$ tal que $f(x_i) = a_i$, donde $a_i, ..., a_n$ son números dados. (Utilícese las funciones f_i de la parte (a). La fórmula que se obtenga es la llamada formula de interpolación de Lagrange).*

Entonces

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i f_i(x)$$

por lo tanto

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

¿Para qué números a, b, c y d la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+b}$ satisface $f(f(x)) = x$ para todo x? (¿Para qué números dicha ecuación tiene sentido?)

Si para todo x,

$$x = f(f(x)) = \frac{a\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right) + b}{c\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right) + d}$$

entonces $\dfrac{a^2x + ab + bcx + bd}{acx + cb + cdx + d^2} - x = 0$, para luego $(ac + cd)x^2 + (d^2 - a^2)x - ab - db = 0$ para todo x, de modo que:

$$\begin{array}{rcl} ac + cd & = & 0 \\ ab + bd & = & 0 \\ d^2 - a^2 & = & 0 \end{array}$$

Así por propiedades de raíz $a = d$ ó $a = -d$. Una posibilidad es que $a = d = 0$ el cual se tiene $f(x) = \dfrac{b}{cx}$, donde nos queda que $f(f(x)) = \dfrac{b}{\frac{cb}{cx}} = x$, para todo $x \neq 0$. Si $a = d =\neq 0$, entonces $b = c = 0$ con lo que también se tiene $f(x) = x$. Y la tercera posibilidad es que $a + d = 0$, de modo que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, la cual satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq \dfrac{a}{c}$. Estrictamente hablando, podemos añadir la condición $f(x) \neq \dfrac{a}{c}$ para $x \neq \dfrac{a}{c}$, lo que significa que

$$\frac{ax+b}{cx-a} \neq \frac{a}{c}$$

ó $a^2 + bc \neq 0$

Ejercicio 1.7 *Resolver:*

a) *¿Para qué funciones f existe una función g tal que $f = g^2$?*

Debido a que algún número elevado al cuadrado siempre será no negativo podemos afirmar que las funciones f satisfacen a todo x tal que $f(x) \geq 0$

b) *¿Para qué función f existe una función g tal que $f = \frac{1}{g}$? Dado a que un número divido entre cero es indeterminado se ve claramente que satisfacen a todo x tal que $f(x) \neq 0$*

c) *¿Para qué funciones b y c podemos encontrar una función x tal que*

$$(x(t))^2 + b(t)x(t) + c(t) = 0$$

para todos los números t?

Por teorema se observa que para las funciones b y c que satisfacen $(b(t))^2 - 4c(t) \geq 0$ para todo t

d) *¿Qué condiciones deben satisfacer las funciones a y b si ha de existir ua función x tal que*

$$a(t)x(t) + b(t) = 0$$

para todos los números t? ¿Cuántas funciones x de éstas existirán?

Es facil notar que $b(t)$ tiene que ser igual a 0 siempre que $a(t) = 0$. Si $a(t) \neq 0$ para todo t, entonces existe una función única con esta condición, que es $x(t) = a(t)/b(t)$. Si $a(t) = 0$ para algún t, entonces puede elegirse arbitrariamente $x(t)$, de modo que existen infinitas funciones que satisfacen la condición.

Ejercicio 1.8 *Supóngase:*

a) *Supóngase que H es una función é y un número tal que $H(H(y)) = y$ ¿Cuál es el valor de $H(H(H(...(H(y)...)$ 80 veces?*

b) *La misma pregunta sustituyendo 80 por 81*

c) *La misma pregunta si $H(H(y)) = H(y)$*

d) *Encuéntrese una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todos los números x y tal que $H(1) = 36$, $H(2) = \frac{\pi}{3}$, $H(13) = 47$, $H(36) = 36$, $H(\pi/3) = \pi/3$, $H(47) = 47$*

e) *Encontrar una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todo x y tal que $H(1) = 7$, $H(17) = 18$*

1.1.2. Demostraciones [3]

Teorema 1.4 *Demostrar que para cualquier función polinómica f y cualquier número a existe una función polinómica g y un número b tales que $f(x) = (x-a)\ g(x) + b$ para todo x.*

Si el grado de f es 1, entones f es de la forma:

$$f(x) = cx + d = (x-a)c + (d + ac)$$

de modo que podemos poner $g(x) = c$ y $b = d + ac$. Supóngase que el resultado es válido para polinomios de grado $\leq k$. Si f tiene grado $k+1$, entonces f tiene la forma:

$$f(x) = a_{k+1}(x-a) = (x-a)\ g(x) + b,$$

ó

$$f(x) = (x-a)[g(x) + a_{k+1}] + b,$$

con lo que tenemos la forma requerida. Completar demostración xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Teorema 1.5 *Demostrar que si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x-a)\,g(x)$ para alguna función polinómica g. (La recíproca es evidente)*

Demostración.- *Por el teorema anterior, $f(x) = (x-a)\ g(x) + b$. Luego*

$$0 = f(a) = (a-a)\ g(a) + b = b,$$

de modo que $f(x) = (x-a)\ g(x)$

Teorema 1.6 *Demostrar que si f es una función polinómica de grado n entonces f tiene a lo sumo n raíces, es decir, existen a lo sumo n números a tales que $f(a) = 0$*

Demostración.- *Supongámos que f tiene n raíces $a_1, ..., a_n$. Entonces según el anterior teorema $f(x) = (x-a)\ g_1(x)$ donde el grado de $g_1(x)$ es $n-1$. Pero*

$$0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)\ g_1(a_2)$$

de modo que $g_1(a_2) = 0$, ya que $a_2 \neq a_1$. Luego podemos escribir

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)g_2(x)$$

donde el grado de g_2 es $n-2$. Prosigue de esta manera, obtenemos que

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2) \cdot ... \cdot (x-a_n)c$$

para algún número $c \neq 0$. Está claro que $f(a) \neq 0$ si $a \neq a_1, ..., a_n$. Así pues, f puede tener a lo sumo n raíces.

Teorema 1.7 *Demostrar que para todo n existe una función polinómica de grado n con raíces. Si n es par, encontrar una función polinómica de grado n sin raíces y sin n es impar, encontrar una con una sola raíz.*

Demostración.- *Si $f(x) = (x-1)(x-2) \cdot ... \cdot (x-n)$, entonces f tiene n raíces. Si n es par, entonces $f(x) = x^n + 1$ no tiene raíces. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ tiene una raíz única, que es 0.*

[3] Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag. 63-68

Teorema 1.8 ***a)*** *Si A es un conjunto cualquiera de números reales, defina una función C_A de la manera siguiente:*

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ si } x \text{ está en } A \\ 0, & x \text{ si } x \text{ no está en } A \end{cases} \tag{1.4}$$

Encuentre expresiones para $C_{A\ capB}$, $C_{A\cup B}$ y C_{R-A}, en términos de C_A y C_B (El símbolo $A\cap B$ se ha definido en este capítulo, pero los otros dos pueden ser nuevos para el lector. Pueden definirse de la siguiente manera:

$$A\cap B = \{x:\ x \text{ pertenece a } A \text{ o pertenece a } B\}$$

$$R-B = \{x:\ x \text{ pertenece a } R \text{ pero } x \text{ no pertenece a } A\}$$

$$\begin{array}{rcl} C_{A\cap B} & = & C_A\cdot C_B \\ C_{A\cup B} & = & 1-C_A \\ C_{A\cup B} & = & C_A+C_B-C_A\cdot C_B \end{array}$$

b) *Suponga que f es una función tal que $f(x)=0$ ó 1 para todo x. Demuestre que existe un conjunto A tal que $f=C_A$*

Demostración.- Sea $x\in A$, por definición $C_A=1$ entonces $f(x)=C_A$, por lo tanto existe un elemento en el conjunto A tal que $f=C_A$

c) *Demuestre que $f=f^2$ si y sólo si $f= C_A$ para algún conjunto A*

Demostración.- Sea $x\in A$ por definición de la parte a) se tiene $C_A(x)=1$ el cual satisface $f(x)=C_A(x)$, esto por hipótesis.

d) *Demostrar que $f=f^2$ si y sólo si $f=C_A$ para algún conjunto A*

Demostración.- Sea $x\in A$ por b) $f=C_A$ si solo si $f=f^2$ ya que $1=1^2$

1.1.3. Ejercicios [4]

Ejercicio 1.9 *Sea $f(x)=x+1$ para todo real x. Calcular:*

- $f(2)=2+1=3$
- $f(-2)=-2+1=-1$
- $-f(2)=-(2+1)=-3$
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

[4] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag 69-70

- $\dfrac{1}{f(2)} = \dfrac{1}{3}$

- $f(a+b) = a+b+1$

- $f(a)+f(b) = (a+1)+(b+1) = a+b+2$

- $f(a)\cdot f(b) = (a+1)(b+1) = ab+a+b+1$

Ejercicio 1.10 *Sean* $f(x) = 1+x$ *y* $g(x) = 1-x$ *para todo real* x*. calcular:*

- $f(2)+g(2) = (1+2)+(1-2) = 2$

- $f(2)-g(2) = (1+2)-(1-2) = 3$

- $f(2)\cdot g(2) = (1+2)\cdot(1-2) = 3\cdot(-1) = -3$

- $\dfrac{f(2)}{g(2)} = \dfrac{1+2}{1-2} = \dfrac{3}{-1} = -3$

- $f\left[g(2)\right] = f(1-2) = f(-1) = 1+(-1) = 0$

- $g\left[f(2)\right] = f(1+2) = g(3) = 1-3 = -2$

- $f(a)+g(-a) = (1+a)+(1-a) = 2$

- $f(t)\cdot g(-t) = (1+t)\cdot(1+t) = 1+t+t+t^2 = t^2+2t+1 = (t+1)^2$

Ejercicio 1.11 *Sea* $f(x) = |x-3|+|x-1|$ *para todo real* x*. Calcular:*

- $f(0) = |0-3|+|0-1| = 3+1 = 4$
- $f(1) = |1-3|+|1-1| = 2$
- $f(2) = |2-3|+|2-1| = -1+1 = 0$
- $f(3) = |3-3|+|3-1| = 2$

- $f(-1) = |-1-3| + |-1-1| = 4+2 = 6$
- $f(-2) = |-2-3| + |-2-1| = 5+3 = 8$

Determinar todos los valores de t para los que $f(t+2) = f(t)$

$$\begin{array}{rcl} |t+2-3| + |t+2-1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t-1| + |t+1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t+1| & = & t-3 \end{array}$$

Pro lo tanto $t = 1$

Ejercicio 1.12 *Sea $f(x) = x^2$ para todo real x. Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números erales x, y t, etc., para los que la fórmula dada es válida.*

a) $f(-x) = f(x)$

Demostración.- *Se tiene* $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(y) - f(x) = (y-x)(y+x)$

Demostración.- $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (x-y)(x+y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

c) $f(x+h) + f(x) = 2xh + h^2$

Demostración.- $f(x+h) + f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$

d) $f(2y) = 4f(y)$

Demostración.- $f(2y) = (2y)^2 = 4y^2 = 4f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$

e) $f(t^2) = f(t)^2$

Demostración.- $f(t^2) = (t^2)^2 = f(t)^2$

f) $\sqrt{f(a)} = |a|$

Demostración.- $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2} = |a|$

Ejercicio 1.13 *Sea $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ para $|x| \leq 2$. Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de x, y, s y t son válidas.*

a) $g(-x) = g(x)$

Se tiene $g(-x) = \sqrt{2-(-x)^2} = \sqrt{2-(x)^2} = g(x)$, *para* $|x| \leq 2$

b) $g(2y) = 2\sqrt{1-y^2}$

$g(2y) = \sqrt{4-(2y)^2} = \sqrt{4(1-y^2)} = 2\sqrt{1-y^2}$, *para* $|y| \leq 1$ *Se obtiene* $|y| \leq 1$ *de* $\sqrt{1-y^2}$ *es decir* $1-y^2 \geq 0$ *entonces* $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$ *y* $|y| \leq 1$

c) $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2}-1}{|t|}$

$g\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{4-\left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2-1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$, *para* $|t| \geq \frac{1}{2}$

Para hallar los valores correspondientes debemos analizar $\sqrt{4t^2-1}$

d) $g(a-2) = \sqrt{4a-a^2}$

$g(a-2) = \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(a-2)^2} = \sqrt{4a-a^2}$, *para* $0 \leq a \leq 4$

e) $g\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$

$s\left(\frac{s}{2}\right) = \sqrt{4-\left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16-s^2}}{2}$, *para* $|s| \leq 4$

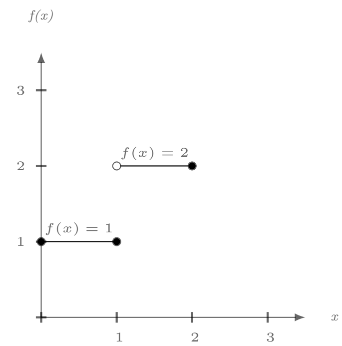
f) $\frac{1}{2+g(x)} = \frac{2-g(x)}{x^2}$

$\frac{1}{2+g(x)} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-g(x)}{x^2}$ *para* $0 < |x| \leq 2$

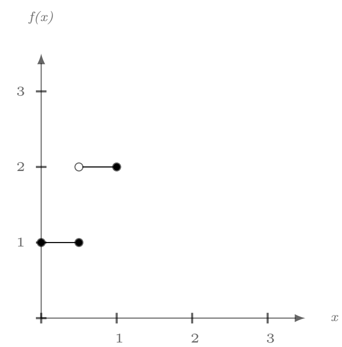
Evaluemos $\sqrt{4-x^2}$. *Sea* $4-x^2 \geq 0$ *entonce* $\sqrt{x^2} \leq 2$. *Por otro lado tenemos que la función no puede ser* 0 *por* $\frac{1}{x^2}$, *por lo tanto debe ser* $x^2 \leq 0$.

Ejercicio 1.14 *Sea* f *la función definida como sigue:* $f(x) = 1$ *para* $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$ *para* $1 < x \leq 2$. *La función no está definida si* $x < 0$ *ó si* $x > 2$.

a) *Trazar la gráfica de* f

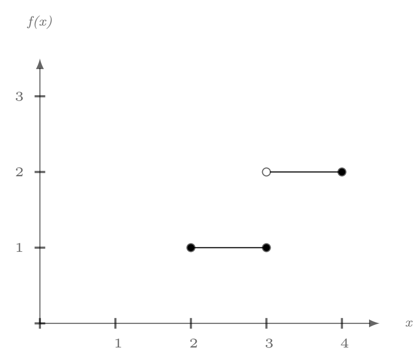


b) *Poner $g(x) = f(2x)$. Describir el dominio de g y dibujar su gráfica.*



Debido a que $1 \leq 2x \leq 1$ y $1 < 2x \leq 2$ el dominio de $g(x)$ es $0 \leq x \leq 1$

c) *Poner $h(x) = f(x - 2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.*

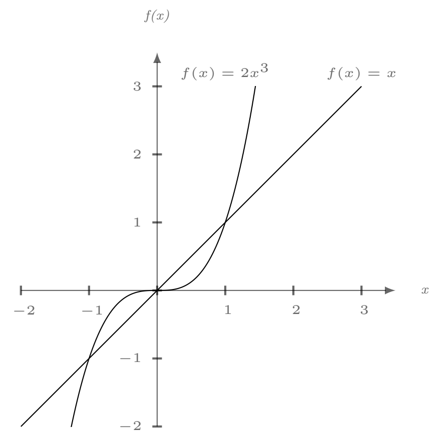


Debido a que $1 \leq x - 2 \leq 1$ y $1 < x - 2 \leq 2$ el dominio de $h(x)$ es $2 \leq x \leq 4$

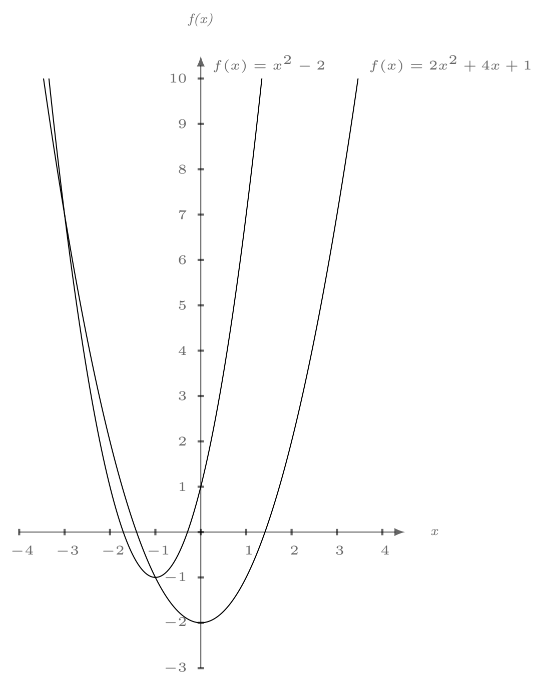
d) *Poner $k(x) = f(2x) + f(x - 2)$. Describir el dominio de k y dibujar su gráfica.*

El dominio está vacío ya $f(2x)$ que solo está definido para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x - 2)$ solo está definido para $2 \leq x \leq 4$. Por lo tanto no hay ninguno x que satisfaga ambas condiciones.

Ejercicio 1.15 *Las gráficas de los dos polinomios $g(x) = x$ y $f(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.*



Ejercicio 1.16 *Las gráficas de los dos polinomios cuadráticos $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ se cortan en dos puntos. Dibujar las porciones de sus gráficas comprendidas entre sus intersecciones.*



1.1.4. Demostraciones [5]

Teorema 1.9 *Este ejercicio desarrolla ciertas propiedades fundamentales de los polinomios. Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ un polinomio de grado n. Demostrar cada uno de los siguientes apartados:*

a) *Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, $f(x) = xg(x)$, siendo g un polinomio de grado $n-1$.*

Para entender lo que nos quiere decir Apostol pongamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un polinomio donde $f(x) = 2x^2 + 3x - x$ entonces notamos que $f(x) = x(2x + 3 - 1)$ donde $g(x) = 2x + 3 - 1$, esto quiere decir que si $0 = f(0) = c_0 \Rightarrow c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n = x(c_1 + c_2x + ... + c_nx^{n-1})$ Así que debemos demostrar que $f(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $n \geq 1$ tal que $f(0) = 0$, entonces debe haber un polinomio de grado $n-1$, $g(x)$, tal que $f(x) = xg(x)$

[5] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag 69-70

Demostración.- *Sabemos que*

$$f(0) = c_n \cdot 0^n + c_{n-1} \cdot 0^{n-1} + ... + c_1 \cdot 0 + c_0 = c_0,$$

como $f(0) = 0$ *se concluye que* $c_0 = 0$. *Así tenemos*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k.$$

Ahora crearemos una función $g(x)$. *Dada la función* $f(x)$ *como la anterior, definamos,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

Ahora crearé una función $g(x)$. *Dada una función* $f(x)$ *como la anterior, definamos*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

donde c_k *son los mismos que los dados por la función* $f(x)$. *Primero notemos que el grado de* $g(x)$ *es* $n-1$. *Finalmente, tenemos que*

$$xg(x) = x\sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k = f(x).$$

b) *Para cada real* a, *la función* p *dada por* $p(x) = f(x+a)$ *es un polinomio de grado* n.

Demostración.-