**Dr.Gültac Eroğlu İnan**

## RASGELE DEĞİŞKEN: KESİKLİ/ SÜREKLİ

Bir örnek uzaydaki her rasgele noktaya sayısal bir değer atayan bir fonksiyondur. Rasgele değişken $X, Y, Z$ gibi büyük harflerle gösterilir. Rasgele değişkenin alabileceği değerler küçük $x, y, z$ harfleri ile gösterilir. $X$ rasgele değişkeni

$$\boldsymbol{X} \ : \boldsymbol{\Omega} \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{w} \ \rightarrow \boldsymbol{X}(\boldsymbol{w})$$

Olarak gösterilir. Burada;

$D_X$: $X$ ragele değişkeninin değer kümesi. İki tip rasgele değişken vardır: Kesikli / Sürekli

**Tanımlar:**

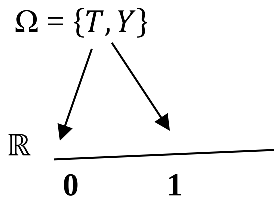
**Kesikli Rasgele Değişken:** Eğer $D_X$ **sayılabilir ise ( sonlu/sonsuz)** $X$ ‘e kesikli rasgele değişken denir.

**Sürekli Rasgele Değişken:** Eğer $D_X$ **sayılamaz ise .** Rasgele değişkenin mümkün değerleri bir aralıktan ya da aralıklar koleksiyonundan oluşuyor ise $X$ ‘e sürekli rasgele değişekn denir .

**<u>Örnekler:</u>**

**1-**Deney : Para atışı

$X$: Yazıların sayısı



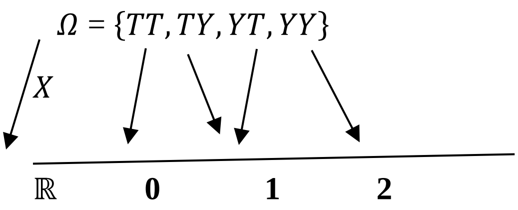
**2-**Deney: Bir paranın iki kez atılması **GEİ**

$X$: Yazıların sayı

**<u>Örnek uzay:</u>**

$\Omega = \{TT, TY, YT, YY\}$

$n(\Omega) = 4$




$D_X = \{0,1,2\}$ örnek olarak olasılık hesapları;

$P(X > 2) = 0$ $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = P(\{TY, YT\}) + P(\{YY\}) = 3/4$

**3- Öğrenci:**

Deney: Bir paranın 3 kez atılması . Örneğe benzer olarak rasgele değişkeni gösteriniz. Olasılıklar tanımlayıp hesaplayınız.

**4. Öğrenci ( Ödev)**
**GEİ**

Deney  : İki paranın aynı anda atılması

Örneğe benzer olarak rasgele değişkeni gösteriniz. Olasılıklar tanımlayıp hesaplayınız.

**İlk olarak kesikli rasgele değişken ile çalışacağız.** **GEİ**

**Tanım:**

**<u>Olasılık fonksiyonu:</u>**

$X$ kesikli rasgele değişken olduğunda;

$f_X(x) = P(X = x),\ x\epsilon D_X$

Fonksiyonuna $X$ ‘in **olasılık fonksiyonu (of)** denir.

**Örnekler:**

**1.**

$\boldsymbol{D_x = \{0, 1\} \rightarrow D_x}$**sayılabilir sonlu, $\boldsymbol{X}$ kesikli**

$f_X(x) = P(X = x)$

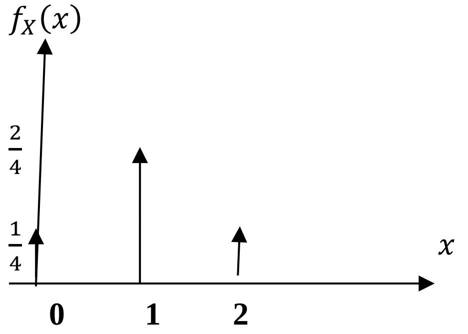
| $X = x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

**2.**

$\boldsymbol{D_x = \{0, 1, 2\}}$

$f_X(x) = P(X = x)$

| $X = x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |



**3.** **GEİ**

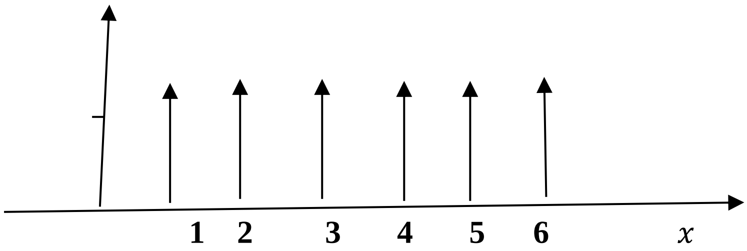
Deney: Zar atışı

$X$ : Üste gelen nokta sayısı

$D_x$ = {1,2,3,4,5,6}

$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}$ $\quad x \in \boldsymbol{D_x} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}$→ $\boldsymbol{D_x}$**sayılabilir sonlu,** $\boldsymbol{X}$ **kesikli**

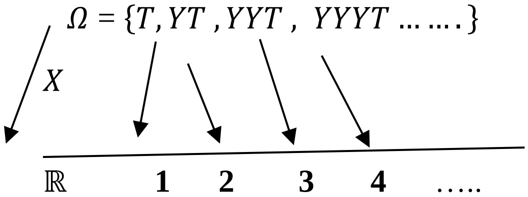
Olasılık fonksiyonu grafiği,




**4.** İl tura gelene kadar bir para atılsın.

$X$ : Atış sayısı

$\Omega = \{T, YT, YYT, YYYT \ldots \ldots\}$




$\boldsymbol{D_x} = \{\mathbf{1, 2, 3}, \ldots\}$ → $\boldsymbol{D_x}$ **sayılabilir sonsuz,** $\boldsymbol{X}$ **kesikli.**

**Olasılık fonksiyonunun özellikleri:** $X$ kesikli rasgele değişken , $f(x)$ olasılık fonksiyonu,

**1.** $f(x)>0, \ x \epsilon D_x$

**2.** $\sum_{x \epsilon D_x} f(x)=1$

**Örnekler:** **GEİ**

1. $X$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = cx^2 \quad D_X = \{-2,-1,1,2\}$$

**a.** $c$ =?
**b.** Olasılık fonksiyonunu oluşturunuz. **( tablo ve grafik)**
**c.** İlgili olasılıkları hesaplayınız.

$P(X > 2)$ =? $P(X \geq 1)$ =? $P(0 < X \leq 2)$ =?

**<u>Çözüm:</u>**

a .$\sum_{-2}^{2} cx^2$=1 → $c = \frac{1}{10}$

b. Olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{10}, & x = -2 \\ \frac{1}{10}, & x = -1 \\ \frac{1}{10}, & x = 1 \\ \frac{4}{10}, & x = 2 \end{cases}$$

| $X = x$ | -2 | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{4}{10}$ |

**c.** $P(X > 2) = 0$ , $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = f(1) + f(2) = \frac{5}{10}$

**Öğrenci:** **GEİ**

2. $X$ rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$f(x) = c \quad D_X = \{-1,0,1,2\}$

**d.** $c$ =?
**e.** Olasılık fonksiyonunu oluşturunuz. **( tablo ve grafik)**
**f.** İlgili olasılıkları hesaplayınız.

$P(X > 2)$ =? $P(X \geq 1)$ =? $P(0 < X \leq 2)$ =?

****Şimdi sürekli rasgele değişken ile çalışacağız.** **GEİ**

$X$ sürekli rasgele değişken olduğunda;

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

olacak şekilde bir $f$ fonksiyonu varsa; bu fonksiyona

$X$ rasgele değişkeninin **olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf)** denir.

**Olasılık yoğunluk fonksiyonunun özellikleri:** $X$ sürekli rasgele değişken , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu,

**1.** $f(x) \geq 0$

**2.** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

**Örnekler:**

$X$ sürekli bir rasgele değişken, oyf ,

**1.** $f(x) = \begin{cases} cx^2, \ldots 0 < x < 1 \\ 0, \ldots diğer\ yerlerde \end{cases}$

**a.** $c = ?$
**b.** $P(0 < X \leq 0.5) = ?$
**c.** $P(X \geq 1) = ?$
**d.** $P(X \leq 1) = ?$

**Çözüm:**

**a.** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\infty} f(x)dx = 1$

$\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^1 cx^2dx + \int_1^{\infty} 0dx = 1 \rightarrow 0 + \int_0^1 cx^2dx + 0 = 1 \rightarrow c = 3$

**b.** $P(0 < X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} 3x^2 dx = 1/8$

**c.** $P(X \geq 1) = \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} 0\, dx = 0$ **GEI**

**d.** $P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x)dx = 1$

**2.Öğrenci**

$X$ sürekli bir rasgele değişken, oyf ,

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, \ldots -1 \leq \mathrm{x} \leq 1 \\ 0, \ldots diğer\ yerlerde \end{cases}$$

**e.** $c$ =?

**b.** $P(X \leq 0)$ =?

$P(X \leq 2)$ =?

$P(X \geq 2)$ =?

$P(0 < X \leq 1) = ?$

$P(X \leq 1.5)$ =?

$P(0 < X \leq 2) = ?$