Exercise 1:

1. On considère la fonction $f(x,y) = \sqrt{6x-8y}$. Quelle valeur approximative de $f(2.1,1)$ obtient-on en utilisant l'approximation linéaire $t_{(x_0,y_0)}(2.1,1)$ au point $(x_0,y_0) = (2,1)$?

   ☐ 2.125

   ☐ 2.0125

   ☐ 2.025

   ☐ 2.25

   ☒ Aucune des réponses ci-dessus

2. On considère la fonction $f(x,y) = xy^3 - 2x^3$. Quelle valeur approximative de $f(2.01, 2.98)$ obtient-on en utilisant l'approximation linéaire $t_{(x_0,y_0)}(2.01, 2.98)$ au point $(x_0,y_0) = (2,3)$?

   ☒ 36.95

   ☐ 37.95

   ☐ 39.95

   ☐ 38.95

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

3. Laquelle des expressions suivantes correspond à l'équation du plan tangent $t_{(x_0,y_0)}(x,y)$ de la fonction $f(x,y) = \ln(xy)$ au point $(x_0,y_0) = (\frac{1}{2}, 2)$?

   ☐ $2y - \dfrac{1}{2}x - 2$

   ☐ $2y + \dfrac{1}{2}x - 2$

   ☒ $2x + \dfrac{1}{2}y - 2$

   ☐ $2x - \dfrac{1}{2}y - 2$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

4. Laquelle des expressions suivantes correspond à l'équation du plan tangent $t_{(x_0,y_0)}(x,y)$ de la fonction $f(x,y) = 4x^2 - y^2$ au point $(x_0,y_0) = (5,-8)$?

   ☐ $16x - 40y - 36$

   ☐ $16y + 40x + 36$

   ☐ $40y + 16x - 36$

   ☒ $16y + 40x - 36$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

5. En utilisant la différentielle, approximer la variation de la fonction $f(x,y) = 3x^2 - xy$ lorsque (x,y) varie entre $(1,2)$ et $(1.01, 1.98)$ (poser $(x_0,y_0) = (1,2)$).

   ☐ $\dfrac{6}{10}$

- ☐ 0.006
- ☒ 0.06
- ☐ 0.6
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

6. Approximer la variation de la fonction $f(x) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$ en utilisant la différentielle, lorsque (x, y) varie entre $(-2, 3)$ et $(-2.02, 3.01)$ (poser $(x_0, y_0) = (-2, 3)$).

   - ☒ 7.38
   - ☐ 7.39
   - ☐ 7.4
   - ☐ 7.37
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus

7. On considère la fonction $f(x, y) = 6\sqrt[3]{x^2y}$. Pour lequel (ou lesquels), parmi les points suivant, l'approximation linéaire $t_{x_0,y_0}(x, y)$ au point $(x_0, y_0) = (1000, 125)$ est-elle la meilleure?

   - ☐ $(1000, 126)$
   - ☒ $(1001, 125)$
   - ☐ $(1001, 124.5)$
   - ☐ $(1000.5, 125.5)$
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus

8. On considère la fonction $f(x, y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$. Au point $(x_0, y_0) = (2, -\sqrt{3})$, f admet

   - ☐ un maximum local
   - ☐ un minimum local
   - ☐ un maximum global
   - ☐ un point-selle
   - ☒ Aucune des réponses ci-dessus

9. On considère la fonction $f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{2}y^2 - 12y$. Combien de points critiques possède-t-elle ?

   - ☐ 0
   - ☐ 1
   - ☒ 2
   - ☐ 4
   - ☐ Aucune des réponses ci-dessus

10. On considère la fonction $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4y$. Parmi les points suivants, lesquels sont des points critiques de $f(x, y)$?

   - ☒ $(0, 2)$

- ☐ $(2, 0)$
- ☒ $(3, -2)$
- ☐ $(-3, 2)$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Exercise 2:
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y) = 2x^3 - x^2 + 2xy + 5y^2$$

1. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction f.
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 - 2x + 2y$
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 10y$
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x - 2$
   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 10$
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2$

2. Déterminer le(s) point(s) critique(s) de la fonction f. Conditions du premier ordre:
   $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 - 2x + 2y = 0$
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 10y = 0$
   $x = 0$ ou $x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = -\frac{2}{25}$ respectivement

3. Déterminer si chaque point critique de la fonction f est un maximum local, un minimum local ou un point selle.
   $\Delta(x, y) = (12x - 2)10 - 2^2 = 120x - 20 - 4 = 120x - 24$

   a $\Delta(0, 0) = 24 > 0$ point selle
   b $\Delta(\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}) = \frac{14}{5} > 0$ minimum local

Exercise 3:
Discuter l'existence et la nature des extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y) = \frac{a}{2}(x^2 + y^2) + xy - y + x + 7$$

en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$

On calcule les conditions du 1er ordre:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = ax + a + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = ay + x - 1 = 0 \end{cases}$$

La première équation donne : $y = -ax - 1$ On remplace dans la deuxième : $-a^2x - a + x - 1 = 0$ $\Rightarrow (1 - a^2)x - (1 + a) = 0 \Rightarrow (1 + a)\left[(1 - a)x - 1\right] = 0$ $a = -1$ ou $(1 - a)x = 1$ On peut distinguer 3 cas:

1. $a \neq \pm 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1-a} \Rightarrow y = -\frac{a}{1-a} - 1 = -\frac{1}{1-a}$ On a un point critique : $\left(\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}\right)$
2. $a = 1 \Rightarrow 0x = 1$ pas de solution On n'a pas de point critique, donc pas d'extremum dans ce cas.
3. $a = -1 \Rightarrow y = x - 1$ Tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = x - 1$ est un point critique.

On calcule les conditions du deuxième ordre:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = a$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = a$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$
$\Rightarrow \Delta(x, y) = a^1 - a$ On a :
$\Delta(x, y) < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 1$
$\Delta(x, y) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) < 0 \Leftrightarrow a < -1$
$\Delta(x, y) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0 \Leftrightarrow a > 1$

Comme les signes de dépendent pas de (x, y), on peut examiner la concacité ou la convexité de la fonction f et tirer des conclusions globales sur les extremums.
On peut distinguer 4 cas:

1. $-1 < a < 1 \Rightarrow \Delta(x, y) < 0$
   $\Rightarrow f$ n'est ni concave ni convexe.
   $\Delta\left(\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}\right) < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}\right)$ est un point selle.
2. $a > 1 \Rightarrow \Delta(x, y) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$
   $\Rightarrow f$ strictement convexe
   $\Rightarrow (\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a})$ est un minimum global strict.
3. $a < -1 \Rightarrow \Delta(x, y) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) < 0$
   $\Rightarrow f$ strictement concave
   $\Rightarrow (\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a})$ est un maximum global strict.
4. $a = -1 \Rightarrow \Delta(x, y) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -1 < 0$
   $\Rightarrow f$ concave
   Tout (x, y) tel que $y = x - 1$ est un maximum gloabl.
   (Notons que les conditions du deuxième ordre pour un extremum ne permettent pas de conclure dans ce cas)

Remarque: Si $a = 1$, la fonction f est convexe et n'a aucun extremum.