Mathématiques I

Déterminants de matrices

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://math1-gsi.netlify.app`

Licence: CC BY-NC-SA 4.0

Déterminant et inverse d'une matrice

Nous avons vu que le rang d'une matrice carrée permet de déterminer l'existence de son inverse.

Nous allons ici considérer une autre quantité, nommée **déterminant** de la matrice, qui est relativement simple à calculer pour $n = 2$ et $n = 3$ en particulier et, surtout, permet aussi de déterminer l'existence de l'inverse d'une matrice carrée.

Étant donné une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on note son déterminant $\det(\mathbf{A})$.

Théorème.

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$*, alors:* $\mathbf{A}^{-1}$ *existe* $\iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Ainsi, pour un système linéaire $n \times n$, on a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ possède une solution unique} \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

De plus, lorsque $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, la solution du système est donnée par $\mathcal{S} = \{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}\}$.

Déterminant: $n = 2$

Définition.

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$*, alors le déterminant se calcule comme suit:*

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

On reprend l'exemple suivant, pour lequel il n'y avait qu'une solution

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 = 2 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 5 & 10 & 2 \end{array}\right)$$

On remarque que $\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = 1 \cdot 10 - (-3) \cdot 5 = 25 \neq 0.$

Déterminant: $n = 3$

Définition.

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, *alors le déterminant se calcule comme suit:*

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).$$

Cette formule, un peu longue, peut être plus simple à retenir sous la forme suivant

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$+ a_{31} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Les déterminants à droite de l'égalité sont des déterminants de matrices 2×2.

Déterminant: $n = 3$

On reprend l'exemple suivant, pour lequel il n'y avait qu'une solution

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & -10 \end{array}\right) \iff (\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

et on vérifie qu'on a bien $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) =& 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ & + (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ & = -(2 \cdot 2 - (-1) \cdot 2) - 3 \cdot (2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1) = -6 - 21 = -27 \neq 0. \end{aligned}$$

Déterminant: $n = 3$

Nous avions vu que le système suivant possède une infinité de solution

$$\begin{cases} \qquad 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \iff (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Par conséquent, on devrait avoir $\det(\mathbf{A}) = 0$. Vérifions-le.

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -(5 \cdot 1 - (-3) \cdot 1) + 2 \cdot (5 \cdot (-1) - (-3) \cdot 3) = -8 + 2 \cdot 4 = 0.$$

Déterminant: cas général

En général, i.e. pour $n \geqslant 4$, le calcul du déterminant peut être assez long. Il existe cependant un cas particulier où le calcul du déterminant est très simple: les **matrices triangulaires supérieures**, dont les coefficients sous la diagonales sont nuls et les **matrices triangulaires inférieures**, dont les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls.

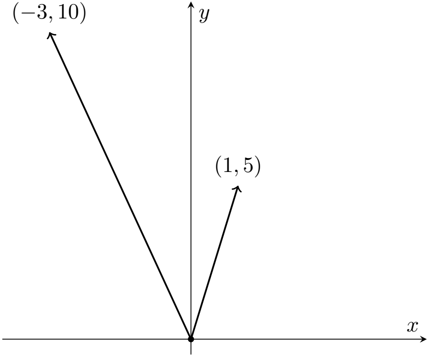
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire supérieure}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire inférieure}}$$

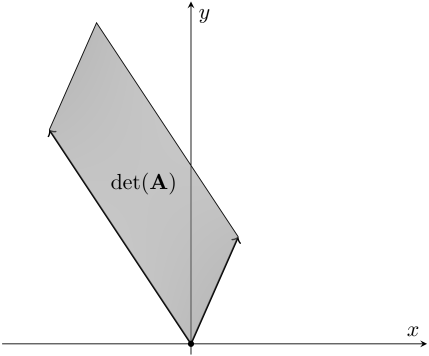
Le déterminant des ces matrices correspond simplement au produit des éléments diagonaux qui peut s'écrire ainsi

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,i} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \cdots \cdot a_{n,n}$$

Interprétation géométrique du déterminant: cas $n = 2$

Le déterminant d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ donne lieu à une élégante interprétation géométrique. En effet, les **vecteurs** colonnes de la matrices, un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$. L'aire de ce dernier correspond à la valeur absolue du déterminant de la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$.

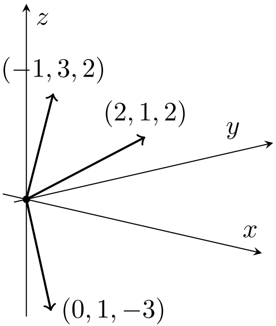


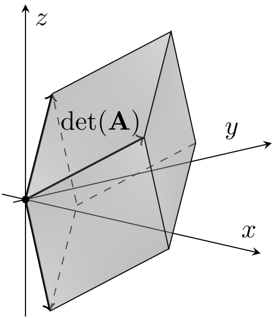


L'aire est nulle si et seulement si les vecteurs sont alignés.

Interprétation géométrique du déterminant: cas $n = 3$

Cette interprétation s'étend pour les aux cas où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Ici le déterminant correspond à la valeur absolue du volume du parallélépipède rectangle définit par les colonnes de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

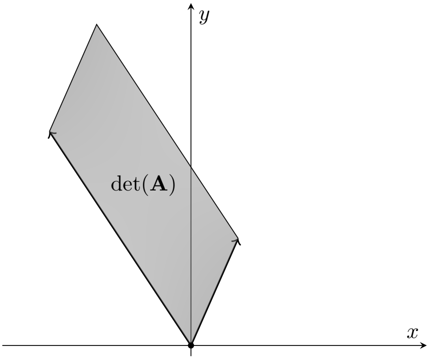


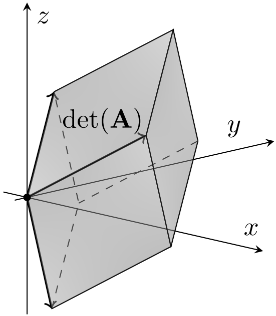


Le volume est nul si et seulement si les vecteurs se trouvent dans un même plan.

Interprétation géométrique du déterminant: cas général

En général, le déterminant d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ capte si ses vecteurs colonnes "engendrent" ou non un espace (vectoriel) de dimension n.





Formellement, on a la définition suivante

Définition (indépendance linéaire).

Les vecteurs colonnes (ou lignes) de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *sont* ***linéairement indépendants*** *si et seulement si* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$*. Ils sont linéairement dépendants sinon.*