Université de Genève | GSI
Mathématiques I | Printemps 2021
Mucyo Karemera | **Série 7**

Exercise 1:

1. On considère la fonction $f(x,y) = 2x + x^2y^3$. Que vaut $f(-2,3)$?

   ☐ 32
   ☒ 104
   ☐ 112
   ☐ -66
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

2. Parmi les points suivants, lesquels se trouve sur la surface correspondant au graphe de la fonction $f(x,y) = 12x^{-2}y$?

   ☐ $(2,1,6)$
   ☐ $(-1/2, 1/3, -1)$
   ☐ $(1,-2,24)$
   ☐ $(0,1,1)$
   ☒ Aucune des réponses ci-dessus.

3. On considère la fonction $f(x,y) = xy^2$ et un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et un nombre $h > 0$. Que vaut $f(a,b+h) - f(a,b)$?

   ☐ $2abh + bh^2$
   ☐ b^2h
   ☐ ah^2
   ☒ $2abh + ah^2$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

4. On considère la fonction $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$. Quelles sont les égalités correctes parmi les suivantes?

   ☒ $4f(x,y) = f(2x,2y)$
   ☐ $2f(x,y) = f(x,2y)$
   ☐ $4f(x,y) = f(2x,y)$
   ☐ $2f(x,y) = f(2x,2y)$
   ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

5. Parmi les ensembles suivants, le(s)quel(s) correspond(ent) au domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f(x,y) = \sqrt{2-(x^2+y^2)}$?

   ☒ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leqslant 2\}$
   ☐ $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 = 2\}$
   ☐ $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \geqslant 2\}$
   ☒ $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 > 2\}$

- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

6. Quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ satisfait(ont) l'équation $f(x,3) = 9$, où $f(x,y) = \dfrac{1}{12}x^3(y+1)^2$?

- ☐ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1/3}$
- ☒ $\left(\dfrac{27}{4}\right)^{1/3}$
- ☒ $\dfrac{3}{4^{1/3}}$
- ☐ $\dfrac{4}{3^{1/3}}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

7. On considère l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 3\}$ et $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - x^2 + 2 - y^2$. Quelles sont les affirmations correctes parmi les suivantes

- ☐ A est une courbe de niveau $\sqrt{3}+1$ de f
- ☒ A est une courbe de niveau $\sqrt{3}-1$ de f
- ☐ A est une courbe de niveau $\sqrt{3}$ de f
- ☐ A est une courbe de niveau $-\sqrt{3}$ de f
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

8. On considère $f(x,y) = e^{x+y}$. Qu'elles sont les égalités correctes ?

- ☒ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y}$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{x+y}$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xe^{x+y}$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x+y)e^{x+y}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

9. On considère $f(x,y) = \ln(xy)$, où $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Quelles sont les égalités correctes ?

- ☒ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x}$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{y}$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{xy}$
- ☒ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{xy}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

10. On considère $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Quelles sont les égalités correctes ?

- ☐ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$
- ☒ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$
- ☐ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$
- ☐ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus.

Exercise 2:
On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ lorsque $(x,y) \neq (0,0)$.

   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y^2-x^2)y^3}{(x^2+y^2)^2}$

2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ lorsque $(x,y) \neq (0,0)$ en utilisant la définition des dérivées partielles.

   $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ (dérivée de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ par rapport à y au point $(0,0)$) et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ (dérivée de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ par rapport à x au point $(0,0)$) en utilisant la définition des dérivées partielles. Que peut-on constater?

   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$
   $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
   $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = 0$
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0$

Exercise 3:
Donner le domaine de définition et calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:

1. $f(x,y) = ye^x + xe^y$

   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^x + e^y$
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x + xe^y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = ye^x$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^x + e^y$

2. $g(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$

   $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 12y - 2xy - y^2$
   $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 12x - 2xy - x^2$
   $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -2x$
   $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -2y$
   $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = 12 - 2x - 2y$

3. $h(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

   $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$
   $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$
   $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{4x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2}{x^2+y^2}$
   $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{4y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2}{x^2+y^2}$
   $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

4. $i(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   $\frac{\partial i}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
   $\frac{\partial i}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
   $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,y) = \frac{3x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
   $\frac{\partial^2 i}{\partial y^2}(x,y) = \frac{3y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
   $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

5. $j(x,y) = \ln\left(y - 2x^2\right)$

   $\frac{\partial j}{\partial x}(x,y) = -\frac{4x}{-2x^2+y}$
   $\frac{\partial j}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{-2x^2+y}$
   $\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{16x^2}{(-2x^2+y)^2} - \frac{4}{-2x^2+y}$
   $\frac{\partial^2 j}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{(-2x^2+y)^2}$
   $\frac{\partial^2 j}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{4x}{(-2x^2+y)^2}$

6. $k(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 17}$

$\frac{\partial i}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-17}}$
$\frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-17}}$
$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{x^2}{(x^2+y^2-17)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-17}}$
$\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{y^2}{(x^2+y^2-17)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-17}}$
$\frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{xy}{(x^2+y^2-17)^{\frac{3}{2}}}$

7. $l(x,y) = \ln\left(x^2y + xy - 2y\right)$

$\frac{\partial l}{\partial x}(x,y) = \frac{y+2xy}{x^2y+xy-2y}$
$\frac{\partial l}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2+x-2}{x^2y+xy-2y}$
$\frac{\partial^2 l}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{(y+2xy)^2}{(x^2y+xy-2y)^2} + \frac{2y}{x^2y+xy-2y}$
$\frac{\partial^2 l}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(x^2+x-2)^2}{(x^2y+xy-2y)^2}$
$\frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{(x^2+x-2)(y+2xy)}{(x^2y+xy-2y)^2} + \frac{2x+1}{x^2y+xy-2y}$