Assignment 3
Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410
Daniel Kocher, 0926293

April 4, 2016

Aufgabe 5

Proof. Zu zeigen:

i.) Ist D_{ij} ungerade, so gilt $D^{'}_{kj} \leq D^{'}_{ij}$ für alle Nachbarn k von i und

ii.) es gibt einen Knoten $k \in \Gamma(i)$, so dass $D^{'}_{kj} < D^{'}_{ij}$.

$$D_{ij} (\text{mod } 2) = 1 \tag{1}$$

$$\implies \exists l \in \mathbb{N} : D_{ij} = 2l - 1 \tag{2}$$

und es gilt (Lemma aus VO):

$$D_{ij} = 2D^{'}_{ij} - 1 (\text{für } D_{ij} \text{ ungerade}) \tag{3}$$

$$D_{ij} = 2D^{'}_{ij} (\text{für } D_{ij} \text{ gerade}) \tag{4}$$

aus (2) und (3) folgt:

$$2l - 1 = 2D^{'}_{ij} - 1 \implies D^{'}_{ij} = l \tag{5}$$

Der Knoten k ist direkter Nachbar von i also gilt (Lemma aus VO):

$$D_{ij} - 1 \leq D_{kj} \leq D_{ij} + 1 \tag{6}$$

Fall 1: $D_{kj} = D_{ij} - 1$

$$D_{kj} = D_{ij} - 1 = 2l - 2 \tag{7}$$

$$D_{kj} (\text{mod } 2) = 0 \overset{(4)}{\implies} D_{kj} = 2D^{'}_{kj} \tag{8}$$

$$2l - 2 = 2D^{'}_{kj} \implies D^{'}_{kj} = l - 1 \tag{9}$$

$$D^{'}_{ij} = l \land D^{'}_{kj} = l - 1 \implies D^{'}_{kj} < D^{'}_{ij} \tag{10}$$

Fall 2: $D_{kj} = D_{ij}$

$$D_{kj} = D_{ij} = 2l - 1 \tag{11}$$

$$D_{kj} (\text{mod } 2) = 1 \overset{(4)}{\Longrightarrow} D_{kj} = 2D'_{kj} - 1 \tag{12}$$

$$2l - 1 = 2D'_{kj} - 1 \implies D'_{kj} = l \tag{13}$$

$$D'_{ij} = l \wedge D'_{kj} = l \implies D'_{kj} \leq D'_{ij} \tag{14}$$

Fall 3: $D_{kj} = D_{ij} + 1$

$$D_{kj} = D_{ij} + 1 = 2l \tag{15}$$

$$D_{kj} (\text{mod } 2) = 0 \overset{(4)}{\Longrightarrow} D_{kj} = 2D'_{kj} \tag{16}$$

$$2l = 2D'_{kj} \implies D'_{kj} = l \tag{17}$$

$$D'_{ij} = l \wedge D'_{kj} = l \implies D'_{kj} \leq D'_{ij} \tag{18}$$

Damit sind i.) und ii.) wie folgt bewiesen:

i.) durch (10), (14) und (18).

ii.) durch (10) und der Tatsache, dass es einen Knoten k mit $D_{kj} = D_{ij} - 1$ geben muss. Der Knoten k ist der erste Knoten der auf dem kürzesten Weg von i nach j besucht wird. Würde ein solcher Knoten nicht existieren gäbe es auch diesen Weg nicht.

$\square$

Aufgabe 6

Proof. Zu zeigen:

i.) D_{ij} ist gerade genau dann, wenn $\sum_{k\in\Gamma(i)} D^{'}_{kj} \geq D^{'}_{ij} \cdot \deg(i)$.

ii.) D_{ij} ist ungerade genau dann, wenn $\sum_{k\in\Gamma(i)} D^{'}_{kj} < D^{'}_{ij} \cdot \deg(i)$.

$$D_{ij} (\mathrm{mod}\ 2) = 0 \tag{19}$$

$$\implies \exists l \in \mathbb{N} : D_{ij} = 2l \tag{20}$$

und es gilt:

$$D_{ij} = 2D^{'}_{ij} \tag{21}$$

aus (20) und (21) folgt:

$$2l = 2D^{'}_{ij} \implies D^{'}_{ij} = l \tag{22}$$

Der Knoten k ist direkter Nachbar von i also gilt:

$$D_{ij} - 1 \leq D_{kj} \leq D_{ij} + 1 \tag{23}$$

Fall 1: $D_{kj} = D_{ij} - 1$

$$D_{kj} = D_{ij} - 1 = 2l - 1 \tag{24}$$

$$D_{kj} (\mathrm{mod}\ 2) = 1 \implies D_{kj} = 2D^{'}_{kj} - 1 \tag{25}$$

$$2l - 1 = 2D^{'}_{kj} - 1 \implies D^{'}_{kj} = l \tag{26}$$

Fall 2: $D_{kj} = D_{ij}$

$$D_{kj} = D_{ij} = 2l \tag{27}$$

$$D_{kj} (\mathrm{mod}\ 2) = 0 \implies D_{kj} = 2D^{'}_{kj} \tag{28}$$

$$2l = 2D^{'}_{kj} \implies D^{'}_{kj} = l \tag{29}$$

Fall 3: $D_{kj} = D_{ij} + 1$

$$D_{kj} = D_{ij} + 1 = 2l + 1 \tag{30}$$

$$D_{kj} (\mathrm{mod}\ 2) = 1 \implies D_{kj} = 2D^{'}_{kj} - 1 \tag{31}$$

$$2l + 1 = 2D^{'}_{kj} - 1 \implies D^{'}_{kj} = l + 1 \tag{32}$$

Es folgt also aus (26), (29) und (32):

$$\forall k \in \Gamma(i) : D^{'}_{kj} \geq l \tag{33}$$

Weiters folgt aus (10), (14) und (18) sowie ii.) (Aufgabe 5):

$$\forall k \in \Gamma(i) : D^{'}_{kj} < l \tag{34}$$

Sei $m = \big|\Gamma(i)\big| = \deg(i)$, dann folgen daraus die sich gegenseitig ausschließenden Formeln:

$$\sum_{k \in \Gamma(i)} D'_{kj} \geq l \cdot m = D'_{ij} \cdot \deg(i) \tag{35}$$

$$\sum_{k \in \Gamma(i)} D'_{kj} < l \cdot m = D'_{ij} \cdot \deg(i) \tag{36}$$

Aus (35) und (36) folgt dann das Lemma der Angabe. □