Assignment 13
Advanced Algorithms & Data Structures PS

Christian Müller 1123410
Daniel Kocher, 0926293

June 29, 2016

Aufgabe 23

Finden Sie die optimale Klammerung für das Matrixkettenprodukt gegeben durch die Folge von Dimensionen $(41, 40, 4, 25, 34, 12)$. Geben Sie alle $m[i, j]$ und $s[i, j]$ an.

$m[i, j]$ ... minimale Anzahl von Operationen zur Berechnung des Teilprodukts $A_{i,\ldots,j}$.

$s[i, j]$ ... optimaler Splitwert k, für den das Minimum angenommen wird.

$$m[i,j] = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ \min\limits_{i \le k < j} \left\{ m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j \right\}, & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

$$P = \{p_0 = 41, p_1 = 40, p_2 = 4, p_3 = 25, p_4 = 34, p_5 = 12\} \tag{2}$$

Aus P kann man also entnehmen, dass wir $n = 5$ Matrizen multiplizieren wollen:

$$\begin{array}{ll} A_1 : 41 \times 40 & A_4 : 25 \times 34 \\ A_2 : 40 \times 4 & A_5 : 34 \times 12 \\ A_3 : 4 \times 25 & \end{array}$$

Zur Ermittlung der optimalen Klammerung sowie aller Werte für $m[i, j]$ bzw. $s[i, j]$, wenden wir nun den dynamischen Algorithmus $dyn - mat - ket$ und den rekursiven Algorithmus $Opt - Klam$ an. Im Folgenden sind die Ergebnisse für $m[i, j]$ (Table 1) bzw. $s[i, j]$ (Table 2) zusammengefasst. Darunter sind die Berechnungsschritte angegeben (die ersten wurden weggelassen, da ohnehin immer der berechnete Wert bleibt, da das min mit ∞ gebildet wird). Die fett markierten Werte sind jene, die in $m[i, j]$ bzw. $s[i, j]$ eingetragen wurden.

$j \setminus i$	1	2	3	4	5
5	13560	6952	5032	10200	0
4	15536	8840	3400	0	-
3	10660	4000	0	-	-
2	6560	0	-	-	-
1	0	-	-	-	-

Table 1: $m[i, j]$ für $1 \le i, j \le 5$.

$j \setminus i$	1	2	3	4
5	2	2	4	4
4	2	2	3	-
3	2	2	-	-
2	1	-	-	-

Table 2: $s[i, j]$ für $1 \le i \le 4$ und $2 \le j \le 5$.

$$m[1,3] = \min_{1 \le k < 3} \left\{ m[1,k] + m[k+1,3] + p_0 p_k p_3 \right\} \tag{3}$$

$$m[1,3] = \min \begin{cases} m[1,1] + m[2,3] + p_0 p_1 p_3 = 0 + 4000 + 41000 = 45000 (k=1) \\ m[1,2] + m[3,3] + p_0 p_2 p_3 = 6560 + 0 + 4100 = \mathbf{10660\ (k = 2)} \end{cases} \tag{4}$$

$$m[2,4] = \min_{2 \le k < 4} \left\{ m[2,k] + m[k+1,4] + p_1 p_k p_4 \right\} \tag{5}$$

$$m[2,4] = \min \begin{cases} m[2,2] + m[3,4] + p_1 p_2 p_4 = 0 + 3400 + 5440 = \mathbf{8840\ (k = 2)} \\ m[2,3] + m[4,4] + p_1 p_3 p_4 = 4000 + 0 + 34000 = 38000 (k=3) \end{cases} \tag{6}$$

$$m[3,5] = \min_{3 \le k < 5} \left\{ m[3,k] + m[k+1,5] + p_2 p_k p_5 \right\} \tag{7}$$

$$m[3,5] = \min \begin{cases} m[3,3] + m[4,5] + p_2 p_3 p_5 = 0 + 10200 + 1200 = 11400 (k=3) \\ m[3,4] + m[5,5] + p_2 p_4 p_5 = 3400 + 0 + 1632 = \mathbf{5032\ (k = 4)} \end{cases} \tag{8}$$

$$m[1,4] = \min_{1 \le k < 4} \left\{ m[1,k] + m[k+1,4] + p_0 p_k p_4 \right\} \tag{9}$$

$$m[1,4] = \min \begin{cases} m[1,1] + m[2,4] + p_0 p_1 p_4 = 0 + 8840 + 55760 = 64600 (k=1) \\ m[1,2] + m[3,4] + p_0 p_2 p_4 = 6560 + 3400 + 5576 = \mathbf{15536\ (k = 2)} \\ m[1,3] + m[4,4] + p_0 p_3 p_4 = 10660 + 0 + 34850 = 45510 (k=3) \end{cases} \tag{10}$$

$$m[2,5] = \min_{2 \le k < 5} \left\{ m[2,k] + m[k+1,5] + p_1 p_k p_5 \right\} \tag{11}$$

$$m[2,5] = \min \begin{cases} m[2,2] + m[3,5] + p_1 p_2 p_5 = 0 + 5032 + 1920 = \mathbf{6952\ (k = 2)} \\ m[2,3] + m[4,5] + p_1 p_3 p_5 = 4000 + 10200 + 12000 = 26200 (k=3) \\ m[2,4] + m[5,5] + p_1 p_4 p_5 = 8840 + 0 + 16320 = 25160 (k=4) \end{cases} \tag{12}$$

$$m[1,5] = \min_{1 \le k < 5} \left\{ m[1,k] + m[k+1,5] + p_0 p_k p_5 \right\} \tag{13}$$

$$m[1,5] = \min \begin{cases} m[1,1] + m[2,5] + p_0 p_1 p_5 = 0 + 6952 + 19680 = 26632 (k=1) \\ m[1,2] + m[3,5] + p_0 p_2 p_5 = 6560 + 5032 + 1968 = \mathbf{13560\ (k = 2)} \\ m[1,3] + m[4,5] + p_0 p_3 p_5 = 10660 + 10200 + 12300 = 33160 (k=3) \\ m[1,4] + m[5,5] + p_0 p_4 p_5 = 15536 + 0 + 16728 = 32264 (k=4) \end{cases} \tag{14}$$

Damit ergibt sich nach Aufruf von $Opt{-}Klam(A, s, 1, n)$ folgende optimale Klammerung: $\big((A_1)\,(A_2)\big)\Big(\big((A_3)\,(A_4)\big)\,(A_5)\Big)$.

Mit dieser Klammerung ergeben sich die minimalen Kosten von 13560:

$$A' = A_1 \cdot A_2 \Rightarrow (41 \times 40)\text{-Matrix} \cdot (40 \times 4)\text{-Matrix} = 41 \cdot 40 \cdot 4 = 6560 \quad (41 \times 4)\text{-Matrix} \tag{15}$$

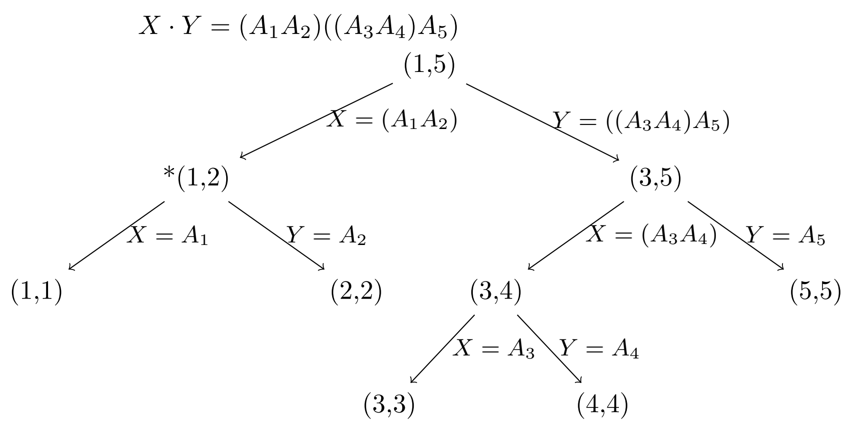
$$A'' = A_3 \cdot A_4 \Rightarrow (4 \times 25)\text{-Matrix} \cdot (25 \times 34)\text{-Matrix} = 4 \cdot 25 \cdot 34 = 3400 \quad (4 \times 34)\text{-Matrix} \tag{16}$$

$$A''' = A'' \cdot A_5 \Rightarrow (4 \times 34)\text{-Matrix} \cdot (34 \times 12)\text{-Matrix} = 4 \cdot 34 \cdot 12 = 1632 \quad (4 \times 12)\text{-Matrix} \tag{17}$$

$$A'''' = A' \cdot A''' \Rightarrow (41 \times 4)\text{-Matrix} \cdot (4 \times 12)\text{-Matrix} = 41 \cdot 4 \cdot 12 = 1968 \quad (41 \times 12)\text{-Matrix} \tag{18}$$

Damit ergeben sich die Gesamtkosten dieser Klammerung mit $6560 + 3400 + 1632 + 1968 = \mathbf{13560}$.

Rekursion $Opt - Klam(A, s, 1, n)$:



(a) Ende

*: bedeutet $Opt - Klam(A, s, 1, n)$
$X = Opt - Klam(A, s, 1, s[1, 2] = 1) = A_1$
$Y = Opt - Klam(A, s, s[1, 2] + 1 = 2, 2) = A_2$
Return (XY)