Mathématiques I

Algèbre linéaire
Systèmes d'équations linéaires

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://math1-gsi.netlify.app`

Systèmes d'équations linéaires: définition

Pour déterminer les extrema d'une fonction $z = f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = c$, nous avons résolu un système d'équations issu du Lagrangien (et de la contrainte):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) &= 0 \\ g(x, y) &= c \end{cases}$$

Nous allons désormais nous intéresser à un type particulier de système

Définition (Système linéaire).

*Un **système d'équations linéaires** $m \times n$ consiste en m équations linéaires à n variables. Un tel système s'écrit en général*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

*où les nombres $a_{i,j}$ et b_j sont des constantes nommées **coefficients** du système et x_i sont les **variables** du système ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$)*

Systèmes d'équations linéaires: exemples

Les systèmes d'équations suivants sont tous linéaires

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 4 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ -10x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_1 + 5x_2 = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -10x + 2y = -1 \end{cases}$$

Les deux premiers systèmes n'ont pas le même nombre d'équations que de variables. On parle de système **sous-déterminé** pour le premier et **sur-déterminé** pour le deuxième.

Les systèmes d'équations suivants ne sont pas linéaires

$$\begin{cases} 3y^2 + 2x + 7z = 4 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ -10x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_1x_2 + 5x_2 = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -10x^3 + 2y = -1 \end{cases}$$

Systèmes d'équations linéaires: ensemble des solutions

Étant donné un système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

une solution est un n-uple $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie toutes les équations du système. Trois cas peuvent se présenter:

- le système possède une **unique solution**
- le système possède une **infinité de solutions**
- le système ne possède **aucune solution**

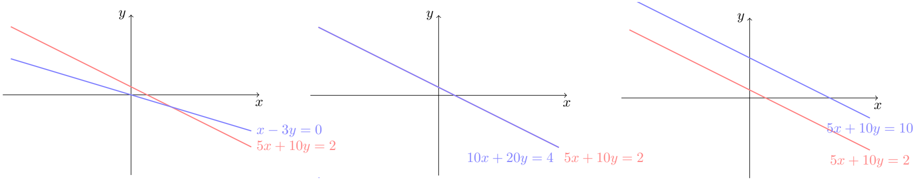
On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions. Résoudre un système d'équation (linéaire ou non) revient à déterminer ce dernier ensemble.

Systèmes d'équations linéaires: ensemble des solutions

On peut géométriquement comprendre pourquoi il n'y a pas d'autre possibilité pour $\mathcal{S}$ dans le cas de système 2×2. Considérons les systèmes suivants

$$\begin{cases} 5x + 10y = 2 \\ \;\; x - \;\; 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \;\; 5x + 10y = 2 \\ 10x + 20y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 10y = 2 \\ 5x + 10y = 10 \end{cases}$$

Chaque équation correspond à l'équation d'une droite. Ainsi, une solution correspond à un point d'intersection des droites, d'où les trois possibilités mentionnées pour S.



Méthodes de résolution: par substitution

Cette méthode consiste à

1) isoler une variable dans l'une des équations pour l'exprimer en fonction des autres,
2) substituer cette dernière expression dans les autres équations pour qu'elles aient une variable de moins,
3) répéter cette procédure jusqu'à avoir une équation d'une variable dont on détermine la solution (s'il y en a une). De là, on détermine la valeur des autres variables.

Illustrons la méthode par l'exemple suivant

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=7 \\ 2y+2=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y+4=7 \\ 2y+2=x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y={}^{3}/_{7} \\ x=2y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y={}^{3}/_{7} \\ x=2\cdot{}^{3}/_{7}+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y={}^{3}/_{7} \\ x={}^{20}/_{7} \end{cases}$$

Il convient de toujours vérifier la solution obtenue

$$2x+3y=2\cdot{}^{20}/_{7}+3\cdot{}^{3}/_{7}={}^{40}/_{7}+{}^{9}/_{7}={}^{49}/_{7}=7$$

$$x-2y={}^{20}/_{7}-2\cdot{}^{3}/_{7}={}^{20}/_{7}-{}^{6}/_{7}={}^{14}/_{7}=2$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S}=\{({}^{20}/_{7},{}^{3}/_{7})\}$.

Méthodes de résolution: par combinaison

Cette méthode repose sur le théorème suivant

Théorème (Opérations élémentaires).

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système linéaire reste inchangé par

1) *l'échange de deux équations dans le système*
2) *la multiplication d'une équation par une constante non nulle*
3) *l'addition d'une équation avec un multiple quelconque d'une autre équation*

La méthode par combinaison consiste à utiliser les points du théorème pour déterminer $\mathcal{S}$. On reprend l'exemple précédent pour l'illustrer.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \overset{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \overset{\ell_2 := \ell_2 - 2\ell_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 7y = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ y = 3/7 \end{cases}$$

On voit dès lors qu'on obtient le même résultat qu'auparavant, i.e.

$$\mathcal{S} = \{(20/7, 3/7)\}.$$

Élimination de Gauss

Dans les exemples qui suivent, nous allons utiliser les opérations élémentaires de sorte que la première variable, disons x_1, n'apparaisse que dans la première équation, la deuxième, disons x_2, que dans la première et la deuxième équation et ainsi de suite.

Ce procédé de résolution porte le nom d'**élimination de Gauss** et le système obtenu à la fin de cette procédure et nommé **système échelonné**. Les systèmes suivants sont échelonnés

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ \quad\;\; 7y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ \qquad\;\; 2x_2 + 9x_3 = 8 \\ \qquad\qquad\quad\; 4x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 12 \\ \qquad\;\; 2x_2 = 3 \\ \qquad\quad\;\; 0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ \qquad\;\; 2x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Il est plus simple de déterminer $\mathcal{S}$ pour un système sous cette forme.

Exemple 1

On considère le système suivant

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$$

et on calcule

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases} \xRightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = -7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\ell_3 := \ell_3 + 3\ell_1} \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = -7 \\ 5x_2 + 11x_3 = -4 \end{cases} \xRightarrow{\ell_3 := \ell_3 - \frac{5}{2}\ell_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = -7 \\ \frac{27}{2}x_3 = \frac{27}{2} \end{cases}$$

Le système est maintenant échelonné et on déduit aisément de ℓ_3 que $x_3 = 1$ puis de ℓ_2 que $x_2 = -3$ et enfin de ℓ_1 que $x_1 = 2$. En vérifiant cette solution, on conclue que

$$\mathcal{S} = \{(2, -3, 1)\}.$$

Exemple 2

On considère le système suivant

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 18 \\ x_1 - 4x_2 = 10 \end{cases}$$

et on calcule

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 18 \\ x_1 - 4x_2 = 10 \end{cases} \overset{\ell_2 := \ell_2 - \ell_1}{\underset{\ell_3 := \ell_3 - \frac{1}{2}\ell_1}{\Longrightarrow}} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ \qquad - 7x_2 = 14 \\ \qquad - 6x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\overset{\ell_2 := \ell_2 \div (-7)}{\underset{\ell_3 := \ell_3 \div (-6)}{\Longrightarrow}} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ \qquad\quad x_2 = -2 \\ \qquad\quad x_2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \overset{\ell_3 := \ell_3 - \ell_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ \qquad\quad x_2 = -2 \\ \qquad\quad\; 0 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Le système est échelonné et mène à une contradiction. Il ne possède donc pas de solution. Dans ce cas, on écrit $\mathcal{S} = \emptyset$, où $\emptyset$ désigne l'ensemble vide.

Exemple 3

On considère le système suivant

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + {}} 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

et on calcule

$$\begin{cases} 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \xRightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\ell_3 := \ell_3 - 2\ell_1} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ -5x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases} \xRightarrow{\ell_3 := \ell_3 + \ell_2} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné et on peut déduire les solutions. En effet, de ℓ_2 on tire que $x_3 = \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}$, puis par substitution, on obtient de ℓ_1 que $x_1 = -\frac{4}{3}x_2 - \frac{11}{3}$. Après vérification, on conclut que

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{11}{3} - \frac{4}{3}s,\ s,\ \frac{5}{3}s - \frac{1}{3} \right) \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple 4

On considère le système suivant

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

et on calcule

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases} \xrightarrow{\ell_2 := \ell_2 - 2\ell_1} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné et les solutions se déduise de ℓ_1 d'où l'on tire que $x_3 = x_1 + 3x_2 - 4$. Après vérification, on conclut que

$$\mathcal{S} = \left\{ (s_1,\, s_2,\, s_1 + 3s_2 - 4) \;\middle|\; s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$