İST 250 OLASILIK VE İSTATİSTİK

İÇERİK :

- Deney, Örnek Uzay, Olay
- Olayların Olasılığı
- Bağımsız ve Ayrık Olaylar
- Rasgele Değişken
- Kesikli Rasgele Değişken
- Bir Kesikli Rasgele Değişkenin Olasılık Fonksiyonu
- Beklenen Değer Varyans
- Sürekli Rasgele Değişken
- Bir Sürekli Rasgele Değişkenin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
- Beklenen Değer ve Varyans
- Bazı Özel Kesikli Rasgele Değişkenler (Bernoulli , Binom, Poisson, Geometrik)
- Bazı Özel Sürekli Rasgele Değişkenler (Normal, Standard Normal)
- Örnekleme Teorisi: Merkezi Dağılım ve Eğilim Ölçüleri
- Güven Aralıkları
- Hipotez Testleri
- Regresyon

KAYNAKLAR:

Mühendisler için Olasılık ve İstatistik : Prof.Dr. M.Akif Bakır

Olasılık ve İstatistik: Fikri Akdeniz

Uygulamalı İstatistik: Prof.Dr Aysen Apaydın-Prof.Dr.Cemal Atakan

1.Tanımlar :

1.İstatistiksel Deney: Sonuçlarının kümesi belli olan, ancak hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden söylenemeyen bir işleme denir.

1.2.Örnek Uzay: Bir deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine denir**.** S veya Ω ile gösterilir.

1.3.Olay: Örnek uzayın bir alt kümesine denir. n elemanlı bir küme için,

Olayların sayısı: 2^n

ÖRNEKLER:

1- Deney : Para atışı

Örnek Uzay:

$\Omega = \{T, Y\}$

Tura Yazı

Olaylar :

$A_1 = \{Y\}$, Atış Yazı

$A_2 = \{T\}$, Atış Tura

$A_3 = \{\emptyset\}$

$A_4 = \{Y, T\}$, Yazı ya da Tura

2- Deney : Bir paranın 2 defa atılması

Örnek Uzay

$\Omega = \{TT, TY, YT, YY\}$

$n(\Omega) = 4$ (Eleman sayısı)

Olaylar:

$A = \{TT\}$

$A = \{TY\}$

$A = \{YT\}$

$A = \{YY\}$

$A = \{TT, TY\}$

.

. Olayların sayısı $2^4 = 16$

.

$A = \Omega$

A: İlk atış yazı

$A = \{YT, YY\}$

B: Ikinci atışın tura olması olayı.

$B = \{TT, YT\}$

C: İlk atışın tura ikinci atışın yazı olması olayı.

$C = \{TY\}$

D: En az bir tura gelmesi olayı.

$D = \{TT, TY, YT\}$

3- Deney : Bir paranın 3 defa atılması olayı.

<u>Örnek Uzay:</u>

$\Omega = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, YYY\}$

$n(\Omega) = 8$ (Eleman sayısı)

Olayların sayısı: $2^8 = 64$

A : 1. atışın yazı olması olayı

$$A = \{YYY, YYT, YTY, YTT\}$$

4- Deney : İki paranın aynı anda atılması

Örnek Uzay:

$\Omega = \{TT, TY, YY\}$

$n(\Omega) = 3$ (Eleman sayısı)

TT: İki tane tura

TY: Bir yazı bir tura (YT ya da TY, aynı anlamda)

YY: İki tane yazı

Burada sadece **sayıları** gözlemleyebiliriz.

Olaylar:

$A = \{TT\}$

$A = \{TY\}$

$A = \{YY\}$

$A = \{TT, TY\}$

.

.

.

.

$A = \Omega$

Olaylarin sayısı: $2^3 = 8$

Öğrenci:

5. Deney : Üç paranın aynı anda atılması. Örnek uzayı yazınız ve olayları tanımlayınız.

$\Omega =$……………………

$n(\Omega) =$ ……………………

Olaylar:

Olayların sayısı:

6. Deney : Bir zarın atılması olayı.

<u>Örnek Uzay</u>

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

<u>Olaylar:</u>

$A = \{1\}$

$A = \{2\}$

$A = \{3\}$

.

.

.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Olaylarin sayısı: $2^6 = 64$

7. Deney : Bir zarın 2 defa atılması olayı.

<u>Örnek Uzay</u>

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$

$n(\Omega) = 36$

Olaylarin sayısı: 2^{36}

Öğrenci:

Deney : İki zarın aynı anda atılması olayı.

$\Omega =$……………………

$n(\Omega) =$ ……………………

<u>Olaylar</u>

Olayların sayısı ……………..

Küme -Olay Operatörleri:

1. A olayının tümleyeni: Ω nın elemanı olup A nın elemanı olmayan elemanların kümesi. A^C ile gösterilir.

2. A kesişim B: Hem A hem de B kümesinde yer alan elemanların kümesi: $A \cap B$.

3. A birleşim B: A veya B kümesinde yer alan elemanların kümesi: $A \cup B$.

4. Eğer $A \cap B=\emptyset$; iki olay **ayrıktır.**

Örnekler:

Deney : Bir paranın 3 defa atılması olayı.

$$\Omega = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, TTT\}$$

A: İlk atışın yazı olması olayı

$A = \{YYY, YYT, YTY, YTT\}$

$A^c = \{TYY, TYT, TTY, TTT\}$

B: 3. atış tura

$B = \{YYT, YTT, TYT, TTT\}$

$A \cap B$: İlk atış yazı, sonuncu tura.

$A \cap B=\{YYT, YTT\} \rightarrow \boldsymbol{A, B}$ **ayrık değildir.**

$A \cup B$: İlk atış yazı veya sonuncu tura.

$A \cup B$=$\{YYY, YYT, YTY, YTT, TYT, TTT\}$

Bir Olayın Olasılığı:

Bir A olayının olasılığı

P(A)= $\frac{n}{N}$

dır.Burada;

n : A kümesinin eleman sayısı.

N : Ω örnek uzayın elaman sayısı.

Olasılık Aksiyomları:

Herhangi bir A olayı için;

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$
3. A olayının tümleyeni (A^c) olayının olasılığı;

$P(A^c) = 1 - P(A)$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. A ve B ayrık olaylar ise;

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(Çünkü; $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$)

Bağımsız Olaylar: Herhangi bir A, B $(A, B \neq \emptyset)$ olayları için; Eğer

$P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

olarak yazılabiliyorsa,

İki olay birbirinden bağımsızdır denir.

Not: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ve ayrık olaylar ise bağımsız olamazlar.

<u>Örnekler:</u>

1. Deney : Bir paranın 2 defa atılması.

<u>Örnek Uzay:</u>

$\Omega = \{TT, TY, YT, YY\}$ $N = 4$

A: 1.atış tura

$A = \{TT, TY\}$, $n = 2$

$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{2}{4}$

B: 2.atış yazı

$B = \{TY, YY\}$

$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{2}{4}$

$A \cap B$=$\{TY\}$

$P(A \cap B) = \frac{n}{N} = \frac{1}{4}$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ayrık değildir.

$A \cap B \neq \emptyset$;

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ birbirlerinden bağımsızdır.

2.Deney: Bir paranın 3 defa atılması

Örnek Uzay:

$$\Omega = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, YYY\}$$

<u>Öğrenci:</u>

A: En fazla iki sefer yazı gelmesi

$A =$

$P(A)$=

B: En fazla iki sefer tura gelmesi.

$B =$

$P(B)$=

Bağımsız olaylar mıdır?

Öğrenci:

3. Deney: Üç paranın aynı anda atılması.

Bazı olaylar tanımlayıp olasılıklarını hesaplayınız.

4. Deney: Bir zarın iki defa atılmas

<u>Örnek Uzay:</u>

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$$

A: Üste gelen noktaların toplamının yedi olması.

$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\ \}\ n = 6$

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

B: Üste gelen noktaların toplamının tek sayı olması.

$B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),..(6,5)\ \}$

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

5. Deney: İki zarın aynı anda atılması

A: Yüzeydeki noktaların toplamının yedi olması.

$A =$

$P(A) =$

B: Yüzeydeki noktaların toplamının tek sayı olması.

$B =$

$P(B) =$

Bazı olaylar tanımlayıp olasılıklarını hesaplayınız.

Dr.Gültac Eroğlu İnan

RASGELE DEĞİŞKEN: KESİKLİ/ SÜREKLİ

Bir örnek uzaydaki her rasgele noktaya sayısal bir değer atayan bir fonksiyondur. Rasgele değişken X, Y, Z gibi büyük harflerle gösterilir. Rasgele değişkenin alabileceği değerler küçük x, y, z harfleri ile gösterilir. X rasgele değişkeni

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} \;:\; \boldsymbol{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{w} &\rightarrow \boldsymbol{X}(\boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

Olarak gösterilir. Burada;

D_X: X ragele değişkeninin değer kümesi. İki tip rasgele değişken vardır: Kesikli / Sürekli

Tanımlar:

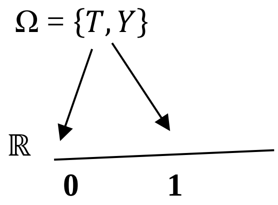
Kesikli Rasgele Değişken: Eğer D_X **sayılabilir ise (sonlu/sonsuz)** X ‘e kesikli rasgele değişken denir.

Sürekli Rasgele Değişken: Eğer D_X **sayılamaz ise .** Rasgele değişkenin mümkün değerleri bir aralıktan ya da aralıklar koleksiyonundan oluşuyor ise X ‘e sürekli rasgele değişekn denir .

Örnekler:

1-Deney : Para atışı

X: Yazıların sayısı



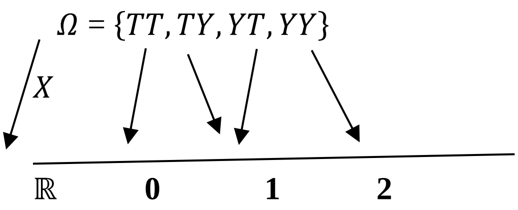
2-Deney: Bir paranın iki kez atılması **GEİ**

X: Yazıların sayı

<u>Örnek uzay:</u>

$\Omega = \{TT, TY, YT, YY\}$

$n(\Omega) = 4$



$D_X = \{0,1,2\}$ örnek olarak olasılık hesapları;

$P(X > 2) = 0$ $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = P(\{TY, YT\}) + P(\{YY\}) = 3/4$

3- Öğrenci:

Deney: Bir paranın 3 kez atılması . Örneğe benzer olarak rasgele değişkeni gösteriniz. Olasılıklar tanımlayıp hesaplayınız.

4. Öğrenci (Ödev)
GEİ

Deney : İki paranın aynı anda atılması

Örneğe benzer olarak rasgele değişkeni gösteriniz. Olasılıklar tanımlayıp hesaplayınız.

****İlk olarak kesikli rasgele değişken ile çalışacağız.** **GEİ**

Tanım:

<u>Olasılık fonksiyonu:</u>

X kesikli rasgele değişken olduğunda;

$f_X(x) = P(X = x), x\epsilon D_X$

Fonksiyonuna X ‘in **olasılık fonksiyonu (of)** denir.

Örnekler:

1.

$\boldsymbol{D_x = \{0, 1\}} \rightarrow \boldsymbol{D_x}$**sayılabilir sonlu,** $\boldsymbol{X}$ **kesikli**

$f_X(x) = P(X = x)$

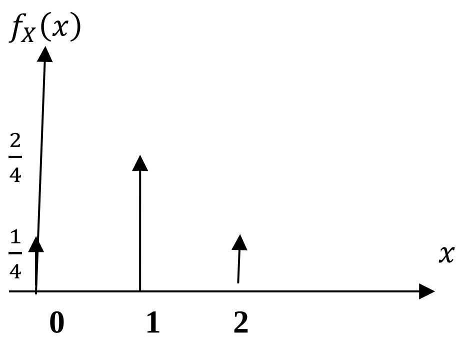
$X = x$	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2.

$\boldsymbol{D_x = \{0, 1, 2\}}$

$f_X(x) = P(X = x)$

$X = x$	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$



3. **GEİ**

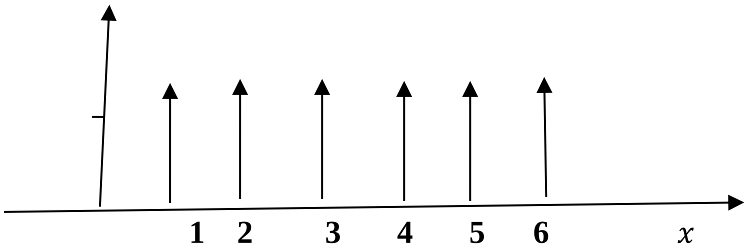
Deney: Zar atışı

X : Üste gelen nokta sayısı

D_x = {1,2,3,4,5,6}

$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}$ $x \in$ $\boldsymbol{D_x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$**→** $\boldsymbol{D_x}$**sayılabilir sonlu,** $\boldsymbol{X}$ **kesikli**

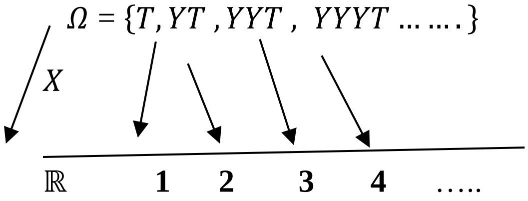
Olasılık fonksiyonu grafiği,



4. İl tura gelene kadar bir para atılsın.

X : Atış sayısı

$\Omega = \{T, YT\ , YYT\ ,\ YYYT\ \ldots \ldots.\}$



$\boldsymbol{D_x = \{1, 2, 3, \ldots.\}}$ **→** $\boldsymbol{D_x}$ **sayılabilir sonsuz,** $\boldsymbol{X}$ **kesikli.**

Olasılık fonksiyonunun özellikleri: X kesikli rasgele değişken , $f(x)$ olasılık fonksiyonu,

1. $f(x)$>0, $x \epsilon D_x$

2. $\sum_{x \epsilon D_x} f(x)$=1

Örnekler: **GEİ**

1. X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

   $f(x) = cx^2 \quad D_X = \{-2,-1,1,2\}$

a. c =?
b. Olasılık fonksiyonunu oluşturunuz. **(tablo ve grafik)**
c. İlgili olasılıkları hesaplayınız.

$P(X > 2)$ =? $P(X \geq 1)$ =? $P(0 < X \leq 2)$ =?

<u>Çözüm:</u>

a .$\sum_{-2}^{2} cx^2$=1 → $c = \frac{1}{10}$

b. Olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{10}, & x = -2 \\ \frac{1}{10}, & x = -1 \\ \frac{1}{10}, & x = 1 \\ \frac{4}{10}, & x = 2 \end{cases}$$

$X = x$	-2	-1	1	2
$P(X = x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$

c. $P(X > 2) = 0$, $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = f(1) + f(2) = \frac{5}{10}$

Öğrenci: **GEİ**

2. X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = c \qquad D_X = \{-1,0,1,2\}$$

d. c =?

e. Olasılık fonksiyonunu oluşturunuz. **(tablo ve grafik)**

f. İlgili olasılıkları hesaplayınız.

$P(X > 2)$ =? $P(X \geq 1)$ =? $P(0 < X \leq 2)$ =?

****Şimdi sürekli rasgele değişken ile çalışacağız.** **GEİ**

X sürekli rasgele değişken olduğunda;

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa; bu fonksiyona

X rasgele değişkeninin **olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf)** denir.

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun özellikleri: X sürekli rasgele değişken , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu,

1. $f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

Örnekler:

X sürekli bir rasgele değişken, oyf ,

1. $f(x) = \begin{cases} cx^2, \ldots 0 < x < 1 \\ 0, \ldots diğer\ yerlerde \end{cases}$

a. $c =?$
b. $P(0 < X \le 0.5) = ?$
c. $P(X \geq 1) =?$
d. $P(X \leq 1) =?$

Çözüm:

a. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\infty} f(x)dx = 1$

$\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^1 cx^2dx + \int_1^{\infty} 0dx = 1 \rightarrow 0 + \int_0^1 cx^2dx+0=1 \rightarrow c = 3$

b. $P(0 < X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} 3x^2 dx = 1/8$

c. $P(X \geq 1) = \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} 0\ dx = 0$ **GEI**

d. $P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x)dx = 1$

2.Öğrenci

X sürekli bir rasgele değişken, oyf ,

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, \ldots -1 \leq \mathrm{x} \leq 1 \\ 0, \ldots \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

e. c =?

b. $P(X \leq 0)$ =?

$P(X \leq 2)$ =?

$P(X \geq 2)$ =?

$P(0 < X \leq 1) = ?$

$P(X \leq 1.5)$ =?

$P(0 < X \leq 2) = ?$

BEKLENEN DEĞER/ VARYANS:

Tanım:

X, $f(x)$ olasılık fonksiyonu ile bir rasgele değişken , $g(x)$ X ‘in bir fonksiyonu olsun. $g(x)$’in beklenen değeri,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})) = \begin{cases} \sum_{D_X} g(x) f_X(x), X \ \ kesikli \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx \,, X \ \ s\ddot{u}rekli \end{cases}$$

dır.

Tanım:

X , $f(x)$ of ile bir rasgele değişken .

a. Kesikli durum için, , $E(X)$ değeri,

$$E(X) = \sum_{D_X} x f_X(x)$$

X rasgele değişkenin **beklenen değeridir.**

b. Sürekli durum için, , $E(X)$ değeri,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

X rasgele değişkenin **beklenen değeridir.**

$Var(X)$ değeri,

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

X rasgele değişkeninin varyansıdır.

$E(X^k)$: X rasgele değişkeninin $k.$ momentidir. Bu durumda;

$E(X^2)$: X rasgele değişkeninin 2. momentidir.

$E(X^2) = \sum_{D_X} x^2 f_X(x)$ **(kesikli durum)**

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$ **(sürekli durum)**

Not:

X rasgele değişkeninin beklenen değeri μ, varyansı σ^2 ile gösterilir. Varyansın karekökü standard sapmayı verir.

Beklenen Değer Kuralları:

X bir rasgele değişken, a bir sabit.

1. $E(a) = a$
2. $E(X + a) = E(X) + a$
3. $E(aX) = aE(X)$

Varyans Kuralları:

1. $Var(a) = a$
2. $Var(X + a) = Var(X)$
3. $Var(aX) = a^2 Var(X)$

Teorem: $a, b \in IR$

a. $E(aX + b) = aE(X) + b$

b. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Örnekler:

1. X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{3}, D_X = \{-1,0,1\}$ dır.

$E(X) =?, Var(X) =?, E(X^3) =? \; E(2X+3) =? \; Var(2X+3)=?$

Çözüm:

$$E(X) = \sum_{x=-}^{1} x f_X(x) = \frac{1}{3}(-1+0+1) = 0$$

$$E(X^2) = \sum_{x=-}^{1} x^2 f_X(x) = \frac{1}{3}((-1)^2+0+1^2) = \frac{2}{3}$$

$$Var(X) = \frac{2}{3} \qquad E(X^3) = \frac{1}{3}(-1^3+0+1^3)=0$$

$E(2X+3)=2\,E(X)+3 = 3 \qquad E(2)=2 \quad Var(2) = 0$

$Var(2X+3) = 4Var(X) = \frac{8}{3}$

Öğrenci: X , $f(x)$ of ile kesikli bir rasgele değişkendir.

$X = x$	2	3	5
$f(x)$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) =? \; Var(X) =? \; E(X^3) =? \quad E(X+X^2) =? \quad E(2X+4) =? \quad Var(2X+4) =?$

Öğrenci: X , $f(x)$ of ile kesikli bir rasgele değişkendir.

$f(x) = cx \quad D_X = \{1,2,3\}$

$c =?$ $E(X) =?$ $Var(X) =?$ $P(0 < X \leq 1) = ?$ $P(1 < X \leq 2) = ?$ $P(X > 2) = ?$

$P(X \leq 3) = ?$

X , $f(x)$ oyf ile sürekli bir rasgele değişkendir.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, \ldots 0 < \mathrm{x} < 1 \\ 0, \ldots diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$E(X)$ =? $Var(X)$ =?

<u>Çözüm:</u>

$E(X) = \int_0^1 x\, f(x)dx = \int_0^1 x\, 3x^2 dx = \frac{3}{4}$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\, f(x)dx = \int_0^1 x^2\, 3x^2 dx = \frac{3}{5}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = 0.0625$$

Student: X , $f(x)$ oyf sürekli bir rasgele değişkendir.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, \ldots -1 < \mathrm{x} < 1 \\ 0, \ldots diğer\ durumlarda \end{cases}$$

a. $\boldsymbol{c}$ =? $E(X)$ =? $Var(X)$ =? $P(0 < X \leq 1) = ?$ $P(X \leq 1.5)$ =? $P(0 < X \leq 2) = ?$ $P(X \geq 2)$ =? $P(X \leq 2)$ =?

Çalışma Soruları:

1.Herbir durum için c sabitinin değerlerini bulunuz $E(X)$ =? $Var(X)$ =?. Bazı olasılıklar tanımlayıp hesaplayınız.

$$f(x) = cx^2, \quad D_X = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$$

$$f(x) = c\binom{4}{x}, \quad D_X = \{0,1,2,3,4\}$$

2. Herbir durum için c sabitinin değerlerini bulunuz $E(X)$ =? $Var(X)$ =?. Bazı olasılıklar tanımlayıp hesaplayınız.

$$f(x) = \begin{cases} cx, \ldots 0 < \mathrm{x} < 2 \\ 0, \ldots diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} c\sqrt{x}, \ldots 0 < \mathrm{x} < 4 \\ 0, \ldots diğer\ durumlarda \end{cases}$$

Bir rasgele değişkenin dönüşümü:

Örnek:

1.

X , $f(x)$ of ile bir rasgele değişken

$f(x) = \frac{1}{5}$ $D_X = \{-2, -1,0,1,2, \}$. $Y; Y = X^2$ olarak tanımlı $X'in$ fonksiyonu bir rasgele değişken,

Y rasgele değişkeninin olasılık fomnksiyonunu elde ediniz.

Çözüm:

İlk önce D_Y belirlemeliyiz

$Y = X^2 \to D_Y = \{0,1,4\}$

$$f_Y(0) = P(Y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{5}$$

$$f_Y(1) = P(Y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{2}{5}$$

$$f_Y(4) = P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{2}{5}$$

$Y = y$	0	1	4
$P(Y = y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Öğrenci: X , $f(x)$ of ile bir rasgele değişken

$f(x) = \frac{x^2}{10}$ $D_X = \{-2, -1, ,1,2, \}$. Y ; $Y = X + 2$ olarak tanımlı bir rasgele değişken,

Y rasgele değişkeninin olasılık fpnksiyonunu elde ediniz.

<u>Bazı Kesikli Özel Rasgele Değişkenler:</u>

1. Bernoulli Rasgele Değişken

2. Binom Rasgele Değişken

3.Geometric Rasgele Değişken

4.Poisson Rasgele Değişken

Bernoulli Rasgele Değişken:

Bir deneydeki **sonuçlar** başarı ya da başarısızlık olarak nitelendirildiğinde, böyle deneylere **iki** tür sonuçlu deney, Bernoulli deneyi veya Bernoulli denemesi denir. Aşağıdaki gibi tanımlanan X rasgele değişkenine **Bernoulli rasgele değişkeni** , dağılımına da **Bernoulli dağılımı** denir. denir.Burada;

X: Başarı sayısı olarak tanımlıdır.

X rasgele değişkeninin aldığı değerler 0,1 olup, $D_X = \{0,1\}$ dir. X'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \ \ x = 0,1$$

olarak tanımldır. Olasılık tablosu

x	0	1
$P(X = x)$	$q = 1 - p$	p

dır. Burada;

p:Başarı olasılığı (dağılımın parametresi)

$q = 1 - p$: Başarısızlık olasılığı

Örnekler: (Bernoulli denemesi)

1.Tura gelmesi başarı sayılan bir para atışının deneyi

2. Kusursuz parça üretme olasılığı p = 0.99 olan bir makinada bir parça üretilmesi,

3. Bir atışta başarı olasılığı $p = 0.80$ olan bir basketbolcunun bir atış yapması,

4. 6 Kırmızı ve 4 siyah top içeren bir kavanozda bir top çekilmesi.

Bernoulli rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı ;

$$E(X) = \sum_x x\, f(x) = 0(1-p) + 1p = p$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2\, f(x) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

dır. X' e Bernoulli dağılımına sahiptir denir ve $X \sim Bernoulli(1,p)$ olarak gösterilir.

2. Binom Dağılımı

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında, bağımsız olarak n kez tekrarlanmasıyla oluşan deneye **Binom Deneyi** denir.

X: n denemedeki başarı sayısı

olarak tanımlıdır.

X rasgele değişkeninin aldığı değerler $D_X = \{0,1,2,\dots,n\}$ olup, X'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,\dots,n$$

Binom rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı ;

$E(X) = np$

$Var(X) = npq$

dır. X'e Binom dağılımına sahiptir denir ve $X \sim Binom(n,p)$ olarak gösterilir.

Örnekler: Yukarıda tanımlanan Bernoulli Denemelerinin n kez tekrarlanması .

Örnekler :

5 seçenekli 20 soruluk bir test sınavında sorular işaretlendiğinde,

a. En az 10 doğru soru tutturma olasılığı nedir?
b. Tutturulan doğru cevap sayısının beklenen değeri nedir?

Çözüm:

a.

$$X \sim Binom(n = 20, p = \frac{1}{5})$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{20}{x} \frac{1}{5}^{x} \frac{4}{5}^{20-x} \quad , \quad x = 0,1, \ldots ,20$$

$$P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{20} \binom{20}{x} \frac{1}{5}^{x} \frac{4}{5}^{20-x}$$

b.

$$E(X) = np = 20 * \frac{1}{5} = 4$$

Öğrenci :

Bir makine günde 5 parça üretmektedir. Bir parçayı kusursuz olarak işlemesi olasılığı $p = \frac{4}{5}$ olsun.

X: Bir günde kusursuz olarak işlenen parça sayısı olsun.

a. X ‘in olasılık fonksiyonunu oluşturunuz.
b. $E(X)$ hesaplayınız.

Ödev:

Düzgün bir paranın 3 kez atılışında,

X: 3 atışta gelen turaların sayısı

Bu şekilde tanımlanan rasgele değişken Binom dağılımına sahiptir.

a. Notasyon olarak gösteriniz.
b. Olasılık fonksiyonunu oluşturunuz.
c. $E(X), Var(X)$ bulunuz.

Çözüm:

İst 250

Olasılık ve İstatistik : Dr Gültaç Eroğlu İNAN

Geometrik Rasgele Değişken:

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesi, aynı şartlar altında, bağımsız olarak bir başarı elde edinceye kadar tekrarlansın. Aşağıdaki gibi tanımlanan X rasgele değişkenine **Geometrik rasgele değişken** , dağılımına da **Geometrik dağılım** denir.

X : 1 başarı elde edilinceye kadar yapılan deneme sayısı

X rasgele değişkeninin aldığı değerler $D_X = \{1, \ldots\}$

dir. X'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, \qquad x = 1,2,3, \ldots \quad 0 < p < 1$$

dır. Burada;

p:Başarı olasılığı (dağılımın parametresi)

$q = 1 - p$: Başarısızlık olasılığı

Geometrik rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı :

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$X \sim Geo(p)$$

olarak gösterilir.

Örnekler:

1. Bir atıcı için belli bir hedefi vurması olasılığının $p = 0{,}75$ olduğu bilinsin. Atıcı, hedef bir isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır.

a) $E(X) =?$ $Var(X) =?$

b) Hedefi 4 atıştan (deneme) önce vurması olasılığı ?

c) En az 3 atış yapması olasılığı nedir?

Çözüm:

a)

X : Hedef bir isabet alıncaya kadar yapılan atış sayısı

$$f(x) = P(X = x) = 0{,}75\ (0{,}25)^{x-1} \quad x = 1,2,3, \dots$$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{4}{3}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{4}{9}$$

b)

$$P(X < 4) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{63}{64}$$

c)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \big(f(1) + f(2)\big) = \frac{1}{16}$$

2.

Bir torbada 7 beyaz, 5 siyah top bulunmaktadır. Her defasında yerine konularak bir top çekiliyor. Burada;

X: Siyah bir top çekmek için yapılan deneme sayısı

a) Siyah topun ilk defa 5'inci çekilişte çıkma olasılığı nedir?

b) $E(X) = ?$ $Var(X) = ?$

c) Siyah top gelene kadar 4 ten fazla deneme yapılması olasılığı nedir?

<u>Çözüm:</u>

Poisson Rasgele Değişken :

Bu Dağılım sürekli ortamlarda (zaman, alan, hacim, …) kesikli sonuçlar veren deneylerin modellenmesinde kullanılır.

$X, (0, t]$ zaman aralığında meydana gelen sonuçların (bir olayın gerçekleşme) sayısı

$D_X = \{0,1,\ldots\}$ olup, . X'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

dır.

λ: gerçekleşen ortalama olay sayısı

Poisson rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı :

$\mu = E(X) = \lambda$

$\sigma^2 = Var(X) = \lambda$

$$X \sim Poisson(\lambda)$$

olarak gösterilir.

Örnekler:

1. Bir hastanenin acil servisine 15 dakikalık bir zaman aralığında ortalama 4 hasta gelmektedir. Bu zaman aralığında,

   a) Hasta gelmemesi olasılığı nedir?
   b) Bir hasta gelmesi olasılığı nedir?
   c) En az 2 hasta gelmesi olasılığı nedir?
   d) En çok 3 hasta gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm:

a)

X:

$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots, \qquad \lambda = 4$

$$P(X=0)=\frac{e^{-4}4^{0}}{0!}=0.0183$$

b)

$$P(X=1)=\frac{e^{-4}4^{1}}{1!}=4*0.0183=\mathbf{0.0732}$$

c) $P(X\geq 2)$ =1- $P(X<2)=$

$=\mathbf{1}-\ (f(0)+f(1))$

$=\mathbf{1}-\ (e^{-4}+4e^{-4})$

$=\mathbf{1}-\ (5*e^{-4})$

$=\mathbf{1}-\ (5*0.0183)$

$=\mathbf{1}-\ 0.2379$

$=\mathbf{0.7621}$

d)

$P(X\leq 3)=\left(f(0)+f(1)+f(2)+f(3)\right)$

$=\left(e^{-4}+4e^{-4}+8e^{-4}+\frac{32}{3}e^{-4}\right)$

$=\frac{71}{3}e^{-4}$

<u>Öğrenci:</u>

Bir kentin içinde bir ayda ortalama 200, bir günde ortalama 5 trafik kazası olmaktadır. Belli bir gün için meydana gelen kaza sayısının,

a) 5

b) 5 den az

c) 5 dan çok olması olasılığı nedir?

d) Hiç kaza olmaması olasılığı nedir?

<u>Çözüm:</u>

<u>İst 250: Olasılık ve İstatistik</u>

Dr.Gültaç E.İNAN

<u>Bazı Sürekli Özel Rasgele Değişkenler:</u>

Normal Rasgele Değişken :

Standard Normal Rasgele Değişken:

t **Rasgele Değişkeni:**

Normal Rasgele Değişken :

Normal dağılım hem uygulamalı hem de teorik istatistikte kullanılan oldukça önemli bir dağılımdır. Normal dağılımın istatistikte önemli bir yerinin olmasının nedeni, yapılan birçok gözlem sonucunun, çan biçiminde bir dağılım vermesi ve çoğu dağılımın denek sayısı arttıkça normal dağılıma yaklaşmasıdır.

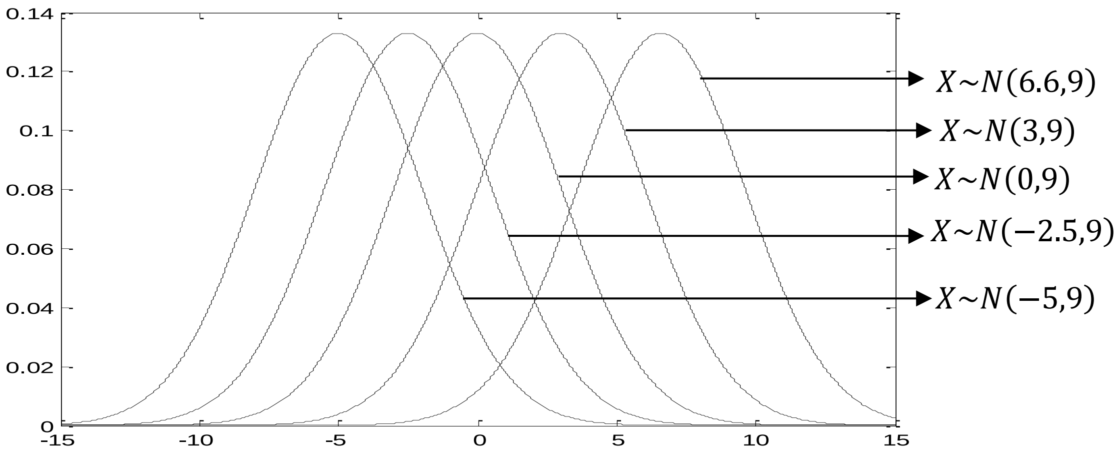
Sürekli bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$$

μ: ortalama (parametre)
σ^2: varyans(parametre)
$\mathrm{e} = 2.71825$
$\pi = 3.1416$

Notasyon: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Normal rasgele değişkenin farklı $\mu = -5, -2.5, 0, 3, 6.6$ beklenen değerleri ve $\sigma^2 = 9$ varyansı için olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği;



(Öztürk 2010).

Normal Rasgele Değişkenin Özellikleri:

1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

2. Normal dağılım ortalamaya göre simetriktir. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

$\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$ olan normal dağılıma **standart normal dağılım** denir. Standart normal dağılıma sahip rasgele değişken genellikle *Z* harfi ile gösterilir.

<u>**Notasyon:**</u> $Z \sim N(0,1)$

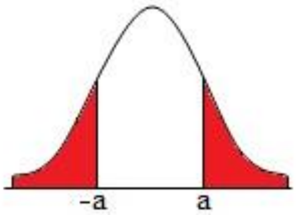
Z rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, -\infty < z < \infty$$

Transformasyon:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standart normal rasgele değişkendir.

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P(Z \leq z)$$



$$P(Z \leq -a) = P(Z \geq a)$$
$$= 1 - P(Z < a)$$

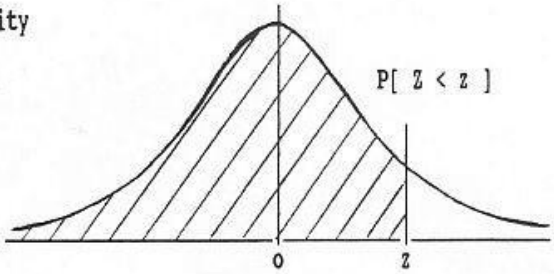
<u>STANDARD STATISTICAL TABLES</u>

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z

i.e.

$$P[\, Z < z \,] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}Z^2)\, dZ$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

<u>Örnekler: Tabloyu Okuma</u>

1.

$P(Z < 1.5) = 0.9332 \rightarrow P(Z > 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

$P(Z < 2.2) = 0.9861 \rightarrow P(Z > 2.2) = 1 - 0.9861 = 0.0139$

$P(Z < 0.42) = 0.6628 \rightarrow P(Z > 0.42) = 1 - 0.6628 = 0.3372$

$P(Z < 1.53) = 0.9370 \rightarrow P(Z > 1.53) = 1 - 0.9370 = 0.0630$

2. $P(Z < a) = 0.9878 \rightarrow a = 2.25$

3. $P(Z > a) = 0.0301 \rightarrow P(Z < a) = 0.9699 \rightarrow a = 1.88$

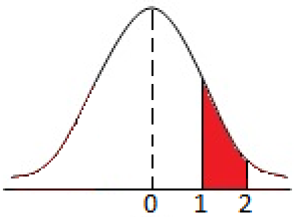
4. Öğrenci

*$P(Z > 1.36)$ =?

$*$ $P(Z < a) = 0.8264 \rightarrow a$ =?

* $P(Z > a) = 0.0495 \rightarrow a$ =?

5. $P(1 < Z < 2)$ =?

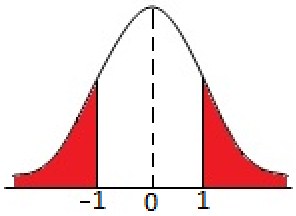


$P(1 < Z < 2) = P(0 < Z < 2) - P(0 < Z < 1)$

$= 0.4773 - 0.3413$

=0.036

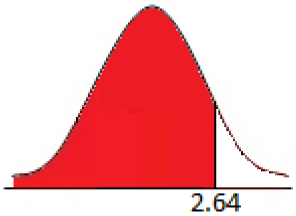
6. $P(Z < -1) =?$



$P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1)$

=1-0.8413=0.1587

7. $P(Z > -2.64) =?$



$P(Z > -2.64) = P(Z < 2.64)$=0.9959

8. $P(-1.32 < Z < 2.87) = P(Z < 2.87) - P(Z < -1.32)$

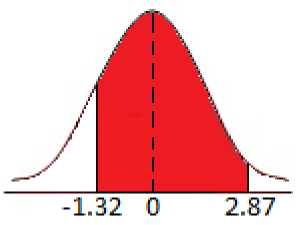
=$P(Z < 2.87) - P(Z > 1.32)$

= $P(Z < 2.87) - \left(1 - P(Z < 1.32)\right)$

= $P(Z < 1.32) + P(Z < 2.87) - 1$

=0.9066+0.9980-1

=0.9046



9. $P(-3 < Z < 3) = 2 * P(0 < Z < 3)$

=2*0.4986

=0.9972

Öğrenci:

10. $P(-2.87 < Z < -1.32) = ?$

11. $P(-1.32 < Z < 0) = ?$

12. $P(-1.32 < Z < a) = 0.1269 \rightarrow a = ?$

13. $P(Z < a) = 0.1269 \rightarrow a = ?$

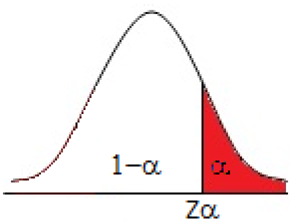
14. $P(0 < Z < a) = 0.4032 \rightarrow a = ?$

<u>Transformasyon :*X* den *Z* ‘ye</u>

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal rasgele değişken$\rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standard normal rasgele değişken.

<u>Yüzdelik:</u>

$1-\alpha$. yüzdelik: (z_α) ; Gözlemlerin $1-\alpha\%$ kadarı bu değerin altındadır.



$P(Z > z_\alpha) = \alpha$

$P(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha \rightarrow z_\alpha$: $1-\alpha$. yüzdelik

Örnek: $90th$ yüzdelik

$P(Z < z_{0.10}) = 0.90 \rightarrow z_{0.10}$: 90. yüzdelik

Örnekler: En çok kullanılan α Değerleri için

1.

$P(Z < z_{0.05}) = 0.95$ (**95. yüzdelik**)

$z_{0.05} = 1.645$ $\left(1.64 + \frac{1.65}{2} = \mathbf{1.645}\right)$

2. (975.yüzdelik)

$P(Z < z_{0.025}) = 0.975 \rightarrow \boldsymbol{z_{0.025}}$**=1.96**

3. (90.yüzdelik)

$P(Z < z_{0.10}) = 0.90$

$$\boldsymbol{z_{0.10}} = \frac{(1.28 + 1.29)}{2} = \mathbf{1.285}$$

Örnekler:

X : Bir pilin ömrü

$X \sim N(\mu = 35\ gün, \sigma^2 = 16 gün)$

a. Rasgele seçilen bir pil için $P(X > 45)$ (pilin ömrünün 45 günden uzun olması)

Çözüm:

$$P\left(\frac{X-35}{4} \geq \frac{45-35}{4}\right) = P(Z \geq 2.5) = 1 - P(Z < 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

b. $P(40 < X < 45) = P\left(\frac{40-35}{4} < Z < \frac{45-35}{4}\right) = P\left(\frac{5}{4} < X < \frac{10}{4}\right)$

$= P(1.25 < Z < 2.5)$

$= P(Z < 2.5)$- $P(Z < 1.25)$

=0.9938-0.8944

=0.0994

c.Öğrenci

$P(X < 40) =?$

d. 95.yüzdelik of X=?

$P(X < x) = 0.95 \rightarrow x =?$

Çözüm:

$P(Z < a) = 0.95 \rightarrow a = z_{0.05} = 1.645$

$$a = 1.645 \rightarrow \ 1.645 = \frac{x - 35}{4} \rightarrow x = 1.645 * 4 + 35 \rightarrow x = 41.58$$

e. 90.yüzdelik of X=?

Örnek: Öğrenci

X: Belirli bir tür bilgisayarı kurmak için gerekli zaman

$X \sim N(\mu = 50\ dakika, \sigma^2 = 10\ dakika)$

İlgili olasılıkları hesaplayınız.

a. $P(40 < X < 60)$

b. Bazı olasılıklar tanımlayıp hesaplayınız.

c. X ‘in 95.yüzdeliği

Kitle: Belirli bir özelliğe sahip bireylerin veya birimlerin tümünün oluşturduğu topluluğa denir.

Örneklem: : Örnekleme yöntemlerinden yararlanılarak bir kitleden seçilen, aynı özellikleri taşıyan ve kitleyi temsil edebilecek nitelikteki ve nicelikteki bireylerin oluşturduğu topluluğa denir.

Gözlem: Örneklemdeki herbir değer. $\boldsymbol{X_i}$

Parametre: Kitleyi tanımlayan sayısal değerlere **parametre** denir.

İstatistik: Örneklemin bir fonksiyonuna denir. Bilinmeyen parametre içermez.

Veri: Gözlemlerden elde edilen sayısal olan ya da olmayan sonuçlara **veri** denir.

Değişken: Birimlerin farklı değerler alabildikleri nitelik ya da niceliklerine **değişken** denir.

Bir değişken sayısal değerlerle ölçülebiliyorsa, bu değişkene **nicel** değişken denir (Ağırlık,boy uzunluğu); ölçülemiyorsa **nitel değişken** denir (Saç rengi, göz rengi).

Örneklem genişliği (çapı): Gözlem sayısı ($\boldsymbol{n}$)

Aritmetik Ortalama:

Birimlerin belirli bir değişken bakımından aldıkları değerlerin toplamının birim sayısına bölümü olarak tanımlanır. Eşit aralıklı ve oran ölçme düzeyinde ölçülen değişkenler için kullanılır. Aritmetik ortalama hem kitle hem de örneklem için hesaplanır.

μ: kitleye ilişkin aritmetik ortalama
$\bar{x}$: örnekleme ilişkin aritmetik ortalama

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$\bar{x}$: aritmetik ortalama
x_i: örneklemdeki i. birimin değeri
n : örneklemdeki birim sayısı

Tepe Değer (Mod): En çok tekrarlanan değer tepe değer olarak alnır.

Ortanca (Medyan):

İlk olarak eldeki veriler büyüklük sırasına göre (küçükten büyüğe veya büyükten küçüğe) sıraya konulur. Birim sayısı n ile gösterilmek üzere,

$$ortanca(OR) = \begin{cases} x_j & , \quad j = \dfrac{n+1}{2} \quad \text{n tek} \\ \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2} & , \quad j = \dfrac{n}{2} \quad n\ çift \end{cases}$$

Değişim Genişliği

$$R = En\ büyük\ değer - En\ küçük\ değer$$

Tahmin edici: Kitle parametresini tahmin etmek için kullanılan istatistik.

Tahmin: Tahmin edicinin aldığı değer.

	Kitle	**Örneklem**
Ortalama	μ	$\bar{X}$
Varyans	σ^2	S^2
	Parametre	Tahmin edici **(İstatistik)**

Varyans ve Standart Sapma:

Varyans gözlem sonuçlarının aritmetik ortalamadan ne ölçüde farklı olabileceğini ortaya koyan bir dağılım ölçüsüdür. Kitle varyansı σ^2, örneklem varyansı s^2 ile gösterilir.

Standart sapma varyansın kareköküdür. Kitle standart sapması σ, örneklem standart sapması s ile gösterilir.

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \dfrac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}{n}}{n-1}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{Varyans}$$

Burada,

s: standart sapma
x_j: j. gözlem değeri
$\bar{x}$: aritmetik ortalama
n: birim sayısıdır.

Örnek:

X_i: Belirli bit tür pilin ömrü

Gözlemler

X_i: 45 30 38 40 40 35 43 34 40 35 $i = 1, \ldots, 10$ $n = 10$ Örnek çapı

Örneklem ortalaması, varyansı, standard sapması, mod, medyan, genişlik bulunuz.

Çözüm:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{45 + \cdots + 35}{10} = 38$$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}{n}}{n-1}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = 380 \quad \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 = 144.400 \quad \left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^2\right) = 14.624$$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{14.624 - \frac{144.400}{10}}{9} = 20.44$$

$s = 4.52$

Mode=**40 (3 kez tekrarlanmış)**

<u>Medyan=?</u>

İlk önce gözlemleri büyükten küçüğe sıralamalıyız.

X_i: **30 34 35 35 38 40 40 40 43 45**

$\mathrm{j} = \frac{n}{2} \quad n\, çift \rightarrow \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$

$\mathrm{j} = 5 \rightarrow$medyan $\frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{38+40}{2} = 39$

$R = 45 - 30 = 15$

<u>Öğrenci:</u>

Öğrencilerin belirli bir dersten aldıkları notlar aşağıda verilmiştir.

X_i: 60 55 67 71 74 32 28 50 55 58 90 100 76 55 63 98 55 $\quad i = 1, \dots ,17$

$n = 17$ örnek çapı.

Örneklem ortalaması, varyansı, standard sapması, mod, medyan, genişlik bulunuz.

TAHMİN-HİPOTEZ TESTİ-GÜVEN ARALIĞI

	Kitle	**Örneklem**
Ortalama	$\boldsymbol{\mu}$	$\overline{\boldsymbol{X}}$
Varyans	$\boldsymbol{\sigma^2}$	$\boldsymbol{S^2}$
	Parametre (Tahmin Edilen)	Tahmin Edici **(İstatistik)**

İki türlü tahmin vardır.

1) **Nokta tahmini:** Bir kitle parametresini tahmin etmek için kullanılan örnek istatistiğinin değerine nokta tahmini adı verilir.
2) **Aralık tahmini:** Bir parametrenin aralık tahmini, parametreyi tahmin etmek için kullanılan değerleri içeren bir aralıktır.

Bir parametrenin bir aralık tahminin **güven düzeyi**, parametreyi kapsama olasılığıdır. $1-\alpha$ ile gösterilir. Burada α **anlamlılık düzeyi** adını alır.

Tahminin güven düzeyini kullanarak bir parametre için belirlenen aralığa **güven aralığı** denir. En çok kullanılan güven aralıkları %90, %95 ve %99' dır.

Güven Aralığı

1. **Kitle Varyansı $\boldsymbol{\sigma^2}$ Biliniyor**

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{T(\alpha/2)} \leq Z \leq Z_{T(\alpha/2)}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{T(\alpha/2)} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{T(\alpha/2)}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \longrightarrow$$

$(1-\alpha)$ güven düzeyinde μ için güven aralığı

Kitle Varyansı σ^2 Bilinmiyor ($n < 30$)

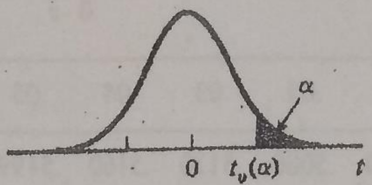
$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ (s^2örneklem varyansı)

$$P\left(-t_{T(\alpha/2,\ n-1)} \leq t \leq t_{T(\alpha/2,\ n-1)}\right) = 1-\alpha$$
$$P\left(-t_{T(\alpha/2,\ n-1)} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{T(\alpha/2,\ n-1)}\right) = 1-\alpha$$
$$P\left(\bar{x} - t_{T\left(\frac{\alpha}{2},\ n-1\right)} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{T(\alpha/2,\ n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \longrightarrow$$

$(1-\alpha)$ güven düzeyinde μ için güven aralığı

Not: $n > 30$ olduğunda *t* istatistiği yerine *z* istatistiği kullanılır.

TABLE 2 STUDENT'S t-DISTRIBUTION CRITICAL POINTS



d.f. ν	α .250	.100	.050	.025	.010	.00833	.00625	.005
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	38.190	50.923	63.657
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	7.649	8.860	9.925
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	4.857	5.392	5.841
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	3.961	4.315	4.604
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	3.534	3.810	4.032
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.287	3.521	3.707
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.128	3.335	3.499
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.016	3.206	3.355
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	2.933	3.111	3.250
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	2.870	3.038	3.169
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	2.820	2.981	3.106
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	2.779	2.934	3.055
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	2.746	2.896	3.012
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.718	2.864	2.977
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.694	2.837	2.947
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.673	2.813	2.921
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.655	2.793	2.898
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.639	2.775	2.878
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.625	2.759	2.861
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.613	2.744	2.845
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.601	2.732	2.831
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.591	2.720	2.819
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.582	2.710	2.807
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.574	2.700	2.797
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.566	2.692	2.787
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.559	2.684	2.779
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.552	2.676	2.771
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.546	2.669	2.763
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.541	2.663	2.756
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.536	2.657	2.750
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.499	2.616	2.704
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.463	2.575	2.660
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.428	2.536	2.617
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.394	2.498	2.576

<u>Hipotez-Hipotez Testi :</u>

Geçerliliği olasılık esaslarına göre araştırılabilen ve karar verebilmek için öne sürülen varsayımlara istatistikte **"hipotez"** denir. Hipotezlerin örneklem yardımıyla incelenmesine **"hipotez testi"** denir.

Yokluk –Alternatif Hipotez:

$H_0 \rightarrow$ yokluk hipotezi

H_1 ya da $H_s \rightarrow$ alternatif ya da seçenek hipotez

Örneğin,

Tek yönlü hipotez,

$H_0: \mu = 5$ ya da $H_0: \mu = 5$

$H_1: \mu < 5$ $H_1: \mu > 5$

İki yönlü hipotez

$H_0: \mu = 5$

$H_1: \mu \neq 05$

Kitle Ortalaması İçin Hipotez Testi

1.Kitle Varyansı σ^2 Biliniyor

1) Hipotez kurulur .

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0,\ \mu > \mu_0,\ \mu \neq \mu_0$

2) Test istatistiği hesaplanır.

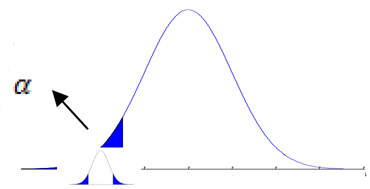
$$Z_H = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

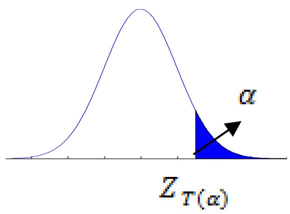
3) Kritik bölgeye göre hipotez red edilir ya da red edilemez.

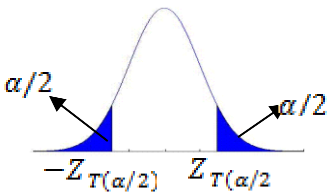
$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu < \mu_0$

$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$

$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu \neq \mu_0$







$Z_H < -Z_{T(\alpha)}$ ise H_0 red edilir

$Z_H > Z_{T(\alpha)}$ ise H_0 red edilir

$Z_H < -Z_{T(\alpha/2)}$ ya da $Z_H > Z_{T(\alpha/2)}$ ise H_0 red edilir

$Z_{T(\alpha)}: 1 - \alpha$ olasılığına karşı gelen tablo değeri

$$P\left(-Z_{T(\alpha/2)} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{T(\alpha/2)}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \longrightarrow$$ $(1 - \alpha)$ güven düzeyinde μ için güven aralığı

2. Kitle Varyansı σ^2 Bilinmiyor ($n < 30$)

1) Hipotez kurulur.

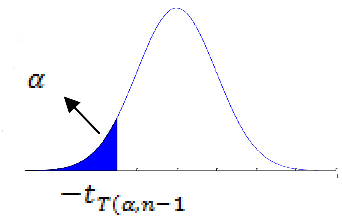
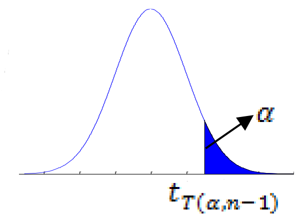
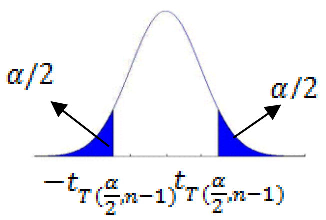
$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0,\ \mu > \mu_0,\ \mu \neq \mu_0$

2) Test istatistiği hesaplanır.

$$t_H = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

3) Kritik bölgeye göre hipotez red edilir ya da red edilemez.

$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu < \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$
		
$t_H < -t_{T(\alpha,\ n-1)}$ ise H_0 red	$t_H > t_{T(\alpha,\ n-1)}$ ise H_0 red	$t_H < -t_{T(\frac{\alpha}{2}, n-1)}$ ya da $t_H > t_{T(\frac{\alpha}{2}, n-1)}$ ise H_0 red

Not: $n > 30$ olduğunda *t* istatistiği yerine *z* istatistiği kullanılır.

Örnekler:

1.

Spor ekipmanları üreten bir üretici, şirketince $\boldsymbol{\sigma = 0.5}$ kglık bir standard sapma ile ortalama kopma kuvveti $\mathbf{8}$ kg olduğu iddia edilen yeni bir sentetik balık oltası ipi geliştirilmiştir. Eğer rastgele bir örneklem ile $\mathbf{50}$ olta test edilmiş ve koppma kuvvetinin ortalaması $\boldsymbol{\bar{x} = 7.8}$ kg olarak bulunmuş ise, $\boldsymbol{\mu \neq 8}$ alternatif hipotezine karşı $\boldsymbol{\mu = 8}$ hipotezini test ediniz**.** $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$ alınız.

1. Hipotez kurulur.

$H_0: \mu = 8$

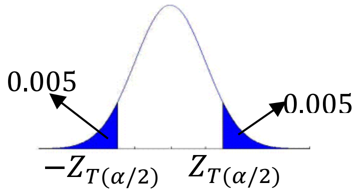
$H_1: \mu \neq 8$

2. Test istatistiği hesaplanır.

$$Z_H = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7.8 - 8}{0.5/\sqrt{50}} = \mathbf{-2.83}$$

olarak hesaplanır.

3.



$Z_H = -2.83 < -Z_{T\left(\frac{\alpha}{2}\right)} =$

-2.575 H_0 red edilir

Karar: $z_H = -2.83 < -2.575$ hesaplanan değer kritik bölgededir; $\boldsymbol{H_0}$ **red edilir.**

Güven Aralığı :

$$P\left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

$$\bar{x} \mp Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7.8 \mp 2.575\frac{0.5}{\sqrt{50}}$$

$\boldsymbol{\mu}$: $[\mathbf{7,61, 7,98}]$

(Prof.Dr. M.Akif Bakır)

2.

Geçen yıl Amerikada rastgele örnekleme ile seçilen **100** ölüm kaydı, ortalama yaşam süresinin **71.8** olduğunu göstermiştir.

a. Kitle standard sapmasının **8.9** yıl olduğu varsayımı ile bugünkü ortalama yaşam süresinin **70** yıldan fazla olduğu söyelenebilinir mi?

b. Çift taraflı güven aralığını oluşturunuz. $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$

<u>Çözüm:</u>

a.

1.

Hipotez kurulur.

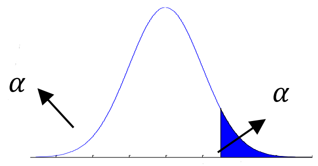
$H_0: \mu = 70$

$H_1: \mu > 70$

2. Test istatistiği hesaplanır.

$$Z_H = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{71.8 - 70}{8.9/\sqrt{100}} = \mathbf{2.02}$$

3. **K.B**



$Z_{T(\alpha)} =$ **1.645**

Karar: $z_H = 2.02 > 1.645$ hesaplanan değer kritik bölgededir; $\boldsymbol{H_0}$ **red edilir.**

Bugünkü ortalama yaşın 70 yıldan fazla olduğu sonucuna varılır.

b. Güven Aralığı :

$$P\left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{T(\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

$$\boldsymbol{Z_{T(0.025)} = 1.96}$$

$$\bar{x} \mp Z_{T(0.025)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 71.8 \mp 1.96 \frac{8.9}{\sqrt{100}}$$

$$\boldsymbol{\mu}: [\mathbf{70.05}, \mathbf{73.54}]$$

(Prof.Dr. M.Akif Bakır)

3. Edison Elektrik Kurumu çeşitli ev araçları tarafından yıllık kullanılan kilovat saat cinsinden elektrik tüketimine ilişkin rakamlar yayınlamıştır. Bir elektrikli süpürgenin bir yılda ortalama **46** kilovat saat elektrik kullandığı iddia ediliyor. Planlanan bir çalışma ile **12** evden oluşan rastgele bir örneklem alınmış ve elektrikli süpürgelerinin **11.9** kilovat saatlik bir standard sapma ile yıllık ortalama **42** kilovat saat elektrik kullandıkları bulunmuştur. Ortalama elektrik kullanımının **46** saatten az olduğu hipotezini test ediniz.

Çözüm:

a.

1.

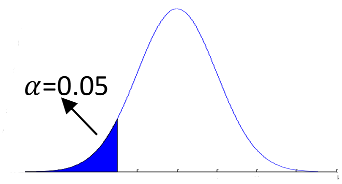
$H_0: \mu = 46$

$H_1: \mu < 46$

2..Test istatistiği hesaplanır.

$$t_H = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{42 - 46}{11.9/\sqrt{12}} = \mathbf{-1.16}$$

3. **K.B**



$-t_{T(\alpha,n-1)}$
$= -1.796$

Karar: $t_H = -1.16 > -t_{T(0.05,\ 11)} = -1.796$

$\boldsymbol{H_0}$ **red edilemez.**

(Prof.Dr. M.Akif Bakır)

4.

Yeni bir ilaç kalp hastası **8** kişi üzerinde deneniyor. Bu hastaların tansiyonlarının ortalaması **11,** standard sapması **3.207** olarak bulunuyor.

a.%95 güven düzeyinde;kitle ortalamasının güven aralığını bulunuz.

Çözüm:

$$t_{T(\alpha/2,\ n-1)} = t_{T(0.025,7)} = 2.365$$

$$P\left(\bar{x} - t_{T\left(\frac{\alpha}{2},\ n-1\right)}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{T(\alpha/2,\ n-1)}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \longrightarrow (1-\alpha) \text{ güven düzeyinde } \mu \text{ için güven aralığı}$$

$$P\left(11 - 2.365\frac{3.207}{\sqrt{8}} \leq \mu \leq 11 + 2.365\frac{3.207}{\sqrt{8}}\right) = 1-\alpha \longrightarrow (1-\alpha) \text{ güven düzeyinde } \mu \text{ için güven aralığı}$$

$$\boldsymbol{\mu}: [\mathbf{8.32, 13.68}]$$

Yorum: İlgili aralığın μ kitle ortalamasını içeren aralıklardan biri olma olasılığı %95 dir.

(Prof.Dr. Ayşen Apaydın ve diğerleri)

b. Bir araştırmacı ortalama tansiyonun 12 den farklı olduğunu iddia etmektedir. İddiayı test ediniz.

1.

$H_0: \mu = 12$

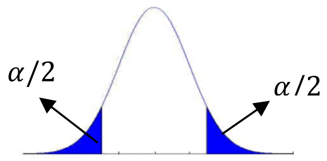
$H_1: \mu \neq 12$

2.

$$t_H = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{11-12}{3.207/\sqrt{8}} = \mathbf{-1.13}$$

3.

$t_{T(\alpha/2,\ n-1)} = t_{T(0.025,7)}$
$= \mathbf{2.365}$



$t_H = -1.13 >$

$-t_{T\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)} = -2.365$ H_0

red edilemez.

4. Bir üretim sürecinde üretilen birimlerin uzunlukları kontrol ediliyor. Standard sapma **0.45** mm olarak bulunuyor. Bir kalite kontrol uzmanı her sabah rasgele seçilen **40** birim üzerinde kontrolünü sürdürüyor. Bir günde ortalama uzunluk **35.62** mm olduğunda,

a. **%95** güven düzeyinde kitle ortalamasının güven aralığını bulunuz.

b. Güven aralığının uzunluğunu bulunuz.

c. Güven aralığının uzunluğunun **0.30** mm olması, hangi güven katsayısı ile mümkündür?

d. **%95** güven düzeyinde aralığın boyunun 0.1mm olması için gerekli örneklem genişliği ne olmalıdır?

e. **%95** güven düzeyinde tek taraflı güven aralığına göre kitle ortalaması hangi değerden küçüktür.

f. Ortalama uzunluğum **40 mm** den küçük olması hipotezini test ediniz.

Çözüm:

a.

$\bar{x} = 35.62, \sigma = 0.45\ , n = 40$

$1 - \alpha = 0.95\ \ \alpha = 0.05$;

$\boldsymbol{Z_{T(0.025)}} = \mathbf{1.96}$

$$P\left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$P\left(35.62 - 1.96\frac{0.45}{\sqrt{40}} \leq \mu \leq 35.62 + 1.96\frac{0.45}{\sqrt{40}}\right) = 0.95$$

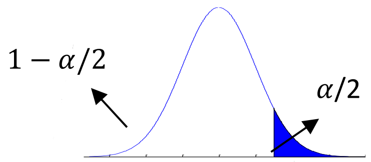
$\boldsymbol{\mu}$: $[\mathbf{35.48}, \mathbf{35.76}]$

b. Güven aralığının uzunluğu:

$$\left(\bar{x} + Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 * 1.96 * \frac{0.45}{\sqrt{40}} = \mathbf{0.28}$$

c. $2Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.30 \rightarrow 2 * Z_{T(\alpha/2)} * \frac{0.45}{\sqrt{40}} = 0.30$

$Z_{T(\alpha/2)} = 2.1$



$Z_{T(\alpha/2)}$
$= \mathbf{2.1}$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9821 \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.0358}$$

d. $2Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.1 \rightarrow n = ?$

$$2 * 1.96 * \frac{0.45}{\sqrt{n}} = 0.1$$

$\boldsymbol{n} \cong \mathbf{311}$

e. Tek taraflı güven aralıkları förmülleri ;

$$P\left(\mu < \bar{x} + Z_{T(\alpha)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$P\left(\mu > \bar{x} - Z_{T(\alpha)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$\boldsymbol{Z_{T(0.05)}} = \mathbf{1.645}$

$$P\left(\mu < 35.62 + 1.645\frac{0.45}{\sqrt{40}}\right) = 0.95$$

$$\boldsymbol{P(\mu < 35.737) = 0.95}$$

f.

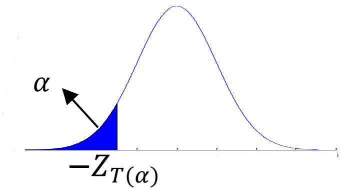
1.

$H_0: \mu = 40$

$H_1: \mu < 40$

2. Test istatistiği hesaplanır.

$$Z_H = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{35.62-40}{0.45/\sqrt{40}} = \mathbf{-61.55}$$



$\boldsymbol{Z_H < -Z_{T(\alpha)=} - 1.645}$ ise H_0 red edilir.

(Prof.Dr. Ayşen Apaydın ve diğerleri)

Özel durum:

$n > 30$ olduğunda *t* istatistiği yerine *z* istatistiği kullanılır.

5.

Belli bir ilaç kullanılarak yapılan diş dolgularının ortalama dayanma süresinin 5 yıldan farklı olduğu iddia edilmektedir. İlgili ilaç kullanılarak yapılan diş dolgularından rasgele olarak 41 tanesi rasgele olarak seçilmiş ve örnek ortalaması 5.9 yıl, standart sapması da 1.74 olarak hesaplanmıştır. $\alpha = 0.01$ anlamlılık düzeyinde iddiayı test ediniz. Kitle ortalamasının %99 güven düzeyinde güven sınırlarını oluşturunuz.

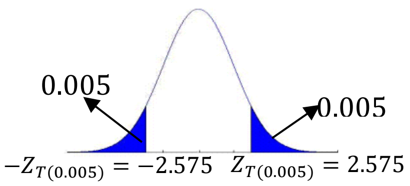
σ^2 bilinmiyor, $n > 30$ olduğun da *t* istatistiği yerine *z* istatistiği kullanılır.

1) $H_0 : \mu = 5$

$H_1 : \mu \neq 5$

2) $Z_H = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{5.9-5}{1.74/\sqrt{41}} = 3.33$

3)



$Z_H = 3.33 > Z_{T(\alpha/2=0.005)} = 2.575$ olduğundan H_0 red edilir, yani belli bir ilaç kullanılarak yapılan diş dolgularının ortalama dayanma süresinin 5 yıldan farklı olduğu %99 güvenle söylenebilir.

Güven aralığı

$$P\left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{T(\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

$$\bar{x} \mp Z_{T(\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}} = 5.9 \mp 2.575\frac{1.74}{\sqrt{41}}$$

5.2003

5.5997

μ: $[5.2003, 5.5997]$ $\longrightarrow$ Bu aralığın μ'yü içeren aralıklardan biri olması olasılığı %99'dur.

(Acık ders DİS 161 : Doç.Dr.Esin Köksal BABACAN-Dr.Öğrt.Üye.Sibel Açık KEMALOĞLU)

Çalışma Soruları:

1. (Prof.Dr. M.Akif Bakır)

Bir araştırma raporunda UCLA Tıp Fakültesinde farelerin diyetlerindeki kalori miktarlarında yapılan değişiklik ile normalde 32 ay olan yaşam sürelerinin 32 aydan fazla olduğu iddia edilmektedir. Bu diyet ile beslenen 64 fare için örneklem ortalama ve sapması $\bar{x} = 38$ ay $s = 5.8$ ay olarak elde edilmiştir.

a. $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde hipotezi test ediniz.

Dikkat: $\boldsymbol{n = 64 > 30}$

b. Çift taraflı güven aralığı oluşturunuz.

Çözüm:

2. (Prof.Dr. M.Akif Bakır)

Bir elektrik firması ömür süresi yaklaşık olarak $X \sim N(\mu = 800, \sigma = 40)$ dağılan ampüller üretmektedir. Rastgele olarak 30 ampülden oluşan bir örneklemde $\bar{x} = 788$ olarak hesaplanmıştır.

a. $H_0: \mu = 800$ hipotezini ; $H_1: \mu \neq 800$ hipotezine karşı test ediniz. $\alpha = 0.01$

b.Tek taraflı güven aralıklarını hesaplayınız.

Çözüm:

3. Bir çocuk bakım servisinde; çocukların sistolik kan basınçları $\boldsymbol{\mu = 115}$ **,** $\boldsymbol{\sigma^2 = 225\ mm}$ ile Normal dağılım gösteriyor. Bu kitleden rasgele alınacak bir çocuğa ilişkin aşağıdaki olasılıkları bulunuz.

a.$P(X < 140) = ? =$

b.$P(X > 100) = ?$

c.$P(110 < X < 120) = ?$

d. Kitlenin %99.unun sistolik kan basıncı kaç mmHg den azdır. **(X 'in 99.yüzdeliğini bulunuz)**

$$P(X < x) = 0.99$$

$$x = ?$$

f. Bir gün için doğan 10 çocuktan kaç tanesinin sistolik kan basıncı 100 mm den fazladır.

<u>**(Prof.Dr.Aysen APAYDIN ve diğerleri)**</u>