İst 250: Olasılık ve İstatistik

Dr.Gültaç E.İNAN

Bazı Sürekli Özel Rasgele Değişkenler:

Normal Rasgele Değişken :

Standard Normal Rasgele Değişken:

***t* Rasgele Değişkeni:**

Normal Rasgele Değişken :

Normal dağılım hem uygulamalı hem de teorik istatistikte kullanılan oldukça önemli bir dağılımdır. Normal dağılımın istatistikte önemli bir yerinin olmasının nedeni, yapılan birçok gözlem sonucunun, çan biçiminde bir dağılım vermesi ve çoğu dağılımın denek sayısı arttıkça normal dağılıma yaklaşmasıdır.

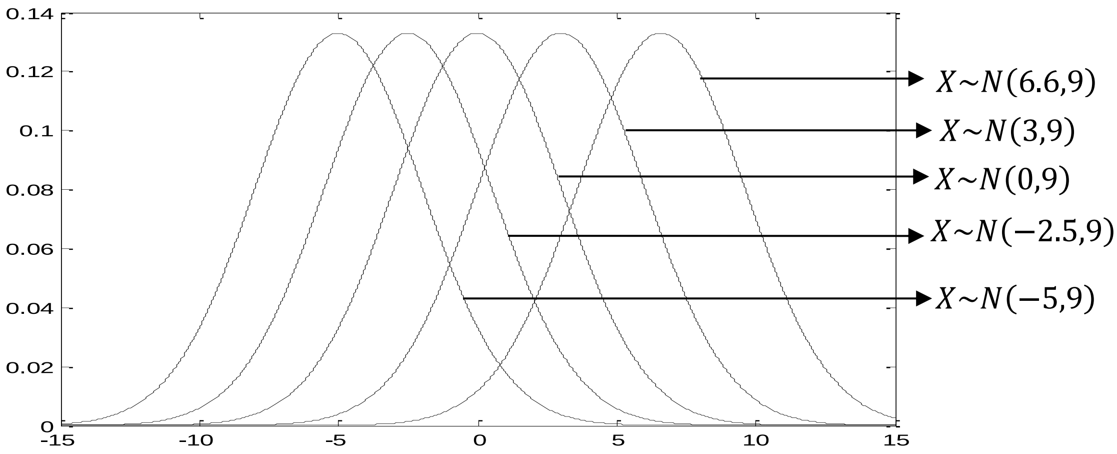
Sürekli bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$$

μ: ortalama (parametre)
σ^2: varyans(parametre)
$\mathrm{e} = 2.71825$
$\pi = 3.1416$

Notasyon: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Normal rasgele değişkenin farklı $\mu = -5, -2.5, 0, 3, 6.6$ beklenen değerleri ve $\sigma^2 = 9$ varyansı için olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği;



(Öztürk 2010).

Normal Rasgele Değişkenin Özellikleri:

1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

2. Normal dağılım ortalamaya göre simetriktir. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

$\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$ olan normal dağılıma **standart normal dağılım** denir. Standart normal dağılıma sahip rasgele değişken genellikle *Z* harfi ile gösterilir.

<u>Notasyon:</u> $Z \sim N(0,1)$

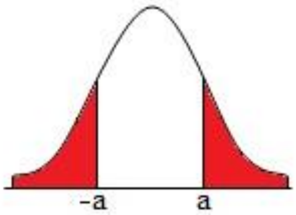
Z rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, -\infty < z < \infty$$

<u>Transformasyon:</u>

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standart normal rasgele değişkendir.

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P(Z \leq z) \end{aligned}$$



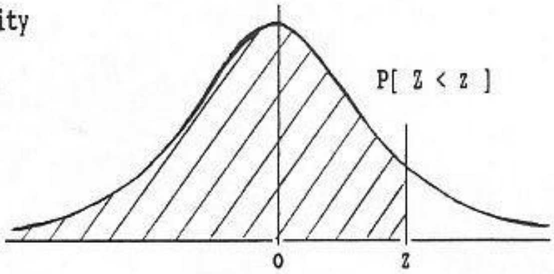
$$\begin{aligned} P(Z \leq -a) &= P(Z \geq a) \\ &= 1 - P(Z < a) \end{aligned}$$

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z
i.e.

$$P[\ Z < z\ ] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}Z^2)\ dZ$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

Örnekler: Tabloyu Okuma

1.

$P(Z < 1.5) = 0.9332 \rightarrow P(Z > 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

$P(Z < 2.2) = 0.9861 \rightarrow P(Z > 2.2) = 1 - 0.9861 = 0.0139$

$P(Z < 0.42) = 0.6628 \rightarrow P(Z > 0.42) = 1 - 0.6628 = 0.3372$

$P(Z < 1.53) = 0.9370 \rightarrow P(Z > 1.53) = 1 - 0.9370 = 0.0630$

2. $P(Z < a) = 0.9878 \rightarrow a = 2.25$

3. $P(Z > a) = 0.0301 \rightarrow P(Z < a) = 0.9699 \rightarrow a = 1.88$

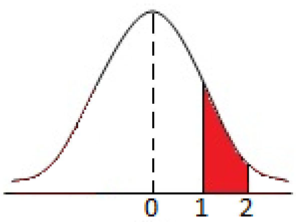
4. Öğrenci

*$P(Z > 1.36)$ =?

$* \ P(Z < a) = 0.8264 \rightarrow a$ =?

* $P(Z > a) = 0.0495 \rightarrow a$ =?

5. $P(1 < Z < 2)$ =?

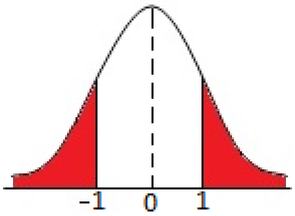


$P(1 < Z < 2) = P(0 < Z < 2) - P(0 < Z < 1)$

$= 0.4773 - 0.3413$

=0.036

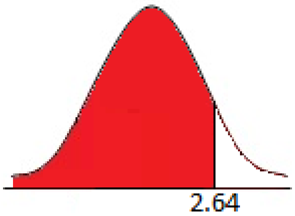
6. $P(Z < -1) =?$



$P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1)$

=1-0.8413=0.1587

7. $P(Z > -2.64) =?$



$P(Z > -2.64) = P(Z < 2.64)$=0.9959

8. $P(-1.32 < Z < 2.87) = P(Z < 2.87) - P(Z < -1.32)$

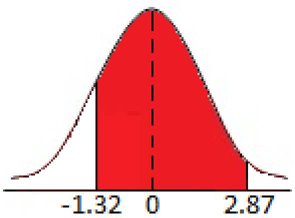
=$P(Z < 2.87) - P(Z > 1.32)$

= $P(Z < 2.87) - \big(1 - P(Z < 1.32)\big)$

= $P(Z < 1.32) + P(Z < 2.87) - 1$

=0.9066+0.9980-1

=0.9046



9. $P(-3 < Z < 3) = 2 * P(0 < Z < 3)$

=2*0.4986

=0.9972

Öğrenci:

10. $P(-2.87 < Z < -1.32) = ?$

11. $P(-1.32 < Z < 0) = ?$

12. $P(-1.32 < Z < a) = 0.1269 \rightarrow a = ?$

13. $P(Z < a) = 0.1269 \rightarrow a = ?$

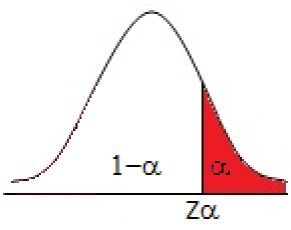
14. $P(0 < Z < a) = 0.4032 \rightarrow a = ?$

<u>Transformasyon :*X* den *Z* 'ye</u>

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal rasgele değişken$\rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standard normal rasgele değişken.

<u>Yüzdelik:</u>

$1-\alpha$. yüzdelik: (z_α) ; Gözlemlerin $1-\alpha$% kadarı bu değerin altındadır.



$P(Z > z_\alpha) = \alpha$

$P(Z < z_\alpha) = 1-\alpha \rightarrow z_\alpha$: $1-\alpha$. yüzdelik

<u>Örnek:</u> $90th$ yüzdelik

$P(Z < z_{0.10}) = 0.90 \rightarrow z_{0.10}$: 90. yüzdelik

Örnekler: En çok kullanılan α Değerleri için

1.

$P(Z < z_{0.05}) = 0.95$ (**95. yüzdelik)**

$z_{0.05} = 1.645$ $\left(1.64 + \frac{1.65}{2} = \mathbf{1.645}\right)$

2. (975.yüzdelik)

$P(Z < z_{0.025}) = 0.975 \rightarrow \boldsymbol{z_{0.025}}$**=1.96**

3. (90.yüzdelik)

$P(Z < z_{0.10}) = 0.90$

$$\boldsymbol{z_{0.10}} = \frac{(1.28 + 1.29)}{2} = \mathbf{1.285}$$

<u>Örnekler:</u>

X : Bir pilin ömrü

$X \sim N(\mu = 35\ gün, \sigma^2 = 16 gün)$

a. Rasgele seçilen bir pil için $P(X > 45)$ (pilin ömrünün 45 günden uzun olması)

<u>Çözüm:</u>

$$P\left(\frac{X - 35}{4} \geq \frac{45 - 35}{4}\right) = P(Z \geq 2.5) = 1 - P(Z < 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

b. $P(40 < X < 45) = P\left(\frac{40-35}{4} < Z < \frac{45-35}{4}\right) = P\left(\frac{5}{4} < X < \frac{10}{4}\right)$

$= P(1.25 < Z < 2.5)$

$= P(Z < 2.5)$- $P(Z < 1.25)$

=0.9938-0.8944

=0.0994

c.Öğrenci

$P(X < 40)$ =?

d. 95.yüzdelik of X=?

$P(X < x) = 0.95 \rightarrow x$ =?

Çözüm:

$P(Z < a) = 0.95 \rightarrow a = z_{0.05} = 1.645$

$$a = 1.645 \rightarrow 1.645 = \frac{x - 35}{4} \rightarrow x = 1.645 * 4 + 35 \rightarrow x = 41.58$$

e. 90.yüzdelik of X=?

Örnek: Öğrenci

X: Belirli bir tür bilgisayarı kurmak için gerekli zaman

$X \sim N(\mu = 50\ dakika, \sigma^2 = 10\ dakika)$

İlgili olasılıkları hesaplayınız.

a. $P(40 < X < 60)$

b. Bazı olasılıklar tanımlayıp hesaplayınız.

c. X ‘in 95.yüzdeliği