Mathématiques I

Dérivabilité

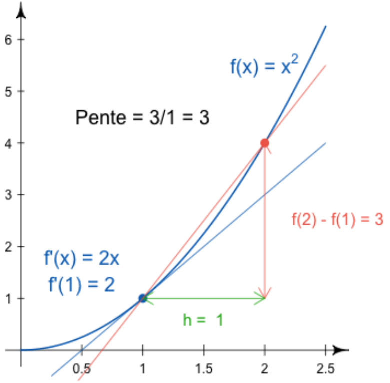
Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://math1-gsi.netlify.app`

L'idée de base

Soit $f : A \to B$ une fonction où $A, B \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in A$. On aimerait calculer | a **pente de la tangente** du graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. Ceci revient à calculer la limite suivante:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Dérivée: la définition

Définition (Dérivée).

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in A$.

1) *La fonction f est **dérivable au point** $x_0 \in A$ si la **limite** suivante **existe** et est **finie**:*
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2) *Cette limite se note $f'(x_0)$ et est nommée **la dérivée de f au point** $x_0 \in A$.*

3) *On dit que f est **dérivable** si elle est dérivable $\forall x_0 \in A$.*

A l'aide de la dérivée, on peut déterminer l'équation de la droite tangente du graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. Il s'agit en effet de la fonction suivante, notée t_{x_0},

$$\begin{array}{rccl} t_{x_0} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & t_{x_0}(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{pente}} \cdot x + \underbrace{(f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0)}_{\text{ordonnée à l'origine}} \end{array}$$

Propriétés de la dérivée

Théorème (Dérivée et opérations élémentaires).

Si f et g sont dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$ alors sont aussi dérivables en x_0:

1) *la somme* $(f+g)$ *et* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
2) *la différence* $(f-g)$ *et* $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$,
3) *le produit* $(f \cdot g)$ *et* $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
4) *le quotient* (f/g), **si** $g(x_0) \neq 0$, *auquel cas*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Théorème (Dérivée et composition).

Si f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ et g est dérivable en $f(x_0) \in \mathbb{R}$, alors la fonction composée $(g \circ f)$ est aussi dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dérivées de fonctions usuelles et de la réciproque

1) fonction constante, $f(x) = c$, où $c \in \mathbb{R}$: $f'(x_0) = 0$ $(x_0 \in \mathbb{R})$
2) fonction puissance n-ième, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$: $f^{'}(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$ $(x_0 \in \mathbb{R})$
3) fonction exponentielle, $f(x) = \exp(x) = e^x$: $f'(x_0) = e^{x_0}$ $(x_0 \in \mathbb{R})$
4) fonction logarithme, $f(x) = \ln(x)$: $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = x_0^{-1}$ $(x_0 \in \mathbb{R}_+^*)$

On peut déduire des formules précédentes la suivante

Théorème (Dérivée de la fonction réciproque).

Si f est bijective, dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ et que $f'(x_0) \neq 0$, alors la réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$. De plus, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

En effet, $(f^{-1} \circ f)(x_0) = i(x_0) = x_0$ donc $(f^{-1} \circ f)'(x_0) = 1$. La formule de la dérivée des fonctions composées permet de conclure puisque

$$(f^{-1} \circ f)'(x_0) = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = \left(f^{-1}\right)'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Continuité et dérivabilité

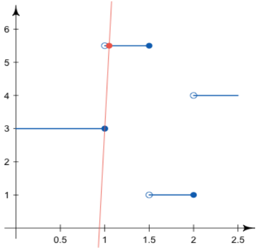
Le lien entre la continuité et la dérivabilité est donné par :

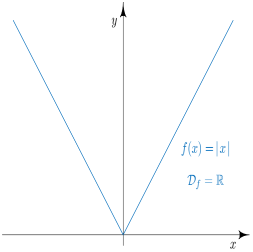
Théorème (dérivable $\Rightarrow$ continue).

Si f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ alors f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$.

La continuité est donc une **condition nécessaire** à la dérivabilité, i.e. une fonction discontinue en un point est non-dérivable en ce même point.

Par contre, la continuité **n'est pas une condition suffisante** à la dérivabilité, comme on peut le remarquer avec la fonction $f(x) = | x |$.





Visuellement, **un graphe discontinu ou avec des "pointes" ne correspond pas à une fonction dérivable**.

Dérivées d'ordre supérieur

Définition (La fonction dérivée).

Soit f une fonction, on peut définir la fonction dérivée, notée f', comme suit

$$\begin{array}{rccc} f': & \mathcal{D}_{f'} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

où $\mathcal{D}_{f'} \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble des points où f est dérivable.

La fonction dérivée peut elle-même être dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_{f'}$ permettant de définir la **dérivée seconde** de f en x_0 par

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

Cette procédure peut être itérée aussi longtemps que les fonctions obtenues sont dérivables en x_0. On définit ainsi la **dérivée troisième**, notée $f^{(3)}$, de f en x_0 par

$$f^{(3)}(x_0) = \left(f''\right)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x_0 + h) - f''(x_0)}{h},$$

et la **dérivée n-ième**, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

Dérivées d'ordre supérieur

Exemples:

1) Pour $f(x) = x^3$, on a $\forall x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f'(x_0) = 3x_0^2, \quad f''(x_0) = 6x_0, \quad f^{(3)}(x_0) = 6 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x_0) = 0, \forall n \geqslant 4.$$

2) Pour $f(x) = \ln(x)$, on a $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x_0) = x_0^{-1}, \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}, \forall n \geqslant 2,$$

où $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1)$ est la factorielle de $(n-1)$.

3) Pour $f(x) = \exp(x) = e^x$, on a $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x_0) = f(x_0) = e^{x_0}.$$

Règle de l'Hospital

Cette règle permet de calculer des limites indéterminées du type "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$" comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}.$$

Théorème (Règle de l'Hospital).

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $V_a \setminus \{a\}$, où V_a est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et telles que $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in V_a \setminus \{a\}$.

1) *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

2) *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ce résultat est aussi valable pour $x \to \pm\infty$.

Règle de l'Hospital

On calcule les limites mentionnées

1) Pour $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ on pose $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Comme $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = 1$, f et g sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et a fortiori sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Finalement, on a, par continuité,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} e^x - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \\
\lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} x = 0 \\
\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

On obtient donc, par la règle de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Règle de l'Hospital

On calcule les limites mentionnées

2) Pour $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ on pose $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $f'(x) = x^{-1}$ et $g'(x) = 1$, f et g sont donc dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (qui tient lieu de "voisinage" de $+\infty$). De plus, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$. Finalement, on a, par continuité,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

On obtient donc, par la règle de l'Hospital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$