Exercise 1:

1. Sachant que $(0,0)$ est un point critique de $f(x,y) = x^3 + y^3$, le calcul du discriminant $D(0,0)$ est-il concluant pour déterminer sa nature (i.e., min, max ou point-selle)?

   ☐ oui

   ☒ non

2. On considère la fonction $f(x,y) = \ln(1 + x^2y^2)$. Combien y a-t-il de points critiques?

   ☐ 0

   ☐ 2

   ☐ 4

   ☒ une infinité

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

3. Laquelle des expressions suivantes correspond à l'expression du Lagrangien de la fonction $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ sous la contrainte $x^2 + 4y^2 = 16$?

   ☐ $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (\lambda - 1)x^2 + (1 + 4\lambda)y^2 + 2x - 16\lambda + 1$

   ☒ $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (1 - \lambda)x^2 + (1 - 4\lambda)y^2 + 2x + 16\lambda + 1$

   ☐ $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (\lambda - 1)x^2 + (4\lambda - 1)y^2 + 2x - 16\lambda + 1$

   ☒ $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -\lambda(x^2 + 4y^2 - 16) + y^2 + x^2 + 2x + 1$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

4. On considère la fonction $f(x,y) = x^2y^3$ sous la contrainte $x + y = 5$. Combien y a-t-il de points critiques?

   ☐ 1

   ☐ 2

   ☒ 3

   ☐ 4

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

5. La fonction $f(x,y) = x^2 - 3y^2$ sous la contrainte $x + 2y = 1$ possède

   ☒ un minimum sous contrainte

   ☐ un maximum sous contrainte

   ☐ un minimum sous contrainte et un maximum sous contrainte

   ☐ un minimum sous contrainte et deux maximum sous contrainte

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

6. Quels sont les points critiques de $f(x,y) = 81x^2 + y^2$ sous la contrainte $4x^2 + y^2 = 9$

   ☐ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; $(-3, 0)$; $(3, 0)$,

   ☒ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; $(0, -3)$; $(0, 3)$,

- ☐ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$,
- ☐ $(-3, 0)$; $(3, 0)$,
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Exercise 2:

Déterminer les points critiques sous contraintes les fonctions données aux questions 3 et 4 du qcm. Quelles est leur nature?

Q3 $f(x, y) = (x+1)^2 + y^2$ sous la contrainte $x^2 + 4y^2 = 16$ Le système (non linéaire) d'équations correspondant aux conditions du premier ordre sur le lagrangien est

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda = -2 \\ 2y - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet quatre solutions: $\left(x = -4, y = 0, \lambda = \frac{3}{4}\right)$,$\left(x = 4, y = 0, \lambda = \frac{5}{4}\right)$, $\left(x = -\frac{4}{3}, y = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \lambda = \frac{1}{4}\right)$ et $\left(x = -\frac{4}{3}, y = -\frac{4\sqrt{2}}{3}, \lambda = \frac{1}{4}\right)$

Le discriminant du problème vaut

$$D(x, y, \lambda) = (2 - 2\lambda)64y^2 + (2 - 8\lambda)4x^2.$$

Il est négatif pour les deux premiers points critiques et il est positif pour les deux derniers. La fonction f admet donc deux maximums sous la contrainte : $(-4, 0)$ et $(4, 0)$ et deux minimums sous la contrainte : $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ et $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

Q4 $f(x, y) = x^2y^3$ sous la contrainte $x + y = 5$. En substituant x par $5 - y$ dans l'expression de f, le problème revient à étudier la fonction d'une variable :

$$h(y) = (5 - y)^2 y^3$$

dont la dérivée vaut

$$h'(y) = 5y^2(5 - y)(3 - y).$$

La fonction h admet trois points critiques : $y = 0, y = 5$ et $y = 3$.

La fonction f admet donc trois points critiques sous la contrainte $x + y = 5$: $(5, 0), (2, 3), (0, 5)$ (pour trouver la valeur de x correspondant à chaque valeur de y il suffit d'utiliser l'égalité donnée par la contrainte).

La dérivée seconde de h vaut

$$h''(y) = 5y[(5 - y)(3 - y) - y(3 - y) - y(5 - y)] .$$

Comme $h''(5) > 0$, le point critique $(0, 5)$ est un minimum de f sous contrainte. Comme $h''(3) < 0$, le point critique $(2, 3)$ est un maximum de f sous contrainte. Comme $h''(0) = 0$, on ne peut pas conclure sur la nature du point critique $(5, 0)$.