Mathématiques I

Optimisation sous contrainte
Méthode de Lagrange

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://math1-gsi.netlify.app`

Méthode de Lagrange

Lorsque le problème d'optimisation sous contrainte ne peut pas être résolu par substitution, on peut utiliser la méthode du Lagrange, qui est plus générale. Pour ce faire, on définit une fonction nommée **le Lagrangien** est la fonction définie par:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, est nommé **multiplicateur de Lagrange**.

Le théorème suivant indique (une partie de) la marche à suivre

Théorème (conditions du premier ordre).

Si les fonctions f et g sont continûment dérivables, alors pour tout extremum (x_0, y_0) de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = c$ qui n'est pas un point critique de la fonction g, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) & = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) & = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) & = c \end{array} \right.$$

Méthode de Lagrange

L'introduction de la variable λ peut sembler artificielle, mais elle joue en fait un rôle dans la détermination de la nature des points critiques. Le prochain théorème explique comment. Avant de l'énoncer, on définit la quantité suivante

$$D(x,y,\lambda) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x,y,\lambda)\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(x,y,\lambda)\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

Théorème (conditions du second ordre).

Si (x_0, y_0, λ_0) *est une solution du système* (1), *alors*

- $D(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ *est un maximum sous contrainte,*
- $D(x_0, y_0, \lambda_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ *est un minimum sous contrainte.*

Exemple 1

On veut résoudre $\begin{cases} \text{extr } f(x,y) = xy \\ g(x,y) = 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Le Lagrangien pour ce problème est

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda(4x^2 + y^2).$$

Le système à résoudre pour trouver les points critiques est donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) & = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) & = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\ g(x,y) & = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 8\lambda x & = 0 \\ x - 2\lambda y & = 0 \\ 4x^2 + y^2 & = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8\lambda x & = y \\ 2\lambda y & = x \\ 4x^2 + y^2 & = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16\lambda^2 y & = y \\ 2\lambda y & = x \\ 4x^2 + y^2 & = 4 \end{cases}$$

La première équation donne donc $y(1 - 16\lambda^2) = 0$. Ainsi, $\lambda = \pm 1/4$ ou $y = 0$.

Exemple 1

On veut résoudre $\left\{ \begin{array}{l} \text{extr } f(x,y) = xy \\ g(x,y) = 4x^2 + y^2 = 4 \end{array} \right.$

Cas $y = 0$: Le système n'a pas de solution dans ce cas car il revient à

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & = 0 \\ x & = 0 \\ x & = \pm 1 \end{array} \right.$$

Cas $\lambda = \pm 1/4$: Le système revient dans ce cas à

$$\left\{ \begin{array}{rl} 16\left(\pm\frac{1}{4}\right)^2 y & = y \\ 2\left(\pm\frac{1}{4}\right) y & = x \\ 4x^2 + y^2 & = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} y & = \pm 2x \\ 4x^2 + (\pm 2x)^2 & = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y & = \pm 2x \\ x & = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

On obtient donc 4 candidats: $\left(\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}\right)$.

Exemple 1

On veut résoudre $\begin{cases} \text{extr } f(x,y) = xy \\ g(x,y) = 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Le tableau suivant permet de déterminer la nature des points critiques

(x_0, y_0)	$\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}\right)$
$f(x_0, y_0)$	1	-1	-1	1

On peut aussi vérifier ces résultats en calculant $D(x, y, \lambda)$. On a

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x,y,\lambda) = -8\lambda, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(x,y,\lambda) = -2\lambda, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) = 1,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 8x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Exemple 1

On veut résoudre $\begin{cases} \text{extr } f(x,y) = xy \\ g(x,y) = 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Ainsi $D(x,y,\lambda) = (-32)(4\lambda x^2 + \lambda y^2 + xy)$. En reprenant la relation $y = 8\lambda x$ et sachant que $\lambda = \pm 1/4$, on déduit que les 4 points à considérer sont

$$\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}, 1/4\right),\ \left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}, 1/4\right),\ \left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}, -1/4\right),\ \text{et}\ \left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}, -1/4\right).$$

Les tableaux suivants permettent de déterminer la nature des points critiques

(x_0, y_0, λ_0)	$\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}, 1/4\right)$	$\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}, 1/4\right)$
$D(x_0, y_0, \lambda_0)$	< 0	< 0

(x_0, y_0, λ_0)	$\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}, -1/4\right)$	$\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}, -1/4\right)$
$D(x_0, y_0, \lambda_0)$	> 0	> 0

Exemple 2

On veut résoudre $\left\{\begin{array}{l} \text{extr } f(x,y) = 100x^{3/4}y^{1/4} \\ g(x,y) = 3x + 5y = 1000 \end{array}\right.$, avec $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Le Lagragien pour ce problème est

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 100x^{3/4}y^{1/4} - \lambda(3x+5y).$$

Le système à résoudre pour trouver les points critiques est donc

$$\left\{\begin{array}{rl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) & = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) & = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\ g(x,y) & = c \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} 75x^{-1/4}y^{1/4} - 3\lambda & = 0 \\ 25x^{3/4}y^{-3/4} - 5\lambda & = 0 \\ 3x + 5y & = 1000 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} \lambda & = 25x^{-1/4}y^{1/4} \\ \lambda & = 5x^{3/4}y^{-3/4} \\ 3x+5y & = 1000 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} \lambda & = 25x^{-1/4}y^{1/4} \\ 5y & = x \\ 3x+5y & = 1000 \end{array}\right.$$

En considérant, les deux dernières équations on obtient $4x = 1000$ et ainsi $x = 250$. Par suite, on a $y = \frac{250}{5} = 50$ et $\lambda = 25\left(\frac{y}{x}\right)^{1/4} = 5^{7/4}$.

Exemple 2

On veut résoudre $\begin{cases} \text{extr } f(x,y) = 100x^{3/4}y^{1/4} \\ g(x,y) = 3x + 5y = 1000 \end{cases}$, avec $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Le point critique obtenu est donc $(x_0, y_0, \lambda_0) = (250, 50, 5^{7/4})$. On détermine sa nature en calculant le signe de $D(x_0, y_0, \lambda_0)$. On a calcule d'abord

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x,y,\lambda) = -\frac{75}{4}x^{-5/4}y^{1/4}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(x,y,\lambda) = -\frac{75}{4}x^{3/4}y^{-7/4},$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) = \frac{75}{4}x^{-1/4}y^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 5.$$

d'où l'on tire

$$D(x,y,\lambda) = -\frac{75}{4}\left(9x^{-5/4}y^{1/4} + 25x^{3/4}y^{-7/4} + 30x^{-1/4}y^{-3/4}\right).$$

Enfin

$$D(x_0,y_0,\lambda_0) = -\frac{75}{4}\underbrace{\left(9x_0^{-5/4}y_0^{1/4} + 25x_0^{3/4}y_0^{-7/4} + 30x_0^{-1/4}y_0^{-3/4}\right)}_{>0} < 0$$

ce qui implique que $(250, 50)$ est un maximum local.

Exemple 3

On veut résoudre $\begin{cases} \text{extr } f(x,y) = x^2 + y^3 \\ g(x,y) = x + 2y = 4 \end{cases}$

Nous avons déjà trouvé les extrema pour ce problème par la méthode de substitution. Vérifions que la méthode de Lagrange donne le même résultat. Le Lagragien pour ce problème est

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^3 - \lambda(x + 2y).$$

Le système à résoudre pour trouver les points critiques est donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) & = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) & = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\ g(x,y) & = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \lambda & = 0 \\ 3y^2 - 2\lambda & = 0 \\ x + 2y & = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda & = 2x \\ \lambda & = \frac{3}{2}y^2 \\ x + 2y & = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda & = 2x \\ x & = \frac{3}{4}y^2 \\ x + 2y & = 4 \end{cases}$$

Les deux dernières équations nous donne $\frac{3}{4}y^2 + 2y - 4 = 0$ qui implique que $y = -4$ ou $y = 4/3$. En utilisant la deuxième équation on détermine les points critiques qui sont $(12, -4)$ et $(4/3, 4/3)$ (comme avec l'autre méthode).