

Mathématiques I

Limite de fonctions

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

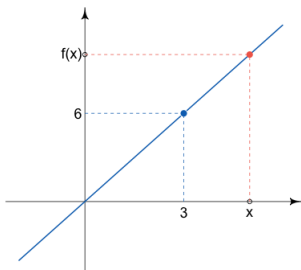
Matériel disponible en ligne: <https://math1-gsi.netlify.app>

Licence: CC BY-NC-SA 4.0



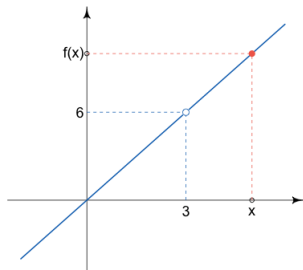
L'idée de base!

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$



Lorsque x s'approche de 3, $f_1(x)$ s'approche de $6 = f_1(3)$.

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} \setminus \{3\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x^2 - 6x}{x - 3} \end{aligned}$$



Lorsque x s'approche de 3, $f_2(x)$ s'approche de $6 \neq f_2(3)$.

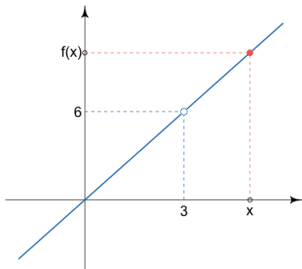
$f_2(3)$ n'est d'ailleurs pas défini!!

Notation

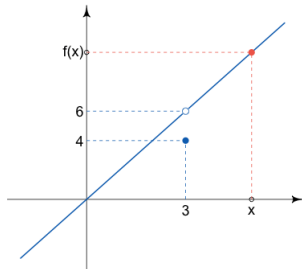
Dans les deux cas ci-dessus, on écrit $\lim_{x \rightarrow 3} f_1(x) = 6$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f_2(x) = 6$.

L'idée de base!

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} \setminus \{3\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x^2 - 6x}{x - 3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$



On a clairement

$$\lim_{x \rightarrow 3} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f_3(x) = 6.$$

Voisinage

Important!!!

En général, **lorsqu'on écrit** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, où $a \in \mathbb{R}$, **il ne s'agit pas de déterminer** $f(a)$ (qui existe ou pas), mais plutôt de savoir si les valeurs $f(x)$ s'approche d'un nombre (disons $L \in \mathbb{R}$) à mesure que x s'approche de a .

En d'autres termes, on s'intéresse aux valeurs $f(x)$ pour x dans un **voisinage** de a .

Définition (Voisinage)

Un **voisinage** de $a \in \mathbb{R}$ est un intervalle du type $]a - \delta, a + \delta[$, où $\delta > 0$. On notera V_a un tel ensemble.

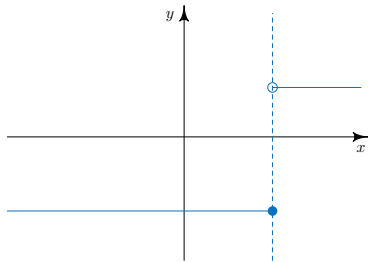
Dans le tableau ci-dessous, les valeurs des fonctions f_1, f_2 et f_3 au voisinage de 3 avec $\delta > 0.1$.

x	2.9	2.99	3	3.01	3.1
$f_1(x) = 2x$	5.8	5.98	6	6.02	6.2
$f_2(x)$	5.8	5.98	///	6.02	6.2
$f_3(x)$	5.8	5.98	4	6.02	6.2

Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$ une valeur donnée. En général, le comportement de f peut différer selon que la variable x s'approche de a par la gauche ou par la droite, comme dans l'exemple ci-dessous

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



Notation

Dans le cas ci-dessus, on écrit $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$, **mais**

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ **n'existe pas**.

Définition formelle

Définition (formelle)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ **tend vers** $L \in \mathbb{R}$ **lorsque** x **tend vers** a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

On peut aussi adapter cette définition au cas où la limite est $+\infty$ (ou $-\infty$), et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Ces définitions ne sont pas aisées à manipuler pour calculer des limites.

Il nous faut donc encore une fois des théorèmes pour nous aider à le faire.



Théorème (Identification des limites)

Soient f, g deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$. Supposons

- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \in \mathbb{R}$
- $\exists V_a$ tel que $\forall x \in V_a \setminus \{a\}, f(x) = g(x)$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Ce théorème confirme l'égalité

$$\lim_{x \rightarrow 3} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f_3(x) = 6,$$

vu précédemment et justifie la **technique de factorisation** souvent utile pour calculer des limites.

Exemple

On considère $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

On remarque que $\forall x \in \mathcal{D}_f$ on a

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6} = \frac{x^2(x - 2)}{3(x - 2)} \stackrel{x \neq 2}{=} \frac{x^2 \cancel{(x - 2)}}{3 \cancel{(x - 2)}} = \frac{x^2}{3} = g(x)$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{4}{3}^1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{3},$$

par le théorème d'identification des limites.

¹par continuité, qu'on abordera au prochain cours

Limite à ∞

On peut aussi s'intéresser au comportement d'une fonction f lorsque x tend vers $\pm\infty$. Formellement, on écrit

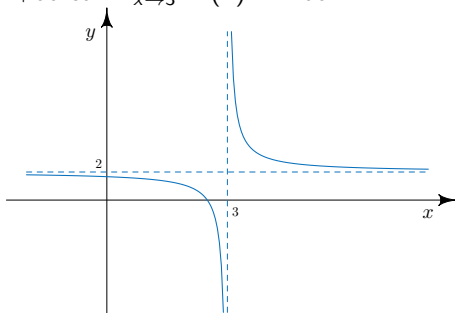
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall N > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } x > M \Rightarrow f(x) > N$$

Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. On a aussi $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$.



Technique de factorisation



Le théorème d'identification s'adapte au cas où l'on prend la limite en ∞ .

Théorème (Identification des limites)

Soient f, g deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$. Supposons

- $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$ ou $\pm\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ **suffisamment grand**, $f(x) = g(x)$

alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

Exemple:

On considère $f(x) = \frac{3x^2+2}{4x^2+10x-6}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1/2\}$. On remarque que $\forall x > 1/2$ on a

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{4x^2 + 10x - 6} = \frac{\cancel{x^2}(3 + 2/x^2)}{\cancel{x^2}(4 + 10/x - 6/x^2)} = \frac{3 + 2/x^2}{4 + 10/x - 6/x^2} = g(x)$$

On conclut grâce aux propriétés des limites que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{3+0}{4+0-0} = \frac{3}{4}$.

Propriétés des limites



Soient deux fonctions f et g dont on connaît la limite pour $x \rightarrow a, +\infty, -\infty$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors on a

- limite d'une somme

f	L_1	L_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	L_2	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$L_1 + L_2$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indét.

- limite d'un produit

f	L_1	$L_1 > 0$	$L_1 < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
g	L_2	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$f \cdot g$	$L_1 \cdot L_2$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	indét.	$\pm\infty$	$\mp\infty$

- limite d'un quotient

f	L_1	$L_1 \neq 0$	0	L_1	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
g	$L_2 \neq 0$	0	0	$\pm\infty$	$L_2 > 0$	$L_2 < 0$	0	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\frac{f}{g}$	$\frac{L_1}{L_2}$	∞^2	indét.	0	$\pm\infty$	$\mp\infty$	∞^3	indét.	indét.

²attention au signe de $g(x)$ au voisinage de a

³idem