Exercice 1

1. Laquelle des expressions suivantes correspond à l'équation de la tangente $t_{x_0}(x)$ de la fonction $f(x) = (1+x)^{-1}$ au point $x_0 = 0$?

   ☐ $-x$

   ☐ $1 + x$

   ☒ $1 - x$

   ☐ $x - 1$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

2. Laquelle des expressions suivantes correspond à l'équation de la tangente $t_{x_0}(x)$ de la fonction $f(x) = (1+x)^5$ au point $x_0 = -2$?

   ☐ $-2x$

   ☒ $5x + 9$

   ☐ $5x - 11$

   ☐ $5x - 9$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

3. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$. Quelle valeur approximative de $f(3.1)$ obtient-on en utilisant l'approximation linéaire $t_{x_0}(3.1)$ au point $x_0 = 3$?

   ☐ 2.125

   ☐ 2.0125

   ☒ 2.025

   ☐ 2.25

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

4. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{6x-8}$. Quelle valeur approximative de $f(1.9)$ obtient-on en utilisant l'approximation linéaire $t_{x_0}(1.9)$ au point $x_0 = 2$?

   ☐ 1.975

   ☐ 1.844

   ☐ 1.75

   ☒ 1.85

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

5. Quel est le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = e^{3x}$ au voisinage de $x_0 = 0$?

   ☐ $1 + 6x + \frac{3x^2}{2}$

   ☒ $1 + 3x + \frac{9x^2}{2}$

   ☐ $1 + 3x + 9x^2$

   ☒ $1 + 3x + \frac{9}{2}x^2$

   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

6. Quel est le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = e^{x+1}$ au voisinage de $x_0 = -1$?

   ☐ $1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$
   ☒ $1 + (x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2$
   ☐ $1 + (1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2$
   ☒ $1 + (x+1) + \dfrac{x^2+2x+1}{2}$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

7. En utilisant la différentielle, approximer la variation de la fonction $f(x) = \ln(x)$ lorsque x varie entre 1 et 1.1 (poser $x_0 = 1$).

   ☒ $\dfrac{1}{10}$
   ☐ 0.001
   ☐ $\ln(0.1)$
   ☒ 0.1
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

8. En utilisant la différentielle, approximer la variation de la fonction $f(x) = x^{20}$ lorsque x varie entre 1 et 1.01 (poser $x_0 = 1$).

   ☐ 0.02
   ☐ 0.002
   ☐ 2
   ☒ 0.2
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

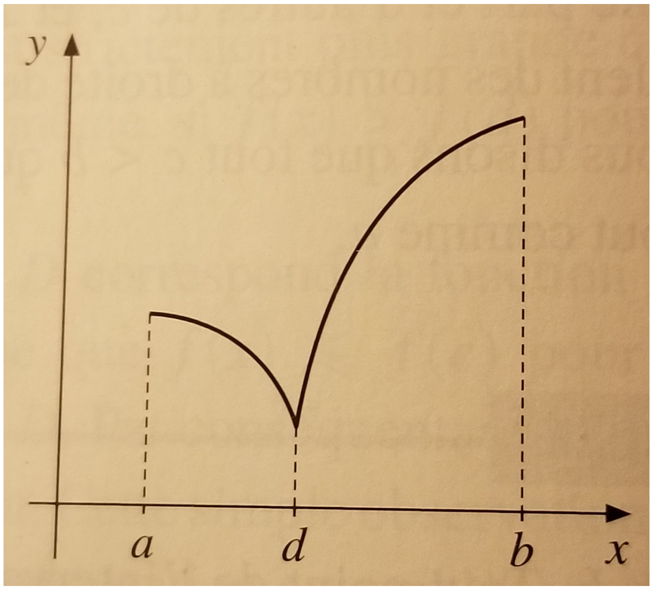
9. On considère la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et l'approximation linéaire $t_{x_0}(x)$ en un point x_0. Quelle valeur de x_0 donne la meilleure approximation $t_{x_0}(400)$ de $f(400)$?

   ☒ $x_0 = 7^3$
   ☐ $x_0 = 8^3$
   ☐ $x_0 = 9^3$
   ☐ $x_0 = 10^3$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus

10. Quel argument garantit que la fonction $f(x) = |x^2 + x - 2|$ définie sur $[-3, 3]$ atteint son minimum?

    ☐ cette fonction possède un point critique dans l'intervalle $[-3, 3]$,
    ☒ cette fonction est continue et définie sur un compact,
    ☐ ça paraît assez clair, non?
    ☐ Aucune des réponses ci-dessus

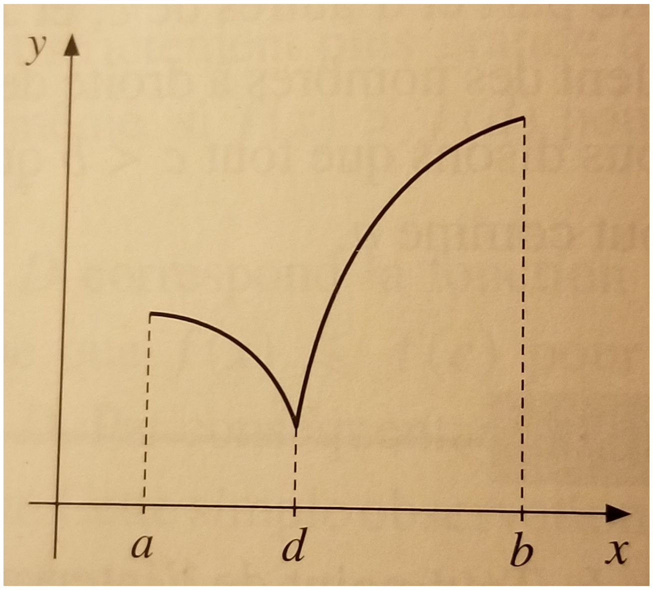
11. Le minimum du graphe suivant est-il un point critique ?



☒ Oui

☐ Non

12. En supposant que le graphe ci-dessous correspond à une fonction définie uniquement sur l'intervalle $]\,a, b\,[$. Peut-on conclure que cette fonction atteint son maximum?



☐ Oui

☒ Non

13. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1$. Combien de points critiques possède-t-elle ?

    ☐ 0
    ☐ 1
    ☐ 2
    ☐ 4
    ☒ Aucune des réponses ci-dessus

14. Les points critiques de $f(x) = 2x^3 - 24x + 5$ définis sur $]-5, 5[$ sont

    ☐ -2, 0 et 2
    ☐ 1, 2 et 3
    ☒ -2 et 2
    ☐ -5 et 5
    ☐ Aucune des réponses ci-dessus

15. On considère la fonction $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ définie sur $[-5, 5]$. Cochez ce qui est vrai:

    ☐ -1 est minimum local
    ☒ 5 est un maximum global
    ☐ 1 est un maximum local
    ☐ -5 est un minimum global
    ☐ Aucune des réponses ci-dessus

Exercice 2

Calculer le développement de Taylor à l'ordre 4 au voisinage de $x_0 = 0$ des fonctions suivantes:

1. $f(x) = 6x^3 + 2x - 4$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

1. Le développement de Taylor au voisinage de $x_0 = 0$ est aussi appelé développement de Maclaurin.

$$\begin{array}{llll} f'(x) = 18x^2 + 2 & f''(x) = 36x & f'''(x) = 36 & f''''(x) = 0 \\ f'(0) = 2 & f''(0) = 0 & f'''(0) = 36 & f''''(0) = 0 \end{array}$$

Nous avons: $f(x) \simeq f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2} + f'''(0) \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} + f''''(0) \cdot \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -4 + 2x + 0 + 6x^3 + 0$

2. $$\begin{array}{llll} f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} & f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} & f''(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4} & f''(x) = \dfrac{24}{(1+x)^5} \\ f'(0) = -1 & f''(0) = 2 & f'''(0) = -6 & f''''(0) = 24 \end{array}$$

Nous avons: $f(x) \simeq f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2} + f'''(0) \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} + f''''(0) \cdot \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$

Exercice 3

Les fonctions suivantes admettent-elles des extrema locaux ? Si oui, quels sont-ils ? Lesquels sont des extrema globaux ?

1. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. $g(x) = x^2 - 2x - 3$ définie sur l'intervalle $[-2, 3]$.
3. $h(x) = |x^2 - 1|$ définie sur l'intervalle $[-2, 2]$.
4. $k(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 20x + 2$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. $f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$ avec $x \neq 0$. Non. Il n'y a pas d'extrema locaux.
2. $x = -2, 3$ sont extrema locaux.

   $g'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ est un extremum local avec $g''(1) = 2 > 0$

   1 est un minimum global.

   $g(-2) = 5$ et $g(3) = 0 \Rightarrow$ -2 est un maximum global
3. La fonction $h(x)$ est continue sur $[-2, 3]$.

   $$h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ -2x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

   $h'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ avec $h''(x) = -2 < 0$. -2 est un maximum local

   $\lim_{x \to -1^-} h'(x) = -2$ et $\lim_{x \to -1^+} h'(x) = 2 \Rightarrow x = -1$ est un minimum local

   $\lim_{x \to 1^-} h'(x) = -2$ et $\lim_{x \to 1^+} h'(x) = 2 \Rightarrow x = 1$ est un minimum local

   -2, -1, 0, 1, 2 sont extrema locaux.

   $h(-2) = h(2) = 3$, $h(0) = 1$ et $h(-1) = h(1) = 0$

   -2, 2 sont maxima globaux. -1, 1 sont minima globaux
4. $k'(x) = -x^2 + 8x + 20 = 0 \Rightarrow x = -2(\text{exclu}), 10$ (x$\in [\, 0, +\infty \,[$) avec $k''(10) = -12 < 0$

   0, 10 sont extrema locaux. 10 est un maximum globaux