

Mathématiques I

Séries: Exemples

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: <https://math1-gsi.netlify.app>

Licence: CC BY-NC-SA 4.0



Exemple 1

Étudions la convergence de $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{k}-1}$.

On sait que la série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente grâce au théorème du cours. Il en va donc de même pour cette même série amputée de son premier terme $\frac{1}{\sqrt{1}}$, autrement dit,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty.$$

Or, $\forall k \geq 2$, on a $\frac{1}{\sqrt{k}-1} > \frac{1}{\sqrt{k}}$ et donc $\frac{3}{\sqrt{k}-1} > \frac{1}{\sqrt{k}}$. Le **théorème de comparaison** nous permet alors de conclure que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{k}-1} = +\infty.$$

Exemple 2

Étudions la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{7}{k(k+1)} + \frac{2}{3^{k-1}} \right]$.

Si on parvient à montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{k(k+1)} < \infty$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} < \infty$, on pourra alors utiliser le théorème sur les opérations sur les séries convergentes pour déterminer la somme voulue.

- 1) On calcul d'abord $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}}$. On remarque qu'il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ multipliée par la constante $c = 2$. On calcul alors (puisque $|\frac{1}{3}| < 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{3^{k-1}} \stackrel{\text{indices}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{3^k} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3. \end{aligned}$$

Exemple 2

2) On calcul maintenant $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{k(k+1)}$. On remarque qu'il suffit de montrer

que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} < \infty$ puisque la série considérée n'en est qu'un multiple (avec $c = 7$). On remarque encore que $\forall k \geq 1$ on a

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

de sorte que $\forall n \geq 2$, la suite des sommes partielles (s_n) est donné par la formule

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \\ &= \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \cdots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Exemple 2

Dès lors, on a, grâce au [théorème sur les propriétés des limites](#) de suites convergentes,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Ainsi, par le [théorème sur les opérations sur les séries convergentes](#), on conclut que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} 7 \cdot \frac{1}{k(k+1)} = 7 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 7.$$

Enfin, par le [théorème sur les opérations sur les séries convergentes](#) encore, on obtient finalement,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{7}{k(k+1)} + \frac{2}{3^{k-1}} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = 7 + 3 = 10.$$

¹On peut utiliser le thm du sandwich pour montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ puisque $\forall n \geq 1$ on a $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$