Örnekler:

1.

Spor ekipmanları üreten bir üretici, şirketince $\boldsymbol{\sigma = 0.5}$ kglık bir standard sapma ile ortalama kopma kuvveti **8** kg olduğu iddia edilen yeni bir sentetik balık oltası ipi geliştirilmiştir. Eğer rastgele bir örneklem ile **50** olta test edilmiş ve koppma kuvvetinin ortalaması $\boldsymbol{\bar{x} = 7.8}$ kg olarak bulunmuş ise, $\boldsymbol{\mu \neq 8}$ alternatif hipotezine karşı $\boldsymbol{\mu = 8}$ hipotezini test ediniz**.** $\boldsymbol{\alpha = 0.01}$ alınız.

1. Hipotez kurulur.

$H_0: \mu = 8$

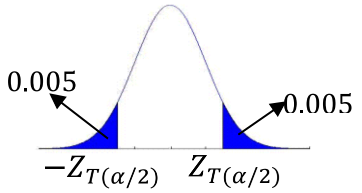
$H_1: \mu \neq 8$

2. Test istatistiği hesaplanır.

$$Z_H = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7.8 - 8}{0.5/\sqrt{50}} = \mathbf{-2.83}$$

olarak hesaplanır.

3.



$Z_H = -2.83 < -Z_{T\left(\frac{\alpha}{2}\right)} =$

-2.575 H_0 red edilir

Karar: $z_H = -2.83 < -2.575$ hesaplanan değer kritik bölgededir; $\boldsymbol{H_0}$ **red edilir.**

Güven Aralığı :

$$P\left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

$$\bar{x} \mp Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7.8 \mp 2.575\frac{0.5}{\sqrt{50}}$$

$\boldsymbol{\mu}$: $[\mathbf{7, 61, 7, 98}]$

(Prof.Dr. M.Akif Bakır)

2.

Geçen yıl Amerikada rastgele örnekleme ile seçilen **100** ölüm kaydı, ortalama yaşam süresinin **71.8** olduğunu göstermiştir.

a. Kitle standard sapmasının **8.9** yıl olduğu varsayımı ile bugünkü ortalama yaşam süresinin **70** yıldan fazla olduğu söyelenebilinir mi?

b. Çift taraflı güven aralığını oluşturunuz. $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$

<u>Çözüm:</u>

a.

1.

Hipotez kurulur.

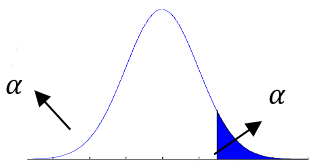
$H_0: \mu = 70$

$H_1: \mu > 70$

2. Test istatistiği hesaplanır.

$$Z_H = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{71.8 - 70}{8.9/\sqrt{100}} = \mathbf{2.02}$$

3. **K.B**



$Z_{T(\alpha)} =$
1.645

Karar: $z_H = 2.02 > 1.645$ hesaplanan değer kritik bölgededir; $\boldsymbol{H_0}$ **red edilir.**

Bugünkü ortalama yaşın 70 yıldan fazla olduğu sonucuna varılır.

b. Güven Aralığı :

$$P\left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{T(\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

$$\boldsymbol{Z_{T(0.025)} = 1.96}$$

$$\bar{x} \mp Z_{T(0.025)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 71.8 \mp 1.96 \frac{8.9}{\sqrt{100}}$$

$$\boldsymbol{\mu}: [\mathbf{70.05, 73.54}]$$

(Prof.Dr. M.Akif Bakır)

3. Edison Elektrik Kurumu çeşitli ev araçları tarafından yıllık kullanılan kilovat saat cinsinden elektrik tüketimine ilişkin rakamlar yayınlamıştır. Bir elektrikli süpürgenin bir yılda ortalama **46** kilovat saat elektrik kullandığı iddia ediliyor. Planlanan bir çalışma ile **12** evden oluşan rastgele bir örneklem alınmış ve elektrikli süpürgelerinin **11.9** kilovat saatlik bir standard sapma ile yıllık ortalama **42** kilovat saat elektrik kullandıkları bulunmuştur. Ortalama elektrik kullanımının **46** saatten az olduğu hipotezini test ediniz.

Çözüm:

a.

1.

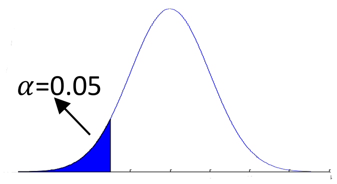
$H_0: \mu = 46$

$H_1: \mu < 46$

2..Test istatistiği hesaplanır.

$$t_H = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{42 - 46}{11.9/\sqrt{12}} = \mathbf{-1.16}$$

3. **K.B**



$-t_{T(\alpha, n-1)}$
$= -1.796$

Karar: $t_H = -1.16 > -t_{T(0.05,\ 11)} = -1.796$

$\boldsymbol{H_0}$ **red edilemez.**

(Prof.Dr. M.Akif Bakır)

4.

Yeni bir ilaç kalp hastası **8** kişi üzerinde deneniyor. Bu hastaların tansiyonlarının ortalaması **11,** standard sapması **3.207** olarak bulunuyor.

a.%95 güven düzeyinde;kitle ortalamasının güven aralığını bulunuz.

Çözüm:

$$t_{T(\alpha/2,\ n-1)} = t_{T(0.025,7)} = 2.365$$

$$P\left(\bar{x} - t_{T\left(\frac{\alpha}{2},\ n-1\right)}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{T(\alpha/2,\ n-1)}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \longrightarrow (1-\alpha) \text{ güven düzeyinde } \mu \text{ için güven aralığı}$$

$$P\left(11 - 2.365\frac{3.207}{\sqrt{8}} \leq \mu \leq 11 + 2.365\frac{3.207}{\sqrt{8}}\right) = 1-\alpha \longrightarrow (1-\alpha) \text{ güven düzeyinde } \mu \text{ için güven aralığı}$$

$$\boldsymbol{\mu}: [\mathbf{8.32, 13.68}]$$

Yorum: İlgili aralığın μ kitle ortalamasını içeren aralıklardan biri olma olasılığı %95 dir.

(Prof.Dr. Ayşen Apaydın ve diğerleri)

b. Bir araştırmacı ortalama tansiyonun 12 den farklı olduğunu iddia etmektedir. İddiayı test ediniz.

1.

$H_0: \mu = 12$

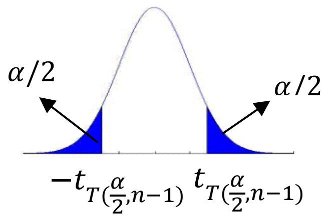
$H_1: \mu \neq 12$

2.

$$t_H = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{11-12}{3.207/\sqrt{8}} = \mathbf{-1.13}$$

3.

$t_{T(\alpha/2,\ n-1)} = t_{T(0.025,7)}$
$= \mathbf{2.365}$



$t_H = -1.13 >$
$-t_{T\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)} = -2.365 \quad H_0$
red edilemez.

4. Bir üretim sürecinde üretilen birimlerin uzunlukları kontrol ediliyor. Standard sapma **0.45** mm olarak bulunuyor. Bir kalite kontrol uzmanı her sabah rasgele seçilen **40** birim üzerinde kontrolünü sürdürüyor. Bir günde ortalama uzunluk **35.62** mm olduğunda,

a. **%95** güven düzeyinde kitle ortalamasının güven aralığını bulunuz.
b. Güven aralığının uzunluğunu bulunuz.
c. Güven aralığının uzunluğunun **0.30** mm olması, hangi güven katsayısı ile mümkündür?
d. **%95** güven düzeyinde aralığın boyunun 0.1mm olması için gerekli örneklem genişliği ne olmalıdır?
e. **%95** güven düzeyinde tek taraflı güven aralığına göre kitle ortalaması hangi değerden küçüktür.
f. Ortalama uzunluğum **40 mm** den küçük olması hipotezini test ediniz.

Çözüm:

a.

$\overline{x} = 35.62, \sigma = 0.45\ , n = 40$

$1 - \alpha = 0.95 \ \ \alpha = 0.05\ ;$

$\boldsymbol{Z_{T(0.025)}} = \mathbf{1.96}$

$$P\left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$P\left(35.62 - 1.96\frac{0.45}{\sqrt{40}} \leq \mu \leq 35.62 + 1.96\frac{0.45}{\sqrt{40}}\right) = 0.95$$

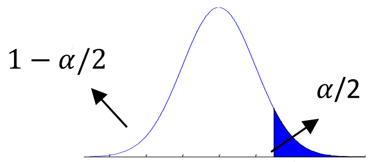
$\boldsymbol{\mu}$: $[\mathbf{35.48}, \mathbf{35.76}]$

b. Güven aralığının uzunluğu:

$$\left(\bar{x}+Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\bar{x}-Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2*1.96*\frac{0.45}{\sqrt{40}}=\mathbf{0.28}$$

c. $2Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.30 \rightarrow 2*Z_{T(\alpha/2)}*\frac{0.45}{\sqrt{40}}=0.30$

$Z_{T(\alpha/2)}=2.1$



$Z_{T(\alpha/2)}$
$= \mathbf{2.1}$

$$1-\frac{\alpha}{2}=0.9821 \rightarrow \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0.0358}$$

d. $2Z_{T(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.1 \rightarrow n=?$

$$2*1.96*\frac{0.45}{\sqrt{n}}=0.1$$

$\boldsymbol{n}\cong\mathbf{311}$

e. Tek taraflı güven aralıkları förmülleri ;

$$P\left(\mu<\bar{x}+Z_{T(\alpha)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

$$P\left(\mu>\bar{x}-Z_{T(\alpha)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

$\boldsymbol{Z_{T(0.05)}}=\mathbf{1.645}$

$$P\left(\mu<35.62+1.645\frac{0.45}{\sqrt{40}}\right)=0.95$$

$$\boldsymbol{P(\mu<35.737)=0.95}$$

f.

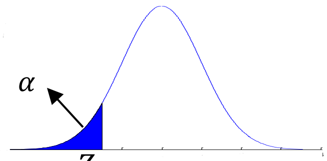
1.

$H_0: \mu = 40$

$H_1: \mu < 40$

2. Test istatistiği hesaplanır.

$$Z_H = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{35.62 - 40}{0.45/\sqrt{40}} = \mathbf{-61.55}$$



$\boldsymbol{Z_H < -Z_{T(\alpha)=}\ -1.645}$ ise H_0
red edilir.

(Prof.Dr. Ayşen Apaydın ve diğerleri)

Özel durum:

$n > 30$ olduğunda *t* istatistiği yerine *z* istatistiği kullanılır.

5.

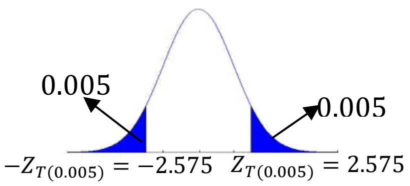
Belli bir ilaç kullanılarak yapılan diş dolgularının ortalama dayanma süresinin 5 yıldan farklı olduğu iddia edilmektedir. İlgili ilaç kullanılarak yapılan diş dolgularından rasgele olarak 41 tanesi rasgele olarak seçilmiş ve örnek ortalaması 5.9 yıl, standart sapması da 1.74 olarak hesaplanmıştır. $\alpha = 0.01$ anlamlılık düzeyinde iddiayı test ediniz. Kitle ortalamasının %99 güven düzeyinde güven sınırlarını oluşturunuz.

σ^2 bilinmiyor, $n > 30$ olduğun da *t* istatistiği yerine *z* istatistiği kullanılır.

1) $H_0: \mu = 5$
$H_1: \mu \neq 5$

2) $Z_H = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{5.9-5}{1.74/\sqrt{41}} = 3.33$

3)



$Z_H = 3.33 > Z_{T(\alpha/2=0.005)} = 2.575$ olduğundan H_0 red edilir, yani belli bir ilaç kullanılarak yapılan diş dolgularının ortalama dayanma süresinin 5 yıldan farklı olduğu %99 güvenle söylenebilir.

Güven aralığı

$$P\left(\bar{x} - Z_{T(\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{T(\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

$$\bar{x} \mp Z_{T(\alpha/2)}\frac{s}{\sqrt{n}} = 5.9 \mp 2.575\frac{1.74}{\sqrt{41}} \begin{cases} 5.2003 \\ 5.5997 \end{cases}$$

μ: $[5.2003, 5.5997] \longrightarrow$ Bu aralığın μ'yü içeren aralıklardan biri olması olasılığı %99'dur.

(Acık ders DİS 161 : Doç.Dr.Esin Köksal BABACAN-Dr.Öğrt.Üye.Sibel Açık KEMALOĞLU)

Çalışma Soruları:

1. (Prof.Dr. M.Akif Bakır)

Bir araştırma raporunda UCLA Tıp Fakültesinde farelerin diyetlerindeki kalori miktarlarında yapılan değişiklik ile normalde 32 ay olan yaşam sürelerinin 32 aydan fazla olduğu iddia edilmektedir. Bu diyet ile beslenen 64 fare için örneklem ortalama ve sapması $\bar{x} = 38$ ay $s = 5.8$ ay olarak elde edilmiştir.

a. $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyinde hipotezi test ediniz.

Dikkat: $\boldsymbol{n = 64 > 30}$

b. Çift taraflı güven aralığı oluşturunuz.

Çözüm:

2. (Prof.Dr. M.Akif Bakır)

Bir elektrik firması ömür süresi yaklaşık olarak $X \sim N(\mu = 800, \sigma = 40)$ dağılan ampüller üretmektedir. Rastgele olarak 30 ampülden oluşan bir örneklemde $\bar{x} = 788$ olarak hesaplanmıştır.

a. $H_0: \mu = 800$ hipotezini ; $H_1: \mu \neq 800$ hipotezine karşı test ediniz. $\alpha = 0.01$

b.Tek taraflı güven aralıklarını hesaplayınız.

Çözüm:

3. Bir çocuk bakım servisinde; çocukların sistolik kan basınçları $\boldsymbol{\mu = 115}$ **,**$\boldsymbol{\sigma^2 = 225\ mm}$ ile Normal dağılım gösteriyor. Bu kitleden rasgele alınacak bir çocuğa ilişkin aşağıdaki olasılıkları bulunuz.

a.$P(X < 140) =? =$

b.$P(X > 100) =?$

c.$P(110 < X < 120) =?$

d. Kitlenin %99.unun sistolik kan basıncı kaç mmHg den azdır. **(X 'in 99.yüzdeliğini bulunuz)**

$$P(X < x) = 0.99$$

$$x=?$$

f. Bir gün için doğan 10 çocuktan kaç tanesinin sistolik kan basıncı 100 mm den fazladır.

(Prof.Dr.Aysen APAYDIN ve diğerleri)