

Mathématiques I

Opérations sur les fonctions

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: <https://math1-gsi.netlify.app>

Licence: CC BY-NC-SA 4.0



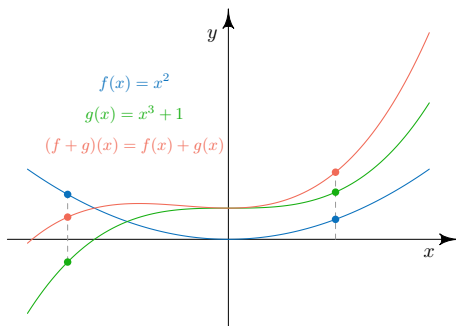
Opérations élémentaires sur les fonctions

Etant donné deux fonctions f, g de même domaine de définition, on peut aisément en créer de nouvelles avec les opérations élémentaires $+, -, \cdot, \div$.

Définition (Addition de fonctions)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. On définit la fonction somme, notée $(f + g)$, ainsi:

$$\begin{aligned}(f + g) : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)\end{aligned}$$

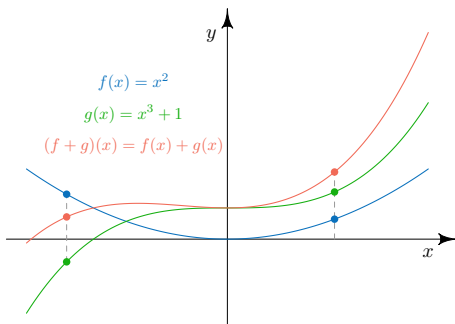


Opérations élémentaires sur les fonctions

Remarque

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ n'ont pas le même domaine de définition, la fonction somme peut être définie sur l'intersection de deux domaines, i.e.

$$(f + g) : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}.$$



Opérations élémentaires sur les fonctions

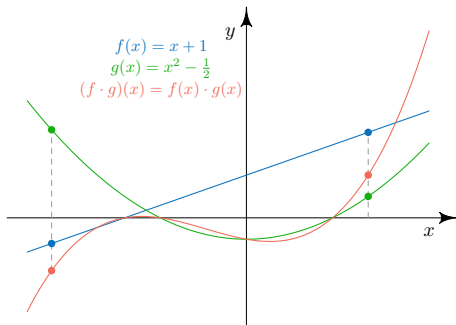
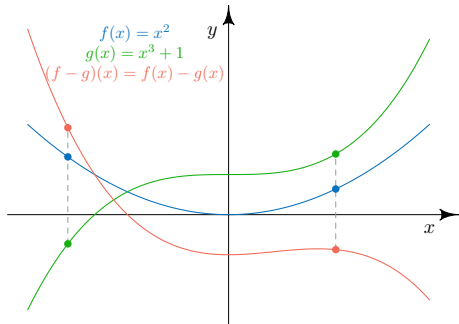
La définition est similaire pour la soustraction ($f - g$), et la multiplication ($f \cdot g$).

Définition (Soustraction et produit de fonctions)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. On définit $(f - g)$ et $(f \cdot g)$ ainsi:

$$\begin{aligned}(f - g) : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - g(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \cdot g) : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$



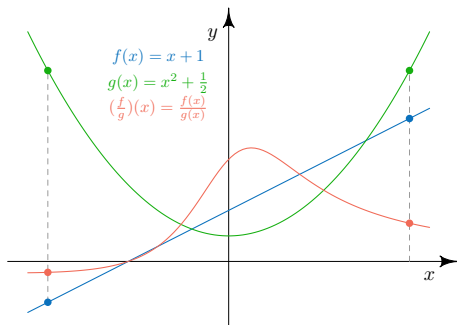
Opérations élémentaires sur les fonctions

Pour la division de fonction, il faut prendre une précaution supplémentaire.

Définition (Division de fonctions)

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq 0, \forall x \in A$. On définit $\left(\frac{f}{g}\right)$, ainsi:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right) : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$



Composition de fonctions

Une opération courante sur les fonctions est **la composition**.

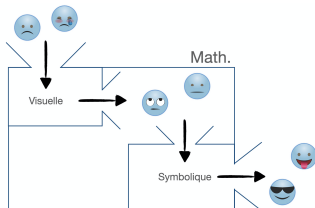
Définition (Composition de fonctions)

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. On définit la composition de f et de g , notée $(g \circ f)$, ainsi:

$$\begin{aligned}(g \circ f) : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))\end{aligned}$$

L'écriture ci-dessus peut aussi se comprendre de la façon suivante

$$\begin{array}{ccccc} (g \circ f) : A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$



Composition de fonctions

Attention

Il faut veiller à ne pas confondre $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$. Par exemple, pour

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

$(g \circ f)$ est bien définie alors que $(f \circ g)$ n'est pas!!

En effet, on a dans ce cas $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = g(x^{\frac{1}{2}}) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = x^{\frac{3}{2}}.$$

Par contre,

$$(f \circ g)(-1) = f((-1)^3) = f(-1) = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}.$$

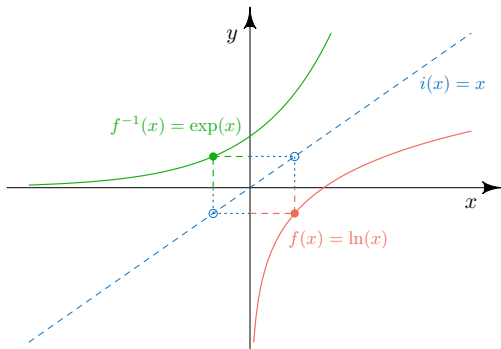
Réciproque d'une fonction

Pour une fonction **bijective** $f : A \rightarrow B$, où $A, B \subset \mathbb{R}$, on peut caractériser la **réciproque**, notée $f^{-1} : B \rightarrow A$ par l'équivalence suivante

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Cette équivalence peut aussi s'écrire avec le signe de composition ainsi:
 $\forall x \in A$ et $\forall y \in B$

$$x = (f^{-1} \circ f)(x) \text{ et } y = (f \circ f^{-1})(y).$$



Réciproque d'une fonction

Attention

Il faut veiller à ne pas confondre f^{-1} et $\frac{1}{f}$. La première est définie ci-dessus et la deuxième est donnée par

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$\forall x \in A$ tel que $f(x) \neq 0$.

Ceci explique pourquoi la notation f^r est parfois préférée pour désigner la fonction réciproque.