

Mathématiques I

Signe de sommation / Notation Σ

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: <https://math1-gsi.netlify.app>

Licence: CC BY-NC-SA 4.0



L'utilité

La **notation** \sum permet d'écrire de façon compact (et même élégante), de longues sommes finies ou infinies

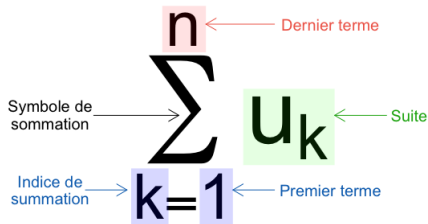
$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100.$$

Elle nous permet essentiellement de nous passer des "... " ci-dessus.

La notation Σ



Cette notation doit être lu comme un algorithme.

$$\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Diagram illustrating the summation process as an algorithm:

- début à $k = 1$
- puis $k = 2$
- puis $k = 3$
- puis $k = 4$
- enfin $k = 5$
- Fin!

$= 15$



Résultat de la somme

La notation Σ

$$\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

début à $k = 1$ puis $k = 2$ puis $k = 3$ puis $k = 4$ enfin $k = 5$
Fin!

$$= 15$$



Résultat de la somme

On a donc les égalités suivantes:

$$\bullet \sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10,$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100,$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{49} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49,$$

$$\bullet \sum_{k=4}^{100} k = 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + 100.$$

La notation Σ

L'indice de sommation ne doit pas nécessairement être k . Ainsi on a, par exemple,

$$\sum_{n=1}^{10} n = \sum_{k=1}^{10} k = \sum_{i=1}^{10} i.$$

Attention toutefois si la suite ne dépend pas de l'indice de sommation, comme dans les exemples qui suivent:

$$\sum_{k=1}^{10} c = \underbrace{c + c + c + \dots + c}_{10 \text{ fois}} = 10c$$

$$\sum_{k=1}^{10} x = \underbrace{x + x + x + \dots + x}_{10 \text{ fois}} = 10x$$

$$\sum_{n=1}^{10} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{10 \text{ fois}} = 10$$

Exemples

- $\sum_{k=0}^5 u_k$, pour $u_k = (-1)^k$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^5 (-1)^k &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

- $\sum_{k=0}^4 u_k$, pour $u_k = 2k - 3$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^4 2k - 3 &= (2 \cdot 0 - 3) + (2 \cdot 1 - 3) + (2 \cdot 2 - 3) + (2 \cdot 3 - 3) + (2 \cdot 4 - 3) \\ &= (-3) + (-1) + 1 + 3 + 5 = 5.\end{aligned}$$

- $\sum_{k=0}^2 u_k$, pour $u_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+3)}$.

$$\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{-1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} = \frac{40 - 15 + 8}{120} = \frac{33}{120} = \frac{11}{40}.$$

Exemples

Comment écrire la somme $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$ à l'aide du signe \sum ?

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \\&= 1 + (-1)\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + (-1)\frac{1}{7} + \dots \\&= 1 + (-1)^1\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + (-1)^3\frac{1}{7} + \dots \\&= (-1)^0 1 + (-1)^1\frac{1}{3} + (-1)^2\frac{1}{5} + (-1)^3\frac{1}{7} + \dots \\&= (-1)^0 \frac{1}{2 \cdot 0 + 1} + (-1)^1 \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} + (-1)^2 \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} + (-1)^3 \frac{1}{2 \cdot 3 + 1} + \dots \\&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.\end{aligned}$$

Remarque.

Il n'y a pas unicité dans l'écriture. En effet, on a aussi

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$