

**Exercice 1:**

1. On considère une subdivision en  $n \in \mathbb{N}^*$  intervalles de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On note  $\omega_k$  le point milieu de chaque intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$ , pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Quelle est l'expression de  $\omega_k$ ?

- ☐  $\omega_k = \frac{x_{k-1} - x_k}{2}$   
☐  $\omega_k = \frac{x_{k-1} \cdot x_k}{2}$   
☐  $\omega_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$   
☐  $\omega_k = \frac{x_{k-1}/x_k}{2}$   
☐ Aucune des réponses ci-dessus

2. On considère une subdivision en  $n \in \mathbb{N}^*$  intervalles de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

En la supposant équidistante, quelle est l'expression de  $x_k$ , pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ ?

- ☐  $x_k = \frac{b-a}{n} \cdot k$   
☐  $x_k = \frac{b-a}{k} \cdot k + a$   
☐  $x_k = \frac{b-a}{n} \cdot k + x_0$   
☐  $x_k = \frac{b-a}{n} \cdot k + a$   
☐ Aucune des réponses ci-dessus

3. Quelle formule correspond à l'approximation de  $\int_1^3 x^2 dx$  par la somme de Riemann  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^4 f(x_k)$ , où  $n = 4$  et où la subdivision est équidistante?

- ☐  $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 (k^2 + k + 1)$   
☐  $\frac{1}{4} \sum_{k=0}^4 \left( \frac{k^2}{4} + k + 1 \right)$   
☐  $\frac{1}{4} \sum_{k=0}^4 (k^2 + k + 1)$   
☐  $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 \left( \frac{k^2}{4} + k + 1 \right)$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

4. Quelle formule correspond à l'approximation de  $\int_1^3 x^2 dx$  par la méthode des trapèzes avec  $n = 4$  ?

☐  $\frac{1}{8} \sum_{k=0}^4 (2k^2 + 6k + 5)$

☐  $\frac{1}{16} \sum_{k=1}^4 (2k^2 + 6k + 5)$

☐  $\frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 (2k^2 + 6k + 5)$

☐  $\frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 (2k^2 + 6k + 5)$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

5. En utilisant la méthode des trapèzes pour approximer l'intégrale  $\int_0^2 3x dx$ , estimez la différence en valeur absolue, notée  $\delta$ , entre cette approximation et la valeur exacte de l'intégrale.

☐  $0.1 < \delta < 0.2$

☐  $0.01 < \delta < 0.02$

☐  $0.001 < \delta < 0.002$

☐  $0.0001 < \delta < 0.0002$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

6. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de  $f(x) = 2x(x^2 + 1)^8$  ?

☐  $F(x) = \frac{x^2}{9} (x^2 + 1)^9$

☐  $F(x) = \frac{1}{9} ((x^2 + 1)^9 + 4)$

☐  $F(x) = \frac{1}{9} \left( \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} x^{2k} + 4 \right)$  (*Indication : Formule du binôme de Newton*)

☐  $F(x) = 32x^2 (x^2 + 1)^7 + 2 (x^2 + 1)^8$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

7. Quelles sont les égalités correctes ?

☐  $\int (1 + x^2) e^{-x} dx = -2x e^{-x} + \int (1 + x^2) e^{-x} dx$

☐  $\int (1 + x^2) e^{-x} dx = x^2 \left( \frac{1}{3} x + \frac{1}{2} \right) e^{-x} + \int x^2 \left( \frac{1}{3} x + \frac{1}{2} \right) e^{-x} dx$

☐  $\int (1 + x^2) e^{-x} dx = -2x e^{-x} - \int (1 + x^2) e^{-x} dx$

☐  $\int (1+x^2)e^{-x}dx = x^2 \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} - \int x^2 \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right) e^{-x}dx$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

8. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de  $f(x) = x\sqrt{1+x}$  ?

(Indication: faire une intégration par parties.)

☐  $F(x) = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2}$

☐  $F(x) = \frac{2}{15}(3x+2)(1+x)^{3/2}$

☐  $F(x) = \frac{2}{15}(3x-2)(1+x)^{3/2}$

☐  $F(x) = \frac{2}{5}x(1+x)^{3/2}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

9. Quelles sont les fonctions  $f(u)$  et  $g(x)$  telles que

$$\int \frac{x}{x-4}dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx ?$$

☐  $f(u) = e^u + 4$  et  $g(x) = \ln(x-4)$

☐  $f(u) = e^{u+4}$  et  $g(x) = \ln(x) - 4$

☐  $f(u) = \ln(u-4)$  et  $g(x) = e^x + 4$

☐  $f(u) = \ln(u) - 4$  et  $g(x) = e^{x+4}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

10. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de  $h(x) = (3x^3 - 1)^{16}8x^2$  ?

☐  $H(x) = \frac{1}{153} (23 + 8(3x^3 - 1)^{17})$

☐  $H(x) = \frac{8}{153} (3x^3 - 1)^{17}$

☐  $H(x) = \frac{1}{136} (23 + 9(3x^3 - 1)^{17})$

☐  $H(x) = \frac{9}{153} (3x^3 - 1)^{17}$

☐ Aucune des réponses ci-dessus

### Exercice 2:

Calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes:

1.  $f(x) = x^2 - 2x + 3$

2.  $g(x) = x^{2\alpha+1}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1 \Rightarrow 2\alpha + 1 \neq 1$

3.  $h(x) = (x+1)^2$

4.  $i(x) = \exp(2x + 5)$

5.  $j(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

6.  $l(x) = \frac{1+x}{(1-x)x}$  (Indication: écrire la fonction sous la forme  $\frac{A}{1-x} + \frac{B}{x}$ )

7.  $m(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

**Exercice 3:**

Calculer les intégrales suivantes:

1.  $\int_0^1 x e^{-x} dx$

2.  $\int_0^1 x 2^x dx$

3.  $\int_2^3 \ln(x^2 - 1) dx$

4.  $\int_0^1 (x^2 + 1) \cos(x) dx$

5.  $\int_1^e x \ln(x) dx$