

# Mathématiques I

## Algèbre linéaire

### Systèmes d'équations linéaires

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: <https://math1-gsi.netlify.app>

Licence: CC BY-NC-SA 4.0



# Systèmes d'équations linéaires: définition

Pour déterminer les extrema d'une fonction  $z = f(x, y)$  sous la contrainte  $g(x, y) = c$ , nous avons résolu un système d'équations issu du Lagrangien (et de la contrainte):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ g(x, y) = c \end{cases}$$

Nous allons désormais nous intéresser à un type particulier de système

## Définition (Système linéaire).

Un **système d'équations linéaires**  $m \times n$  consiste en  $m$  équations linéaires à  $n$  variables. Un tel système s'écrit en général

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

où les nombres  $a_{i,j}$  et  $b_j$  sont des constantes nommées **coefficients** du système et  $x_i$  sont les **variables** du système ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ )

# Systèmes d'équations linéaires: exemples

Les systèmes d'équations suivants sont tous linéaires

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 4 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ -10x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_1 + 5x_2 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -10x + 2y = -1 \end{cases}$$

Les deux premiers systèmes n'ont pas le même nombre d'équations que de variables. On parle de système **sous-déterminé** pour le premier et **sur-déterminé** pour le deuxième.

Les systèmes d'équations suivants ne sont pas linéaires

$$\begin{cases} 3y^2 + 2x + 7z = 4 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ -10x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_1x_2 + 5x_2 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -10x^3 + 2y = -1 \end{cases}$$

# Systèmes d'équations linéaires: ensemble des solutions

Étant donné un système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

**une solution** est un  $n$ -uplet  $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  qui vérifie toutes les équations du système. Trois cas peuvent se présenter:

- le système possède une **unique solution**
- le système possède une **infinité de solutions**
- le système ne possède **aucune solution**

On notera  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions. Résoudre un système d'équation (linéaire ou non) revient à déterminer ce dernier ensemble.

# Systèmes d'équations linéaires: ensemble des solutions

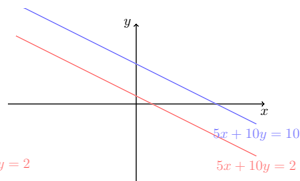
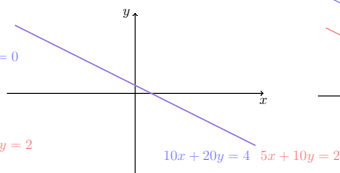
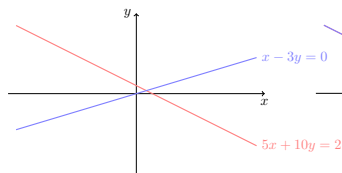
On peut géométriquement comprendre pourquoi il n'y a pas d'autre possibilité pour  $S$  dans le cas de système  $2 \times 2$ . Considérons les systèmes suivants

$$\begin{cases} 5x + 10y = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 10y = 2 \\ 10x + 20y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 10y = 2 \\ 5x + 10y = 10 \end{cases}$$

Chaque équation correspond à l'équation d'une droite. Ainsi, une solution correspond à un point d'intersection des droites, d'où les trois possibilités mentionnées pour  $S$ .



# Méthodes de résolution: par substitution

Cette méthode consiste à

- 1) isoler une variable dans l'une des équations pour l'exprimer en fonction des autres,
- 2) substituer cette dernière expression dans les autres équations pour qu'elles aient une variable de moins,
- 3) répéter cette procédure jusqu'à avoir une équation d'une variable dont on détermine la solution (s'il y en a une). De là, on détermine la valeur des autres variables.

Illustrons la méthode par l'exemple suivant

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2y + 2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y + 4 = 7 \\ 2y + 2 = x \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} y = 3/7 \\ x = 2y + 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 3/7 \\ x = 2 \cdot 3/7 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3/7 \\ x = 20/7 \end{cases} \end{aligned}$$

Il convient de toujours vérifier la solution obtenue

$$2x + 3y = 2 \cdot 20/7 + 3 \cdot 3/7 = 40/7 + 9/7 = 49/7 = 7$$

$$x - 2y = 20/7 - 2 \cdot 3/7 = 20/7 - 6/7 = 14/7 = 2$$

L'ensemble des solutions est donc  $\mathcal{S} = \{(20/7, 3/7)\}$ .



# Méthodes de résolution: par combinaison

Cette méthode repose sur le théorème suivant

## **Théorème (Opérations élémentaires).**

*L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions d'un système linéaire reste inchangé par*

- 1) l'échange de deux équations dans le système*
- 2) la multiplication d'une équation par une constante non nulle*
- 3) l'addition d'une équation avec un multiple quelconque d'une autre équation*

La méthode par combinaison consiste à utiliser les points du théorème pour déterminer  $\mathcal{S}$ . On reprend l'exemple précédent pour l'illustrer.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\ell_2 := \ell_2 - 2\ell_1} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 7y = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 2y = 2 \\ y = 3/7 \end{cases}$$

On voit dès lors qu'on obtient le même résultat qu'auparavant, i.e.

$$\mathcal{S} = \{(20/7, 3/7)\}.$$

# Élimination de Gauss

Dans les exemples qui suivent, nous allons utiliser les opérations élémentaires de sorte que la première variable, disons  $x_1$ , n'apparaisse que dans la première équation, la deuxième, disons  $x_2$ , que dans la première et la deuxième équation et ainsi de suite.

Ce procédé de résolution porte le nom d'**élimination de Gauss** et le système obtenu à la fin de cette procédure est nommé **système échelonné**. Les systèmes suivants sont échelonnés

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 7y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ 2x_2 + 9x_3 = 8 \\ 4x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_2 = 3 \\ 0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ 2x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Il est plus simple de déterminer  $\mathcal{S}$  pour un système sous cette forme.



# Exemple 1

On considère le système suivant

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$$

et on calcule

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = -7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases} \\ & \xrightarrow{\ell_3 := \ell_3 + 3\ell_1} \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = -7 \\ 5x_2 + 11x_3 = -4 \end{cases} \xrightarrow{\ell_3 := \ell_3 - \frac{5}{2}\ell_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = -7 \\ \frac{27}{2}x_3 = \frac{27}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est maintenant échelonné et on déduit aisément de  $\ell_3$  que  $x_3 = 1$  puis de  $\ell_2$  que  $x_2 = -3$  et enfin de  $\ell_1$  que  $x_1 = 2$ . En vérifiant cette solution, on conclue que

$$\mathcal{S} = \{(2, -3, 1)\}.$$

## Exemple 2

On considère le système suivant

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 18 \\ x_1 - 4x_2 = 10 \end{cases}$$

et on calcule

$$\begin{array}{ccc} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 18 \\ x_1 - 4x_2 = 10 \end{cases} & \begin{array}{l} \xrightarrow[\ell_3 := \ell_3 - \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 := \ell_2 - \ell_1} \\ \end{array} & \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ -7x_2 = 14 \\ -6x_2 = 8 \end{cases} \\ \begin{array}{l} \xrightarrow[\ell_3 := \ell_3 \div (-6)]{\ell_2 := \ell_2 \div (-7)} \\ \end{array} & \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ x_2 = -2 \\ x_2 = -\frac{4}{3} \end{cases} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\ell_3 := \ell_3 - \ell_2} \\ \end{array} & \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ x_2 = -2 \\ 0 = \frac{2}{3} \end{cases} \end{array}$$

Le système est échelonné et mène à une contradiction. Il ne possède donc pas de solution. Dans ce cas, on écrit  $\mathcal{S} = \emptyset$ , où  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide.

## Exemple 3

On considère le système suivant

$$\begin{cases} 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

et on calcule

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \\ & \xrightarrow{\ell_3 := \ell_3 - 2\ell_1} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ -5x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases} \xrightarrow{\ell_3 := \ell_3 + \ell_2} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est échelonné et on peut déduire les solutions. En effet, de  $\ell_2$  on tire que  $x_3 = \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}$ , puis par substitution, on obtient de  $\ell_1$  que  $x_1 = -\frac{4}{3}x_2 - \frac{11}{3}$ . Après vérification, on conclut que

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{11}{3} - \frac{4}{3}s, s, \frac{5}{3}s - \frac{1}{3} \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

## Exemple 4

On considère le système suivant

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

et on calcule

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases} \xrightarrow{\ell_2 := \ell_2 - 2\ell_1} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné et les solutions se déduisent de  $\ell_1$  d'où l'on tire que  $x_3 = x_1 + 3x_2 - 4$ . Après vérification, on conclut que

$$\mathcal{S} = \left\{ (s_1, s_2, s_1 + 3s_2 - 4) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$