

# البراهين الرياضية والنماذج النظرية لنظرية الفتيحة

## مقدمة

في هذا القسم، سنطور براهين رياضية صارمة للمفاهيم الأساسية في نظرية الفتيحة، مع تجنب الاستدلال الدائري والاعتماد على مبادئ أولى واضحة.

## 1. برهان رياضي صارم لعامل الانقلاب

### 1.1 المبادئ الأساسية

نبدأ من المبادئ الأساسية التالية:

المبدأ الأول (الانبعاث من الصفر):

Plain Text

مجموع خصائصه  $\emptyset = K$ : كيان أولي  $\forall$

المبدأ الثاني (الثنائية المتعكسة):

Plain Text

$K = \{m, s\}$  (متعامدان) حيث  $m \perp s$

المبدأ الثالث (الحفظ الصفري):

Plain Text

$\text{خاصية}(m) + \text{خاصية}(s) = 0$

### 1.2 الاشتقاق الرياضي

الخطوة 1: تعريف الخصائص الهندسية

لنعرف الخصائص الهندسية للماهيتين:

- نصف قطر الماهية المنكمشة:  $r_m$
- نصف قطر الماهية المتسعة:  $r_s$

الخطوة 2: تطبيق مبدأ الحفظ الصفري

من المبدأ الثالث، يجب أن يكون:

Plain Text

$$f(r_m) + g(r_s) = 0$$

حيث  $f$  و  $g$  دالتان تمثلان "الخاصية" لكل ماهية.

**الخطوة 3: استبعاد العلاقات الخطية**

إذا كانت  $f(r) = ar$  و  $g(r) = br$  ، فإن:

Plain Text

$$\begin{aligned} ar_m + br_s &= 0 \\ r_s &= -(a/b)r_m \end{aligned}$$

هذا يعطي علاقة خطية بمعامل ثابت  $-(a/b)$  . لكن هذا يتطلب وجود معامليين مستقلين  $a$  و  $b$  ، مما يكسر مبدأ الوحدة الأصلية.

**الخطوة 4: البحث عن العلاقة الوجدانية**

لكي نحافظ على الوحدة الأصلية، يجب أن تكون العلاقة من الشكل:

Plain Text

$$f(r_m) = -f(r_s)$$

أبسط دالة تحقق هذا الشرط مع الحفاظ على التناظر هي:

Plain Text

$$f(r) = \ln(r) + C$$

حيث:

Plain Text

$$\begin{aligned} \ln(r_m) + C &= -(\ln(r_s) + C) \\ \ln(r_m) &= -\ln(r_s) \\ \ln(r_m) &= \ln(1/r_s) \\ r_m &= 1/r_s \end{aligned}$$

**النتيجة:**

Plain Text

$$r_s = 1/r_m$$

### 1.3 تبرير اختيار الدالة اللوغاريتمية

لماذا اللوغاريتم؟

1. **الوحدية:**  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$  - تحول الضرب إلى جمع

2. **التناظر:**  $\ln(1/x) = -\ln(x)$  - التناظر المطلق حول الصفر

3. **البساطة:** أبسط دالة غير خطية تحقق الشروط المطلوبة

## 2. برهان رياضي لعامل الواحد ( $k=1$ )

### 2.1 مبدأ التكافؤ الديناميكي الأولي

التعريف:

في اللحظة التأسيسية، حيث لا توجد مقاييس خارجية، فإن:

Plain Text

$$\alpha = m_0$$

حيث:

- معامل القوة الاستيعادية:  $\alpha$
- معامل القصور الذاتي:  $m_0$

### 2.2 الاشتقاق من معادلة الحركة

معادلة الحركة الأساسية:

Plain Text

$$m_0 \frac{d^2 r}{dt^2} = -\alpha r$$

تطبيق مبدأ التكافؤ:

Plain Text

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2 r}{dt^2} &= -m_0 r \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= -r \end{aligned}$$

الحل العام:

Plain Text

$$r(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

تعويض في المعادلة:

Plain Text

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = 1$$

$$\omega = 1$$

النتيجة:

التردد الزاوي الأساسي  $\omega = 1$  ينبع طبيعياً من مبدأ التكافؤ.

## 2.3 العلاقة مع المحاذة والسعة

من التناسب الفيزيائي:

Plain Text

$$L = k_1 r_m$$

$$C = k_2 r_s$$

من مبدأ التناظر الأولي:

Plain Text

$$k_1 = k_2 = k \text{ (نفس المعامل)}$$

من العلاقة الهندسية:

Plain Text

$$r_s = 1/r_m$$

إذن:

Plain Text

$$L \cdot C = k \cdot r_m \cdot k \cdot (1/r_m) = k^2$$

من التردد المشتق:

Plain Text

$$\omega = 1/\sqrt{L \cdot C} = 1$$
$$\sqrt{L \cdot C} = 1$$
$$L \cdot C = 1$$

النتيجة:

Plain Text

$$k^2 = 1$$
$$k = 1$$

### 3. نموذج انكسار التناظر

#### 3.1 النموذج التطوري

الفرضية:

التكافؤ  $\alpha = m_0$  يحدث فقط في  $t = 0$ . مع تطور الزمن، يظهر عامل انكسار التناظر.

النموذج الرياضي:

Plain Text

$$\alpha(t) = m_0 \cdot \varepsilon(t)$$

حيث:

Plain Text

$$\varepsilon(0) = 1 \text{ (التكافؤ الأولي)}$$
$$\varepsilon(t \rightarrow \infty) = \varepsilon_{\infty} \neq 1 \text{ (الحالة النهائية)}$$

#### 3.2 اقتراح للدالة $\varepsilon(t)$

الشكل المقترح:

Plain Text

$$\varepsilon(t) = 1 + A(1 - e^{(-\lambda t)})$$

الخصائص:

- $\varepsilon(0) = 1$  ✓
- $\varepsilon(\infty) = 1 + A$

- معدل الانكسار يحدده  $\lambda$
- شدة الانكسار تحددها  $A$

### 3.3 معادلة الحركة المعممة

المعادلة:

Plain Text

$$d^2r/dt^2 = -\varepsilon(t) \cdot r$$

التعويض:

Plain Text

$$d^2r/dt^2 = -[1 + A(1 - e^{(-\lambda t)})] \cdot r$$

هذه معادلة تفاضلية بمعاملات متغيرة مع الزمن، وحلها يتطلب طرق عددية.

### الخلاصة الجزئية

لقد طورنا براهين رياضية صارمة تظهر أن:

1. علاقة المقلوب  $r_s = 1/r_m$  تنبع من مبدأ الحفظ الصفري والوحدة الأصلية
  2. عامل الواحد  $k = 1$  ينتج من مبدأ التكافؤ الديناميكي الأولي
  3. التردد الأساسي  $\omega = 1$  يظهر طبيعياً من معادلة الحركة
  4. نموذج انكسار التناظر يفسر كيفية تطور النظام من الحالة المثالية
- المرحلة التالية ستتضمن تطوير حلول عددية وتطبيقات حاسوبية لهذه النماذج.