Mathématiques I

Méthodes d'intégration

Prof. Stéphane Guerrier (enseignant), Dr. Mucyo Karemera

Matériel disponible en ligne: `https://math1-gsi.netlify.app`

Méthodes d'intégration

Nous allons considérer 3 méthodes d'intégration pour pouvoir calculer:

1) $\int_a^b xe^x dx$

2) $\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x} dx$

3) $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx.$

Intégration par parties: le principe

Cette méthode est une conséquence (non triviale) du théorème fondamentale de l'analyse et de la formule de la dérivée d'un produit de fonctions dérivables. En effet, si f et g sont deux fonctions tels que f' et g' sont continues sur $[a, b]$, alors on a

$$f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b = \int_a^b [f(x) \cdot g(x)]' \, dx = \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx.$$

d'où

Formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Cette formule s'écrire aussi sans les bornes simplement comme suit

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Intégration par parties: exemple

Cette méthode d'intégration à un sens si une des deux intégrales, disons $\int f'(x) \cdot g(x)dx$, est plus simple à calculer que l'autre, ici $\int f(x) \cdot g'(x)dx$. Ceci n'est toujours garanti malheureusement.

Calcul d'une primitive de $\int_a^b xe^x dx$

On choisit $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$ et on a

$$f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = e^x.$$

de sorte qu'on obtient

$$\int \underbrace{x \cdot e^x}_{f(x)g'(x)} dx = \underbrace{x \cdot e^x}_{f(x)g(x)} - \int \underbrace{1 \cdot e^x}_{f'(x)g(x)} dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Ainsi, la fonction $H(x) = e^x(x-1)$ est une primitive de $h(x) = xe^x$ (il suffit de dériver la fonction $H(x)$ pour le vérifier). On obtient donc

$$\int_a^b x \cdot e^x dx = H(x)\Big|_a^b = H(b) - H(a) = e^b(b-1) - e^a(a-1).$$

Intégration par parties: exemple

Cette méthode d'intégration à un sens si une des deux intégrales, disons $\int f'(x) \cdot g(x) dx$, est plus simple à calculer que l'autre, ici $\int f(x) \cdot g'(x) dx$. Ceci n'est malheureusement pas toujours garanti.

Calcul d'une primitive de $\int xe^x dx$: mauvais choix

En faisant l'autre choix, i.e $f(x) = e^x$ et $g'(x) = x$ alors on a

$$f'(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2,$$

de sorte qu'on obtient

$$\int \underbrace{e^x \cdot x}_{f(x)g'(x)} dx = \underbrace{e^x \cdot \frac{1}{2}x^2}_{f(x)g(x)} - \int \underbrace{e^x \cdot \frac{1}{2}x^2}_{f'(x)g(x)} dx$$

On remarque que ce second choix de f et g ne simplifie pas le calcul.

Seule la pratique permet de souvent faire le bon choix (lorsqu'il existe).

L'intégration par substitution: le principe

Cette méthode tire profit de la formule de la différentielle: soit $y = g(x)$ une fonction dérivable, alors on a $dy = g'(x)dx$. On obtient donc la formule suivante:

Intégration par substitution

Si $f \circ g$ est bien définie et continue et que g' est continue sur sur $[a, b]$ alors, en posant $y = g(x)$, on a

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy.$$

L'intégration par substitution: exemple

Pour une intégrale définie, on peut "garder" l'expression finale en la variable u, par exemple

Calcul de l'intégrale définie $\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x} dx$

On pose $y = g(x) = 1 + \ln(x)$ et $f(y) = y$. On a

$$g(1) = 1 + \ln(1) = 1 + 0 = 1 \quad \text{et} \quad g(e) = 1 + \ln(e) = 1 + 1 = 2$$

et ainsi,

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \int_{g(1)}^{g(e)} y dy = \int_1^2 y dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$$

Intégration numérique

Les deux méthodes présentées ne permettent toutefois pas de déterminer une primitive pour e^{-x^2} ou de calculer l'intégrale définie $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx$.

Cette dernière intégrale est pourtant fondamentale en mathématiques et en particulier en probabilités et en statistiques puisqu'elle est à la base de la définition de la loi normale ou loi gaussienne.

En général, il existe des fonctions (beaucoup) dont on arrive à prouver l'existence de primitive, mais pour lesquelles on ne parvient pas à "exprimer" ces primitives sous forme standard $F(x)$. C'est notamment le cas de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.

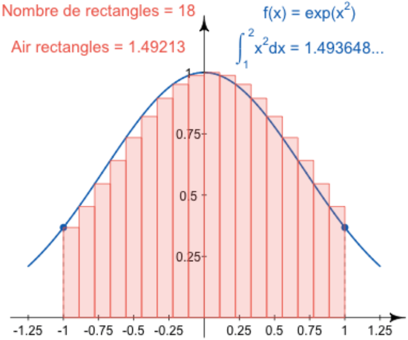
Pour ce type de fonctions, on utilise des méthodes numériques pour calculer des approximations, i.e. on calcule des approximations en tirant profit de la puissance de calculs des ordinateurs.

Intégration numérique: les sommes de Riemann

Pour une fonction f intégrable sur $[a, b]$, on peut naturellement utiliser les sommes de Riemann.

On choisit une subdivision équidistante de $[a, b]$, on pose $\omega_k = x_k$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et on calcule ("code") l'approximation

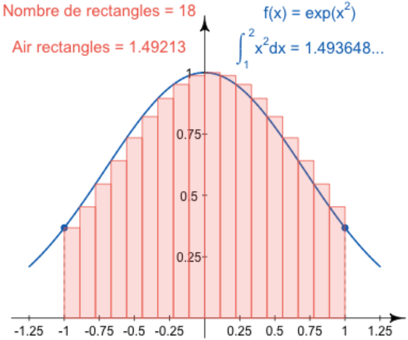
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

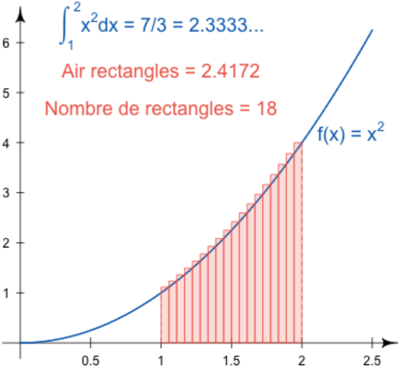


Intégration numérique: les sommes de Riemann

On peut remarquer que la convergence des sommes de Riemann vers l'intégral dépend du type de graphe de la fonction (notamment de sa symétrie) moins rapide pour $f(x) = x^2$ que pour $f(x) = e^{-x^2}$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

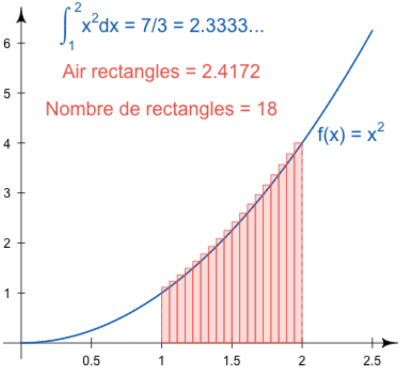


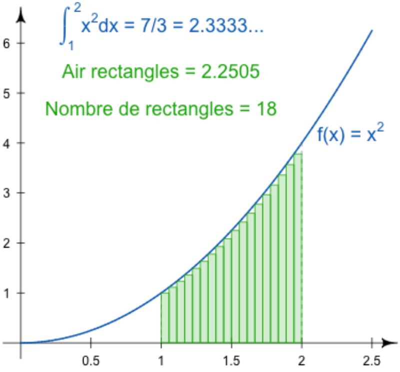


Intégration numérique: les sommes de Riemann

On peut remarquer que la convergence des sommes de Riemann vers l'intégral dépend du type de graphe de la fonction (notamment de sa symétrie) moins rapide pour $f(x) = x^2$ que pour $f(x) = e^{-x^2}$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

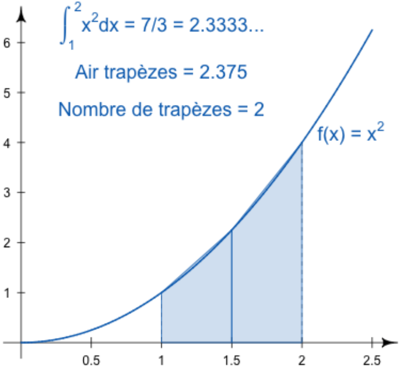




Intégration numérique: la méthode des trapèzes

On obtient une meilleure approximation grâce à la méthode des trapèzes.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} \cdot \sum_{k=1}^{n} [f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$



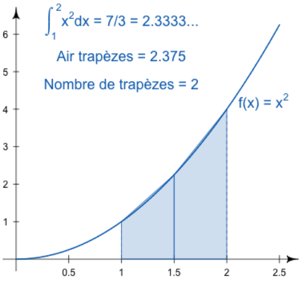
Intégration numérique: la méthode des trapèzes

Par ailleurs, **cette méthode n'est pas computationellement plus coûteuse que le calcul des sommes de Riemann**.

Méthode des trapèzes

On calcule l'approximation (avec la même subdivision équidistante qu'auparavant)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} \cdot \sum_{k=1}^{n} [f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$



Intégration numérique: la méthode des trapèzes

Il est possible de montrer formellement (pour autant que la fonction sous suffisamment dérivable) que cette méthode est meilleure que l'approximation avec les sommes de Riemann. C'est ce que l'on observe avec l'exemple $f(x) = x^2$.