

ПРАКТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ  
В ФИЗИКУ ЛАЗЕРОВ



Электронный учебник создан для студентов, обучающихся на естественнонаучных факультетах Новосибирского государственного университета. Основная задача «Практического введения в физику лазеров» – изложение основ лазерной физики в объеме, достаточном для осознанного выполнения лабораторных работ по теме «Оптика лазеров» в практикуме по физической оптике кафедры общей физики ФФ НГУ. Для понимания изложенного материала необходимо наличие базовых знаний по классической электродинамике и оптике. В случаях, когда для объяснения процессов и явлений становится необходимым привлечение концептуальных основ квантовой физики, проблема рассматривается на популярном уровне параллельно с изложением истории возникновения квантовой механики. В последней главе учебника приведено описание процесса выполнения лабораторных работ.

Все отмеченные **цветом** элементы текста электронного учебника являются внутренними (формулы, рисунки, литературные источники) либо внешними **гиперссылками**.

# Оглавление

## Глава 1. Излучение и его спектр

§ 1.1. Классическая физика .....	5
1.1.1. Линии Фраунгофера .....	5
1.1.2. Опыты Киргхофа и Бунзена .....	6
1.1.3. Закон излучения Киргхофа .....	8
1.1.4. Термодинамика излучения .....	9
1.1.5. Опыты Люммера и Прингсхейма .....	10
§ 1.2. Квантовая природа излучения .....	13
1.2.1. Формулы Бальмера и Ридберга .....	13
1.2.2. Модель атома Бора – Резерфорда .....	14
1.2.3. Теория излучения Эйнштейна .....	15
1.2.4. Формула Планка .....	20
1.2.5. Формула Рэля – Джинса .....	22
1.2.6. Аппроксимация Вина .....	23
§ 1.3. Узкие спектральные линии .....	24
1.3.1. Однородное уширение .....	24
1.3.2. Неоднородное уширение .....	28

## Глава 2. Устройство лазера

§ 2.1. Активная среда .....	30
2.1.1. Населенность уровней .....	30
2.1.2. Получение инверсии населенностей .....	32
2.1.3. Оптический квантовый усилитель .....	34
§ 2.2. Оптический резонатор .....	34
2.2.1. Качество резонатора .....	37

2.2.2. Время жизни фотона и добротность .....	38
§ 2.3. Свойства лазерного излучения .....	40
2.3.1. Поперечные моды резонатора .....	44
<b>Глава 3. Лабораторная работа 4.1</b>	
§ 3.1. Газовый He-Ne-лазер .....	48
§ 3.2. Интерферометр Фабри – Перо .....	50
§ 3.3. Схема экспериментальной установки .....	57
§ 3.4. Выполнение работы .....	58
3.4.1. Контрольные вопросы .....	59
<b>Глава 4. Лабораторная работа 4.3</b>	
§ 4.1. Лазер на растворе красителя .....	60
§ 4.2. Схема экспериментальной установки .....	63
§ 4.3. Выполнение работы .....	67
4.3.1. Контрольные вопросы .....	67
<b>Глава 5. Лабораторная работа 4.4</b>	
§ 5.1. Твердотельный Nd:YAG лазер .....	68
5.1.1. Населенности электронных уровней .....	69
5.1.2. Система кинетических уравнений .....	72
§ 5.2. Схема экспериментальной установки .....	76
§ 5.3. Выполнение работы .....	77
5.3.1. Контрольные вопросы .....	79
<b>Глава 6. Лабораторная работа 4.5</b>	
§ 6.1. Генерация второй гармоники .....	80
6.1.1. Нелинейная поляризация среды .....	80
6.1.2. Фазовый синхронизм .....	89
§ 6.2. Схема экспериментальной установки .....	94
§ 6.3. Выполнение работы .....	96
6.3.1. Контрольные вопросы: .....	96

## **Библиографический список**

# Глава 1. Излучение и его спектр

Создание лазеров справедливо считается одним из выдающихся достижений физики XX в., поэтому представляется чрезвычайно интересным и полезным проследить историю накопления экспериментальных данных и пути развития научной мысли в этом направлении. В этой связи логично начать рассмотрение вопроса о лазерах с краткого исторического обзора важнейших открытий классической оптики, явившихся основными вехами на пути познания природы электромагнитного излучения.

## § 1.1. Классическая физика

Слово «спектр» (лат. *spectrum* – видение, появление) было введено в лексикон физических терминов в 1671 г. **И. Ньютоном** для описания собственных оптических экспериментов. Он заметил, что когда узкий луч солнечного света падает под некоторым углом на поверхность стеклянной призмы, часть света отражается, а часть проходит внутрь стекла и выходит наружу в виде разноцветных лучей. Для объяснения этого явления И. Ньютон предложил гипотезу, согласно которой свет состоит из corpuscul (частиц) разных цветов, распространяющихся в прозрачном веществе с разной скоростью, образуя цветовой *спектр*.

### 1.1.1 Линии Фраунгофера

В 1802 г. **У. Х. Уолластон** обнаружил наличие узких темных линий в непрерывном спектре солнечного излучения. Эти линии

называются «фраунгоферовыми линиями», в честь знаменитого немецкого оптика **Й. Фраунгофера**. Он, не зная о результатах наблюдений У. Х. Уолластона, сделал аналогичное открытие в 1814 г., используя стеклянные призмы гораздо более высокого качества, чем во времена И. Ньютона. На фоне непрерывного спектра солнечного излучения он обнаружил более 500 темных полос. В 1821 г. Й. Фраунгофер научился изготавливать и применять для изучения спектра **дифракционные решетки**, с помощью которых измерил длины волн и составил каталог темных линий в спектре солнечного излучения, присвоив каждой из них буквенно-цифровой код (рис. 1.1). Ученый также обнаружил, что

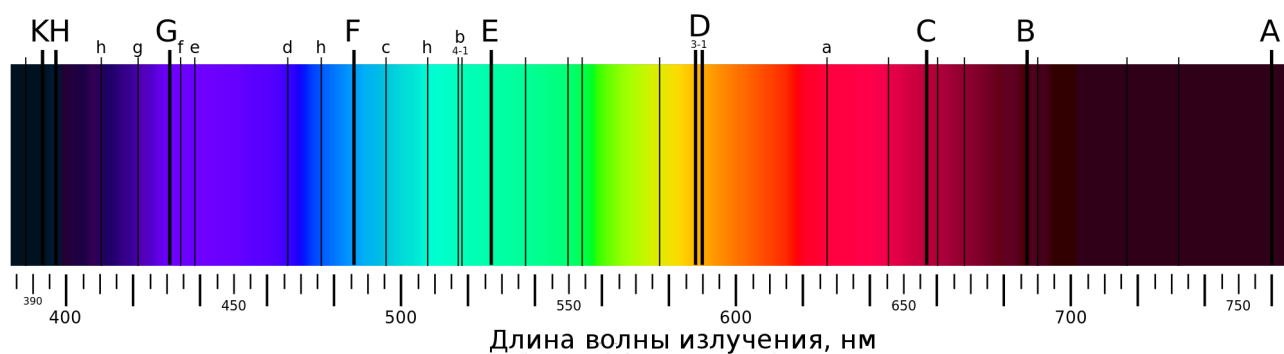


Рис. 1.1. «Фраунгоферовы линии» поглощения на фоне непрерывного спектра Солнца

в спектрах излучения пламени при сжигании различных веществ наблюдаются узкие светлые линии на фоне непрерывного спектра, причем положения этих линий кардинальным образом зависят от состава добавляемых в огонь примесей. Однако природа возникновения узких спектральных линий оставалась загадкой, а их положения и интенсивности казались случайными.

### 1.1.2 Опыты Кирхгофа и Бунзена

В 1859 г. **Г. Р. Кирхгоф** совместно с **Р. В. Бунзеном** обнаружили, что длины волн фраунгоферовых линий D-серии в точности совпадают с линиями излучения пламени свечи, если в огонь добавить соединения натрия. С другой стороны, при прохождении

через пламя яркого солнечного света, видность темных линий на фоне непрерывного спектра существенно увеличивалась. Резюмируя результаты многочисленных наблюдений, Г. Р. Кирхгоф и Р. В. Бунзен сделали чрезвычайно важные выводы:

- 1) Нагретое плотное вещество является источником излучения с непрерывным спектром.
- 2) Нагретое вещество в разреженном газообразном состоянии является источником излучения, спектр которого состоит из отдельных узких линий. Длины волн этих линий определяются элементарным составом нагретого газа.
- 3) Если горячее тело окружено газом, в непрерывном спектре излучения наблюдаются линии поглощения на тех же длинах волн, где этот газ излучает в нагретом состоянии.

Для проверки указанных выводов в 1868 г. Парижская академия наук организовала экспедицию в Индию, где предстояло полное **солнечное затмение**. Там ученые обнаружили: все темные линии в момент затмения стали, как и было предсказано, яркими на темном фоне. Стало ясно, что, измеряя спектр излучения небесных светил, можно делать выводы о составе их вещества – с этого момента в науке появился **спектральный анализ**, мощный метод дистанционного определения химического состава. Соответствие линий химическим элементам выяснялось постепенно: в частности, Г. Р. Кирхгоф и Р. В. Бунзен методом спектрального анализа открыли цезий (1860) и рубидий (1861).

Очевидным экспериментальным фактом стала способность любого тела излучать и поглощать энергию в виде излучения с различными спектральными характеристиками, которые зависят от температуры, химического состава и агрегатного состояния вещества. Важно понимать, что в ту пору атом считался элементарной

частицей материи, а механизм поглощения и излучения энергии веществом был совершенно непонятен <sup>1</sup>.

### 1.1.3 Закон излучения Киргхофа

Для выяснения макроскопических закономерностей в вопросах излучения и поглощения лучистой энергии на помощь пришла **термодинамика**. При падении излучения на некоторое тело часть его отражается, часть поглощается и часть может проходить сквозь тело. Доля поглощаемого излучения называется поглощательной способностью тела  $A(\lambda, T)$ , которая для данного тела зависит только от длины волны излучения  $\lambda$  и температуры тела  $T$ . С другой стороны, любое нагретое тело излучает энергию по некоторому закону  $E(\lambda, T)$ , именуемому излучательной способностью тела. Если тело и излучение находятся в термодинамическом равновесии, должно выполняться равенство потоков лучистой энергии в обе стороны через произвольную поверхность (вне рассматриваемого тела) в любом спектральном интервале  $[\lambda : \lambda + \Delta\lambda]$ . Обозначив поток падающей извне энергии через  $I(\lambda, T)$ , приравняем его к сумме потоков отраженной и излученной энергий:

$$I(\lambda, T) = I(\lambda, T)(1 - A(\lambda, T)) + E(\lambda, T) . \quad (1.1)$$

Из уравнения (1.1) следует **закон излучения Киргхофа**, полученный им в 1859 г.:

$$E(\lambda, T)/A(\lambda, T) = I(\lambda, T) . \quad (1.2)$$

*«Отношение излучательной способности любого тела к его поглощательной способности одинаково для всех тел и являет-*

---

<sup>1</sup> В сентябре 1860 г. состоялся **международный съезд химиков в Карлсруэ** – первая международная конференция, посвященная химии. Результатом съезда стало утверждение атомно-молекулярного учения. Было установлено, что молекула – это наименьшее количество вещества, вступающее в химические реакции и определяющее физические свойства, а атом – наименьшее количество элемента, содержащееся в молекулах.



ся универсальной функцией только длины волны и температуры» [1]. Г. Р. Киргхоф ввел в теорию излучения понятие **абсолютно черного тела** – гипотетической субстанции, поглощающей все падающее на нее излучение во всех диапазонах спектра и ничего не отражающей. Для такого тела  $A(\lambda, T) \equiv 1$ , и, соответственно,  $E(\lambda, T) = I(\lambda, T)$ . Закон Киргхофа можно сформулировать иначе: «*Отношение лучеиспускательной способности тела к его поглощательной способности есть универсальная функция длины волны и температуры, равная лучеиспускательной способности абсолютно черного тела*».

Решение вопроса об общей интенсивности и спектре излучения абсолютно черного тела стало одной из важнейших задач физики второй половины XIX в. Фундаментальное значение этого вопроса заключалось в понимании законов излучения, а практическое – в создании эталонных источников излучения.

#### 1.1.4 Термодинамика излучения

В 1865 г. Дж. К. Максвелл завершил построение классической теории электромагнитного поля, из которой следовало, в частности, что свет является электромагнитной волной, распространяющейся в вакууме со скоростью света  $c$ . В 1888 г. Г. Р. Герц подтвердил это опытным путем<sup>2</sup>. Была установлена связь длины волны и частоты колебаний:  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . Используя линейную связь плотности энергии и **давления излучения**, наличие которого следует из теории Максвелла, были установлены еще два закона равновесного излучения [1]:

- **Закон Стефана – Больцмана** (1884), утверждающий что *излучательная способность абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры*:

---

<sup>2</sup> Известно, что Г. Р. Герц не верил в существование электромагнитных волн и проводил свой опыт с целью опровергнуть выводы Дж. К. Максвелла.

$$\int_0^{\infty} I_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} I_{\omega}(\omega, T) d\omega = \sigma T^4, \quad (1.3)$$

где  $\sigma$  – универсальная постоянная, а  $I_{\omega} = (\lambda/\omega)I_{\lambda}$ .

- **Закон смещения Вина** (1893), согласно которому неизвестная функция  $I_{\omega}(\omega, T)$  может быть выражена через универсальные функции ( $\phi(x)$  или  $\psi(x)$ ) только одного аргумента –  $\omega/T$ :

$$I_{\omega}(\omega, T) = T^3 \phi(\omega/T) = \omega^3 \psi(\omega/T). \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что если известно спектральное распределение равновесного излучения при любой произвольной температуре  $T_1$ , можно найти его для любой другой температуры  $T_2$ .

### 1.1.5 Опыты Люммера и Прингсхейма

В 1895 г. О. Р. Люммер и В. Вин предложили экспериментальную модель реализации абсолютно черного тела – полость из непрозрачного материала с небольшим отверстием. Свет, проходящий внутрь через отверстие, полностью поглощается стенками, а снаружи отверстие будет выглядеть совершенно черным. Тепловое излучение внутри полости находится в термодинамическом равновесии со стенками. Поскольку отверстие можно считать сколь угодно малым, выходящее через него излучение лишь в бесконечной малой степени нарушает это равновесие и, таким образом, является искомым равновесным тепловым излучением.

В 1897 г. О. Р. Люммер и Э. Прингсхейм создали рабочую модель черного тела, которая представляла собой полость, покрытую с внутренней стороны сажей или оксидом урана. Для стабилизации температуры модель помещалась в различные жидкости (жидкий кислород, кипящую воду, горячую селитру и т. п.) или в

глиняную печь. Первые измерения полностью подтвердили справедливость закона Стефана – Больцмана. В 1899 г. О. Р. Люммер и Э. Прингсхейм провели аккуратные измерения спектральных распределений интенсивности излучения для длин волн от 0.7 мкм до 6 мкм, увеличив максимальную температуру до 1650 °С. В качестве рабочей теории для сравнения с экспериментом авторы использовали так называемую «аппроксимацию Вина» (см. 1.2.6), предложенную В. Вином по аналогии с Максвелловским распределением для скоростей движения молекул газа.

Э. Прингсхейм представил результаты экспериментов (рис. 1.2) на заседании немецкого физического общества в сентябре 1899 г., акцентировав внимание на отличии экспериментальных данных от Виновской аппроксимации, увеличивающемся с ростом параметра  $\lambda T$  [2]. Из рис. 1.2 видно, что разница между теорией и экспериментом весьма незначительна, однако *знáчимость* этого наблюдения определяется малыми *погрешностями* проведенного эксперимента. Определение точности любого количественного измерения полностью лежит «на совести» экспериментатора и, как мы еще раз убеждаемся, имеет первостепенное значение.

Результаты опытов Люммера – Прингсхейма были восприняты негативно, так как они противоречили устоявшимся взглядам на вопрос о спектре излучения черного тела, в том числе опытам Ф. Пашена, признанного авторитета в области радиационных измерений. Уверенные в справедливости своих результатов, О. Р. Люммер и Э. Прингсхейм провели еще одну серию измерений [3], расширив диапазон регистрируемых длин волн до 18 мкм. Чуть позже Г. Рубенс и Ф. Курльбаум измерили спектр черного тела вплоть до длины волны 51.2 мкм. Справедливость результатов первого эксперимента (рис. 1.2), указавшего на ошибочность общепринятых теоретических представлений, была надежно подтверждена серией *независимых* экспериментов. Таким

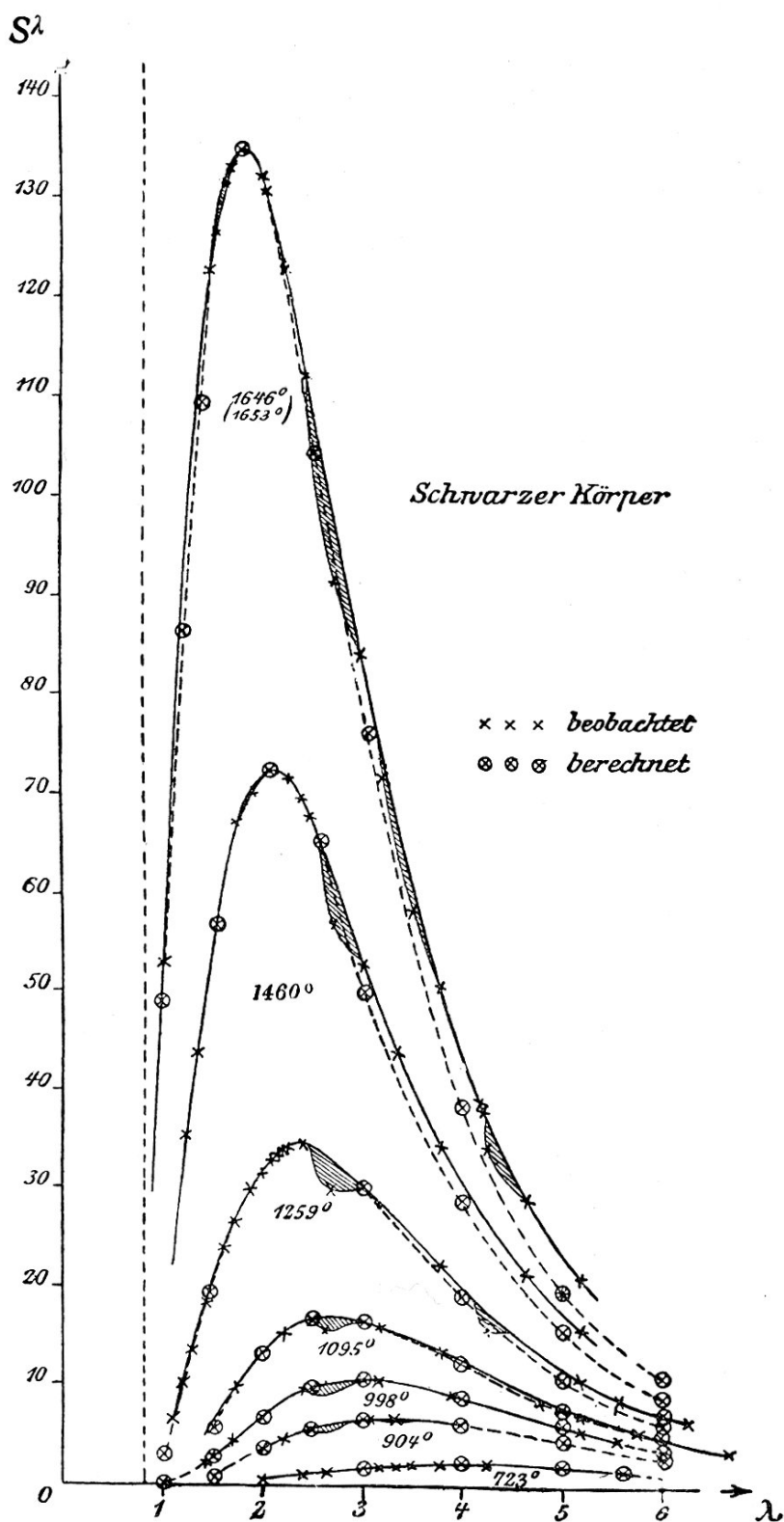


Рис. 1.2. Спектральные характеристики равновесного теплового излучения для различных температур, полученные О. Р. Люммером и Э. Прингсхеймом в 1899 г.

«Schwarzer Körper» – черное тело, «x x x beobachtet» – наблюдается, «⊗ ⊗ ⊗ berechnet» – рассчитанный (нем.).  $\lambda$  – длина волны в микронах, температура – в °C. Источник – [www.otto-lummer.de](http://www.otto-lummer.de)

образом, экспериментальное изучение распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела создало предпосылки для вывода М. Планком знаменитой формулы (см. 1.2.4) и последующего осознания квантовой природы излучения.

## § 1.2. Квантовая природа излучения

Перейдем к рассмотрению вопроса о том, как излучается и поглощается электромагнитное излучение. Нам известно, что

- разреженный газ является источником излучения, спектр которого состоит из монохроматических линий, а длины волн этих линий определяются элементарным составом газа (§ 1.1);
- разреженный газ состоит из молекул или атомов, находящихся на большом расстоянии друг от друга и практически не взаимодействующих между собой.

Из этих замечаний логически следует, что процессы излучения и поглощения света в такой системе происходят на уровне одного атома или молекулы. Но как?

### 1.2.1 Формулы Бальмера и Ридберга

В конце XIX в. были известны «магические» формулы Бальмера (1885) и Ридберга (1888), описывающие положения спектральных линий излучения атомов химических элементов с помощью целых чисел. Для водорода (рис. 1.3) формула Ридберга выглядит так:

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = R_{\infty} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (1.5)$$

где  $\lambda_{mn}$  – наблюдаемые длины волн излучения,  $R_{\infty}$  – постоянная Ридберга,  $m$  и  $n$  – целые числа ( $m > n$ ).



Рис. 1.3. Видимые линии **серии Бальмера** ( $n = 2$ ) в спектре излучения атома водорода  $\lambda_{72} = 397.0$  нм,  $\lambda_{62} = 410.2$  нм,  $\lambda_{52} = 434.1$  нм,  $\lambda_{42} = 486.1$  нм,  $\lambda_{32} = 656.3$  нм

### 1.2.2 Модель атома Бора – Резерфорда

В 1897 г. был экспериментально **открыт электрон**: Дж. Дж. Томсон доказал, что все частицы, образующие катодные лучи, тождественны друг другу и входят в состав любого вещества. Ученик Дж. Дж. Томсона, **Э. Резерфорд**, на основе опытов по рассеянию **альфа-частиц** на золотой фольге (1911), предложил **планетарную модель атома**. Согласно этой модели атом состоит из миниатюрного (даже в масштабах атома) положительно заряженного ядра, в котором сосредоточена почти вся масса атома, а электроны вращаются по орбитам вокруг ядра, как планеты вокруг Солнца. Датский физик-теоретик **Н. Бор** раздумывал о том, как устранить противоречия между классической электродинамикой и моделью атома Э. Резерфорда. В 1913 г. Х. М. Хансен, занимавшийся спектроскопией, обратил внимание Н. Бора на спектральные формулы Бальмера и Ридберга, знакомство с которыми привело последнего к неожиданному решению задачи [4].

Полуклассическая-полуквантовая **Боровская модель атома** основана на постулате, что электрон в атоме может находиться только на определенных стационарных орбитах. Находясь на такой орбите, электрон не теряет энергию на излучение, как того требует классическая электродинамика. Каждая стационарная орбита имеет порядковый номер  $n = [1, 2, 3, \dots]$ , которому соответствуют определенный момент импульса  $L_n = n \cdot \hbar$  и энергия связи электрона с ядром  $E_n = -Ry/n^2$ . Константа  $\hbar = h/2\pi$  – приведенная **постоянная Планка**, а  $Ry = hcR_\infty$  называется энергетической

постоянной Ридберга или просто Ридбергом<sup>3</sup>. Согласно Н. Бору, электроны могут терять либо приобретать энергию только при переходе с одной стационарной орбиты на другую, поглощая или излучая энергию  $\Delta E_{mn} = E_m - E_n$  в виде кванта электромагнитного излучения (фотона) определенной частоты  $\omega_{mn}$ , причем  $\hbar\omega_{mn} = \Delta E_{mn}$ . Целые числа в формуле Ридберга (1.5) оказались *квантовыми числами* – порядковыми номерами «разрешенных орбит», а спектральные линии – следствием переходов атома одного *энергетического уровня* на другой.

Современная модель атома, основанная на более общих законах *квантовой механики*, существенно отличается от Боровской. Однако они совпадают в главном, а именно – в осознании квантовой природы строения атома.

### 1.2.3 Теория излучения Эйнштейна

Основываясь на боровской модели атома, в 1916 г. *А. Эйнштейн* выдвинул гипотезу о *механизмах* переходов атомов между различными энергетическими состояниями [5, 6]. Рассмотрим систему, состоящую из большого числа  $n$  отдельных молекул или атомов, помещенную в полость, заполненную равновесным излучением при температуре  $T$ . Пусть каждый атом может находиться в одном из всего двух возможных квантовых состояний, с энергиями  $E_1$  либо  $E_2$ , причем  $E_2 > E_1$ . Тогда  $n = n_1 + n_2$ , где  $n_1, n_2$  – количество атомов в состояниях  $E_1, E_2$  соответственно. В ситуации термодинамического равновесия распределение атомов по энергетическим уровням определяется *статистикой Максвелла – Больцмана*, так что

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left\{-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right\}, \quad (1.6)$$

<sup>3</sup>  $\hbar = 6.58211928 \times 10^{-16}$  эВ·с,  $Ry = 13.60569253$  эВ (энергия ионизации атома водорода).

где  $T$  – температура системы,  $k$  – постоянная Больцмана <sup>4</sup>.

Переходы атома с уровня  $E_1$  на уровень  $E_2$  мы будем называть переходами  $1 \rightarrow 2$ , а обратные – переходами  $2 \rightarrow 1$ . Для того чтобы система продолжала оставаться в равновесном состоянии, *необходимо и достаточно, чтобы в среднем за единицу времени происходило одинаковое количество переходов  $1 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 1$ .*

### 1) Поглощение фотона

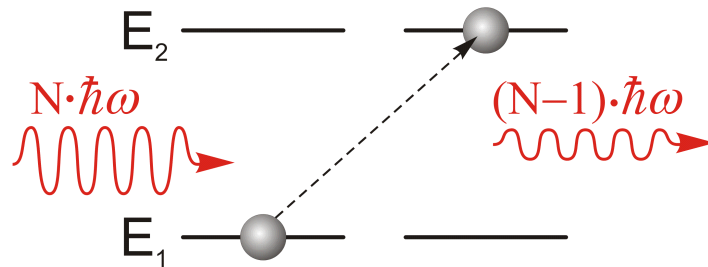


Рис. 1.4. Поглощение фотона переводит атом в возбужденное состояние – электрон в атоме совершает квантовый скачок с уровня  $E_1$  на уровень  $E_2$

Переходы  $1 \rightarrow 2$  требуют получения извне энергии  $\hbar\omega = E_2 - E_1$  и осуществляются путем *поглощения* фотона. Энергия волны, изображенной слева на рис. 1.4, определяется как произведение энергии фотона  $\hbar\omega$  на целое положительное число  $N$  – количество фотонов, находящихся в одном *квантовом состоянии* электромагнитного поля. Прямым оптическим аналогом этого термина является *мода колебаний*, или *объем когерентности* излучения. При поглощении фотона атомом число  $N$  уменьшается на единицу. Интенсивность процесса для рассматриваемой системы в целом прямо пропорциональна числу атомов  $n_1$  на нижнем энергетическом уровне, а также плотности энергии  $u_\omega$  равновесного излучения на частоте  $\omega$ . А. Эйнштейн ввел коэффициент

<sup>4</sup>  $k = 8.6173324 \times 10^{-5}$  эВ/К.



$B_{12}$ , чтобы величина

$$w_{\Pi} = \left(-dn_1/dt\right)_{\Pi} = B_{12}u_{\omega}n_1 \quad (1.7)$$

описывала скорость переходов  $1 \rightarrow 2$  в поле излучения<sup>5</sup>.

Для осуществления переходов  $2 \rightarrow 1$  дополнительной энергии, очевидно, не требуется: напротив, в таких переходах энергия выделяется путем излучения фотона. Согласно гипотезе А. Эйнштейна, переходы  $2 \rightarrow 1$  могут происходить за счет двух принципиально разных процессов.

## 2) Вынужденное излучение

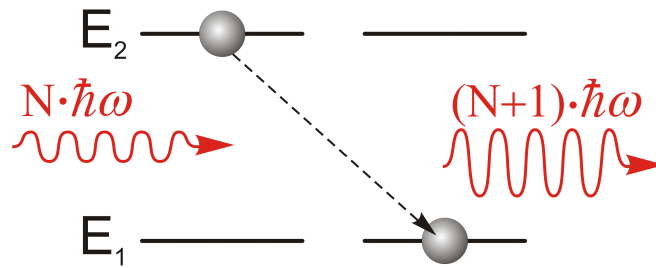


Рис. 1.5. Вынужденное излучение фотона атомом приводит к увеличению интенсивности электромагнитной волны за счет энергии возбуждения атома

*Вынужденное излучение*, как и процесс поглощения фотона, происходит под действием внешнего поля. Однако в этом случае совершается передача энергии от возбужденного атома электромагнитной волне. Для описания скорости процесса введем коэффициент  $B_{21}$ :

$$w_{\text{в}} = \left(-dn_2/dt\right)_{\text{в}} = B_{21}u_{\omega}n_2. \quad (1.8)$$

В результате вынужденного излучения энергия волны увеличивается скачком на один квант электромагнитного поля данной ча-

<sup>5</sup> Поскольку в нашей модели у атома есть всего два энергетических состояния, при любых переходах атома между уровнями  $E_1$  и  $E_2$  справедливо равенство  $dn_1/dt = -dn_2/dt$ .

стоты. Важным свойством этого процесса является то, что излученный фотон оказывается в том же квантовом состоянии, что и индуцирующая волна. Это значит, что изменяется только интенсивность волны, а ее фаза, поляризация и направление распространения остаются неизменными: происходит *когерентное усиление* света. Заметим тут же, что весьма логично ожидать прямой пропорциональности между числом  $N$  на рис. 1.4 и рис. 1.5 и спектральной плотностью излучения  $u_\omega$ , использующейся в формулах (1.7) и (1.8).

### 3) Спонтанное излучение

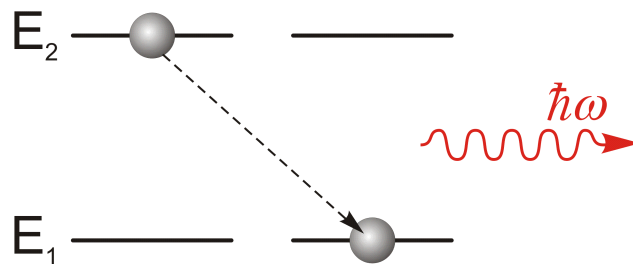


Рис. 1.6. Процесс спонтанного излучения фотона обусловлен самопроизвольным переходом атома в состояние с меньшей энергией связи

Феномен *спонтанного излучения* (рис. 1.6) обусловлен стремлением атома оказаться в наиболее стабильном состоянии с минимальной внутренней энергией. Скорость переходов  $2 \rightarrow 1$  за счет спонтанного излучения определяется коэффициентом  $A_{21}$ :

$$w_c = (-dn_2/dt)_c = A_{21}n_2. \quad (1.9)$$

Величина  $\tau_{21} = 1/A_{21}$  имеет размерность времени и называется «временем жизни перехода» за счет спонтанного излучения, причем для различных атомов и молекул оно может отличаться на несколько порядков величины. В отсутствие других процессов спонтанное излучение приводит к уменьшению количества ато-

мов в возбужденном состоянии по экспоненциальному закону:

$$n_2(t) = n_2(0) \cdot \exp(-t/\tau_{21}).$$

Условием пребывания системы в состоянии термодинамического равновесия является неизменность во времени соотношения  $n_2/n_1$ , определяемого формулой (1.6). Отсюда следует, что должно выполняться равенство

$$w_{\Pi} = w_{\text{в}} + w_{\text{с}} \quad (1.10)$$

при любой температуре системы. Из выражений (1.7, 1.8, 1.9) получаем:

$$B_{12}u_{\omega}n_1 = (B_{21}u_{\omega} + A_{21})n_2. \quad (1.11)$$

Приравняем отношения  $n_2/n_1$ , полученные из формул (1.6) и (1.11). С учетом того, что  $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ , получим:

$$\frac{B_{12}u_{\omega}}{B_{21}u_{\omega} + A_{21}} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right). \quad (1.12)$$

Для низких частот и высоких температур  $\omega/T \rightarrow 0$ , следовательно дробь в левой части формулы (1.12) должна быть равна единице. Необходимым и достаточным условием для этого является равенство коэффициентов  $B_{12} = B_{21}$ <sup>6</sup>. Из (1.12) находим  $u_{\omega}$ :

$$u_{\omega} = \frac{\alpha(\omega)}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}, \quad (1.13)$$

где  $\alpha(\omega) = A_{21}/B_{21}$  определяет зависимость отношения коэффициентов Эйнштейна от частоты излучения. Смысл выражения (1.13) состоит в следующем: на основании гипотезы А. Эйнштейна относительно *механизмов* взаимодействия излучения с атомами и молекулами мы получаем некоторую функцию  $u_{\omega}$ , описывающую спектральную плотность *равновесного* излучения. Она линейно связана со спектральной интенсивностью излучения  $I_{\omega}$  —

<sup>6</sup> Равенство коэффициентов  $B_{12}$  и  $B_{21}$  следует также из общего принципа *детального равновесия*.

потоком энергии в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  через единицу площади в пределах телесного угла  $d\Omega$ . Для изотропного излучения  $d\Omega = 4\pi$  и

$$u_\omega = \frac{4\pi}{c} I_\omega.$$

Согласно закону Киргхофа (1.2), величина  $I_\omega$ , а значит и  $u_\omega$ , описывается *универсальной функцией длины волны и температуры, равной лучеиспускательной способности абсолютно черного тела*. Значит, и  $\alpha(\omega)$  – некоторая универсальная функция. Из закона смещения Вина (1.4) немедленно следует, что

$$\alpha(\omega) = A_{21}/B_{21} \propto \omega^3. \quad (1.14)$$

Таким образом, отношение вероятностей спонтанного и вынужденного излучений для любой пары уровней пропорционально кубу частоты излучательного перехода.

#### 1.2.4 Формула Планка

Подставляя  $\alpha(\omega) \propto \omega^3$  в формулу (1.13), соблюдая необходимую размерность и опуская подробности нормировки, запишем конечный результат, известный как **формула Планка**:

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1}. \quad (1.15)$$

**М. Планк** получил формулу (1.15) в 1900 г. эмпирическим путем, пытаясь найти теоретическое объяснение экспериментальным результатам измерения спектра излучения абсолютно черного тела (рис. 1.2). Выступление М. Планка на заседании немецкого физического общества 14-го декабря 1900 г. принято считать днем рождения квантовой теории, ибо там впервые публично была высказана идея существования квантов электромагнитного поля [7, 8]. В классической электродинамике процессы испускания и поглощения электромагнитных волн не имеют дискретного характера, а амплитуда волны является аналоговым параметром.

На рис. 1.7 представлена спектральная плотность равновесного излучения, полученная в соответствии с выражением (1.15). Температура ( $T = 1900 \text{ }^\circ\text{K}$ ) и диапазон длин волн соответствуют эксперименту Люммера и Прингсхейма (рис. 1.2).

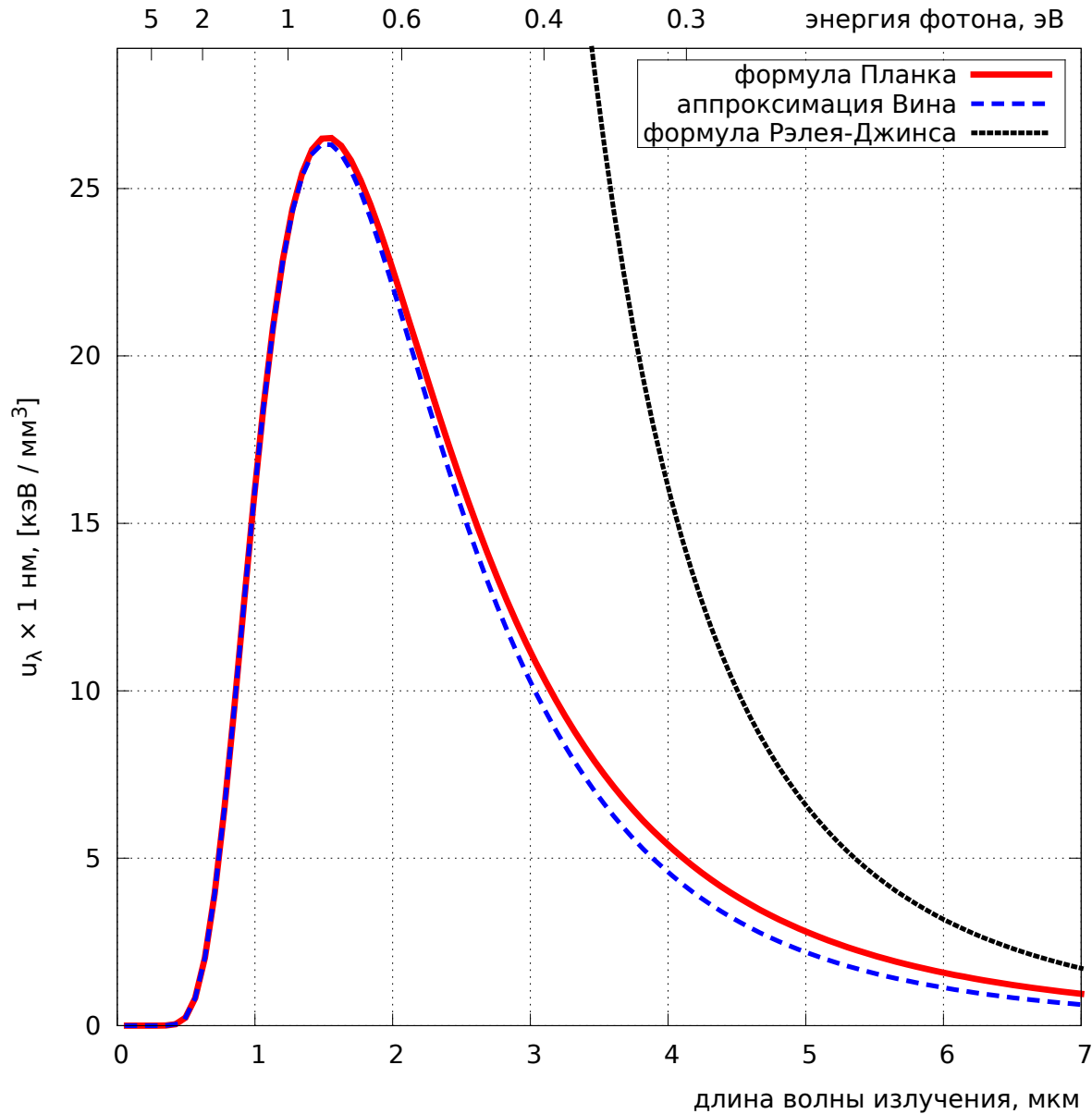


Рис. 1.7. Спектральная плотность равновесного излучения для  $T = 1900 \text{ }^\circ\text{K}$ . Плотность энергии, приходящейся на спектральный интервал  $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$ , приведена в единицах кило-электрон-вольт на кубический миллиметр. По оси  $X$  внизу – длина волны, сверху – энергия фотона

Величина  $u_\omega d\omega$  есть объемная плотность излучения в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ . В соответствии с формулой (1.15) эту вели-

чину можно представить в виде произведения трех множителей, каждый из которых несет определенную смысловую нагрузку:

- 1)  $\frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\omega/\omega}{V}$  определяет объем моды колебаний электромагнитного поля с частотой  $\omega$ :  $V = \pi^2 c^3 / \omega^3 = \lambda^3 / 8\pi$ . Величина  $d\omega/\omega = d\lambda/\lambda$  – ширина спектрального интервала в относительных единицах;
- 2)  $\hbar\omega$  – энергия кванта электромагнитного поля с частотой  $\omega$ ;
- 3)  $\bar{N} = 1/(\exp(\hbar\omega/kT) - 1)$  есть среднее число фотонов с энергией  $\hbar\omega$ , находящихся в одном квантовом состоянии <sup>7</sup> электромагнитного поля при температуре  $T$ .

На заданной частоте, в случае термодинамического равновесия между веществом и излучением, отношение вероятности вынужденного излучения или поглощения к вероятности спонтанного излучения равно среднему количеству фотонов в моде теплового излучения. Действительно, из (1.13) получим:

$$\frac{u_\omega}{\alpha(\omega)} = \frac{u_\omega B_{21}}{A_{21}} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} = \bar{N}. \quad (1.16)$$

### 1.2.5 Формула Рэлея – Джинса

Если  $\hbar\omega/kT \ll 1$ , из (1.15) получаем закон Рэлея – Джинса:

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot kT. \quad (1.17)$$

Эта формула хорошо описывает длинноволновую часть спектра (рис. 1.8). С ростом длины волны энергия кванта падает и в пределе стремится к нулю, что и обуславливает применимость классической теории излучения.

<sup>7</sup> *Задача:* температура поверхности Солнца – 6000°К, определите  $\bar{N}$  для видимого диапазона спектра ( $\lambda = 400 - 700$  нм).

### 1.2.6 Аппроксимация Вина

Если  $\hbar\omega/kT \gg 1$ , из (1.15) получается функция Вина, приведенная на графике Люммера – Прингсхейма (рис. 1.2):

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)}. \quad (1.18)$$

Несложно показать, что результат (1.18) получается в отсутствие вынужденного излучения ( $B_{21} = 0$  в выражении (1.12)). Поэтому формула Вина хорошо описывает коротковолновую область спектра, где роль вынужденного излучения незначительна (рис. 1.8).

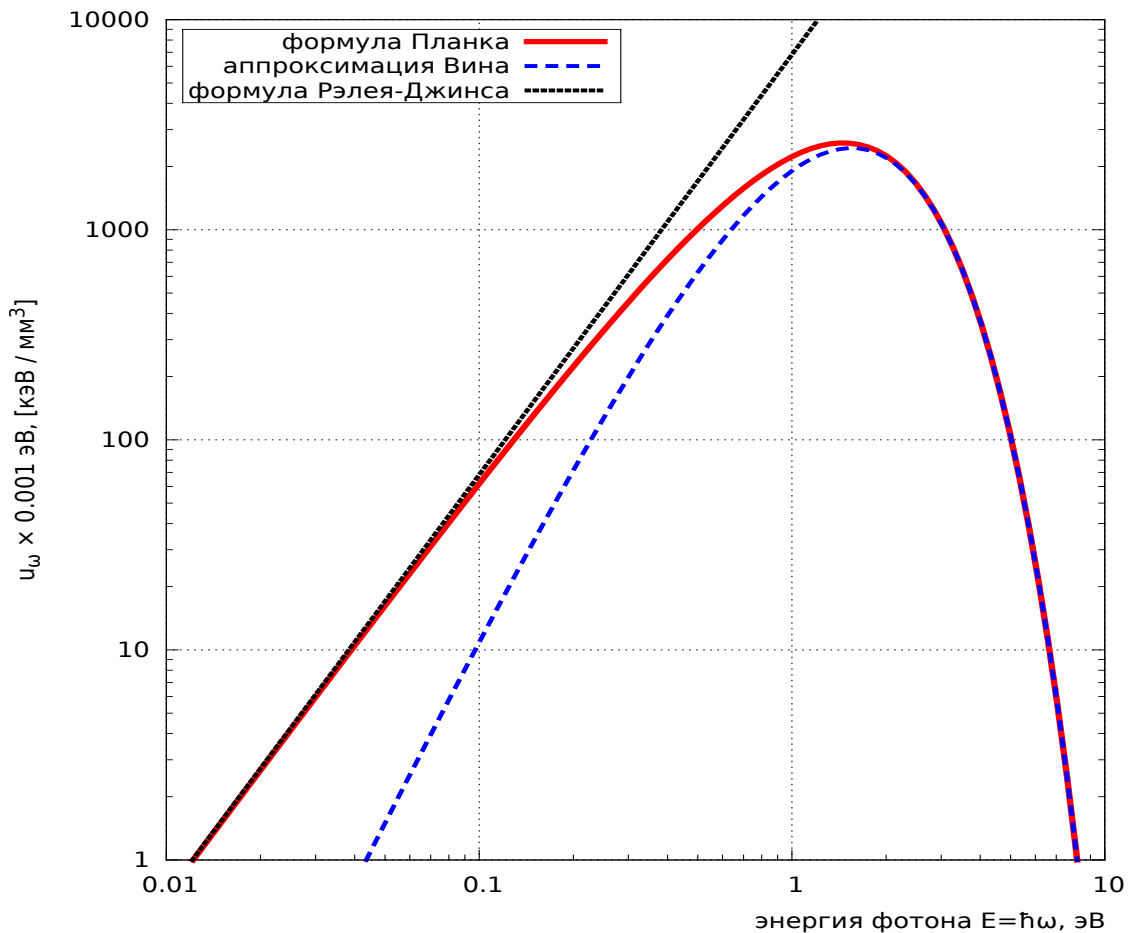


Рис. 1.8. Спектральная плотность равновесного излучения для  $T = 6000$  °K (температура поверхности Солнца). Плотность энергии, приходящейся на спектральный интервал  $\Delta(\hbar\omega) = 0.001$  эВ, приведена в единицах кило-электрон-вольт на кубический миллиметр. Масштаб – логарифмический по обеим осям

### § 1.3. Узкие спектральные линии

Из рассмотренной выше (§ 1.1, § 1.2) истории познания законов электромагнитного излучения видно, что спектры излучения различных природных объектов можно разбить на два основных класса, а именно – непрерывные (широкие) и линейчатые (узкие). Узкие спектральные линии в спектрах поглощения и излучения образуются при переходах квантовых систем (атомов и молекул) между дискретными уровнями энергии. Однако любая узкая линия имеет конечную спектральную ширину и этот вопрос требует более подробного рассмотрения [9].

#### 1.3.1 Однородное уширение

Однородное уширение линии обусловлено конечностью времен жизни квантовых состояний, связанных с рассматриваемым переходом. При однородном уширении спектр излучения одинаков как для одного атома, так и для излучающего тела в целом.

##### Естественная ширина линии

Как уже отмечалось ранее (см. стр. 18), любое  $i$ -е возбужденное состояние атома характеризуется определенным временем жизни  $\tau_i$ , за которое населенность этого состояния падает в  $e$  раз из-за эффекта спонтанного излучения по закону:

$$N_i(t) = N_i(0) \exp(-t/\tau_i). \quad (1.19)$$

В общем случае  $\tau_i$  определяется суммой коэффициентов Эйнштейна для спонтанного излучения  $A_{ik}$  по всем энергетическим уровням атома, для которых  $E_i > E_k$ :

$$\frac{1}{\tau_i} = \sum_k A_{ik}. \quad (1.20)$$



На языке классической электродинамики прямым аналогом выражения (1.19) является экспоненциальное во-времени уменьшение интенсивности спонтанного излучения:

$$I(t) = I_0 \exp(-t/\tau_i). \quad (1.21)$$

Так как речь идет о спонтанном излучении, каждый возбужденный атом можно рассматривать как независимый затухающий гармонический осциллятор. Амплитуду поля излучения такого осциллятора с частотой колебаний  $\omega_0$  опишем выражением

$$A(t) = A_0 \exp(-t/2\tau_i) \exp(i\omega_0 t). \quad (1.22)$$

На рис. 1.9 приведена иллюстрация к вопросу об излучении гармонического осциллятора с затуханием, свойства которого описываются формулами (1.21) и (1.22):

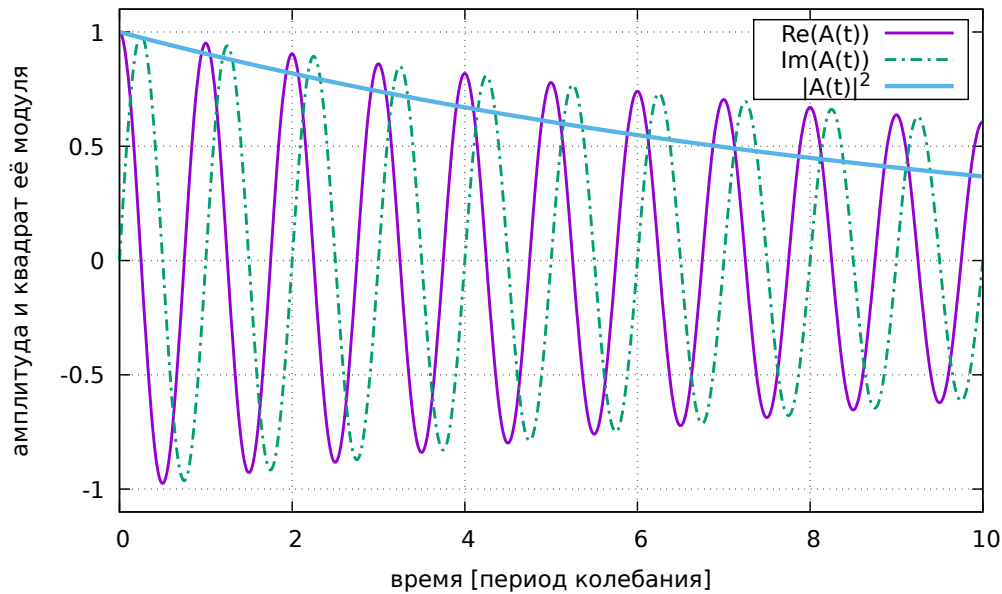


Рис. 1.9. Затухающий гармонический сигнал (формулы (1.21)–(1.22))

Интенсивность излучения пропорциональна квадрату модуля амплитуды  $I(t) \propto A(t)A^*(t)$ . Из-за наличия затухания в формуле (1.22) спектр спонтанного излучения не является монохроматическим. Затухающей амплитуде колебаний  $A(t)$  соответствует спектральное распределение амплитуд  $g(\omega)$ , которое несложно

вычислить используя преобразование Фурье:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} A(t) \exp(-i\omega t) dt = \frac{iA_0/\sqrt{2\pi}}{\omega_0 - \omega + i/2\tau_i}. \quad (1.23)$$

Из выражения (1.23) получаем спектральное распределение интенсивности спонтанного излучения:

$$G(\omega) = |g(\omega)|^2 = \frac{A_0^2/2\pi}{(\omega_0 - \omega)^2 + 1/4\tau_i^2}. \quad (1.24)$$

Ясно что максимум в спектре излучения находится на частоте  $\omega_0$ , а полуширина распределения на полувысоте от максимума определяется условием  $(\omega_0 - \omega)^2 = 1/4\tau_i^2$ . Переходя от угловых частот к обычным, получим выражение для описания спектра спонтанного излучения, обусловленное естественным уширением:

$$G(\nu) = \frac{\Delta\nu_i/2\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + \Delta\nu_i^2/4}. \quad (1.25)$$

Графическое представление спектра (1.25) приведено на рис. 1.10.

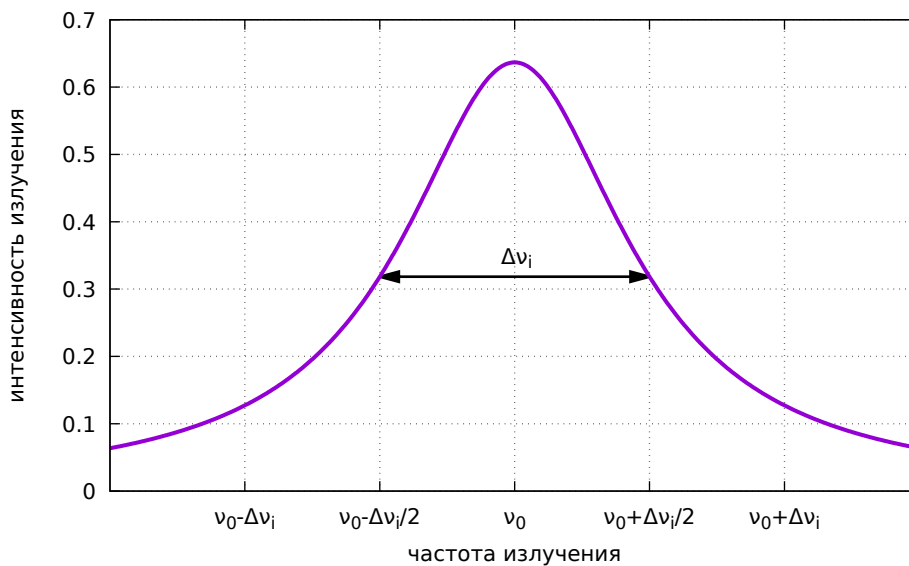


Рис. 1.10. Форма спектра естественно уширенной линии излучения

Параметр  $\Delta\nu_i = (2\pi\tau_i)^{-1}$  определяет ширину спектра на полувысоте от максимума. Интеграл от выражения (1.25) по всему диапазону частот равен единице благодаря использованию при переходе от формулы (1.24) к (1.25) нормировки  $A_0 = \pi\sqrt{\Delta\nu_i}$ .

Полученное нами распределение (1.25) в теории вероятностей называется **распределением Коши**. В физике это распределение называется также *формой Лоренца* и описывает спектральные характеристики линейных колебательных систем в окрестности резонансных частот. Естественная (минимально возможная) ширина спектральной линии  $\Delta\nu_i = (2\pi\tau_i)^{-1}$  определяется механизмом спонтанного излучения. Естественная ширина линии, как правило, заметна только на высоких частотах, поскольку  $\Delta\nu_i \propto \nu_i^3$  как следствие выражения (1.14). В реальных условиях релаксационные переходы более эффективно сокращают время жизни возбужденного состояния.

### Релаксационное уширение

Характерная энергия взаимодействия молекул между собой зависит от плотности, химического состава и агрегатного состояния вещества. Многоатомные системы имеют огромное число колебательных, вращательных, коллективных и иных степеней свободы, так что различные энергетические уровни в такой среде могут располагаться близко друг к другу. Если разность энергий таких уровней сопоставима с характерной энергией связи молекул или атомов среды, то кроме спонтанных атомных переходов, в формулу (1.20) нужно добавить процессы непосредственной передачи энергии от возбужденного атома различным степеням свободы окружающего вещества. Эти переходы называются *неоптическими*, их влияние приводит к дополнительному однородному уширению энергетических уровней и к уменьшению времени жизни возбужденных состояний.

### 1.3.2 Неоднородное уширение

Уширение линии называется неоднородным, если активные центры (возбужденные атомы) по-разному взаимодействуют с различными спектральными компонентами излучения.

#### Доплеровская ширина линии

Типичным примером неоднородного уширения линии является доплеровское уширение, характерное для газов при малых давлениях. Атомы или молекулы газа находятся в состоянии хаотического теплового движения, а излучаемые ими волны в лабораторной системе отсчета будут иметь дополнительный разброс по длинам волн и частотам, обусловленный **эффектом Доплера**. Если движущийся со скоростью  $v$  в направлении неподвижного наблюдателя атом излучает свет на частоте  $\nu_0$ , в лабораторной системе отсчета частота света изменится:

$$\nu = \nu_0 (1 + v/c) . \quad (1.26)$$

Вероятность определенной проекции скорости атома на направление наблюдения описывается **распределением Максвелла**:

$$p(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) , \quad (1.27)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура газа,  $m$  – масса атома или молекулы. Так как  $v = c(\nu - \nu_0)/\nu_0$  и  $dv/d\nu = c/\nu_0$ , можно вычислить спектр наблюдаемых частот:

$$q(\nu) = \frac{c}{\nu_0} p\left(c \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}\right) . \quad (1.28)$$

Комбинируя формулы (1.28) и (1.27) получим финальное выражение для спектра доплеровского уширения:

$$q(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\nu} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma_\nu^2}\right) , \text{ где } \sigma_\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{kT}{mc^2}} . \quad (1.29)$$

Формула (1.29) показывает, что спектр доплеровского уширения линии описывается распределением Гаусса со среднеквадратичным разбросом частот  $\sigma_\nu$ . Ширина спектра на полувывсоте от максимума легко вычисляется:  $\Delta\nu = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma_\nu \simeq 2.355\sigma_\nu$ . На рис. 1.11 приведено сравнение форм спектров лоренцевого и гауссового уширения линии.

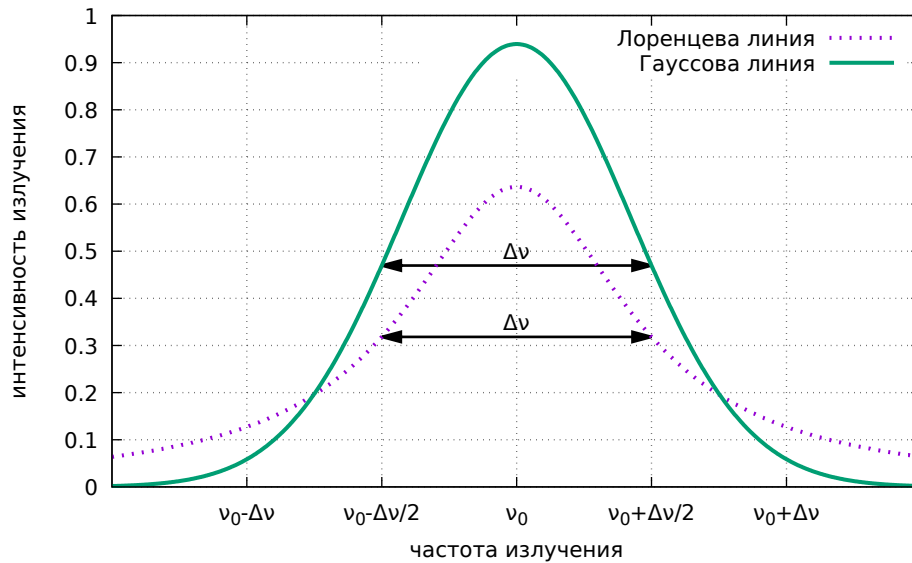


Рис. 1.11. Различие форм спектров лоренцевого и гауссового уширения линии при одинаковой ширине спектра на полувывсоте от максимума

В заключение параграфа подчеркнем, что из-за фундаментального характера выражения (1.14), рассмотренные механизмы уширения линии в равной степени справедливы и для процессов поглощения и вынужденного излучения света.

## Глава 2. Устройство лазера

Слово «лазер» образовано из первых букв английской фразы «Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation». В переводе на русский фраза означает «усиление света за счет вынужденного излучения». Таким образом, название включает в себе физический принцип, на котором основана работа лазера.

### § 2.1. Активная среда

#### 2.1.1 Населенность уровней

Из первой главы нам уже известно, что в процессе вынужденного излучения происходит когерентное усиление электромагнитной волны <sup>1</sup>. Для каждого энергетического состояния атома  $E_n$  введем понятие *населенности уровня*  $N_n$ , т. е. объемной плотности атомов рассматриваемой среды, находящихся в этом состоянии. В состоянии термодинамического равновесия распределение атомов по энергетическим уровням описывается *статистикой Максвелла – Больцмана*:

$$N_n \propto \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right). \quad (2.1)$$

Таким образом, населенность уровней с меньшей энергией всегда (при любой *положительной* температуре) выше, чем населенность уровней с большей энергией. На рис. 2.1 приведено распределение относительных населенностей энергетических уров-

---

<sup>1</sup> Идея использования вынужденного излучения для усиления электромагнитной волны была впервые высказана в 1939 г. В. А. Фабрикантом.

ней ( $E_n = -Ry/n^2$ , см. стр. 14) в атоме водорода при температуре  $T = 10^4$  °К. Населенность уровня с главным квантовым числом  $n = 2$  взята за 100%.

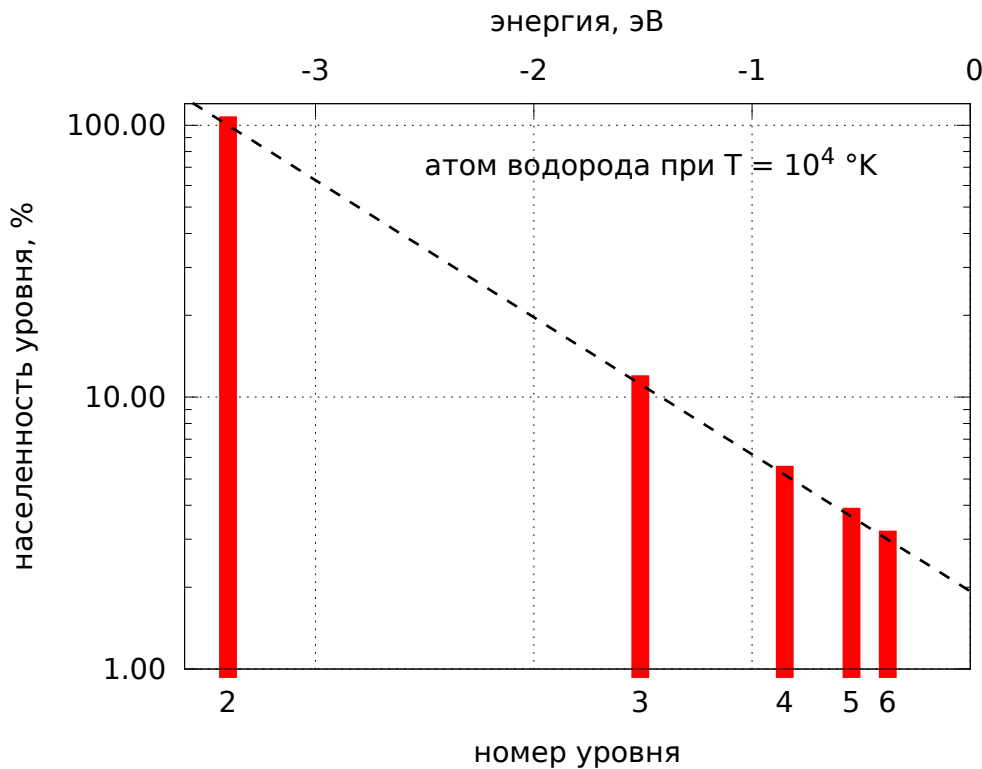


Рис. 2.1. Равновесное распределение относительных населенностей энергетических уровней атома водорода при температуре  $T = 10^4$  °К

Для того чтобы для двух определенных энергетических уровней имело место превышение вероятности вынужденного излучения над вероятностью поглощения, необходимо вывести среду из состояния термодинамического равновесия. Нужно привести ее в такое состояние, в котором населенность более высокого энергетического уровня в атоме или молекуле будет больше, чем населенность некоторого уровня с меньшей энергией. Такое состояние среды называется состоянием с *инверсной населенностью*. Рассмотрим на качественном уровне процесс его получения.

### 2.1.2 Получение инверсии населенностей

Рассмотрим систему, в которой есть четыре энергетических уровня, как это показано на рис. 2.2. Для вывода среды из со-

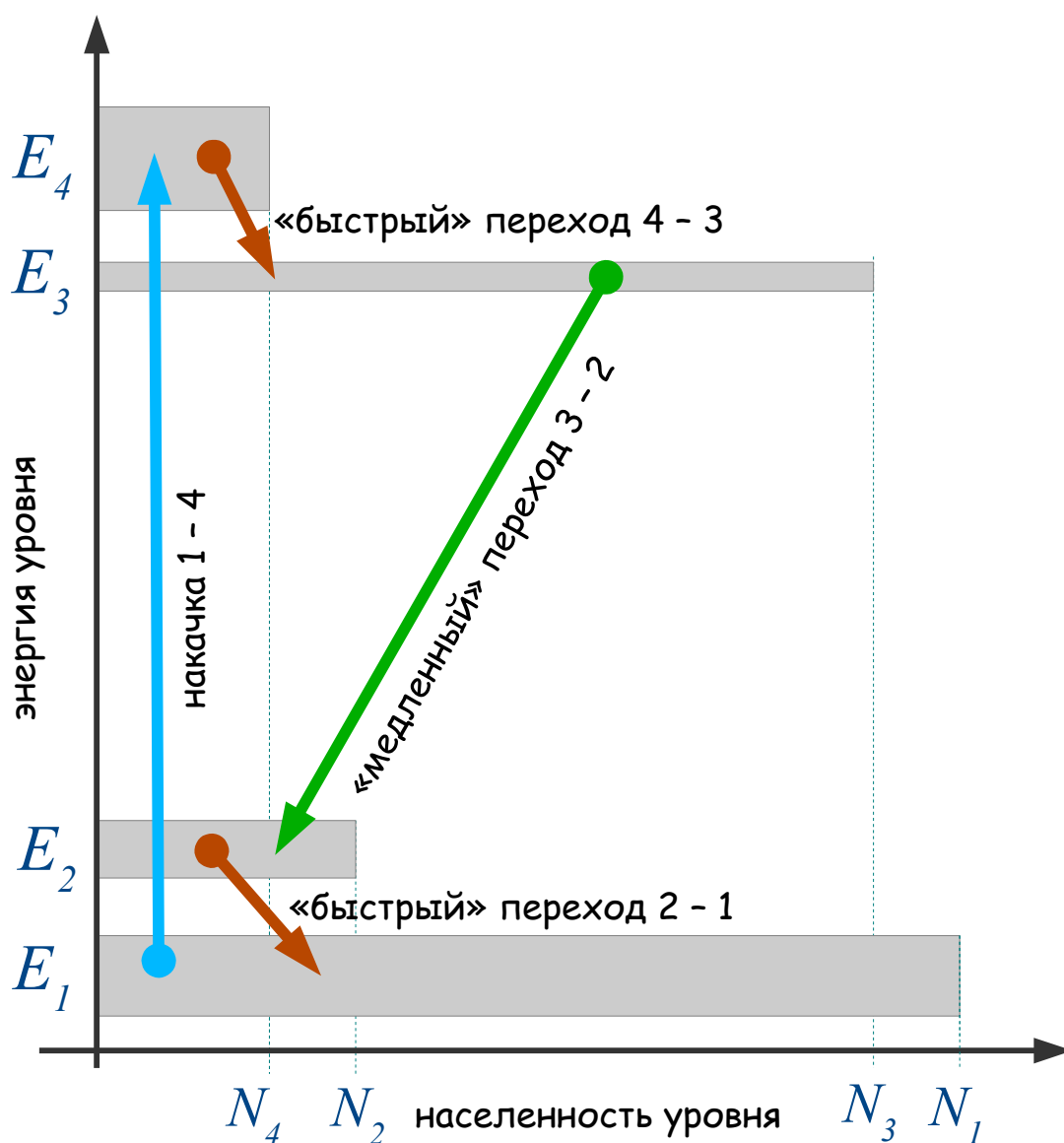


Рис. 2.2. Создание инверсной населенности путем накачки внешним излучением

стояния термодинамического равновесия воспользуемся внешним источником энергии. Пусть эта энергия поступает в среду извне



в виде монохроматического излучения с частотой

$$\omega_{41} = (E_4 - E_1)/\hbar .$$

Атомы будут поглощать это излучение, переходя в возбужденное состояние с энергией  $E_4$ .

Как видно из рис. 2.2 энергетические уровни в нашей модели имеют различную ширину, а значит и разное время жизни за счет обсуждавшихся в § 1.3 механизмов уширения. Возьмем «идеальный» случай: пусть  $\tau_3 \gg \tau_4, \tau_2$ , тогда переходы  $4 \rightarrow 3$  и  $2 \rightarrow 1$  будут происходить настолько быстро, что населенности уровней  $N_2$  и  $N_4$  будут близки к нулю в любой ситуации. Подберем мощность монохроматического излучения накачки так, чтобы скорость вынужденных переходов  $1 \rightarrow 4$  была равна скорости спонтанных переходов  $3 \rightarrow 2$ . В этом стационарном (но не равновесном!) состоянии среды мы получим инверсию населенностей между уровнями 2 и 3:  $N_3/N_2 \rightarrow \infty$ . Реальность далека от идеала, однако для создания инверсной населенности на переходе  $3 \rightarrow 2$  достаточно, чтобы отношение  $N_3/N_2$  было просто больше единицы. Если еще увеличить мощность накачки, можно получить инверсию для уровней 1 и 3 ( $N_3/N_1 > 1$ ). В таком варианте отпадает необходимость наличия «промежуточного» уровня 2 (рис. 2.2). Поскольку для достижения такого эффекта нужно возбудить не менее половины всех активных атомов, для накачки нужна очень большая энергия. Поэтому трехуровневая система накачки непрактична, хотя она и использовалась в первом рабочем лазере (на основе рубина), созданном Т. Майманом в 1960 г. Для количественного анализа населенностей энергетических уровней в среде используются системы *балансных уравнений*, которые будут рассмотрены далее, в § 5.1.

Итак, чтобы получить в среде *инверсную населенность* нужно, во-первых, подобрать вещество с подходящими энергиями и

временами жизни возбужденных уровней. Во-вторых, необходимо найти подходящий способ возбуждения конкретных энергетических состояний с помощью *накачки*.

### 2.1.3 Оптический квантовый усилитель

Допустим, нам удалось создать инверсную населенность для определенного излучательного перехода в некоторой среде. Если в нее поступает извне излучение соответствующей этому переходу частоты, интенсивность его, по мере распространения в среде, будет увеличиваться за счет эффекта вынужденного излучения. Если исходное излучение направленно и когерентно, то оно останется таковым и после прохождения через активную среду, но его интенсивность возрастет. Такая среда называется *активной средой* и является узкополосным усилителем высокочастотного гармонического электромагнитного сигнала.

Для того чтобы усилитель обеспечивал высокий коэффициент усиления нужно стремиться к увеличению объемной плотности активных атомов. По этой причине активную среду, как правило, уже нельзя считать идеальным газом невзаимодействующих частиц, и ширина энергетических уровней, изображенных на рис. 2.2, возрастает за счет различных механизмов уширения линии, рассмотренных в § 1.3. Данное обстоятельство упрощает задачу получения инверсной населенности за счет смягчения требования к монохроматичности излучения накачки.

## § 2.2. Оптический резонатор

Из азов радиотехники известно, что усилитель сигнала несложно превратить в генератор. Все, что нужно сделать для этого, – создать *положительную обратную связь*, т. е. сделать так, чтобы сигнал с выхода усилителя поступал на его же вход. Усилитель является активным элементом генератора, коэффициент усиле-

ния которого зависит от частоты и мощности сигнала. Передаточный коэффициент цепи обратной связи в общем случае может зависеть от частоты, фазы и амплитуды сигнала. В оптическом квантовом генераторе (лазере) в качестве усилителя сигнала используется среда с инверсной населенностью уровней, а в качестве системы обратной связи – открытый оптический резонатор.

Схема устройства лазера представлена на рис. 2.3. Активным

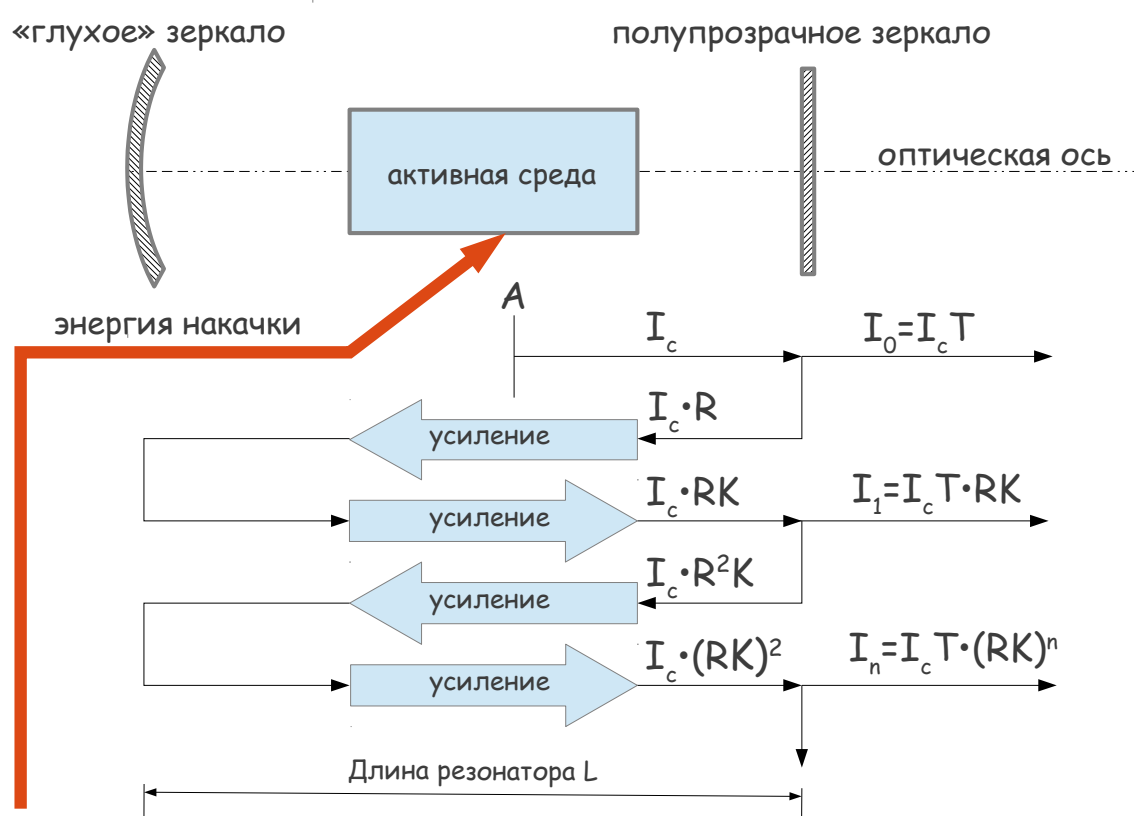


Рис. 2.3. Схема работы оптического квантового генератора (лазера)

В нижней части рисунка стрелками изображен процесс зарождения лазерной генерации

элементом генератора является среда, в которой с помощью энергии накачки создается инверсная населенность. Пусть активный элемент имеет форму цилиндра, ось которого определяет оптическую ось всей системы. На ней же расположены два зеркала, образующие **открытый оптический резонатор**. Полупрозрачное зеркало обладает коэффициентом отражения  $R < 1$  и коэффициентом пропускания  $T = 1 - R$ . «Глухое» зеркало имеет коэффици-

ент отражения 100 %. Активная среда обладает коэффициентом усиления  $K$  (см. рис. 2.3), определяющим, во сколько раз изменяется интенсивность волны при ее двухкратном проходе через активный элемент.

Забудем пока об усилении излучения, т. е. положим  $K = 1$ . Предположим, что точка  $A$ , находящаяся на оси резонатора, является непрерывным источником излучения. Если направление этого излучения совпадает с оптической осью резонатора, то волна, отразившись от обоих зеркал, вернется в точку  $A$  снова. Набег фазы колебаний поля определяется соотношением удвоенной оптической длины резонатора  $L$  и длины волны:

$$\delta = 2\pi(2L/\lambda). \quad (2.2)$$

После  $m$  отражений ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) от обоих зеркал относительная интенсивность волны составит  $I_m = R^m$ , а ее комплексная амплитуда

$$u_m = \sqrt{R^m} e^{im\delta}.$$

Амплитуда суммарной волны обусловлена многолучевой интерференцией таких волн и легко **вычисляется**:

$$U_\Sigma = \sum_{m=0}^{\infty} u_m = \sum_{m=0}^{\infty} (\sqrt{R} e^{i\delta})^m = \frac{1}{1 - \sqrt{R} e^{i\delta}}. \quad (2.3)$$

Интенсивность волны составит:

$$\begin{aligned} I_\Sigma &= U_\Sigma U_\Sigma^* = \frac{1}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \delta} = \\ &= \frac{1}{(1 - \sqrt{R})^2 + 4\sqrt{R} \sin^2(\delta/2)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Величина  $I_\Sigma$  максимальна, когда

$$\delta = 2\pi N,$$

где  $N$  – целое число, такое что  $\lambda N = 2L$ . В этом случае поля бегущих в разные стороны вдоль оптической оси волн складываются и образуется **стоячая волна** с максимально возможной амплитудой колебаний. Число  $N$  называется индексом продольной моды, а соответствующий этому числу тип колебаний поля – *продольной модой резонатора*. Расстояние  $\Delta\lambda$  между соседними модами колебаний несложно вычислить из условия:

$$(N - 1)(\lambda + \Delta\lambda) = 2L .$$

С учетом того, что  $N = 2L/\lambda \gg 1$ , получим

$$\Delta\lambda = \lambda^2/2L . \quad (2.5)$$

Соответственно расстояние между соседними модами в шкале частот  $\Delta\nu = c/2L$ . Резонатор, являющийся пассивным элементом, не способен усиливать излучение, однако он может эффективно накапливать энергию определенных типов колебаний, которые называются собственными модами резонатора. Если частота колебаний лежит далеко от частоты моды, то такие колебания будут быстро затухать из-за интерференции. Селективность резонатора определяется шириной функции  $I_\Sigma$  на уровне половины от максимального значения:

$$\delta\lambda = 2\frac{\lambda^2}{2\pi L} \arcsin \frac{1 - \sqrt{R}}{2\sqrt[4]{R}} \simeq \frac{\lambda^2}{2\pi L} (1 - \sqrt{R}) , \quad (2.6)$$

где последнее приближение работает для достаточно больших коэффициентов отражения  $R$ . График функции  $I_\Sigma$  (выражение (2.4)) представлен на рис. 2.4.

### 2.2.1 Качество резонатора

Отношение межмодового расстояния к ширине моды называется *качеством* резонатора (в англоязычной литературе используется

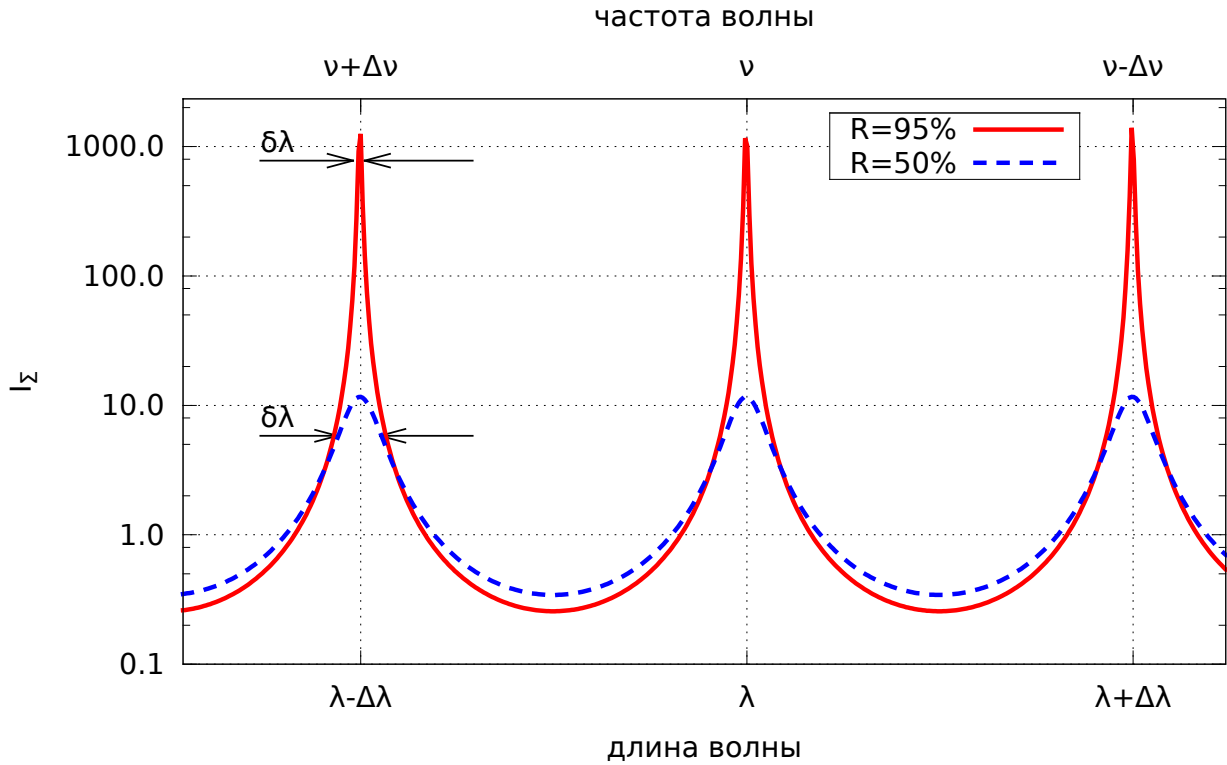


Рис. 2.4. Зависимость  $I_{\Sigma}$  от длины волны излучения для двух различных коэффициентов отражения полупрозрачного зеркала. Ось ординат – в логарифмическом масштабе

термин *finesse*). Из формул (2.5) и (2.6) получаем:

$$F = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2}{\pi \arcsin \frac{1-\sqrt{R}}{2\sqrt[4]{R}}} \simeq \frac{\pi}{1-\sqrt{R}} \simeq \frac{2\pi}{1-R}, \quad (2.7)$$

где приближения, как и в (2.6), справедливы когда  $1-R \ll 1$ . Величина  $R$  не зависит от длины резонатора и длины волны излучения и в общем случае соответствует доле мощности излучения, остающейся в волне при одном полном обходе резонатора.

### 2.2.2 Время жизни фотона и добротность

Предположим, что в некоторый момент времени источник излучения в точке  $A$  выключается. Энергия электромагнитных колебаний, накопленная в какой-либо моде резонатора, удовлетворяющей условию резонанса  $\lambda N = 2L$ , начнет постепенно уменьшаться, так как волна выходит из резонатора через полупрозрач-

ное зеркало. Время, за которое свет совершает один полный обход резонатора, составляет, очевидно,  $\tau = 2L/c$ . За время  $t_m = m\tau$  уменьшение интенсивности волны внутри резонатора составит

$$I(t_m)/I(0) = R^m .$$

Поскольку интенсивность волны  $I(t)$  прямо пропорциональна числу квантов электромагнитного излучения  $q(t)$ , находящихся в данной моде колебаний, аналогичное соотношение справедливо и для количества фотонов:

$$q(t_m)/q(0) = R^m .$$

Учитывая, что  $m \simeq t/\tau$ , запишем:

$$q(t)/q(0) \simeq R^{(ct/2L)} = \exp(-t/\tau_c) , \quad (2.8)$$

где величина

$$\tau_c = -\frac{2L}{\ln(R)} \quad (2.9)$$

называется временем жизни фотона в резонаторе, т. е. определяет время, за которое количество фотонов падает в  $e$  раз.

Распространенным параметром для описания резонансных систем является *добротность*, для обозначения этого параметра используется символ  $Q$ . По определению, добротностью системы называется отношение накопленной в резонаторе энергии  $W$  к энергетическим потерям  $\Delta W$  за один период колебаний ( $T = 1/\nu$ ), умноженное на  $2\pi$ . Продифференцировав (2.8), учтем, что  $W = q \cdot h\nu$  и вычислим добротность резонатора  $Q$ :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{\tau_c}; \Rightarrow \frac{\Delta W}{W} \left( dt = \frac{1}{\nu} \right) = \frac{-1}{\nu\tau_c}; \Rightarrow Q = 2\pi\nu\tau_c . \quad (2.10)$$

Если  $Q \gg 1$ , добротность с хорошей точностью совпадает с разрешающей силой резонатора. Действительно, подставим  $\tau_c$  из (2.9)

в (2.10) и сравним с  $\lambda/\delta\lambda$ , полученным из выражения (2.6):

$$Q = \frac{-4\pi L}{\lambda \ln(R)} \simeq \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2\pi L}{\lambda(1 - \sqrt{R})}. \quad (2.11)$$

В общем случае в выражениях (2.6 – 2.11) необходимо вместо  $R$  использовать коэффициент вида  $R_1 R_2 (1 - \alpha)$ , где  $R_1, R_2$  – коэффициенты отражения зеркал,  $\alpha$  – иные потери излучения (на дифракцию и поглощение) за один полный проход резонатора. Добротность резонатора  $Q$  связана с параметром качества резонатора  $F$  (формула (2.7)) простым выражением  $Q = F \cdot \lambda/\Delta\lambda$ . В отличие от добротности, параметр  $F$  зависит исключительно от величины суммарных потерь излучения в резонаторе.

### § 2.3. Свойства лазерного излучения

После включения источника энергии накачки в активной среде создается инверсная населенность «рабочего» перехода. Плотность энергии электромагнитного поля на частоте, соответствующей разнице энергий уровней «рабочего» перехода, близка к нулю, поэтому излучение на этой частоте происходит в основном спонтанно и имеет изотропное пространственное распределение. Если в единичном акте спонтанного излучения направление, частота и фаза излученного фотона совпали с одной из собственных мод оптического резонатора, волна, отразившись от зеркал, возвращается в активную среду и усиливается за счет эффекта вынужденного излучения.

Изменение интенсивности волны за один полный проход резонатора описывается произведением коэффициента усиления  $K(\lambda)$  на коэффициент обратной связи  $\eta(\lambda)$ . Зависимость  $\eta(\lambda)$  следует из формулы (2.4), полученной в § 2.2:

$$\eta(\lambda) = \frac{1 - \alpha}{1 + f \sin^2(\delta/2)}, \quad (2.12)$$



где  $\alpha$  отвечает за все потери, не связанные с интерференцией,  $f = 4\sqrt{R}/(1 - \sqrt{R})^2$  определяется коэффициентом отражения полупрозрачного зеркала, а  $\delta$  зависит от длины волны (см. выражение (2.2)).

Если  $K(\lambda)\eta(\lambda) > 1$ , интенсивность волны будет увеличиваться до тех пор, пока процесс вынужденного излучения не приведет к уменьшению инверсной населенности и снижению коэффициента усиления. Это произойдет когда мощность излучения, выходящего из резонатора через полупрозрачное зеркало, по порядку величины будет сравнима с мощностью накачки.

Через некоторое время устанавливается стационарное неравновесное состояние системы при котором мощность накачки, умноженная на суммарный к.п.д.<sup>2</sup> системы, будет равна мощности, выходящей наружу через полупрозрачное зеркало в виде направленного пучка излучения. Спонтанное излучение на рабочем переходе уже не будет играть скольнибудь заметной роли в энергетическом балансе системы, а вынужденное излучение будет сконцентрировано в узком луче вдоль оси резонатора.

Итак, *пороговым условием* для начала процесса генерации в лазере является условие  $K(\lambda)\eta(\lambda) > 1$ . Увеличение мощности генерации приводит к падению коэффициента усиления, обусловленному конечной мощностью накачки. Система приходит к стационарному состоянию, в котором  $K(\lambda)\eta(\lambda) = 1$ . Максимальное значение  $K(\lambda)$  имеет место для длины волны, соответствующей средней разнице энергий двух уровней рабочего перехода. Зависимость  $K(\lambda)$  от длины волны обусловлена различными механизмами уширения линии, обсуждавшимися в § 1.3 (стр. 24).

Будем считать, что спектр  $K(\lambda)$  полностью определяется доплеровским механизмом уширения (формула (2.13) на стр. 28). Для узких линий в спектре излучения справедливо соотношение

<sup>2</sup> К.п.д. – «коэффициент полезного действия». Если источником энергии считать сеть переменного тока, то к.п.д. различных лазеров варьируется в диапазоне от долей до десятков процентов.

$(\nu - \nu_0)/\nu_0 \simeq (\lambda_0 - \lambda)/\lambda_0$ , так что формулу (1.29) можно переписать в виде зависимости от длины волны излучения:

$$Q_D(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\lambda} \exp\left(-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\sigma_\lambda^2}\right), \text{ где } \sigma_\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{kT}{mc^2}}. \quad (2.13)$$

Тогда мы можем представить  $K(\lambda)$  в виде

$$K(\lambda) = K_0 \cdot Q_D(\lambda), \quad (2.14)$$

где константа  $K_0$  включает в себе все, кроме зависимости от длины волны: сечение процесса вынужденного излучения, уровень инверсной населенности (объемную плотность возбужденных атомов), длину активного элемента и поперечный размер лазерного луча, текущее значение плотности энергии излучения в резонаторе. На рис. 2.5 приведены графики  $K(\lambda)$  и  $K(\lambda) \cdot \eta(\lambda)$ .

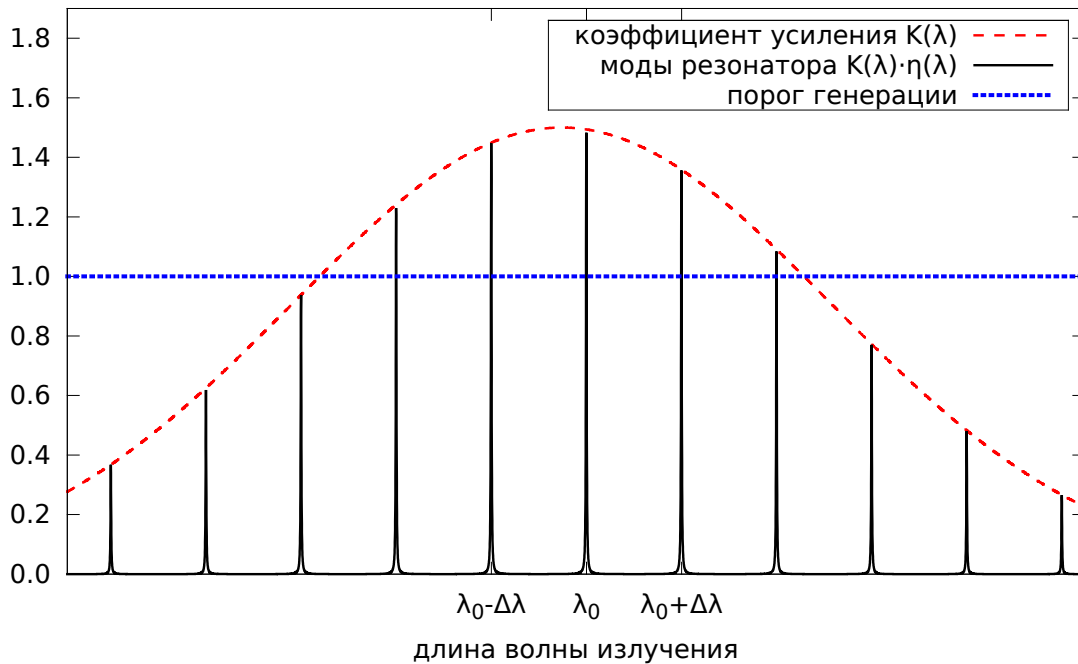


Рис. 2.5. Формирование спектра излучения лазера, определяемого зависимостью коэффициента усиления от частоты света и продольными модами резонатора

Интенсивность излучения в тех модах колебаний, для которых  $K(\lambda) \cdot \eta(\lambda) > 1$ , возрастает со временем за счет вынужденного

излучения. Для остальных мод усиления не происходит, и интенсивность излучения равна нулю.

Рост интенсивности не может быть бесконечным: он остановится, когда уровень инверсной населенности снизится за счет вынужденного излучения. Для мод резонатора, достигших порога генерации, установится стационарное состояние, в котором  $K_n(\lambda)\eta(\lambda) = 1$ . Мощность излучения моды с продольным индексом  $n$  будет определяться индивидуальной скоростью накачки  $K_n(\lambda)$ , т. к. населенность верхнего уровня лазерного перехода имеет распределение по энергии, обусловленное различными механизмами уширения.

В итоге спектр излучения лазера будет выглядеть приблизительно так, как это показано на рис. 2.6. Для каждого конкретного лазера, разумеется, ширина огибающей, количество продольных мод и расстояние между ними могут быть совершенно различными.

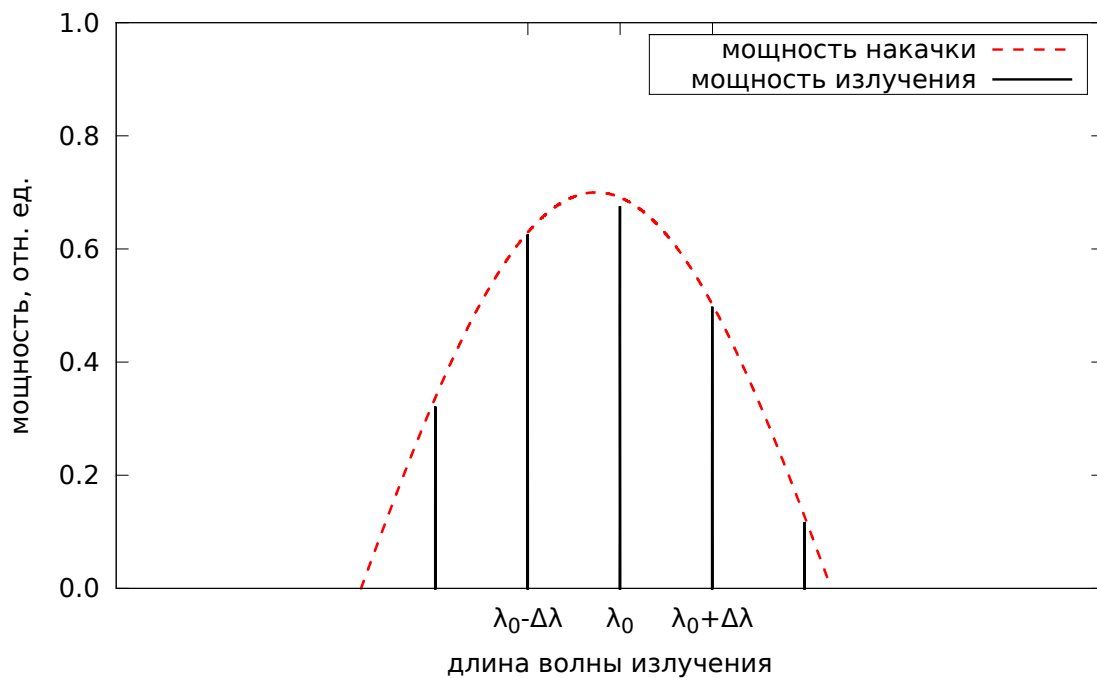


Рис. 2.6. Распределение интенсивностей накачки и излучения лазера по продольным модам резонатора. Все – в относительных единицах

Подведем итоги краткого рассмотрения вопроса о спектре лазерного излучения:

- средняя длина волны излучения обусловлена разностью энергетических уровней используемого перехода активной среды;
- форма и ширина огибающей на рис. 2.6 определяется различными механизмами уширения линии (см. § 1.3);
- расстояние между узкими спектральными линиями (продольными модами) определяется длиной резонатора;
- спектральная ширина моды излучения лазера зависит от добротности резонатора. Однако, в стационарном состоянии выполняется условие  $K_n(\lambda)\eta(\lambda) = 1$ , следовательно, добротность «горячего» резонатора (см. раздел 2.2.2 на стр. 38) формально равна бесконечности. Таким образом, ширина спектра каждой продольной моды излучения стремится к нулю и далее ограничивается уже другими эффектами, выходящими за рамки данного рассмотрения.

### 2.3.1 Поперечные моды резонатора

Пришло время разобраться с поперечным по отношению к оси лазерного резонатора распределением интенсивности излучения. Подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки учебника и достаточно подробно изложено в литературе (см., например, [12]).

Оптические резонаторы могут содержать большое количество отражающих и других элементов, но наиболее распространены двухзеркальные резонаторы. В зависимости от радиусов зеркал  $\rho_1, \rho_2$  и расстояния между ними  $L$  выделяют различные типы двухзеркальных резонаторов:

- 1) плоскопараллельный резонатор Фабри – Перо ( $\rho_1 = \rho_2 = \infty$ );

- 2) конфокальный резонатор ( $\rho_1 = \rho_2 = L$ ), образованный двумя одинаковыми сферическими зеркалами, оси и фокусные расстояния которых совпадают, поле в таком резонаторе концентрируется около оси, что снижает дифракционные потери, однако объем активной среды используется неэффективно;
- 3) полуконфокальный резонатор ( $\rho_1 = 2L, \rho_2 = \infty$ ), аналогичный конфокальному резонатору с удвоенной длиной;
- 4) концентрический резонатор ( $\rho_1 = \rho_2 = L/2$ ), образованный двумя сферическими зеркалами, оси и центры кривизны которых совпадают, в таких резонаторах дифракционные потери для неаксиальных мод быстро возрастают, что используется для селекции поперечных мод;
- 5) полуконцентрический резонатор ( $\rho_1 = L, \rho_2 = \infty$ ), по своим свойствам близкий к концентрическому резонатору.

Известно, что фундаментальные поперечные моды оптического резонатора являются гауссовыми, если резонатор стабилен, оптические материалы в нем однородны, а оптические поверхности имеют плоскую либо параболическую форму. По определению, поперечное сечение интенсивности гауссового пучка мощностью  $P$  может быть описано функцией:

$$I(r) = \frac{P}{\pi w^2/2} \exp\left\{-2\frac{r^2}{w^2}\right\}, \quad (2.15)$$

где  $r$  – расстояние от оси пучка, а радиусом пучка  $w$  считается расстояние от его оси, на котором интенсивность падает в  $e^2$  раз ( $1/e^2 \simeq 13.5\%$ ). В свободном пространстве радиус пучка изменяется вдоль направления распространения (координата  $z$ ) как:

$$w(z) = w_0 \cdot \sqrt{1 + (z/z_R)^2}, \quad (2.16)$$

где  $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$  называется Рэлеевской длиной, а  $w_0 = w(z = 0)$  – радиусом пучка в точке перетяжки. Угол расходимости (дифракции) гауссова пучка в дальней зоне ( $z \gg z_R$ ) равен  $\theta_G = \lambda / \pi w_0$ . Для пучка света с любым другим поперечным распределением угол дифракционной расходимости будет больше, чем для гауссова пучка. В большинстве применений лазерного излучения наибольшую практическую ценность имеет получение гауссова пучка, т. к. он имеет минимально возможную расходимость и, соответственно, лучше всего поддается фокусировке и транспортировке на значительные расстояния.

Если оптическая схема лазера такова, что поперечный размер активного элемента превосходит поперечный размер гауссова пучка для данной конфигурации резонатора, возможна генерация поперечных мод высших порядков. Очень грубо это можно описать одновременным наличием нескольких оптических осей, вдоль которых возможна лазерная генерация.

Каждая мода резонатора имеет свое обозначение вида  $TEM_{xyz}$ , где целочисленные индексы соответствуют количеству узлов стоячей волны по осям  $x, y$  поперек оси резонатора и  $z$  – вдоль оси резонатора. TEM является сокращением от «Transverse Electro Magnetic», причем для открытого оптического резонатора целое число  $z \gg 1$  обычно опускается при записи названия моды. На рис. 2.7 представлены результаты расчетов поперечного распределения интенсивности в  $TEM_{xy}$  модах с прямоугольной симметрией, а на рис. 2.8 – в  $TEM_{r\varphi}$  модах с полярной симметрией.

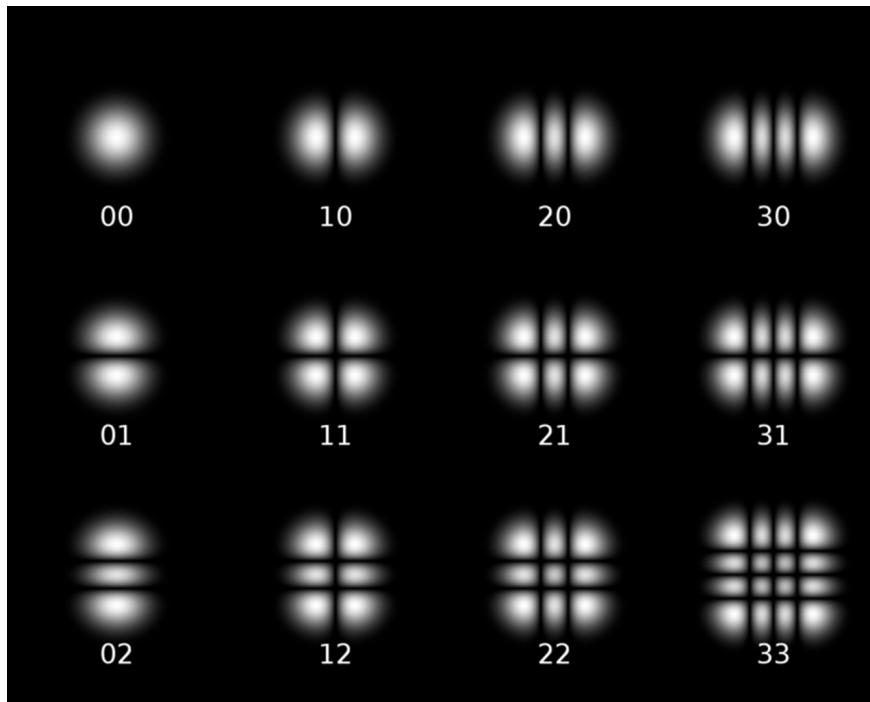


Рис. 2.7. Поперечные моды  $TEM_{xy}$  с прямоугольной симметрией ([www.optique-ingenieur.org](http://www.optique-ingenieur.org)) называются модами Эрмита – Гаусса и описываются **полиномами Эрмита**. Первый индекс определяет количество темных полос по оси  $x$ , второй – по  $y$

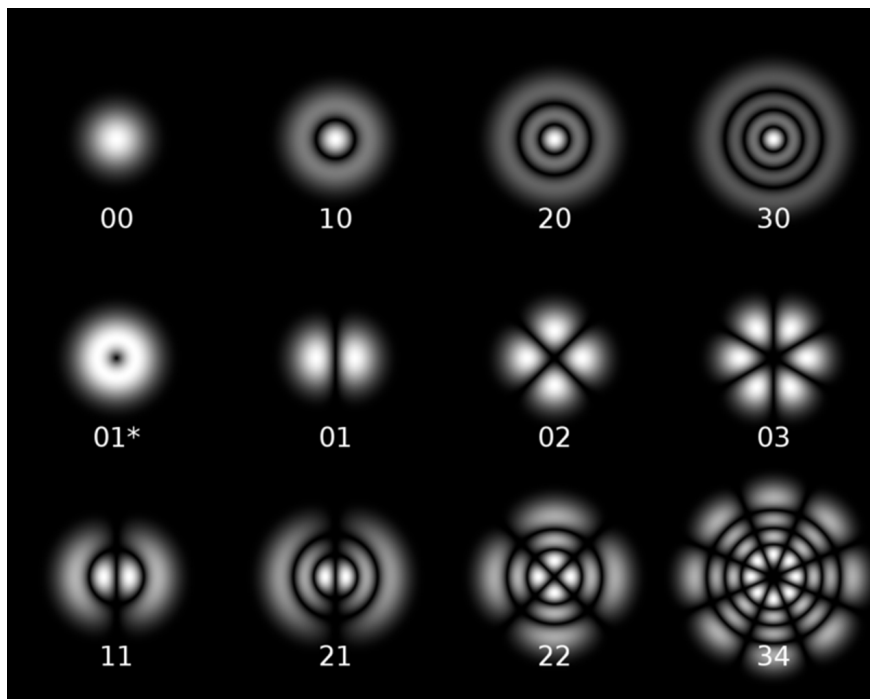


Рис. 2.8. Поперечные моды  $TEM_{r\varphi}$  с полярной симметрией ([www.optique-ingenieur.org](http://www.optique-ingenieur.org)) называются модами Лагерра – Гаусса и описываются **полиномами Лагерра**. Первый индекс определяет количество темных полос по радиусу  $r$ , второй – по углу  $\varphi$

## Глава 3. Лабораторная работа 4.1

Тема работы:

### Изучение спектра излучения He-Ne лазера

Цели работы:

- знакомство с принципами работы He-Ne лазера;
- получение навыков юстировки оптического резонатора;
- изучение структуры поперечных мод лазерного резонатора;
- знакомство с интерферометром Фабри – Перо;
- измерение средней длины волны и расстояния между продольными модами в спектре излучения He-Ne лазера.

Оборудование:

многомодовый He-Ne-лазер с источником питания, торцевой ключ для юстировки резонатора, эталон Фабри – Перо, зеркала, видеокамера, компьютер, объектив, программное обеспечение для обработки интерферограмм.

### § 3.1. Газовый He-Ne-лазер

Исторически гелий-неоновый лазер был первым работоспособным газовым лазером [13]. Активной средой (§ 2.1) He-Ne лазера является смесь гелия и неона в пропорции около 10:1, находящаяся в стеклянной или кварцевой трубке под низким давлением. Резонатор лазера (§ 2.2) состоит из двух зеркал – глухого с одной





Рис. 3.1. Схема He-Ne-лазера. Торцы стеклянной трубки заклеены прозрачными пластинками под углом Брюстера

стороны колбы и частично прозрачного, пропускающего через себя около 1 % падающего излучения. Энергия накачки подается путем создания между двумя электродами – анодом и катодом – электрического газового разряда постоянного тока с напряжением в несколько киловольт и током несколько миллиампер.

В смеси гелия и неона образуются возбужденные атомы гелия (§ 1.2). Энергия возбужденных метастабильных уровней гелия

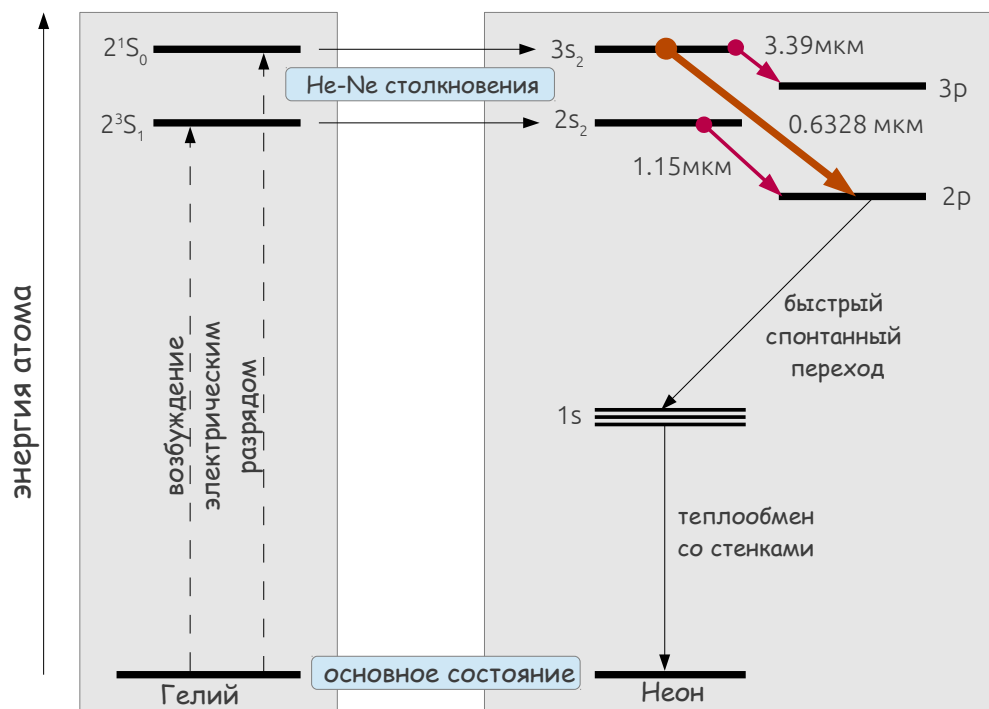


Рис. 3.2. Схема энергетических уровней гелия и неона

$2^3S_1$  и  $2^1S_0$  равны 19.82 эВ и 20.61 эВ соответственно и почти совпадают с  $3s_2$  и  $2s_2$  уровнями неона (рис. 3.2). Благодаря этому происходят безызлучательные переходы атомов гелия в невозбужденное состояние с резонансной передачей энергии атомам неона. В результате концентрации атомов неона на этих уровнях возникает инверсная населенность по отношению к уровням  $3p$  и  $2p$ . Гелий-неоновые лазеры чаще всего используются для получения излучения с длиной волны  $\lambda = 0.6328$  мкм. Возможна также генерация достаточно мощного излучения в ближнем инфракрасном диапазоне, на длинах волн 1.15 мкм и 3.39 мкм (рис. 3.2). Ширина линии усиления (§ 1.3) определяется доплеровским механизмом (формула (1.29) на стр. 28) и на полувысоте от максимума составляет  $2.355(c/\lambda)\sqrt{kT/mc^2} \simeq 1.24$  ГГц (для  $\lambda = 0.6328$  мкм при комнатной температуре).

### § 3.2. Интерферометр Фабри – Перо

В 1899 г. французские физики Ш. Фабри и А. Перо впервые предложили использовать в качестве многолучевого интерферометра две частично посеребренные стеклянные пластины, расположенные на некотором расстоянии друг от друга. Интерферометр Фабри – Перо представляет из себя прозрачную среду с двумя строго параллельными отражающими поверхностями. Он уже знаком читателю в роли лазерного резонатора, устройство которого было рассмотрено в § 2.2. Интерферометр с фиксированным расстоянием между пластинами называют эталоном Фабри – Перо. При сборке и юстировке интерферометра пластины устанавливаются взаимно параллельно с точностью до сотых долей микрона. Схема интерферометра приведена на рис. 3.3.

Рассмотрим луч света с длиной волны  $\lambda$ , падающий извне на границу раздела двух сред с показателями преломления  $n_0$  и  $n$  соответственно. Часть света отражается от поверхности, другая,

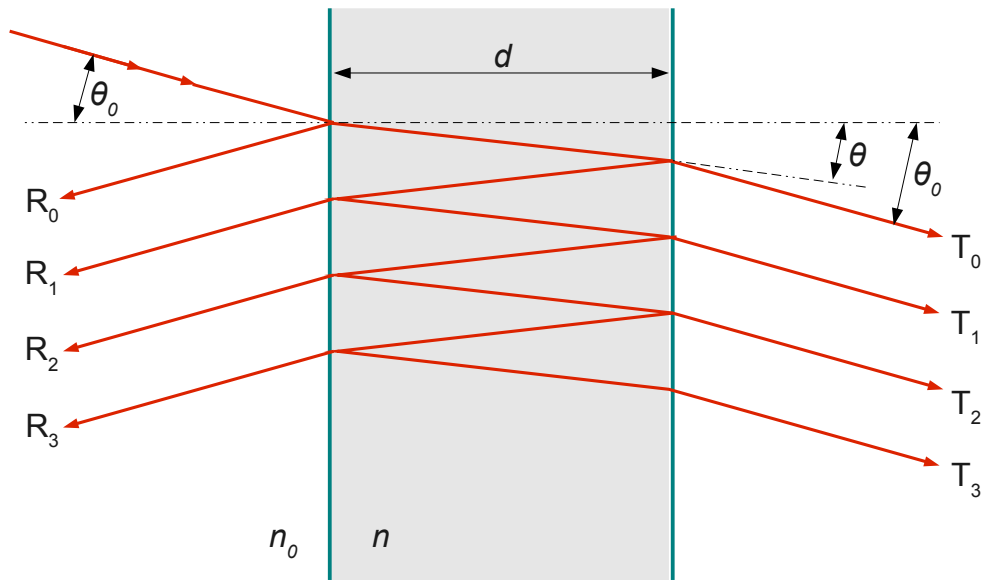


Рис. 3.3. Схема интерферометра Фабри-Перо

преломляясь, входит в среду, так что  $n_0 \sin \theta_0 = n \sin \theta$ . Разность оптической длины пути для соседних отраженных ( $R_0, R_1, \dots$ ) или прошедших ( $T_0, T_1, \dots$ ) лучей составит  $\Delta l = 2nd \cos \theta$ . Отсюда следует, что набег фазы между соседними лучами <sup>1</sup> равен

$$\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 2nd \cos \theta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 2L, \quad (3.1)$$

где  $L$  называется *оптической длиной* интерферометра.

При падении волны на отражающую поверхность, отношение интенсивностей отраженной и падающей волн называется коэффициентом отражения  $R \leq 1$ . В отсутствие поглощения связь  $R$  с коэффициентом пропускания  $T$  тривиальна:

$$R + T = 1.$$

Относительная интенсивность волны  $T_m$  на рис. 3.3 ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) равна

$$I_m = T^2 (R^2)^m.$$

<sup>1</sup> Если угол  $\theta_0$  мал и  $n > n_0$ , то для луча  $R_0$  при отражении происходит скачок фазы на  $\pi$ . Если  $n < n_0$ , то сдвиг фазы на  $\pi$  будет иметь место для всех отраженных лучей, кроме  $R_0$ .

Комплексная амплитуда волны равна

$$t_m = TR^m e^{im\delta}.$$

Полная амплитуда прошедшей волны обусловлена многолучевой интерференцией:

$$t = \sum_{m=0}^{\infty} t_m = T \sum_{m=0}^{\infty} R^m e^{im\delta} = \frac{1-R}{1-Re^{i\delta}}. \quad (3.2)$$

Отношение полной интенсивности излучения, прошедшего через интерферометр, к интенсивности падающего излучения, определяется выражением:

$$I_T = tt^* = \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\delta} = \frac{1}{1+F\sin^2(\delta/2)}, \quad (3.3)$$

где  $F = 4R/(1-R)^2$  называется *коэффициентом резкости*.

Из выражения (3.3) следует, что коэффициент пропускания максимален ( $I_T = 1$ ), когда набег фазы  $\delta$  кратен  $2\pi$ . Если условие максимума пропускания  $\delta = 2\pi N$  выполняется для целого числа  $N$  так, что  $\lambda N = 2L$ , оно будет выполняться и для длины волны  $(\lambda + \Delta\lambda)$  такой, что

$$(N-1)(\lambda + \Delta\lambda) = 2L.$$

Величина  $\Delta\lambda$  (или  $\Delta\nu$ ) называется *областью свободной дисперсии* или *свободным спектральным интервалом* прибора:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}; \quad \Delta\nu = \frac{c}{2L}. \quad (3.4)$$

Если  $L \gg \lambda$ , то порядок интерференции  $N \gg 1$ , а  $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$ . Зависимость коэффициентов пропускания и отражения интерферометра от длины волны излучения для разных коэффициентов отражения зеркал  $R$  иллюстрирует рис. 3.4. Ширина резонансной кривой на полувысоте от максимума ( $\delta\lambda$  и  $\delta\nu$  на рис. 3.4)

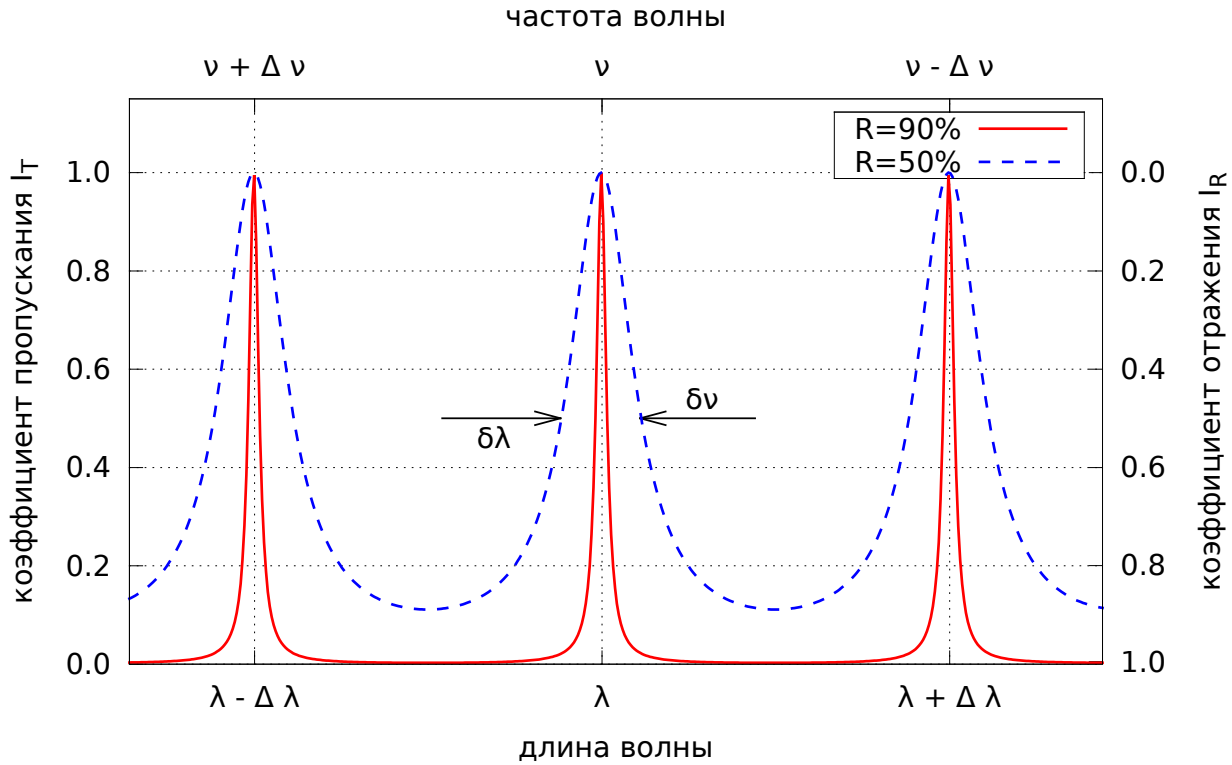


Рис. 3.4. Зависимость коэффициентов  $I_T$  и  $I_R$  от длины волны излучения.  $\Delta\lambda$  и  $\Delta\nu$  – свободный спектральный интервал, а  $\delta\lambda$  и  $\delta\nu$  – аппаратная ширина интерферометра

называется *аппаратной шириной интерферометра* и зависит от коэффициента резкости  $F$ :

$$\frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{2 \arcsin(1/\sqrt{F})}{\pi} \simeq \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} = \frac{1}{N_{\text{эфф}}}, \quad (3.5)$$

где приближенное равенство применимо для  $R > 0.5$ , а  $N_{\text{эфф}}$  – эффективное число интерферирующих лучей. Например, для коэффициента отражения зеркал  $R = 0.97$ , получаем  $N_{\text{эфф}} \simeq 100$ , т. е. аппаратная ширина интерферометра  $\delta\lambda$  в сто раз уже его свободного спектрального интервала  $\Delta\lambda$ .

### Применение

Пусть интерферометр Фабри – Перо состоит из двух стеклянных пластин, установленных параллельно друг другу. Обращенные внутрь поверхности пластин покрыты отражающими металлическими или диэлектрическими слоями, частично пропускаю-

щими свет. Если пластины находятся в воздухе, коэффициенты преломления и углы равны:  $n = n_0 = 1$ ,  $\theta = \theta_0$  (см. рис. 3.3). В этом случае, как следует из выражения (3.1), интерференционные максимумы прошедших лучей возникают при соблюдении условия

$$m\lambda = 2d \cos \theta, \quad (3.6)$$

где  $m$  – порядок интерференции (целое число),  $\lambda$  – длина волны света,  $\theta$  – угол, под которым наблюдается интерференционный максимум,  $d$  – расстояние между пластинами интерферометра.

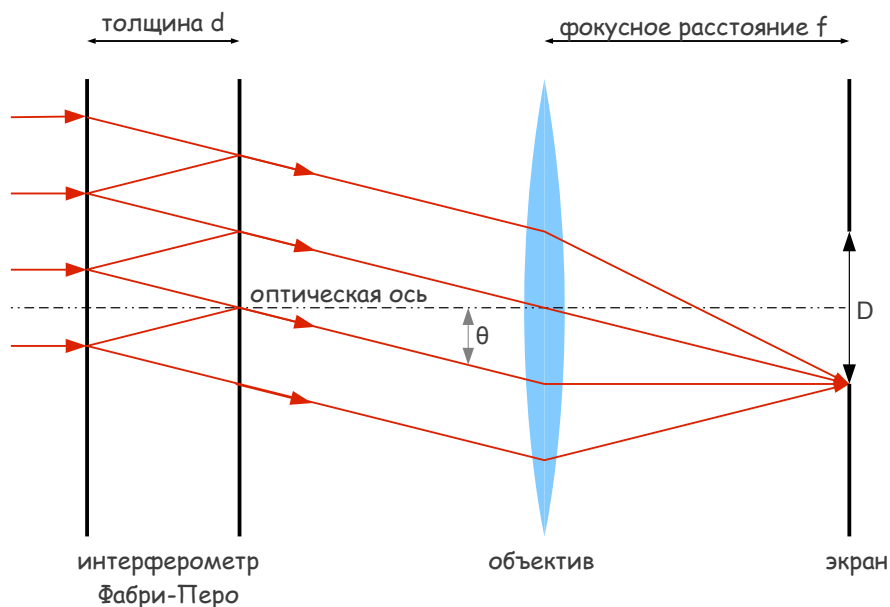


Рис. 3.5. Вариант использования интерферометра Фабри – Пэро

Расположим за интерферометром объектив с фокусным расстоянием  $f$ , а в фокусной плоскости объектива поместим экран для наблюдения интерференционной картины, как это показано на рис. 3.5. Все лучи, выходящие из интерферометра под определенным углом  $\theta$  к оптической оси, образуют на экране кольцо диаметром  $D$ , причем  $\theta$  и  $D$  связаны простым геометрическим

соотношением:

$$\cos \theta = \frac{f}{\sqrt{f^2 + (D/2)^2}} \simeq 1 - \frac{D^2}{8f^2}, \quad (3.7)$$

где приближение соответствует ситуации  $f \gg D$ . Пусть в исходном спектре излучения присутствует всего одна монохроматическая линия с длиной волны  $\lambda$ . Интерференционные максимумы образуют на экране светлые кольца, диаметр которых  $D_m$  определяется геометрией установки и порядком интерференции  $m$ :

$$m = \frac{2d}{\lambda} \cos \theta_m \simeq \frac{2d}{\lambda} \left(1 - \frac{D_m^2}{8f^2}\right). \quad (3.8)$$

Сравним между собой диаметры двух соседних колец, для которых порядок интерференции различается на единицу:

$$\begin{cases} D_m^2 &= 8f^2 \left(1 - \frac{\lambda m}{2d}\right) \\ D_{m+1}^2 &= 8f^2 \left(1 - \frac{\lambda m}{2d} - \frac{\lambda}{2d}\right). \end{cases} \quad (3.9)$$

Таким образом, зная толщину интерферометра  $d$ , фокусное расстояние объектива  $f$  и измерив диаметры интерференционных колец для соседних порядков интерференции, мы можем определить длину волны излучения:

$$\lambda = \frac{d}{4f^2} (D_m^2 - D_{m+1}^2). \quad (3.10)$$

Если в исследуемом спектре излучения присутствует несколько монохроматических линий, каждый порядок интерференции будет содержать соответствующее число колец. На рис. 3.6 приведена интерферограмма спектра с двумя близко расположенными линиями излучения.

К примеру, рассмотрим возможность использования интерферометра Фабри – Перо с расстоянием между пластинами  $d =$

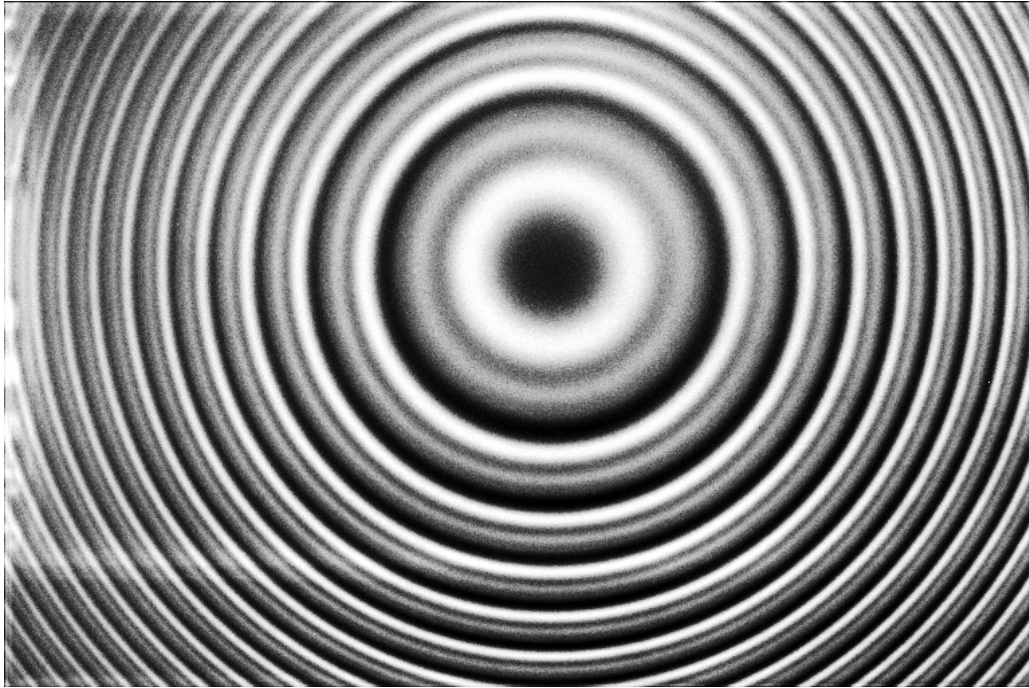


Рис. 3.6. Интерферограмма спектра с двумя близко расположенными линиями излучения

10 см для изучения спектра видимого излучения с длиной волны  $\lambda = 0.5$  мкм. Область свободной дисперсии такого интерферометра в относительных единицах составит  $\Delta\lambda/\lambda = \lambda/2d = 2.5 \times 10^{-6}$ . Это означает, что такой прибор позволяет исследовать особенности спектра в узком диапазоне двух с половиной миллионных долей от средней длины волны. Пусть в спектре содержатся две различные линии излучения,  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ , удовлетворяющие этому условию, т. е.  $\Delta\lambda/\lambda < 2.5 \times 10^{-6}$ .

Поставим задачу: с высокой точностью измерить расстояние между этими линиями  $\Delta\lambda$ . Измерим диаметры двух интерференционных колец  $D_\lambda$  и  $D_{\lambda+\Delta\lambda}$  в любом удобном для измерения порядке интерференции  $m$  – важно, чтобы он был одним и тем же для обеих длин волн (см. рис. 3.6). Используя выражение (3.8), мы можем записать равенство:

$$\frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{8f^2 - D_{\lambda+\Delta\lambda}^2}{8f^2 - D_\lambda^2}. \quad (3.11)$$



Из (3.11) получаем:

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot \frac{D_\lambda^2 - D_{\lambda+\Delta\lambda}^2}{8f^2 - D_\lambda^2} \simeq \frac{\lambda}{8f^2} (D_\lambda^2 - D_{\lambda+\Delta\lambda}^2). \quad (3.12)$$

Очевидно, что используя формулу (3.12), можно измерить величину  $\Delta\lambda$  примерно с такой же относительной погрешностью, с которой применение формулы (3.10) позволяет измерить длину волны  $\lambda$ , несмотря на то что эти величины отличаются друг от друга на шесть порядков.

### § 3.3. Схема экспериментальной установки

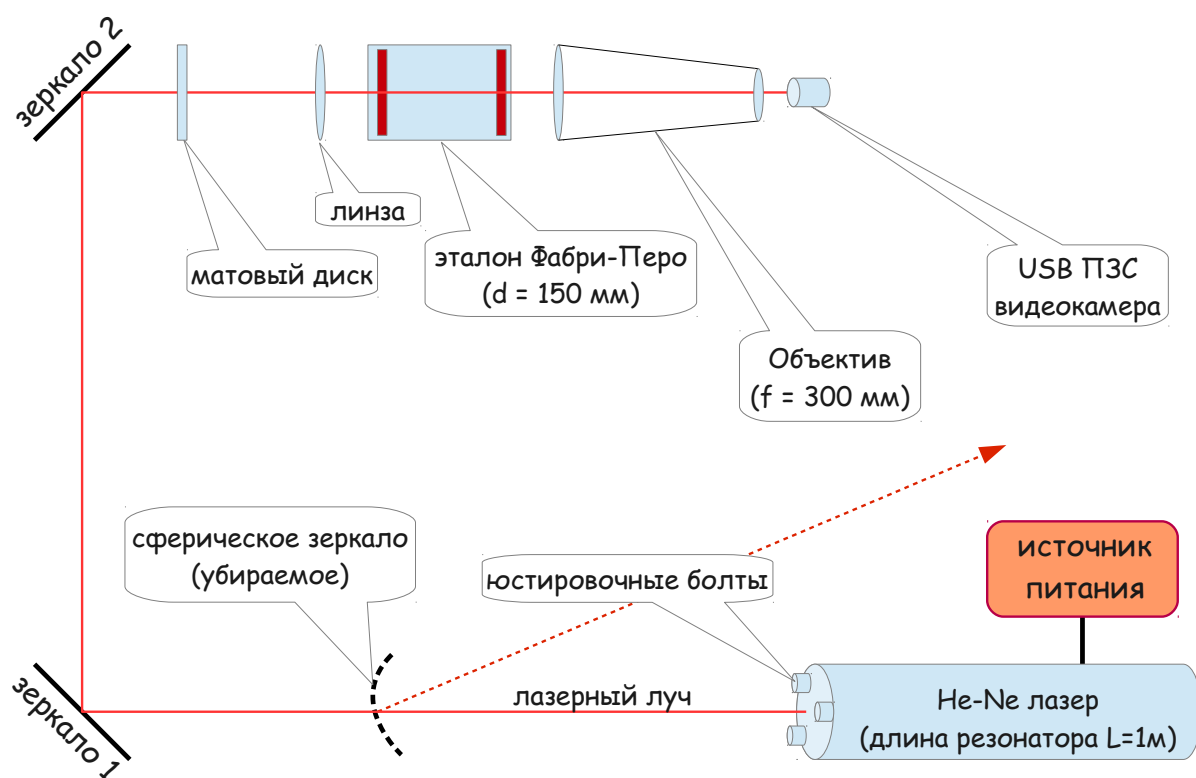


Рис. 3.7. Схема установки лабораторной работы №4.1

### § 3.4. Выполнение работы

Используя формулу (2.5) на стр. 37 рассчитайте расстояние между продольными модами для резонатора длиной  $L = 1$  м в единицах частоты ( $\Delta\nu$ , МГц), длины волны ( $\Delta\lambda$ , мкм) и в относительных единицах ( $\Delta\lambda/\lambda_0$ , где  $\lambda_0 = 0.6328$  мкм).

С помощью формулы (2.13) на стр. 42 оцените ширину линии усиления неона  $\sigma_\lambda$  и сравните ее со спектральным расстоянием  $\Delta\lambda$  между продольными модами.

#### Задание 1

Для визуального наблюдения поперечной модовой структуры He-Ne лазера установите на пути луча сферическое зеркало. Увеличенное изображение поперечного распределения интенсивности света в лазерном пучке спроецируйте на экран. Изменение модовой структуры лазерного излучения осуществляется юстировкой резонатора с помощью специального торцевого ключа. Зарисуйте на бумаге несколько различных картинок распределения интенсивности. Идентифицируйте тип модовой структуры для каждой зарисованной картинке, ориентируясь по изображениям на рис. 2.7 и рис. 2.8 (стр. 47).

#### Задание 2

Настройте резонатор на основную поперечную моду  $TEM_{00}$  и уберите сферическое зеркало. При освещении эталона Фабри – Перо пучком He-Ne лазера, рассеянным на вращающемся матовом стеклянном диске, в фокальной плоскости объектива наблюдается система концентрических колец. В плоскости наблюдения интерференционной картины расположена светочувствительная матрица ПЗС-видеокамеры. Изображение с видеокамеры передается в компьютер. Эталон Фабри – Перо ( $d = 150$  мм) и объектив ( $f = 300$  мм) объединены с цифровой видеокамерой в один

блок, который установлен на юстировочном столике. Получите интерференционную картину продольных мод лазера. Юстировкой резонатора добейтесь, чтобы в каждом порядке интерференции наблюдалось от двух до пяти спектральных линий. Сохраните полученную интерферограмму.

### Задание 3

Измерьте диаметры светлых колец для двух-четырех продольных мод в нескольких порядках интерференции. Определите длину волны излучения He-Ne лазера, используя различные подходящие для этого комбинации диаметров колец (формула (3.10) на стр. 55). Определите среднее значение и погрешность измерения длины волны. Сравните полученный результат с табличным значением длины волны излучения лазера в воздухе  $\lambda = 632.8$  нм.

### Задание 4

Определите расстояние между соседними продольными модами (формула (3.12) на стр. 57). Определите среднее значение и погрешность измерения расстояния между продольными модами. Сравните с расчетным значением для резонатора длиной  $L = 1$  м.

#### 3.4.1 Контрольные вопросы

- 1) Какие характеристики лазерного излучения обусловлены продольными и поперечными модами?
- 2) Как влияют параметры интерферометра Фабри – Перо на его спектральные характеристики?
- 3) Можно ли использовать формулу (3.10) для определения расстояния между продольными модами?
- 4) Схема внутреннего устройства He-Ne лазера изображена на рис. 3.1 (см. стр. 49). Торцы стеклянной трубки заклеены прозрачными пластинками под углом Брюстера. Зачем?

## Глава 4. Лабораторная работа 4.3

Тема работы:

### Изучение спектра лазера на красителе

Цели работы:

- знакомство с принципами работы лазера на красителе;
- изучение спектрального состава его излучения;
- определение абсолютного значения средней длины волны в спектре лазерного излучения.

Оборудование:

ультрафиолетовый лазер, лазер на красителе родамин-6G, анализатор оптического спектра, компьютер.

### § 4.1. Лазер на растворе красителя

Отличительные свойства лазеров на красителях определяются свойствами их рабочего вещества – органических красителей, являющихся сложными органическими соединениями, сильно поглощающими видимый свет [9]. Красители обычно состоят из бензольных ( $C_6H_6$ ), пиридиновых ( $C_5H_5N$ ), азотных ( $C_4H_4N_2$ ) и других колец. Эти лазеры были открыты в 1966 г. П. Сорокиным и, независимо, Ф. Шафером. Уникальная особенность таких лазеров – возможность плавной перестройки длины волны генерации в полосе шириной несколько десятков нанометров с монохроматичностью, достигающей 1.5 МГц.

На рис. 4.1 и рис. 4.2 показаны структура молекулы родамин-6G и схема энергетических уровней красителя.

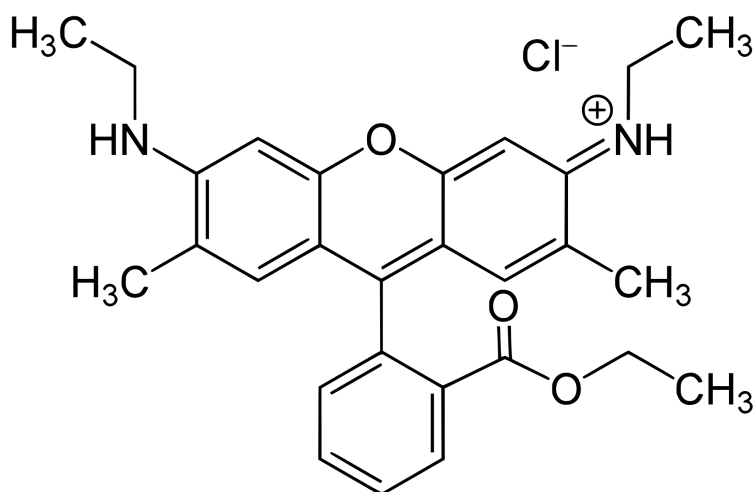


Рис. 4.1. Структура молекулы красителя родамин-6G

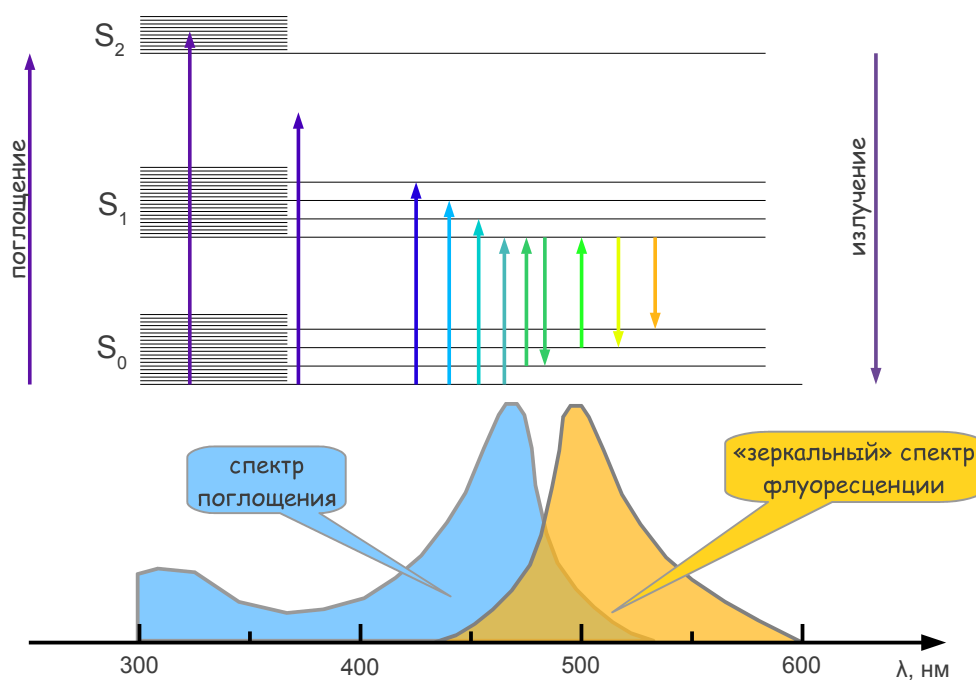


Рис. 4.2. Схема энергетических уровней молекулы красителя. Цвет стрелок, показывающих переходы между энергетическими уровнями, качественно соответствует длине волны излучения. Внизу изображены спектры поглощения и флуоресценции

В равновесных условиях большинство молекул находятся в нижнем электронном энергетическом состоянии  $S_0$ , а состояния  $S_1$  и

$S_2$  с более высокими энергиями не заселены. Каждый электронный энергетический уровень молекулы красителя расщеплен на множество подуровней, обозначенных горизонтальными линиями на рис. 4.2 и обусловленных колебательно-вращательными движениями составляющих молекулу атомов. Энергию произвольного подуровня любого электронного состояния можно представить в виде суммы двух слагаемых: энергии связи электрона с молекулой и внутренней энергии движения составляющих молекулу ядер. Поскольку электрон в 2000 раз легче протона, электронные переходы осуществляются практически мгновенно по сравнению с временным масштабом ядерных движений. Оптические переходы между внутренними подуровнями двух различных электронных состояний молекул называются *вибронными* и регламентируются принципом Франка-Кондона (рис. 4.3). В соответствии с ним оба подуровня в момент осуществления перехода должны обладать одинаковыми координатами и импульсами ядер, участвующих в колебательно-вращательном движении молекулы.

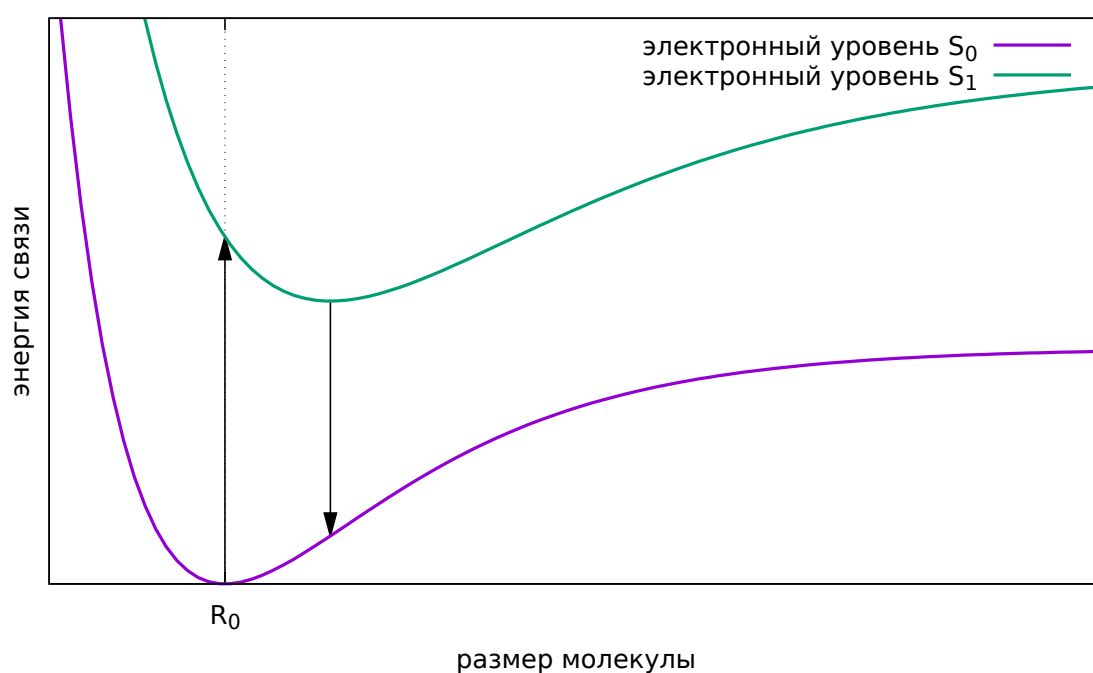


Рис. 4.3. Иллюстрация к принципу Франка-Кондона

Оптический переход  $S_0 \rightarrow S_1$  на рис. 4.3 осуществляется из нижнего подуровня состояния  $S_0$  на некоторый подуровень состояния  $S_1$ , максимально близко соответствующий первоначальному состоянию внутренних степеней свободы молекулы. Далее, энергия электромагнитного возбуждения электронной оболочки расходуется на раскачку молекулы, что приводит к увеличению ее размера. Из этого состояния (локальный минимум потенциальной энергии всей молекулы) происходит обратный оптический переход  $S_1 \rightarrow S_0$ . При этом энергия излученного кванта будет меньше, чем энергия поглощенного, такой процесс излучения называется флуоресценцией. Принцип Франка-Кордона разрешает электронные переходы только вдоль вертикальной оси рисунка 4.3 и объясняет наличие сдвига спектра излучения относительно спектра поглощения на рис. 4.2.

Инверсная населенность (§ 2.1) в красителе создается между нижними подуровнями состояния  $S_1$  и верхними подуровнями состояния  $S_0$ . Из-за большой ширины спектра флуоресценции ( $\Delta\lambda/\lambda \simeq 5\%$ ) существует возможность получения лазерного излучения в широком диапазоне длин волн. Если в резонатор лазера ввести дополнительные селективные элементы, создающие для одного или нескольких типов колебаний гораздо более высокую добротность по сравнению со всеми остальными, то спектр генерации станет более монохроматическим.

## § 4.2. Схема экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 4.4. Источником оптической накачки красителя является импульсный лазер, излучающий короткие ( $\tau \leq 10^{-8}$  с) импульсы ультрафиолетового излучения ( $\lambda \simeq 355$  нм) с регулируемой частотой следования. Линза 1 на рис. 4.4 фокусирует излучение накачки в кювету с красителем. Излучение лазера на красителе собирается

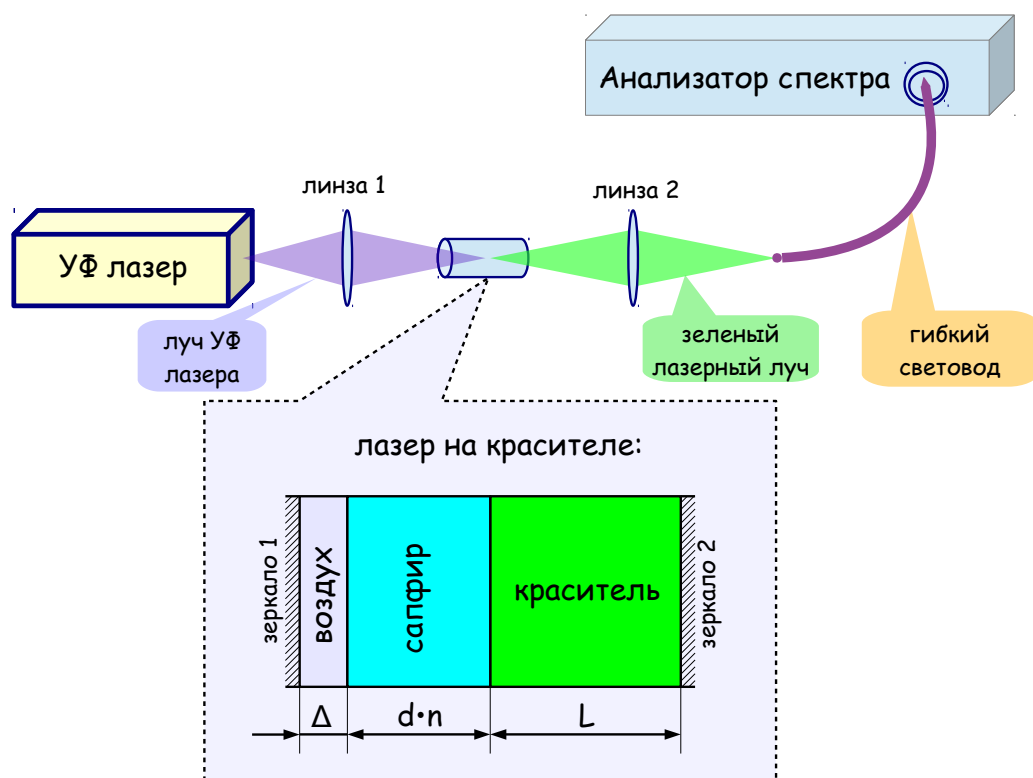


Рис. 4.4. Схема установки лабораторной работы №4.3

линзой 2 на входном торце гибкого световода. С выходного торца световода излучение поступает в дифракционный спектроанализатор LSA Standart, измеряющий спектр излучения в диапазоне длин волн от 350 нм до 1120 нм.

Резонатор лазера на красителе образован зеркалами 1 и 2, как это показано во вставке на рис. 4.4. Параметрическое зеркало 1 полностью пропускает ультрафиолетовое излучение накачки и отражает более 90 % излучения лазера на красителе. Окнами кюветы с красителем являются полупрозрачное зеркало 2 с одной стороны и сапфировая пластинка с другой. Сапфировая пластинка ориентирована параллельно зеркалам резонатора и, как видно из рисунка, находится внутри этого резонатора. Кювета вместе с окнами и зеркалами образуют единую жесткую конструкцию. Ориентацию этой конструкции относительно сфокусированного



луча лазера накачки можно менять с помощью двух юстировочных винтов. Оптимальные условия для генерации лазера на красителе будут созданы при нормальном падении излучения накачки на оптические поверхности данной конструкции.

Толщина  $d$  сапфировой пластинки – несколько десятых долей миллиметра, показатель преломления сапфира  $n = 1.76$ . Между сапфировой пластинкой и зеркалом 1 имеется еще более тонкий воздушный зазор толщиной  $\Delta$ . Каждая пара отражающих поверхностей сложного резонатора создает свой набор продольных резонансных типов колебаний с расстоянием между соседними модами

$$\Delta\lambda = \lambda^2/2L ,$$

где  $L$  – оптическая длина пути между этими поверхностями (формула (2.5) на стр. 37). Спектральная ширина продольных мод, в соответствии с выражением (2.6) на стр. 37, обратно пропорциональна длине  $L$  и прямо пропорциональна суммарному коэффициенту пропускания отражающих поверхностей.

Основной резонатор ( $L \simeq 1$  см) образован зеркалами 1 и 2, расстояние между продольными модами  $\Delta\lambda \simeq 10^{-5}$  мкм. Разрешающая сила спектроанализатора LSA ( $\lambda/\Delta\lambda \simeq 10^4$ ) не позволяет наблюдать продольные моды основного резонатора.

Толщина воздушного зазора и сапфировой пластинки гораздо меньше длины основного резонатора, а расстояние между продольными модами, соответственно, больше. Коэффициент отражения излучения от поверхности раздела между воздухом и сапфиром можно оценить, воспользовавшись формулами Френеля:

$$R = (n - 1)^2/(n + 1)^2 \simeq 7.6\% .$$

Следовательно, добротность трех дополнительных резонаторов, образованных а) воздушным зазором, б) сапфировой пластинкой, в) ими обоими вместе, невысока.

Зависимость коэффициента обратной связи от длины волны для каждого резонатора в отдельности определяется функцией (2.12) (см. стр. 40) с соответствующими этому резонатору параметрами. Суммарная структура продольных мод многозеркального резонатора является произведением этих трех функций.

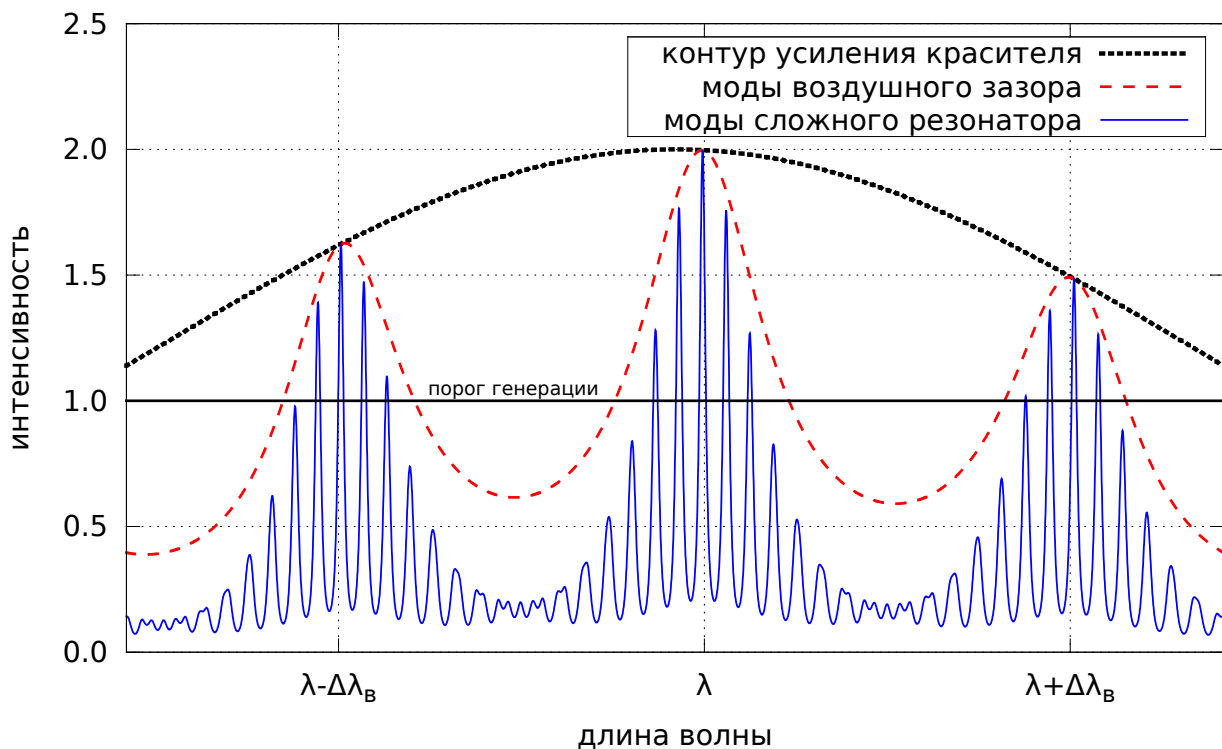


Рис. 4.5. Влияние дополнительных резонаторов на спектр генерации лазера на красителе.  $\Delta\lambda_v$  — расстояние между продольными модами резонатора, образованного тонким воздушным слоем (см. рис. 4.4). Модельная ширина моды для каждого из трех резонаторов определяется его длиной и одинаковым для всех коэффициентом отражения  $R = 7.6 \%$

На рис. 4.5 представлен результат модельного расчета, иллюстрирующий влияние дополнительных резонаторов на спектр излучения лазера на красителе. Как видно из данного графика, с помощью введения в резонатор дополнительных селективных элементов удастся получить лазерное излучение только в выделенных областях спектра. Сверхтонкая структура продольных мод, обусловленная длиной основного резонатора, на рис. 4.5 не показана и равномерно покрывает весь рассматриваемый участок спектра. В ситуации, когда толщина воздушного зазора  $\Delta$

существенно меньше оптической длины сапфировой пластинки  $n \cdot d$ , расстояния между продольными модами резонаторов, образованных только сапфиром и системой «сапфир + воздух», очень близки. Эта небольшая разность собственных частот заметна на рис. 4.5 по нарушению периодичности модовой структуры в областях с минимальной суммарной добротностью.

## § 4.3. Выполнение работы

### Задание 1

Включите компьютер, затем лазер накачки с помощью программы управления лазером. Убедитесь визуально в присутствии генерации ультрафиолетового излучения по яркой желто-зеленой флуоресценции красителя в кювете.

### Задание 2

Запустите программу работы со анализатором спектра, найдите в рабочем окне программы спектр излучения лазера. Сохраните на диск или распечатайте на принтере измеренный спектр.

### Задание 3

Определите спектральный интервал между наблюдаемыми модами излучения. Вычислите толщину воздушного зазора  $\Delta$  и сапфировой пластинки  $d$ .

#### 4.3.1 Контрольные вопросы

- 1) Можете предложить свой способ селекции длины волны в лазере на красителе?

## Глава 5. Лабораторная работа 4.4

Тема работы:

### Генерация лазерного излучения

Цели работы:

- изучение процесса возникновения генерации лазерного излучения на примере Nd:YAG лазера с импульсной светодиодной накачкой;
- определение превышения скорости накачки над пороговым значением с помощью численного моделирования;
- измерение добротности лазерного резонатора.

Оборудование:

Nd:YAG лазер ЛТИ–101 со светодиодной накачкой, импульсный блок питания, фотодиод ФД–24, цифровой осциллограф.

### § 5.1. Твердотельный Nd:YAG лазер

Рассмотрим лазер на кристалле иттрий-алюминиевого граната, активированного трехвалентными ионами неодима. Химическая формула кристалла –  $\text{Nd}^{3+}:\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ , общепринятое сокращенное название – Nd:YAG лазер. Лазер работает по четырехуровневой схеме (см. рис. 5.1). Под действием *накачки* ( $\lambda \simeq 808$  нм) электроны с уровня 1 переводятся на короткоживущий уровень 4, откуда за счет быстрых неоптических переходов «сваливаются» на уровень 3.

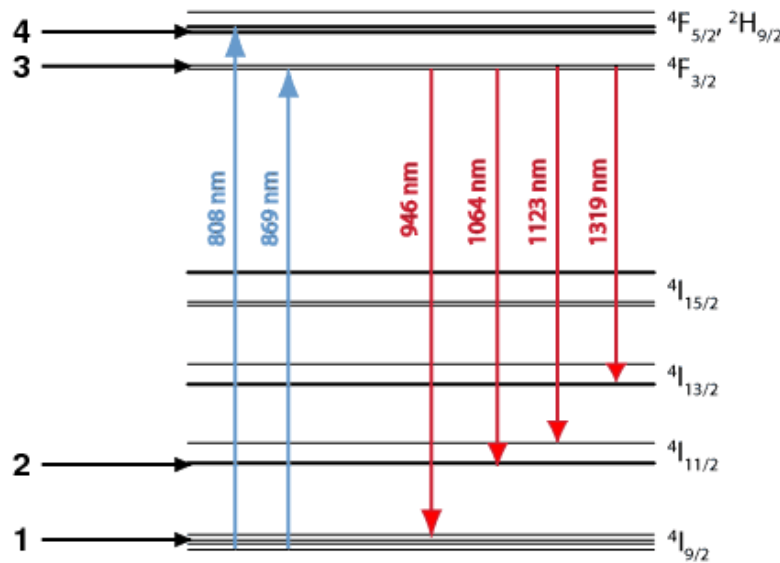


Рис. 5.1. Структура энергетических уровней и переходов для трехвалентного иона неодима в кристалле Nd:YAG. ([www.rp-photonics.com](http://www.rp-photonics.com))

### 5.1.1 Населенности электронных уровней

Пусть  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  – населенности первых трех уровней (§ 2.1), а  $N_4 = 0$ , так как скорость спонтанных переходов  $4 \rightarrow 3$  мы считаем очень большой. В таком случае энергия накачки переводит электроны с основного уровня 1 на уровень 3, а вероятность прямых спонтанных переходов  $3 \rightarrow 1$  считаем малой величиной и не берем в расчет. Изменение во времени населенности уровня 1 можно описать дифференциальным уравнением:

$$\frac{dN_1}{dt} = -w_P N_1(t) + w_{21} N_2(t), \quad (5.1)$$

где  $w_P$  – скорость переходов  $1 \rightarrow 3$  под действием накачки (см. рис. 1.4),  $w_{21}$  – скорость переходов  $2 \rightarrow 1$  за счет спонтанного излучения (рис. 1.6). Размерность величин  $w_P$  и  $w_{21}$  –  $[c^{-1}]$ . Важно понять следующее: скорость убывания электронов с уровня 1 пропорциональна его населенности, коэффициент пропорциональности – константа  $w_P$ . Увеличение же населенности уровня 1 пропорционально населенности уровня 2, коэффициент пропорциональности – константа  $w_{21}$ .

Уровень 2 в рассматриваемой нами системе (рис. 5.1) является нижним энергетическим уровнем «рабочего» перехода  $3 \rightarrow 2$ . Предположим, что наш лазер уже работает, тогда в его резонаторе мы имеем стоячую электромагнитную волну (рис. 2.3). Введем в рассмотрение плотность энергии этой волны  $U(t)$ .

Для простоты будем считать ее зависящей только от времени, а единицей измерения этой величины выберем  $[\text{см}^{-3}]$ : в этом случае  $U(t)$  описывает объемную плотность числа фотонов с длиной волны  $\lambda = 1.064$  мкм на оси лазерного резонатора. Предположив наличие фотонов в резонаторе лазера, мы должны дополнительно учитывать два процесса, а именно:

- переходы  $2 \rightarrow 3$  с поглощением фотона (рис. 1.4);
- переходы  $3 \rightarrow 2$  за счет вынужденного излучения (рис. 1.5).

Теперь мы можем записать уравнение для изменения во времени населенности уровня 2:

$$\frac{dN_2}{dt} = -w_{21}N_2(t) + w_{32}N_3(t) - w_iN_2(t)U(t) + w_iN_3(t)U(t) . \quad (5.2)$$

Ясно, что член  $-w_{21}N_2(t)$  – такой же по величине, как и в (5.1), но отрицательный. Второй член,  $w_{32}N_3(t)$ , описывает уже знакомое нам спонтанное излучение, но для перехода  $3 \rightarrow 2$ , где  $w_{32}$  – соответствующая константа скорости перехода. Феноменологическая константа  $w_i$  (размерность –  $[\text{см}^3/\text{с}]$ ) отвечает за вынужденные переходы  $2 \rightarrow 3$  и  $3 \rightarrow 2$ . Она эквивалентна коэффициентам Эйнштейна  $B_{23} = B_{32}$  (см. стр. 15). Такие переходы происходят под действием оптического поля, поэтому вероятности переходов линейно зависят от плотности фотонов в резонаторе лазера  $U(t)$ .

Уравнение для населенности уровня 3 выглядит так:

$$\frac{dN_3}{dt} = -w_{32}N_3(t) + w_PN_1(t) + w_iN_2(t)U(t) - w_iN_3(t)U(t) . \quad (5.3)$$

В нем участвуют уже обсужденные выше процессы и константы, так что вывод уравнения (5.3) не нуждается в особых комментариях. Отметим еще раз, что мы пренебрегаем населенностью самого верхнего уровня 4 в силу того, что скорость спонтанных переходов  $4 \rightarrow 3$  мы считаем очень большой, т. е.  $w_{43} \gg w_{32}, w_P$ .

Введем в рассмотрение полную плотность числа активных частиц  $N_V$ , которая, очевидно, не зависит от времени. Тогда

$$N_1(t) + N_2(t) + N_3(t) = N_V . \quad (5.4)$$

Введем разность населенностей рабочих уровней:

$$N(t) \equiv N_3(t) - N_2(t) . \quad (5.5)$$

Если эта величина положительна, рабочее вещество лазера находится в состоянии *инверсии населенностей*, т. е. приобретает свойства когерентного усилителя электромагнитной волны за счет механизма вынужденного излучения (см. стр. 34). Из (5.2) и (5.3) получим:

$$\frac{dN}{dt} = w_P N_1(t) - 2w_{32} N_3(t) + w_{21} N_2(t) - 2w_i N(t) U(t) . \quad (5.6)$$

Населенности  $N_2$  и  $N_3$  можно выразить через  $N_V$ ,  $N$ ,  $N_1$ :

$$N_2 = \frac{N_V - N - N_1}{2} ; \quad N_3 = \frac{N_V + N - N_1}{2} . \quad (5.7)$$

Запишем уравнение для изменения плотности числа лазерных фотонов в резонаторе:

$$\frac{dU}{dt} = -U(t)/\tau_c + w_i N(t) U(t) . \quad (5.8)$$

Здесь  $\tau_c$  – константа, описывающая экспоненциальное во времени уменьшение плотности фотонов в «холодном» резонаторе (когда  $N = 0$ ). Константу  $\tau_c$  называют временем жизни фотона в резонаторе, которое определяется его добротностью (стр. 40):

$$\tau_c = Q/\omega = Q\lambda/2\pi c .$$

Второй член в уравнении (5.8) описывает влияние механизма вынужденного излучения (и поглощения) фотонов. Заметим, что его абсолютная величина ровно в два раза меньше аналогичного члена в уравнении (5.6), т.к. излучение (поглощение) одного фотона изменяет инверсную населенность на двойку.

### 5.1.2 Система кинетических уравнений

Соберем вместе уравнения (5.1), (5.6), (5.8) и с учетом замены переменных (5.7) запишем полную систему *кинетических уравнений лазерной генерации* для рассматриваемой нами четырехуровневой системы:

$$\begin{cases} \dot{N} = (w_P + w_{32} - \frac{1}{2}w_{21})N_1 + \frac{1}{2}w_{21}(N_V - N) - \\ \quad - w_{32}(N_V + N) - 2w_iNU ; \\ \dot{N}_1 = - (w_P + \frac{1}{2}w_{21})N_1 + \frac{1}{2}w_{21}(N_V - N) ; \\ \dot{U} = - U/\tau_c + w_iNU . \end{cases} \quad (5.9)$$

Эту систему называют еще системой балансных уравнений или, по именам авторов, уравнениями Статца – де Марса. Просуммируем предположения и упрощения, сделанные при выводе этой системы уравнений:

- лазер считается одномодовым по поперечным индексам, а рабочие уровни – невырожденными;
- мы пренебрегли пространственными неоднородностями в распределениях плотности энергии электромагнитного поля и населенностей энергетических уровней;
- для упрощения дальнейшего анализа, в последнем уравнении системы (5.9) не учитывается спонтанное излучение, поэтому с помощью системы (5.9) невозможно описать начальный



этап зарождения лазерной генерации (при однородных начальных условиях ( $U = 0$ ) и для  $t > 0$  мы всегда будем иметь  $U = 0$ ), первоначальные фотоны, дающие начало лазерной генерации, могут быть введены в виде начальных условий.

### Тривиальное стационарное решение

Система (5.9) имеет *стационарное* ( $\dot{N}_1 = \dot{N} = \dot{U} = 0$ ) тривиальное ( $U = 0$ ) решение:  $N = N_S$ . Физический смысл такого решения – установившееся при  $t \rightarrow \infty$  распределение электронов по рассматриваемым в задаче уровням в отсутствие лазерной генерации. Такое распределение установится в активном веществе, если включить накачку и убрать резонатор. Чтобы найти  $N_S$ , выразим  $N_1$  через  $N$  из первого уравнения системы (5.9)

$$N_1 = \frac{w_{21}}{2w_P + w_{21}}(N_V - N) \quad (5.10)$$

и подставим во второе. Получим:

$$N_S = N_V \frac{w_P(w_{21} - w_{32})}{w_P w_{21} + w_{21} w_{32} + w_P w_{32}}. \quad (5.11)$$

Из выражения (5.11) видно, что инверсная населенность положительна, когда скорость накачки  $w_P > 0$ , а  $w_{21} > w_{32}$ , т. е. время жизни уровня 2 за счет спонтанного излучения меньше, чем уровня 3. Для Nd:YAG лазера справедливо соотношение  $w_{21} \gg w_{32}$ , тогда:

$$N_S \simeq N_V \frac{w_P}{w_P + w_{32}}. \quad (5.12)$$

### Нетривиальное стационарное решение

Нетривиальное [ $U = U_O(> 0)$ ;  $N = N_O$ ] стационарное ( $\dot{N}_1 = \dot{N} = \dot{U} = 0$ ) решение системы (5.9) описывает установившийся режим лазерной генерации. Сократив  $U_O$  в последнем уравнении системы (5.9), найдем  $N_O$ :

$$N_O = (w_i \tau_c)^{-1}. \quad (5.13)$$

Чтобы найти равновесное значение  $U_O$ , подставим  $N_O$  в первое уравнение системы (5.9), найдем равновесное значение  $N_1$  и подставим его и  $N_O$  во второе уравнение. В результате получим:

$$U_O = \frac{\tau_c}{\tau_0}(N_S - N_O) , \quad (5.14)$$

где

$$\tau_0 = \frac{2w_P + w_{21}}{w_P w_{21} + w_{21} w_{32} + w_P w_{32}} . \quad (5.15)$$

Параметр  $\tau_0$  имеет размерность времени и является комбинацией скоростей переходов электронов под действием накачки и за счет спонтанного излучения. Из (5.14) видно, что физически значимое решение, соответствующее неотрицательным значениям плотности числа фотонов, имеется лишь при превышении порога:

$$N_S > N_O . \quad (5.16)$$

При этом, поскольку  $N_O > 0$  и  $N_S > 0$ , порог генерации достигается только при инверсии населенностей рабочего перехода. Условие (5.16) фактически является пороговым условием для скорости стационарной накачки  $w_P \geq w_P^t$ . Используя (5.16) и (5.12), вычислим пороговую скорость накачки:

$$w_P^t = w_{32} \frac{N_O}{N_V - N_O} . \quad (5.17)$$

### Переходной процесс

Рассмотрим процессы, происходящие после включения накачки в момент времени  $t = 0$ . Начальными условиями для решения системы (5.9) будут:  $N_1 = N_V$ ,  $N = 0$ , а в качестве начального значения для  $U$  подойдет очень маленькое число, скажем  $U = U_O \times 10^{-20}$ . Систему балансных уравнений можно решать численно с использованием итерационных методов дифференцирования. Для этого была создана специальная программа (на основе метода Рунге – Кутты четвертого порядка).

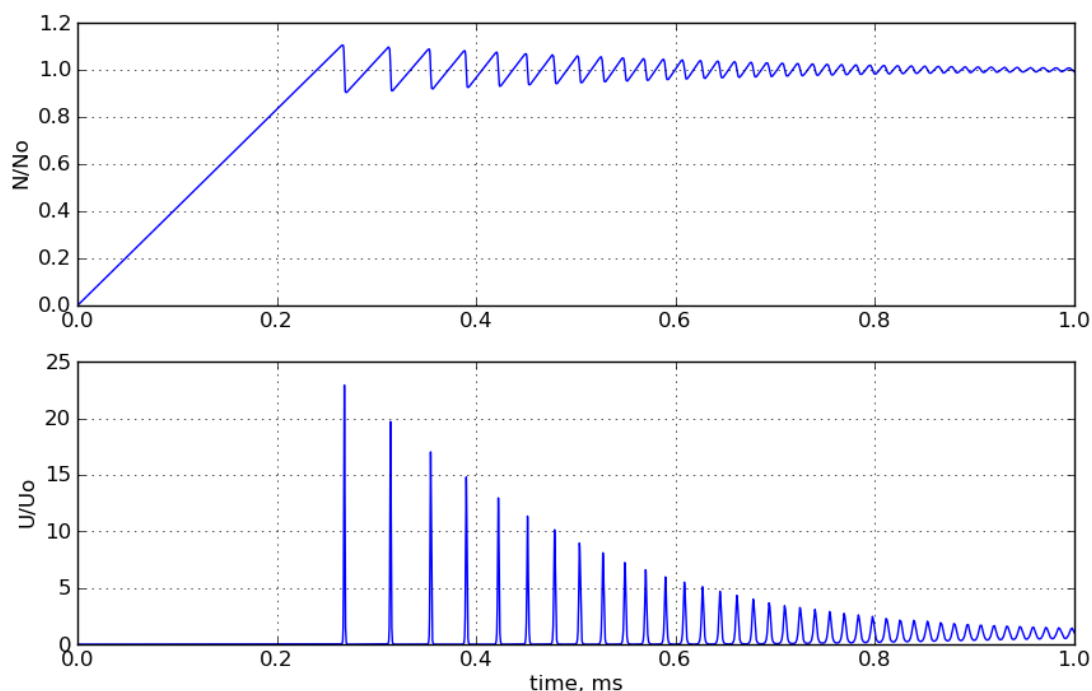


Рис. 5.2. Пример численного решения системы уравнений (5.9).

Вверху – график изменения инверсной населенности в единицах  $N/N_O$ , внизу – график мощности лазерного излучения в единицах  $U/U_O$

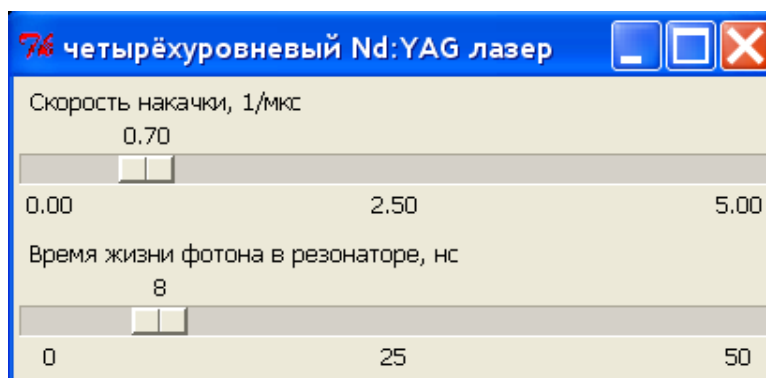


Рис. 5.3. Интерактивное окно управления свободными параметрами системы (5.9)

Пример решения приведен на рис. 5.2. Видно, что на начальном этапе растет уровень инверсной населенности, при этом мощность излучения близка к нулю. Как только  $N$  становится больше  $N_O$ , мощность излучения лавинообразно увеличивается, что приводит к опустошению верхнего уровня лазерного перехода и к падению инверсной населенности ниже порогового значения.

Дальнейшее поведение описывается релаксационными колебаниями, амплитуда которых со временем затухает и устанавливается стационарный режим генерации с  $N \rightarrow N_0$ ;  $U \rightarrow U_0$ .

В программе моделирования переходного процесса используются фиксированные значения материальных параметров:

$$N_V = 0.5 \times 10^{20} \text{ см}^{-3}; \quad 1/w_{32} = 0.23 \text{ мс}; \quad w_i = 1.8 \times 10^{-11} [\text{см}^3/\text{мс}].$$

Свободными параметрами являются скорость накачки  $w_P$  и время жизни фотона в резонаторе  $\tau_c$  (см. рис. 5.3).

## § 5.2. Схема экспериментальной установки

В работе используется твердотельный Nd:YAG лазер ЛТИ–101. Генерация происходит на длине волны 1064 нм – это невидимое

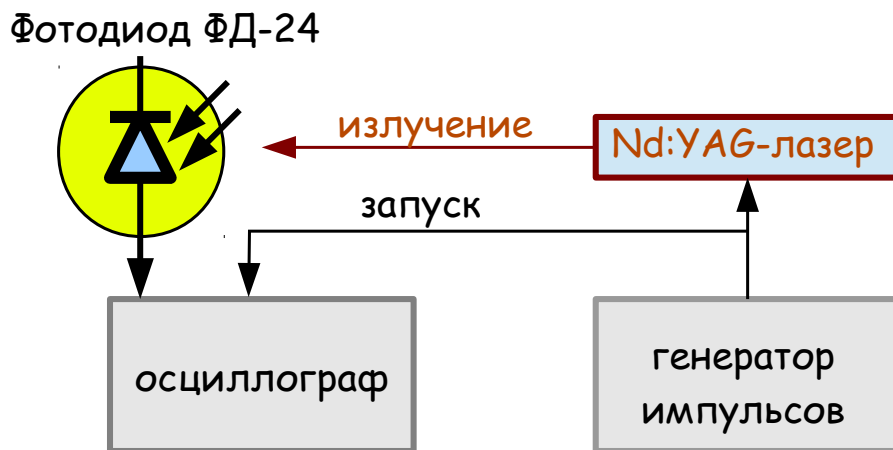


Рис. 5.4. Схема установки лабораторной работы №4.4

глазом инфракрасное излучение. Инверсная населенность электронных уровней достигается путем импульсной накачки излучением светодиодов на основе гетеропереходов в системе AlAs-GaAs. Длительность импульсов накачки составляет 0.5–1 мс при токе до 6 А. Средняя мощность лазерного излучения при частоте повторения импульсов 20 Гц – около 1 мВт. Длина лазерного резонатора  $L \simeq 3$  см. Для регистрации выходящего из лазера из-

лучения используется фотодиод типа ФД–24, работающий в режиме с внешним запирающим напряжением: ток через фотодиод пропорционален количеству носителей заряда, освободившихся в результате внутреннего фотоэффекта.

### § 5.3. Выполнение работы

- 1) Ручку регулировки тока генератора импульсов накачки установите в минимальное положение, частоту повторения импульсов – 1 Гц. Включите компьютер, генератор, блок питания фотоприемника. Запустите программу-осциллограф. Кабель ко входу осциллографа подключается с использованием согласованной нагрузки (50 Ом).
- 2) Медленно вращая ручку регулировки тока накачки установите ток  $I \simeq 20$  мкА по стрелочному индикатору на передней панели генератора. При превышении необходимого для проведения эксперимента значения тока срабатывает защита, генератор импульсов накачки выключается, и его надо включать заново.
- 3) Наблюдайте на экране осциллографа импульсы с фотодиода прямоугольной формы и длительностью около 1 мс. Посмотрите, как амплитуда импульсов зависит от расстояния между лазером и фотодетектором.
- 4) Медленно вращая ручку регулировки тока накачки увеличивайте ток до тех пор ( $\simeq 30$  мкА), пока на фоне прямоугольного импульса не появятся импульсы большей амплитуды. Изменяя в небольших пределах ток накачки, получите картинку, на которой будет видна регулярная последовательность коротких импульсов уменьшающейся амплитуды (как на рис. 5.5) и сохраните ее для отчета. Слегка увеличив ток,

наблюдайте более сложные осциллограммы, сохраните еще одну–две картинки.

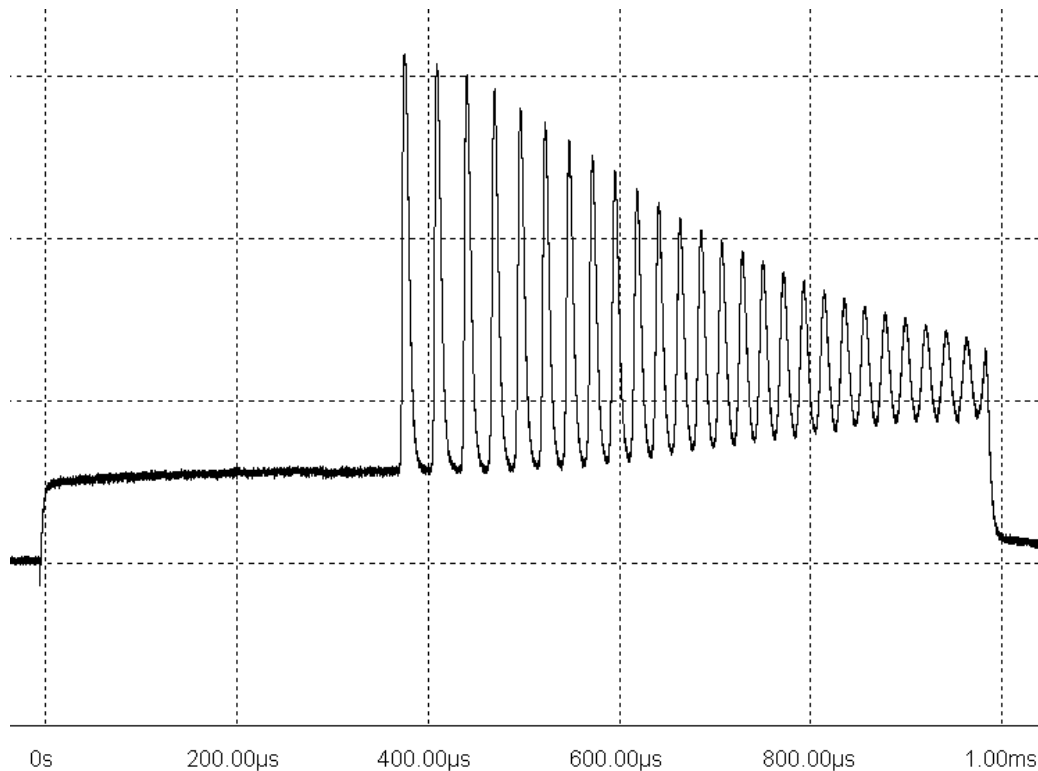


Рис. 5.5. Пример осциллограммы. Импульс накачки начинается в момент времени  $t = 0$

### Задание 1

С помощью численного моделирования (см. рис. 5.2 на стр. 75) подберите свободные параметры задачи – скорость накачки  $w_P$  и время жизни фотона в резонаторе  $\tau_c$  – так, чтобы теоретический расчет удовлетворительно описывал экспериментальные данные: время от момента включения накачки до генерации первого импульса, период следования импульсов и их количество. Сохраните (распечатайте) картинку для отчета.

### Задание 2

Определите скорость накачки  $w_P$  и время жизни фотона  $\tau_c$ .

**Задание 3**

Определите пороговую скорость накачки для исследуемого лазера на основе своих измерений. Для этого, используя полученное значение  $\tau_c$  и табличное значение  $w_i$ , из выражения (5.13) на стр. 73 определите  $N_O$  и подставьте результат в выражение (5.17) на стр. 74.

**Задание 4**

Оцените добротность лазерного резонатора.

**5.3.1 Контрольные вопросы**

- 1) Во сколько раз импульсная мощность в первом пике свободной генерации выше мощности непрерывной генерации?
- 2) Объясните смысл понятия «пороговая скорость накачки».
- 3) Во сколько раз измеренная скорость накачки превосходит пороговую?

## Глава 6. Лабораторная работа 4.5

Тема работы:

### Генерация оптических гармоник

Цели работы:

- изучение процесса генерации второй гармоники (ГВГ);
- измерение зависимости эффективности ГВГ от интенсивности первой гармоники излучения;
- определение угловой ширины фазового синхронизма в нелинейном кристалле.

Оборудование:

полупроводниковый лазер, механический затвор, полупрозрачная пластинка, нелинейный кристалл иодата лития, светофильтр, измерители интенсивности излучения, цифровой осциллограф.

### § 6.1. Генерация второй гармоники

Генерация второй гармоники (ГВГ) – процесс, позволяющий получить излучение удвоенной частоты за счет нелинейного взаимодействия лазерного излучения с диэлектрическим кристаллом.

#### 6.1.1 Нелинейная поляризация среды

Любой атом или молекула, как известно, представляют из себя электрически нейтральную конфигурацию положительно заряженных ядер и электронных оболочек с отрицательным зарядом.



Стабильность такой квантовой системы поддерживается внутренними электромагнитными связями. В качестве простого примера рассмотрим плоскую модель молекулы, состоящей из двух одинаковых атомов, связанных **ковалентной связью**. На рис. 6.1, а на-

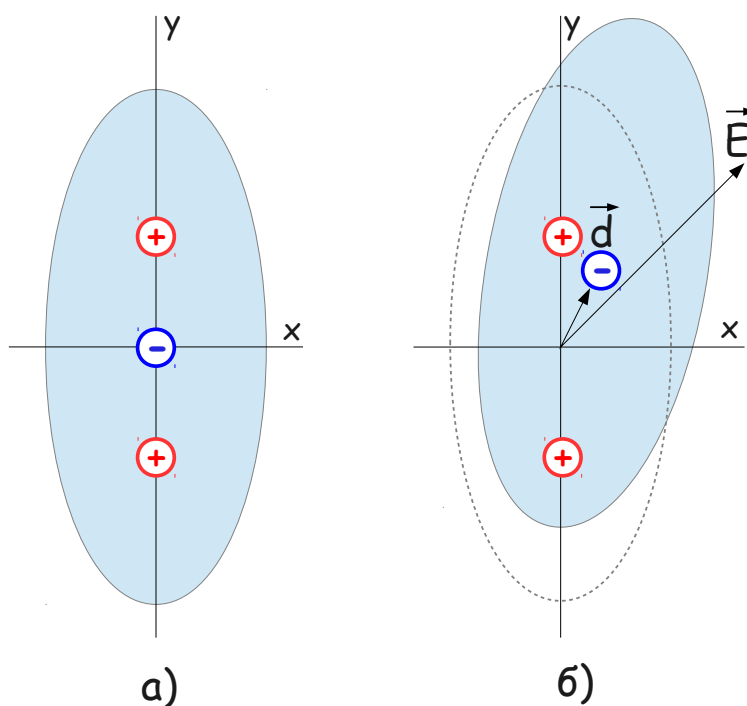


Рис. 6.1. Плоская модель двухатомной молекулы

а) без внешнего поля, б) во внешнем электрическом поле  $\vec{E}$ , направленном под углом к оси молекулы

рисована молекула в отсутствие внешних полей. Положительные заряды (+) соответствуют ядрам двух образующих молекулу атомов. Отрицательный заряд (-) нарисован в центре распределения плотности электронного облака. В такой ситуации у молекулы нет электрического дипольного момента, т. к. центры распределений плотности разноименных зарядов совпадают.

На рис. 6.1, б молекула помещена в электрическое поле  $\vec{E}$ , направленное под углом  $45^\circ$  к оси молекулы. Отрицательный заряд электронного облака под действием внешнего поля сместился относительно положительного, и у молекулы появился электриче-

ский дипольный момент  $\vec{d}$ . Величина смещения определяется соотношением внешнего и внутреннего электрического поля, причем последнее, очевидно, анизотропно – иначе электронное облако было бы круглым. Если проекции вектора напряженности внешнего поля на оси  $x$  и  $y$  равны, то соответствующие проекции дипольного момента – различны. Из-за этой анизотропии направление вектора  $\vec{d}$  даже в нашем простейшем примере не совпадает с направлением вектора  $\vec{E}$ . С ростом напряженности внешнего поля поляризация молекулы будет расти, а электронная оболочка начнет не только смещаться, но и деформироваться, вплоть до ионизации. Поэтому модуль вектора  $|\vec{d}|$  будет зависеть от напряженности поля  $\vec{E}$  сложным нелинейным образом.

Внешние электрические поля вызывают поляризацию вещества, которая макроскопически описывается вектором поляризации  $\vec{P}$  и обусловлена только что рассмотренным на микроскопическом уровне электрическим дипольным моментом отдельных молекул. Если молекулы в диэлектрике слабо связаны друг с другом и ориентированы случайным образом, то при помещении среды во внешнее электрическое поле молекулярные диполи будут стремиться развернуться вдоль поля так, чтобы направления векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  совпали. Таким образом, в изотропном диэлектрике, помещенном во внешнее электрическое поле, возникает макроскопическая поляризация

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (6.1)$$

где коэффициент  $\chi$  называется диэлектрической восприимчивостью.

Если же вещество образовано упорядоченной структурой связанных между собой молекул, все сказанное выше об анизотропии распространяется и на среду в целом [16]. Речь, очевидно, идет о кристаллической структуре. Для того чтобы описать по-

ляризацию анизотропного диэлектрического кристалла во внешнем поле, приходится учитывать нелинейную связь векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$ . Когда внешнее поле относительно мало, то вектор  $\vec{P}$  можно разложить по степеням составляющих вектора  $\vec{E}$ . Выбрав произвольную систему координат с осями  $x, y, z$ , это разложение в общем виде можно записать так:

$$P_i = \varepsilon_0 \left[ \sum_{j=x,y,z} \chi_{ij} E_j + \sum_{j,k=x,y,z} \hat{\chi}_{ijk} E_j E_k + \dots \right], \quad (6.2)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная (в системе СИ), а индексом  $i$  обозначены  $x, y, z$  компоненты вектора поляризации  $\vec{P}$ . В этом выражении тензоры  $\chi_{ij}$  и  $\hat{\chi}_{ijk}$  называются тензорами *линейной* и *квадратичной* восприимчивостей среды соответственно. Многоточие обозначает более высокие порядки разложения, которые нам в дальнейшем не понадобятся, поэтому их мы рассматривать не будем. Для изотропной среды тензоры всех порядков вырождаются в скаляры.

Если каждая точка среды является центром симметрии, то все восприимчивости четных порядков обращаются в нуль [1]. Действительно, изменим на противоположные направления всех координатных осей. Тогда изменятся знаки у  $E_j$  и  $E_k$ , но  $\hat{\chi}_{ijk}$  останется неизменным, т. к. начало координат, как и любая точка среды, является центром симметрии. Значит, не изменится и весь квадратичный член в (6.2), а суммарная поляризация будет зависеть от выбора системы координат. Это противоречит соображениям симметрии, и, чтобы снять это противоречие,  $\hat{\chi}_{ijk}$  должен быть тождественно равен нулю. То же справедливо и для остальных тензоров четных порядков. Из тридцати двух **кристаллографических классов** остается двадцать один класс симметрии без центра инверсии, когда тензор  $\hat{\chi}$  не вырождается в нуль.

Поляризация среды под действием постоянного внешнего элек-

трического поля является хорошо известным явлением. Очевидно, что поляризация будет возникать и под действием переменного поля. В этом случае выражение (6.2) справедливо для монохроматического поля, а все тензоры восприимчивости  $\chi, \hat{\chi}, \dots$  являются еще и функциями частоты колебаний  $\omega$ . Если систему координат  $x, y, z$  привязать к оптическим осям кристалла, то выражение (6.2) можно записать в сокращенной матричной форме [17, 18]:

$$P_i = \varepsilon_0 \left[ \sum_{j=x,y,z} \chi_{ij} E_j + \sum_{k=1}^6 \hat{\chi}_{ik} (EE)_k + \dots \right], \quad (6.3)$$

где

$$\begin{aligned} (EE)_1 &\equiv E_x^2, & (EE)_2 &\equiv E_y^2, & (EE)_3 &\equiv E_z^2, \\ (EE)_4 &\equiv 2E_y E_z, & (EE)_5 &\equiv 2E_x E_z, & (EE)_6 &\equiv 2E_x E_y. \end{aligned}$$

Величина  $\hat{\chi}_{ik}$  является матрицей размерности  $3 \times 6$  ( $i = 1, 2, 3 = x, y, z$ ), которая действует на вектор-столбец  $(EE)_k$ . В зависимости от типа симметрии кристалла [15, 18] и способа привязки системы координат к его осям некоторые элементы матрицы  $\hat{\chi}_{ik}$  могут быть одинаковыми, а некоторые – равными нулю. Заметим еще, что в принятых нами обозначениях, размерность элементов этой матрицы, [метр/вольт], обратна размерности напряженности электрического поля.

Для примера рассмотрим один из широко распространенных в нелинейной оптике кристаллов – иодат лития  $LiIO_3$  [19]. Одна из его модификаций называется  $\alpha LiIO_3$ , имеет гексагональную решетку и оптически прозрачна в диапазоне длин волн от 0.31 до 5.5 мкм. Ненулевыми элементами матрицы  $\hat{\chi}_{ik}$  этого кристалла являются  $\hat{\chi}_{31} \simeq \hat{\chi}_{33} \simeq -7$  пм/В (для  $\lambda = 1.064$  мкм). Если вектор  $\vec{E}$  внешнего электромагнитного поля, в которое мы поместили кристалл, направлен вдоль оси  $x$  ( $\vec{E} = [E, 0, 0]$ ), то нелинейная

поляризация в кристалле, определенная по формуле (6.3), будет направлена вдоль оси  $z$ :  $\vec{P} = [0, 0, P]$ , где  $P = \varepsilon_0 \hat{\chi}_{31} E^2$ . Пусть в кристалл в направлении  $s$  входит плоская монохроматическая волна  $\vec{E}_\omega = [E_\omega, 0, 0]$ , поляризованная по оси  $x$ :

$$E_\omega(s, t) = E_0 \cos(\omega t - k_\omega s), \quad (6.4)$$

где

$$k_\omega = \omega / c_\omega = n_\omega \omega / c. \quad (6.5)$$

Здесь  $c_\omega$  – скорость света в кристалле,  $n_\omega$  – показатель преломления на частоте  $\omega$ ,  $c$  – скорость света в вакууме. Направление распространения волны  $s$  может быть любым, ортогональным направлению поляризации  $x$ . Такая волна будет создавать в кристалле нелинейную поляризацию, направленную вдоль оси  $z$ ,  $\vec{P} = [0, 0, P]$ , где

$$P(s, t) = \varepsilon_0 \hat{\chi}_{31} E_0^2 \cos^2(\omega t - k_\omega s) = \frac{\varepsilon_0 \hat{\chi}_{31} E_0^2}{2} (1 + \cos(2\omega t - 2k_\omega s)). \quad (6.6)$$

Первое слагаемое в этом выражении не зависит от времени и соответствует процессу *оптического детектирования*, т. е. возникновения в нелинейной среде постоянной электрической поляризации при прохождении через нее световой волны.

Второе слагаемое описывает волну поляризации, осциллирующую на частоте  $2\omega$ . Эта волна поляризации будет излучать электромагнитную волну на удвоенной по сравнению с исходной волной частоте. Электрическое поле этой волны  $\vec{E}_{2\omega} = [0, 0, E_{2\omega}]$  запишем в виде

$$E_{2\omega}(s, t) = E_{2\omega}(s) \cos(2\omega t - k_{2\omega} s), \quad (6.7)$$

где

$$k_{2\omega} = 2\omega / c_{2\omega} = 2\omega n_{2\omega} / c \quad - \quad (6.8)$$

волновое число на частоте  $2\omega$ , а  $E_{2\omega}(s)$  – амплитуда волны второй гармоники, зависящая от  $s$  неизвестным (пока) образом. Подчеркнем еще раз, что плоскости поляризации электромагнитных волн первой и второй гармоник ортогональны. Из формул (6.6) и (6.7) найдем фазовые скорости волн поляризации и генерируемой ею электромагнитной волны –  $v_P$  и  $v_{E_{2\omega}}$  соответственно:

$$\begin{cases} v_P &= 2\omega/2k_\omega ; \\ v_{E_{2\omega}} &= 2\omega/k_{2\omega} . \end{cases} \quad (6.9)$$

Если  $v_P = v_{E_{2\omega}}$ , то в процессе распространения волны в кристалле фаза волны нелинейной поляризации будет совпадать с фазой излучаемой ею электромагнитной волны. В соответствии с выражениями (6.5) и (6.8) условие равенства фазовых скоростей  $v_P$  и  $v_{E_{2\omega}}$  выполняется только в том случае, когда коэффициент преломления для индуцирующей поляризацию волны первой гармоники совпадает с коэффициентом преломления для индуцированной волны второй гармоники:

$$n_{2\omega} = n_\omega. \quad (6.10)$$

Условие (6.10) называется условием *фазового синхронизма*. Заметим, что если бы плоскость поляризации волны первой гармоники совпадала с плоскостью поляризации волны второй гармоники, выполнение условия (6.10) было бы невозможным из-за дисперсии показателя преломления  $n = n(\omega)$ .

Рассмотрим поведение амплитуды волны  $E_{2\omega}(s)$  в выражении (6.7). Пусть волна первой гармоники входит в кристалл в точке  $s = 0$ , где  $s$  – координата вдоль направления распространения волны. Далее предположим, что энергия электромагнитной волны первой гармоники может переходить в энергию волны второй гармоники, а другие потери (поглощение, рассеяние и т. д.) отсутствуют. Рассмотрим небольшой отрезок  $ds$ , находящийся на

расстоянии  $s$  от начала точки входа излучения в кристалл. Запишем уравнение, описывающее изменение поля второй гармоники, возбуждаемой в кристалле в слое толщиной  $ds$  за счет нелинейного эффекта удвоения частоты:

$$dE_{2\omega} = ds \cdot \eta \cdot \left( E_0^2 - \frac{n_{2\omega}}{n_\omega} E_{2\omega}^2(s) \right) \cdot \cos(\Delta k s) , \quad (6.11)$$

где  $\eta = \omega n_\omega \hat{\chi}_{31} / 2\pi c$  имеет размерность  $[1/V]$ . Следующий множитель  $E_0^2 - \frac{n_{2\omega}}{n_\omega} E_{2\omega}^2(s)$  пропорционален интенсивности  $I_\omega(s)$  волны первой гармоники. Действительно,

$$I_\omega(0) \propto n_\omega E_0^2 , \text{ а } I_{2\omega}(s) \propto n_{2\omega} E_{2\omega}^2(s) ,$$

причем  $I_{2\omega}(0) = 0$ . По мере распространения вглубь кристалла  $I_\omega(s)$  может уменьшиться только за счет роста интенсивности второй гармоники, т. к. прочие потери мы не рассматриваем.  $I_\omega(s)$  определяет амплитуду волны нелинейной поляризации внутри отрезка  $ds$ , как это следует из (6.6). В приближении медленно меняющихся амплитуд  $ds \cdot \eta \cdot I_\omega(s)$  есть *приращение* амплитуды волны второй гармоники. Последний множитель в (6.11) описывает интерференцию волн, где

$$\Delta k = k_{2\omega} - 2k_\omega = \frac{4\pi}{\lambda} (n_{2\omega} - n_\omega) \quad (6.12)$$

определяет рассогласование фаз волны второй гармоники излучения и волны нелинейной поляризации на частоте  $2\omega$  по мере распространения обеих внутрь кристалла.  $\lambda$  в (6.12) – длина волны в вакууме излучения первой гармоники. Уравнение (6.11) – *обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка*, решение которого, с учетом граничного условия  $E_{2\omega}(0) = 0$ , *выглядит так*:

$$E_{2\omega}(s) = E_0 \sqrt{\frac{n_\omega}{n_{2\omega}}} \operatorname{th} \left( \frac{\eta E_0 \sqrt{n_{2\omega}/n_\omega} \sin(\Delta k s)}{\Delta k} \right) , \quad (6.13)$$

где  $\text{th}(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$  – гиперболический тангенс. Интенсивность второй гармоники получим, возведя (6.13) в квадрат:

$$I_{2\omega}(s) = I_0 \text{th}^2 \left( \frac{\eta E_0 \sqrt{n_{2\omega}/n_\omega} \sin(\Delta k s)}{\Delta k} \right). \quad (6.14)$$

В ситуации идеального фазового синхронизма  $n_{2\omega} = n_\omega$ ,  $\Delta k = 0$  и, разложив синус в ряд Тейлора, получаем:

$$I_{2\omega}(s) = I_0 \text{th}^2(\eta E_0 s). \quad (6.15)$$

Если  $s \rightarrow \infty$ , получаем  $I_{2\omega} = I_0$ , т. е. вся энергия первой гармоники преобразовалась во вторую. Если  $\eta E_0 s = 1$ , то  $I_{2\omega} = 0.58 \times I_0$ . При распространении волны первой гармоники внутрь кристалла на характерную глубину  $l_{\text{эфф}} = 1/\eta E_0$ , 58 % мощности излучения первой гармоники преобразуется во вторую гармонику (см. рис. 6.2). Стоит заметить, что эффективность преобразования энергии во вторую гармонику в современных лазерах может достигать нескольких десятков %. Для  $s \ll l_{\text{эфф}}$  произведем разложение гиперболического тангенса в уравнении (6.14), что дает следующий результат:

$$I_{2\omega}(s \ll l_{\text{эфф}}) \simeq I_0 \frac{n_{2\omega}}{n_\omega} \left( \frac{\sin(\Delta k s)}{\Delta k l_{\text{эфф}}} \right)^2. \quad (6.16)$$

После прохождения кристалла длиной  $l \ll l_{\text{эфф}}$  интенсивность второй гармоники будет описываться выражением

$$I_{2\omega}(l \ll l_{\text{эфф}}) \simeq \frac{2n_{2\omega}}{c\varepsilon_0} \left( \hat{\chi} \frac{l}{\lambda} I_0 \right)^2 \left( \frac{\sin(\Delta k l)}{\Delta k l} \right)^2, \quad (6.17)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\lambda$  – длина волны в вакууме излучения первой гармоники, а  $\hat{\chi}$  – коэффициент квадратичной восприимчивости используемого нелинейного кристалла (в нашем случае  $\hat{\chi} = \hat{\chi}_{31}$ ). Соотношение  $l \ll l_{\text{эфф}}$ , очевидно, соответствует ситуации, когда коэффициент преобразования во вторую гармонику очень мал, т. е.  $I_{2\omega}(l) \ll I_\omega(0)$ . Тогда  $I_{2\omega}(l) \propto I_0^2 l^2$ ,



что обусловлено нелинейной природой процесса генерации второй гармоники. Напомним, что интенсивность излучения в системе СИ измеряется в единицах  $\text{Дж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$ .

На рис. 6.2 показаны графики функции (6.14) при различных значениях  $\Delta k$ .

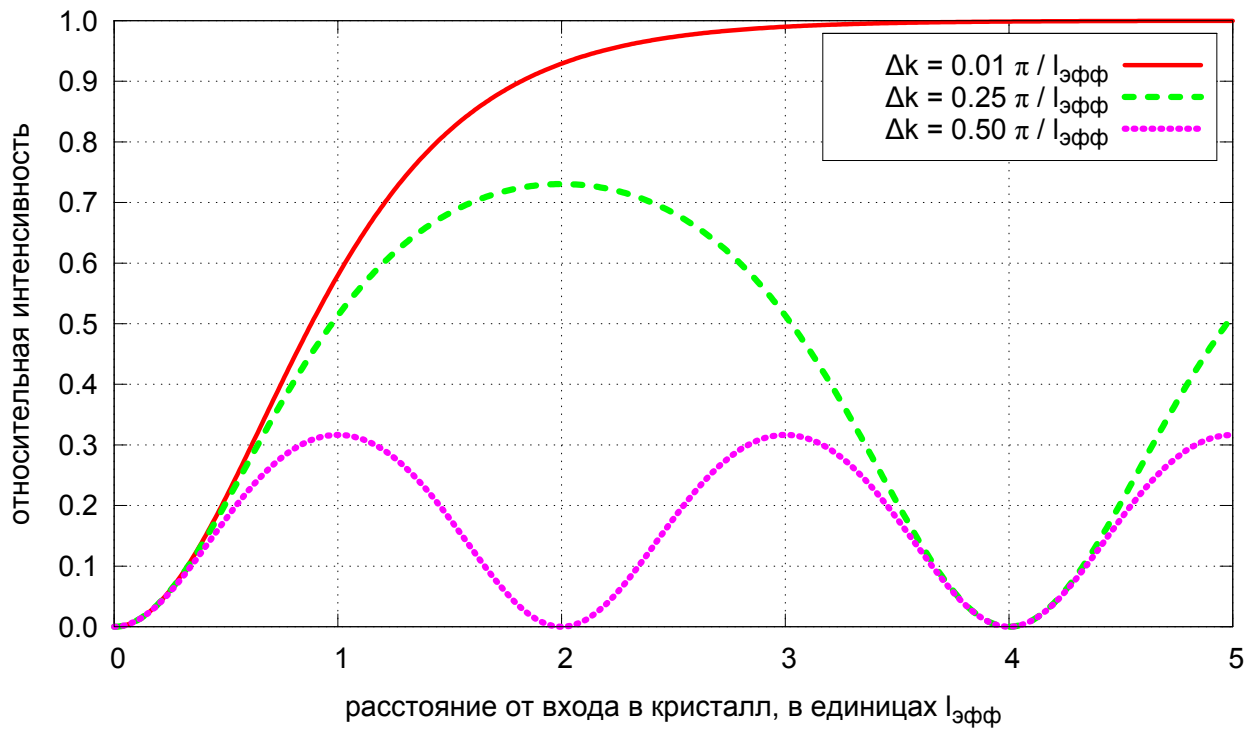


Рис. 6.2. Зависимость относительной интенсивности второй гармоники от глубины проникновения в кристалл при различных значениях  $\Delta k$

### 6.1.2 Фазовый синхронизм

Рассмотрим подробнее, как практически можно достичь фазового синхронизма в оптически анизотропном кристалле. Если в изотропной среде показатель преломления скалярным образом связан с диэлектрической восприимчивостью  $n = \sqrt{1 + \chi}$ , то в анизотропной, в соответствии с выражением (6.2), диэлектрическая восприимчивость определяется тензором  $\chi_{ij}$ , а значит, и коэффициент преломления перестает быть скалярной величиной. Для наглядного описания оптической анизотропии используется

так называемая индикатриса показателя преломления [17], которая в случае одноосного кристалла представляет собой эллипсоид вращения вокруг оптической оси (ось  $z$  на рис. 6.3). Через центр эллипсоида проведем ось  $s$  в направлении распростране-

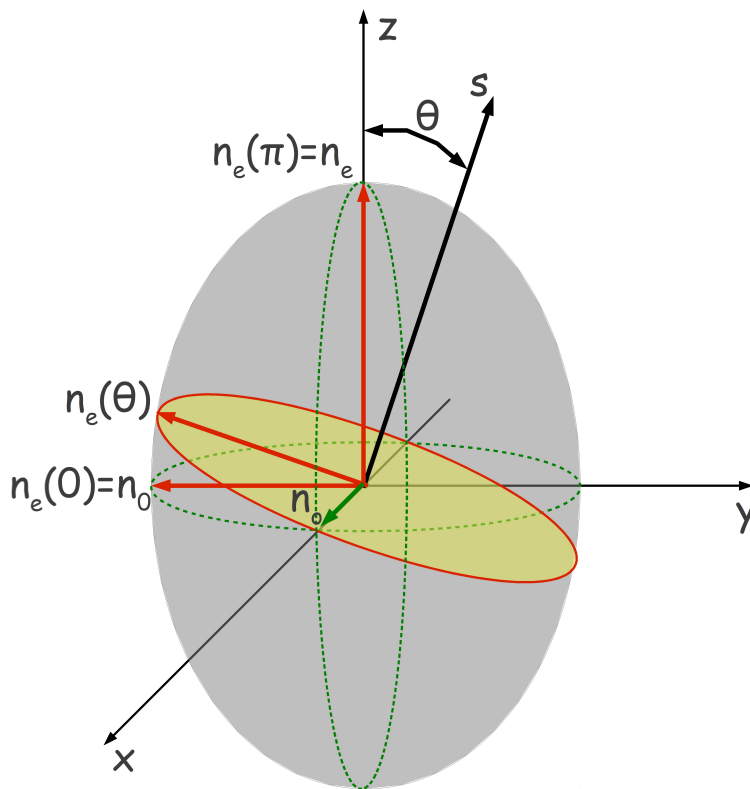


Рис. 6.3. Эллипсоид показателей преломления положительного одноосного кристалла

ния луча, а также плоскость, ортогональную этой оси. Пересечение этой плоскости с эллипсоидом образует эллипс. Большая и малая оси этого эллипса определяют направления поляризации световой волны, а длина каждой из полуосей,  $n_0$  и  $n_e(\theta)$ , равна значению показателя преломления для соответствующего направления поляризации. Одно из этих направлений,  $n_0$ , всегда перпендикулярно оптической оси  $z$ , и волна, поляризованная в этом направлении, называется *обыкновенной*. Из рис. 6.3 видно, что ее показатель преломления  $n_0$  не зависит от направления рас-

пространения луча. Волна с другим направлением поляризации называется *необыкновенной* волной, и ее показатель преломления  $n_e(\theta)$  зависит от угла между направлением распространения луча и осью кристалла.  $n_e(\theta)$  меняется в диапазоне от  $n_0$  до значения  $n_e$ , называемого показателем преломления необыкновенной волны. В случае  $n_e > n_0$  одноосный кристалл называется *положительным*, а в противном случае – *отрицательным*.

На примере иодата лития покажем, как может быть осуществлено на практике условие (6.10). Экспериментально измеренная дисперсия показателей преломления в отрицательном одноосном кристалле  $\alpha LiIO_3$  определяется эмпирическими формулами:

$$\begin{cases} n_o^2 = 2.083648 + \frac{1.332068\lambda^2}{\lambda^2 - 0.035306} - 0.008525\lambda^2, \\ n_e^2 = 1.673463 + \frac{1.245229\lambda^2}{\lambda^2 - 0.028224} - 0.003641\lambda^2, \end{cases} \quad (6.18)$$

в которые длину волны  $\lambda$  нужно подставлять в микрометрах. Вследствие нормальной дисперсии оба показателя преломления растут с уменьшением длины волны.

Пусть первая гармоника имеет длину  $\lambda = 1.064$  мкм (излучение Nd:YAG лазера), соответственно вторая гармоника будет иметь длину волны 0.532 мкм. Тогда из (6.18) определим значения показателей преломления:

$$\begin{cases} n_o(1.064) = 1.8571; & n_e(1.064) = 1.7165; \\ n_o(0.532) = 1.8982; & n_e(0.532) = 1.7480. \end{cases} \quad (6.19)$$

Условием фазового синхронизма является равенство показателей преломления  $n_e(\lambda/2, \theta_{\text{фс}}) = n_o(\lambda)$ . Необходимо только сориентировать кристалл таким образом, чтобы угол между оптической осью и направлением луча составил  $\theta_{\text{фс}}$ . Геометрически угол  $\theta_{\text{фс}}$  определяется пересечением окружности радиуса  $n_o(\lambda)$  и эллипса

с полуосями  $[n_x = n_o(\lambda/2), n_y = n_e(\lambda/2)]$ , нарисованных совместно на графике зависимости соответствующих показателей преломления от угла  $\theta$ , построенном в полярных координатах. Эти

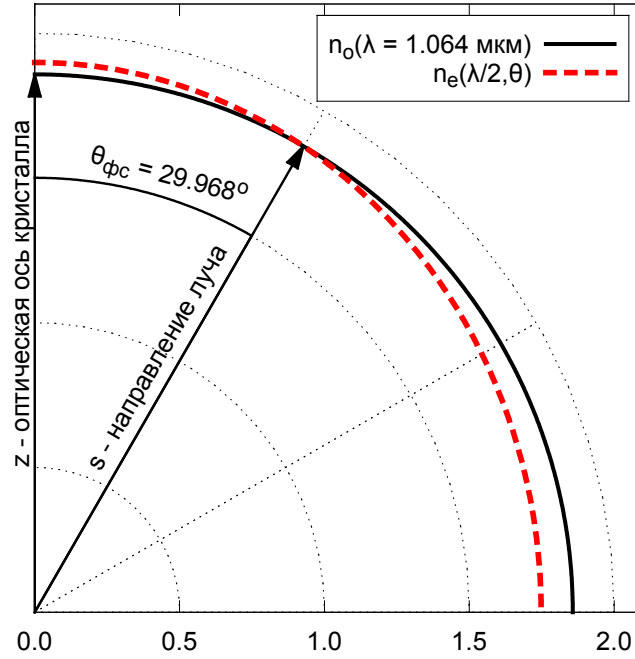


Рис. 6.4. Фазовый синхронизм в кристалле иодата лития

графики приведены на рис. 6.4. Зная уравнения (6.18), а также уравнения эллипса и окружности,  $\theta_{\text{фс}}$  несложно вычислить для любой длины волны:

$$\theta_{\text{фс}}(\lambda) = \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{n_e^2(\lambda/2)}{n_o^2(\lambda)}\right) / \left(1 - \frac{n_e^2(\lambda/2)}{n_o^2(\lambda/2)}\right)}. \quad (6.20)$$

Для  $\lambda = 1.064 \text{ мкм}$   $\theta_{\text{фс}} = 29.968^\circ$ . Зависимость показателя преломления необыкновенного луча от угла  $\theta$  в отрицательном одноосном кристалле описывается уравнением эллипса:

$$n_e(\theta) = \frac{n_e}{\sqrt{1 - (1 - n_e^2/n_o^2) \cos^2(\theta)}}. \quad (6.21)$$

Решим задачу о нахождении угловой ширины фазового синхронизма  $\Delta\theta_{\text{фс}}$ , т. е. найдем, при каком угле  $\theta_{\text{фс}} \pm \Delta\theta_{\text{фс}}$  интенсивность процесса генерации второй гармоники упадет в два раза.

Продифференцируем уравнение (6.21) по  $\theta$ :

$$\frac{\partial n_e(\theta)}{\partial \theta} = - \frac{n_e(1 - n_e^2/n_o^2) \sin(\theta) \cos(\theta)}{(1 - (1 - n_e^2/n_o^2) \cos^2(\theta))^{3/2}}. \quad (6.22)$$

Уравнение (6.22) определяет зависимость  $\Delta n = (n_{2\omega} - n_\omega)$  от угла установки кристалла, необходимую для нахождения разницы волновых векторов в формуле (6.12). Подставим в формулу (6.22) значения  $\theta_{\text{фс}}$ ,  $n_o$  и  $n_e$  для второй гармоники и получим ответ  $\partial n/\partial \theta \simeq -0.14$ . Перепишем формулу (6.12) с учетом этого результата:

$$\Delta k \simeq 0.14 \frac{4\pi}{\lambda} \Delta \theta = 0.56 \frac{\pi}{\lambda} \Delta \theta. \quad (6.23)$$

Чтобы оценить угловую ширину фазового синхронизма  $\Delta \theta_{\text{фс}}$ , используем формулу (6.17). Если длина кристалла  $l_{\text{кр}}$  такова, что  $\Delta k l_{\text{кр}} = \pi$ , интенсивность второй гармоники упадет до нуля. Соответственно,  $\Delta \theta_{\text{фс}} \simeq \lambda/l_{\text{кр}}$  и задачу можно считать решенной.

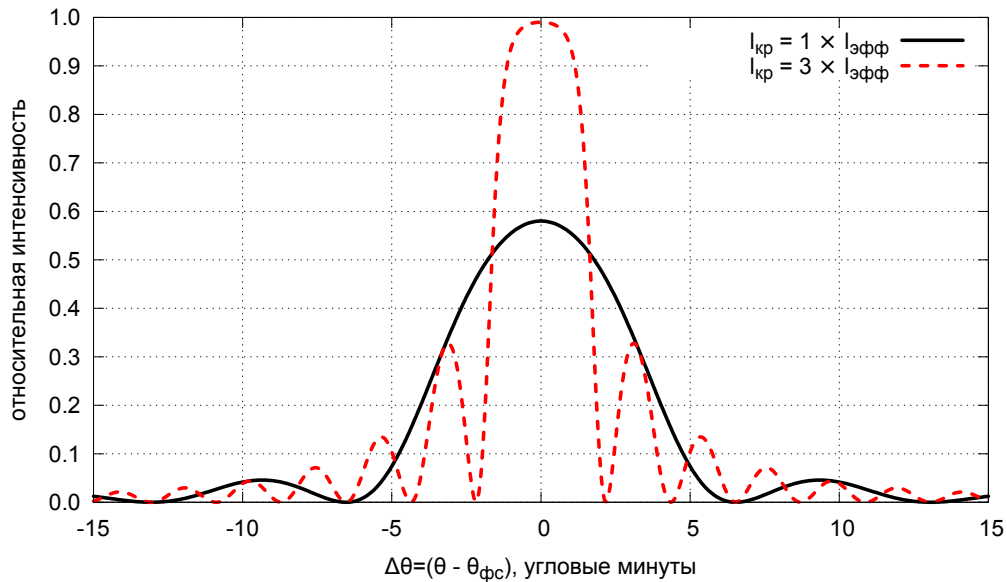


Рис. 6.5. Зависимость относительной интенсивности второй гармоники от степени нарушения условия фазового синхронизма при различных длинах кристалла

На рис. 6.5 приведены графики эффективности процесса генерации второй гармоники в зависимости от угла поворота кристал-

ла. Из рисунка видно, что при относительно низкой эффективности процесса ( $l_{\text{кр}} = l_{\text{эфф}}$ ) эта зависимость хорошо описывается функцией типа  $(\sin(x)/x)^2$ , что и подтверждается упрощенным выражением (6.17). При увеличении коэффициента преобразования ( $l_{\text{кр}} = 3 \times l_{\text{эфф}}$ ) основной максимум становится уже, но вблизи его центра (область «хорошего» синхронизма), наблюдается уменьшение зависимости мощности от расстройки по углу.

В заключение раздела заметим, что идеи, высказанные при рассмотрении процесса генерации второй гармоники, могут быть легко распространены на случай двух падающих волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , складывающихся в волну  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  благодаря эффекту нелинейной поляризации в анизотропной среде.

## § 6.2. Схема экспериментальной установки

В работе используется полупроводниковый лазер на гетероструктуре InGaAs с мощностью излучения до 100 мВт. Длина волны излучения лазера находится в ИК-области (за пределами чувствительности человеческого глаза). На рис. 6.6 показан спектр излучения лазера, измеренный анализатором спектра LSA Standart.

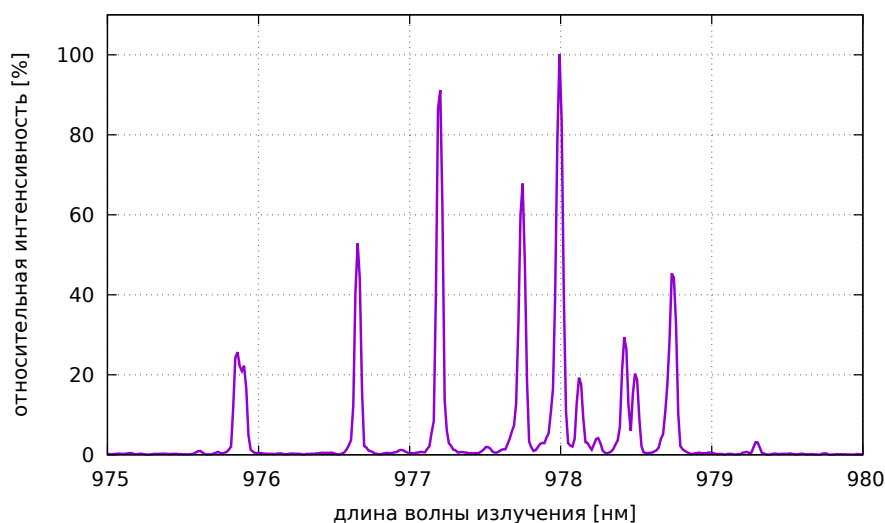


Рис. 6.6. Спектр излучения полупроводникового лазера

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 6.7.

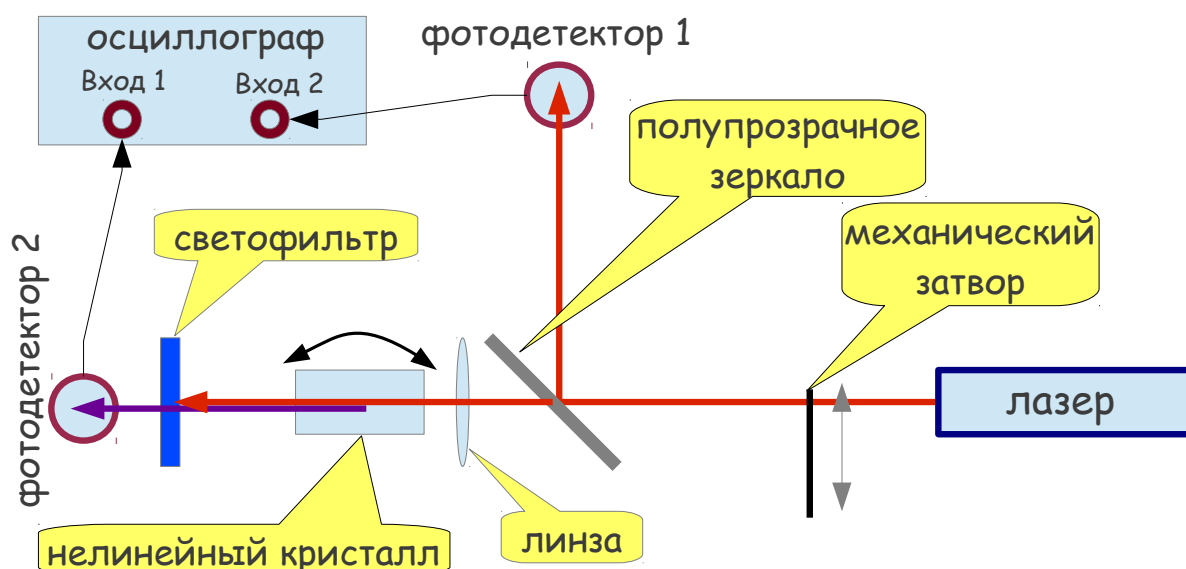


Рис. 6.7. Схема установки лабораторной работы №4.5

Интенсивность излучения полупроводникового лазера регулируется механическим затвором. Небольшая часть этого излучения отражается полупрозрачным зеркалом и попадает на фотодетектор 1 (см. рис. 6.7). Сигнал с фотодетектора 1 поступает на один из двух входов цифрового осциллографа, измеряемое напряжение пропорционально мощности излучения первой гармоники. Основная часть излучения с помощью линзы фокусируется на нелинейный кристалл для генерации второй гармоники. В работе используется кристалл иодата лития  $\alpha LiIO_3$ , вырезанный под углом  $30^\circ$  к направлению главной оси. Длина кристалла – 2.5 см. Угол между лучом первой гармоники и оптической осью кристалла может юстироваться с помощью микровинта. Оставшееся излучение первой гармоники поглощается светофильтром, а излучение второй гармоники проходит на фотодетектор 2. Сигнал с него поступает на второй вход цифрового осциллографа, измеряемое напряжение пропорционально мощности второй гармоники.

### § 6.3. Выполнение работы

#### Задание 1

Включите лазер. При полностью открытом затворе убедитесь по показаниям с фотодетекторов 1 и 2 в наличии излучения первой и второй гармоник соответственно. Путем настройки углового положения кристалла найдите оптимальные условия для ГВГ.

#### Задание 2

Измерьте зависимость мощности второй гармоники от мощности излучения полупроводникового лазера. Для этого постепенно перекрывайте излучение лазера с помощью затвора и записывайте показания с обоих фотодетекторов. Постройте график и объясните его форму.

#### Задание 3

Полностью открыв затвор, измерьте зависимость мощности второй гармоники от угла поворота нелинейного кристалла. Постройте график, определите ширину фазового синхронизма  $\Delta\theta_{\text{фс}}$ .

#### Задание 4

Используя формулы (6.18) и (6.20) рассчитайте угол фазового синхронизма в кристалле иодата лития для условий проведенного вами эксперимента. Теоретическую угловую ширину фазового синхронизма определите с использованием формул (6.22) и (6.23). Сравните результаты расчета  $\Delta\theta_{\text{фс}}$  с экспериментом. Если есть различия – объясните их.

#### 6.3.1 Контрольные вопросы:

- 1) В чем разница между мощностью и интенсивностью оптического излучения?



- 2) Как зависит коэффициент нелинейного преобразования от поляризации излучения первой гармоники?
- 3) Как зависит коэффициент нелинейного преобразования от ширины спектра излучения лазера?
- 4) Как оценить величину  $\partial n / \partial \theta$  в выражении (6.22) без дифференцирования функции (6.21)?

## Библиографический список

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. М. : «Наука», 1985. Том 4. Оптика.
2. *Lummer O., Pringsheim E.* Die Verteilung der Energie im Spektrum des schwarzen Körpers // Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 1, 1899. с. 215-235.
3. *Lummer O., Pringsheim E.* Über die Strahlung des schwarzen Körpers für lange Wellen. // Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 2, 1900. с. 163-180.
4. *Данин Д. С.* Нильс Бор. М. : «Молодая гвардия», 1978.
5. *Einstein A.* Strahlungs-Emission und Absorption nach der Quantentheorie // Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 18, 1916. с. 318-323.
6. *Einstein A.* Zur Quantentheorie der Strahlung // Mitt. Phys. Ges. (Zürich), 1916, Nr. 18. с. 47-62 .
7. *Planck M.* Über eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung // Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 2, 1900. с. 202–204.
8. *Planck M.* Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum // Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 2, 1900: с. 237–245.
9. *Карлов Н. В.* Лекции по квантовой электронике. М. : «Наука», 1988.

10. Кондиленко И. И., Коротков П. А., Хижняк. А. И. Физика лазеров. Киев : Вища Школа, 1984.
11. *Paschotta R.* Encyclopedia of Laser Physics and Technology. <http://www.rp-photonics.com> [Электронный ресурс].
12. Быков В. П., Силичев О. О. Лазерные резонаторы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.
13. *White A. D. and Rigden J. D.* Continuous Gas Maser Operation in the Visible // Proceedings IRE 50, 1962. с. 1697.
14. Бойко В. М., Кубарев В. В., Ступак М. Ф., Фатеев Н. В. Оптика лазеров // Сборник работ по физической оптике под ред. А. М. Ражева. Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т., 2008.
15. Коротеев Н. И., Шумай И. Л. Физика мощного лазерного излучения. М. : «Наука», 1991.
16. Делоне Н. Б. Взаимодействие лазерного излучения с веществом. Курс лекций. М. : «Наука», 1989.
17. Звелто О. Принципы лазеров. М. : «МИР», 1984.
18. Качмарек Ф. Введение в физику лазеров. М. : «МИР», 1981.
19. Блистанов А. А. Кристаллы квантовой и нелинейной оптики. М. : МИСИС, 2000.
20. Арбузов В. А., Захарова Е. И., Папырин А. Н., Смирных В. А., Солоухин Р. И., Уколов А. И. Оптика и атомная физика. (Лабораторный практикум по физике). Новосибирск : «Наука», 1976.
21. *Ashby D. E. T. F. and Jephcott D. F.* Measurement of Plasma Density Using a Gas Laser as an Infrared Interferometer // Applied Physics Letters 1963. No. 3, с. 13-16.