

BEKLENEN DEĞER/ VARYANS:

Tanım:

X , $f(x)$ olasılık fonksiyonu ile bir rasgele değişken, $g(x)$ X 'in bir fonksiyonu olsun. $g(x)$ 'in beklenen değeri,

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{D_X} g(x)f_X(x), & X \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx, & X \text{ sürekli} \end{cases}$$

dır.

Tanım:

X , $f(x)$ of ile bir rasgele değişken .

a. Kesikli durum için, $E(X)$ değeri,

$$E(X) = \sum_{D_X} x f_X(x)$$

X rasgele değişkenin **beklenen değeridir**.

b. Sürekli durum için, $E(X)$ değeri,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

X rasgele değişkenin **beklenen değeridir**.

$Var(X)$ değeri,

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

X rasgele değişkeninin varyansıdır.

$E(X^k)$: X rasgele değişkeninin k . momentidir. Bu durumda;

$E(X^2)$: X rasgele değişkeninin 2. momentidir.

$$E(X^2) = \sum_{D_X} x^2 f_X(x) \quad (\text{kesikli durum})$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \quad (\text{sürekli durum})$$

Not:

X rasgele değişkeninin beklenen değeri μ , varyansı σ^2 ile gösterilir. Varyansın karekökü standard sapmayı verir.

Beklenen Değer Kuralları:

X bir rasgele değişken, a bir sabit.

1. $E(a) = a$
2. $E(X + a) = E(X) + a$
3. $E(aX) = aE(X)$

Varyans Kuralları:

1. $Var(a) = 0$
2. $Var(X + a) = Var(X)$
3. $Var(aX) = a^2 Var(X)$

Teorem: $a, b \in \mathbb{R}$

a. $E(aX + b) = aE(X) + b$

b. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Örnekler:

1. X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{3}, D_X = \{-1, 0, 1\}$ dir.

$$E(X) = ?, Var(X) = ?, E(X^3) = ? E(2X + 3) = ? Var(2X + 3) = ?$$

Çözüm:

$$E(X) = \sum_{x=-1}^1 x f_X(x) = \frac{1}{3}(-1 + 0 + 1) = 0$$

$$E(X^2) = \sum_{x=-1}^1 x^2 f_X(x) = \frac{1}{3}((-1)^2 + 0 + 1^2) = \frac{2}{3}$$

$$Var(X) = \frac{2}{3} \quad E(X^3) = \frac{1}{3}(-1^3 + 0 + 1^3) = 0$$

$$E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 3 \quad E(2) = 2 \quad Var(2) = 0$$

$$Var(2X + 3) = 4Var(X) = \frac{8}{3}$$

Öğrenci: $X, f(x)$ of ile kesikli bir rasgele değişkendir.

$X = x$	2	3	5
$f(x)$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = ? \quad Var(X) = ? \quad E(X^3) = ? \quad E(X + X^2) = ? \quad E(2X + 4) = ? \quad Var(2X + 4) = ?$$

Öğrenci: X , $f(x)$ of ile kesikli bir rasgele değişkendir.

$$f(x) = cx \quad D_X = \{1, 2, 3\}$$

$$c = ? \quad E(X) = ? \quad Var(X) = ? \quad P(0 < X \leq 1) = ? \quad P(1 < X \leq 2) = ? \quad P(X > 2) = ?$$

$$P(X \leq 3) = ?$$

X , $f(x)$ oyf ile sürekli bir rasgele değişkendir.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, \dots 0 < x < 1 \\ 0, \dots \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$E(X) = ? \quad Var(X) = ?$$

Çözüm:

$$E(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x 3x^2 dx = \frac{3}{4}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 3x^2 dx = \frac{3}{5}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = 0.0625$$

Student: X , $f(x)$ oyf sürekli bir rasgele değişkendir.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, \dots -1 < x < 1 \\ 0, \dots \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

a. c = ? $E(X)$ = ? $Var(X)$ = ? $P(0 < X \leq 1)$ = ? $P(X \leq 1.5)$ = ?
 $P(0 < X \leq 2)$ = ? $P(X \geq 2)$ = ? $P(X \leq 2)$ = ?

Çalışma Soruları:

1. Herbir durum için c sabitinin değerlerini bulunuz $E(X) = ?$ $Var(X) = ?$. Bazı olasılıklar tanımlayıp hesaplayınız.

$$f(x) = cx^2, \quad D_X = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$$

$$f(x) = c \binom{4}{x}, \quad D_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

2. Herbir durum için c sabitinin değerlerini bulunuz $E(X) = ?$ $Var(X) = ?$. Bazı olasılıklar tanımlayıp hesaplayınız.

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \dots 0 < x < 2 \\ 0, & \dots \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} c\sqrt{x}, & \dots 0 < x < 4 \\ 0, & \dots \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bir rasgele değişkenin dönüşümü:

Örnek:

1.

X , $f(x)$ of ile bir rasgele değişken

$f(x) = \frac{1}{5}$ $D_X = \{-2, -1, 0, 1, 2, \}$. $Y; Y = X^2$ olarak tanımlı $X'in$ fonksiyonu bir rasgele değişken,

Y rasgele değişkeninin olasılık fomnksiyonunu elde ediniz.

Cözüm:

İlk önce D_Y belirlemeliyiz

$$Y = X^2 \rightarrow D_Y = \{0, 1, 4\}$$

$$f_Y(0) = P(Y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{5}$$

$$f_Y(1) = P(Y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{2}{5}$$

$$f_Y(4) = P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{2}{5}$$

$Y = y$	0	1	4
$P(Y = y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Öğrenci: X , $f(x)$ of ile bir rasgele değişken

$f(x) = \frac{x^2}{10}$ $D_X = \{-2, -1, 1, 2, \}$. $Y ; Y = X + 2$ olarak tanımlı bir rasgele değişken,

Y rasgele değişkeninin olasılık fpnksiyonunu elde ediniz.

