# Assignment 11
# Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410
Daniel Kocher, 0926293

June 22, 2016

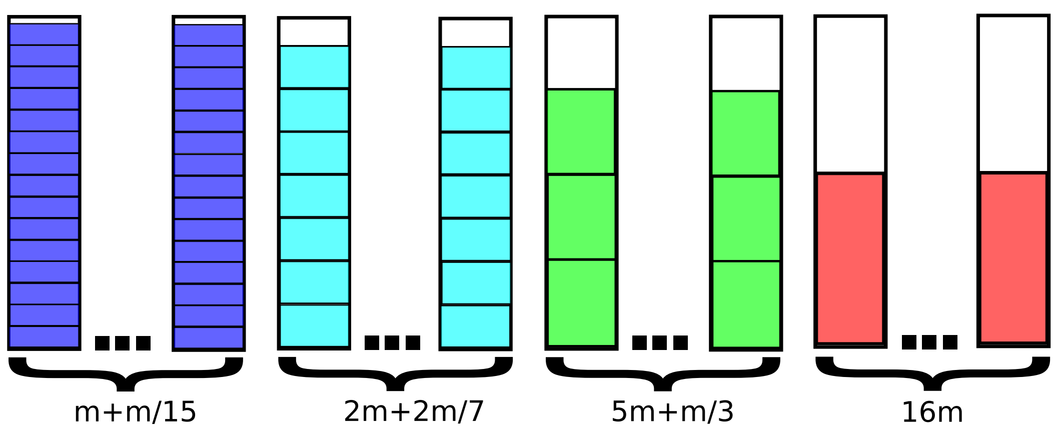
**Aufgabe 21**

Gegeben sei folgende Sequenz $I$ von Objekten

$$\frac{1}{16}+\epsilon, ..., \frac{1}{16}+\epsilon, \frac{1}{8}+\epsilon, ..., \frac{1}{8}+\epsilon, \frac{1}{4}+\epsilon, ..., \frac{1}{4}+\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon, ..., \frac{1}{2}+\epsilon \tag{1}$$

wobei jede Teilsequenz (Objekte der gleichen Größe) die Länge $16m$ hat.
Es gilt $m \in N : 0 \equiv m \pmod{15} \wedge 0 \equiv m \pmod{7} \wedge 0 \equiv m \pmod{3}$ und $\epsilon < 10^{-6}$.

- Geben Sie $FF(I)$ sowie die zugehörige Packung an.
- Wenden Sie First-Fit-Decreasing auf $I$ an. Geben Sie die zugehörige Packung sowie $FFD(I)$ an.




Aufteilung der $16m$ Elemente der Größe $\frac{1}{16}+\epsilon$.
Eine Runde sei das Einfügen von 16 Elementen. Also ist nach $m$ Runden das Einfügen von $16m$ Elementen beendet.

Runde 1: $B_1 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_2 : (\frac{1}{16}+\epsilon)$
Runde 2: $B_1 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_2 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_3 : 2 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon)$
Runde 3: $B_1 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_2 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_3 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_4 : 3 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon)$
...
Runde 15: $B_1 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_2 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_3 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_4 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), ..., B_{16} : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon)$

wegen $0 \equiv m \pmod{15}$ gilt:
Runde m: $B_1 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_2 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_3 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), B_4 : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon), ..., B_{m+\frac{m}{15}} : 15 \cdot (\frac{1}{16}+\epsilon)$

Alle $m + \frac{m}{15}$ Blöcke sind nach $m$ Runden vollständig gefüllt. Nach $m$ Runden gilt für alle Blöcke $B_j$ mit $1 \leq j \leq m + \frac{m}{15}$ also:

$$B_j + (\frac{1}{16} + \epsilon) > 1 \tag{2}$$

Aufgrund der gegebenen Einfügereihenfolge bedeutet das also, dass diesen Blöcken kein weiteres Element der Restsequenz mehr hinzugefügt werden kann, da diese alle eine Größe haben, die $(\frac{1}{16} + \epsilon)$ übersteigt.

Aufteilung der $16m$ Elemente der Größe $\frac{1}{8} + \epsilon$.

| $B_k$ | Runde 1 | Runde 2 | ... | Runde 7 | ... | Runde m |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(m + \frac{m}{15}) + 1$ | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ |
| $(m + \frac{m}{15}) + 2$ | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ |
| $(m + \frac{m}{15}) + 3$ | $2 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ |
| $(m + \frac{m}{15}) + 4$ | / | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ |
| $(m + \frac{m}{15}) + 5$ | / | $4 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ |
| $(m + \frac{m}{15}) + 6$ | / | / | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $(m + \frac{m}{15}) + 16$ | / | / | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ |
| $(m + \frac{m}{15}) + 17$ | / | / | ... | / | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $(m + \frac{m}{15}) + (2m + \frac{2m}{7})$ | / | / | ... | / | ... | $7 \cdot (\frac{1}{8} + \epsilon)$ |

16 Objekte der Größe $(\frac{1}{8} + \epsilon)$ füllen (d.h. sodass kein weiteres Objekt dieser Größe Platz hat) 2 Blöcke und es bleiben 2 Objekte übrig. Im Rahmen von $k$ Runden wächst dieser Rest auf $2k$ Objekte an. Um diese $2k$ zusätzlichen Objekte unterzubringen, werden $\lceil \frac{2k}{7} \rceil$ zusätzliche Blöcke benötigt.

Analog für $\frac{1}{4} + \epsilon$ und $\frac{1}{2} + \epsilon$

$$\begin{aligned} FF(I) &= m + \frac{m}{15} + 2m + \frac{2m}{7} + 5m + \frac{m}{3} + 16m \\ &= 24m + \frac{m}{15} + \frac{2m}{7} + \frac{m}{3} \\ &= 24m + \frac{7m + 30m + 35m}{105} \\ &= 24m + \frac{72m}{105} = 24m + \frac{24m}{35} \end{aligned}$$

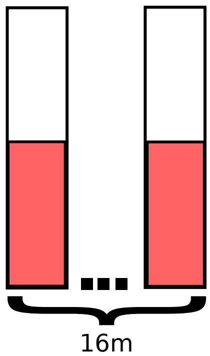
Für das Einfügen der Sequenz $I$ ($16m \cdot 4 = 64m$ Elemente) werden $24m + \lceil \frac{24m}{35} \rceil$ Container benötigt.

Wenden Sie First-Fit-Decreasing auf $I$ an. Geben Sie die zugehörige Packung sowie $FFD(I)$ an.
Sortiere Sequenz $I$, sodass die Elemente in absteigender Reihenfolge vorliegen:

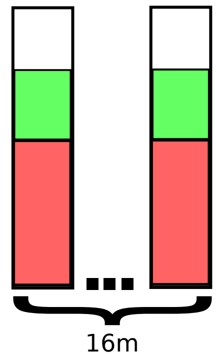
$$\frac{1}{2}+\epsilon, ..., \frac{1}{2}+\epsilon, \frac{1}{4}+\epsilon, ..., \frac{1}{4}+\epsilon, \frac{1}{8}+\epsilon, ..., \frac{1}{8}+\epsilon, \frac{1}{16}+\epsilon, ..., \frac{1}{16}+\epsilon \tag{3}$$

wobei jede Teilsequenz (Objekte der gleichen Größe) die Länge $16m$ hat.
Es gilt $m \in N : 0 \equiv m \pmod{15} \wedge 0 \equiv m \pmod{7} \wedge 0 \equiv m \pmod{3}$ und $\epsilon < 10^{-6}$.

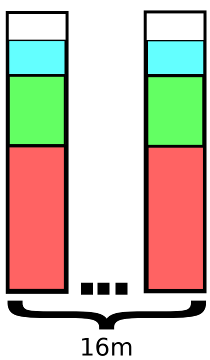
Nach Einfügen der $16m$ $\frac{1}{2}+\epsilon$ Objekte.



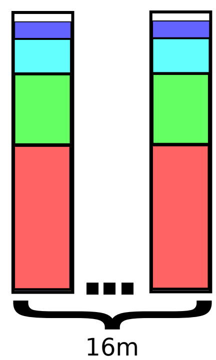

Nach Einfügen der $16m$ $\frac{1}{4}+\epsilon$ Objekte.




Nach Einfügen der $16m$ $\frac{1}{8}+\epsilon$ Objekte.




Nach Einfügen der $16m$ $\frac{1}{16}+\epsilon$ Objekte.




Keine zwei (gleich großen) Elemente einer $16m$ Objekte langen Teilsequenz stehen im selben Block.

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2}+\epsilon)+(\frac{1}{2}+\epsilon) &> 1 \\
\implies (\frac{1}{2}+\epsilon)+2\cdot(\frac{1}{4}+\epsilon) & \\
=(\frac{1}{2}+\epsilon)+(\frac{1}{4}+\epsilon)+2\cdot(\frac{1}{8}+\epsilon) & \\
=(\frac{1}{2}+\epsilon)+(\frac{1}{4}+\epsilon)+(\frac{1}{8}+\epsilon)+2\cdot(\frac{1}{16}+\epsilon) &> 1
\end{aligned}$$

Bei der angegebenen Belegung wird die Kapazität keines Blocks überschritten:

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{2}+\epsilon)+(\frac{1}{4}+\epsilon)+(\frac{1}{8}+\epsilon)+(\frac{1}{16}+\epsilon)\\
=&(\frac{8}{16}+\epsilon)+(\frac{4}{16}+\epsilon)+(\frac{2}{16}+\epsilon)+(\frac{1}{16}+\epsilon)\\
=&(\frac{15}{16}+4\epsilon)<1
\end{aligned}$$

da:

$$\epsilon < \frac{1}{10^6} \implies 4\epsilon < \frac{1}{16} \tag{4}$$

$$FFD(I) = OPT(I) = 16m$$

**Aufgabe 22**

Geben Sie ein dynamisches Programm für die Berechnung von $\binom{n}{i}$ an.

*Hinweis:* In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass die Anzahl der Knoten mit Tiefe $i$ in einem Binomialbaum $B_n$ genau $\binom{n}{i}$ entspricht. Benutzen Sie die Argumente aus dem Beweis dieser Aussage.

Aus dem Beweis in der VO zu Binomial Queues bzw. Binomialbäumen (*Es gibt genau* $\binom{n}{i}$ *Knoten mit Tiefe* $i$ *in* $B_n$) entnehmen wir folgende Argumente:

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ und } \binom{n}{n} = 1 \tag{5}$$

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \tag{6}$$

Diese beiden Gleichungen sind bereits eine rekursive Darstellung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$. Für das dynamische Programm definieren wir nun analog dazu:

```
binom(n, 0) = 1
binom(n, n) = 1

binom(n, i) = binom(n - 1, i) + binom(n - 1, i - 1)
```

Weiters benötigen wir eine $(n+1) \times (i+1)$-Matrix `coeff[][]`, in der wir bereits berechnete Ergebnisse speichern (Memorization-Array). +1, da $i$ bzw. $n$ auch den Wert 0 annehmen können.

Mit diesen Bestandteilen lässt sich das dynamische Programm formulieren. Das dynamische Programm hat quadratische Laufzeit (in $n$) - im Gegensatz zu einer naiven Lösung, welche exponentielle Laufzeit (in $n$) hätte.

```
Input  : n: integer, i: integer
Output: (n über i): integer
Function binom(n, i)
    for k ← 0 to n do
        for l ← 0 to i do
            coeff[k][l] ← ∞;
        end
    end
    for k ← 0 to n do
        coeff[k][0] ← 1;
    end
    for l ← 1 to i do
        coeff[0][l] ← 0;
    end
    return lookupBinom(n, i);
```

```
Input  : n: integer, i: integer
Output: (n über i): integer
Function lookupBinom(n, i)
    if coeff[n][i] = ∞ then
        coeff[n][i] ← lookupBinom(n − 1, i) + lookupBinom(n − 1, i − 1);
    end
    return coeff[n][i];
```

Eine weitere Lösung welche mit weniger Speicher auskommt ist durch folgenden Algorithmus gegeben.
Sei coeff nun ein eindimensionales Array der Länge $n + 1$.

```
Input  : n: integer, i: integer
Output: (n über i): integer
Function binom(n, i)
    if i > n then
        return 0;
    end
    coeff[0] ← 1;
    for k ← 1 to n do
        coeff[k] ← 1;
        for j ← k − 1 to 1 do
            coeff[j] ← coeff[j]+coeff[j − 1];
        end
    end
    return coeff[i];
```

Belegung von coeff nach der $k$-ten Iteration der äußeren Schleife:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k = 1$: | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 |
| $k = 2$: | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 |
| $k = 3$: | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 |
| $k = 4$: | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 |

..
..
..

Die Belegung von coeff nach dem $k$-ten Durchlauf entspricht also der $k$-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks. Das $i$-te Element des nach der $n$-ten Iteration erhaltenen Koeffizientenarrays entspricht so der Lösung von $\binom{n}{i}$.