Mathématiques I

Dérivées partielles

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://math1-gsi.netlify.app`

Les dérivées partielles - définition

La définition de la dérivée d'une fonction d'une variable $f(x)$ fait intervenir la limite suivante

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dans le cas d'une fonction à deux variables $f(x, y)$, on peut naturellement considérer par analogie les limites suivantes au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$(1) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad\qquad (2) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Définition.

Lorsqu'elles existent, les limites (1) *et* (2) *sont les* **dérivées partielles** *de* $f(x, y)$ *en* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *par rapport à* x *pour* (1) *et par rapport à* y *pour* (2)*. On les notent*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles - exemples

Pour calculer une dérivée partielle par rapport à une variable, il suffit de considérer la seconde comme constante.

Exemples:

- Pour $z = f(x, y) = 2x + x^2y^3$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 + 2xy^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1^3 = 8,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 3 \cdot 3^2 \cdot 1^2 = 27.$$

- Pour $z = f(x, y) = 4x^{-1.5}y^{2.05}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4 \cdot (-1.5)x^{-2.5}y^{2.05} = -6x^{-2.5}y^{2.05}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) \approx -0.385,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4 \cdot (2.05)x^{-1.5}y^{1.05} = 8.2x^{-1.5}y^{1.05}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) \approx 1.578.$$

Dérivabilité

La notion de dérivabilité pour les fonctions de deux variables ne se réduit malheureusement pas à l'existence des dérivées partielles. Le théorème suivant nous permet toutefois de ne pas avoir à préciser cette notion dans bien des cas.

Théorème.

*Une **fonction** $f(x, y)$ dont les **dérivées partielles existent et sont continues** pour un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ **est dérivable** en ce point.*

Cette notion de dérivée plus précise permet d'obtenir le théorème suivant qui étend un théorème pour les fonctions à une variable.

Théorème.

Si $f(x, y)$ est dérivable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ alors elle est continue en ce point.

Ce résultat n'est pas vrai si l'on ne considère que les dérivées partielles d'une fonction comme illustré dans cette vidéo.

Malgré tout, les dérivées partielles jouissent de la même "régularité" par rapport aux opérations élémentaires et à la composition de fonctions que la dérivée de fonction à une variable.

Les dérivées partielles d'ordres supérieur

Les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y)$ étant (généralement) aussi des fonctions de deux variables, leurs dérivées partielles peuvent aussi être considérées. Lorsqu'elles existent, on appelle ces dernières les **dérivées partielles d'ordre deux de $f(x, y)$** et sont notées

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Le théorème suivant garantit que les dérivé partielles "croisées" sont égales dans les cas qui nous intéressent.

Théorème (de Schwarz).

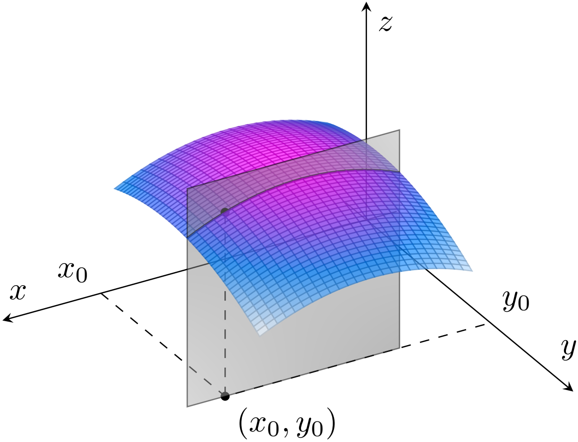
Si les dérivées partielles d'ordre deux de $f(x, y)$ sont continues en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Interprétation géométrique des dérivées partielles

La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ correspond à la pente **d'une** tangente obtenue ainsi

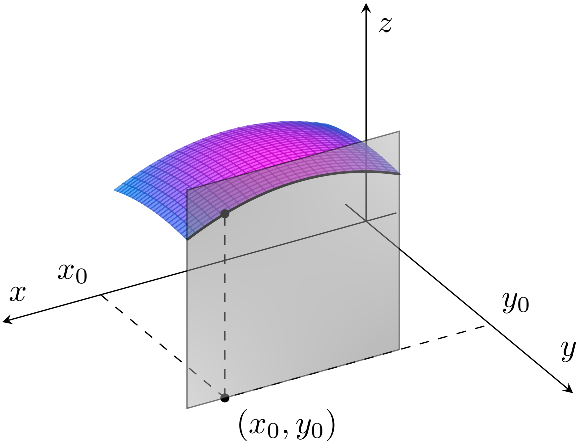
1) On "tranche" la surface de représentant $f(x, y)$ par le plan $y = y_0$.



Interprétation géométrique des dérivées partielles

La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ correspond à la pente **d'une** tangente obtenue ainsi

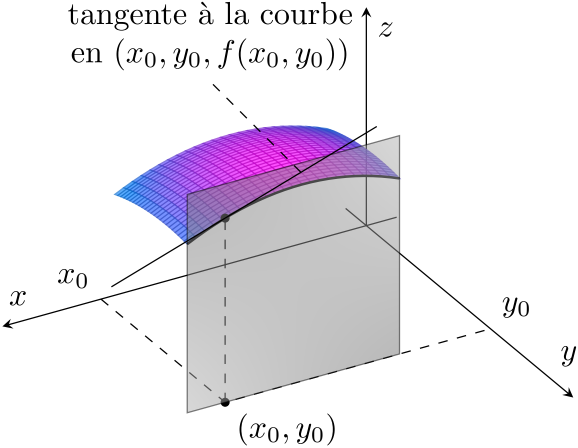
2) Cela définit une courbe sur la surface. Le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est, par définition, sur cette courbe.



Interprétation géométrique des dérivées partielles

La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ correspond à la pente **d'une** tangente obtenue ainsi

3) On considère la tangente de celle-ci au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Sa pente est donnée par $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.



Interprétation géométrique des dérivées partielles

La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ s'interprète de façon analogue.