Mathématiques I

Fonctions de deux variables
définitions & représentations graphiques

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://math1-gsi.netlify.app`

Fonctions de deux variables - définition

On considère désormais des fonctions du type suivant.

Définition

Une **fonction** f **deux variables à valeurs réelles** est la donnée

1) d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$,
2) d'un ensemble $B \subset \mathbb{R}$,
3) d'une formule qui assigne à chaque couple $(x, y) \in A$ une **unique** valeur $z \in B$.

On écrit donc

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & (x,y) & \mapsto & z = f(x,y). \end{array}$$

Fonctions de deux variables - exemples

- La fonction "moyenne" faisant correspondre à un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le nombre $z = 1/2(x + y) \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & z = f(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y). \end{array}$$

- La fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & z = f(x, y) = 2x + x^2y^3. \end{array}$$

- La fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & z = f(x, y) = \dfrac{4y^2}{x^{1.5}} = 4x^{-1.5}y^2. \end{array}$$

- L'altitude d'un point sur terre en fonction de la latitude et de la longitude correspond à une fonction de deux variables. Dans ce cas, on a

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -90 \leqslant x \leqslant 90,\ -180 \leqslant y \leqslant 180\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant z \leqslant 8'848\}.$$

Fonctions de deux variables - "non-exemples"

Les équations suivantes **ne correspondent pas à des fonctions** $z = f(x, y)$.

- $x^2 + y^2 = z^2$. En effet, il y a deux valeurs de $z \in \mathbb{R}$ possibles pour chaque couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- $x = 3$. Ici, il n'y a aucune "prescription" pour une valeur z. En d'autres termes, le couple $(3, 2)$ peut être associé à $z = 1$ ou $z = 0$.
- $y = -4$. Idem.

Domaine de définition

Le domaine de définition d'une fonction à deux variables est, par définition, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

Exemples: Le domaine de définition de

- $z = f(x, y) = 2x + x^2y^3$ est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$,
- $z = f(x, y) = 4x^{-1.5}y^2$ est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,
- $z = f(x, y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ est $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 4\}$,
- $z = f(x, y) = \ln(xy)$ est
  $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 0, y < 0\}$

Continuité des fonctions de deux variables

La notion de continuité s'étend naturellement aux fonctions à deux variables. Intuitivement, et de façon analogue au cas à une variable, une fonction f de deux variables est continue en un point (x_0, y_0) si de petites variations en x et/ou en y ne produisent que de petits changements en l'image z. Autrement dit, si f est continue en (x_0, y_0) alors, pour $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ "petits", on a

$$f(x_0, y_0) \approx f(x_0 + h_1, y_0 + h_2).$$

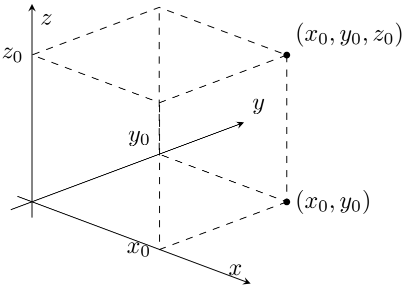
Bien qu'il y ait une définition précise et formelle de la continuité de fonctions à deux variables, on peut généralement déterminer la continuité de tels fonctions grâce aux principes suivants:

1) **Une fonction continue d'une variable reste continue** lorsqu'elle est considérée **comme fonction de deux variables**: par exemple, $f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f(x, y) = x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) **Les opérations élémentaires $+, -, \times, \div$ ainsi que la composition préservent la continuité** (sur $\mathcal{D}_f$): par exemple, $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ donc $\dfrac{f}{g}(x, y) = \dfrac{x}{y}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Graphe de fonctions de deux variables - l'espace $\mathbb{R}^3$

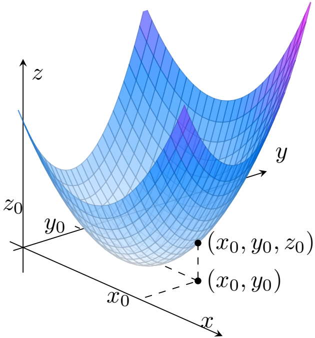
Le graphe d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ peut se représenter dans l'espace à 3 dimensions $\mathbb{R}^3$, souvent appelé l'**espace Euclidien de dimension 3**. Chaque triplet de nombres (x, y, z) correspond à un point de $\mathbb{R}^3$.



L'axe vertical correspond (généralement) à **l'axe des z**.

Graphe de fonctions de deux variables

Le **graphe d'une fonction** $z = f(x, y)$ correspond à une surface dans $\mathbb{R}^3$. Cette surface est par définition l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y)\}$.

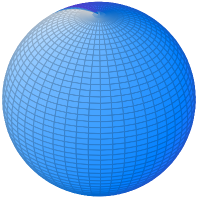


Important!!

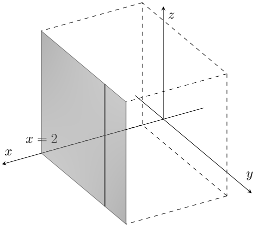
$(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ est sur la surface de f $\Leftrightarrow$ l'égalité $z_0 = f(x_0, y_0)$ est satisfaite.

Graphe de fonctions de deux variables

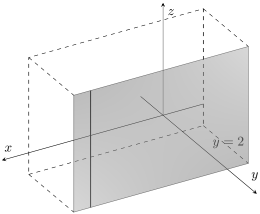
Il est important de remarquer que, puisque pour chaque valeur $(x, y) \in A$ ne correspond qu'une seule image $z \in B$, une droite verticale ne coupe jamais le graphique d'une fonction en plus d'un point.



$x^2 + y^2 = z^2$



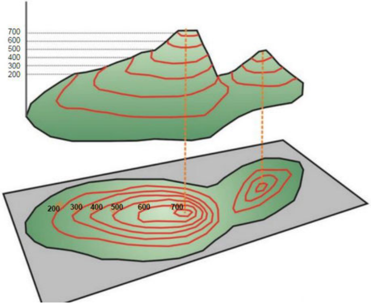
$x = 2$



$y = 2$

Graphe de fonctions de deux variables - courbes de niveau

Une fonction $f(x, y)$ peut aussi se représenter sur un plan grâce aux **courbes de niveau**. Ce sont typiquement les représentations que l'on a sur les cartes topographiques pour nous donner une idée du relief.



[1]

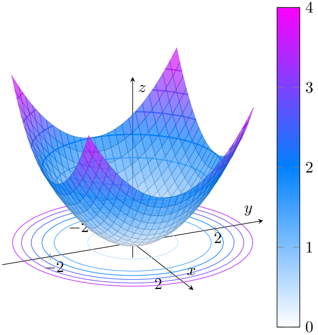
[1]images provenant de google map et de ce site

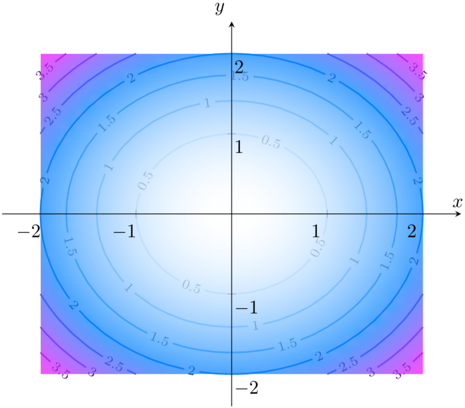
Graphe de fonctions de deux variables - courbes de niveau

Définition

Soit $c \in \mathbb{R}$ et une fonction $f(x, y)$. Une **courbe de niveau** c **de** f correspond à la courbe donnée par l'ensemble suivant

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$



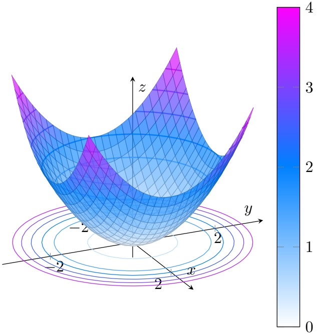


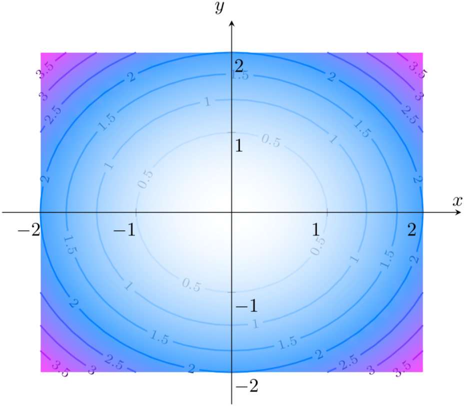
Graphe de fonctions de deux variables - courbes de niveau

Remarque

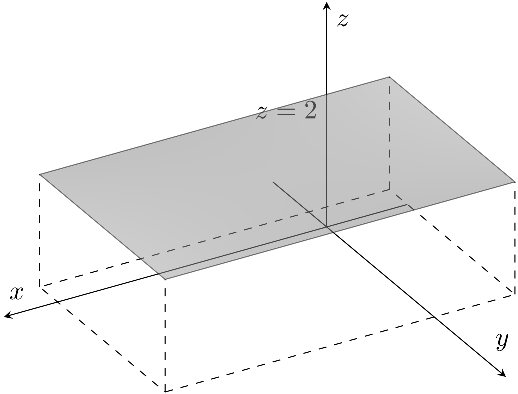
L'ensemble N_c peut

1) être vide, ou être réduit à un seul point (p.ex. $f(x,y) = x^2 + y^2$ si $c \leqslant 0$),
2) ne correspondre à aucune fonction d'une variable $y = f(x)$ ou $x = f(y)$ (p.ex. $f(x,y) = x^2 + y^2$ si $c > 0$).





Graphes de fonctions - exemples

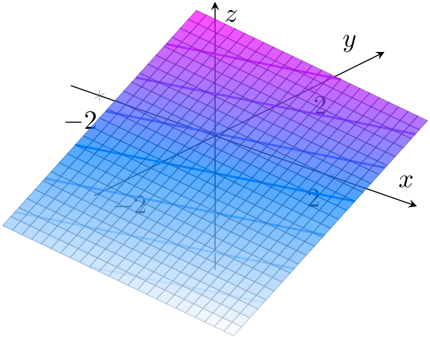


fonction constante $z = 2$

Graphes de fonctions - exemples

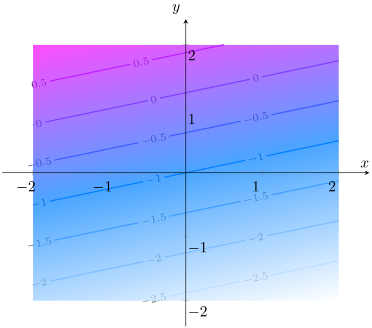
Les fonctions du type $f(x, y) = ax + by + c$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$, correspondent à des plans dans $\mathbb{R}^3$.

$$z = f(x, y) = -0.2x + 0.8y - 1$$



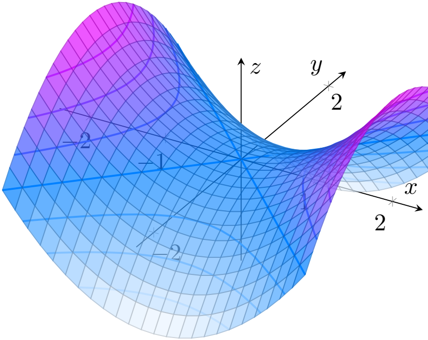
Courbes de niveau

$$z = f(x, y) = -0.2x + 0.8y - 1$$



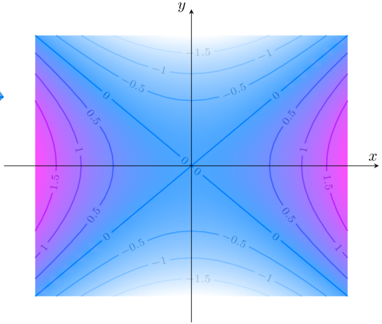
Graphes de fonctions - exemples

$$z = f(x,y) = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)$$



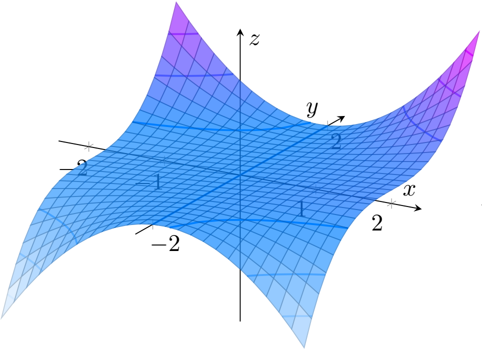
Courbes de niveau de

$$z = f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$



Graphes de fonctions - exemples

$$z = f(x, y) = 2x + x^2y^3$$



Courbes de niveau de

$$z = f(x, y) = 2x + x^2y^3$$