Mathématiques I

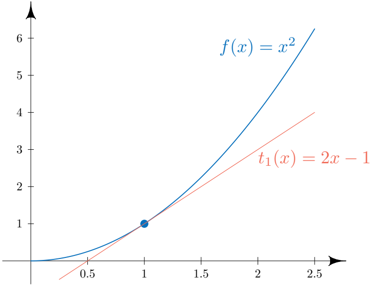
Application des dérivées partielles
Approximation linéaire de fonctions de deux variables

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://math1-gsi.netlify.app`

Approximation linéaire de $f(x, y)$

Nous avons vu comment approximer les fonctions d'une variable dérivables au voisinage d'un point.



Soit $f : A \to B$ une fonction, où $A, B \subset \mathbb{R}$, dérivable en $x_0 \in A$, alors, on avait

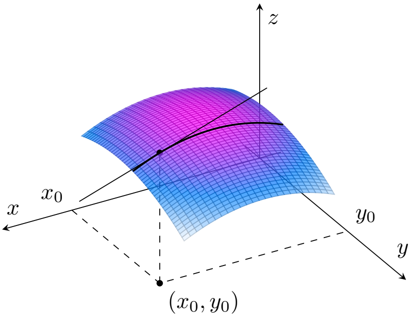
$$f(x) \approx t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

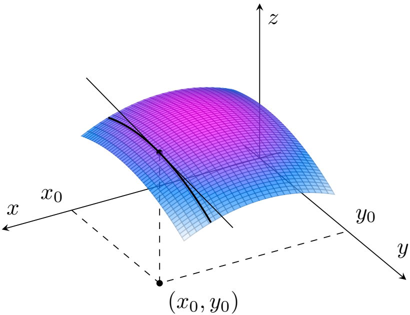
ou encore

$$f(x_0 + h) \approx t_{x_0}(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h, \qquad \text{pour } h \text{ petit.}$$

Approximation linéaire de $f(x, y)$

Le même raisonnement peut être fait pour une fonction de deux variables $f(x, y)$ dérivable en (x_0, y_0), en utilisant les dérivées partielles.





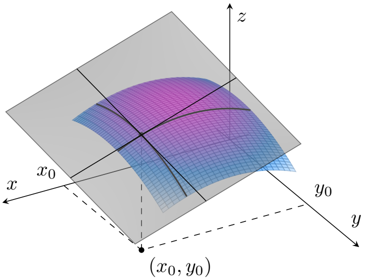
Autrement dit, pour de petites valeurs (accroissements) $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x_0 + h_1, y_0) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 = t_{x_0}(x_0 + h_1)$$

$$f(x_0, y_0 + h_2) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = t_{y_0}(y_0 + h_2)$$

Approximation linéaire de $f(x, y)$: l'intuition

Une droite tangente à la courbe d'une fonction d'une variable devrait correspondre à **un plan tangent** à la surface d'une fonction de deux variables.



Géométriquement, il semble que ce plan soit "issu" des tangentes t_{x_0} et t_{y_0}. On peut aussi remarquer, en supposant que les dérivées partielles sont continues ($f(x, y)$ est donc dérivable), que, pour $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ petits,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &\approx f(x_0, y_0 + h_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + h_2)h_1 \\ &\approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1. \end{aligned}$$

Approximation linéaire de $f(x, y)$

De cette intuition, on tire la définition suivante.

Définition (Approximation linéaire).

Soit $f(x, y)$ *une fonction continuement dérivable*[a] *en* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, alors la fonction* $t_{(x_0,y_0)}(x, y)$ *définie par*

$$t_{(x_0,y_0)}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est ***l'approximation linéaire de*** $f(x, y)$ *au voisinage de* (x_0, y_0)*. En particulier, si* $x \approx x_0$ *et* $y \approx y_0$ *alors*

$$f(x, y) \approx t_{(x_0,y_0)}(x, y).$$

[a] i.e, dont les dérivées partielles existent et sont continues.

Approximation linéaire de $f(x, y)$: exemple

Donner une approximation de $f(-0.98, 2.98)$, où $f(x, y) = 3x^2 + xy - y^2$.

On calcule d'abord les dérivées partielles en x et en y de $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 2y.$$

Comme $(-0.98, 2.98)$ est "proche" de $(-1, 3)$, on les évalue ensuite au point $(x_0, y_0) = (-1, 3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 3) = 6 \cdot (-1) + 3 = -3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 3) = -1 - 2 \cdot 3 = -7,$$

et on calcule aussi $f(-1, 3) = -9$ de sorte que l'on obtient

$$\begin{aligned} t_{(-1,3)}(-0.98, 2.98) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= -9 + (-3) \cdot \underbrace{(-0.98 - (-1))}_{0.02} + (-7) \cdot (\underbrace{2.98 - 3}_{-0.02}) = -8.92. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(-0.98, 2.98) \approx -8.92$. La valeur exacte de $f(-0.98, 2.98)$ est -8.9196.

Approximation linéaire de $f(x, y)$: le plan tangent

L'équation $z = t_{(x_0,y_0)}(x, y)$ est celle d'un plan dans $\mathbb{R}^3$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
t_{(x_0,y_0)}(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{a} x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{b} y + \underbrace{f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y_0}_{c} \\
&= ax + by + c.
\end{aligned}$$

L'équation $z = t_{(x_0,y_0)}(x, y)$ correspond en fait à celle du **plan tangent à la surface** de $f(x_0, y_0)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Dans l'exemple précédent, on obtient

$$t_{(-1,3)}(x, y) = -3x - 7y + 9.$$

Similairement au cas en une variable, on a

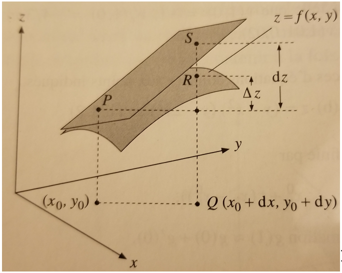
1) $t_{(x_0,y_0)}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$,
2) $\dfrac{\partial t_{(x_0,y_0)}}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial t_{(x_0,y_0)}}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Accroissement et différentielle

Partant de $t_{(x_0,y_0)}(x,y)$, on définit **la différentielle**

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{dy},$$

qui permet d'estimer l'accroissement $\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0)$. L'idée est la même que pour les fonctions d'une variable comme illustrer ci-dessous.



[1]

Si dx et dy sont petits, alors $\Delta z \approx dz$.

[1]image tirée du livre "Sydsaeter et al., Mathématiques pour l'économie."

Accroissements et différentielle: exemple

On considère $f(x,y) = xy$. Quelle est sa différentielle au point $(x_0, y_0) = (2,3)$?

On calcul

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x,$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)(y-3) \\ &= 3(x-2) + 2(y-3) = 3x + 2y - 12. \end{aligned}$$

Ainsi, la différentielle de $f(x,y) = xy$ en $(2,3)$ est

$$dz = 3x + 2y - 12.$$