Ekspresi Reguler

Pertemuan Ke-8

Sri Handayaningsih, S.T., M.T.
Email : ning_s12@yahoo.com
Teknik Informatika

TIU dan TIK

1. memahami konsep ekspresi reguler dan ekivalensinya dengan bahasa reguler.
2. Mengetahun Penerapan Ekspresi Reguler
3. Mengetahui Definisi Formal ER
4. Mengetahui Bahasa untuk ER
5. Mengetahui proses Konversi ER ke FA

Ekspresi Regular

ekspresi Regular adalah menggambarkan bahasa regular

Contoh: $(a + b \cdot c)^*$

Menggambarkan bahasanya

$$\{a, bc\}^* = \{\lambda, a, bc, aa, abc, bca, ...\}$$

Definisi Rekursif

Ekspresi reguler yg paling sederhana :

$$\emptyset, \quad \lambda, \quad \alpha$$

Diberikan ekspresi reguler r_1 and r_2

Maka :

$$\left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 \\ r_1 \cdot r_2 \\ r_1 * \\ (r_1) \end{array}\right\} \text{Merupakan ekspresi reguler}$$

Contoh 1

Ekspresi reguler $(a+b\cdot c)^{*}\cdot(c+\varnothing)$

Bukan Ekspresi reguler : $(a+b+)$

Bahasa dari Ekspresi reguler

$L(r)$: bahasa dari Ekspresi reguler r

contoh

$$L((a+b\cdot c)^*)=\{\lambda, a, bc, aa, abc, bca, ...\}$$

Definisi

Untuk Ekspresi reguler yg paling sederhana:

$$L(\varnothing) = \varnothing$$

$$L(\lambda) = \{\lambda\}$$

$$L(a) = \{a\}$$

Definisi (Lanjutan)

Untuk Ekspresi reguler r_1 dan r_2

$$L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$$

$$L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1)\,L(r_2)$$

$$L(r_1 *) = (L(r_1))*$$

$$L((r_1)) = L(r_1)$$

Contoh 2

Ekspresi reguler : $(a+b)\cdot a^*$

$$
\begin{aligned}
L((a+b)\cdot a^*) &= L((a+b))\,L(a^*) \\
&= L(a+b)\,L(a^*) \\
&= (L(a)\cup L(b))\,(L(a))^* \\
&= (\{a\}\cup\{b\})\,(\{a\})^* \\
&= \{a,b\}\,\{\lambda,a,aa,aaa,\ldots\} \\
&= \{a,aa,aaa,\ldots,b,ba,baa,\ldots\}
\end{aligned}
$$

Tentukan L(r) dari :

Ekspresi reguler $r = (a+b)^*(a+bb)$

Jawab

Ekspresi reguler $r = (a+b)^*(a+bb)$

Adalah :

$$L(r) = \{a, bb, aa, abb, ba, bbb, ...\}$$

Tentukan L(r) dari :

Ekspresi reguler $r = (aa)^*(bb)^*b$

Jawab

Ekspresi reguler $r = (aa)^*(bb)^*b$

$$L(r) = \{a^{2n}b^{2m}b : \quad n, m \geq 0\}$$

Apakah berikut ini merupakan Ekspresi reguler?

$L(r)$ = { seluruh string yang tidak boleh ada dua "0" yang berurutan }

Contoh 1

Ekspresi reguler $r = (0+1)*00\,(0+1)*$

$L(r)$ = {seluruh string yang ada dua "0" yang berurutan }

Contoh 2

Reguler ekspresi $r = (1 + 01)^*(0 + \lambda)$

$L(r)$ = {seluruh string yang tidak ada dua "0" yang berurutan }

Equivalen ekspresi Reguler

Definisi:

ekspresi regular r_1 dan r_2

adalah **equivalen** jika $L(r_1) = L(r_2)$

Contoh

L = {seluruh string yang tidak ada dua "0" yang berurutan }

$$r_1 = (1+01)^*(0+\lambda)$$

$$r_2 = (1^*011^*)^*(0+\lambda)+1^*(0+\lambda)$$

$$L(r_1) = L(r_2) = L \Rightarrow$$

r_1 dan r_2 Adalah equivalen Ekspresi reguler

Expresi Reguler dan Bahasa Reguler

Teorema

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{General Bahasa} \\ \text{dengan} \\ \text{Ekspresi Reguler} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Bahasa} \\ \text{Regular} \end{array} \right\}$$

Pembuktian

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{General Bahasa} \\ \text{dengan} \\ \text{Ekspresi Reguler} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{Bahasa} \\ \text{Regular} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{General Bahasa} \\ \text{dengan} \\ \text{Ekspresi Reguler} \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{Bahasa} \\ \text{Regular} \end{array} \right\}$$

Pembuktian - bagian 1

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{General Bahasa} \\ \text{dengan} \\ \text{Ekspresi Reguler} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{Bahasa} \\ \text{Regular} \end{array} \right\}$$

Untuk setiap ekspresi reguler r

Bahasa $L(r)$ adalah reguler

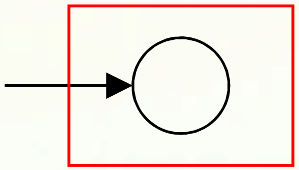
Pembuktian dengan induksi pada ukuran r

Induksi Dasar

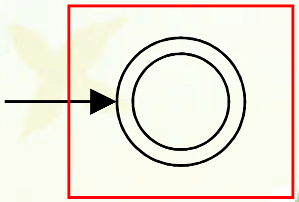
Ekspresi reguler Paling Sederhana:

$$\emptyset, \quad \lambda, \quad \alpha$$

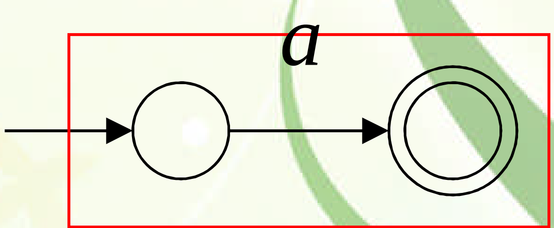
NFA



$$L(M_1) = \emptyset = L(\emptyset)$$



$$L(M_2) = \{\lambda\} = L(\lambda)$$



$$L(M_3) = \{a\} = L(a)$$

Bahasa reguler

Induksi Hipotesa

Asumsi

Untuk ekspresi reguler r_1 dan r_2

maka ;

$L(r_1)$ dan $L(r_2)$ adalah bahasa reguler

Langkah Induksi

Pembuktian:

$$\left.\begin{array}{l} L(r_1 + r_2) \\ \\ L(r_1 \cdot r_2) \\ \\ L(r_1 *) \\ \\ L((r_1)) \end{array}\right\}$$

Adalah
Bahasa Reguler

Dengan definisi dari ekspresi reguler, maka:

$$L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$$

$$L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1)\,L(r_2)$$

$$L(r_1 *) = (L(r_1))*$$

$$L((r_1)) = L(r_1)$$

Dengan hipotesis induksi didapatkan:

$L(r_1)$ dan $L(r_2)$ adalah bahasa reguler

diketahui:

Bahasa reguler adalah pendekatan dari 3 hal ini:

Union	$L(r_1) \cup L(r_2)$
Concatenation	$L(r_1)\,L(r_2)$
Star	$(L(r_1))^*$

Oleh karena itu :

$$\left.\begin{array}{l} L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2) \\[2em] L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1)\,L(r_2) \\[2em] L(r_1{}^*) = (L(r_1))^* \end{array}\right\} \text{Adalah bahasa reguler}$$

Kesimpulan:

$L((r_1))$ Adalah bahasa reguler

Pembuktian - bagian 2

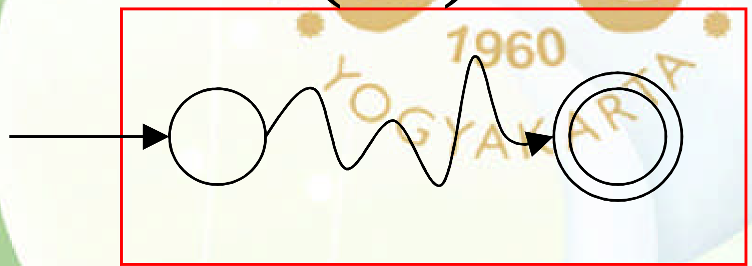
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{General Bahasa} \\ \text{dengan} \\ \text{Ekspresi Reguler} \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{Bahasa} \\ \text{reguler} \end{array} \right\}$$

untuk setiap bahasa reguler L merupakan ekspresi reguler r dengan $L(r) = L$

Pembuktian dengan contruksi pada Ekspresi reguler

Selama L adalah reguler yang diambil dari NFA M yang diterimanya

$$L(M) = L$$



Satu state akhir

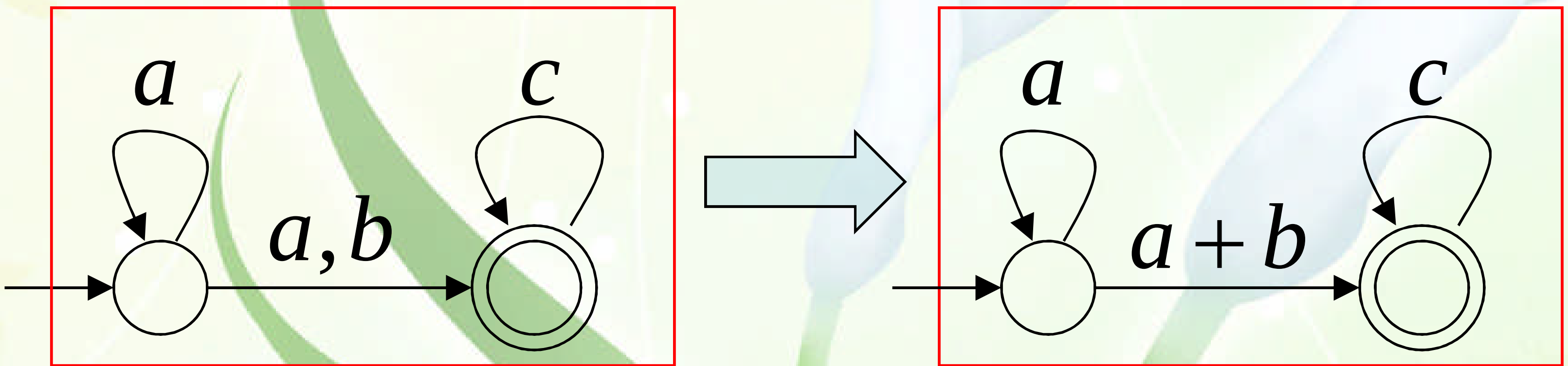
Dari M konstruksi untuk equivalen menggunakan

Graf Transisi secara Umum

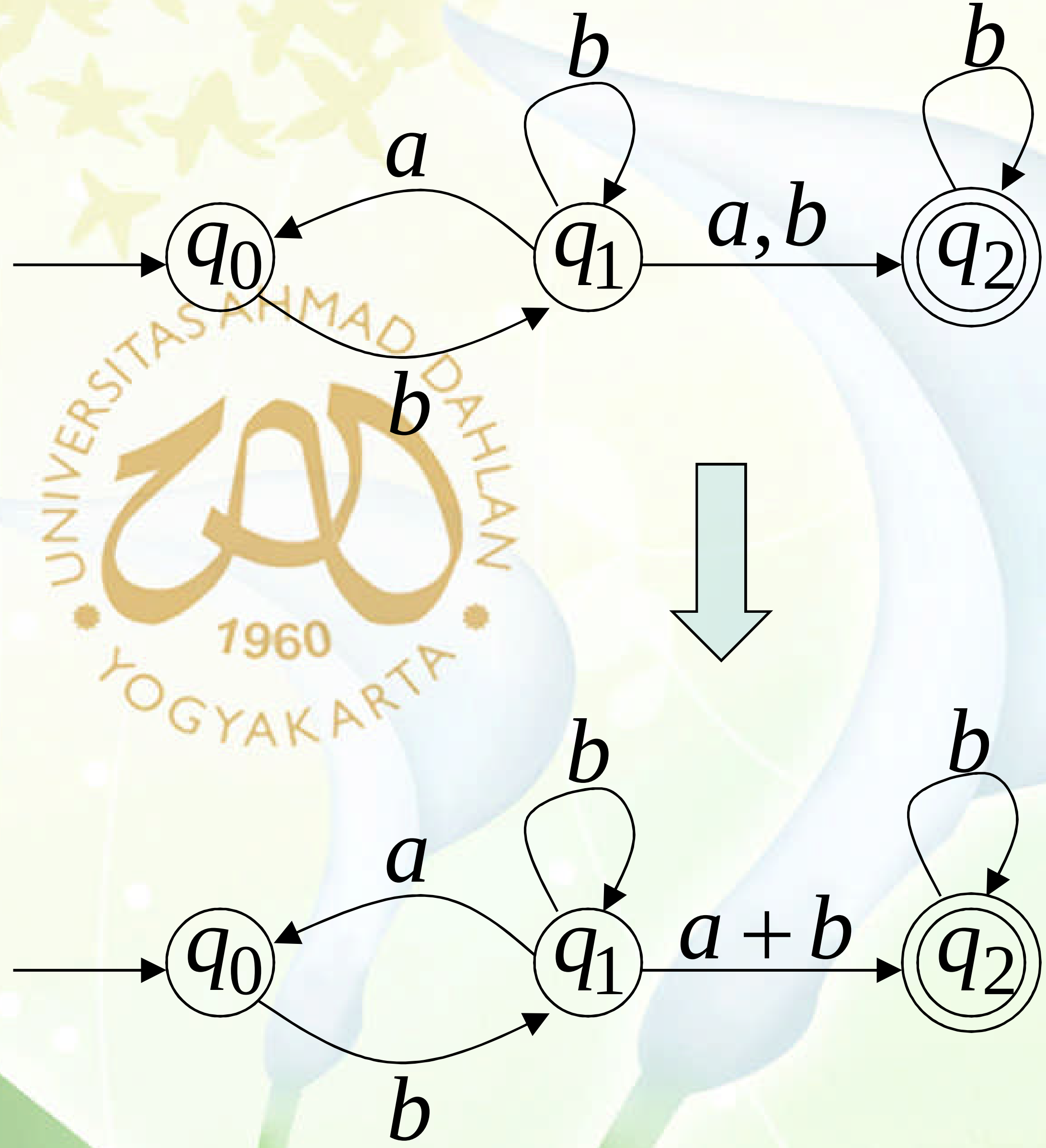
Dengan penamaan transisi adalah ekspresi reguler

Contoh :

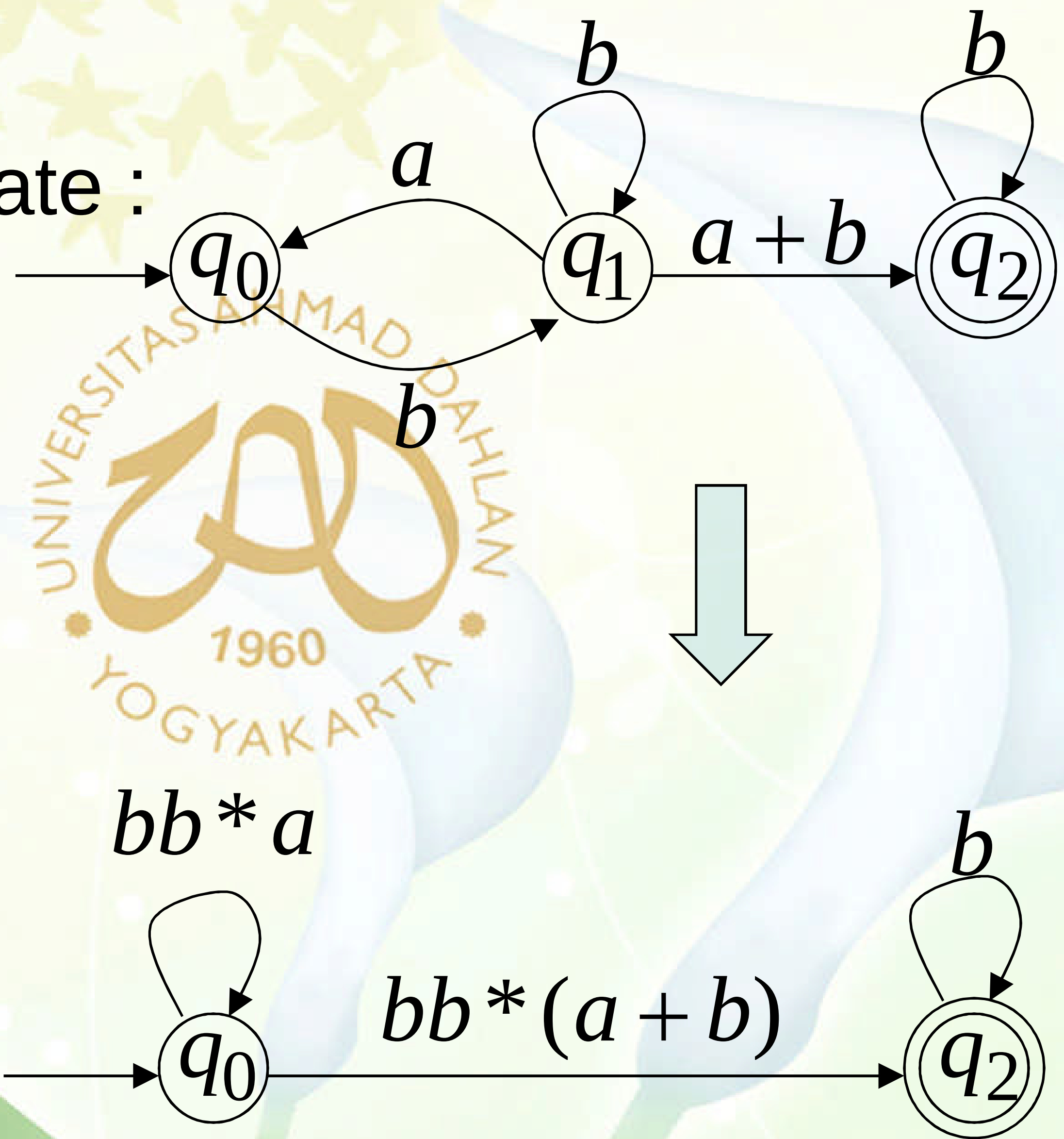
M



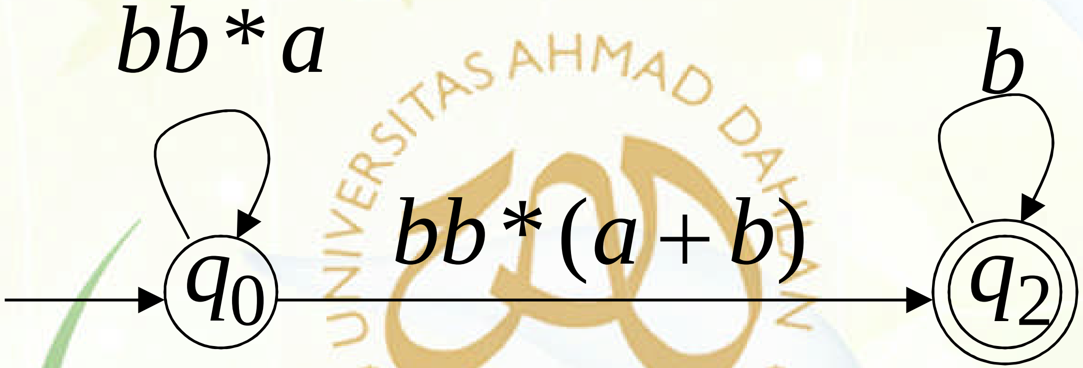
Contoh Lain :



Perulangan state :



Kesimpulan Ekspresi Reguler :

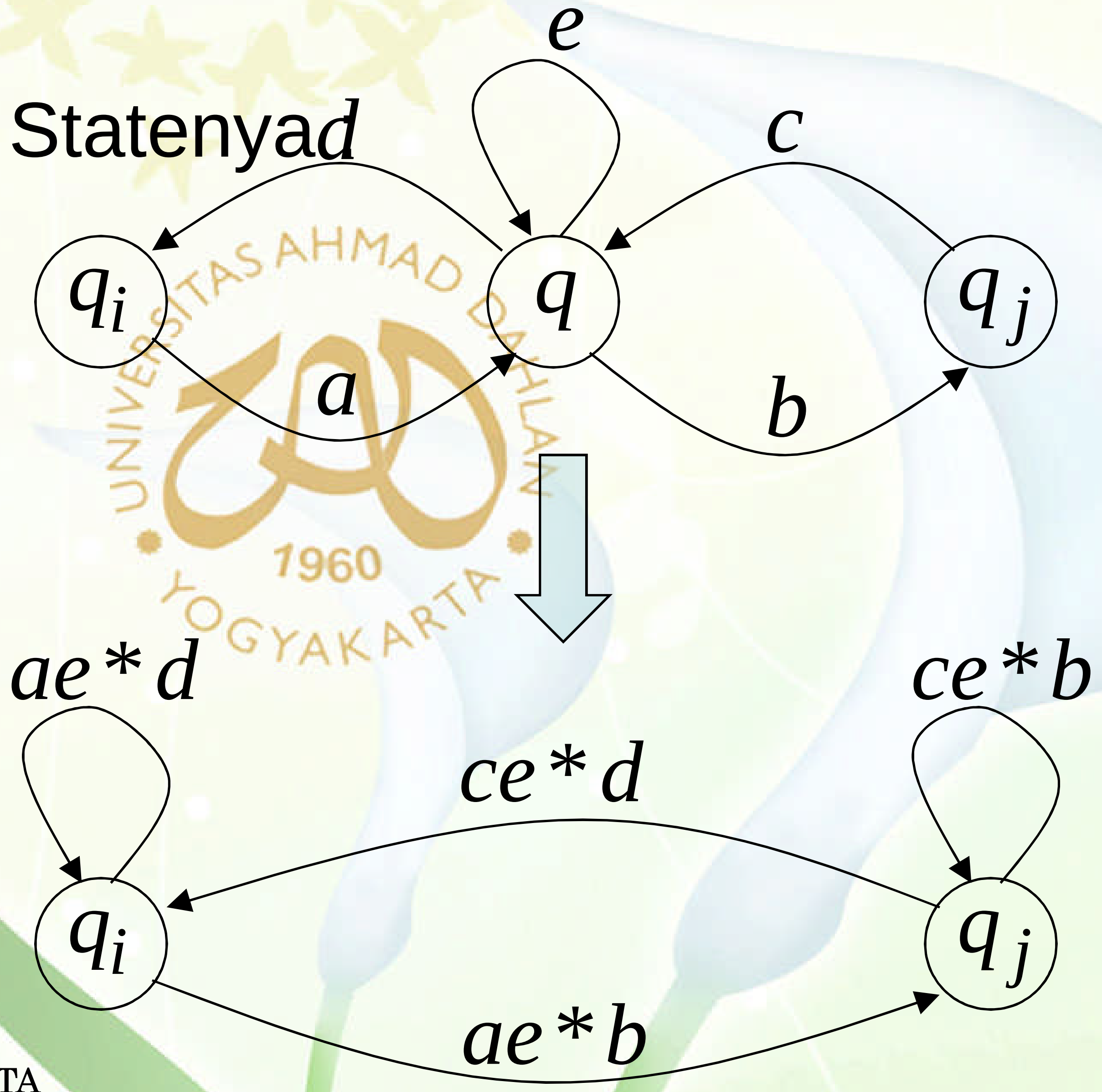


$$r = (bb^*a)^*bb^*(a+b)b^*$$

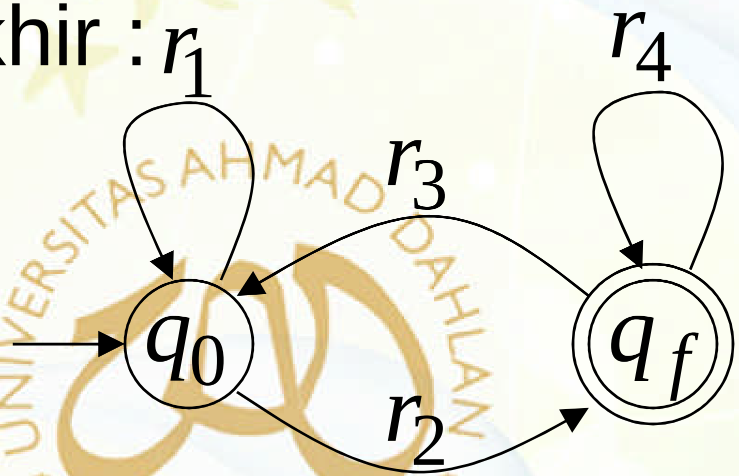
$$L(r) = L(M) = L$$

Secara Umum

Pergerakan Statenya



Graf transisi Akhir :

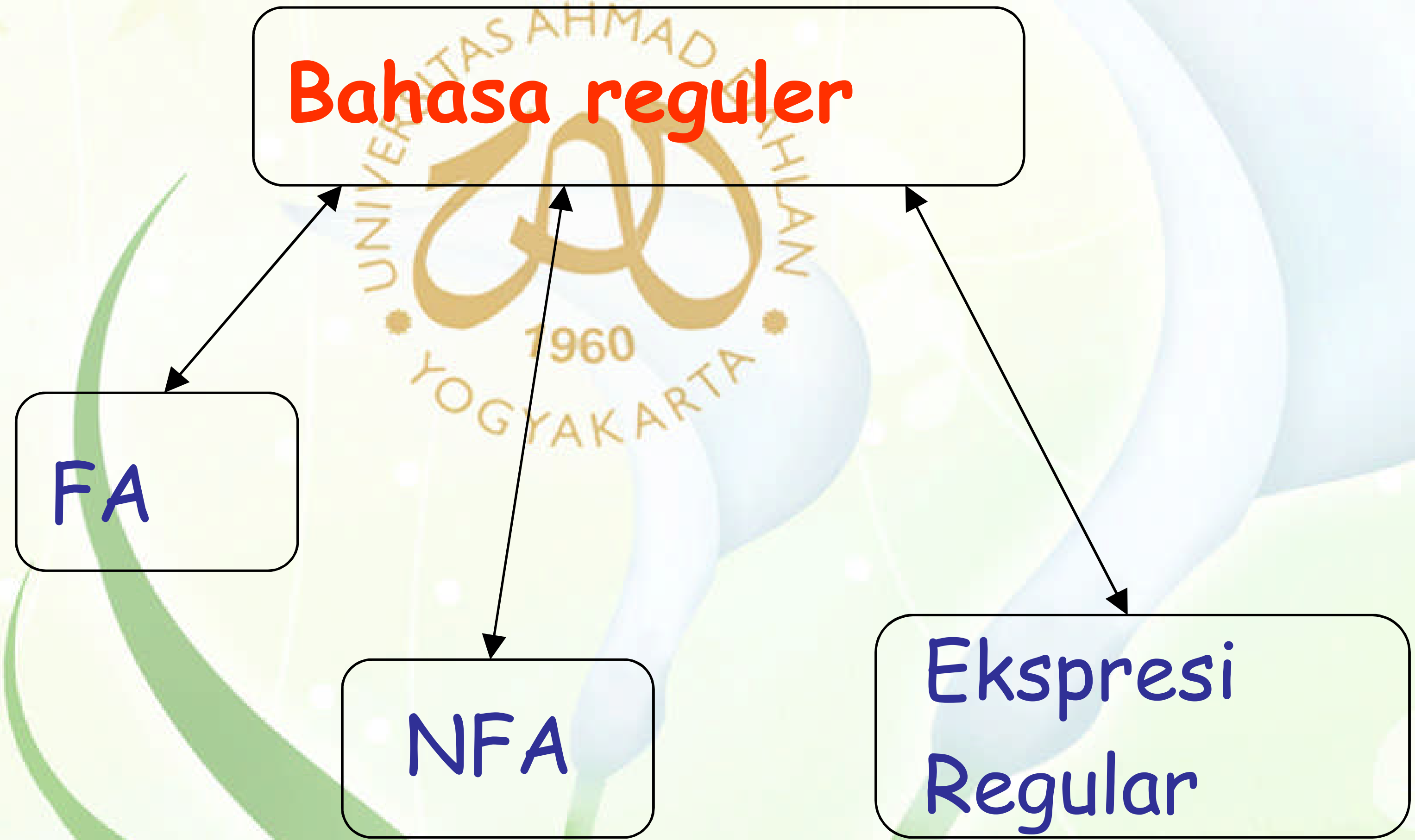


Kesimpulan ekspresi reguler :

$$r = r_1 * r_2 (r_4 + r_3 r_1 * r_2) *$$

$$L(r) = L(M) = L$$

Standard dari Bahasa Reguler



Jika diberikan Bahasa Regular L

Berarti: Bahasa L adalah standar representasi

Properti dari Bahasa Regular

Untuk bahasa regular L_1 dan L_2

Union: $L_1 \cup L_2$

Concatenation: $L_1 L_2$

Star: $L_1{}^*$

Reversal: $L_1{}^R$

Complement: $\overline{L_1}$

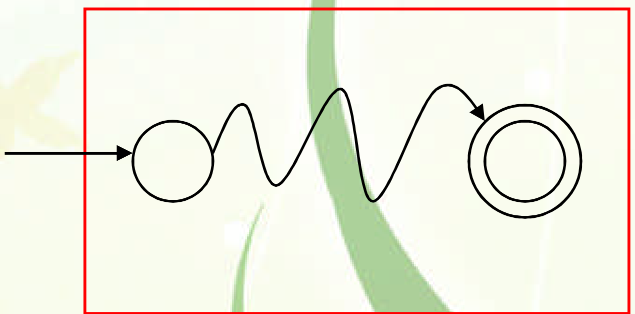
Intersection: $L_1 \cap L_2$

Adalah Bahasa Reguler

Bahasa reguler L_1

$$L(M_1) = L_1$$

NFA M_1



State yang diterima tunggal

Bahasa reguler L_2

$$L(M_2) = L_2$$

NFA M_2

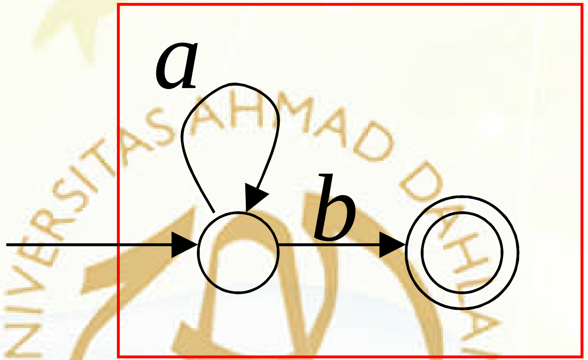
State yang diterima tunggal

Contoh

M_1

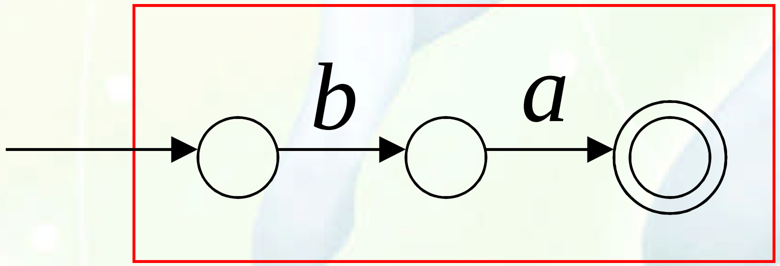
$n \geq 0$

$$L_1 = \{a^n b\}$$



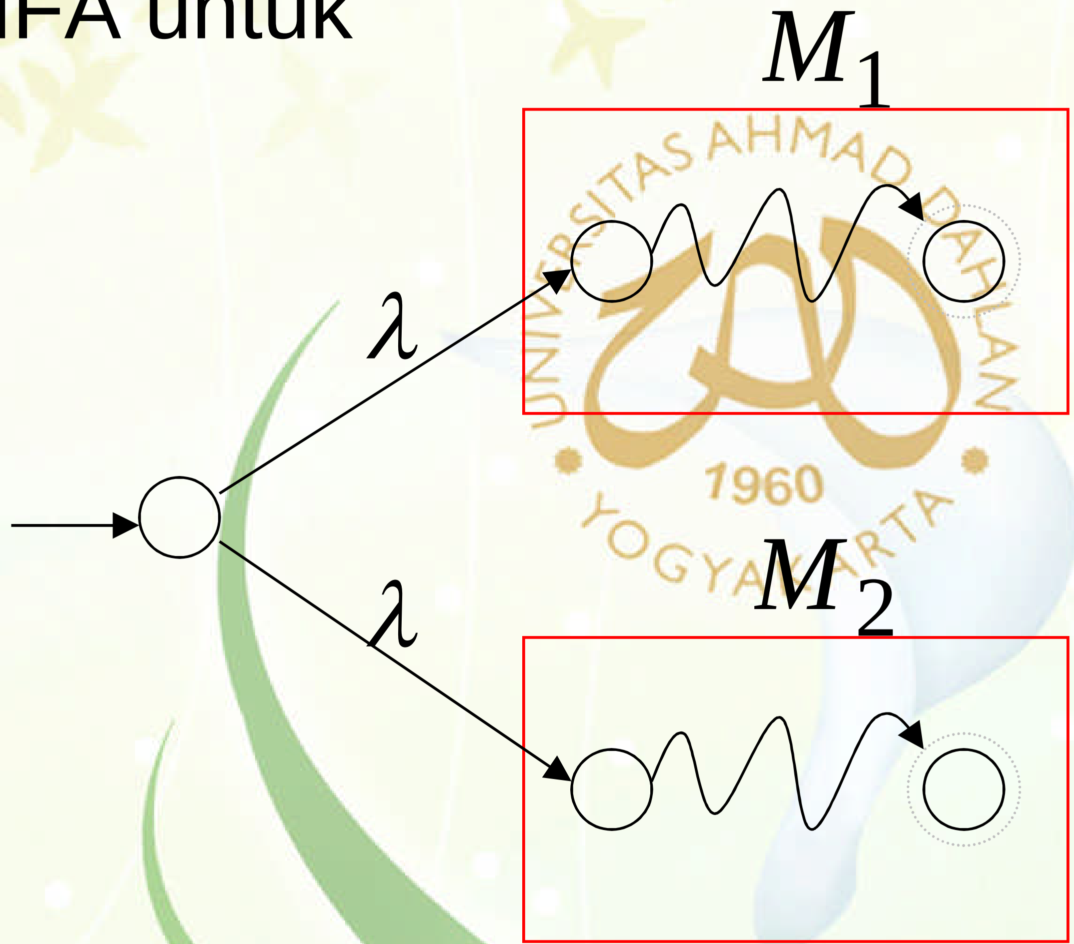
M_2

$$L_2 = \{ba\}$$



Union

NFA untuk $L_1 \cup L_2$

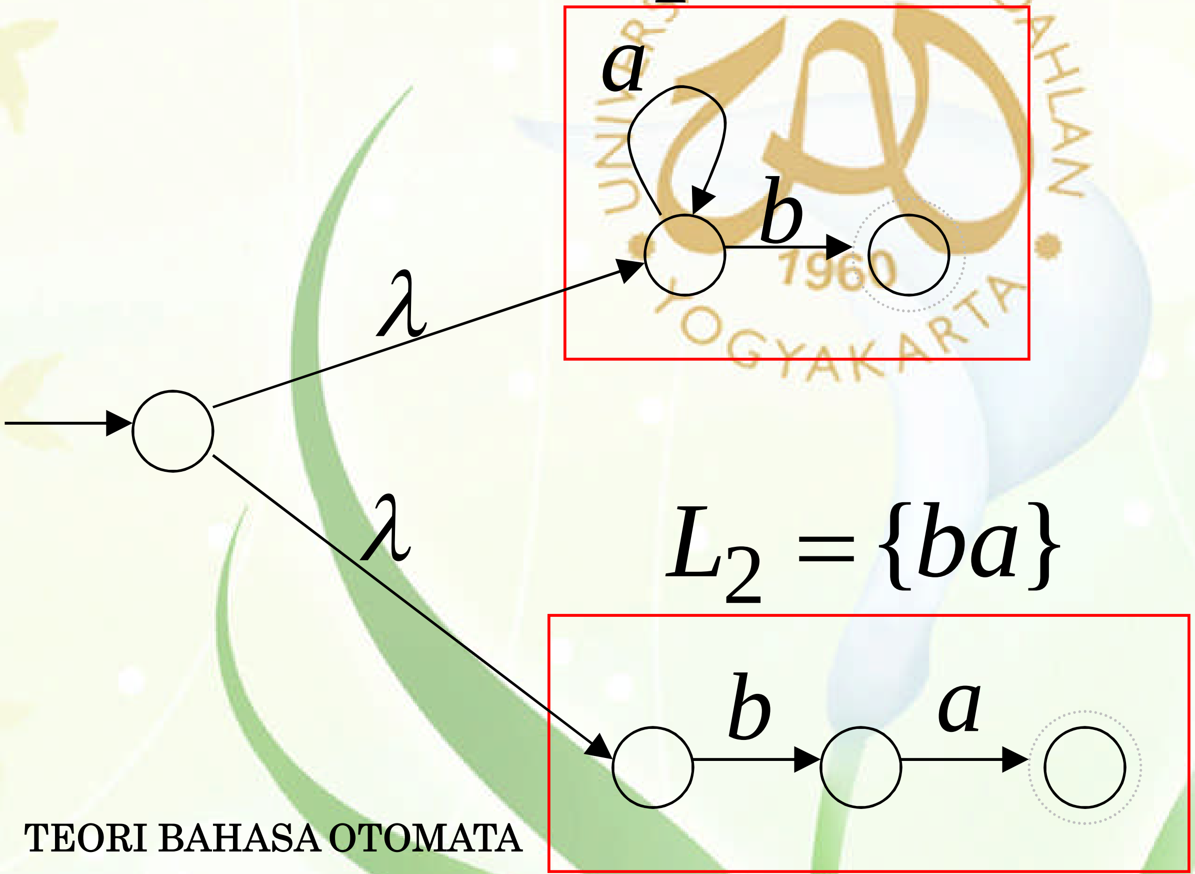


Contoh

NFA untuk $L_1 \cup L_2 = \{a^n b\} \cup \{ba\}$

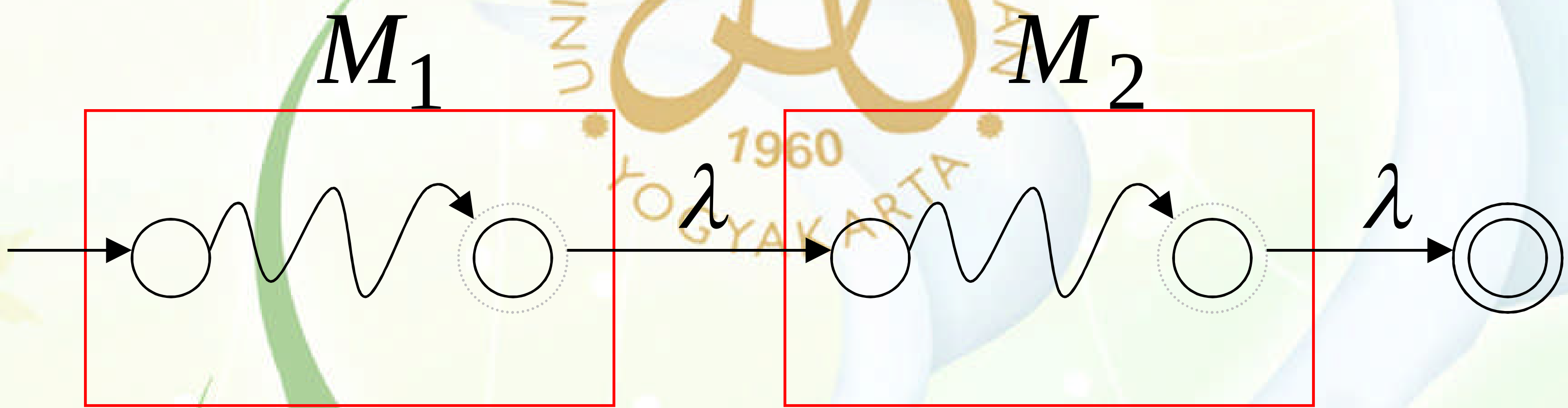
$L_1 = \{a^n b\}$

$L_2 = \{ba\}$



Concatenation

NFA untuk $L_1 L_2$



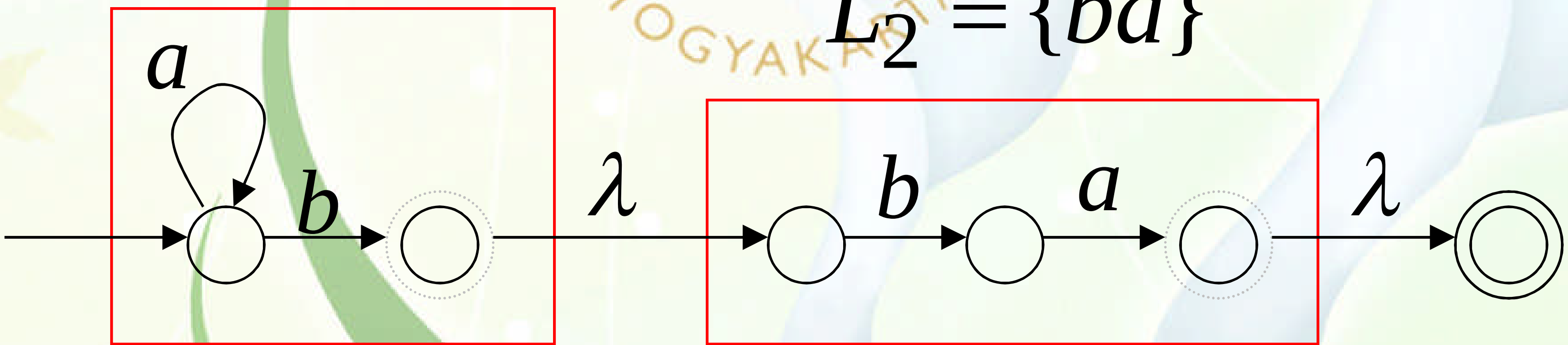
Contoh

NFA untuk

$$L_1 L_2 = \{a^n b\}\{ba\} = \{a^n bba\}$$

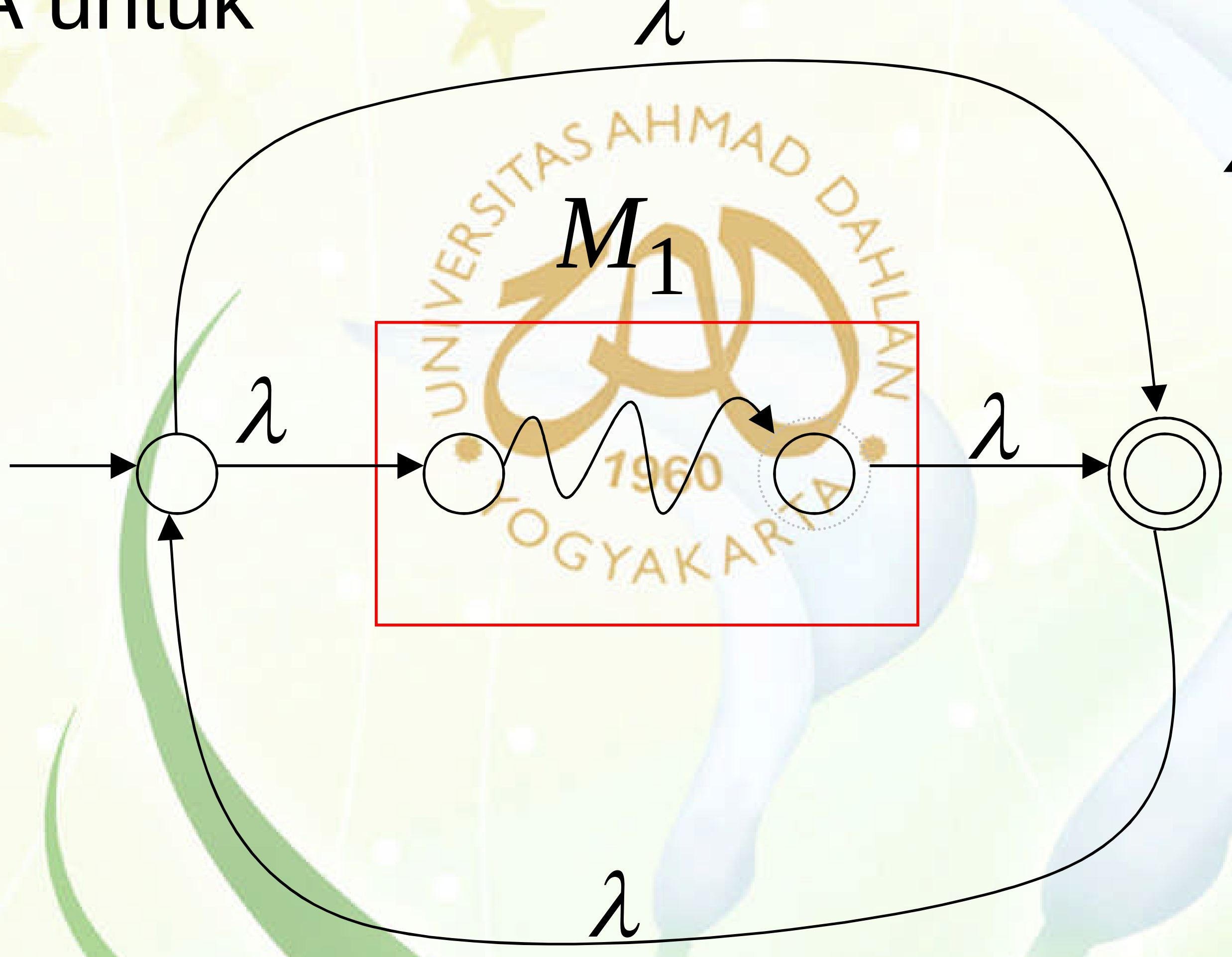
$$L_1 = \{a^n b\}$$

$$L_2 = \{ba\}$$



Star Operation

NFA untuk $L_1{}^*$



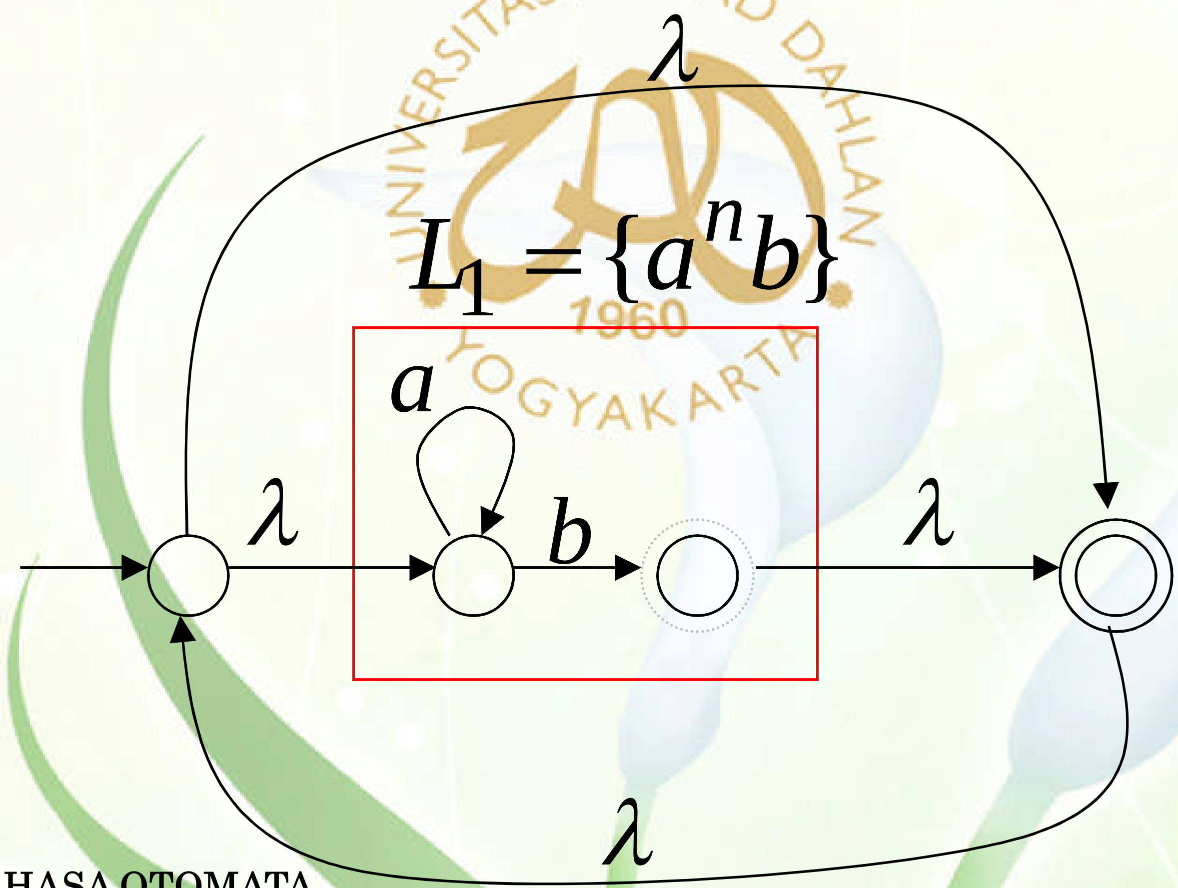
$\lambda \in L_1{}^*$

Contoh

NFA untuk $L_1{}^* = \{a^n b\}^*$

$$w = w_1 w_2 \cdots w_k$$

$$w_i \in L_1$$



Reverse

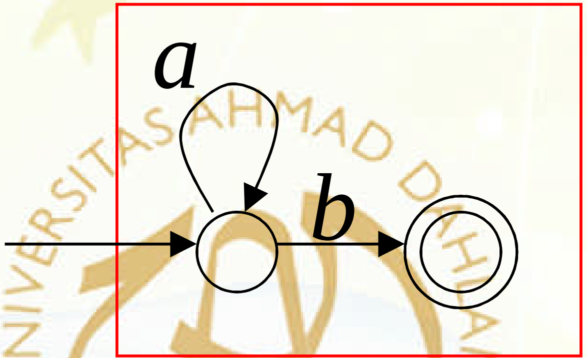
NFA for L_1^R

1. Reverse seluruh transisi
2. Buat state awal yg dapat diterima dan sebaliknya

Contoh

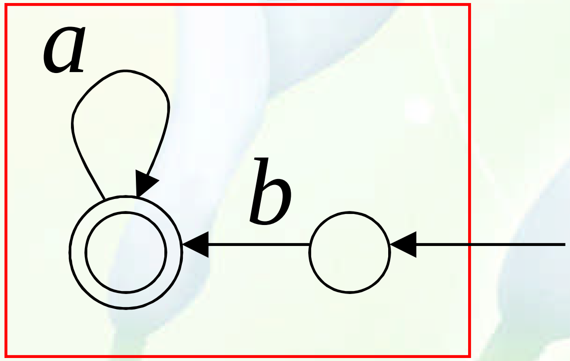
$$L_1 = \{a^n b\}$$

M_1



$$L_1^R = \{b a^n\}$$

M_1'



Complement

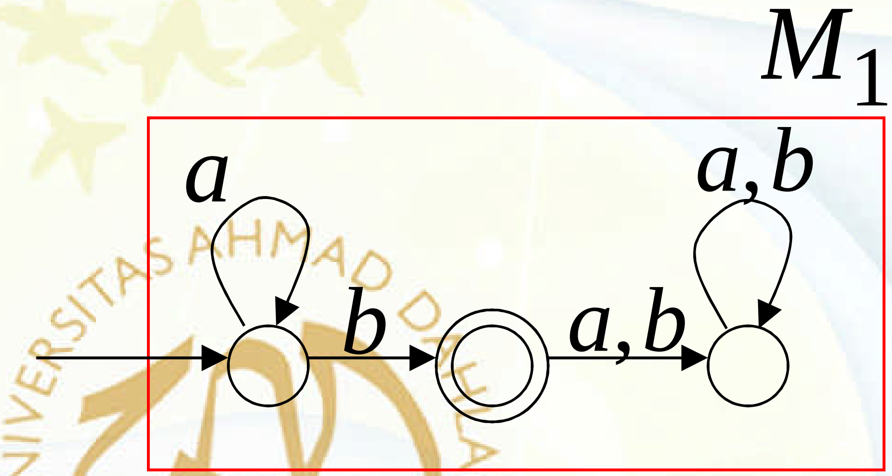
1. Ambil **FA** yang diterima oleh L_1

2. Buat state akhir non-final,
   dan sebaliknya

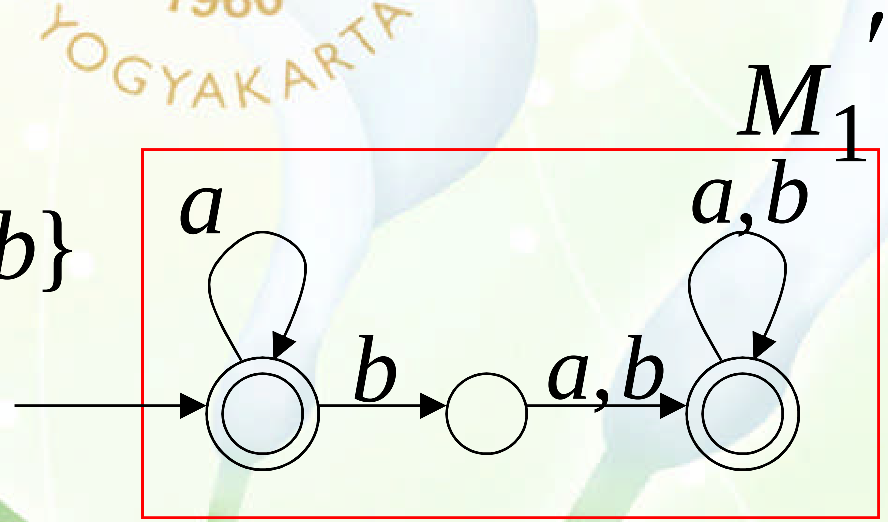
Kenapa tdk NFA?

Contoh

$$L_1 = \{a^n b\}$$



$$\overline{L_1} = \{a,b\}^* - \{a^n b\}$$



Intersection

L_1 regular

L_2 regular

Lihat

$L_1 \cap L_2$

regular

Hukum DeMorgan's : $\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

$L_1 \; , \; L_2$ regular

⇒ $\overline{L_1} \; , \; \overline{L_2}$ regular

⇒ $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ regular

⇒ $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ regular

⇒ $L_1 \cap L_2$ regular

Contoh

$$L_1 = \{a^n b\}$$ regular

$$L_2 = \{ab, ba\}$$ regular

$$\Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{ab\}$$

regular

Pembuktian lain untuk Closur Interseksi

Mesin M_1

$\boxed{\text{FA untuk } L_1}$

Mesin M_2

$\boxed{\text{FA untuk } L_2}$

Bangun FA baru M yg dpt diterima $L_1 \cap L_2$

M Simulasi secara paralel M_1 dan M_2

State pada M

q_i, p_j

State pada M_1 State pada M_2

FA M_1

$$q_1 \xrightarrow{a} q_2$$

transisi

FA M_2

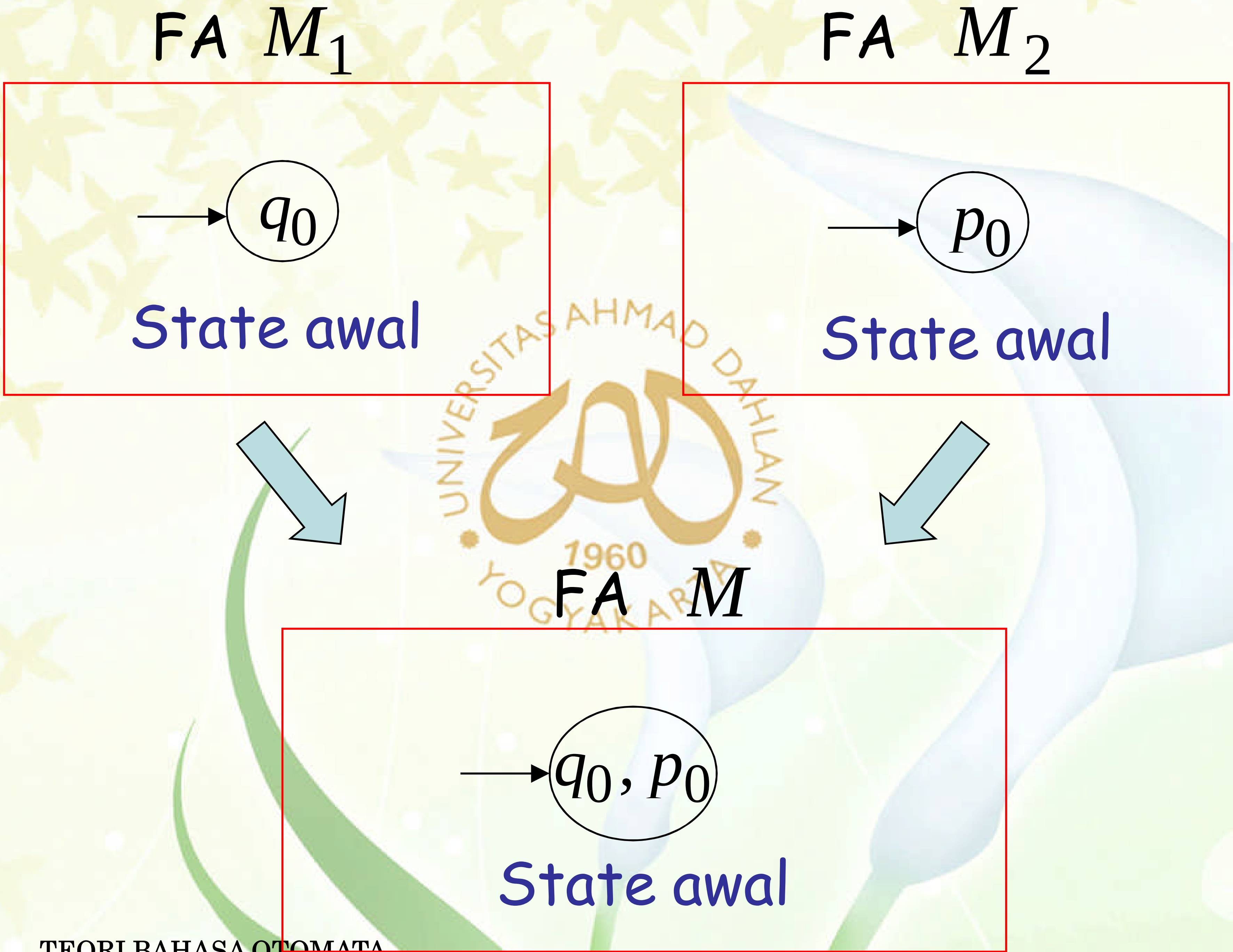
$$p_1 \xrightarrow{a} p_2$$

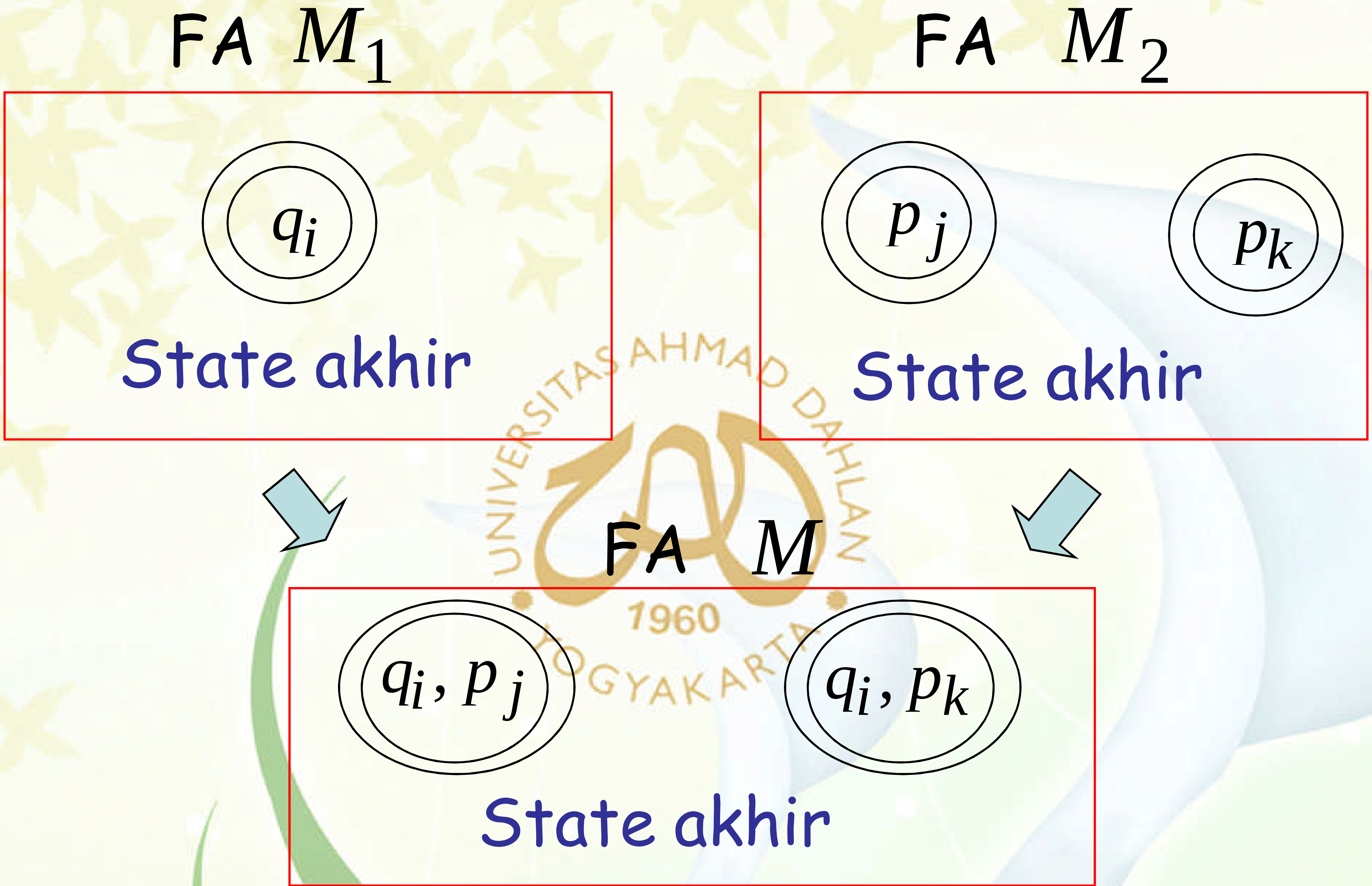
transisi

FA M

$$q_1, p_1 \xrightarrow{a} q_2, p_2$$

transisi


FA M_1
q_0
State awal
FA M_2
p_0
State awal
FA M
q_0, p_0
State awal



Kedua isi harus dapat diterima oleh state

M Simulasi secara paralel M_1 dan M_2

M Menerima string w Jika dan hanya jika

M_1 menerima string w dan

M_2 menerima string w

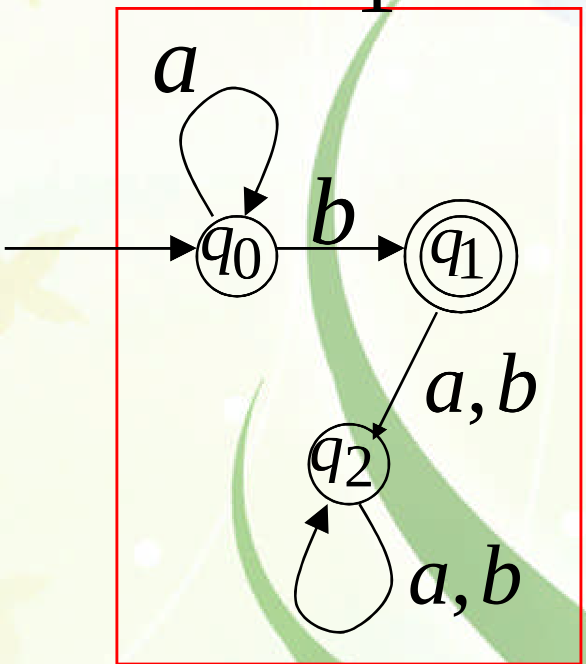
$$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$$

Contoh:

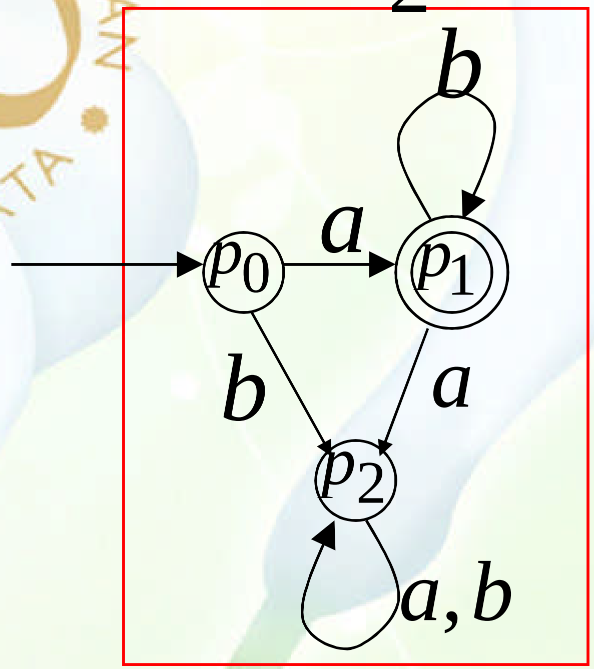
$$L_1 = \{a^n b\} \quad n \geq 0$$

$$L_2 = \{ab^m\} \quad m \geq 0$$

M_1



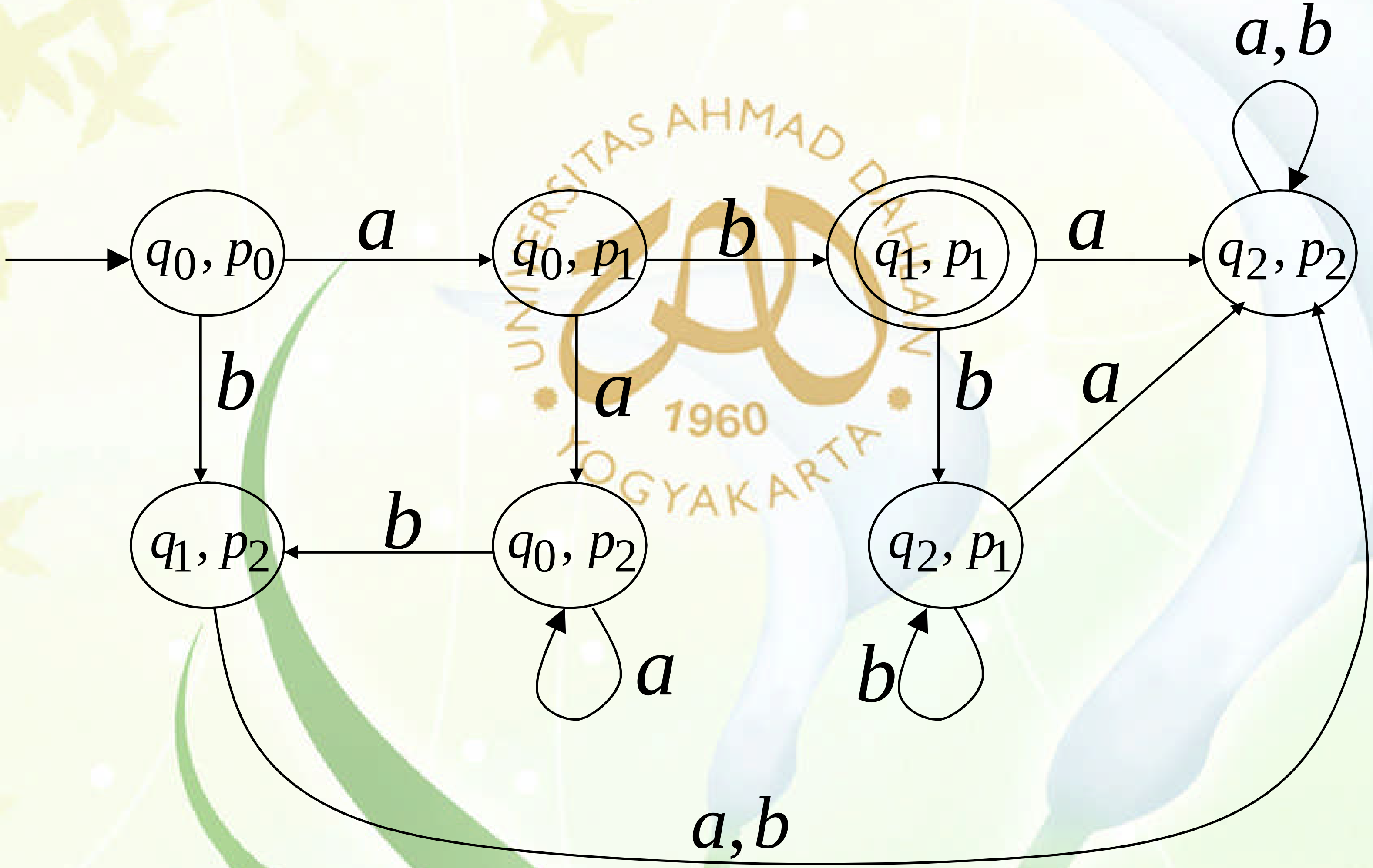
M_2



Konstruksi Mesin untuk Irisan

Automata untuk irisan

$$L = \{a^n b\} \cap \{ab^n\} = \{ab\}$$



Pustaka

1. Tedy Setiadi, Diktat Teori Bahasa dan Otomata, Teknik Informatika UAD, 2005
2. Hopcroft John E., Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation,* 2rd, Addison-Wesley,2000
3. Martin C. John, *Introduction to Languages and Theory of Computation,* McGraw-Hill Internatioanal edition,1991
4. Linz Peter,*Introduction to Formal Languages & Automata,* DC Heath and Company, 1990
5. Dulimarta Hans, Sudiana, *Catatan Kuliah Matematika Informatika, Magister Teknik Informatika ITB, 1998*
6. Hinrich Schütze, IMS, Uni Stuttgart, WS 2006/07, Slides based on RPI CSCI 2400