

# Technische Universität Dresden

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik

Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie

## Motorradzeugs

vorgelegt von: Marius Müller

geboren am: 29. September 1989 in Dresden

zum Erlangen des akademischen Grades

## Diplomingenieur

(Dipl.-Ing.)

Betreuer:

Dipl.-Ing. Markus

noch ein Betreuer

Verantwortlicher Hochschullehrer:

Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack

Tag der Einreichung:

10.08.2022

Bitte ersetzen Sie diese Seite vor dem Binden mit der Aufgabenstellung.

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tage dem Prüfungsausschuss der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik eingereichte zum Thema

## **Motorradzeugs**

selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, wurden als solche kenntlich gemacht.

Dresden, 2. Februar 2222

Marius Müller

## **Kurzfassung**

An dieser Stelle fügen Sie bitte eine deutsche Kurzfassung ein.

## **Abstract**

Please insert the English abstract here.

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Abkürzungsverzeichnis</b> . . . . .	III
<b>Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen</b> . . . . .	V
<b>Verzeichnis der verwendeten Indizes</b> . . . . .	VII
<b>Symbolverzeichnis</b> . . . . .	IX
<b>Abbildungsverzeichnis</b> . . . . .	XI
<b>Tabellenverzeichnis</b> . . . . .	XIII
<b>1 Vorwort</b> . . . . .	1
<b>2 Mathematische Grundlagen</b> . . . . .	3
2.1 Einführung . . . . .	3
2.2 Mengen . . . . .	5
2.3 Körper . . . . .	5
2.4 Gruppen . . . . .	6
2.5 Vektorräume . . . . .	6
2.6 Punkte und Vektoren . . . . .	7
<b>3 Koordinatensysteme</b> . . . . .	13
3.1 Rechtssystem . . . . .	13
3.2 Natürliche Koordinaten . . . . .	13
3.3 Homogene Koordinatensysteme . . . . .	13
3.4 Koordinatentransformation . . . . .	14
3.5 Rotationsmatrizen . . . . .	15
3.5.1 Eigenschaften von Rotationsmatrizen . . . . .	16

<b>4 Grundlagen der Mechanik</b> . . . . .	19
4.1 Starrkörperbewegung . . . . .	19
4.2 Lagrange Gleichung 2. Art . . . . .	20
4.2.1 Kinetische Energie . . . . .	21
4.2.2 Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	22
<b>5 Literaturverzeichnis</b> . . . . .	I
<b>Anhang</b> . . . . .	A-1

# Abkürzungsverzeichnis

---

**FDM**      Finite Differenzen Methode





# Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

---

$\alpha$	$\text{m}^2/\text{s}$	Temperaturleitfähigkeit
$\rho$	$\text{kg}/\text{m}^3$	Dichte
$c$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$	spezifische Wärmekapazität
$k$	$\frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$	thermische Leitfähigkeit
$L$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$	latente Wärme



# Verzeichnis der verwendeten Indizes

---

<b>l</b>	liquid/flüssig
<b>s</b>	solid/fest
<b>i</b>	interface/Grenzschicht
<b>m</b>	melting point/Schmelzpunkt
<b>U</b>	Unterseite
<b>O</b>	Oberseite



# Symbolverzeichnis

---

Notation	Bedeutung
$\ \cdot\ $	euklidische Norm
$\vec{a}$	Vektor
$\mathbf{A}$	Matrix
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
Symbol	Bedeutung
$t$	Zeit



# Abbildungsverzeichnis

---





# Tabellenverzeichnis

---



Problemstellungen der Kinetik lassen sich in geeigneter Weise im dreidimensionalen Raum formulieren. Dabei dient dieser zur Beschreibung der Lage und der Lageänderung des zu analysierenden Systems.

Um den dreidimensionalen Raum selbst beschreiben zu können wurden zahlreiche mathematische Konzepte entwickelt. Im Folgenden soll ein grundlegender Überblick über diese Konzepte gegeben werden. Sie sind dem Fachgebiet der Linearen Algebra zuzuordnen. Ihre Darstellung ist dem Lehrbuch [1] entnommen. Anhand eines Beispiels werden einige wichtige Begriffe eingeführt. Diese werden in den folgenden Abschnitten detailliert erklärt. Anschließend werden die zur Modellierung verwendeten kinematischen Konzepte erläutert und das Modell hergeleitet.



## 2.1 Einführung

Bei der Analyse von Problemen ist es in der Mathematik ebenso wie in anderen Fachbereichen üblich, mit Hilfe von Modellen möglichst einfache Grundstrukturen zu finden, welche für die Lösung des untersuchten Problems von Interesse sind. Dabei kann die gezielte Untersuchung eines einzelnen Modells losgelöst von der eigentlichen Problemstellung durchgeführt werden. Dadurch ist ein Modell in der Regel leichter überschaubar, als das eigentliche Problem.

Die Beschreibung des dreidimensionalen Raumes baut auf einer Reihe von Grundstrukturen auf. Die Basis bilden Mengen, deren Elemente und Abbildungen (siehe Abschnitt 2.2). Darauf aufbauend werden Gruppen (siehe 2.4) und Körper (siehe 2.3) definiert. Anschließend können Vektorräume über einem Körper und deren Elemente - die Vektoren - definiert werden (siehe 2.5). Der dreidimensionale Raum lässt sich dann mit Hilfe geeigneter Basisvektoren als Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen in Form eines Koordinatensystems darstellen. Für Vektoren und Matrizen werden bestimmte Rechenregeln (insbesondere Addition und Multiplikation) definiert und deren Handhabung in speziellen Koordinatensystemen beschrieben.

Zur Beschreibung des dreidimensionalen Raumes stellen wir uns eine Ebene  $E$  vor, welche beliebig in dem uns umgebenden Raum liegt. Jetzt wählen wir einen beliebigen Punkt dieser Ebene aus, und bezeichnen diesen als Nullpunkt  $O$  eines Koordinatensystems. Anschließend legen wir Drei Koordinatenachsen  $X, Y$ , und  $Z$  mit Hilfe von Geraden fest. Alle Drei Geraden sollen sich dabei im Punkt  $O$  schneiden und die reellen Zahlen komplett durchlaufen. Weiterhin sollen keine zwei Geraden parallel zueinander sein. Zusätzlich sollen die Geraden paarweise derart senkrecht aufeinander stehen, dass sie ein Rechtssystem bilden.

Außerdem definieren wir auf jeder Achse einen speziellen Punkt:  $I_x, I_y$  und  $I_z$ . Dieser Punkt hat vom Ursprung, entlang der jeweiligen Achse auf der er liegt, genau den Abstand 1. Man nennt diesen Abstand *Einheitslänge*.

Wir definieren einen Vektor  $\vec{e}_x$ , welcher vom Ursprung auf den Punkt  $I_x$  zeigt und zwangsläufig auf der Geraden  $X$  liegt. Analog definieren wir die Vektoren  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$ . Diese Vektoren mit *Einheitslänge*, welche entlang der Koordinatenachsen liegen, nennen wir *Einheitsvektoren*. Als Tripel notiert haben sie entlang der Achse, in welche sie zeigen, eine 1 als Eintrag und sonst eine 0. Damit gilt  $\vec{e}_x = (1,0,0)$ ,  $\vec{e}_y = (0,1,0)$ ,  $\vec{e}_z = (0,0,1)$ . Durch die genannten Bedingungen ist es nicht möglich einen der *Einheitsvektoren* als *Linearkombination* der Anderen darzustellen. Damit bilden diese *Einheitsvektoren* die *Basis* für einen *Vektorraum*  $V$  (den dreidimensionalen Raum).

Weiterhin definieren wir einen Streckungsfaktor  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Mit Hilfe von  $\alpha \cdot I_x$  beschreiben wir das Bild des Punktes  $I_x$ , welches sich durch Streckung mit Streckungszentrum im Ursprung  $O$ , entlang der  $x$ -Achse, um den Streckungsfaktor  $\alpha$  ergibt. Die Zuordnung  $\alpha \rightarrow \alpha \cdot I_x$  liefert damit eine eindeutige, umkehrbare Zuordnung der reellen Zahlen auf die Punkte der Gerade  $x$ . Dabei ist das Bild der Streckung des *Einheitsvektors*  $\vec{e}_x$  äquivalent mit dem Bild der Streckung des Punktes  $I_x$ . Weiterhin definieren wir für die Achsen  $Y$  und  $Z$  die Streckungsfaktoren  $\beta$  und  $\gamma$ .

Mit Hilfe dieser Festlegungen können beliebige Punkte im Raum beschrieben werden. Alle Punkte des Raumes bilden dabei die *Menge*  $R^3$ . Man sagt, dass die Punkte *Elemente* dieser *Menge* sind. Betrachtet man zum Beispiel einen Punkt auf der Ebene  $E$ , so kann man dieses *Element* als Tripel von reellen Zahlen interpretieren:  $P = (x_1, y_1, z_1)$ . Man nennt dieses Tripel die *Koordinaten* von  $P$  (bezüglich des gewählten Koordinatensystems). Der Ursprung des Koordinatensystems hat bezüglich des Koordinatensystems, dessen Ursprung er ist, immer die Koordinaten  $(0,0,0)$ . Den Wert von  $x_1$  erhält man geometrisch durch Konstruktionen einer Normalen bezüglich der  $x$ -Achse, welche den Punkt  $P$  durchläuft. Den Fußpunkt dieser Normalen kann man durch Streckung des zuvor definierten Punktes  $I_x$  um den Faktor  $\alpha_P$  erhalten. Dabei entspricht eben diese reelle Zahl  $\alpha_P$  dem Wert von  $x_1$ .

Die Werte für  $y_1$  und  $z_1$  ergeben sich analog. Die so erhaltene Zuordnung

$P \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$  bezeichnet man als eine Abbildung. Mit Hilfe dieser Abbildung wird beliebigen Punkten der Ebene  $E$  in eindeutiger Weise ein Zahlentripel von reellen Zahlen zugeordnet. Man sagt auch, dass dieses Zahlentripel ein *Element* des *Vektorraumes*  $V$  ist, welcher über dem *Körper* der reellen Zahlen definiert ist. Da die Achsen des Koordinatensystems durch die *Basis* des *Vektorraumes* beschrieben werden sind die Zahlenwerte des Tripels zwangsläufig abhängig von der Wahl der Koordinatensystemursprungs und der *Basisvektoren*.

Da dieses Zahlentripel nicht nur ein *Element* einer *Menge*, sondern ein Vektor eines *Vektorraumes* ist, gibt es alternative Schreibweisen für den Punkt  $P$ . Die üblichste Alternative ist die Darstellung als Spaltenvektor  $\vec{v} \in \mathcal{R}^3$ . Dabei erhält man  $\vec{v}$  durch Subtraktion der Koordinaten des Punktes  $P$  von den Koordinaten des gewählten Koordinatenursprungs. Beziehen sich alle Angaben auf das gleiche System, so entsprechen die Komponenten von  $\vec{v}$  genau Koordinaten von  $P$  und

die Darstellung als Spaltenvektor lautet:  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ . Man kann  $\vec{v}$  auch als

*Linearkombination* der *Basis* der *Vektorraumes*  $V$  darstellen:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z = \alpha_P \vec{e}_x + \beta_P \vec{e}_y + \gamma_P \vec{e}_z$$

*Bemerkung 2.1.* Die Beschränkung auf die Betrachtung von Rechtssystemen ist als einführendes Beispiel besonders gut geeignet, da alle in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensysteme die damit verbundenen Eigenschaften erfüllen sollen. Wollte man auch nicht orthogonale Koordinatensystem betrachten, so führt dies zwangsläufig auf die Betrachtung von kovarianten und kontravarianten Basen und die Tensorrechnung. Eine gut lesbare Einführung in dieses Thema ist [2] zu entnehmen. Eine ausführliche Behandlung der Thematik ist in [3] enthalten. ♦

## 2.2 Mengen

## 2.3 Körper

Körper sind Zahlssysteme mit gewissen Axiomen für die Addition und Multiplikation, welche auf den Axiomen von Gruppen aufbauen.

Text...

## 2.4 Gruppen

Unter einer *inneren Verknüpfung* auf einer Menge  $\mathcal{M}$  versteht man eine Abbildung  $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . Sie ordnet jedem Paar  $(a, b)$  von Elementen aus  $\mathcal{M}$  ein Element  $f(a, b) \in \mathcal{M}$  zu. Die innere Verknüpfung muss also eine abgeschlossene Verknüpfung sein. Es wird die Notation  $a \cdot b$  anstelle von  $f(a, b)$  verwendet, um den verknüpfenden Charakter der Abbildung zu verdeutlichen.

**Definition 1.** Eine Menge  $\mathcal{G}$  mit einer inneren Verknüpfung  $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, (a, b) \rightarrow a \cdot b$ , heißt eine Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Die Verknüpfung ist assoziativ, d. h. es gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}. \quad (2.1)$$

- Es existiert ein neutrales Element  $e$  in  $\mathcal{G}$ , das heißt ein Element  $e \in \mathcal{G}$  mit

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \forall a \in \mathcal{G}. \quad (2.2)$$

- Zu jedem  $a \in \mathcal{G}$  gibt es ein inverses Element, das heißt ein Element  $b \in \mathcal{G}$  mit

$$a \cdot b = b \cdot a = e. \quad (2.3)$$

Dabei ist  $e$  das nach Gleichung (2.2) existierende (eindeutig bestimmte) neutrale Element von  $\mathcal{G}$ .

- Die Gruppe heißt kommutativ oder abelsch, falls die Verknüpfung kommutativ ist, das heißt falls zusätzlich gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathcal{G}. \quad (2.4)$$

## 2.5 Vektorräume

Vektorräume enthalten als fundamentale Struktur zwei Rechenoperationen: die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation mit einem Skalar (einem Element



des Körpers, über dem der Vektorraum definiert ist). Addition und Multiplikation genügen den so genannten Vektorraumaxiomen, welche bezüglich der Addition auf den Gruppenaxiomen aufbauen.

Text....

## 2.6 Punkte und Vektoren

Zur Beschreibung eines Punktes wird ein Koordinatensystem benötigt. Ein Punkt wird eindeutig durch seine *Position* relativ zu diesem Koordinatensystem beschrieben. Als Koordinatensystem wird das Koordinatensystem  $I$  aus 3.1 verwendet. Die Position eines Punktes  $p$  kann dann wie folgt beschrieben werden:

$$p = (x|y|z) \in \mathcal{R}^3 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Die Position von  $p$  ist damit relativ zu  $I$  eindeutig beschrieben.

Ein Vektor  $\vec{a} \in \mathcal{R}^3$  hat im Gegensatz zum Punkt eine *Richtung* und einen *Betrag* beziehungsweise eine Länge. Die Begriffe Betrag und Länge werden im Folgenden synonym verwendet. Mit beiden Eigenschaften ist die euklidische Norm des Vektors  $\vec{a}$  gemeint. Folgende Darstellung wird für den Betrag eines Vektors  $\vec{a}$  verwendet:

$$|\vec{a}| := \|\vec{a}\|$$

Ein Vektor kann frei im Raum verschoben werden, so lange seine Richtung und sein Betrag konstant bleiben. Man spricht daher auch von freien Vektoren. Für die Darstellung von Vektoren gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine Variante ist die Angabe von Anfangspunkt  $q$  und Endpunkt  $p$

$$\vec{a} = p - q = \overrightarrow{qp}.$$

Da Vektoren frei verschiebbar sind, ist die Wahl der Anfangs- und Endpunkte jedoch nicht eindeutig. Es gibt daher andere Punkte  $r, s$ , für die gilt:

$$\vec{a} = p - q = r - s$$

mit

$$p \neq r \text{ und } q \neq s$$

Eine weitere Darstellung ist die Komponentenschreibweise bezüglich eines Koordinatensystems  $I$ , welche durch Projektion auf die Basisvektoren von  $I$  gegeben ist:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

damit ergibt sich der Betrag eines Vektor zu

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$$

Folgende Eigenschaften gelten für Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  (nach [4]):

- Vektoren sind *gleich*, wenn sie in Richtung und Betrag übereinstimmen

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |a| = |b| \wedge \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$$

- **Addition**/ Subtraktion von Vektoren erfolgt durch Addition/ Subtraktion der Komponenten

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \pm x' \\ y \pm y' \\ z \pm z' \end{pmatrix}$$

Es gelten die Rechenregeln:

- Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \pm \vec{b} + \vec{a}$$

- Assoziativgesetz:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$  erfolgt durch Multiplikation aller Komponenten mit dem Skalar

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix}$$

Es gelten die Rechenregeln:

- Distributivgesetz:

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

- weitere Regeln:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \vec{a} &= \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \\ (\lambda \mu) \vec{a} &= \lambda (\mu \vec{a}) = \mu (\lambda \vec{a}) \\ |\lambda \vec{a}| &= |\lambda| |\vec{a}| \end{aligned}$$

- Das **Skalarprodukt**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zweier Vektoren ist das Produkt der Beträge und dem Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels  $\varphi$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = (x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3) (x' \vec{e}_1 + y' \vec{e}_2 + z' \vec{e}_3)$$

Es gelten die Rechenregeln:

- Kommutativgesetz:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

- Distributivgesetz:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

- weitere Regeln:

$$\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle$$

*Bemerkung 2.2* (Orthogonale Vektoren). Verschwindet das Skalarprodukt zweier von Null verschiedenen Vektoren, so stehen diese senkrecht aufeinander.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$



*Bemerkung 2.3* (Winkel zwischen Vektoren). Der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren ergibt sich aus dem Quotienten vom Skalarprodukt der beiden Vektoren und dem Produkt der Beträge der Vektoren.

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$$



*Bemerkung 2.4* (Richtungskosinus). Ein Vektor  $\vec{a}$  bildet mit den drei Koordinatenachsen seines Bezugssystems der Reihe nach die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , die als *Richtungswinkel* bezeichnet werden. Der Kosinus der jeweiligen Winkel wird als Richtungskosinus bezeichnet.

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{a_x}{a} \quad \cos \beta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_2|} = \frac{a_y}{a} \quad \cos \gamma = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_3|} = \frac{a_z}{a}$$

Die Richtungswinkel sind jedoch nicht voneinander unabhängig, sondern über die Beziehung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

miteinander verknüpft. ◆

- das **Vektorprodukt** (auch Kreuzprodukt)  $\vec{a} \times \vec{b}$  hat als Ergebnis einen Vektor, der senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  steht und dessen Länge gleich dem Produkt der Beträge von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und dem Sinus des durch die Vektoren eingeschlossenen Winkels  $\varphi$  ist.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vartheta)) \vec{n} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

, wobei  $\vec{n}$  derjenige zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrechte Einheitsvektor ist, der diese zu einem Rechtssystem ergänzt.

Es gelten die Rechenregeln:

– Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

– Anti-Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

– weitere Regeln:

$$\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

Da das Kreuzprodukt mit dem Vektor  $\vec{a}$  eine lineare Abbildung ist, kann

$\vec{b} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b}$  mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{\mathbf{a}} \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \quad (2.6)$$



## 3.1 Rechtssystem

Gegeben sei ein euklidisches Koordinatensystem  $I \in \mathcal{R}^3$  mit den Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Für die Basisvektoren gelte:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (3.1)$$

und weiterhin

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad (3.2)$$

Die Basisvektoren von  $I$  beschreiben damit ein orthonormales Rechtssystem (siehe beispielsweise [4, S. 80]). Im Folgenden wird, wenn nicht explizit anderweitig angegeben, davon ausgegangen, dass alle verwendeten Koordinatensysteme diese Eigenschaften erfüllen.

## 3.2 Natürliche Koordinaten

engl. natural coordinates wie ist der richtige deutsche Begriff?

## 3.3 Homogene Koordinatensysteme

Translation eines Vektors  $\vec{v} = (x, y, z)^T$  mit einem Vektor  $\vec{q} = (a, b, c)^T$ :

$$\vec{v}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

statt

$$\vec{v}' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \end{bmatrix}.$$

Eine Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  erfüllt stets die Bedingung:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{E}$$

Eine Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ , welche sich aus Rotation  $\mathbf{R}$  und Translation  $\vec{q}$  zusammensetzt, wird in homogenen Koordinaten beschrieben mit:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & q_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & q_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Inverse dieser Transformationsmatrix berechnet sich unter Beachtung der Orthogonalitätseigenschaft von  $\mathbf{R}$  zu

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Betrachtet man hingegen eine Transformationsmatrix im  $\mathcal{R}^3$ , welche eine Rotation beinhaltet, so wird die inverse dieser Transformation nach folgenden Regeln berechnet:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{R} \\ \mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \end{aligned}$$

## 3.4 Koordinatentransformation

Gegeben seien ein inertiales Koordinatensystem  $I$  und zwei, um eine beliebige Achse in Relation zu  $I$  gedrehte, Koordinatensysteme  $B, C$ .

**Rotationen** Es sei ein Punkt  $q_b = (x_b, y_b, z_b)^T$  im Koordinatensystem  $B$  gegeben. Werden die Koordinatenachsen von  $B$  durch die Einheitsvektoren  $\vec{e}_{1b}, \vec{e}_{2b}, \vec{e}_{3b}$  im Inertialsystem  $I$  beschrieben, so kann der Punkt von  $B$  nach



$I$  durch eine Transformation überführt werden:

$$q_i = \begin{pmatrix} \vec{e}_{1b} & \vec{e}_{2b} & \vec{e}_{3b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{ib} q_b$$

Der Index der Transformationsmatrix ist so zu verstehen, dass der erste Buchstabe das Zielsystem und der zweite Buchstabe das Ursprungssystem der Transformationsmatrix angibt.

Analog zur Transformation eines Punktes kann auch ein Vektor  $\vec{v}_b = q_b - p_b$ , welcher im System  $B$  definiert wurde, in das System  $I$  transformiert werden:

$$\vec{v}_i = \mathbf{R}_{ib} \vec{v}_b = \mathbf{R}_{ib} q_b - \mathbf{R}_{ib} p_b = q_i - p_i.$$

Weiterhin können Transformationen aneinandergereiht werden. Beschreibt die Transformationsmatrix  $\mathbf{R}_{bc}$  die Verdrehung von  $C$  relativ zu  $B$ , so erhält man die Transformationsmatrix von  $C$  nach  $I$  durch eine Kombination der Transformation vom System  $C$  in das System  $B$  mit der Transformation vom System  $B$  in das System  $I$ . Die Kombination erfolgt dabei durch linksseitige Matrixmultiplikation der jeweiligen Transformationsmatrizen in der angegebenen Reihenfolge.

$$\mathbf{R}_{ic} = \mathbf{R}_{ib} \mathbf{R}_{bc}$$

## Rotation und Translation

### 3.5 Rotationsmatrizen

Gegeben sei ein Koordinatensystem  $K$ , welches um eine Achse  $l$  relativ zu einem inertialen Koordinatensystem  $I$  gedreht wurde. Die Orientierung dieser Drehachse sei durch einen Vektor  $\vec{l}$  mit Einheitslänge beschrieben. Die Achsen von  $K$  relativ zu  $I$  seien gegeben durch die Vektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3$ . Die drei Spaltenvektoren werden horizontal zu einer Matrix

$$\mathbf{R} = [\vec{u} \quad \vec{w} \quad \vec{v}] = \begin{pmatrix} u_x & w_x & v_x \\ u_y & w_y & v_y \\ u_z & w_z & v_z \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

zusammengefasst. Die Matrix  $\mathbf{R}$  wird als Rotationsmatrix bezeichnet.

### 3.5.1 Eigenschaften von Rotationsmatrizen

Die Spalten der Rotationsmatrix  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  seien die Vektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3$ . Da diese ein Koordinatensystem aufspannen haben sie die in Gleichung (3.1) und Gleichung (3.2) definierten Eigenschaften. Aus Gleichung (3.1) folgt für die Matrix  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{w} & \vec{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (3.4)$$

und mit Hilfe der Regeln der linearen Algebra [4, S. 100] und Gleichung (3.1)

$$\det \mathbf{R} = \langle \vec{u}, \vec{w} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 \quad (3.5)$$

Die Menge der orthogonalen  $3 \times 3$  Matrizen mit der Determinante eins wird als  $\mathcal{SO}(3)$  bezeichnet [5]. Allgemein wird definiert:

$$\mathcal{SO}(n) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{R}^{n \times n} : \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = +1 \}. \quad (3.6)$$

Die Menge  $\mathcal{SO}(3) \subset \mathcal{R}^{3 \times 3}$  bildet mit der Abbildungsvorschrift *Matrixmultiplikation* eine Gruppe entsprechend den im Abschnitt 2.4 geforderten Regeln. Die geforderten Eigenschaften werden wie folgt erfüllt:

- Die Verknüpfung ist abgeschlossen. Für  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \mathcal{SO}(3)$  gilt auch  $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \in \mathcal{SO}(3)$ , da

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^T = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1^T = \mathbf{I} \quad (3.7)$$

$$\det(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) = \det(\mathbf{R}_1) \det(\mathbf{R}_2) = +1 \quad (3.8)$$

gilt.

- Die Gruppe  $\mathcal{SO}(3)$  ist assoziativ

Aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation (Beweis siehe z. B. [1, s. 93]) folgt

$$(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3) \quad (3.9)$$

- Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element

$$\mathbf{I}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{R} \quad \forall \mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3) \quad (3.10)$$

mit

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aus Gleichung (3.4) folgt, dass  $\mathbf{R}^T \in \mathcal{SO}(3)$  das inverse Element von  $\mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3)$  ist.

*Bemerkung 3.1.* Die Lage eines Starrkörpers, welcher sich frei im Raum drehen kann, kann zu jedem Zeitpunkt durch eine eindeutige Rotationsmatrix  $\mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3)$  beschrieben werden. Die Menge der Rotationsmatrizen  $\mathcal{SO}(3)$  wird daher als der Konfigurationsraum des Systems bezeichnet. Eine Trajektorie des Systems wird durch die Kurve  $\mathbf{R}(t) \in \mathcal{SO}(3)$  für  $t \in [0, T]$  abgebildet. Weiterhin dient die Matrix  $\mathbf{R}$  zur Transformation von Punkten von einem körperfesten, um eine beliebige Achse gedrehten, Koordinatensystem in ein Inertialsystem. Diese Funktion ist in Abschnitt 3.4 genauer dargelegt.  $\blacklozenge$



## 4.1 Starrkörperbewegung

Die Bewegung eines Punktes  $p$  im euklidischen Raum wird durch die Angabe seiner Position in Bezug zu einem inertialen Koordinatensystem  $I$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig beschrieben. Die Position des Punktes  $p$  sei durch das Tripel  $(x, y, z) \in \mathcal{R}^3$  gegeben. Die Trajektorie von  $p$  kann dann durch die parametrisierte Bahn  $p(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{R}^3$  beschrieben werden. Da nicht die Bewegung von einzelnen Punkten, sondern die Bewegung eines Starrkörpers beschrieben werden soll, soll zunächst der Begriff Starrkörper definiert werden.

**Definition 2** (Starrkörper). *Ein Starrkörper ist dadurch gekennzeichnet, dass die Distanz zweier beliebiger Punkte  $p, q$ , welche auf dem Körper liegen, unabhängig von der Bewegung des Körpers, immer konstant bleibt. Die anfängliche Position des Punktes  $p$  sei beschrieben durch  $p(0)$ . Die Position nach einer beliebigen Zeit  $t$  (und einer beliebigen Bewegung) sei beschrieben durch  $p(t)$ . Die Nomenklatur gelte für den Punkt  $q$  analog. Für einen Starrkörper wird gefordert:*

$$\|p(t) - q(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = \text{konstant}$$

Eine Starrkörperbewegung kann prinzipiell aus Rotation, Translation oder einer Überlagerung dieser Bewegungen bestehen. Wird ein Körper durch eine Teilmenge  $O \in \mathcal{R}^3$  beschrieben, so kann seine Bewegung als eine kontinuierliche Zuordnung  $g(t) : O \rightarrow \mathcal{R}^3$  beschrieben werden. Die kontinuierliche Zuordnungsvorschrift  $g(t)$  beschreibt, wie sich die einzelnen Punkte des Körpers relativ zu einem inertialen, festen Koordinatensystem mit Voranschreiten der Zeit  $t$  bewegen. Die Zuordnungsvorschrift  $g$  darf dabei die Distanz zwischen Punkten des Körpers und die Orientierung von Vektoren, welche Punkte des Körpers verbinden, nicht verändern. Damit ergibt sich die Definition einer Abbildung von Starrkörpern:

**Definition 3** (Abbildung eines Starrkörpers). [5] Eine Zuordnungsvorschrift  $g : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$  ist die Abbildung eines Starrkörpers genau dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Distanzen bleiben unverändert:  $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$  für alle Punkte  $p, q \in \mathcal{R}^3$
2. Das Kreuzprodukt bleibt erhalten:  $g(\vec{v} \times \vec{w}) = g(\vec{v}) \times g(\vec{w})$  für alle Vektoren  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{R}^3$ .

*Bemerkung 4.1.* Man kann mit Hilfe der Polarisationsformel zeigen, dass das Skalarprodukt durch die Abbildungsvorschrift  $g$  für einen Starrkörper erhalten bleibt [5]:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle g(\vec{v}), g(\vec{w}) \rangle.$$

Ein orthonormales Rechtssystem wird durch die Abbildungsvorschrift  $g$  demnach wieder in ein orthonormales Rechtssystem transformiert.  $\blacklozenge$

Der Astronom und Mathematiker Giulio Mozzi zeigte bereits 1763, dass eine räumliche Bewegung in eine Drehung und eine Verschiebung entlang der Drehachse zerlegt werden kann. Da sich die Teilchen eines Starrkörpers nicht relativ zueinander bewegen können, kann die Bewegung eines Starrkörpers durch die relative Bewegung eines körperfesten Koordinatensystems  $K$  zu einem Inertialsystem beschrieben werden. Das Koordinatensystem  $K$  erfülle dabei die in 3.1 genannten Eigenschaften. Das körperfeste Koordinatensystem hat seinen Ursprung in einem beliebigen Punkt  $p$  des Körpers. Die Orientierung von  $K$  beschreibt die Rotation des Körpers und die Lage des Ursprungs von  $K$  relativ zum Inertialsystem beschreibt den translatorischen Anteil der Starrkörperbewegung. Hat  $K$  die Einheitsvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ , dann kann die Bewegung von  $K$  durch die Abbildung  $g$  beschrieben werden. Genauer gesagt liefert  $g(\vec{v}_1), g(\vec{v}_2), g(\vec{v}_3)$  die Orientierung von  $K$  und  $g(p)$  die Lage des Ursprungs nach einer Starrkörperbewegung.

## 4.2 Lagrange Gleichung 2. Art

Ein System mit  $n$  generalisierten Koordinaten  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$  und  $m$  Zwangsbedingungen  $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)^T = \vec{0}$ , dessen Kinetische Energie  $T$

und potentielle Energie  $V$  durch  $L = T - V$  beschrieben werden kann, lässt sich nach [6, S. 124] charakterisieren durch:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta \vec{q}^T \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} + \Phi_q^T \vec{\lambda} - \vec{Q}_{ex} \right) \right] dt = 0 \quad (4.1)$$

Dabei gelten die Dimensionen

$$\delta \vec{q} \in \mathcal{R}^n \quad L \in \mathcal{R} \quad \vec{q} \in R^n \quad \Phi \in R^{m \times n} \quad \vec{\lambda} \in R^m \quad \vec{Q} \in R^n$$

Der Vergleich mit der üblichen Form der Gleichung von Lagrange (2. Art) Gleichung (4.2) macht einige Unterschiede deutlich.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0 \quad (4.2)$$

mit

$$\vec{q} \in R^{n-m}$$

Die generalisierten Koordinaten müssen mit Hilfe der Zwangsbedingungen auf einen Satz von Minimalkoordinaten reduziert werden. Diese Minimalkoordinaten müssen voneinander unabhängig sein.

### 4.2.1 Kinetische Energie

Die kinetische Energie  $K$  eines Starrkörpers wird durch die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes  $\vec{A}$ , welcher ein Element des Körpers ist, und seiner Massenverteilung nach Gleichung (4.3) beschrieben.

$$K = \frac{1}{2} \int_m \dot{\vec{A}}^2 dm \quad (4.3)$$

Der Punkt  $\vec{A}$  kann in den Koordinaten des körperfesten Koordinatensystems mit Ursprung  $\vec{P}$  durch den Vektor  $(x, y, z, 1)^T$  und die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  beschrieben werden. Die kinetische Energie lässt sich dann entsprechend

umformen.

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \int_m (x, y, z, 1) \dot{\mathbf{T}}^T \dot{\mathbf{T}} (x, y, z, 1)^T \\
&= \frac{1}{2} \int_m (x, y, z, 1) \begin{bmatrix} \dot{u}^2 & \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle & \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle & \langle \dot{u}, \dot{\vec{P}} \rangle \\ \langle \dot{w}, \dot{u} \rangle & \dot{w}^2 & \langle \dot{w}, \dot{v} \rangle & \langle \dot{w}, \dot{\vec{P}} \rangle \\ \langle \dot{v}, \dot{u} \rangle & \langle \dot{v}, \dot{w} \rangle & \dot{v}^2 & \langle \dot{v}, \dot{\vec{P}} \rangle \\ \langle \dot{\vec{P}}, \dot{u} \rangle & \langle \dot{\vec{P}}, \dot{w} \rangle & \langle \dot{\vec{P}}, \dot{v} \rangle & \dot{\vec{P}}^2 \end{bmatrix} (x, y, z, 1)^T \\
&= \frac{1}{2} \dot{\vec{P}}^2 \int_m dm + \frac{1}{2} \dot{u}^2 \int_m x^2 dm + \frac{1}{2} \dot{w}^2 \int_m y^2 dm + \frac{1}{2} \dot{v}^2 \int_m z^2 dm \\
&\quad + \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle \int_m xy dm + \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle \int_m xz dm + \langle \dot{w}, \dot{v} \rangle \int_m yz dm \\
&\quad + \langle \dot{u}, \dot{\vec{P}} \rangle \int_m x dm + \langle \dot{v}, \dot{\vec{P}} \rangle \int_m z dm + \langle \dot{w}, \dot{\vec{P}} \rangle \int_m y dm
\end{aligned}$$

und unter der Annahme, dass  $\vec{P}$  der Schwerpunkt des Körpers ist folgt mit Hilfe des Trägheitstensors

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{P}}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} I_x \left( -\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \dot{v}^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} I_y \left( \dot{u}^2 - \dot{w}^2 + \dot{v}^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} I_z \left( \dot{u}^2 + \dot{w}^2 - \dot{v}^2 \right) \\
&\quad + C_{xz} \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle + C_{xy} \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle + C_{yz} \langle \dot{w}, \dot{v} \rangle
\end{aligned}$$

### 4.2.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Eine virtuelle Verschiebung ist eine infinitesimale, rein virtuelle Änderung des Zustands eines Systems, ohne das die Zeit dabei voran schreitet. Die Zustandsänderung muss dabei mit den Zwangsbedingungen verträglich sein. Wenn ein System durch generalisierte Koordinaten  $\vec{q}$  beschrieben wird, dann wird die virtuelle Verschiebung durch  $\delta \vec{q}$  notiert. Virtuelle Verschiebungen verhalten sich genau so wie andere infinitesimale Variationen einer Größe. Damit sind virtuelle Verschiebungen ähnlich dem Differentialoperator, aber nur mit Bezug auf die abhängigen Variablen und nicht auf die Zeit. Das Beispiel 4.1 soll dies verdeutlichen.



Bei der Arbeit mit virtuellen Verschiebungen gelten die gleichen Gesetze wie bei Anwendung des Differentialoperators bezüglich Summen, Produkten und Verkettungen. Außerdem kann der Variationsoperator virtuelle Verschiebung mit dem Differential- und Integraloperator vertauscht werden.

*Beispiel 4.1* (Virtuelle Verschiebungen). Gegeben sei eine Funktion  $\phi(\vec{q}, t) \in \mathcal{R}$ , welche von  $n$  generalisierten Koordinaten  $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$  und außerdem explizit von der Zeit  $t$  abhängt. Die virtuelle Verschiebung dieser Funktion berechnet sich nach folgendem Schema:

$$\delta\phi(\vec{q}, t) = \phi_{\vec{q}} \delta\vec{q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \phi(\vec{q}, t) & \frac{\partial}{\partial q_2} \phi(\vec{q}, t) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_n} \phi(\vec{q}, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix}$$

◇

Die virtuelle Arbeit ist definiert als die Summe aller an einem System angreifenden Kräfte, welche einer virtuellen Verschiebung ausgesetzt sind. In einem System mit  $n$  generalisierten Koordinaten an welchem  $k$  Kräfte angreifen, wird die virtuelle Arbeit durch Gleichung (4.4) beschrieben.

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_1^k Q_k \delta\vec{q}_k \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial Q_k}{\partial q_1} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial Q_k}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_n} + \dots + \frac{\partial Q_k}{\partial q_n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$



# Literaturverzeichnis

---

- [1] S. Bosch, *Lineare Algebra*. Springer Berlin Heidelberg, 2014. DOI: 10.1007/978-3-642-55260-1. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-55260-1>.
- [2] A. Röthlisberger, N. Rothfuchs, A. Metlar und P. Reinhard, *Vektoralgebra*, Vorlesungsskript Multilineare Algebra und ihre Anwendungen, SS 2007, Mai 2007. Adresse: <https://people.math.ethz.ch/~grsam/MultLinAlgSS07/group8.pdf>.
- [3] K. Jänich, *Vektoranalysis*. Springer-Verlag GmbH, 11. Jan. 2005, XII275 S., ISBN: 3540237410. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/3169876/klaus\\_jaenich\\_vektoranalysis.html](http://www.ebook.de/de/product/3169876/klaus_jaenich_vektoranalysis.html).
- [4] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*. Springer Science + Business Media, 2014. DOI: 10.1007/978-3-658-05620-9. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-05620-9>.
- [5] R. M. Murray, Z. Li und S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC PR INC, 11. März 1994, 480 Seiten, ISBN: 0849379814. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/3803129/richard\\_m\\_murray\\_zexiang\\_li\\_s\\_shankar\\_sastry\\_a\\_mathematical\\_introduction\\_to\\_robotic\\_manipulation.html](http://www.ebook.de/de/product/3803129/richard_m_murray_zexiang_li_s_shankar_sastry_a_mathematical_introduction_to_robotic_manipulation.html).
- [6] J. G. de Jalón und E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer New York, 1994. DOI: 10.1007/978-1-4612-2600-0. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-2600-0>.
- [7] R. Lot, „A motorcycle tire model for dynamic simulations: Theoretical and experimental aspects“, *Meccanica*, Bd. 39, Nr. 3, S. 207–220, Juni 2004. DOI: 10.1023/b:mecc.0000022842.12077.5c. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1023/B:MECC.0000022842.12077.5c>.

- [8] M. Tanelli, M. Corno und S. Saveresi, *Modelling, Simulation and Control of Two-Wheeled Vehicles*. JOHN WILEY & SONS INC, 31. März 2014, 348 Seiten, ISBN: 111995018X. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/21283014/mara\\_tanelli\\_matteo\\_corno\\_sergio\\_saveresi\\_modelling\\_simulation\\_and\\_control\\_of\\_two\\_wheeled\\_vehicles.html](http://www.ebook.de/de/product/21283014/mara_tanelli_matteo_corno_sergio_saveresi_modelling_simulation_and_control_of_two_wheeled_vehicles.html).
- [9] P. Thede und L. Parks, *Race Tech's Motorcycle Suspension Bible*. Motorbooks International, 1. Mai 2010, 256 Seiten, ISBN: 0760331405. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/8809885/paul\\_thede\\_lee\\_parks\\_race\\_tech\\_s\\_motorcycle\\_suspension\\_bible.html](http://www.ebook.de/de/product/8809885/paul_thede_lee_parks_race_tech_s_motorcycle_suspension_bible.html).
- [10] J. Stoffregen, *Motorradtechnik*. Vieweg+Teubner Verlag, 23. Mai 2012, x488 S., ISBN: 3834817163. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/18260420/juergen\\_stoffregen\\_motorradtechnik.html](http://www.ebook.de/de/product/18260420/juergen_stoffregen_motorradtechnik.html).
- [11] V. Cossalter und R. Lot, „A motorcycle multi-body model for real time simulations based on the natural coordinates approach“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 37, Nr. 6, S. 423–447, 2002. DOI: 10.1076/vesd.37.6.423.3523. eprint: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1076/vesd.37.6.423.3523>.
- [12] K. Magnus und H. H. Müller-Slany, *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Teubner B.G. GmbH, 11. Okt. 2005, 302 Seiten, ISBN: 3835100076. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/3555786/kurt\\_magnus\\_hans\\_heinrich\\_mueller\\_slany\\_grundlagen\\_der\\_technischen\\_mechanik.html](http://www.ebook.de/de/product/3555786/kurt_magnus_hans_heinrich_mueller_slany_grundlagen_der_technischen_mechanik.html).
- [13] I. J. Besselink, A. J. Schmeitz und H. B. Pacejka, „An improved magic formula/swift tyre model that can handle inflation pressure changes“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 48, Nr. sup1, S. 337–352, Dez. 2010. DOI: 10.1080/00423111003748088. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1080/00423111003748088>.
- [14] H. B. Pacejka, „Tire characteristics and vehicle handling and stability“, in *Tire and Vehicle Dynamics*, Elsevier BV, 2012, S. 1–58. DOI: 10.1016/b978-0-08-097016-5.00001-2. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-08-097016-5.00001-2>.

- [15] J. G. de Jalón, N. Shimizu und D. Gómez, „Natural coordinates for teaching multibody systems with matlab“, in *Volume 5: 6th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B, and C*, ASME International, 2007. DOI: 10.1115/detc2007-35358. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1115/DETC2007-35358>.
- [16] P. Flores, R. Pereira, M. Machado und E. Seabra, *The Pneumatic Tire*, A. N. Gent und J. D. Walter, Hrsg. National Highway Traffic Safety Administration, Washington, DC, 2006.
- [17] J. Baumgarte, „Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 1, Nr. 1, S. 1–16, Juni 1972. DOI: 10.1016/0045-7825(72)90018-7. Adresse: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(72\)90018-7](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(72)90018-7).
- [18] P. Flores, R. Pereira, M. Machado und E. Seabra, „Investigation on the baumgarte stabilization method for dynamic analysis of constrained multibody systems“, in *Proceedings of EUCOMES 08*, Springer Science + Business Media, 2008, S. 305–312. DOI: 10.1007/978-1-4020-8915-2\_37.
- [19] T. Westermann, *Mathematik für Ingenieure mit Maple*. Springer Berlin Heidelberg, 30. März 2006. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/22005420/thomas\\_westermann\\_mathematik\\_fuer\\_ingenieure\\_mit\\_maple.html](http://www.ebook.de/de/product/22005420/thomas_westermann_mathematik_fuer_ingenieure_mit_maple.html).
- [20] N. W. Akimoff, *Elementary course in Lagrange's equations and their applications to solutions of problems of dynamics, with numerous examples*. Philadelphia, Pa., Philadelphia book company, 1917.
- [21] H. B. Pacejka und E. Bakker, „THE MAGIC FORMULA TYRE MODEL“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 21, Nr. sup001, S. 1–18, Jan. 1992. DOI: 10.1080/00423119208969994. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1080/00423119208969994>.



# Anhang

---

<b>A Anhang mit Sachen</b>	<b>A-3</b>
----------------------------	------------





# Anhang mit Sachen

---







