Mathématiques I

Fonctions d'une variable (réelle)
Définitions et exemples

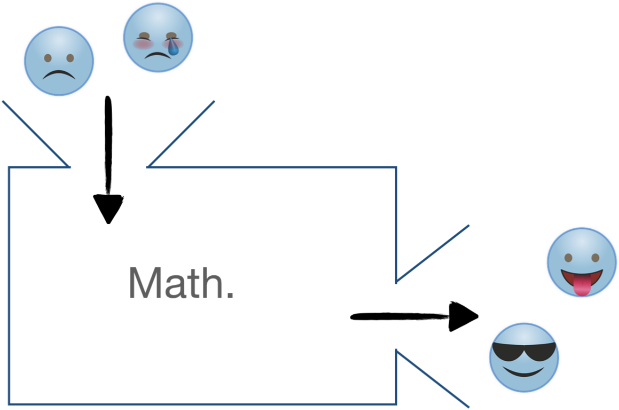
Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://math1-gsi.netlify.app`

Licence: CC BY-NC-SA 4.0

Fonctions - Idée de base

La notion de **fonction** peut souvent s'appliquer lorsque qu'un objet (mathématique ou non) est en **relation** avec un autre.



Fonctions d'une variable - définition

Dans de nombreux problèmes, on s'intéresse aux relations entre des grandeurs ou quantités qui varient. Ces grandeurs ou quantités sont nommés **variables**.

Lorsque l'une des variables **dépend** de l'autre, on dit que la première (généralement désignée par y) est **fonction** de l'autre (généralement désignée par x). On formalise cette notion comme suit

Définition - fonction

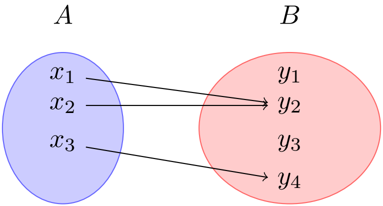
Une **fonction** f d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ vers un ensemble $B \subset \mathbb{R}$ est une correspondance qui assigne à chaque élément $x \in A$ un **unique** élément $y \in B$. Une fonction est donc la donnée

1) d'un **ensemble de départ** A, ses éléments sont **les préimages de f**,
2) d'un **ensemble d'arrivée** B, ses éléments sont **les images de f**,
3) d'une formule qui assigne à chaque élément de A un **unique** élément de B.

Fonctions d'une variable - définition

Définition - fonction

Une **fonction** f d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ vers un ensemble $B \subset \mathbb{R}$ est une correspondance qui assigne à chaque élément $x \in A$ un **unique** élément $y \in B$.



Notation

On écrit

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

On dit que *y est* **l'***image de x* et que *x est* **une** *préimage de y*.

Fonctions d'une variable - définition

Définition - fonction

Une **fonction** f d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ vers un ensemble $B \subset \mathbb{R}$ est une correspondance qui assigne à chaque élément $x \in A$ un **unique** élément $y \in B$.

Formellement, les deux fonctions suivantes **ne sont pas les mêmes**, bien que la formule déterminant les images soit la même.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) = 2x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto y = f(x) = 2x \end{aligned}$$

Fonctions d'une variable - exemples

Définition - fonction

Une **fonction** f d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ vers un ensemble $B \subset \mathbb{R}$ est une correspondance qui assigne à chaque élément $x \in A$ un **unique** élément $y \in B$.

Exemples:

- Prix en fonction du nombre de litres d'essence consommée

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & y = f(x) = ax \end{array}$$

  où $a \in \mathbb{R}_+$ est une constante correspondant au prix du litre.

- Aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$$

- Choisir un nombre, lui ajouter 4 et prendre le cube du résultat

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) = (x+4)^3 \end{array}$$

Fonctions d'une variable - exemples

Définition - fonction

Une **fonction** f d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ vers un ensemble $B \subset \mathbb{R}$ est une correspondance qui assigne à chaque élément $x \in A$ un **unique** élément $y \in B$.

Exemples:

- Prix en fonction du nombre de litres d'essence consommée

$$y = f(x) = ax,$$

  où $a \in \mathbb{R}$ correspond au prix au litre.

- Aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté

$$y = f(x) = x^2.$$

- Choisir un nombre, lui soustraire 4 et déterminer le(s) nombre(s) dont le carré correspond au résultat de la soustraction. Cette relation peut s'écrire

$$y^2 = x - 4,$$

  mais elle **ne correspond pas à une fonction**.

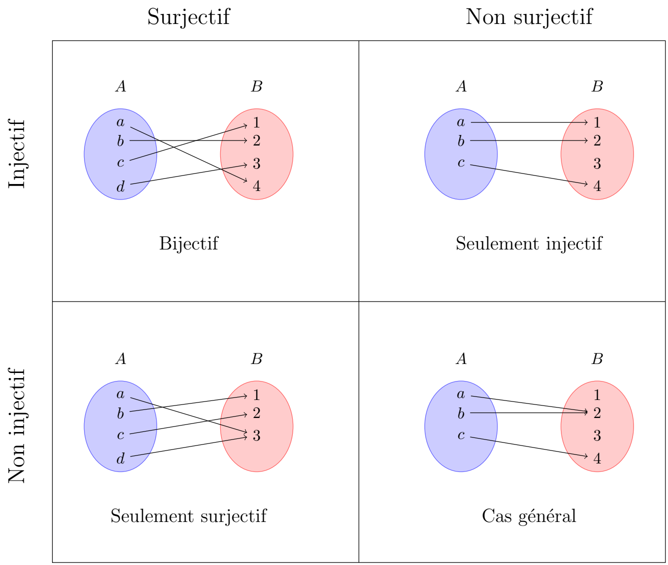
Domaine de définition

Il est courant que seule la relation $y = f(x)$ soit donnée. Dans ce cas, l'ensemble de départ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la formule $f(x)$ est définie. Cet ensemble se nomme le **domaine de définition** de f et se note $\mathcal{D}_f$.

Exemples: Le domaine de définition de

- $y = f(x) = \pi x^2$ est $\mathbb{R}$, i.e, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$,
- $y = f(x) = \frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$, i.e, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$,
- $y = f(x) = \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$, i.e, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$,
- $y = f(x) = \ln(x)$ est $\mathbb{R}_+^*$, i.e, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

Injectivité, surjectivité & bijectivité



Injectivité, surjectivité & bijectivité

Definition - injectivité, surjectivité & bijectivité

Une fonction $f : A \to B$, est dite

1) **injective** si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{ on a } [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2],$$

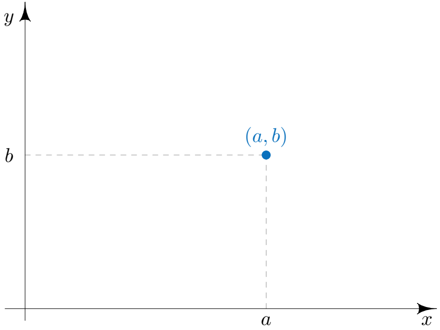
2) **surjective** si et seulement si

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x),$$

3) **bijective** si et seulement si elle est injective et surjective.

Représentation graphique d'une fonction - le plan des xy

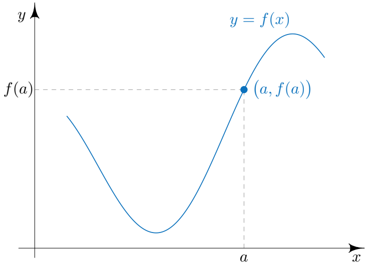
Un système de coordonnées rectangulaire permet de faire correspondre à un couple de nombres (a, b) un point du plan. Le plan s'appelle le plan de coordonnées ou **le plan des xy**



L'axe horizontal et **l'axe vertical** se nomment respectivement **l'axe des x** et **l'axe des y**.

Représentation graphique d'une fonction

Par définition, le **graphique d'une fonction** $f : A \to B$ est le graphique de l'équation $y = f(x)$. Il correspond à une courbe dans le plan xy. L'ensemble de départ $A \subset \mathbb{R}$ se trouve sur l'axe des x et l'ensemble d'arrivée $B \subset \mathbb{R}$ se trouve sur l'axe des y.



Important!!

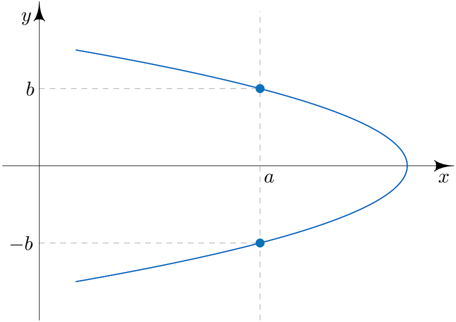
Un point (a, b) du plan est sur la courbe $\Leftrightarrow$ l'égalité $b = f(a)$ est satisfaite.

Notation

Le symbole "$\Leftrightarrow$" ci-dessus se lit "si et seulement si". C'est le symbole de l'équivalence.

Représentation graphique d'une fonction

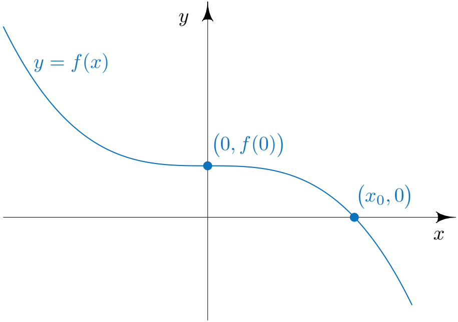
Il est important de remarquer que, puisque pour chaque valeur $x \in A$ ne correspond qu'une seule image $y \in B$, une droite verticale ne coupe jamais le graphique d'une fonction en plus d'un point.



Les zéros d'une fonction

Définition

On dit que $x \in A$ est un **zéro** de f si et seulement si $f(x) = 0$. En d'autres termes, un zéro de f correspond à une solution de l'équation $f(x) = 0$.

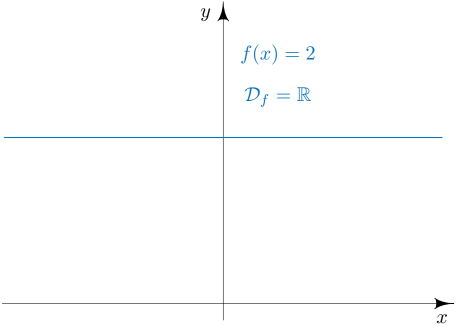


Sur le graphe de f, les zéros correspondent aux points d'intersection de la courbe avec l'axe des x. L'intersection de la courbe avec l'axe des y a lieu en $f(0)$ et se nomme l'ordonnée à l'origine.

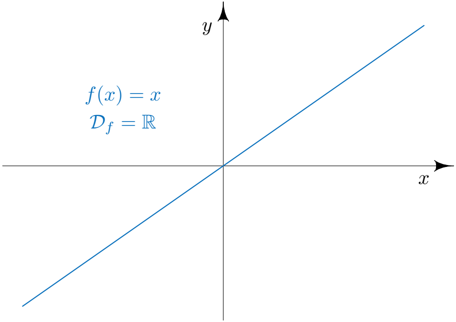
Graphes de fonctions usuelles

Voici les graphiques de quelques fonctions courantes.

fonction constante

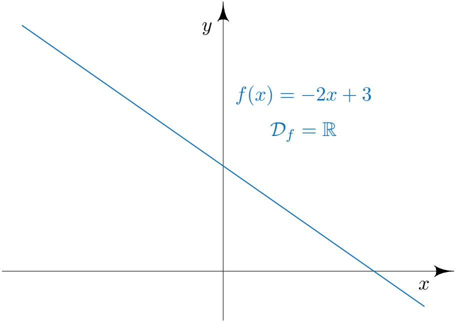


Fonction identité

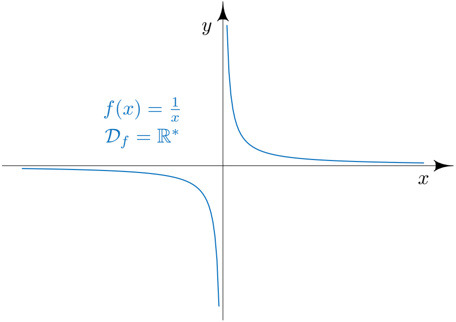


Graphes de fonctions usuelles

Fonction affine



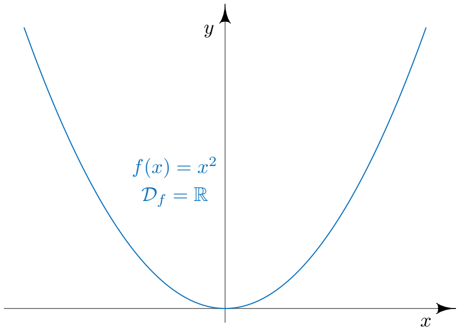
Fonction inverse



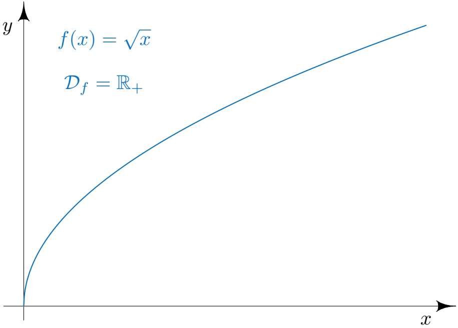
(du type $f(x) = ax + b$)

Graphes de fonctions usuelles

Fonction carré

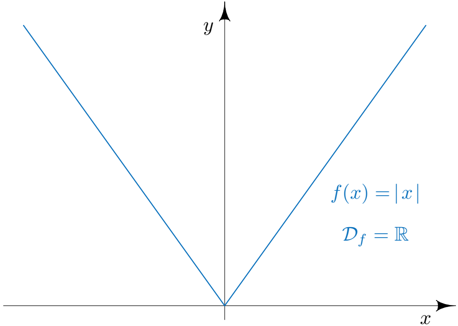


Fonction racine carrée

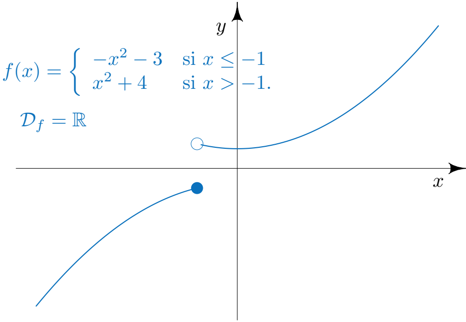


Graphes de fonctions usuelles

Fonction valeur absolue

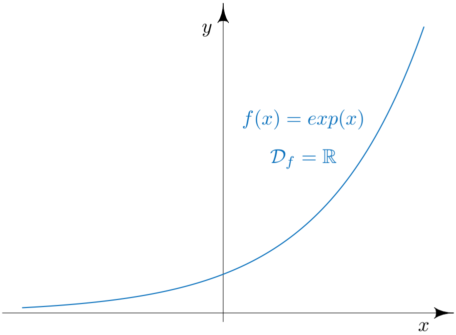


Fonction définie par morceaux



Graphes de fonctions usuelles

Fonction exponentielle



Fonction logarithme (naturel)