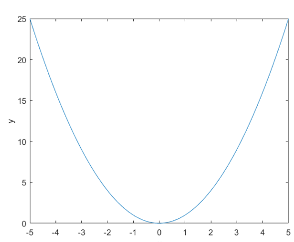
Université de Genève | GSI
Mathématiques I | Printemps 2021
Mucyo Karemera | **Série 3**

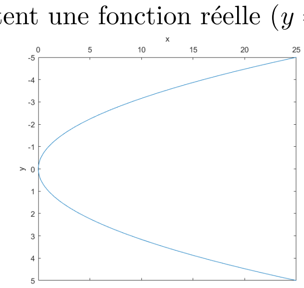
Exercice 1

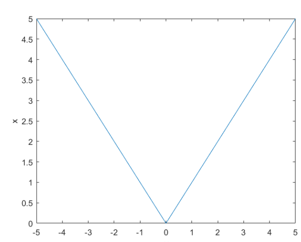
1. Peut-on faire correspondre une fonction réelle ($y = f(x)$) à:

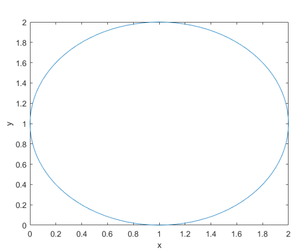
   - $x + y = 1$
     ☒ Vrai
     ☐ Faux
   - $x^2 - y = 1$
     ☒ Vrai
     ☐ Faux
   - $x + y^2 = 1$
     ☐ Vrai
     ☒ Faux
   - $x^2 + y^2 = 1$
     ☐ Vrai
     ☒ Faux
   - $|y| = x$
     ☐ Vrai
     ☒ Faux

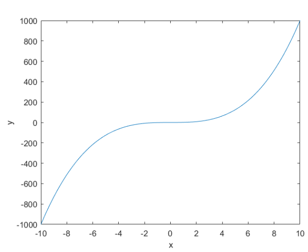
2. Les graphiques suivants représentent une fonction réelle ($y = f(x)$):

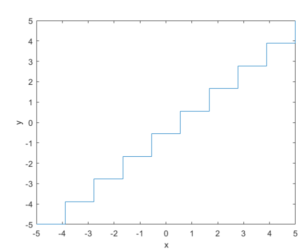

☒ Vrai
☐ Faux


☐ Vrai
☒ Faux


☐ Vrai
☒ Faux


☐ Vrai
☒ Faux


☒ Vrai
☐ Faux


☐ Vrai
☒ Faux

3. Mettre les équations suivantes sous la forme $y = f(x)$, puis calculer l'image de 4 par f.

   - $y = 1$
     1

- $y = \frac{4x}{x}$
  4
- $x = 2y + 5$
  -0.5
- $x^2 = 5x^2 + y$
  -64

4. Pour trouver les zéros d'une fonction $y = f(x)$ il faut:

   ☒ résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   ☐ calculer $f(0)$.
   ☐ trouver les x les plus nuls de f.
   ☐ voir si $0 \in \mathcal{D}_f$
   ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

5. Pour trouver l'ordonnée à l'origine d'une fonction $y = f(x)$ on peut:

   ☒ résoudre l'équation $f^{-1}(y) = 0$ si f est bijective.
   ☒ calculer $f(0)$.
   ☐ trouver les y les plus nuls de f.
   ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

6. Donnez le $\mathcal{D}_f$ des fonctions suivantes:

   - $y = x$
     ☒ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
     ☐ $\mathcal{D}_f = \mathbb{Q}$
     ☐ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{N}$
     ☒ $\mathcal{D}_f = \{x | x \in \mathbb{R}\}$
     ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.
   - $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
     ☐ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$
     ☐ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
     ☐ $\mathcal{D}_f =]0; +\infty]$
     ☐ $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$
     ☒ Aucune de ces réponses n'est correcte.
   - $y = \frac{1}{1-x}$
     ☒ $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | 1 - x \neq 0\}$
     ☐ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
     ☒ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
     ☒ $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
     ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.
   - $y = \frac{1}{\sqrt{1-\ln(x)}}$

- ☐ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$
- ☐ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ \setminus \{0; e\}$
- ☐ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ \setminus [0; 1]$
- ☒ $\mathcal{D}_f =]0; e[$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

7. Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 5x - 2$:

- Quel est $(f + g)$
  - ☒ $x^2 + 5x - 1$
  - ☐ $25x^2 - 20x + 5$
  - ☐ $5x^2 + 3$
  - ☐ $(\frac{1}{5}x + \frac{2}{25}) + \frac{1+\frac{4}{25}}{5x-2}$
  - ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.
- Quel est $(f \cdot g)$
  - ☐ $x^2 + 5x - 1$
  - ☐ $25x^2 - 20x + 5$
  - ☐ $5x^2 + 3$
  - ☐ $(\frac{1}{5}x + \frac{2}{25}) + \frac{1+\frac{4}{25}}{5x-2}$
  - ☒ Aucune de ces réponses n'est correcte.
- Quel est $(\frac{f}{g})$
  - ☐ $x^2 + 5x - 1$
  - ☐ $25x^2 - 20x + 5$
  - ☐ $5x^2 + 3$
  - ☒ $(\frac{1}{5}x + \frac{2}{25}) + \frac{1+\frac{4}{25}}{5x-2}$
  - ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.
- Quel est $(f \circ g)$
  - ☐ $x^2 + 5x - 1$
  - ☒ $25x^2 - 20x + 5$
  - ☐ $5x^2 + 3$
  - ☐ $(\frac{1}{5}x + \frac{2}{25}) + \frac{1+\frac{4}{25}}{5x-2}$
  - ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.
- Quel est $\mathcal{D}_{(f+g)}$?
  - ☒ $\mathbb{R}$
  - ☐ $\mathbb{R}_-$
  - ☐ $\mathbb{R}^*$
  - ☐ $\mathbb{R}_+^*$
  - ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.
- Quel est $\mathcal{D}_{(\frac{f}{g})}$?
  - ☐ $\{\frac{2}{5}\}$
  - ☒ $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0.4\}$

☐ $\mathbb{R} \cap \{0.4\}$
☒ $\mathbb{R} \setminus \{0.4\}$
☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

8. Soit $h(x) = \left(x^3 - 5x + 1\right)^4$, quelles fonctions f, g donnent $f \circ g = h$?

   ☒ $f(x) = x^4$; $g(x) = x^3 - 5x + 1$
   ☒ $f(x) = x^2$; $g(x) = \left(x^3 - 5x + 1\right)^2$
   ☒ $f(x) = x$; $g(x) = \left(x^3 - 5x + 1\right)^4$
   ☒ $f(x) = \sqrt[4]{x}$; $g(x) = \left(x^3 - 5x + 1\right)^{16}$
   ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

9. Quelle est la réciproque de $f(x) = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$?

   ☐ $f^{-1}(x) = \frac{1}{ax+b}$
   ☐ $f^{-1}(x) = \frac{a}{x} - b$
   ☒ $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$
   ☐ $f^{-1}(x) = x - \frac{b}{a}$
   ☒ $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$
   ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

10. Supposons que l'on ait pour une certaine fonction $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. Alors:

    ☐ $f(2) = 4$
    ☐ $2 \in \mathcal{D}_f$ mais on n'a pas forcément $f(2) = 4$.
    ☒ Aucune de ces réponses n'est correcte.

11. Que vaut $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$?

    ☐ $+\infty$
    ☐ $-\infty$
    ☒ Indéfini
    ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

12. Que vaut $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} - \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$?

    ☐ $+\infty$
    ☐ $-\infty$
    ☐ 0
    ☒ Indéfini
    ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

13. Soit $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{Z}$, que donne $D_f \cap D_g$?

- ☐ $\mathbb{R}$
- ☐ $\mathbb{Q}$
- ☒ $\mathbb{Z}$
- ☐ $\mathbb{N}$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

14. Soit $D_f = \mathbb{Z}$ et $D_g = \mathbb{N}$, que donne $D_f \setminus D_g$?

- ☐ $\mathbb{R}_-$
- ☒ $\mathbb{Z}_-^*$
- ☐ $\mathbb{Z}_-$
- ☐ $\mathbb{N}_-$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

15. Soit $h = f \circ g$ avec $f = \sqrt{x}$, $g = x^2$ quel est D_h?

- ☒ $\mathbb{R}$
- ☐ $\mathbb{R}_+$
- ☐ $\mathbb{R}_-$
- ☐ $\mathbb{R}_+^*$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Exercice 2 Calculez les limites suivantes:
Indication: utilisez $\lim_{x\to a} x = a$ *;* $\lim_{x\to a} c = c$*,* $\forall a, c \in \mathbb{R}$ *et les propriétés des limites vues dans les vidéos.*

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+1}{x^2+4x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{1^2-3\cdot 1+1}{1^2+4\cdot 1+2} = -\frac{1}{7}$

2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x+3)} = 0$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$
   Rappel De manière générale : $\lim_{x\to a} f(x) = L \to \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$

   La limite à gauche doit être égale à la limite à droite pour que la limite existe. Étant donnée la présence de la valeur absolue, nous pouvons différentier deux cas, i.e. quand la valeur de x s'approche de 0 du côté positif et du côté négatif.

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$
   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

   $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$, la limite $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ diverge.

Exercice 3 Calculer les zéros des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x + 3$
2. $f(x) = |x + 3|$
3. $f(x) = (x + 3)^2$
4. $f(x) = \ln\left(e^{(x+3)}\right)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ à chaque fois