1

Funciones

Definición 1.1 *Si* f *y* g *son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función* $f + g$ *denominada* ***suma*** *de* $f + g$ *mediante la ecuación:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Para el conjunto de todos los x *que están a la vez en el dominio de* f *y en el dominio de* g*, es decir:*

$$\text{dominio } (f + g) = \text{dominio } f \cap \text{dominio } g$$

Definición 1.2 *El dominio de* $f \cdot g$ *es dominio* $f \cap$ *dominio* g

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Definición 1.3 *Se expresa por dominio* $f \cap$ *dominio* $g \cap x : g(x) \neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Definición 1.4 (Función constante)

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

Teorema 1.1 $(f + g) + h = f + (g + h)$

Demostración.- ***La demostración es característica de casi todas las demostraciones que prueban que dos funciones son iguales: se debe hacer ver que las dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo valor para cualquier número del dominio.*** *Observese que al interpretar la definición de cada lado se obtiene:*

$$\begin{aligned} [(f+g)+h](x) &= (f+g)(x)+h(x) \\ &= [f(x)+g(x)]+h(x) \end{aligned}$$

$$y$$

$$\begin{aligned} [f+(g+h)](x) &= f(x)+(g+h)(x) \\ &= f(x)+[g(x)+h(x)] \end{aligned}$$

Es esta demostración no se ha mencionado la igualdad de los dos dominios porque esta igualdad parece obvia desde el momento en que empezamos a escribir estas ecuaciones: el dominio de $(f+g)+h$ *y el de* $f+(g+h)$ *es evidentemente dominio* $f \cap$ *dominio* $g \cap$ *dominio* h. *nosotros escribimos, naturalmente* $f+g+h$ *por* $(f+g)+h = f+(g+h)$

Teorema 1.2 *Es igual fácil demostrar que* $(f \cdot g) \cdot g = f \cdot (g \cdot h)$ *y ésta función se designa por* $f \cdot g \cdot h$. *Las ecuaciones* $f+g = g+f$ *y* $f \cdot g = g \cdot f$ *no deben presentar ninguna dificultad.*

Teorema 1.3 [1] *Dos funciones* f *y* g *so iguales si y sólo si*

a) f *y* g *tienen el mismo dominio, y*

b) $f(x) = g(x)$ *para todo* x *del dominio de* f.

Demostración.- *Sea* f *una función tal que* $\forall x \in D_f,\ \exists y \ / \ y = f(x)$ *es decir* $(x, f(x))$ *y* g *una función tal que* $\forall z \in D_g,\ \exists y \ / \ y = g(z)$ *es decir* $(z, g(z))$, *por definición 1.6 dos pares ordenados* $(x, f(x)) = (z, g(z))$ *si y sólo si* $x = z$ *y* $f(x) = g(z)$

Definición 1.5 (Composición de función)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ *es* $\{\ x : x$ *está en el dominio de* g *y* $g(x)$ *está en el dominio de* $f\ \}$

$$D_{f\circ g} = \{x \ / \ x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

Propiedades 1.1 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ *La demostración es una trivialidad.*

[1] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag. 66

Definición 1.6 [a] *Decimos que dos pares ordenados* (a, b) *y* (c, d) *son iguales si sólo si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos son iguales.*

$$(a, b) = (c, d) \text{ si sólo si } a = c \text{ y } b = d$$

Definición 1.7 (Definición de función) [b] *Una función* f *es un conjunto de pares ordenados* (x, y) *ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento.*
Por lo tanto,

$$\forall x \in D_f, \exists y \;/\; (x, y) \in f$$

Esto es, para todo x *en el dominio de la* f *existe exactamente un* y *tal que* $(x, y) \in f$ *Es costumbre escribir* $y = f(x)$ *en lugar de* $(x, y) \in f$*, por lo tanto,*

$$\forall x \in D_f, \exists y \;/\; y = f(x)$$

[a] Definición de Tom Apostol
[b] Definición de Tom Apostol

Definición 1.8 [a] *Una* ***función*** *es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si* (a, b) *y* (a, c) *pertenecen ambos a la colección, entonces* $b = c$*; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.*

Definición 1.9 [b] *Si* f *es una función, el* ***dominio*** *de* f *es el conjunto de todos los* a *para los que existe algún* b *tal que* (a, b) *está en* f*. Si* a *está en el dominio de* f*, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número* b *único tal que* (a, b) *está en* f*. Este* b *único se designa por* $f(a)$*.*

[a] Definición de Michael Spivak
[b] Definición de Michael Spivak

1.1. Teoremas y ejercicios

1.1.1. Ejercicios [2]

Ejercicio 1.1 *Sea* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$*, Interpretar lo siguiente:*

i) $f(f(x))$

Vemos que el dominio de $\dfrac{1}{1+x}$ *son todos los reales excepto* -1 *ya que cualquier número dividido entre* 0 *es indeterminado.*
Por otro lado el dominio de $f(f(x))$ *es* $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1+x}{2+x}, \quad x \neq -2$

Así por definición de dominio

$$D_{f \circ g} = \{x \;/\; x \neq -1 \;\wedge\; x \neq -2\}.$$

ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

[2] Calculo infinitesimal, Micheal Spivak, Pag. 61 al 68

El dominio de f esta dada por $(x \neq 0,\ -1)$ ya que $\dfrac{1}{0}$ es indeterminado. Como también $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$

iii) $f(cx)$

$f(cx) = \dfrac{1}{1+cx}$ *por lo tanto* $\dfrac{1}{c\left(\dfrac{1}{c}+x\right)}$ *si* $x \neq \dfrac{1}{c},\ 0$

iv) $f(x+y)$

$f(x+y) = \dfrac{1}{1+(x+y)}$ *para* $x+y \neq -1$

v) $f(x)+f(y)$

$f(x)+f(y) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} = \dfrac{x+y+2}{(1+x)(1+y)}$ *para* $x \neq -1,\ y \neq -1$

vi) *¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?*

Existe para todo c ya que $f(c \cdot 0) = f(0)$ entonces $f(0) = 1$

vii) *¿Para que números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos x?*

Solamente para $c = 1$. Ya que $f(cx) = f(x)$ implica $x = cx$ y esto debe cumplirse por lo menos para un $x \neq 0$

Ejercicio 1.2 *Sea $g(x) = x^2$ y sea*

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional} \end{cases} \tag{1.1}$$

i) *¿Para cuáles y es $h(y) \leq y$?*

Vemos que $h(y)$ sólo puede ser 1 ó 0. Para que se cumpla la condición $h(y) \leq y$, debe ser $y \geq 0$ é y racional ya que si y es irracional, no se cumple la condición, debido a que si y es irracional entonces es 1. También se cumpliría si $y \geq 1$ sea para y racional o irracional.

ii) *¿Para cuáles y es $h(y) \leq g(y)$?*

Se cumple para y racional entre $-1, 1$ inclusive y para todo y tal que $|y| > 1$

iii) *¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?*

Sabemos que

$$h(z) = \begin{cases} 0, & z \text{ racional} \\ 1, & z \text{ irracional} \end{cases} \tag{1.2}$$

Ahora tenemos que $g(0) = 0^2 = 0$ *y* $g(1) = 1^2 = 1$ *por lo tanto*

$$g(h(z)) = \begin{cases} 0^2, & z \text{ racional} \\ 1^2, & z \text{ irracional} \end{cases} \tag{1.3}$$

Y restando a $h(z)$ *nos queda* 0.

iv) *¿ Para cuáles* w *es* $g(w) \leq w$*?*

Sabemos que un número cualquiera elevado al cuadrado siempre dará un número positivo entonces el rango del dominio para que se cumple la condición $g(w) \leq w$ *es* $-1 \geq w \geq 1$

v) *¿Para cuales cuáles* ϵ *es* $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$*?*

Solamente se cumple para $-1,\ 0\ 1$

Ejercicio 1.3 *Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:*

i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Por la propiedad de raíz cuadrada, se tiene $1 - x^2 \geq 0$ *entonces* $x^2 \leq 1$ *por lo tanto el dominio son todos los* x *tal que* $|x| \leq 1$

ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

Se observa claramente que el dominio es $-1 \leq x \leq 1$

iii) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

Operando un poco tenemos

$$f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)},$$

sabemos que el denominador no puede ser 0 *por lo tanto el* $D_f = \{x \ / \ x \neq 1,\ x \neq 2\}$

iv) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$

Claramente notamos que el dominio de f *es* $[-1, 1]$ *ya que si se tomara un número mayor a este daría un número imaginario.*

v) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

Notamos que no cumple para ningún x *ya que si* $0 \leq x \leq 1$ *entonces no se cumple para* $\sqrt{x-2}$ *y si* $x \geq 2$ *no se cumple para* $\sqrt{1-x}$

Ejercicio 1.4 *Sea* $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$, $s(x) = senx$. *Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número.*

1) $(S \circ P)(y)$

Demostración.- *Por definición* $S(P(y))$ *por lo tanto* $S(2^y) = (2^y)^2 = 2^{2y}$ *para todo* x *existe en los números reales*

2) $(S \circ s)(y)$

Demostración.- $(S \circ s)(y) = S(s(y)) = S(\sin y) = \sin^2 y$

3) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$

Demostración.- $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = S(P(s(t))) + s(P(t)) = S(P(\sin t)) + s(2^x) = S(2^{\sin t}) + \sin 2^t = \left(2^{sint}\right)^2 + \sin 2^t = 2^{2\sin t} + \sin 2^t$

4) $s(t^3)$

Demostración.- $s(t^3) = \sin t^3$

Ejercicio 1.5 *Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de* S, P, s *usando solamente* $+$, $\cdot$ *y* $\circ$ *en cada caso la solución debe ser una función.*

i) $f(x) = 2^{\sin x} = (P \circ s)(x)$

ii) $f(x) = \sin 2^x = (s \circ S)(x)$

iii) $f(x) = \sin x^2 = (s \circ S)(x)$

iv) $f(x) = \sin^2 x = (S \circ s)(x)$

v) $f(t) = 2^{2t} = (S \circ P)(t)$

vi) $f(u) = \sin(2^u + 2^{u^2}) = s \circ (P + P \circ S)$

vii) $f(a) = 2^{\sin^2 a} + \sin(a^2) + 2^{\sin(a^2 + \sin a)} = P \circ S \circ s + P \circ s \circ S + P \circ s \circ (S + s)$

Ejercicio 1.6 *Las funciones polinómicas, por ser sencillas y al mismo tiempo flexibles, ocipan un lugar destacado en el estudio de las funciones. Los dos problemas siguientes ponen de manifiesto su flexibilidad y dan una orientación para deducir sus propiedades elementales más importantes.*

a) *Si $x_1, ..., x_n$ son números distintos, encontrar una función polinómica, f_i de grado $n-1$ que tome el valor 1 en x_i y 0 en x_j para $j \neq i$.Indicación: El produto de todo los $(x - x_j)$ para $j \neq i$ es 0 en x_j si $j \neq i$. (Este producto es designado generalmente por)*

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

donde el símbolo Π (pi mayúscula) desempeña para productos el mismo papel que $\sum$ para sumas).

Solución.- *Lo que Spivak afirma es que entre los números $x_1, ..., x_n$ hay un sólo número x_i en el que la función f_i tome el valor 1 y que todas los demás números (x_j con $j \neq i$) son ceros en f_i.*
Una forma de pensar sobre esta pregunta es considerar una solución fija n y elegir un conjunto de distintas $x_1, x_2, ..., x_n$. Por ejemplo supongamos que elegimos $n = 3$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Entonces supongamos que queremos encontrar un polinomio $f_i(x_1) = f_1(1) = 1$, pero $f_1(x_2) = f_1(2) = f_1(3) = 0$. Es decir, F_1 es un cuadrático que tiene ceros en $x = 2$ y $x = 3$, pero es igual a 1 en $x = 1$. Naturalmente, esto sugiere mirar un polinomio de la forma

$$a(x-2)(x-3),$$

para que la igualdad sea igual a 1 por alguna constante a. Pero, ¿Qué es esta constante? Bueno, si nos conectamos con $x = 1$, debemos tener

$$f_1(1) = 1 = a(x-2)(x-3) = 2a,$$

por lo tanto $a = 1/2$ y la solución deseada es

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3).$$

Del mismo modo, si tratamos de encontrar un polinomio $f_2(x)$ tal que $f_2(2) = 1$ con raíces en $x = 1, 3$ tendríamos que resolver la ecuación $1 = a(2-1)(2-3)$, lo que da $a = -1$ por lo tanto $f_2(x) = -(x-1)(x-3)$ Ahora veamos el caso general. El polinomio $f_i(x)$ satisface $f_i(x_i)$ y $f_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$, entonces debe tomar la forma

$$f_i(x) = a \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

Para alguna constante a. Para encontrar esta constante, aplicamos $x = x_1$:

$$f_i(x_i) = 1 = a \prod_{j \neq i} (x_i - x_j),$$

por lo tanto:

$$a = \frac{1}{\displaystyle\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Así queda

$$f_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

b) *Encontrar ahora una función polinómica de grado $n-1$ tal que $f(x_i) = a_i$, donde $a_i, ..., a_n$ son números dados. (Utilícese las funciones f_i de la parte (a). La fórmula que se obtenga es la llamada formula de interpolación de Lagrange).*

Entonces

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i f_i(x)$$

por lo tanto

$$f(x) = \sum_{j=1} a_i \prod_{j\neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

¿Para qué números a, b, c y d la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+b}$ satisface $f(f(x)) = x$ para todo x? (¿Para qué números dicha ecuación tiene sentido?)

1.1.2. Demostraciones [3]

Teorema 1.4 *Demostrar que para cualquier función polinómica f y cualquier número a existe una función polinómica g y un número b tales que $f(x) = (x-a)\, g(x) + b$ para todo x.*

Si el grado de f es 1, entones f es de la forma:

$$f(x) = cx + d = (x-a)c + (d + ac)$$

de modo que podemos poner $g(x) = c$ y $b = d + ac$. Supóngase que el resultado es válido para polinomios de grado $\leq k$. Si f tiene grado $k+1$, entonces f tiene la forma:

$$f(x) = a_{k+1}(x-a) = (x-a)\; g(x) + b,$$

ó

$$f(x) = (x-a)[g(x) + a_{k+1}] + b,$$

con lo que tenemos la forma requerida. Completar demostración xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Teorema 1.5 *Demostrar que si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x-a)\, g(x)$ para alguna función polinómica g. (La recíproca es evidente)*

Demostración.- *Por el teorema anterior, $f(x) = (x-a)\; g(x) + b$. Luego*

$$0 = f(a) = (a-a)\; g(a) + b = b,$$

de modo que $f(x) = (x-a)\; g(x)$

[3]Calculo infinitesimal, Michael Spivak, pag. 63-68

Teorema 1.6 *Demostrar que si f es una función polinómica de grado n entonces f tiene a lo sumo n raíces, es decir, existen a lo sumo n números a tales que $f(a) = 0$*

Demostración.- *Supongámos que f tiene n raíces $a_1, ..., a_n$. Entonces según el anterior teorema $f(x) = (x - a)\ g_1(x)$ donde el grado de $g_1(x)$ es $n - 1$. Pero*

$$0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)\ g_1(a_2)$$

de modo que $g_1(a_2) = 0$, ya que $a_2 \neq a_1$. Luego podemos escribir

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)g_2(x)$$

donde el grado de g_2 es $n - 2$. Prosigue de esta manera, obtenemos que

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot ... \cdot (x - a_n)c$$

para algún número $c \neq 0$. Está claro que $f(a) \neq 0$ si $a \neq a_1, ..., a_n$. Así pues, f puede tener a lo sumo n raíces.

Teorema 1.7 *Demostrar que para todo n existe una función polinómica de grado n con raíces. Si n es par, encontrar una función polinómica de grado n sin raíces y sin n es impar, encontrar una con una sola raíz.*

Demostración.- *Si $f(x) = (x - 1)(x - 2) \cdot ... \cdot (x - n)$, entonces f tiene n raíces. Si n es par, entonces $f(x) = x^n + 1$ no tiene raíces. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ tiene una raíz única, que es 0.*

Teorema 1.8 ***a)*** *Si A es un conjunto cualquiera de números reales, defina una función C_A de la manera siguiente:*

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ si } x \text{ está en } A \\ 0, & x \text{ si } x \text{ no está en } A \end{cases} \tag{1.4}$$

Encuentre expresiones para $C_{A\ capB}$, $C_{A\cup B}$ y C_{R-A}, en términos de C_A y C_B (El símbolo $A \cap B$ se ha definido en este capítulo, pero los otros dos pueden ser nuevos para el lector. Pueden definirse de la siguiente manera:

$$A \cap B = \{x :\ x \text{ pertenece a } A \text{ o pertenece a } B\}$$

$$R - B = \{x :\ x \text{ pertenece a } R \text{ pero } x \text{ no pertenece a } A\}$$

b) *Suponga que f es una función tal que $f(x) = 0$ ó 1 para todo x. Demuestre que existe un conjunto A tal que $f = C_A$*

Demostración.-

c) *Demuestre que $f = f^2$ si y sólo si f= C_A para algún conjunto A*

Demostración.-

1.1.3. Ejercicios [4]

Ejercicio 1.7 *Sea $f(x) = x + 1$ para todo real x. Calcular:*

- $f(2) = 2 + 1 = 3$

[4] Calculus Vol 1, Tom Apostol, pag 69-70

- $f(-2) = -2 + 1 = -1$

- $-f(2) = -(2 + 1) = -3$

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

- $\frac{1}{f(2)} = \frac{1}{3}$

- $f(a + b) = a + b + 1$

- $f(a) + f(b) = (a + 1) + (b + 1) = a + b + 2$

- $f(a) \cdot f(b) = (a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$

Ejercicio 1.8 *Sean $f(x) = 1 + x \quad y \quad g(x) = 1 - x$ para todo real x. calcular:*

- $f(2) + g(2) = (1 + 2) + (1 - 2) = 2$

- $f(2) - g(2) = (1 + 2) - (1 - 2) = 3$

- $f(2) \cdot g(2) = (1 + 2) \cdot (1 - 2) = 3 \cdot (-1) = -3$

- $\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3$

- $f\left[g(2)\right] = f(1 - 2) = f(-1) = 1 + (-1) = 0$

- $g\left[f(2)\right] = f(1 + 2) = g(3) = 1 - 3 = -2$

- $f(a) + g(-a) = (1 + a) + (1 - a) = 2$

- $f(t) \cdot g(-t) = (1 + t) \cdot (1 + t) = 1 + t + t + t^2 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$

Ejercicio 1.9 *Sea* $f(x) = |x-3| + |x-1|$ *para todo real* x. *Calcular:*

- $f(0) = |0-3| + |0-1| = 3 + 1 = 4$
- $f(1) = |1-3| + |1-1| = 2$
- $f(2) = |2-3| + |2-1| = -1 + 1 = 0$
- $f(3) = |3-3| + |3-1| = 2$
- $f(-1) = |-1-3| + |-1-1| = 4 + 2 = 6$
- $f(-2) = |-2-3| + |-2-1| = 5 + 3 = 8$

Determinar todos los valores de t *para los que* $f(t+2) = f(t)$

$$\begin{array}{rcl} |t+2-3| + |t+2-1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t-1| + |t+1| & = & |t-3| + |t-1| \\ |t+1| & = & t-3 \end{array}$$

Pro lo tanto $t = 1$

Ejercicio 1.10 *Sea* $f(x) = x^2$ *para todo real* x. *Calcular cada una de las fórmulas siguientes. En cada caso precisar los conjuntos de números erales* x, y t, *etc., para los que la fórmula dada es válida.*

a) $f(-x) = f(x)$

Demostración.- Se tiene $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(y) - f(x) = (y-x)(y+x)$

Demostración.- $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (x-y)(x+y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

c) $f(x+h) + f(x) = 2xh + h^2$

Demostración.- $f(x+h) + f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$

d) $f(2y) = 4f(y)$

Demostración.- $f(2y) = (2y)^2 = 4y^2 = 4f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$

e) $f(t^2) = f(t)^2$

Demostración.- $f(t^2) = (t^2)^2 = f(t)^2$

f) $\sqrt{f(a)} = |a|$

Demostración.- $\sqrt{f(a)} = \sqrt{a^2} = |a|$

Ejercicio 1.11 *Sea* $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ *para* $|x| \leq 2$. *Comprobar cada una de las fórmulas siguientes e indicar para qué valores de* x, y, s *y* t *son válidas.*

a) $g(-x) = g(x)$

Se tiene $g(-x) = \sqrt{2 - (-x)^2} = \sqrt{2 - (x)^2} = g(x)$, *para* $|x| \leq 2$

b) $g(2y) = 2\sqrt{1 - y^2}$

$g(2y) = \sqrt{4 - (2y)^2} = \sqrt{4(1 - y^2)} = 2\sqrt{1 - y^2}$, *para* $|y| \leq 1$ *Se obtiene* $|y| \leq 1$ *de* $\sqrt{1 - y^2}$ *es decir* $1 - y^2 \geq 0$ *entonces* $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{1}$ *y* $|y| \leq 1$

c) $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}$

$g\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2 - 1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{|t|}$, *para* $|t| \geq \frac{1}{2}$

Para hallar los valores correspondientes debemos analizar $\sqrt{4t^2 - 1}$

d) $g(a - 2) = \sqrt{4a - a^2}$

$g(a - 2) = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - (a - 2)^2} = \sqrt{4a - a^2}$, *para* $0 \leq a \leq 4$

e) $g\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - s^2}$

$s\left(\frac{s}{2}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16 - s^2}}{2}$, *para* $|s| \leq 4$

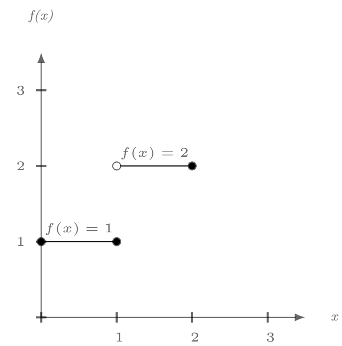
f) $\frac{1}{2 + g(x)} = \frac{2 - g(x)}{x^2}$

$\frac{1}{2 + g(x)} = \frac{1}{2 + \sqrt{4 - x^2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \frac{2 - g(x)}{x^2}$ *para* $0 < |x| \leq 2$

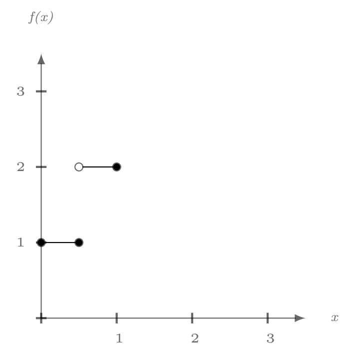
Evaluemos $\sqrt{4 - x^2}$. *Sea* $4 - x^2 \geq 0$ *entonce* $\sqrt{x^2} \leq 2$. *Por otro lado tenemos que la función no puede ser* 0 *por* $\frac{1}{x^2}$, *por lo tanto debe ser* $x^2 \leq 0$.

Ejercicio 1.12 *Sea* f *la función definida como sigue:* $f(x) = 1$ *para* $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = 2$ *para* $1 < x \leq 2$. *La función no está definida si* $x < 0$ *ó si* $x > 2$.

a) *Trazar la gráfica de* f

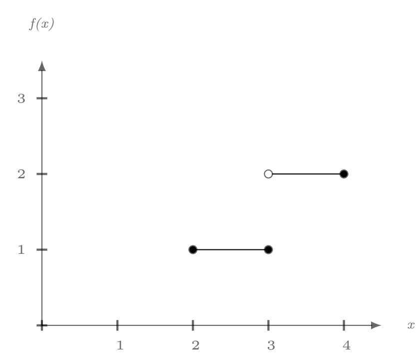


b) *Poner $g(x) = f(2x)$. Describir el dominio de g y dibujar su gráfica.*



Debido a que $1 \leq 2x \leq 1 \quad y \quad 1 < 2x \leq 2$ el dominio de $g(x)$ es $0 \leq x \leq 1$

c) *Poner $h(x) = f(x-2)$. Describir el dominio de $k \quad$ y dibujar su gráfica.*

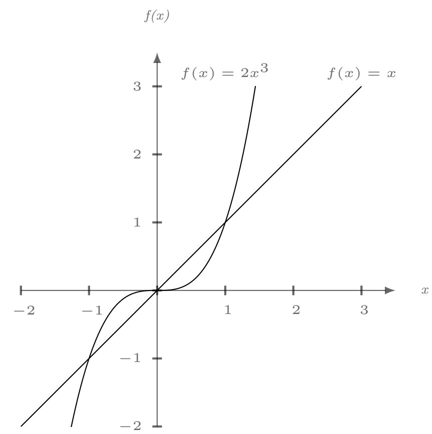


Debido a que $1 \leq x-2 \leq 1 \quad y \quad 1 < x-2 \leq 2$ el dominio de $h(x)$ es $2 \leq x \leq 4$

d) *Poner $k(x) = f(2x) + f(x-2)$. Describir el dominio de $k \quad$ y dibujar su gráfica.*

El dominio está vacío ya $f(2x)$ que solo está definido para $0 \leq x \leq 1 \quad y \quad f(x-2)$ solo está definido para $2 \leq x \leq 4$. Por lo tanto no hay ninguno x que satisfaga ambas condiciones.

Ejercicio 1.13 *Las gráficas de los dos polinomios $g(x) = x \quad y \quad f(x) = x^3$ se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.*



Ejercicio 1.14 *Las gráficas de los dos polinomios cuadráticos* $f(x) = x^2 - 2$ *y* $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ *se cortan en dos puntos. Dibujar las porciones de sus gráficas comprendidas entre sus intersecciones.*