Mathématiques I

Systèmes linéaires $n \times n$ & matrices inverses

Dr. Mucyo Karemera (enseignant), Prof. Stéphane Guerrier

Matériel disponible en ligne: `https://math1-gsi.netlify.app`

Inverse de matrice

Nous considérerons dans la suite des systèmes linéaires $n \times n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Si $n = 1$, i.e. si $\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, alors $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'est qu'une équation d'une variable que l'on peut résoudre, si $\mathbf{A} \neq 0$ par

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

L'écriture matricielle des systèmes linéaires laisse imaginer que la notion d'inverse peut se généraliser aux matrices. C'est le cas pour les matrices carrées $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

La condition d'inversibilité d'une matrice carrée est la suivante

Théorème.

Soit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ un système linéaire $n \times n$. La solution est unique $\iff$ $\mathbf{A}^{-1}$ existe.

On dit que $\mathbf{A}$ est **inversible** quand $\mathbf{A}^{-1}$ existe.

Comment déterminer $\mathbf{A}^{-1}$?

Le théorème précédant est un résultat d'existence. Reste donc à savoir comment déterminer $\mathbf{A}^{-1}$ lorsque son existence est assurée.

On reprend l'exemple suivant, pour lequel il n'y avait qu'une solution

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{array}\right. \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & -10 \end{array}\right)$$

Après une série d'opération élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée, nous étions parvenu à la solution

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \text{op. élém. sur lignes} \quad \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{(\mathbf{I}|\textit{solution})}$$

Comment déterminer $\mathbf{A}^{-1}$?

La matrice $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ est nommée la **matrice identité** et a la particularité suivante: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Comme on sait que $\mathbf{A}^{-1}$ existe, on peut écrire

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b},$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}}_{\textit{solution}}.$$

Ceci indique que $\mathbf{A}^{-1}$ peut être déterminé en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$. Plus précisiement,

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) \quad \stackrel{\text{op. élém.}}{\Longrightarrow} \quad (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$$

Remarque.

Ce dernier calcul peut être fait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour autant que le système

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

de taille $n \times n$, possède une unique solution.

Comment déterminer $\mathbf{A}^{-1}$?

On reprend l'exemple où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et on calcule son inverse

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow[\ell_3 := \ell_3 + 3\ell_1]{\ell_2 := \frac{1}{2}\ell_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\ell_3 := \ell_3 - 5\ell_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27/2 & -5/2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{\ell_3 := \frac{2}{27}\ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/27 & 2/9 & 2/27 \end{array}\right) \xRightarrow[\ell_2 := \ell_2 + \frac{1}{2}\ell_3]{\ell_1 := \ell_1 - 3\ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5/9 & 1/3 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 11/27 & 1/9 & 1/27 \\ 0 & 0 & 1 & -5/27 & 2/9 & 2/27 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{\ell_1 := \ell_1 - \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/27 & 2/9 & -7/27 \\ 0 & 1 & 0 & 11/27 & 1/9 & 1/27 \\ 0 & 0 & 1 & -5/27 & 2/9 & 2/27 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/27 & 2/9 & -7/27 \\ 11/27 & 1/9 & 1/27 \\ -5/27 & 2/9 & 2/27 \end{pmatrix}.$$

Comment déterminer $\mathbf{A}^{-1}$?

On vérifie qu'on a bien trouvé $\mathbf{A}^{-1}$ en calculant $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ qui devrait donner la solution.

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4/27 & 2/9 & -7/27 \\ 11/27 & 1/9 & 1/27 \\ -5/27 & 2/9 & 2/27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{27} \cdot (-7) + \frac{2}{9} \cdot 2 + \left(-\frac{7}{27}\right) \cdot (-10) \\ \frac{11}{27} \cdot (-7) + \frac{1}{9} \cdot 2 + \frac{1}{27} \cdot (-10) \\ \left(-\frac{5}{27}\right) \cdot (-7) + \frac{2}{9} \cdot 2 + \frac{2}{27} \cdot (-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

La méthode proposée pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée inversible fonctionne quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, en particulier si $n = 2$.

On reprend l'exemple suivant, pour lequel il y avait une unique solution

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 = 2 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 5 & 10 & 2 \end{array}\right)$$

Nous avions pu déterminer que ce système possède une unique solution par un argument géométrique. On calcul donc l'inverse de la matrice $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 10 \end{smallmatrix}\right)$.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\ell_2 := \frac{1}{5}\ell_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

$$\overset{\ell_2 := \ell_2 - \ell_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1/5 \end{array}\right) \overset{\ell_2 := \frac{1}{5}\ell_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 1/25 \end{array}\right)$$

$$\overset{\ell_1 := \ell_1 + 3\ell_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/5 & 3/25 \\ 0 & 1 & -1/5 & 1/25 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/25 \\ -1/5 & 1/25 \end{pmatrix}$$

Exemple

On calcule alors la solution que l'on vérifiera par la suite

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 2/5 & 3/25 \\ -1/5 & 1/25 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{3}{25}\cdot 2 \\ (-\frac{1}{5})\cdot 0 + \frac{1}{25}\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/25 \\ 2/25 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On vérifie la solution obtenue:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= \frac{6}{25} - 3\cdot\frac{2}{25} = \frac{6}{25} - \frac{6}{25} = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 &= 5\cdot\frac{6}{25} + 10\cdot\frac{2}{25} = \frac{30+20}{25} = 2. \end{aligned}$$

La solution obtenue est donc bien la bonne et ainsi $\mathcal{S} = \{(6/25, 2/25)\}$.

Comment savoir si $\mathbf{A}$ est inversible

Le rang d'une matrice carrée permet de déterminer si elle est inversible ou non. Le théorème suivant explique comment

Théorème.

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, alors:* $\mathbf{A}^{-1}$ *existe* $\Leftrightarrow rang(\mathbf{A}) = n$.

On dit que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est **de rang plein** si $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$. On remarque dans les deux exemples traités, les matrices étaient bien de rang plein alors que la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ issue du système suivant

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

ne l'est pas (son rang vaut 2) ce qui implique que ce système ne possède pas une unique solution.

Bien que ce théorème soit utile en théorie, il convient de trouver un critère plus convenable en pratique pour savoir si une matrice est inversible ou non.

Ce critère sera donné grâce à la notion de **déterminant** d'une matrice carrée.