Assignment 5
Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410
Daniel Kocher, 0926293

April 20, 2016

Aufgabe 9

Zu zeigen: Sei $m < i$: x_i Vorfahre von $x_m \Leftrightarrow P_{min}(\{x_m, ..., x_i\}) = x_i$

Proof.
i) " $\Leftarrow$ "
Annahme: $P_{min}(\{x_m, ..., x_i\}) = x_i$
Knoten werden nach Prioritäten in den Suchbaum eingefügt $\Rightarrow$ aus der Menge $\{x_m, ..., x_i\}$ wird x_i als erster eingefügt.
Alle Knoten x_k mit Schlüsseln k, die vor x_i eingefügt wurden, haben die Eigenschaft: $k < key(x_m)$ oder $k > key(x_i)$[1].
Wenn $x_j \in \{x_m, ..., x_{i-1}\}$ eingefügt wird, durchläuft x_j denselben Pfad wie x_i [2] und wird im linken Unterbaum von x_i eingefügt. Es gilt daher: x_j ist Nachfahre von x_i und insbesonders x_m ist Nachfahre von $x_i \implies x_i$ ist Vorfahre von x_m

ii) " $\Rightarrow$ "
Sei: $P_{min}(\{x_m, ..., x_i\}) = x_j$; Zeige: $i = j$
Annahme: x_i Vorfahre von x_m
Knoten werden nach Prioritäten in den Suchbaum eingefügt $\Rightarrow$ aus der Menge $\{x_m, ..., x_i\}$ wird x_j als erster eingefügt.
Alle Knoten x_k mit Schlüssel k, die vor x_j eingefügt wurden, haben die Eigenschaft: $k < key(x_m)$ oder $k > key(x_i)$. Jeder Knoten x_l aus $\{x_m, ..., x_i\}$ mit $l \neq j$ muss beim Einfügen denselben Pfad durchlaufen wie x_j.
Falls $j \neq i, m$: x_m landet im linken Unterbaum von x_j und x_i im rechten Unterbaum von $x_j \implies x_i$ ist kein Vorfahr von x_m.
Falls $j = m$: x_i landet im rechten Unterbaum von $x_m \implies x_m$ ist Vorfahre von x_i
$\implies j = i$ $\square$

[1] Würde $key(x_m) \leq k \leq key(x_i)$ gelten wäre der Knoten mit dem Schlüssel k Teil der Menge $\{x_m, ..., x_i\}$ und würde wegen $P_{min}(\{x_m, ..., x_i\}) = x_i$ nach x_i eingefügt werden

[2] Es gilt für alle sich im Baum befindlichen Schlüssel k, $k < key(x_m) \leq key(x_j) \leq key(x_i)$ oder $k > key(x_i) \geq key(x_j) \geq key(x_m)$

Aufgabe 10

Zu zeigen: Sei m die Anzahl der Schlüssel, die kleiner als der gesuchte Schlüssel k sind. Die erwartete Anzahl von Knoten auf dem Suchpfad ist $H_m + H_{n-m}$.

Proof.
Sei x_k der Knoten mit Schlüssel k der ohne Berücksichtigung der Prioritäten in den gegebenen Suchbaum imaginär eingefügt wird.

Sei:

$$X_{k,i} = \begin{cases} 1, x_i \text{ ist Vorfahr des neuen imaginären Knotens } x_k \text{ mit } key(x_k) = k \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

und:
Sei X_k die Anzahl der Knoten auf dem Pfad von der Wurzel nach Knoten x_k (ohne x_k, denn x_k existiert nur imaginär).

$$X_k = \sum_{i<k} X_{k,i} + \sum_{i>k} X_{k,i} \tag{1}$$

$$E\left[X_k\right] = E\left[\sum_{i<k} X_{k,i}\right] + E\left[\sum_{i>k} X_{k,i}\right] \tag{2}$$

$$E\left[X_k\right] = \sum_{i<k} E\left[X_{k,i}\right] + \sum_{i>k} E\left[X_{k,i}\right] \tag{3}$$

F1($i < k$): gilt für m Knoten des Suchbaums (aus der Angabe)

$$E\left[X_{k,i}\right] = Pr\left[P_{min}(\{x_1, ..., x_i\}) = x_i\right] = \frac{1}{i} \tag{4}$$

F2($i > k$): gilt für $n - m$ Knoten des Suchbaums

$$E\left[X_{k,i}\right] = Pr\left[P_{min}(\{x_i, ..., x_n\}) = x_i\right] = \frac{1}{n-i+1} \tag{5}$$

Also:

$$E\left[X_k\right] = \sum_{i<k} E\left[X_{k,i}\right] + \sum_{i>k} E\left[X_{k,i}\right] \tag{6}$$

$$E\left[X_k\right] = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{n-i+1} \tag{7}$$

$$E\left[X_k\right] = \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{n-(m+1)+1} + ... + \frac{1}{n-n+1}\right) \tag{8}$$

$$E\left[X_k\right] = \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n-m-1} + ... + 1\right) \tag{9}$$

$$E\left[X_k\right] = H_m + H_{n-m} \tag{10}$$

□