



Mathematical Background of Einstein's Field Equations

Graduation Presentation

Mücahit Kaya
`mucahit.kaya@std.yildiz.edu.tr`

Yıldız Teknik Üniversitesi Fizik Bölümü

2023



YTÜ YILDIZ TEKNİK
ÜNİVERSİTESİ



Özet

İnsanoğlunun doğayı ve doğadaki olguları açıklama serüveni, insanlık tarihi kadar eski bir geçmişe sahiptir. Bu serüvenin en önemli kilometre taşlarından biri, Isaac Newton'un 1687 yılında yayınlamış olduğu *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri) ile birlikte yerçekimini ve cisimlerin hareketini bilimsel metedolojiye dayanarak matematik formülleri ile açıkla-yabilmesi olmuştur. İnsanoğlunun doğayı ve doğadaki olguları açıklama serüveni, insanlık tarihi kadar eski bir geçmişe sahiptir. Bu serüvenin en önemli kilometre taşlarından biri, Isaac Newton'un 1687 yılında yayınlamış olduğu *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri) ile birlikte yerçekimini ve cisimlerin hareketini bilimsel metedolojiye dayanarak matematik formülleri ile açıkla-yabilmesi olmuştur.



İçindekiler

1 Giriş

Giriş

Einstein Alan Denklemleri
Metrik Tensör

Genel Görelilik

Depo



Giriş

1 Giriş

İnsanoğlunun doğayı ve doğadaki olguları açıklama serüveni, insanlık tarihi kadar eski bir geçmişe sahiptir. Bu serüvenin en önemli kilometre taşlarından biri, Isaac Newton'un 1687 yılında yayınlamış olduğu *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (*Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri*) ile birlikte yerçekimini ve cisimlerin hareketini bilimsel metedolojiye dayanarak matematik formülleri ile açıkla-yabilmesi olmuştur.



Giriş

1 Giriş

$$F_{(grav)} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

Kütle Çekim Yasası1 olarak bilinen ve iki cismin kütleleri sebebiyle birbirlerine uyguladıkları çekim kuvvetini açıklayan bu yasa, kütlesi az olan cisimler için gözlemlenebilir olmasa da gezegenler gibi makroskopik cisimlerin uzaydaki hareketini açıklayabilmekte ve gözlemler ile kendini iki yüzyıla aşkın bir süredir doğrulamaktaydı. Fakat her ne kadar Newton'un Kütle Çekim Yasası matematiksel olarak oldukça sade bir yapıda olsa da, 19. yüzyılın sonlarında yapılan gözlemler sayesinde kusurlarının olduğu akıllarda yer edinmeye başlamıştır. Merkür gezegenin günberi noktasında sergilemiş olduğu yalpalama hareketi, iki cismin kütleleri sebebiyle neden birbirlerini karşı kuvvet uyguladıkları gibi soruları cevaplamakta yetersiz kalan Kütle Çekim yasası, dönemin fizikçilerini yeni bir teori arayışına itmiştir.



İçindekiler

2 Einstein Alan Denklemleri

Giriş

Einstein Alan Denklemleri
Metrik Tensör

Genel Görelilik

Depo



Alan Denklemlerine Giriş

2 Einstein Alan Denklemleri

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2)$$

1915 yılında yayınlanan Einstein Alan Denklemleri (EFE)2, Newton'un çekim yasasının aksine, cisimlerin hareketini bir kuvvet etki etkisi nedeniyle olmadığını, 3 boyulu öklidyen uzayın aslında zaman boyutu ile birlikte ele alınması gerektiğini öne sürmüştü ve uzay-zaman olarak evreni açıklamıştır. Cisimlerin bulunduğu uzay her yerde izotropik özellikte olmayıp, cisimlerin sahip olduğu kütleleri tarafından uzayın bükülmesi sonucu bu eğrilikler üzerinde hareket etmeleri ile açıklanmaktadır.[?] Daha yalın bir şekilde kim tarafından ifade edildiği tam olarak bilinemesi de bu ünlü benzetme ile açıklanabilir;

Madde uzay-zamana nasıl büküleceğini söylüyor, uzay-zaman da maddeye nasıl hareket etmesi gerektiğini.



Metrik Tensör

2 Einstein Alan Denklemleri

Sonsuz küçüklükteki yer değiştirme vektörü \vec{dl} şu şekilde üç boyutlu uzay için tanımlanabilir:

$$\vec{dl} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$



Sample frame title

3 Genel Görelilik

This is some text in the first frame. This is some text in the first frame. This is some text in the first frame.



Sample frame title

4 Depo

This is some text in the first frame. This is some text in the first frame. This is some text in the first frame.



There Is No Largest Prime Number

4 Depo

Theorem

There is no largest prime number.

Kanıt.

1. Suppose p were the largest prime number.
- 2.
- 3.
4. But $q + 1$ is greater than 1, thus divisible by some prime number not in the first p numbers. □

Open Questions

Is every even number the sum of two primes? [1]



There Is No Largest Prime Number

4 Depo

Theorem

There is no largest prime number.

Kanıt.

1. Suppose p were the largest prime number.
2. Let q be the product of the first p numbers.
3. $q + 1$ is greater than 1, thus divisible by some prime number not in the first p numbers.
4. But $q + 1$ is greater than 1, thus divisible by some prime number not in the first p numbers. □

Open Questions

Is every even number the sum of two primes? [1]



There Is No Largest Prime Number

4 Depo

Theorem

There is no largest prime number.

Kanıt.

1. Suppose p were the largest prime number.
2. Let q be the product of the first p numbers.
3. Then $q + 1$ is not divisible by any of them.
4. But $q + 1$ is greater than 1, thus divisible by some prime number not in the first p numbers. □

Open Questions

Is every even number the sum of two primes? [1]



There Is No Largest Prime Number

4 Depo

Theorem

There is no largest prime number.

Kanıt.

1. Suppose p were the largest prime number.
2. Let q be the product of the first p numbers.
3. Then $q + 1$ is not divisible by any of them.
4. But $q + 1$ is greater than 1, thus divisible by some prime number not in the first p numbers. □

The proof used *reductio ad absurdum*.

Open Questions

Is every even number the sum of two primes? [1]



What's Still To Do?

4 Depo

Answered Questions

How many primes are there?

Open Questions

Is every even number the sum of two primes?



What Are Prime Numbers?

4 Depo

Definition

A **prime number** is a number that has exactly two divisors.

Example

- ▶ 2 is prime (two divisors: 1 and 2).
- ▶ 3 is prime (two divisors: 1 and 3).
- ▶ 4 is not prime (**three** divisors: 1, 2, and 4).



[Goldbach, 1742] Christian Goldbach.

A problem we should try to solve before the ISPN '43 deadline,
Letter to Leonhard Euler, 1742.



An Algorithm For Finding Prime Numbers.

4 Depo

```
int main (void)
{
    std::vector<bool> is_prime (100, true);
    for (int i = 2; i < 100; i++)
        if (is_prime[i])
        {
            std::cout << i << " ";
            for (int j = i; j < 100; is_prime [j] = false, j+=i);
        }
    return 0;
}
```



An Algorithm For Finding Prime Numbers.

4 Depo

```
int main (void)
{
    std::vector<bool> is_prime (100, true);
    for (int i = 2; i < 100; i++)
        if (is_prime[i])
        {
            std::cout << i << " ";
            for (int j = i; j < 100; is_prime [j] = false, j+=i);
        }
    return 0;
}
```

Note the use of std::.