

Exercice 1:

1. On considère la fonction $f(x, y) = 2x + x^2y^3$. Que vaut $f(-2, 3)$?
 - ☐ 32
 - ☐ 104
 - ☐ 112
 - ☐ -66
 - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.
2. Parmi les points suivants, lesquels se trouve sur la surface correspondant au graphe de la fonction $f(x, y) = 12x^{-2}y$?
 - ☐ $(2, 1, 6)$
 - ☐ $(-1/2, 1/3, -1)$
 - ☐ $(1, -2, 24)$
 - ☐ $(0, 1, 1)$
 - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.
3. On considère la fonction $f(x, y) = xy^2$ et un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et un nombre $h > 0$. Que vaut $f(a, b+h) - f(a, b)$?
 - ☐ $2abh + bh^2$
 - ☐ b^2h
 - ☐ ah^2
 - ☐ $2abh + ah^2$
 - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.
4. On considère la fonction $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$. Quelles sont les égalités correctes parmi les suivantes?
 - ☐ $4f(x, y) = f(2x, 2y)$
 - ☐ $2f(x, y) = f(x, 2y)$
 - ☐ $4f(x, y) = f(2x, y)$
 - ☐ $2f(x, y) = f(2x, 2y)$
 - ☐ Aucune des réponses ci-dessus.
5. Parmi les ensembles suivants, le(s)quel(s) correspond(ent) au domaine de définition \mathcal{D}_f de la fonction $f(x, y) = \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$?
 - ☐ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 2\}$
 - ☐ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 2\}$
 - ☐ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 2\}$
 - ☐ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 2\}$

- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.
6. Quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ satisfait(ont) l'équation $f(x, 3) = 9$, où $f(x, y) = \frac{1}{12}x^3(y+1)^2$?
- ☐ $\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}$
- ☐ $\left(\frac{27}{4}\right)^{1/3}$
- ☐ $\frac{3}{4^{1/3}}$
- ☐ $\frac{4}{3^{1/3}}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.
7. On considère l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 3\}$ et $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 + 2 - y^2$. Quelles sont les affirmations correctes parmi les suivantes
- ☐ A est une courbe de niveau $\sqrt{3} + 1$ de f
- ☐ A est une courbe de niveau $\sqrt{3} - 1$ de f
- ☐ A est une courbe de niveau $\sqrt{3}$ de f
- ☐ A est une courbe de niveau $-\sqrt{3}$ de f
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.
8. On considère $f(x, y) = e^{x+y}$. Qu'elles sont les égalités correctes ?
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x+y}$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{x+y}$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xe^{x+y}$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x + y)e^{x+y}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.
9. On considère $f(x, y) = \ln(xy)$, où $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Quelles sont les égalités correctes ?
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x}$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{xy}$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{xy}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

10. On considère $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Quelles sont les égalités correctes ?

- ☐ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
- ☐ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
- ☐ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$
- ☐ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

Exercice 2:

On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$ en utilisant la définition des dérivées partielles.
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ (dérivée de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ par rapport à y au point $(0, 0)$) et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ (dérivée de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ par rapport à x au point $(0, 0)$) en utilisant la définition des dérivées partielles. Que peut-on constater?

Exercice 3:

Donner le domaine de définition et calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:

1. $f(x, y) = ye^x + xe^y$
2. $g(x, y) = 12xy - x^2y - xy^2$
3. $h(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
4. $i(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
5. $j(x, y) = \ln(y - 2x^2)$
6. $k(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 17}$
7. $l(x, y) = \ln(x^2y + xy - 2y)$