GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Apuntes

por FODE

Índice general

1

Rectas y Planos

¿Como podría definirse un punto, una recta, un plano y el espacio?

Estos cuatro conceptos son muy importantes en el estudio de la geometría; para estos términos no pueden definirse en términos simples y los llamamos términos no definidos ó primitivos.

Punto: Ubicación, sin longitud, anchura, ni altura.

Recta: Longitud ilimitada, derecha, sin grosor, ni extremos.

Plano: Ilimitado, continuo en todas direcciones, llano, sin grosor.

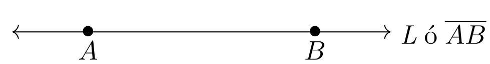
Espacio: Ilimitado, sin logitud, anchura, ni altura.

Definición 1.1 (El espacio) *es la colección de todos los puntos.*

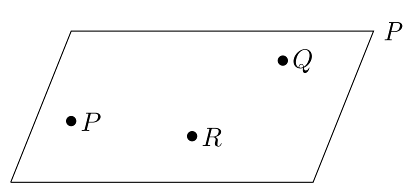
Notación

- Los puntos se representan con letras mayúsculas A, B, C, etc.

- Las rectas los denotamos por: L ó $\overline{AB}$.



- Los planos se representará con letras cursivas: P.



Definición 1.2 *Puntos y rectas.*

- ***Los puntos colineales*** *son puntos que están en la misma recta.*
- ***Los puntos coplanares*** *son puntos que se encuentram en el mismo plano*
- ***Las rectas intersecantes*** *son dos rectas con un punto en común.*
- ***Las rectas concurrentes*** *son tres ó más rectas coplanares que tienen un punto en común.*

POSTULADO .1 (Postulado de la distancia) *A cada par de puntos diferentes le corresponde un número real positivo único.*

Definición 1.3 *el número dado por el postulado 1 se llama distancia entre los puntos P y Q; lo que se denota por PQ.*

$$Si\ P = Q\ entonces\ PQ = 0$$

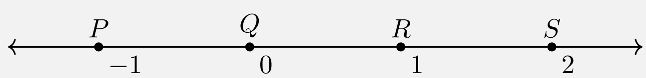
POSTULADO .2 (Postulado de la regla) *Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que:*

a) *A cada punto de la recta corresponde exactamente un número real,*

b) *a cada número real corresponde exactamente un punto de la recta y*

c) *la distancia entre los dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de su diferencia.*

Definición 1.4 *La correspondencia descrita por el postulado 2 se llama sistema de coordenadas.*



POSTULADO .3 (Postulado de la colocación de la regla) *Dados dos puntos P y Q de una recta, se puede escoger el sistema de coordenadas de manera que la coordenada de P sea cero y la coordenada de Q sea positiva.*

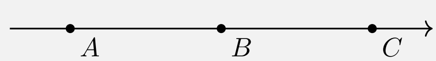
Definición 1.5 *B esta "entre" A y B si,*

i) *A, B y C son colineales.*

ii) $AB + BC = AC$

Definición 1.6 *Un segmento , $\overline{AB}$ es le conjunto de los puntos A y B de todos los puntos que están entre A y B.*

Definición 1.7 *Un rayo $\overrightarrow{AB}$ es la unión del segmento $\overline{AB}$ y de todos los puntos C para los cuales es verdad que B está entre A y C,*



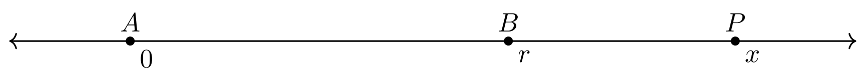
POSTULADO .4 (Postulado de la recta) *Por dos puntos puntos distintos cualesquiera pasa exactamente una recta.*

AB se llama longitud del segmento $\overline{AB}$

Correspondencia biunivoca .- correspondencia uno a uno

TEOREMA 1.1 (Teorema de la localización de puntos) *Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo y $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces existe exactamente un punto $P \in \overrightarrow{AB}/AP = x$*

Demostración.- *Dada la recta $\overleftrightarrow{AB}$; pro el postulado de la colocación de la regla podemos elegir un sistema de coordenadas de A sea cero y la coordenada de B sea un número positivo r*



Sea P el punto cuyo coordenada es x; como $x \in \mathbb{R}^+$ entonces $x \in \overrightarrow{AB}$ y $AP = |x - 0| = x$; pero $x > 0$. La unicidad de P se da por el postulado de la regla.

Definición 1.8 *Un punto B se llama punto medio de un segmento $\overline{AC}$, si B está entre A y B tal que $AB = BC$*

*Decimos que el punto medio de un segmento **biseca** al segmento.*

TEOREMA 1.2 *Todo segmento tiene exactamente un punto medio.*

Demostración.- *Si B es el punto medio de $\overline{AC}$ entonces debe cumplirse:*

$$\left.\begin{array}{rcl} AB + BC & = & AC \\ AB & = & BC \end{array}\right\} \Rightarrow AB = \frac{AC}{2}$$

Luego por el Teorema 1, el rayo $\overrightarrow{AC}$ con $x = \dfrac{AC}{2} \in \mathbb{R}^+$ hay exactamente un punto B tal que $AB = \dfrac{AC}{2}$. Así $\overline{AC}$ tiene exactamente un punto medio.