

### Exercice 1

1. Parmi les variables suivantes, lesquelles peuvent raisonnablement être représentées par des fonctions continues du temps?

- ☒ La taille d'un enfant qui grandit.
- ☒ La vitesse d'un avion en vol.
- ☒ La distance parcourue par une voiture.
- ☐ Le nombre d'habitants de Genève.
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

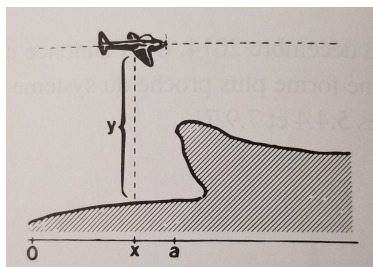
2. Quelle est l'image de 2 par la fonction  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  ?

- ☒ 3
- ☐ 27
- ☐ -3
- ☐ -37
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

3. On considère la fonction  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x, & \text{si } x < 4 \\ 11x, & \text{si } x > 4 \end{cases}$ . Cocher ce qui est vrai:

- ☐ La fonction est bien définie en 4.
- ☒  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 44$
- ☐  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) = 44$
- ☒ La fonction n'est pas définie en 4.
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

4. Un avion survole un relief. On note  $x$  la position à la verticale duquel il se trouve et  $y$  la distance de l'avion au sol en dessous de lui. La situation est illustrée dans la figure ci-dessous où le relief est représenté par la zone hachurée. Est-ce que  $y$  est une fonction continue de  $x$ ?



- ☐ Oui
- ☒ Non

5. La fonction  $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 2 \\ x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- ☐ est continue sur  $\mathbb{R}$ ,
- ☒ est continue en  $x = 3$ ,
- ☐ est continue en  $x = 2$ ,
- ☒ est discontinue en  $x = 2$ .
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

6. La fonction  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

- ☒ est continue sur  $] -1, 1[$
- ☒ est discontinue sur  $] -2, 1[$
- ☒ est discontinue sur  $[-1, 1]$ .
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

7. On considère la fonction  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ . Peut-on calculer  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  en utilisant la continuité?

- ☐ Oui
- ☒ Non

8. On considère la fonction  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ . Peut-on calculer  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  en utilisant la continuité?

- ☒ Oui
- ☐ Non

9. Quelles valeurs faut-il attribuer à  $c \in \mathbb{R}$  pour que la fonction suivante soit continue sur  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} c^2x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 9x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- ☐ 3 ou -3
- ☐  $9\sqrt{2}$  ou  $-9\sqrt{2}$
- ☒  $\sqrt{18}$  ou  $-\sqrt{18}$
- ☒  $3\sqrt{2}$  ou  $-3\sqrt{2}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

10. La fonction  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  est-elle dérivable en  $x = 1$ ?

- ☐ Oui
- ☒ Non

11. Est-il justifié d'utiliser la règle de l'Hospital pour calculer  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 + 2ax + x^2}{x^2 - a^2}$  avec  $a \neq 0$ ?

☐ Oui

☒ Non

12. Est-il justifié d'utiliser la règle de l'Hospital pour calculer  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - 2ax + x^2}{x^2 - a^2}$ ?

☒ Oui

☐ Non

13. On considère les fonctions  $f(x) = x^2 + 1$  et  $g(x) = e^x - x^3$ . Déterminer  $(g \circ f)'(x)$ .

☐  $2(e^x - x^3)(e^x - 3x^2)$

☒  $2xe^{x^2+1} - 6x(x^2 + 1)^2$

☐  $e^{2x} + x^6 - 2x^3e^x + 1$

☐  $e^{x^2+1} - (x^2 + 1)^3$

☐ Aucune des réponses ci-dessus.

14. On considère les fonctions  $f(x) = x^2 + 1$  et  $g(x) = e^x - x^3$ . Déterminer  $(g \cdot f)'(x)$ .

☐  $(x^2 + 1)e^x - x^5 - x^3$

☐  $2(e^x - x^3)(e^x - 3x^2)$

☐  $2xe^{x^2+1} - 6x(x^2 + 1)^2$

☒  $(x + 1)^2e^x - 5x^4 - 3x^2$

☐ Aucune des réponses ci-dessus.

15. On considère les fonctions  $f(x) = x^2 + 1$  et  $g(x) = e^x - x^3$ . Déterminer  $(\frac{g}{f})'(x)$ .

☐  $\frac{e^x - 3x^2}{2x}$

☐  $\frac{-(x-1)^2e^x - 5x^3 + x^5}{(x^2+1)^2}$

☒  $\frac{(x-1)^2e^x - x^4 - 3x^2}{(x^2+1)^2}$

☐  $\frac{e^x - x^3}{x^2+1}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus.

## Exercice 2

On voudrait déterminer la dérivée de la fonction  $f(x) = x^x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ .

1. Considérer la fonction  $g(x) = (\ln \circ f)(x) = \ln(x^x)$  et calculer  $g'(x)$  en utilisant la formule de la dérivée des fonction composée.

2. Utiliser la propriété du logarithme sur les puissances pour montrer que  $g'(x) = \ln(x) + 1$ .

3. Dédire des précédents points  $f'(x)$ .

1.  $g' = ((\ln)' \circ f) \times f'$  donc  $g'(x) = \frac{1}{f(x)} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

2.  $g(x) = \ln(x^x) = x \ln(x)$  donc  $g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

3.  $g'(x) = \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 = \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x^x} = \ln(x) + 1 \Leftrightarrow f'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$

### Exercice 3

En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer les limites :

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{e^{x^2} - e^x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x}$

1. Premièrement, vérifions que nous avons une indétermination de type  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{e^{x^2} - e^x} = \frac{0}{0}$$

Nous pouvons donc utiliser la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{e^{x^2} - e^x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2xe^{x^2-1}}{2xe^{x^2} - e^x} = \frac{2}{2e - e} = \frac{2}{e}$$

2. Premièrement, vérifions que nous avons une indétermination de type  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Nous pouvons donc utiliser la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(x)}{x}$$

Qui est également une indétermination de type  $\frac{\infty}{\infty}$ . Nous pouvons donc utiliser à nouveau la règle de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$