Bazı Kesikli Özel Rasgele Değişkenler:

1. Bernoulli Rasgele Değişken

2. Binom Rasgele Değişken

3.Geometric Rasgele Değişken

4.Poisson Rasgele Değişken

Bernoulli Rasgele Değişken:

Bir deneydeki **sonuçlar** başarı ya da başarısızlık olarak nitelendirildiğinde, böyle deneylere **iki** tür sonuçlu deney, Bernoulli deneyi veya Bernoulli denemesi denir. Aşağıdaki gibi tanımlanan X rasgele değişkenine **Bernoulli rasgele değişkeni** , dağılımına da **Bernoulli dağılımı** denir. denir.Burada;

X: Başarı sayısı olarak tanımlıdır.

X rasgele değişkeninin aldığı değerler 0,1 olup, $D_X = \{0,1\}$ dir. X'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \ \ x = 0,1$$

olarak tanımldır. Olasılık tablosu

x	0	1
$P(X=x)$	$q = 1-p$	p

dır. Burada;

p:Başarı olasılığı (dağılımın parametresi)

$q = 1 - p$: Başarısızlık olasılığı

Örnekler: (Bernoulli denemesi)

1.Tura gelmesi başarı sayılan bir para atışının deneyi

2. Kusursuz parça üretme olasılığı p = 0.99 olan bir makinada bir parça üretilmesi,

3. Bir atışta başarı olasılığı $p =0.80$ olan bir basketbolcunun bir atış yapması,

4. 6 Kırmızı ve 4 siyah top içeren bir kavanozda bir top çekilmesi.

Bernoulli rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı ;

$$E(X) = \sum_x x\, f(x) = 0(1-p) + 1p = p$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2\, f(x) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

dır. X' e Bernoulli dağılımına sahiptir denir ve $X \sim Bernoulli(1,p)$ olarak gösterilir.

2. Binom Dağılımı

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında, bağımsız olarak n kez tekrarlanmasıyla oluşan deneye **Binom Deneyi** denir.

X: n denemedeki başarı sayısı

olarak tanımlıdır.

X rasgele değişkeninin aldığı değerler $D_X = \{0,1,2,\ldots,n\}$ olup, X'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \;\; x = 0,1,\ldots,n$$

Binom rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı ;

$E(X) = np$

$Var(X) = npq$

dır. X'e Binom dağılımına sahiptir denir ve $X \sim Binom(n,p)$ olarak gösterilir.

Örnekler: Yukarıda tanımlanan Bernoulli Denemelerinin n kez tekrarlanması .

Örnekler :

5 seçenekli 20 soruluk bir test sınavında sorular işaretlendiğinde,

a. En az 10 doğru soru tutturma olasılığı nedir?
b. Tutturulan doğru cevap sayısının beklenen değeri nedir?

Çözüm:

a.

$$X \sim Binom(n = 20, p = \frac{1}{5})$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{20}{x} \frac{1}{5}^{x} \frac{4}{5}^{20-x} \quad , \quad x = 0,1, \dots ,20$$

$$P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{20} \binom{20}{x} \frac{1}{5}^{x} \frac{4}{5}^{20-x}$$

b.

$$E(X) = np = 20 * \frac{1}{5} = 4$$

Öğrenci :

Bir makine günde 5 parça üretmektedir. Bir parçayı kusursuz olarak işlemesi olasılığı $p = \frac{4}{5}$ olsun.

X: Bir günde kusursuz olarak işlenen parça sayısı olsun.

a. X ‘in olasılık fonksiyonunu oluşturunuz.
b. $E(X)$ hesaplayınız.

Ödev:

Düzgün bir paranın 3 kez atılışında,

X: 3 atışta gelen turaların sayısı

Bu şekilde tanımlanan rasgele değişken Binom dağılımına sahiptir.

a. Notasyon olarak gösteriniz.
b. Olasılık fonksiyonunu oluşturunuz.
c. $E(X), Var(X)$ bulunuz.

Çözüm:

İst 250

Olasılık ve İstatistik : Dr Gültaç Eroğlu İNAN

Geometrik Rasgele Değişken:

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesi, aynı şartlar altında, bağımsız olarak bir başarı elde edinceye kadar tekrarlansın. Aşağıdaki gibi tanımlanan X rasgele değişkenine **Geometrik rasgele değişken** , dağılımına da **Geometrik dağılım** denir.

X : 1 başarı elde edilinceye kadar yapılan deneme sayısı

X rasgele değişkeninin aldığı değerler $D_X = \{1, \dots\}$

dir. X'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1,2,3, \dots \quad 0 < p < 1$$

dır. Burada;

p:Başarı olasılığı (dağılımın parametresi)

$q = 1 - p$: Başarısızlık olasılığı

Geometrik rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı :

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$X \sim Geo(p)$$

olarak gösterilir.

Örnekler:

1. Bir atıcı için belli bir hedefi vurması olasılığının $p = 0,75$ olduğu bilinsin. Atıcı, hedef bir isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır.

a) $E(X) =?$ $Var(X) =?$

b) Hedefi 4 atıştan (deneme) önce vurması olasılığı ?

c) En az 3 atış yapması olasılığı nedir?

Çözüm:

a)

X : Hedef bir isabet alıncaya kadar yapılan atış sayısı

$$f(x) = P(X = x) = 0,75\ (0,25)^{x-1} \quad x = 1,2,3, \ldots$$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{4}{3}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{4}{9}$$

b)

$$P(X < 4) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{63}{64}$$

c)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \big(f(1) + f(2)\big) = \frac{1}{16}$$

2.

Bir torbada 7 beyaz, 5 siyah top bulunmaktadır. Her defasında yerine konularak bir top çekiliyor. Burada;

X: Siyah bir top çekmek için yapılan deneme sayısı

a) Siyah topun ilk defa 5'inci çekilişte çıkma olasılığı nedir?

b) $E(X) = ?\quad Var(X) = ?$

c) Siyah top gelene kadar 4 ten fazla deneme yapılması olasılığı nedir?

<u>Çözüm:</u>

Poisson Rasgele Değişken :

Bu Dağılım sürekli ortamlarda (zaman, alan, hacim, …) kesikli sonuçlar veren deneylerin modellenmesinde kullanılır.

$X, (0, t]$ zaman aralığında meydana gelen sonuçların (bir olayın gerçekleşme) sayısı

$D_X = \{0,1, \dots\}$ olup, . X'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2, \dots$$

dır.

λ: gerçekleşen ortalama olay sayısı

Poisson rasgele değişkenin beklenen değer ve varyansı :

$\mu = E(X) = \lambda$

$\sigma^2 = Var(X) = \lambda$

$$X \sim Poisson(\lambda)$$

olarak gösterilir.

Örnekler:

1. Bir hastanenin acil servisine 15 dakikalık bir zaman aralığında ortalama 4 hasta gelmektedir. Bu zaman aralığında,

a) Hasta gelmemesi olasılığı nedir?
b) Bir hasta gelmesi olasılığı nedir?
c) En az 2 hasta gelmesi olasılığı nedir?
d) En çok 3 hasta gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm:

a)

X:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2, \dots, \qquad \lambda = 4$$

$$P(X=0)=\frac{e^{-4}4^{0}}{0!}=0.0183$$

b)

$$P(X=1)=\frac{e^{-4}4^{1}}{1!}=4*0.0183=\mathbf{0.0732}$$

c) $P(X\geq 2)$ =1- $P(X<2)=$

$=\mathbf{1}-\ (f(0)+f(1))$

$=\mathbf{1}-\ (e^{-4}+4e^{-4})$

$=\mathbf{1}-\ (5*e^{-4})$

$=\mathbf{1}-\ (5*0.0183)$

$=\mathbf{1}-\ 0.2379$

$=\mathbf{0.7621}$

d)

$P(X\leq 3)=\big(f(0)+f(1)+f(2)+f(3)\big)$

$=\left(e^{-4}+4e^{-4}+8e^{-4}+\frac{32}{3}e^{-4}\right)$

$=\frac{71}{3}e^{-4}$

Öğrenci:

Bir kentin içinde bir ayda ortalama 200, bir günde ortalama 5 trafik kazası olmaktadır. Belli bir gün için meydana gelen kaza sayısının,

a) 5

b) 5 den az

c) 5 dan çok olması olasılığı nedir?

d) Hiç kaza olmaması olasılığı nedir?

Çözüm: