

Exercice 1:

1. On considère une subdivision en $n \in \mathbb{N}^*$ intervalles de $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On note ω_k le point milieu de chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$. Quelle est l'expression de ω_k ?

☐ $\omega_k = \frac{x_{k-1} - x_k}{2}$

☐ $\omega_k = \frac{x_{k-1} \cdot x_k}{2}$

☒ $\omega_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$

☐ $\omega_k = \frac{x_{k-1}/x_k}{2}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

2. On considère une subdivision en $n \in \mathbb{N}^*$ intervalles de $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

En la supposant équidistante, quelle est l'expression de x_k , pour $k \in \{0, \dots, n\}$?

☐ $x_k = \frac{b-a}{n} \cdot k$

☐ $x_k = \frac{b-a}{k} \cdot k + a$

☒ $x_k = \frac{b-a}{n} \cdot k + x_0$

☒ $x_k = \frac{b-a}{n} \cdot k + a$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

3. Quelle formule correspond à l'approximation de $\int_1^3 x^2 dx$ par la somme de Riemann $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^4 f(x_k)$, où $n = 4$ et où la subdivision est équidistante?

☐ $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 (k^2 + k + 1)$

☐ $\frac{1}{4} \sum_{k=0}^4 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right)$

☐ $\frac{1}{4} \sum_{k=0}^4 (k^2 + k + 1)$

☒ $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right)$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

4. Quelle formule correspond à l'approximation de $\int_1^3 x^2 dx$ par la méthode des trapèzes avec $n = 4$?

☐ $\frac{1}{8} \sum_{k=0}^4 (2k^2 + 6k + 5)$

☒ $\frac{1}{16} \sum_{k=1}^4 (2k^2 + 6k + 5)$

☐ $\frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 (2k^2 + 6k + 5)$

☐ $\frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 (2k^2 + 6k + 5)$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

5. En utilisant la méthode des trapèzes pour approximer l'intégrale $\int_0^2 3x dx$, estimez la différence en valeur absolue, notée δ , entre cette approximation et la valeur exacte de l'intégrale.

☐ $0.1 < \delta < 0.2$

☐ $0.01 < \delta < 0.02$

☐ $0.001 < \delta < 0.002$

☐ $0.0001 < \delta < 0.0002$

☒ Aucune des réponses ci-dessus

6. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de $f(x) = 2x(x^2 + 1)^8$?

☐ $F(x) = \frac{x^2}{9} (x^2 + 1)^9$

☒ $F(x) = \frac{1}{9} ((x^2 + 1)^9 + 4)$

☒ $F(x) = \frac{1}{9} \left(\sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} x^{2k} + 4 \right)$

☐ $F(x) = 32x^2 (x^2 + 1)^7 + 2 (x^2 + 1)^8$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

7. Quelles sont les égalités correctes ?

☐ $\int (1 + x^2) e^{-x} dx = -2x e^{-x} + \int (1 + x^2) e^{-x} dx$

☐ $\int (1 + x^2) e^{-x} dx = x^2 \left(\frac{1}{3} x + \frac{1}{2} \right) e^{-x} + \int x^2 \left(\frac{1}{3} x + \frac{1}{2} \right) e^{-x} dx$

☐ $\int (1 + x^2) e^{-x} dx = -2x e^{-x} - \int (1 + x^2) e^{-x} dx$

☐ $\int (1+x^2)e^{-x}dx = x^2 \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \right) e^{-x} - \int x^2 \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \right) e^{-x}dx$

☒ Aucune des réponses ci-dessus

8. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de $f(x) = x\sqrt{1+x}$?

(Indication: faire une intégration par parties.)

☐ $F(x) = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2}$

☐ $F(x) = \frac{2}{15}(3x+2)(1+x)^{3/2}$

☒ $F(x) = \frac{2}{15}(3x-2)(1+x)^{3/2}$

☐ $F(x) = \frac{2}{5}x(1+x)^{3/2}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

9. Quelles sont les fonctions $f(u)$ et $g(x)$ telles que

$$\int \frac{x}{x-4}dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx ?$$

☒ $f(u) = e^u + 4$ et $g(x) = \ln(x-4)$

☐ $f(u) = e^{u+4}$ et $g(x) = \ln(x) - 4$

☐ $f(u) = \ln(u-4)$ et $g(x) = e^x + 4$

☐ $f(u) = \ln(u) - 4$ et $g(x) = e^{x+4}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

10. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de $h(x) = (3x^3 - 1)^{16}8x^2$?

☒ $H(x) = \frac{1}{153} (23 + 8(3x^3 - 1)^{17})$

☒ $H(x) = \frac{8}{153} (3x^3 - 1)^{17}$

☐ $H(x) = \frac{1}{136} (23 + 9(3x^3 - 1)^{17})$

☐ $H(x) = \frac{9}{153} (3x^3 - 1)^{17}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

Exercice 2:

Calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes:

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

2. $g(x) = x^{2\alpha+1}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1 \Rightarrow 2\alpha + 1 \neq 1$

3. $h(x) = (x+1)^2$

4. $i(x) = \exp(2x + 5)$
5. $j(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
6. $l(x) = \frac{1+x}{(1-x)x}$ (Indication: écrire la fonction sous la forme $\frac{A}{1-x} + \frac{B}{x}$)
7. $m(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Solutions

1. $\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$
2. $\frac{x^{2(1+\alpha)}}{2(1+\alpha)} + C$
3. $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$
4. $\frac{\exp(2x+5)}{2} + C$
5. $\frac{x^3}{3} + \ln(|x|) + C$
6. $l(x) = \frac{1+x}{(1-x)x} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{x} = \frac{Ax+B(1-x)}{(1-x)x} = \frac{B+(A-B)x}{(1-x)x} \Leftrightarrow A = 2, B = 1$
 $l(x) = \frac{1+x}{(1-x)x} = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$
 $\int l(x)dx = -2 \ln|1-x| + \ln|x| + C$
7. Nous remarquons que le numérateur correspond à la dérivée du dénominateur, nous avons que $m(x)$ est égal à la dérivée de $(\ln(e^x + e^{-x}) + C)$.
 $\int m(x) = (\ln(e^x + e^{-x}) + C)$

Exercise 3:

Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^1 x e^{-x} dx$
2. $\int_0^1 x 2^x dx$
3. $\int_2^3 \ln(x^2 - 1) dx$
4. $\int_0^1 (x^2 + 1) \cos(x) dx$
5. $\int_1^e x \ln(x) dx$

Solutions

1. $1 - \frac{2}{e}$
2. $\frac{2 \ln(2) - 1}{(\ln(2))^2}$

3. $10 \ln(2) - 3 \ln(3) - 2$

4. $2 \cos(1)$

5. $\frac{1}{4} (e^2 + 1)$