

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	III
<b>Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen</b>	IV
<b>Verzeichnis der verwendeten Indizes</b>	V
<b>Symbolverzeichnis</b>	VI
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	VII
<b>Tabellenverzeichnis</b>	VIII
<b>1 Mathematische Grundlagen</b>	1
1.1 Einführung	1
1.2 Mengen	4
1.2.1 Teilmengen	5
1.2.2 Vereinigung und Durchschnitt	6
1.2.3 Differenz von Mengen	6
1.2.4 Kartesisches Produkt	7
1.2.5 Mächtigkeit	7
1.3 Abbildung	7
1.3.1 Komposition von Abbildungen	8
1.4 Gruppen	9
1.5 Körper	11
1.6 Vektorräume	13
1.6.1 Matrizen	17
1.7 Punkte und Vektoren im Anschauungsraum	18
1.7.1 Vektoren des $\mathcal{R}^3$	19

<b>2 Koordinatensysteme</b>	25
2.1 Kartesische normierte Rechtssysteme	26
2.2 Koordinatentransformation in homogenen Koordinaten	27
2.2.1 hilfreiche Literatur	27
2.2.2 Rotationen und deren Darstellung als Matrizen	27
2.2.3 Homogene Koordinaten	30
2.2.4 Transformationen	33
2.3 Natürliche Koordinaten	34
2.3.1 Eigenschaften natürlicher Koordinaten	37
2.4 Wichtige Begriffe und weitere Konzepte	37
<b>3 Grundlagen der Mechanik</b>	39
3.1 Starrkörperbewegung	39
3.1.1 Vektor der Winkelgeschwindigkeit	43
3.2 Lagrange Gleichung 2. Art	44
3.2.1 Ergänzungen	44
3.2.2 Richtiger Inhalt	45
3.2.3 Kinetische Energie	46
3.2.4 Prinzip der virtuellen Arbeit	47
3.2.5 Bewegung in homog. Koords	50
3.3 Lösung der Differentialgleichungen	50
<b>4 Motorradmodell</b>	51
<b>5 Literaturverzeichnis</b>	I

# Abkürzungsverzeichnis

---

**FDM**      Finite Differenzen Methode

# Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

---

$\alpha$	$\text{m}^2/\text{s}$	Temperaturleitfähigkeit
$\rho$	$\text{kg}/\text{m}^3$	Dichte
$c$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$	spezifische Wärmekapazität
$k$	$\frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$	thermische Leitfähigkeit
$L$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$	latente Wärme

# Verzeichnis der verwendeten Indizes

---

<b>l</b>	liquid/flüssig
<b>s</b>	solid/fest
<b>i</b>	interface/Grenzschicht
<b>m</b>	melting point/Schmelzpunkt
<b>U</b>	Unterseite
<b>O</b>	Oberseite

# Symbolverzeichnis

---

Notation	Bedeutung
$\ \cdot\ $	euklidische Norm
$\vec{a}$	Vektor
$\mathbf{A}$	Matrix
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
Symbol	Bedeutung
$t$	Zeit

# Abbildungsverzeichnis

---

# Tabellenverzeichnis

---



## 1.1 Einführung

Bei der Analyse von Problemen ist es in der Mathematik ebenso wie in anderen Fachbereichen üblich, mit Hilfe von Modellen möglichst einfache Grundstrukturen zu finden, welche für die Lösung des untersuchten Problems von Interesse sind. Dabei kann die gezielte Untersuchung einer solchen Grundstruktur losgelöst von der eigentlichen Problemstellung durchgeführt werden. Dadurch ist ein Modell in der Regel leichter überschaubar, als das eigentliche Problem.

Als einführendes Beispiel wird eine geeignete Beschreibung des dreidimensionalen Raumes entworfen. Dieses ist in weiten Teilen [1] nachempfunden.

Die Beschreibung des dreidimensionalen Raumes baut auf einer Reihe von Grundstrukturen auf. Die Basis bilden Mengen, deren Elemente und Abbildungen (siehe Abschnitt 1.2). Darauf aufbauend werden im Abschnitt 1.4 Gruppen als Mengen mit einer inneren Abbildung definiert. Im Abschnitt 1.5 werden die Eigenschaften von Gruppen weiter eingeschränkt, was auf den Begriff des Körpers führt. Anschließend können Vektorräume über einem Körper und deren Elemente - die Vektoren - definiert werden (siehe 1.6). Wegen ihrer hohen Relevanz für diese Arbeit werden im Abschnitt 1.7 die Rechenregeln von Vektoren und Matrizen eingeführt. Außerdem wird der Unterschied zwischen Punkten und Vektoren aufgeführt. Die Ausführungen zu diesen Elementen der linearen Algebra sind [1], [2] und [3] entnommen. Die Eigenschaften von Vektoren sind [4] entnommen. Der dreidimensionale Raum <sup>1</sup> wird auf Basis der so eingeführten Begriffe mit Hilfe einer geeigneten Basis als Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen in Form eines Koordinatensystems im Kapitel 2 eingeführt.

Um die Position eines Körpers im Raum beschreiben zu können werden weiterhin für Vektoren und Matrizen unter anderem die Rechenregeln Addition

---

<sup>1</sup> der dreidimensionale Raum wird in dieser Arbeit als Anschauungsraum bezeichnet

und Multiplikation nach [4] definiert. Im Kapitel 2 werden die so eingeführten Gesetze verwendet um die Handhabung von Koordinatensystemen im Detail zu beschreiben.

Zur Beschreibung des dreidimensionalen Raumes sei eine Ebene  $E$  gegeben, welche beliebig im Anschauungsraum liegt. Weiterhin sei ein beliebiger Punkt dieser Ebene gegeben, welcher als Nullpunkt  $O$  eines Koordinatensystems dienen soll. Zusätzlich seien drei Geraden  $X, Y$ , und  $Z$  gegeben, welche als Koordinatenachsen dienen. Alle drei Geraden sollen sich dabei im Punkt  $O$  schneiden und die reellen Zahlen komplett durchlaufen. Außerdem sollen keine zwei Geraden parallel zueinander sein. Ferner sollen die Geraden paarweise derart senkrecht aufeinander stehen, dass sie ein Rechtssystem bilden. Überdies sei auf jeder Gerade ein spezieller Punkt definiert:  $I_x, I_y$  und  $I_z$ . Dieser Punkt habe vom Ursprung, entlang der jeweiligen Achse auf der er liegt, genau den Abstand 1. Man bezeichnet diesen Abstand als *Einheitslänge*.

Hinzukommend wird ein Vektor  $\vec{e}_x$  definiert, welcher vom Ursprung aus auf den Punkt  $I_x$  zeigt und damit zwangsläufig auf der Geraden  $X$  liegt. Analog werden die Vektoren  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  definiert. Diese Vektoren mit *Einheitslänge*, welche entlang der Koordinatenachsen liegen, werden *Einheitsvektoren* genannt. Als Tripel notiert haben sie entlang der Achse, in welche sie zeigen, eine 1 als Eintrag und sonst eine 0. Damit gilt  $\vec{e}_x = (1,0,0)$ ,  $\vec{e}_y = (0,1,0)$ ,  $\vec{e}_z = (0,0,1)$ . Durch die genannten Bedingungen ist es nicht möglich einen der *Einheitsvektoren* als *Linearkombination* der Anderen darzustellen. Damit bilden diese *Einheitsvektoren* eine *Basis* für einen *Vektorraum*  $V$ . Da die *Einheitsvektoren* genau drei unabhängige Vektoren sind ist der von ihnen aufgespannten Raum *Vektorraum* gleich dem dreidimensionalen Raum.

Weiterhin sei ein Streckungsfaktor  $\alpha \in \mathcal{R}$  definiert. Mit Hilfe von  $\alpha \cdot I_x$  sei das Bild des Punktes  $I_x$  beschrieben, welches sich durch Streckung mit Streckungszentrum im Ursprung  $O$ , entlang der  $x$ -Achse, um den Streckungsfaktor  $\alpha$  ergibt. Die Zuordnung  $\alpha \rightarrow \alpha \cdot I_x$  liefert damit eine eindeutige, umkehrbare Zuordnung der reellen Zahlen auf die Punkte der Geraden  $X$ . Dabei ist das Bild der Streckung des *Einheitsvektors*  $\vec{e}_x$  äquivalent mit dem Bild der Streckung des Punktes  $I_x$ . Zusätzlich seien für die Achsen  $Y$  und  $Z$  die Streckungsfaktoren  $\beta$  und  $\gamma$  nach dem gleichen Schema definiert.

Mit Hilfe dieser Festlegungen können beliebige Punkte im Raum beschrieben werden. Alle Punkte des Raumes bilden dabei die *Menge*  $R^3$ . Man sagt, dass die Punkte *Elemente* dieser *Menge* sind. Betrachtet man zum Beispiel einen Punkt auf der Ebene  $E$ , so kann man dieses *Element* als Tripel von reellen Zahlen interpretieren:  $P = (x_1, y_1, z_1)$ . Man nennt dieses Tripel die *Koordinaten* von  $P$  (bezüglich des gewählten Koordinatensystems). Der Ursprung des Koordinatensystems hat bezüglich des Koordinatensystems, dessen Ursprung er ist, immer die Koordinaten  $(0,0,0)$ . Den Wert von  $x_1$  erhält man geometrisch durch Konstruktion einer Normalen bezüglich der  $x$ -Achse, welche den Punkt  $P$  durchläuft. Den Fußpunkt dieser Normalen kann man durch Streckung des zuvor definierten Punktes  $I_x$  um den Faktor  $\alpha_P$  erhalten. Dabei entspricht eben diese reelle Zahl  $\alpha_P$  dem Wert von  $x_1$ .

Die Werte für  $y_1$  und  $z_1$  ergeben sich analog. Die so erhaltene Zuordnung  $P \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$  bezeichnet man als eine Abbildung. Mit Hilfe dieser Abbildung wird beliebigen Punkten der Ebene  $E$  in eindeutiger Weise ein Zahlentripel von reellen Zahlen zugeordnet. Man sagt auch, dass dieses Zahlentripel ein *Element* des *Vektorraumes*  $V$  ist, welcher über dem *Körper* der reellen Zahlen definiert ist. Aufgrund dessen, dass die Achsen des Koordinatensystems durch die *Basis* des *Vektorraumes* beschrieben werden, sind die Zahlenwerte des Tripels zwangsläufig abhängig von der Wahl des Koordinatensystemursprungs und der *Basisvektoren*. Da dieses Zahlentripel nicht nur ein *Element* einer *Menge*, sondern insbesondere ein Vektor eines *Vektorraumes* ist, gibt es alternative Schreibweisen für den Punkt  $P$ . Die Üblichste ist die Darstellung als Spaltenvektor  $\vec{v} \in \mathcal{R}^3$ . Dabei erhält man  $\vec{v}$  durch Subtraktion der Koordinaten des Punktes  $P$  von den Koordinaten des gewählten Koordinatenursprungs. Beziehen sich alle Angaben auf das gleiche System, so entsprechen die Komponenten von  $\vec{v}$  genau den Koordinaten von  $P$

und die Darstellung als Spaltenvektor lautet:  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ . Man kann  $\vec{v}$  auch als

*Linearkombination* der *Basis* des *Vektorraumes*  $V$  darstellen:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z = \alpha_P \vec{e}_x + \beta_P \vec{e}_y + \gamma_P \vec{e}_z$$

*Bemerkung 1.1.* Die Beschränkung auf die Betrachtung von Rechtssystemen ist als einführendes Beispiel besonders gut geeignet, da alle in dieser Arbeit

verwendeten Koordinatensysteme die damit verbundenen Eigenschaften erfüllen sollen. Wollte man auch nicht orthogonale Koordinatensystem betrachten, so führt dies zwangsläufig auf die Betrachtung von kovarianten und kontravarianten Basen und die Tensorrechnung. Eine Einführung in dieses Thema ist [5] zu entnehmen. Eine ausführliche Behandlung der Thematik ist in [6] enthalten. ♦

## 1.2 Mengen

**Definition 1** (Mengen; nach G. Cantor). *Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge [7].*

*Ist  $\mathcal{M}$  eine Menge und  $x$  ein Objekt, so notiert man  $x \in \mathcal{M}$ , wenn die Menge  $\mathcal{M}$  das Objekt  $x$  enthält und  $x \notin \mathcal{M}$ , wenn dies nicht der Fall ist.*

*Enthält die Menge  $\mathcal{M}$  keine Elemente, so nennt man dies die **leere Menge**<sup>2</sup>  $\{\}$  beziehungsweise  $\emptyset$ .*

Mengen können durch Aufzählung aller Elemente oder durch die Angabe von Eigenschaften, welche die Elemente erfüllen sollen, definiert werden. In Beispiel 1.1 sind verschiedene Mengendefinition zu finden.

Die angegebene Definition für Mengen ist zwar anschaulich, verzichtet aber auf eine axiomatische Begründung. Im Rahmen dieser Arbeit ist diese Definition jedoch ausreichend. Eine präzise Definition von Mengen erfordert erheblichen Aufwand und ist beispielsweise in [8] enthalten.

Die folgenden Mengen sind von besonderer Bedeutung:

- die natürlichen Zahlen  $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- die ganzen Zahlen  $\mathcal{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- die rationalen Zahlen  $\mathcal{Q} = \{\frac{p}{q} \mid q, p \in \mathcal{Z}, q \neq 0\}$
- die reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  als Menge aller, unter Umständen nicht abbrechenden, Dezimalbrüche [2, S. 12]

---

<sup>2</sup> jede Menge besitzt die leere Menge als Teilmenge

*Beispiel 1.1* (Mengendefinitionen).

$$\mathcal{M}_1 = \{1, 2, 5, 8, 10\}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl und ungerade}\}$$

◇

Die Reihenfolge der Elemente einer Menge ist ohne Bedeutung. Daher gilt  $\mathcal{M}_1 = \{1, 4, 8\} = \{4, 8, 1\}$ . Enthält eine Menge ein Element mehrfach, so ist diese Multiplizität ohne Bedeutung, daher gilt  $\mathcal{M}_1 = \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 5, 3, 5\}$ . Zur Handhabung von Mengen gibt es eine Reihe von Axiomen, auf welche im Folgenden eingegangen wird.

### 1.2.1 Teilmengen

Es sei  $\mathcal{X}$  eine Menge und  $P(x)$  eine Aussage. Die Gültigkeit der Aussage (wahr oder falsch) sei für alle Elemente  $x$  überprüfbar. Man nennt dann

$$\mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{X} \mid P(x) \text{ ist wahr}\} \quad (1.1)$$

eine **Teilmenge** von  $\mathcal{X}$  und notiert  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ .

Die Mengen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  heißen *gleich*, wenn jedes Element von  $\mathcal{X}$  auch in  $\mathcal{Y}$  enthalten ist und umgekehrt:  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \Leftrightarrow \forall x (x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow x \in \mathcal{Y})$ .

Gilt  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \neq \mathcal{X}$ , so nennt man  $\mathcal{Y}$  eine *echte Teilmenge* von  $\mathcal{X}$  und notiert  $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{X}$ <sup>3</sup>.

Die Gesamtheit aller Teilmengen einer Menge  $\mathcal{X}$  bildet die sogenannte **Potenzmenge**  $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{X}\}$ .

*Bemerkung 1.2* (Notation für Teilmengen). In der Literatur ist die Kennzeichnung einer echten Teilmenge im Gegensatz zu einer Teilmenge nicht einheitlich. Es gibt folgende Notationen:

- Teilmenge:  $\subset$ , echte Teilmenge:  $\subsetneq$
- Teilmenge:  $\subseteq$ , echte Teilmenge:  $\subset$

◆

---

3 Mit dem Symbol  $\wedge$  ist das logische Und - die *Konjunktion* - und mit dem Symbol  $\vee$  ist das logische Oder - die *Disjunktion* - gemeint. Für Erklärungen zu diesen logischen Operatoren siehe [9, S. 28]

### 1.2.2 Vereinigung und Durchschnitt

Sei  $\mathcal{X}$  eine Menge und  $\mathcal{I}$  eine Indexmenge, das heißt die Elemente von  $\mathcal{I}$  sollen als Indizes dienen. Ist für jedes  $i \in \mathcal{I}$  eine Teilmenge  $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$  gegeben, so nennt man

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i := \{x \in \mathcal{X} \mid \text{es existiert ein } i \in \mathcal{I} \text{ mit } x \in \mathcal{X}_i\} \quad (1.2)$$

die **Vereinigung** der Mengen  $\mathcal{X}_i, i \in \mathcal{I}$ . In der so entstehenden Teilmenge von  $\mathcal{X}$  sind also all jene  $x$  enthalten, die in wenigstens einer der vereinten Teilmengen  $\mathcal{X}_i$  enthalten sind.

Der **Durchschnitt**<sup>4</sup> der Mengen wird mit

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i := \{x \in \mathcal{X} \mid x \in \mathcal{X}_i \quad \forall i \in \mathcal{I}\} \quad (1.3)$$

beschrieben. In der durch den Durchschnitt gebildeten Teilmenge von  $\mathcal{X}$  sind also diejenigen Elemente  $x$  der Menge  $\mathcal{X}$  enthalten, welche in allen Teilmengen  $\mathcal{X}_i$  enthalten sind, von denen der Durchschnitt gebildet wurde.

Für die Verknüpfung von zwei Mengen schreibt man insbesondere:

$$\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 = \{x \mid x \in \mathcal{X}_1 \vee x \in \mathcal{X}_2\}$$

für die Vereinigung und

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \{x \mid x \in \mathcal{X}_1 \wedge x \in \mathcal{X}_2\}$$

für den Durchschnitt.

Ist der Durchschnitt zweier Mengen leer, gilt also

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset \quad (1.4)$$

dann bezeichnet man die Mengen als **disjunkt**.

### 1.2.3 Differenz von Mengen

Sind  $\mathcal{X}_1$  und  $\mathcal{X}_2$  Teilmengen einer Menge  $\mathcal{X}$ , so heißt

$$\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_2 := \{x \in \mathcal{X}_1 \mid x \notin \mathcal{X}_2\} \quad (1.5)$$

die **Differenz** von  $\mathcal{X}_1$  und  $\mathcal{X}_2$ . Auch dies ist eine Teilmenge von  $\mathcal{X}$  und sogar von  $\mathcal{X}_1$ .

---

<sup>4</sup> den *Durchschnitt* von Mengen bezeichnet man auch kurz als *Schnitt*

### 1.2.4 Kartesisches Produkt

Es seien  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$  Mengen. Dann heißt

$$\prod_{i=1}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathcal{X}_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}_n\} \quad (1.6)$$

das **kartesische Produkt** der Mengen  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ . Eine gleichbedeutenden Notation lautet  $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ . Die Elemente  $(x_1, \dots, x_n)$  werden als **n-Tupel** mit Komponenten  $x_i \in \mathcal{X}_i, i = 1, \dots, n$ , bezeichnet.

Zwei n-Tupel  $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)$  gelten genau dann als gleich, wenn  $x_i = x'_i$  für  $i = 1, \dots, n$  erfüllt ist.

Das 2-Tupel  $(3, 5)$  beschreibt einen Punkt auf einer Zahlenebene. Ein 2-Tupel bezeichnet man als *Paar*.

Ein 3-Tupel bezeichnet man als *Tripel*. Ein Beispiel für ein Tripel ist der Körper  $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ , welcher durch die Menge der reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation gebildet wird.

### 1.2.5 Mächtigkeit

Sei  $\mathcal{X}$  eine Menge, dann bezeichnet man mit

$$|\mathcal{X}| \quad (1.7)$$

die **Mächtigkeit** der Menge und meint damit die Anzahl der Elemente, welche in  $\mathcal{X}$  enthalten sind. Es gilt

$$|\mathcal{X}| := \begin{cases} n, & \text{falls } \mathcal{X} \text{ endlich ist und } n \text{ Elemente enthält} \\ \infty, & \text{falls } \mathcal{X} \text{ nicht endlich ist.} \end{cases}$$

## 1.3 Abbildung

**Definition 2** (Abbildung). *Eine Abbildung  $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  zwischen zwei Mengen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  ist eine Vorschrift, welche jedem  $x \in \mathcal{X}$  ein wohlbestimmtes Element  $y \in \mathcal{Y}$  zuordnet, welches mit  $f(x)$  bezeichnet wird. Man schreibt auch  $x \longmapsto f(x)$ . Man bezeichnet  $\mathcal{X}$  als den Definitionsbereich und  $\mathcal{Y}$  als den Bild- oder Wertebereich<sup>5</sup> der Abbildung  $f$ .*

---

<sup>5</sup> der Bildbereich wird auch Zielmenge genannt

### 1.3.1 Komposition von Abbildungen

Gegeben seien zwei Abbildungen  $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  und  $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$  zwischen Mengen. Dann kann man die Abbildungen komponieren:

$$g \circ f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Z}, \quad x \longmapsto g(f(x)). \quad (1.8)$$

Alternative Bezeichnungen für eine Komposition lauten *Hintereinanderausführung* und *Verkettung*.

*Beispiel 1.2* (Ort als Bild der Zeit). Ordnet man jedem Zeitpunkt  $t$  den Ort beziehungsweise die Position des Schwerpunkts eines Körpers zu, so entspricht dies einer Abbildung  $f : t \longmapsto f(t)$ . Der Definitionsbereich sei beispielsweise gegeben durch beliebige, positive, reelle Zahlen und der Wertebereich durch beliebige, reelle Zahlen. Der Körper kann sich dann frei im Anschauungsraum bewegen und seine Position ist mit Hilfe der Abbildung  $f(t)$  eindeutig beschrieben.  $\diamond$

*Bemerkung 1.3* (Umkehrbarkeit einer Abbildung). In der Definition einer Abbildung wird gefordert, dass jedem  $x \in \mathcal{X}$  ein eindeutiges Bild  $y \in \mathcal{Y}$  zugeordnet wird. Die Umkehrung, dass jedem  $y \in \mathcal{Y}$  ein eindeutiges Urbild  $x \in \mathcal{X}$  zugeordnet werden kann, kann daraus nicht geschlossen werden.  $\blacklozenge$

Seien  $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}, \mathcal{N} \subset \mathcal{Y}$  und  $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  eine Abbildung, so nennt man:

$$f(\mathcal{M}) := \{y \in \mathcal{Y} \mid \text{es existiert ein } x \in \mathcal{M} \text{ mit } y = f(x)\} \quad (1.9)$$

**Bild**(-menge) von  $\mathcal{M}$  unter der Abbildung  $f$  und

$$f^{-1}(\mathcal{N}) := \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \in \mathcal{N}\} \quad (1.10)$$

**Urbild**(-menge) von  $\mathcal{N}$  unter der Abbildung  $f$ .

Weiterhin bezeichnet man  $f$  als

- **injektiv**, falls für  $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$  gilt:  $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ , das heißt, dass verschiedene Elemente des Definitionsbereichs auf verschiedene Elemente des Wertebereichs abgebildet werden beziehungsweise dass das Urbild  $f^{-1}(y)$  eines jeden  $y \in \mathcal{Y}$  entweder leer ist, oder aus genau einem  $x \in \mathcal{X}$  besteht
- **surjektiv**, falls gilt:  $\forall y \in \mathcal{Y} \quad \exists x \in \mathcal{X} : f(x) = y$ , das heißt jedes Element des Wertebereichs wird durch Abbildung mindestens eines Elements aus dem Definitionsbereich erreicht



- **bijektiv**, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist. Für bijektive Abbildungen  $f$  lässt sich die **Umkehrabbildung**  $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}, g := f^{-1}$  bilden, welche jedem Element der Bildmenge ein Element aus dem Definitionsbereich zuordnet.

**Definition 3** (Lineare Abbildung). *Eine Abbildung  $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$  zwischen den Vektorräumen  $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$  über dem Körper  $\mathcal{K}$  heißt lineare Abbildung über  $\mathcal{K}$ , falls gilt:*

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \text{für } a, b \in \mathcal{V} \quad (1.11)$$

$$f(\alpha a) = \alpha f(a) \quad \text{für } \alpha \in \mathcal{K}, a \in \mathcal{V}. \quad (1.12)$$

*Daraus folgen die notwendigen Rechenregeln*

$$f(0) = 0$$

$$f(-a) = -f(a) \quad \text{für } a \in \mathcal{V}.$$

## 1.4 Gruppen

Unter einer **inneren Verknüpfung** auf einer Menge  $\mathcal{M}$  versteht man eine Abbildung  $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . Sie ordnet jedem Paar  $(a, b)$  von Elementen aus  $\mathcal{M}$  ein Element  $f(a, b) \in \mathcal{M}$  zu. Die innere Verknüpfung muss also eine abgeschlossene<sup>6</sup> Verknüpfung sein. Es wird die Notation  $a \cdot b$  anstelle von  $f(a, b)$  verwendet, um den verknüpfenden Charakter der Abbildung zu verdeutlichen. Ist die Verknüpfung kommutativ, gilt also  $f(a, b) = f(b, a)$  für alle  $a, b \in \mathcal{M}$ , so wird die Verknüpfung  $f$  durch  $a + b$  notiert.

**Definition 4.** *Eine Menge  $\mathcal{G}$  mit einer inneren Verknüpfung  $\circ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ ,  $(a, b) \longmapsto a \circ b$ , heißt eine Gruppe  $(\mathcal{G}, \circ)$ , wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- *Die Verknüpfung  $\circ$  ist assoziativ, d. h. es gilt*

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}. \quad (1.13)$$

- *Es existiert ein **neutrales Element**  $e$  in  $\mathcal{G}$ , das heißt ein Element  $e \in \mathcal{G}$  mit*

$$e \circ a = a \circ e = a \quad \forall a \in \mathcal{G}. \quad (1.14)$$

---

<sup>6</sup> der Begriff *Abgeschlossenheit* wird im Abschnitt 1.5 genauer erklärt

Das neutrale Element einer Gruppe ist offensichtlich zugleich links-neutral und rechts-neutral.

- Zu jedem  $a \in \mathcal{G}$  gibt es ein **inverses Element**, das heißt ein Element  $b \in \mathcal{G}$  mit

$$a \circ b = b \circ a = e. \quad (1.15)$$

Dabei ist  $e$  das nach Gleichung (1.14) existierende (eindeutig bestimmte) neutrale Element von  $\mathcal{G}$ . Das inverse Element  $b$  einer Gruppe ist links-invers und recht-invers.

- Die Gruppe  $(\mathcal{G}, \circ)$  heißt kommutativ oder **abelsch**, falls die Verknüpfung kommutativ ist, das heißt falls zusätzlich gilt:

$$a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in \mathcal{G}. \quad (1.16)$$

*Beispiel 1.3* (Beispiele für Gruppen).

- Die Menge  $\mathcal{Z}$  mit der Verknüpfung Addition „+“
- Die Menge  $\mathcal{R}$  mit der Verknüpfung Addition „+“ und  $\mathcal{R}^* := \mathcal{R} - \{0\}$  mit der Multiplikation „·“

◇

*Bemerkung 1.4* (multiplikative Verknüpfungen). Ist die Verknüpfung einer Gruppe in multiplikativer Schreibweise gegeben, so wird

- das neutrale Element  $e$  als **Einselement** bezeichnet und als 1 notiert
- das inverse Element  $b$  zu  $a$  als  $a^{-1}$  notiert
- das Verknüpfungszeichen „·“ meist weggelassen
- für endliche Elemente  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{G}$  das Produkt der Elemente als  $\prod_{i=1}^n a_i := a_1 \cdot \dots \cdot a_n$  definiert, wobei  $\prod_{i=1}^0 a_i := 1$  gilt.

◆

*Bemerkung 1.5* (additive Verknüpfungen). Ist die Verknüpfung einer Gruppe kommutativ, so verwendet man die additive Schreibweise und

- bezeichnet das neutrale Element  $e$  als **Nullelement** und schreibt 0
- notiert das inverse Element  $b$  zu  $a$  als  $-a$

- definiert für endliche Elemente  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{G}$  die Summe der Elemente als  $\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + \dots + a_n$ , wobei  $\sum_{i=1}^0 a_i := 0$  gilt.



## 1.5 Körper

Körper sind Zahlssysteme mit gewissen Axiomen für die Addition und Multiplikation, welche auf den Axiomen von Gruppen aufbauen.

**Definition 5** (Körper). *Ein Körper ist eine Menge  $\mathcal{K}$  mit zwei inneren Verknüpfungen, geschrieben als Addition und Multiplikation, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1.  $\mathcal{K}$  ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition, das heißt die Addition ist assoziativ nach Gleichung (1.13), hat ein neutrales Element 0 nach Gleichung (1.14) und ein inverse Element  $-a \in \mathcal{K}$  nach Gleichung (1.15) zu  $a \in \mathcal{K}$  und sie ist kommutativ nach Gleichung (1.16)
2.  $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$  ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation, das heißt die Multiplikation ist assoziativ nach Gleichung (1.13), hat das neutrale Element 1 nach Gleichung (1.14) und das inverse Element  $a^{-1}$  nach Gleichung (1.15) für  $a, a^{-1} \in \mathcal{K}$  und sie ist kommutativ nach Gleichung (1.16)
3. Es gelten die Distributivgesetze:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

für  $a, b, c \in \mathcal{K}$

Wird ein Körper mit den zugehörigen Verknüpfungen angegeben, so kann man  $\mathcal{K}$  als Tripel  $(\mathcal{K}, +, \cdot)$  notieren.

**Bemerkung 1.6** (Abgeschlossenheit). Entsprechend der Definition 5 für einen Körper  $\mathcal{K}$  bilden die Rechenoperationen Addition und Multiplikation Elemente des Körpers auf Elemente des Körpers ab. Da  $\mathcal{K}$  nie verlassen wird spricht man in diesem Zusammenhang von der **Abgeschlossenheit** des Körpers  $\mathcal{K}$ .



*Bemerkung 1.7* (Körper und Gruppen). Ist  $\mathcal{K}$  ein Körper mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation, dann sind  $(\mathcal{K}, +)$  und  $(\mathcal{K} - \{0\}, \cdot)$  Gruppen.

Die Menge aller invertierbaren  $n \times n$  Matrizen über einem Körper mit Matrizenmultiplikation bildet die *allgemeine lineare Gruppe*.  $\blacklozenge$

*Beispiel 1.4* (Körper). Häufig verwendete Körper sind

- die Menge der rationalen Zahlen  $\mathcal{Q}$  mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation
- die Menge der reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation
- die Menge  $\mathcal{R} \times \mathcal{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathcal{R}\}$  der Paare (2-Tupel) reeller Zahlen mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation. Mit den Verknüpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

und den neutralen Elementen der Addition:  $(0, 0)$  und Multiplikation:  $(1, 0)$  bildet diese Menge einen Körper. Jedes Zahlenpaar  $(x, y)$  kann als Linearkombination dargestellt werden:

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$

Führt man folgende Schreibweisen ein:

$$- (1, 0) : 1$$

$$- (0, 1) : i \text{ und bezeichnet } i \text{ als imaginäre Einheit,}$$

so erhält man die Darstellung  $(x, y) \equiv x + iy$ . Die so erhaltenen, reellen Zahlenpaare bezeichnet man als die **komplexen Zahlen**, welche in *algebraischer Normalform* vorliegen. Der Körper der komplexen Zahlen lautet damit  $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ .

Die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathcal{N}$  bildet mit der Addition *keinen* Körper, denn es gibt kein inverses Element bezüglich der Addition. Für das Element 5 ist beispielsweise das zu erwartende, inverse Element  $-5$  offensichtlich  $-5 \notin \mathcal{N}$ . Die Menge der ganzen Zahlen  $\mathcal{Z}$  bildet mit der Addition zwar eine abelsche Gruppe aber keinen Körper, denn es gibt kein inverses Element bezüglich der Multiplikation. Das Element  $a = 8 \in \mathcal{Z}$  hat zum Beispiel kein inverses Element

$b = 1 \cdot a^{-1}$  für welches  $b \in \mathcal{Z}$  gilt.

◇

## 1.6 Vektorräume

Ein Vektorraum ist durch eine abelsche Gruppe mit der inneren Verknüpfung Addition  $(\mathcal{V}, +)$  (Abschnitt 1.4), einen Körper  $\mathcal{K}$  (Abschnitt 1.5) mit Skalaren als Elementen, eine äußere Multiplikation, welche Elemente von  $\mathcal{K}$  mit denen von  $\mathcal{V}$  verknüpft und auf  $\mathcal{V}$  abbildet, und vier Verträglichkeitsgesetzen - den so genannten Vektorraumaxiomen - gegeben. Der Körper  $\mathcal{K}$  entspricht häufig den reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  oder den komplexen Zahlen  $\mathcal{C}$ .

**Definition 6** ( $\mathcal{K}$ -Vektorraum). *Es sei  $\mathcal{K}$  ein Körper,  $(\mathcal{V}, +)$  eine abelsche Gruppe und*

$$\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad (\lambda, \vec{x}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{x} \quad (1.17)$$

eine Abbildung. Ferner seien die Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}$  und die Skalare  $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$  gegeben. Man nennt  $\mathcal{V}$  einen Vektorraum über dem Körper  $\mathcal{K}$  oder kurz einen  $\mathcal{K}$ -Vektorraum genau dann, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

*Assoziativität der Multiplikation mit Skalaren*

$$(\lambda\mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) \quad (1.18)$$

*Distributivität*

$$\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y} \quad (1.19)$$

*und*

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x} \quad (1.20)$$

*Für die Multiplikation gibt es ein neutrales 1-Element*

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad (1.21)$$

Die Vektorraumaxiome nach Gleichung (1.18) - Gleichung (1.21) beschreiben eine Verträglichkeit der zwei Verknüpfungen Addition und Multiplikation des  $\mathcal{K}$ -Vektorraums.

Die Elemente eines Vektorraumes werden als **Vektoren** bezeichnet. Vektoren werden allein durch ihre Eigenschaften definiert. Typische Beispiele für Vektoren sind Elemente der Vektorräume  $\mathcal{R}^2$  und  $\mathcal{R}^3$ , aber auch Funktionen können

Vektoren sein. Ein Vektor ist also nicht zwangsläufig ein Pfeil mit Länge und Richtung.

Das neutrale Element der Addition der abelschen Gruppe  $\mathcal{V}$  wird als Nullvektor bezeichnet und mit  $\vec{0}$  gekennzeichnet. Ist aus dem Kontext erkennbar, dass es sich um einen Nullvektor handelt, so wird die besondere Notation als Vektor häufig weggelassen und man schreibt 0 für den Nullvektor.

*Bemerkung 1.8* (unendliche Vektorräume). Für jeden Körper  $\mathcal{K}$  und jede natürliche Zahl  $n$  ist die Menge

$$\mathcal{V} = \mathcal{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid v_1, \dots, v_n \in \mathcal{K} \right\}$$

mit komponentenweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren aus  $\mathcal{K}$  ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum. Insbesondere werden somit für den Körper der reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  der reelle Vektorraum  $\mathcal{R}^n$  und für den Körper der komplexen Zahlen  $\mathcal{C}$  der komplexe Vektorraum  $\mathcal{C}^n$  definiert.  $\blacklozenge$

**Definition 7** (Untervektorraum). Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum. Eine Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  heißt ein  $\mathcal{K}$ -Untervektorraum oder **linearer Unterraum von  $\mathcal{V}$** , wenn gilt:

$$\mathcal{U} \neq \emptyset \tag{1.22}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{U} \implies \vec{a} + \vec{b} \in \mathcal{U} \tag{1.23}$$

$$\alpha \in \mathcal{K}, \vec{a} \in \mathcal{U} \implies \alpha \vec{a} \in \mathcal{U} \tag{1.24}$$

*Bemerkung 1.9* (Untervektorraum). Ein Untervektorraum enthält in jedem Fall den Nullvektor. Außerdem ist ein Untervektorraum bezüglich der Addition und der Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen. Ein Untervektorraum von einem Vektorraum ist stets selbst ein Vektorraum.  $\blacklozenge$

**Definition 8** (Linearkombination). Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum. Ein beliebiger Vektor  $\vec{v} \in \mathcal{V}$  heißt **Linearkombination** einer Anzahl von Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$ , falls Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathcal{K}$  derart existieren, dass

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i$$

erfüllt ist. Der Vektor  $\vec{v}$  lässt sich dann aus den Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  mit den Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  linear kombinieren. Eine äquivalente Aussage wäre, dass

der Vektor  $\vec{v}$  von den Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  linear abhängig ist.

**Definition 9** (Spann, Lineare Hülle). Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum. Die Menge aller möglichen Linearkombinationen einer gegebenen Menge von Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$  wird als **Spann** oder die **lineare Hülle** dieser Vektoren bezeichnet:

$$\text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \} = \left\{ v = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i \mid \lambda_i \in \mathcal{K} \right\} \quad (1.25)$$

**Definition 10** (Erzeugendensystem). Eine Anzahl von Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$  eines  $\mathcal{K}$ -Vektorraumes  $\mathcal{V}$  heißt **Erzeugendensystem** von  $\mathcal{V}$ , wenn gilt:

$$\text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \} = \mathcal{V} \quad (1.26)$$

Es lässt sich also jeder Vektor des  $\mathcal{K}$ -Vektorraumes  $\mathcal{V}$  durch Linearkombination eines zugehörigen Erzeugendensystems darstellen. Ist die Mächtigkeit des Erzeugendensystems endlich, so ist  $\mathcal{V}$  endlich erzeugt.

Jedes Erzeugendensystem eines endlichen Vektorraumes  $\mathcal{V}$  enthält eine **Basis**.

**Bemerkung 1.10** (Erzeugendensystem für  $\mathcal{R}^n$ ). Jeder Vektorraum  $\mathcal{V}$ , der über dem Körper der reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  definiert wird, besitzt ein Erzeugendensystem. Im  $\mathcal{R}$ -Vektorraum  $\mathcal{R}^n$  bilden die Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  ein Erzeugendensystem. Ein Einheitsvektor  $\vec{e}_i$  hat in der i-ten Zeile eine eins als Eintrag. Alle weiteren Einträge dieses Einheitsvektors sind null.

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Zeile}$$

Ein solches Erzeugendensystem wird als *kanonische Basis* bezeichnet.  $\blacklozenge$

**Definition 11** (Lineare Unabhängigkeit). Eine Menge von Vektoren  $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$  eines  $\mathcal{K}$ -Vektorraums  $\mathcal{V}$  heißt **linear unabhängig**, wenn sich keiner der Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  als Linearkombination der Übrigen darstellen lässt. Die Glei-

chung

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad (1.27)$$

mit den Koeffizienten  $\lambda_i \in \mathcal{K}$  besitzt also nur die triviale Lösung  $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$ . Es gilt also

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0 \quad \forall i.$$

Eine nicht linear unabhängige Menge heißt **linear abhängig**. Bei einer linear abhängigen Menge gibt es nicht triviale Lösungen der Gleichung (1.27) und damit nicht triviale Darstellungen des Nullvektors. Es existieren also  $\lambda$  mit  $\lambda \neq 0$ , so dass gilt  $\vec{v}_i = \lambda \vec{v}_j$ . Die Vektoren  $\vec{v}_i, \vec{v}_j$  sind dann Vielfache voneinander beziehungsweise parallel zueinander.

*Bemerkung 1.11 (Lineare Abhängigkeit).* Eine linear unabhängige Menge ist unverkürzbar. Werden Vektoren aus dieser Menge entfernt, so spannt die Menge weniger Raum auf.

Bei einer linear abhängigen Menge liegt wenigstens einer der Vektoren in der linearen Hülle der Anderen. Er kann daher weggelassen werden, ohne die Hülle zu verkleinern. ◆

**Definition 12 (Basis).** Ein System von Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  eines  $\mathcal{K}$ -Vektorraumes  $\mathcal{V}$  wird als **Basis** von  $\mathcal{V}$  bezeichnet, wenn gilt:

1. Die Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  bilden ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{V}$ , es gilt also  $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \mathcal{V}$ .
2. Das System  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  ist linear unabhängig. Die Basis ist daher unverkürzbar.

Die Anzahl der Elemente einer Basis eines Vektorraumes  $\mathcal{V}$  wird als **Dimension** des Vektorraumes bezeichnet:  $\dim \mathcal{V}$ .



### 1.6.1 Matrizen

Es seien  $m$  und  $n$  natürliche Zahlen. Eine  $m \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  über dem Körper  $\mathcal{K}$  ist eine Abbildung

$$\mathbf{A}: \begin{cases} \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathcal{K}, \\ (i, j) \longmapsto a_{ij}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet  $i$  den Zeilenindex und  $j$  den Spaltenindex. Die Körperelemente  $a_{ij} \in \mathcal{K}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  nennt man **Komponenten** oder die **Einträge** der Matrix  $\mathbf{A}$ . Eine Matrix  $\mathbf{A}$  kann übersichtlich durch  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten dargestellt werden:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, bei der alle Komponenten gleich 0 sind, nennt man **Nullmatrix**:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, bei der gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

nennt man **Einheitsmatrix**:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{K}^{m \times n}$  ist ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum.

Die Menge  $\mathcal{K}^{m \times n}$  aller  $m \times n$  Matrizen bildet über  $\mathcal{K}$  mit komponentenweiser Addition:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

und der Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda$ :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

einen  $\mathcal{K}$ -Vektorraum.

**Definition 13** (Matrixprodukt). *Es seien eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}^{m \times n}$  und  $\mathbf{B}$  eine Matrix mit Spaltenvektoren  $\mathbf{B} = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_r) \in \mathcal{K}^{n \times r}$ . Dann ist*

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{A}\vec{s}_1, \dots, \mathbf{A}\vec{s}_r) \in \mathcal{K}^{m \times r} \quad (1.28)$$

das **Matrixprodukt** oder kurz das Produkt von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ .

## 1.7 Punkte und Vektoren im Anschauungsraum

Der Anschauungsraum ist eine geometrische Idealisierung des uns umgebenden physikalischen Raums. Zur Beschreibung dieses Raums dienen Punkte  $p$ . Die Position dieser Punkte wird relativ zu einem gewählten Koordinatensystem  $I$  mit Hilfe von Koordinatentripeln beschrieben. Die Koordinatentripel können als Elemente des Vektorraumes  $\mathcal{R}^3$  aufgefasst werden:

$$p = (x|y|z)$$

Die Position von  $p$  ist damit relativ zu  $I$  eindeutig beschrieben. Der Ursprung von  $I$  wird mit dem Nullvektor  $\vec{0} \in \mathcal{R}^3$  identifiziert.

Da die Beschreibung des Punktes  $p$  als Element des Vektorraumes  $\mathcal{R}^3$  betrachtet werden soll, ist die gewählte Beschreibungsform ein Vektor. Da der Vektorraum  $\mathcal{R}^3$  die im Abschnitt 1.6 geforderten Eigenschaften haben muss, gelten bestimmte Rechenregeln für einen solchen Vektor. Diese Rechenregeln werden um weitere Verknüpfungen - das Skalarprodukt und das Kreuzprodukt - ergänzt.

Bei geometrischen Überlegungen wird zwischen Positionen, Richtungen und Abständen klar unterschieden. Diese drei Eigenschaften lassen sich mit Hilfe von Vektoren beschreiben. Die Bedeutung eines Vektors als Element eines Vektorraumes  $\mathcal{V}$  über einem Körper  $\mathcal{K}$  wird dafür jedoch abgeändert.

### 1.7.1 Vektoren des $\mathcal{R}^3$

Der Anschauungsraum soll durch Elemente des Vektorraums  $\mathcal{R}^3$  beschrieben werden. Der Vektorraum wird durch eine abelsche Gruppe aus Tripeln  $(x, y, z)$  mit  $x, y, z \in \mathcal{R}$ , einen Körper und eine Verknüpfung zwischen diesen gebildet. Für die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^3$  gelten daher folgende Regeln (nach

[4]):

- Da die Tripel Elemente einer abelschen Gruppe mit der inneren Verknüpfung Addition sind (siehe Abschnitt 1.4), werden Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  komponentenweise addiert. Mit Hilfe des inversen Elements der Addition lässt sich die Subtraktion ebenso darstellen und beide Verknüpfungen können kompakt notiert werden:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \pm x' \\ y \pm y' \\ z \pm z' \end{pmatrix}$$

Außerdem gelten notwendigerweise die Rechenregeln:

- Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \pm \vec{b} + \vec{a}$$

- Assoziativgesetz:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- Die Multiplikation von einem Vektor  $\vec{a} \in \mathcal{R}^3$  mit einem Skalar  $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$  entspricht der äußeren Verknüpfung der abelschen Gruppe mit dem Körper. Sie erfolgt durch Multiplikation aller Komponenten des Vektors mit dem Skalar:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix}$$

Es gelten die Rechenregeln:

– Distributivgesetz:

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

– weitere Regeln:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \vec{a} &= \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \\(\lambda \mu) \vec{a} &= \lambda (\mu \vec{a}) = \mu (\lambda \vec{a}) \\|\lambda \vec{a}| &= |\lambda| |\vec{a}|\end{aligned}$$

Mit diesen Regeln werden die Vektorraumaxiome aus Abschnitt 1.6 erfüllt.

Für zwei verschiedene Paare von Punkten des Anschauungsraums  $(p, q), (r, s)$  kann man solche finden, dass die Differenz der Punkte für beide Paare gleich ist. Es gilt dann also

$$\vec{a} = q - p = s - r$$

mit

$$p \neq r \text{ und } q \neq s.$$

Man nennt diese Punktpaare *äquivalent*. Sie beschreiben die gleiche *Translation*. Die Translation kann man sinnvoll durch einen Pfeil kennzeichnen, welcher durch seine *Richtung* und seinen *Betrag* beziehungsweise seine Länge eindeutig charakterisiert wird. Die Begriffe Betrag und Länge werden im Folgenden synonym verwendet. Mit beiden Begriffen ist die euklidische Norm des Vektors  $\vec{a}$  gemeint. Die folgende Darstellung wird für den Betrag eines Vektors  $\vec{a}$  verwendet:

$$|\vec{a}| \equiv a := \|\vec{a}\|_2$$

Für einen Vektor  $\vec{a}$  gilt immer:

$$|\vec{a}| \geq 0$$

Wenn bekannt ist, dass mit  $\vec{a}$  ein Vektor gemeint ist, so notiert man den Betrag des Vektors in Kurzform mit  $a$ .

Der durch Differenzbildung erhaltene Pfeil  $\vec{a}$  entspricht dem, was man im Sinne der Geometrie meist unter einem (freien) Vektor versteht. Er umfasst **alle** Pfeile, deren Anfangspunkt  $p$  und Endpunkt  $q$  der Bedingung  $\vec{a} = q - p$  genügen.

Man nennt zwei Vektoren *gleich*, wenn sie in Richtung und Betrag übereinstim-

men:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |a| = |b| \wedge \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}.$$

Wählt man als Anfangspunkt für einen Vektor-Pfeil den Nullvektor, welcher dem gewählten Koordinatenursprung entspricht, so können alle Punkte des Anschauungsraumes mit Pfeilen beschrieben werden. Für die Beschreibung eines Punktes genügt daher die Angabe eines Abstandes und einer Richtung bezogen auf den Koordinatenursprung.

Punkte - die Elemente des Anschauungsraums - und Pfeile - die relative Lage von Punkten des Anschauungsraums zueinander - werden also beide durch Vektoren beschrieben. Punkte sind dabei im Anschauungsraum fest und Pfeile können verschoben werden, so lange sie ihre Richtung und Länge beibehalten. Häufig bezeichnet man beide geometrischen Gebilde einfach als Vektor, ohne deutlich zu machen, ob das gemeinte Objekt verschiebbar oder fest ist.

Beschreibt ein Vektor die Ausprägung einer physikalischen Größe, so gehört zu deren vollständiger Beschreibung zusätzlich zu Betrag und Richtung noch die Angabe einer Maßeinheit. Ein typisches Beispiel ist der Betrag einer Kraft  $\vec{F} : |\vec{F}| = 100 \cdot N$

Die Unterscheidung der geometrischen Objekte, welche durch einen Vektor repräsentiert werden, kann durch folgende Bezeichnung erfolgen [10, S. 26] oder [11, S. 68]:

- *Freie Vektoren*<sup>7</sup> können beliebig im Raum verschoben werden, so lange Richtung und Betrag konstant bleiben. Damit sind parallele Verschiebungen und Verschiebungen entlang der Wirkungsline möglich. Dieser Typ von Vektoren wird in der Regel gemeint, wenn man im Sinne der Geometrie von Vektoren spricht. Ein typisches Beispiel sind die Einheitsvektoren  $\vec{e}$ , mit denen die Koordinatenachsen eines Koordinatensystems beschrieben werden.
- *Gebundene Vektoren* beziehen sich auf einen festen Ursprung, von dem aus sie angetragen werden. Ein typisches Beispiel dafür ist der Ortsvektor  $\vec{r}$  eines Raumpunktes  $R$ , welcher von einem spezifischen Koordinatenursprung  $O$  aus angetragen wird:  $\vec{r} = P - O = \overrightarrow{OP}$ . In diesem Zusammenhang bezeichnet man den Punkt  $R$  häufig als „Punkt  $R$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$ “

---

<sup>7</sup> *freie Vektoren* werden auch als *Richtungsvektoren* bezeichnet

und notiert wahlweise  $P \equiv \vec{r}$ .

Da die Notation von Punkten im Sinne eines Ortsvektors und die Notation von Richtungsvektoren identisch ist, kommt es leicht zu Verwechslungen. Erschwerend kommt hinzu, dass die Konzepte von Punkt und Vektorpfeil in der Literatur häufig nicht gesondert betrachtet werden. Es ist damit die Aufgabe des Lesers sich klar zu machen, ob mit  $\vec{a}$  ein Richtungsvektor oder ein Punkt gemeint ist. Verwendet man zur Darstellung homogene Koordinaten (siehe 2.2.3) so ist die Unterscheidung von Punkten und Vektoren eindeutig.

Neben der Darstellung eines Vektors als Spaltenvektor und der Darstellung durch Anfangs- und Endpunkt gibt es eine weitere Darstellung: die Komponentenschreibweise bezüglich eines Koordinatensystems  $I$  mit expliziter Angabe der Basisvektoren, auf welche der Vektor projiziert wird.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

damit ergibt sich der Betrag eines Vektor zu

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \end{aligned}$$

Man bezeichnet die Skalare  $x, y, z$  als die *Komponenten*, *Koordinaten* oder auch *Einträge* des Vektors  $\vec{a}$ . Der linksseitige Index  $I$  kennzeichnet das verwendete Bezugssystem. Ist das Bezugssystem eindeutig, so wird dieser Index weggelassen. Für die bereits eingeführten Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{R}^3$  werden zusätzlich zu den Vektorraumaxiomen die Verknüpfungen Skalarprodukt und Kreuzprodukt definiert. Beide Verknüpfungen haben interessante geometrische Bedeutungen, auf welche nach Angabe der Rechenregeln im Detail eingegangen wird. Das Skalarprodukt lässt sich im Gegensatz zum Kreuzprodukt direkt für höherdimensionale Vektorräume definieren.

- Das **Skalarprodukt**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zweier Vektoren ist das Produkt der Beträge und dem Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels  $\varphi$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |a||b| \cos \varphi = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)(x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3) \quad (1.29)$$

Notiert man  $\vec{a}, \vec{b}$  als einspaltige Matrizen, so kann man das Skalarprodukt

auch mit Hilfe des Matrixprodukts nach Gleichung (1.28) definieren:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a}^T \vec{b}$$

Für das Skalarprodukt gelten die Rechenregeln:

– Kommutativgesetz:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

– Distributivgesetz:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

– weitere Regeln:

$$\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle$$

*Bemerkung 1.12* (Orthogonale Vektoren). Verschwindet das Skalarprodukt zweier von Null verschiedenen Vektoren, so stehen diese senkrecht aufeinander.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$



*Bemerkung 1.13* (Winkel zwischen Vektoren). Der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren ergibt sich aus dem Quotienten vom Skalarprodukt der beiden Vektoren und dem Produkt der Beträge der Vektoren.

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$$



*Bemerkung 1.14* (Richtungskosinus). Ein Vektor  $\vec{a}$  bildet mit den drei Koordinatenachsen seines Bezugssystems der Reihe nach die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , die als *Richtungswinkel* bezeichnet werden. Der Kosinus der jeweiligen Winkel wird als Richtungskosinus bezeichnet.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{a_x}{a} & \cos \beta &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_2|} = \frac{a_y}{a} \\ \cos \gamma &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_3|} = \frac{a_z}{a} \end{aligned}$$

Die Richtungswinkel sind jedoch nicht voneinander unabhängig, sondern

über die Beziehung

$$\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1$$

miteinander verknüpft. ◆

- Das **Vektorprodukt** (auch Kreuzprodukt)  $\vec{a} \times \vec{b}$  hat als Ergebnis einen Vektor, der senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  steht und dessen Länge gleich dem Produkt der Beträge von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und dem Sinus des durch die Vektoren eingeschlossenen Winkels  $\varphi$  ist.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left( |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vartheta) \right) \vec{n} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Dabei ist  $\vec{n}$  derjenige zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrechte Einheitsvektor, der diese zu einem Rechtssystem ergänzt.

Es gelten die Rechenregeln:

– Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

– Anti-Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

– weitere Regeln:

$$\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

Da das Kreuzprodukt mit dem Vektor  $\vec{a}$  eine lineare Abbildung ist, kann  $\vec{b} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b}$  mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{\mathbf{a}} \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \tag{1.31}$$



Mit Hilfe von Koordinatensystemen kann der Anschauungsraum geeignet beschrieben werden. Im Kapitel 1 wurde im Rahmen des Einführungsbeispiels bereits eine Darstellung für Koordinatensysteme entworfen. Für die Entwicklung eines Koordinatensystems werden die Koordinatenachsen benötigt, welche durch geeignete Geraden beschrieben werden. Die Richtung der Geraden wird durch die *Einheitsvektoren* definiert. Die Koordinatenachsen schneiden sich im *Koordinatenursprung*. Durch die Festlegung dieser Elemente kann die Position eines Punktes im Raum als Vektor beschrieben werden.

Zur Beschreibung des Anschauungsraums werden genau drei Koordinatenachsen mit drei Einheitsvektoren und einem Ursprungspunkt benötigt. Die drei Einheitsvektoren müssen so gewählt werden, dass sie einen Vektorraum entsprechend Definition 6 aufspannen, sie bilden also eine Basis nach Definition 12. Die Position eines Raumpunktes kann dann durch einen Ortsvektor beschrieben werden, welcher ein Element eben dieses Vektorraumes ist. Dieser Ortsvektor lässt sich als eine nach Definition 8 gegebene Linearkombination der Basisvektoren darstellen. Seine Darstellung ist abhängig von der konkreten Basis.

Zunächst soll ein besonderer Typ von Koordinatensystemen beschrieben werden - die Rechtssysteme. Diese sind ein grundlegendes Mittel, um die Bewegung von Körpern zu beschreiben. Da die Festlegung einer Basis für einen Vektorraum nicht eindeutig ist kann die Darstellung von einem Koordinatensystem nicht eindeutig sein. Die Umrechnung verschiedener Varianten geschieht mit Hilfe von Transformationen. Die Transformation von einem körperfesten in inertiales Koordinatensystem kann durch die Überlagerung einer Translation und einer Rotation abgebildet werden. Auf die Rotation wird im Abschnitt 2.2.2 im Detail eingegangen.

Die Elemente von Rechtssystemen werden als Elemente des  $\mathcal{R}^3$  aufgefasst und üblicherweise mit Hilfe von genau drei Komponenten  $(x, y, z)^T$  notiert. Diese

Darstellung kann durch eine zusätzliche Komponente zu einem 4-Tupel erweitert werden. Die so erhaltenen *homogenen Koordinaten* werden im Abschnitt 2.2.3 eingeführt und es wird auf deren besondere Eigenschaften eingegangen. Insbesondere kann die Transformation von Koordinatensystemen, welche im Abschnitt 2.2.4 erläutert wird, unter Verwendung homogener Koordinaten kompakt durch lineare Abbildungen dargestellt werden.

Bei der Beschreibung eines Mehrkörpersystems gibt es vielfältige Ansätze um die Lage einzelner Elemente zu parametrieren. Ein möglicher Ansatz ist die Vorgabe natürlicher Koordinaten, welche im Abschnitt 2.3 beschrieben werden. Im letzten Teil des Kapitels werden wichtige Begriffe erklärt und es wird auf weitere Konzepte zur Modellbildung verwiesen.

## 2.1 Kartesische normierte Rechtssysteme

Gegeben sei ein euklidisches Koordinatensystem <sup>1</sup>  $I \in \mathcal{R}^3$  mit den Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Für die Basisvektoren gelte:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$

Die Basisvektoren von  $I$  stehen also paarweise senkrecht aufeinander und bilden somit ein *orthogonales* Koordinatensystem. Ein orthogonales euklidisches Koordinatensystem wird als *Kartesisches Koordinatensystem* bezeichnet. Weiterhin ist die Länge jedes Basisvektors gleich eins. Die Basis wird daher als *normiert* bezeichnet und das aufgespannten Koordinatensystem als orthonormiertes System bezeichnet.

Gilt außerdem

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad (2.2)$$

so bezeichnet man  $I$  als ein rechtshändiges Koordinatensystem oder auch Rechtssystem. Eine anschauliche Interpretation von Gleichung (2.2) ist, dass jeder Einheitsvektor aus seinem Vorgänger auf kürzestem Wege durch Drehung im mathematisch positiven Drehsinn hervorgeht. Der Vektor  $\vec{e}_1$  ist in diesem Sinne gleichzeitig der Nachfolger vom Einheitsvektor  $\vec{e}_3$  und der Vorgänger von  $\vec{e}_2$ ,

---

<sup>1</sup> mit dem Begriff euklidisches Koordinatensystem wird ein Koordinatenraum  $\mathcal{R}^3$  mit Skalarprodukt nach Gleichung (1.29) bezeichnet

welcher wiederum der Vorgänger von  $\vec{e}_3$  ist.

Im Folgenden wird, wenn nicht explizit anderweitig angegeben, davon ausgegangen, dass die Basisvektoren eines Koordinatensystems Gleichung (2.1) und Gleichung (2.2) erfüllen.

*Beispiel 2.1* (Kartesischen Rechtssystem). Mit Hilfe der in Bemerkung 1.10 angegebenen Bildungsvorschrift lässt sich auf einfache Weise eine Basis für ein kartesisches Rechtssystem angeben:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

◇

## 2.2 Koordinatentransformation in homogenen Koordinaten

### 2.2.1 hilfreiche Literatur

[12, S.10]

### 2.2.2 Rotationen und deren Darstellung als Matrizen

- noch ein paar Sätze, wozu diese Regeln eigentlich gut sind: Regeln stellen die REchnungen und die Darstellbarkeit der Körperbewegung sicher

Ändert ein Körper seine Orientierung im Raum, so bewegen sich alle Punkte des Körpers um eine Drehachse und man bezeichnet diese Bewegung als *Rotation*. Ist die Lage dieser Achse konstant, so bezeichnet man dies als Rotation um eine feste Achse. Verläuft die Drehachse durch einen raumfesten Punkt, so handelt es sich um eine Kreiselbewegung. In jedem Fall kann die Drehbewegung durch eine zeitlich veränderliche oder konstante Rotationsmatrix ausgedrückt werden. Zur Formulierung der Rotationsmatrix seien ein körperfestes Koordinatensystem  $K$  und ein inertiales Koordinatensystem  $I$  gegeben. Die Koordinatensysteme  $I$  und  $K$  haben weiterhin den gleichen Ursprung. Das System  $K$  ist demnach durch

Drehung um eine Achse  $l$ , welche durch den Ursprung verläuft, hervorgegangen. Die Orientierung dieser Drehachse sei durch einen Vektor  $\vec{l}$  mit Einheitslänge beschrieben. Die Achsen von  $K$  relativ zu  $I$  seien gegeben durch die Einheitsvektoren  ${}_I\vec{u}, {}_I\vec{w}, {}_I\vec{v} \in \mathcal{R}^3$ . Diese drei Spaltenvektoren werden horizontal zu einer Matrix

$$\mathbf{R} = \left( {}_I\vec{u} \quad {}_I\vec{w} \quad {}_I\vec{v} \right) = \begin{pmatrix} {}_I\vec{u}_x & {}_I\vec{w}_x & {}_I\vec{v}_x \\ {}_I\vec{u}_y & {}_I\vec{w}_y & {}_I\vec{v}_y \\ {}_I\vec{u}_z & {}_I\vec{w}_z & {}_I\vec{v}_z \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

zusammengefasst. Die Matrix  $\mathbf{R}$  wird als Rotationsmatrix oder Drehmatrix bezeichnet. Sie gibt die relative Verdrehung von  $K$  zu  $I$  an.

Die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  kann auch durch Verwendung einer absoluten Angabe der Einheitsvektoren beider Koordinatensysteme angegeben werden. Bilden die Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathcal{R}^3$  eine Basis von  $I$  und die Vektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}$  die Basis für  $K$ , so können diese Spaltenvektoren geeignet als Matrizen angeordnet werden und die Rotationsmatrix, welche die Verdrehung von  $K$  relativ zu  $I$  angibt, wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{w} & \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & w_x & v_x \\ u_y & w_y & v_y \\ u_z & w_z & v_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1,x} & e_{2,x} & e_{3,x} \\ e_{1,y} & e_{2,y} & e_{3,y} \\ e_{1,z} & e_{2,z} & e_{3,z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{B}_K \quad (2.4)$$

Handelt es sich bei der Basis von  $I$  um eine Standardbasis, wie sie im Beispiel 2.1 angegeben ist, so vereinfacht sich Gleichung (2.4) zu

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}_K. \quad (2.5)$$

### Eigenschaften von Rotationsmatrizen

Entsprechend Gleichung (2.3) seien die Vektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3$  die Spalten der Rotationsmatrix  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ . Da diese ein Koordinatensystem aufspannen sollen, haben sie die in Gleichung (2.1) und Gleichung (2.2) definierten Eigenschaften.

Aus Gleichung (2.1) folgt für die Matrix  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{w} & \vec{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (2.6)$$

und mit Hilfe der Regeln der linearen Algebra [4, S. 100] und Gleichung (2.1)

$$\det \mathbf{R} = \langle \vec{u}, \vec{w} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 \quad (2.7)$$

Die Menge der orthogonalen  $3 \times 3$  Matrizen mit der Determinante eins wird als  $\mathcal{SO}(3)$  bezeichnet [13]. Allgemein wird definiert:

$$\mathcal{SO}(n) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{R}^{n \times n} : \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = +1 \}. \quad (2.8)$$

Die Menge  $\mathcal{SO}(3) \subset \mathcal{R}^{3 \times 3}$  bildet mit der Abbildungsvorschrift *Matrixmultiplikation* eine Gruppe entsprechend den im Abschnitt 1.4 geforderten Regeln. Die geforderten Eigenschaften werden wie folgt erfüllt:

- Die Verknüpfung ist abgeschlossen. Für  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \mathcal{SO}(3)$  gilt auch  $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \in \mathcal{SO}(3)$ , da

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^T = \mathbf{I} \quad (2.9)$$

$$\det(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = \det(\mathbf{R}_1)\det(\mathbf{R}_2) = +1 \quad (2.10)$$

gilt.

- Die Gruppe  $\mathcal{SO}(3)$  ist assoziativ

Aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation (Beweis siehe z. B. [1, S. 93]) folgt

$$(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3) \quad (2.11)$$

- Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element

$$\mathbf{I}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{R} \quad \forall \mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3) \quad (2.12)$$

mit

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aus Gleichung (2.6) folgt, dass  $\mathbf{R}^T \in \mathcal{SO}(3)$  das inverse Element von  $\mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3)$  ist.

*Bemerkung 2.1.* Die Lage eines Starrkörpers, welcher sich frei im Raum drehen kann, kann zu jedem Zeitpunkt durch eine eindeutige Rotationsmatrix  $\mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3)$  beschrieben werden. Die Menge der Rotationsmatrizen  $\mathcal{SO}(3)$  wird daher als der Konfigurationsraum des Systems bezeichnet. Eine Trajektorie des Systems wird durch die Kurve  $\mathbf{R}(t) \in \mathcal{SO}(3)$  für  $t \in [0, T]$  abgebildet. Weiterhin dient die Matrix  $\mathbf{R}$  zur Transformation von Punkten von einem körperfesten, um eine beliebige Achse gedrehten, Koordinatensystem in ein Inertialsystem. Insbesondere ist die  $3 \times 3$  Einheitsmatrix nach Gleichung (2.12) das neutrale Element der Gruppe der Rotationsmatrizen. Eine Transformation mit dieser Matrix ist damit eine Transformation ohne Drehung. Die Transformation von Koordinatensystemen ist im Abschnitt 2.2.4 genauer dargelegt. ♦

### 2.2.3 Homogene Koordinaten

Die Darstellung von Bewegungen mit Hilfe homogener Koordinaten wie sie beispielsweise von D. W. Wloka in [11, S. 72] eingeführt werden ermöglicht eine einheitliche kompakte Darstellung von Translationen und Rotationen eines Körpers durch Verwendung einer einzigen Transformationsmatrix. Dazu werden die Vektoren des  $\mathcal{R}^3$ , mit denen der Anschauungsraum beschrieben wird, um eine vierte Komponente erweitert. Dieser *Skalierungsfaktor* wird üblicherweise null oder eins gesetzt. Andere Skalierungsfaktoren werden bei der Arbeit mit Computergrafiken verwendet.

Transformiert man einen Richtungsvektor, wie er in Abschnitt 1.7.1 beschrieben wird, so verwendet man die null als Skalierungsfaktor. Für Punkte beziehungsweise Ortsvektoren wird die eins als Skalierungsfaktor benutzt.

Gegeben sei ein Vektor  $\vec{x}$ , welcher zwei beliebige Punkte eines Körpers verbindet. Bewegt sich der Körper derart, dass dieser Vektor seine Orientierung nicht ändert, so bezeichnet man diese Bewegung als *Translation*. Die Translation für den Vektorraum  $\mathcal{R}^3$  mit dem Vektor  $\vec{v} \in \mathcal{R}^3$  ist definiert als

$$f : \vec{x} \longrightarrow \vec{x} + \vec{v} \qquad \vec{x}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3.$$

Diese Abbildung ist nicht linear. Es gilt

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y} + \vec{v},$$

wodurch Gleichung (1.12) nicht erfüllt wird. Die Translation lässt sich daher nicht als Matrix darstellen. Man kann aber zeigen, dass die Translation bijektiv ist. Es existiert also eine Umkehrabbildung für die Translation. Könnte man die Translation als Matrix darstellen, so wäre die Zusammenfassung einer beliebigen Folge von Rotationen und Translationen in einer einzigen Matrix  $\mathbf{A}$  möglich. Jeder Körperpunkt, der durch einen Ortsvektor  $\vec{x}$  beschrieben werden kann, ließe sich dann nach einer beliebigen Anzahl und Reihenfolge von Verdrehungen und Verschiebungen durch eine einzige Matrix Vektor Multiplikation berechnen:  $\vec{x}' = \mathbf{A} \vec{x}$ . Dies wird durch die Einführung homogener Koordinaten erreicht.

Üblicherweise notiert man die Translation eines Vektors  $\vec{q} = (x, y, z)^T$  mit einem Vektor  $\vec{v} = (a, b, c)^T$  als

$$\vec{q}' = \vec{q} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \end{bmatrix}.$$

Die Translation entspricht einer additiven Verschiebung des Vektors  $\vec{q}$ . In homogenen Koordinaten ergibt sich die gleiche Rechnung wie folgt:

$$\vec{q}' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da die vierte Komponente ein Skalierungsfaktor ist, wird sie bei der Addition offensichtlich nicht verändert.

Mit Hilfe dieser erweiterten Darstellung kann die Translation als Matrix-Vektor Multiplikation dargestellt werden. Man erweitert dazu den Vektor der Translation um eine  $3 \times 3$  Einheitsmatrix in homogener Darstellung zu einer  $4 \times 4$  Matrix und notiert dann

$$\begin{aligned} \vec{q}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{3 \times 3} & \vec{v} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \vec{q} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Erweiterung zu einer Matrix erfolgt also mit dem nach Gleichung (2.12) gegebenen neutralen Element der Gruppe der Rotationsmatrizen  $\mathcal{SO}(3)$ .

Stellt man die Rotation eines Körpers mit Hilfe eines Koordinatensystems dar, welches sich mit dem Körper mit dreht, so kann die Rotationsmatrix durch die drei Basisvektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}$  dieses Koordinatensystems beschrieben werden. Die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  schreibt man dann nach Gleichung (2.3) mit

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & w_x & v_x \\ u_y & w_y & v_y \\ u_z & w_z & v_z \end{pmatrix}.$$

Da die drei Spalten dieser Matrix jeweils die Komponenten von Richtungsvektoren enthalten, werden diese bei der Transformation in homogene Koordinaten um den Skalierungsfaktor null ergänzt und man notiert

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & w_x & v_x \\ u_y & w_y & v_y \\ u_z & w_z & v_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ , welche die komplette Bewegung eines Körpers beinhalten soll, setzt sich aus Rotation  $\mathbf{R}$  und Translation  $\vec{v}$  zusammen. Sie wird in homogenen Koordinaten beschrieben mit:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & w_x & v_x & a \\ u_y & w_y & v_y & b \\ u_z & w_z & v_z & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Die Inverse einer solchen Transformationsmatrix berechnet sich unter Beachtung der Orthogonalitätseigenschaft von  $\mathbf{R}$  beziehungsweise Gleichung (2.6) zu

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

In Folge dessen, dass die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  in homogenen Koordinaten invertierbar ist, wird die Transformation von Vektoren bedeutend vereinfacht. Soll die Matrix  $\mathbf{T}$  abgeleitet werden, so muss das Ergebnis dem der enthomogenisierten Form entsprechen. Der Differentialoperator wird daher nicht auf die Skalierungsfaktoren angewendet. Die für die Beschreibung von Bewegungen besonders wichtige Ableitung nach der Zeit lautet damit in homogenen



Koordinaten

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \vec{q}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{q}(t)}{\partial t} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

für einen Vektor und

$$\frac{\partial \mathbf{T}(t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}(t) & \frac{\partial}{\partial t} \vec{q}(t) \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

für eine Matrix.

$$(2.17)$$

## 2.2.4 Transformationen

Gegeben seien ein inertiales Koordinatensystem  $I$  und zwei, um eine beliebige Achse in Relation zu  $I$  gedrehte, Koordinatensysteme  $B, C$ , welche den gleichen Ursprung wie  $I$  besitzen. Weiterhin sei ein Punkt durch einen Ortsvektor  $\vec{q} = ({}^Bx, {}^By, {}^Bz)^T$  im Koordinatensystem  $B$  gegeben. Werden die Koordinatenachsen von  $B$  durch die Einheitsvektoren  $\vec{e}_{B1}, \vec{e}_{B2}, \vec{e}_{B3}$  im Inertialsystem  $I$  beschrieben, so kann der Punkt von  $B$  nach  $I$  durch eine Transformation überführt werden:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \vec{e}_{B1} & \vec{e}_{B2} & \vec{e}_{B3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^Bx \\ {}^By \\ {}^Bz \end{pmatrix} = {}^B_I \mathbf{R} \vec{q}$$

Der linksseitige tiefgestellte Index gibt das System an, in dem ein Vektor definiert wurde. Der rechtsseitige tiefgestellte Index dient der besseren Unterscheidbarkeit von definierten Größen. Im Fall einer Transformationsmatrix  ${}^B_I \mathbf{R}$  gibt der linksseitige hochgestellte Index das Ursprungssystem und der linksseitige tiefgestellte Index das Zielsystem der Transformation an.

Transformationen können aneinandergereiht werden. Beschreibt die Transformationsmatrix  ${}^C_B \mathbf{R}$  die Verdrehung von  $C$  relativ zu  $B$ , so erhält man die Transformationsmatrix von  $C$  nach  $I$  durch eine Kombination der Transformation vom System  $C$  in das System  $B$  mit der Transformation vom System  $B$  in das System  $I$ . Die Kombination erfolgt dabei durch linksseitige Matrixmultiplikation der jeweiligen Transformationsmatrizen in der angegebenen Reihenfolge.

$${}^C_I \mathbf{R} = {}^B_I \mathbf{R} {}^C_B \mathbf{R}$$

Da entsprechend Gleichung (2.10) die Menge der Rotationsmatrizen abgeschlossen ist, ist die durch Aneinanderreihung von Drehungen gewonnene Matrix  ${}^C_I\mathbf{R}$  ebenfalls eine Rotationsmatrix.

Sind die Koordinatensysteme  $B$  und  $C$  zum Inertialsystem nicht nur verdreht, sondern auch um Vektoren  $\vec{v}_B, \vec{v}_C$  verschoben, so wird zur Transformation von Vektoren die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  nach Gleichung (2.13) benötigt. Ein im System  $B$  gegebener Vektor  ${}_B\vec{q} = ({}_Bx, {}_By, {}_Bz)^T$  kann dann mit Hilfe der Matrix  ${}^B_I\mathbf{T}$  in das Inertialsystem übertragen werden. Es gilt also

$${}_I\vec{q} = {}^B_I\mathbf{T} {}_B\vec{q}. \quad (2.18)$$

Diese Darstellung kann auf einfache Weise invertiert werden:

$${}_B\vec{q} = \underbrace{{}^B_I\mathbf{T}^{-1}}_{:= {}^I_B\mathbf{T}} {}_I\vec{q} \quad (2.19)$$

und mit Gleichung (2.14) folgt

$${}_B\vec{q} = \begin{bmatrix} {}^B_I\mathbf{R}^T & -{}^B_I\mathbf{R}^T \vec{v}_B \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} {}_B\vec{q} \quad (2.20)$$

Analog zur Aneinanderreihung von Rotationen können auch allgemeine Transformationen hintereinander ausgeführt werden. So erhält man den im System  $C$  gegebenen Vektor  ${}_C\vec{q}$  im Inertialsystem mit

$${}_I\vec{q} = \underbrace{{}^B_I\mathbf{T} {}^C_B\mathbf{T}}_{:= {}^C_I\mathbf{T}} {}_C\vec{q}. \quad (2.21)$$

## 2.3 Natürliche Koordinaten

Der erste Schritt bei der Modellbildung für ein mechanisches System ist die Festlegung geeigneter Parameter, mit Hilfe derer die kinematischen Größen Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Systems zu jedem Zeitpunkt beschrieben werden können. Lässt sich ein System in mehrere Subsysteme einteilen, so müssen die Parameter die Kinematik dieser Subsysteme abbilden. Die Wahl der Parameter geschieht mit Hilfe der Vorgabe von Koordinaten. Ein System aus zwei Punktmassen könnte man beispielsweise durch die Koordinaten  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  beschreiben. Die Wahl der Koordinaten bietet sehr viele

Freiheiten. Die Üblichsten Koordinatenarten sind *relative Koordinaten*, *Referenzpunktkoordinaten* und *absolute Koordinaten*. Eine besondere Form der absoluten Koordinaten sind die *natürlichen Koordinaten*<sup>2</sup>.

In der deutschen Literatur wird in Grundlagenwerken zur Kinematik und Kinetik wie beispielsweise [14, S. 6] mit dem Begriff „natürliche Koordinaten“ in der Regel ein körperfestes Koordinatensystem gemeint, welches als „begleitendes Dreibein“ bezeichnet wird. In Veröffentlichungen, welche die Modellierung von Mehrkörpersysteme grundlegend behandeln, werden natürliche Koordinaten wenig beachtet ([15], [16], [17], [18], [19], [12], [20], [11], [21]). Die Definition von körperfesten Koordinatensystemen wird zwar zumeist dargestellt, die konkrete Festlegung der Einheitsvektoren des körperfesten Koordinatensystems erfolgt im Detail jedoch, wenn überhaupt, nur in Form von Rotationsmatrizen unter Zuhilfenahme von Euler-Winkeln, Kardan-Winkeln oder anderen trigonometrischen Funktionen. Die explizite Nutzung aller Elemente der Rotationsmatrix ist eher selten.

Im Rahmen dieser Arbeit ist unter natürlichen Koordinaten die von Javier García de Jalón und Eduardo Bayo [22] vorgestellte Variante der Parameterfestlegung zu verstehen. Eine Übersicht zum Konzept, der Eignung und der Weiterentwicklung der natürlichen Koordinaten ist [23] zu entnehmen.

Die Grundidee der Modellierung mit natürlichen Koordinaten besteht in der Festlegung von drei oder mehr Punkten, welche nicht auf einer Linie liegende Elemente des zu beschreibenden Körpers sind. Die Position der Punkte wird mit Hilfe absoluter kartesischer Koordinaten in Form von Vektoren abgebildet. Die vorgegeben Ortsvektoren der gewählten Punkte sind kein Satz unabhängiger Koordinaten. Statt dessen bestehen zwischen den Punkten geometrische Beziehungen wie beispielsweise konstante Winkel oder Distanzen, welche als Zwangsbedingungen zwischen den Vektoren beschrieben werden können. Die Zwangsbedingungen lassen sich durch diese Wahl von Körperpunkten in einfacher Weise durch Verknüpfung von Vektoren mit Hilfe des Skalarprodukts ausdrücken. Die so entstehenden Gleichungen sind quadratisch, was eine Jacobi-Matrix zur Folge hat. Eine Variante von natürlichen Koordinaten wird in [24] eingeführt,

---

2 die englischen Bezeichnungen für natürliche Koordinaten im Sinne dieser Arbeit sind *natural coordinates* und *fully cartesian coordinates*

um ein Mehrkörpermodell für ein Motorrad zu erstellen. Auf diese Darstellung wird im Folgenden Eingegangen.

In einem Mehrkörpersystem wird jedem Körper  $i$  ein eigenes, körperfestes Koordinatensystem zugeordnet. Dieses wird durch einen Ursprung  $P_i$  und drei Einheitsvektoren  $\vec{u}_i = (u_{x,i}, u_{y,i}, u_{z,i})^T$ ,  $\vec{w}_i = (w_{x,i}, w_{y,i}, w_{z,i})^T$ ,  $\vec{v}_i = (v_{x,i}, v_{y,i}, v_{z,i})^T$  derart definiert, dass ein orthonormales Koordinatensystem aufgespannt wird. Der Ursprung liegt dabei nicht notwendigerweise im Massenschwerpunkt des Körpers. Die Position des Ursprungs wird durch einen Ortsvektor  $\vec{q} = (x_i, y_i, z_i)^T$  definiert, dessen Komponenten durch drei generalisierte Koordinate beschrieben werden. Die Komponenten der Vektoren, welche die Basis des Koordinatensystems bilden, werden ebenso als generalisierte Koordinaten eingeführt. Für jeden Körper werden demnach zwölf generalisierte Koordinaten eingeführt. Mit Hilfe

der Basisvektoren lässt sich dann eine Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} u_{x,i} & w_{x,i} & v_{x,i} \\ u_{y,i} & w_{y,i} & v_{y,i} \\ u_{z,i} & w_{z,i} & v_{z,i} \end{bmatrix}$  definieren, welche die Orientierung des Körpers im Raum beschreibt. Da die Vektoren  $\vec{u}_i$ ,  $\vec{w}_i$  und  $\vec{v}_i$  eine orthonormale Basis bilden sollen sind die zugeordneten generalisierten Koordinaten nicht unabhängig voneinander. Statt dessen müssen die Vektoren Gleichung (2.1) erfüllen. Es gilt also

$$\langle \vec{u}_i, \vec{w}_i \rangle = 0 \quad \langle \vec{u}_i, \vec{v}_i \rangle = 0 \quad \langle \vec{w}_i, \vec{v}_i \rangle = 0$$

und weiterhin

$$\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle - 1 = 0 \quad \langle \vec{w}_i, \vec{w}_i \rangle - 1 = 0 \quad \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle - 1 = 0$$

Die so erzeugten Zwangsbedingungen sind offensichtlich sehr einfach.

Die Koordinatensysteme der einzelnen Körper werden zweckmäßigerweise so festgelegt, dass möglichst viele Basisvektoren parallel zueinander liegen. Parallele Richtungsvektoren können dann gemäß Abschnitt 1.7.1 gleich gesetzt werden und daher durch identische generalisierte Koordinaten abgebildet werden. Weiterhin sollten geometrische Zwangsbedingungen durch eine geschickte Ausrichtung der Koordinatensysteme zueinander möglichst simpel formuliert werden können. Im Kapitel 4 werden diese Forderungen anhand eines Beispiels ausführlich erläutert.

### 2.3.1 Eigenschaften natürlicher Koordinaten

Die von V. Cossalter und R. Lot in [24] eingeführte Variante der Parameterfestlegung für ein Mehrkörpersystem hat wichtige Eigenschaften für das Systemmodell zur Folge.

Zum Einen erfolgt die Beschreibung des Systems ausschließlich mit Hilfe eines Satzes redundanter kartesischer Koordinaten. Da diese alle mit direktem Bezug zum Inertialsystem definiert werden ist die Einführung zusätzlicher Referenzsysteme nicht notwendig. Im Zusammenhang mit der Festlegung der Einheitsvektoren eines jeden körperfesten Koordinatensystems lassen sich geometrische Zwangsbedingungen daher sehr einfach formulieren. Die Jacobi-Matrix ist demzufolge eine lineare oder sogar konstante Funktion der redundanten Koordinaten. Zum Anderen wird der Einfluss von Entwurfsvariablen wie den Abmessungen eines Bauteils direkt angegeben und kann dadurch direkt beim Bauteildesign berücksichtigt werden. Außerdem sind die Rotationsmatrizen, mit denen die Orientierung von Körpern beschrieben wird, lineare Funktionen anstelle von trigonometrischen oder anderen nichtlinearen Funktionen.

## 2.4 Wichtige Begriffe und weitere Konzepte

**Minimalkoordinaten und verallgemeinerte Koordinaten** Bei der Festlegung von Parametern zur Lagebeschreibung werden die Begriffe *Minimalkoordinaten* und *verallgemeinerte Koordinaten* häufig verwendet. Diese zwei Begriffe werden teilweise synonym verwendet, was nur in einem bestimmten Kontext sinnvoll ist.

Mit Minimalkoordinaten werden Parameter bezeichnet, welche linear unabhängig sind und deren Anzahl dem Freiheitsgrad des Systems entsprechen. Lässt sich ein Mehrkörpersystem als offene Kette beziehungsweise in Baumstruktur modellieren, so lässt sich die Lage aller Elemente direkt mit den Minimalkoordinaten beschreiben. [15, S.27 f.] Besitzt ein System kinematische Schleifen, so werden zu den Minimalkoordinaten weitere redundante Koordinaten benötigt, um die Lage aller Teilkörper beschreiben zu können. [17, S.63] Sowohl für Systeme mit, als auch ohne geschlossene kinematische Schleifen wird der Begriff verallgemeinerte Koordinaten verwendet. Es wird aber nicht unbedingt deutlich, ob mit

verallgemeinerten Koordinaten lediglich die Minimalkoordinaten, oder aber der um redundante Koordinaten erweiterte Parametersatz gemeint ist. [21, S.133] Da in dieser Arbeit mit dem Modellierungsansatz der natürlichen Koordinaten gearbeitet wird und dieser redundante Parameter zur Folge hat (siehe Abschnitt 2.3), wird mit verallgemeinerten Koordinaten kein minimaler Satz an Koordinaten gemeint. Statt dessen werden Minimalkoordinaten immer explizit als solche bezeichnet.

**Kinematische Ketten und weitere Konzepte zur Festlegung von Systemparametern** Die Begriffe der offenen und geschlossenen kinematischen Kette werden von D. Schramm et al. in [17, S. 52 ff.] erläutert.

Als alternativen Ansatz zur Modellparametrierung mit natürlichen Koordinaten werden häufig Relativkoordinaten verwendet. W. Schiehlen et al. geben in [19] eine Einführung in diesen Ansatz. Verwendet man kinematische Ketten zur Modellbeschreibung, so können die von R. L. Huston in [25] eingeführten Topologie-Matrizen bei der Arbeit mit Relativkoordinaten nützlich sein. Eine weitere Alternative zur Festlegung der Koordinaten ist das Verfahren nach Danavit und Hartenberg, welches von D. W. Wloka in [11, S. 111 ff.] ausführlich beschrieben wird.

## 3.1 Starrkörperbewegung

Die Bewegung eines Punktes  $p$  im euklidischen Raum wird durch die Angabe seiner Position in Bezug zu einem inertialen Koordinatensystem  $I$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig beschrieben. Die Position des Punktes  $p$  sei durch das Tripel  $(x, y, z) \in \mathcal{R}^3$  gegeben. Die Trajektorie von  $p$  kann dann durch die parametrisierte Bahn  $p(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{R}^3$  beschrieben werden. Da nicht die Bewegung von einzelnen Punkten, sondern die Bewegung eines Starrkörpers beschrieben werden soll, soll zunächst der Begriff Starrkörper definiert werden.

**Definition 14** (Starrkörper). *Ein Starrkörper ist dadurch gekennzeichnet, dass die Distanz zweier beliebiger Punkte  $p, q$ , welche auf dem Körper liegen, unabhängig von der Bewegung des Körpers, immer konstant bleibt. Die anfängliche Position des Punktes  $p$  sei beschrieben durch  $p(0)$ . Die Position nach einer beliebigen Zeit  $t$  (und einer beliebigen Bewegung) sei beschrieben durch  $p(t)$ . Die Nomenklatur gelte für den Punkt  $q$  analog. Für einen Starrkörper wird gefordert:*

$$\|q(t) - p(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = \text{konstant}$$

Eine Starrkörperbewegung kann prinzipiell aus Rotation, Translation oder einer Überlagerung dieser Bewegungen bestehen. Wird ein Körper durch eine Teilmenge  $O \in \mathcal{R}^3$  beschrieben, so kann seine Bewegung als eine kontinuierliche Zuordnung  $g(t) : O \rightarrow \mathcal{R}^3$  beschrieben werden. Die kontinuierliche Zuordnungsvorschrift  $g(t)$  beschreibt, wie sich die einzelnen Punkte des Körpers relativ zu einem inertialen, festen Koordinatensystem mit Voranschreiten der Zeit  $t$  bewegen. Die Zuordnungsvorschrift  $g$  darf dabei die Distanz zwischen Punkten des Körpers und die Orientierung von Vektoren, welche Punkte des Körpers verbinden, nicht verändern. Damit ergibt sich die Definition einer Abbildung von Starrkörpern:

**Definition 15** (Abbildung eines Starrkörpers). [13] Eine Zuordnungsvorschrift  $g : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$  ist die Abbildung eines Starrkörpers genau dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Distanzen bleiben unverändert:  $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$  für alle Punkte  $p, q \in \mathcal{R}^3$
2. Das Kreuzprodukt bleibt erhalten:  $g(\vec{v} \times \vec{w}) = g(\vec{v}) \times g(\vec{w})$  für alle Vektoren  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{R}^3$ .

*Bemerkung 3.1.* Man kann mit Hilfe der Polarisationsformel zeigen, dass das Skalarprodukt durch die Abbildungsvorschrift  $g$  für einen Starrkörper erhalten bleibt [13]:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle g(\vec{v}), g(\vec{w}) \rangle.$$

Ein orthonormales Rechtssystem wird durch die Abbildungsvorschrift  $g$  demnach wieder in ein orthonormales Rechtssystem transformiert.  $\blacklozenge$

Der Astronom und Mathematiker Giulio Mozzi zeigte bereits 1763, dass eine räumliche Bewegung in eine Drehung und eine Verschiebung entlang der Drehachse zerlegt werden kann. Da sich die Teilchen eines Starrkörpers nicht relativ zueinander bewegen können, kann die Bewegung eines Starrkörpers durch die relative Bewegung eines körperfesten Koordinatensystems  $K$  zu einem Inertialsystem beschrieben werden. Das Koordinatensystem  $K$  erfülle dabei die in 2.1 genannten Eigenschaften. Das körperfeste Koordinatensystem hat seinen Ursprung in einem beliebigen Punkt  $p$  des Körpers. Die Orientierung von  $K$  beschreibt die Rotation des Körpers und die Lage des Ursprungs von  $K$  relativ zum Inertialsystem beschreibt den translatorischen Anteil der Starrkörperbewegung. Hat  $K$  die Einheitsvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ , dann kann die Bewegung von  $K$  durch die Abbildung  $g$  beschrieben werden. Genauer gesagt liefert  $g(\vec{v}_1), g(\vec{v}_2), g(\vec{v}_3)$  die Orientierung von  $K$  und  $g(p)$  die Lage des Ursprungs nach einer Starrkörperbewegung.

Beschreibt man die Orientierung eines Starrkörpers mit Hilfe eines Ortsvektors  $\vec{p}$ , welcher auf den Ursprung des körperfesten Koordinatensystem zeigt, einem Ortsvektor  $\vec{q}$ , welcher auf einen beliebigen Punkt des Körpers zeigt und dem Richtungsvektor  $\vec{s}$ , welcher die Punkte  $p$  und  $q$  verbindet, dann lässt sich die



Bewegung wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned}\vec{q}(t) &= \vec{p}(t) + \vec{s}(t) \\ \frac{d}{dt}(\vec{q}(t)) &= \frac{d}{dt}(\vec{p}(t)) + \frac{d}{dt}(\vec{s}(t))\end{aligned}$$

mit

$$\|q(t) - p(t)\| \equiv |\vec{s}(t)| = \textit{konstant}$$

folgt

$$\frac{d}{dt}(|\vec{s}(t)|) = 0$$

Anwendung der Kettenregel liefert (siehe Bspw. [14, S.20])

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\sqrt{\langle \vec{s}(t), \vec{s}(t) \rangle}) &= 0 \\ 2\vec{s}(t) \cdot \dot{\vec{s}}(t) &= 0 \\ \implies \vec{s}(t) \perp \dot{\vec{s}}(t)\end{aligned}$$

Da der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\vec{s}}(t)$  senkrecht auf  $\vec{s}(t)$  stehen soll ist es sinnvoll einen Vektor  $\vec{\omega}(t)$  wie folgt einzuführen:

$$\dot{\vec{s}}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{s}(t)$$

Damit berechnet sich die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes des Körpers zu:

$$\frac{d}{dt}(\vec{q}(t)) = \dot{\vec{q}}(t) = \dot{\vec{p}}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{s}(t) \quad (3.1)$$

Da die Berechnung der Summe und des Kreuzproduktes sehr unhandlich ist soll eine Ausdruck für die Geschwindigkeit in homogenen Koordinaten gefunden werden. Die Herleitung lautet wie folgt:

Die Vektorgleichung soll auch in homogenen Koordinaten gelten:

$${}^H\vec{q}(t) = {}^H\vec{p}(t) + {}^H\vec{s}(t)$$

Ausführliche Schreibweise unter der Beachtung, dass  $\vec{s}(t)$  ein Richtungsvektor ist

$$\begin{pmatrix} \vec{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformation von  $\vec{s}(t)$  in körperfeste Koordinaten

$$\begin{pmatrix} {}_I\vec{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\vec{p}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{Q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv T} \begin{pmatrix} {}_K\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} {}_I\vec{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} {}_I\vec{p}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{Q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_K\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Beachtung der Kettenregel und Differentiationsregel für homogene Matrizen

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\vec{Q}} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_K\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \left( \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{Q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_K\dot{\vec{s}}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

lokales  $\vec{s}(t)$  ist zeitlich konstant

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\vec{Q}} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}}_{\dot{T}} \begin{pmatrix} {}_K\vec{s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation von  $\vec{s}(t)$  in globale Koordinaten  $I$

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\vec{Q}} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}}_{\dot{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{Q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}^T}_{T^T} \begin{pmatrix} {}_I\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\vec{Q}} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\vec{Q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_I\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation in kartesische Koordinaten

$${}_I\dot{\vec{q}}(t) = {}_I\dot{\vec{p}}(t) + \underbrace{\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T}_{:=\boldsymbol{\Omega}} {}_I\vec{s}(t)$$

Vergleich mit Gleichung (3.1) unter Beachtung der Ersetzung des Kreuzproduktes durch eine Matrix nach Gleichung (1.30) beweist die Äquivalenz dieser alternativen Herleitung

$${}_I\dot{\vec{q}}(t) = {}_I\dot{\vec{p}}(t) + \boldsymbol{\Omega}_I \vec{s}(t)$$

Kompakte Form in homogenen Koordinaten:

$${}^H\dot{\vec{q}}_I(t) = {}^H\dot{\vec{p}}_I(t) + \dot{\mathbf{T}}\mathbf{T}^T {}^H\vec{s}_I(t)$$

### 3.1.1 Vektor der Winkelgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}
\Omega &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \\
&= \begin{pmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} & \dot{r}_{13} \\ \dot{r}_{21} & \dot{r}_{22} & \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{31} & \dot{r}_{32} & \dot{r}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \dot{r}_{11} r_{11} + \dot{r}_{12} r_{12} + \dot{r}_{13} r_{13} & \dot{r}_{11} r_{21} + \dot{r}_{12} r_{22} + \dot{r}_{13} r_{23} & \dot{r}_{11} r_{31} + \dot{r}_{12} r_{32} + \dot{r}_{13} r_{33} \\ \dot{r}_{21} r_{11} + \dot{r}_{22} r_{12} + \dot{r}_{23} r_{13} & \dot{r}_{21} r_{21} + \dot{r}_{22} r_{22} + \dot{r}_{23} r_{23} & \dot{r}_{21} r_{31} + \dot{r}_{22} r_{32} + \dot{r}_{23} r_{33} \\ \dot{r}_{31} r_{11} + \dot{r}_{32} r_{12} + \dot{r}_{33} r_{13} & \dot{r}_{31} r_{21} + \dot{r}_{32} r_{22} + \dot{r}_{33} r_{23} & \dot{r}_{31} r_{31} + \dot{r}_{32} r_{32} + \dot{r}_{33} r_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \\
\vec{\omega} &= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{r}_{31} r_{21} + \dot{r}_{32} r_{22} + \dot{r}_{33} r_{23} \\ \dot{r}_{11} r_{31} + \dot{r}_{12} r_{32} + \dot{r}_{13} r_{33} \\ \dot{r}_{21} r_{11} + \dot{r}_{22} r_{12} + \dot{r}_{23} r_{13} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle \dot{v}, w \rangle \\ \langle \dot{u}, v \rangle \\ \langle \dot{w}, u \rangle \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Drall

$$\mathbf{L}_P = \begin{pmatrix} A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z \\ -F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z \\ -E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_P &= \mathbf{J}_P \vec{\omega} \\ \mathbf{J}_P &= \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{L}_P &= \frac{1}{2} (\dots \\ &\quad \omega_x (A\omega_x - E\omega_z - F\omega_y) + \dots \\ &\quad \omega_y (B\omega_y - D\omega_z - F\omega_x) + \dots \\ &\quad \omega_z (C\omega_z - D\omega_y - E\omega_x))\end{aligned}$$

Einsetzen der Terme für Komponenten der Winkelgeschw.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} (A(\dot{v}^2)(w^2) + B(\dot{u}^2)(v^2) + C(\dot{w}^2)(u^2)) + \dots \\ &\quad \frac{1}{2} \left( -D\dot{u}\dot{w} \underbrace{uv}_{=0} - E\dot{v}\dot{w} \underbrace{uw}_{=0} - F\dot{u}\dot{v} \underbrace{vw}_{=0} \right)\end{aligned}$$

## 3.2 Lagrange Gleichung 2. Art

### 3.2.1 Ergänzungen

[15, S.38], [16, S.90], [17, S.87],

Lagrange sollte man nicht verwenden. Dies bedeutet, dass die direkte Auswertung der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art in ihrer ursprünglichen Form (4.61) auf einen unnötigen Rechenaufwand führt. Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen nach dem d'Alembertschen Prinzip kommt man dagegen unmittelbar ans Ziel. Deshalb wird in den nächsten Kapiteln nur noch das d'Alembertsche bzw. das Jourdain'sche Prinzip herangezogen. Diesen beiden Prinzipien liegt aber letztlich die Aufteilung des Raumes, der von den Koordinaten eines freigeschnittenen mechanischen Systems aufgespannt wird, in zwei orthogonale Unterräume für die freien bzw. gesperrten Bewegungsrichtungen zugrunde. Diese orthogonalen Unterräume sind unter der Voraussetzung idealer Kräfte, wie sie z. B. in gewöhnlichen Mehrkörpersystemen auftreten, voneinander unabhängig, was auf ungekoppelte Bewegungs- und Reaktionsgleichungen führt. [19, S. 96]

Alternative Formalismen zur Herleitung der Bewegungsgleichungen [19, S. 131]

ff.] [12, S.42] -> das könnte wirklich noch mal helfen

Bewertung verschiedener Verfahren: [12, S.56], [21, S.8]

### 3.2.2 Richtiger Inhalt

Ein System mit  $n$  generalisierten Koordinaten  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ , welche nicht notwendigerweise voneinander unabhängig sein müssen, und  $m$  Zwangsbedingungen  $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)^T = \vec{0}$ , dessen Kinetische Energie  $T$  und potentielle Energie  $V$  durch  $L = T - V$  beschrieben werden kann, lässt sich nach [22, S. 124] charakterisieren durch:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\delta \vec{q}^T \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \vec{\lambda} - \vec{Q}_{ex} \right)}_{g(t)} dt = 0 \quad (3.2)$$

Dabei gelten die Dimensionen

$$\delta \vec{q} \in \mathcal{R}^n \quad L \in \mathcal{R} \quad \vec{q} \in \mathcal{R}^n \quad \boldsymbol{\Phi} \in \mathcal{R}^{m \times n} \quad \vec{\lambda} \in \mathcal{R}^m \quad \vec{Q} \in \mathcal{R}^n$$

Mit Hilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung [26, S. 107 f.] lässt sich Gleichung (3.2) umformen. Das Fundamentallemma der Variationsrechnung kann wie folgt formuliert werden:

Eine integrierbare Funktion  $g(t)$  entspricht der Nullfunktion auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ , wenn die Aussage

$$\int_a^b g(t) \cdot h(t) dt = 0$$

für beliebige stetige Funktionen  $h(t)$  in diesem Intervall erfüllt ist.

Für beliebige Variationen des Ortes  $h(t) = \delta \vec{q}(t)^T$  soll Gleichung (3.2) erfüllt sein und damit ist  $g(t)$  gleich der Nullfunktion. Die  $m$  Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda$  sind also so zu wählen, dass

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \vec{\lambda} - \vec{Q}_{ex} = 0$$

gilt. Diese Gleichung der Dimension  $n$  bildet gemeinsam mit den  $m$  Zwangsbedingungen  $\vec{\phi} = \vec{0}$  ein System von  $(n + m)$  differential-algebraischen Gleichungen. Der Vergleich mit der üblichen Form der Gleichung von Lagrange (2. Art)

Gleichung (3.3) macht einige Unterschiede deutlich.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0 \quad (3.3)$$

mit

$$\vec{q} \in R^{n-m}$$

Die  $n$  generalisierten Koordinaten  $q$  müssen mit Hilfe der  $m$  Zwangsbedingungen auf einen Satz von  $n - m$  Minimalkoordinaten  $q_{min}$  reduziert werden. Diese Minimalkoordinaten sind dann voneinander unabhängig sein.

### 3.2.3 Kinetische Energie

Die kinetische Energie  $K$  eines Starrkörpers wird durch die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes  $\vec{A}$ , welcher ein Element des Körpers ist, und seiner Massenverteilung nach Gleichung (3.4) beschrieben.

$$K = \frac{1}{2} \int_m \dot{\vec{A}}^2 dm \quad (3.4)$$

Der Punkt  $\vec{A}$  kann in den Koordinaten des körperfesten Koordinatensystems mit Ursprung  $\vec{P}$  durch den Vektor  $(x, y, z, 1)^T$  und die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  beschrieben werden. Die kinetische Energie lässt sich dann entsprechend umformen.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_m (x, y, z, 1) \dot{\mathbf{T}}^T \dot{\mathbf{T}} (x, y, z, 1)^T \\ &= \frac{1}{2} \int_m (x, y, z, 1) \begin{bmatrix} \dot{\vec{u}}^2 & \langle \dot{\vec{u}}, \dot{\vec{w}} \rangle & \langle \dot{\vec{u}}, \dot{\vec{v}} \rangle & \langle \dot{\vec{u}}, \dot{\vec{P}} \rangle \\ \langle \dot{\vec{w}}, \dot{\vec{u}} \rangle & \dot{\vec{w}}^2 & \langle \dot{\vec{w}}, \dot{\vec{v}} \rangle & \langle \dot{\vec{w}}, \dot{\vec{P}} \rangle \\ \langle \dot{\vec{v}}, \dot{\vec{u}} \rangle & \langle \dot{\vec{v}}, \dot{\vec{w}} \rangle & \dot{\vec{v}}^2 & \langle \dot{\vec{v}}, \dot{\vec{P}} \rangle \\ \langle \dot{\vec{P}}, \dot{\vec{u}} \rangle & \langle \dot{\vec{P}}, \dot{\vec{w}} \rangle & \langle \dot{\vec{P}}, \dot{\vec{v}} \rangle & \dot{\vec{P}}^2 \end{bmatrix} (x, y, z, 1)^T \\ &= \frac{1}{2} \dot{\vec{P}}^2 \int_m dm + \frac{1}{2} \dot{\vec{u}}^2 \int_m x^2 dm + \frac{1}{2} \dot{\vec{w}}^2 \int_m y^2 dm + \frac{1}{2} \dot{\vec{v}}^2 \int_m z^2 dm \\ &\quad + \langle \dot{\vec{u}}, \dot{\vec{w}} \rangle \int_m xy dm + \langle \dot{\vec{u}}, \dot{\vec{v}} \rangle \int_m xz dm + \langle \dot{\vec{w}}, \dot{\vec{v}} \rangle \int_m yz dm \\ &\quad + \langle \dot{\vec{u}}, \dot{\vec{P}} \rangle \int_m x dm + \langle \dot{\vec{v}}, \dot{\vec{P}} \rangle \int_m z dm + \langle \dot{\vec{w}}, \dot{\vec{P}} \rangle \int_m y dm \end{aligned}$$

und unter der Annahme, dass  $\vec{P}$  der Schwerpunkt des Körpers ist folgt mit Hilfe des Trägheitstensors

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{P}}^2 \\
 &+ \frac{1}{4}I_x \left( -\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \dot{v}^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{4}I_y \left( \dot{u}^2 - \dot{w}^2 + \dot{v}^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{4}I_z \left( \dot{u}^2 + \dot{w}^2 - \dot{v}^2 \right) \\
 &+ C_{xz}\langle \dot{u}, \dot{v} \rangle + C_{xy}\langle \dot{u}, \dot{w} \rangle + C_{yz}\langle \dot{w}, \dot{v} \rangle
 \end{aligned}$$

### 3.2.4 Prinzip der virtuellen Arbeit

siehe auch [21, S.136] Eine virtuelle Verschiebung ist eine infinitesimale, rein virtuelle Änderung des Zustands eines Systems, ohne das die Zeit dabei voranschreitet. Die Zustandsänderung muss dabei mit den Zwangsbedingungen verträglich sein. Zur Darstellung einer virtuellen Bewegung wird meist das Symbol  $\delta$  voran gestellt.

Wenn ein System durch generalisierte Koordinaten  $\vec{q}$  beschrieben wird, dann wird die virtuelle Verschiebung dieses Systems durch  $\delta\vec{q}$  notiert. Virtuelle Verschiebungen verhalten sich genau so wie andere, infinitesimale Variationen einer Größe. Damit sind virtuelle Verschiebungen ähnlich dem Differentialoperator, wobei die Besonderheit, dass die Zeit als konstante Größe angenommen wird, zu beachten ist. Das Beispiel 3.1 soll dies verdeutlichen.

Bei der Arbeit mit virtuellen Verschiebungen gelten die gleichen Gesetze wie bei Anwendung des Differentialoperators bezüglich Summen, Produkten und Verkettungen. Außerdem kann der Variationsoperator virtuelle Verschiebung mit dem Differential- und Integraloperator vertauscht werden.

*Beispiel 3.1* (Virtuelle Verschiebungen). Gegeben sei eine Funktion  $\phi(\vec{q}, t) \in \mathcal{R}$ , welche von  $n$  generalisierten Koordinaten  $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$  und außerdem explizit von der Zeit  $t$  abhängt. Diese Funktion könnte Beispielsweise die Position eines Körpers beschreiben. Die virtuelle Verschiebung dieser Funktion berechnet

sich nach folgendem Schema:

$$\delta\phi(\vec{q}, t) = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1}\phi(\vec{q}, t) \quad \frac{\partial}{\partial q_2}\phi(\vec{q}, t) \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial q_n}\phi(\vec{q}, t) \right] \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix}$$

Man beachte dabei, dass die generalisierten Koordinaten von der Zeit abhängig sein können. Da die Zeit bei einer virtuellen Verschiebung als konstant angenommen wird, hat eine solche Zeitabhängigkeit keinen Einfluss auf die Berechnung.  $\diamond$

Die virtuelle Arbeit  $\delta W_i$  welche durch eine Kraft  $\vec{F}_i$ , die an einem Punkt  $\vec{r}_i$  angreift, entsteht, ist definiert durch:

$$\delta W_i = \vec{F}_i^T \delta \vec{r}_i$$

. Die virtuelle Arbeit  $\delta W_k$ , welche durch ein Moment  $\vec{M}_k$  entsteht, ist definiert durch:

$$\delta W_k = \vec{M}_k^T \delta \vec{\varphi}_k$$

Das System befindet sich dann im Kräftegleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit für beliebige virtuelle Verschiebungen verschwindet. Für ein System, auf das  $n$  Kräfte und  $m$  Momente wirken, muss bei Gleichgewicht der Kräfte daher (3.5) erfüllt sein.

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^T \delta \vec{r}_i + \sum_{k=1}^m \vec{M}_k^T \delta \vec{\varphi}_k = 0 \quad (3.5)$$

Die gesamte virtuelle Arbeit eines Systems kann auch als Summe der generalisierten Kräfte des Systems interpretiert werden. Gleichung (3.6) zeigt diesen Zusammenhang. Mit Hilfe der generalisierten Koordinaten  $\vec{q}$  lässt sich Gleichung (3.6) derart umformen, dass man den zur Lösung von (3.2) benötigten Ausdruck für  $Q_{ex}$  erhält.

$$\delta W = \sum_{i=1}^k Q_i \delta \vec{r}_i \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$



In einem System mit  $n$  generalisierten Koordinaten an welchem  $k$  Kräfte angreifen, wird die virtuelle Arbeit durch Gleichung (3.6) beschrieben.

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial q_1} + \frac{\partial W_2}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial W_k}{\partial q_1} \\ \frac{\partial W_1}{\partial q_2} + \frac{\partial W_2}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial W_k}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial W_1}{\partial q_n} + \frac{\partial W_2}{\partial q_n} + \dots + \frac{\partial W_k}{\partial q_n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix}$$

Betrachtet man einen Punkt  $P_l$  in einem lokalen, körperfesten Koordinatensystem, so lässt sich dieser Punkt beschreiben durch

$$P = \begin{bmatrix} x_l(t) \\ y_l(t) \\ z_l(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(t) & w_x(t) & v_x(t) & q_1(t) \\ u_y(t) & w_y(t) & v_y(t) & q_2(t) \\ u_z(t) & w_z(t) & v_z(t) & q_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allgemeine Punktbeschreibung

$$\vec{r}^g = \vec{r}_0^g + \vec{\varphi}^g \times (\vec{r}^g - \vec{r}_0^g)$$

Virtuelle Verschiebung = virtuelle Translation und virt. Rotation

$$\delta \vec{r}^g = \delta \vec{r}_0^g + \delta \vec{\varphi}^g \times (\vec{r}^g - \vec{r}_0^g)$$

Kreuzprodukt durch Matrixprodukt ersetzen

$$= \delta \vec{r}_0^g + \delta \boldsymbol{\Theta} \cdot (\vec{r}^g - \vec{r}_0^g)$$

Formulierung mit Rotationsmatrix und lokalem Vektor

$$= \delta \vec{r}_0^g + \delta (\mathbf{R} \vec{z}^l)$$

Lokaler Vektor ist konstant, daher hat Operator  $\delta$  keinen Einfluss

$$= \delta \vec{r}_0^g + \delta \mathbf{R} \cdot \vec{z}^l$$

Übergang zu globalem Vektor mit  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

$$= \delta \vec{r}_0^g + \delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \vec{z}^g$$

Hier steht Text

### **3.2.5 Bewegung in homog. Koords**

[11, S. 160], [11, S. 237]

## **3.3 Lösung der Differentialgleichungen**



# Literaturverzeichnis

---

- [1] S. Bosch, *Lineare Algebra*. Springer Berlin Heidelberg, 2014. DOI: 10.1007/978-3-642-55260-1. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-55260-1>.
- [2] M. Plaue und M. Scherfner, *Mathematik für das Bachelorstudium I*. Spektrum-Akademischer Vlg, 11. Mai 2009, XIV S., ISBN: 3827420679. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/7973734/matthias\\_plaue\\_mike\\_scherfner\\_mathematik\\_fuer\\_das\\_bachelorstudium\\_i.html](http://www.ebook.de/de/product/7973734/matthias_plaue_mike_scherfner_mathematik_fuer_das_bachelorstudium_i.html).
- [3] F. Modler und M. Kreh, *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*. Springer Nature, 2014. DOI: 10.1007/978-3-642-37366-4. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-37366-4>.
- [4] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*. Springer Science + Business Media, 2014. DOI: 10.1007/978-3-658-05620-9. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-05620-9>.
- [5] A. Röthlisberger, N. Rothfuchs, A. Metlar und P. Reinhard, *Vektoralgebra*, Vorlesungsskript Multilineare Algebra und ihre Anwendungen, SS 2007, 2007. Adresse: <https://people.math.ethz.ch/~grsam/MultLinAlgSS07/group8.pdf>.
- [6] K. Jänich, *Vektoranalysis*. Springer-Verlag GmbH, 11. Jan. 2005, XII275 S., ISBN: 3540237410. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/3169876/klaus\\_jaenich\\_vektoranalysis.html](http://www.ebook.de/de/product/3169876/klaus_jaenich_vektoranalysis.html).
- [7] G. Cantor, „Beiträge zur begründung der transfiniten mengenlehre“, *Mathematische Annalen* 46, 1895.
- [8] G. Asser, *Grundbegriffe der Mathematik. 1, Mengen, Abbildungen, natürliche Zahlen* /, 2., berichtigte Aufl. Berlin : Dt. Verl. d. Wiss., 1975. Adresse: [http://slubdd.de/katalog?TN\\_libero\\_mab2761333](http://slubdd.de/katalog?TN_libero_mab2761333).

- [9] T. Arens, R. Busam, F. Hettlich, C. Karpfinger und H. Stachel, *Grundwissen Mathematikstudium*. Springer Science + Business Media, 2013. DOI: 10.1007/978-3-8274-2309-2. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8274-2309-2>.
- [10] T. Rießinger, „Vektorrechnung“, in *Mathematik für Ingenieure*, Springer, 1. Jan. 2007, ISBN: 978-3-540-68180-9. DOI: 10.1007/978-3-540-68181-6\_3. Adresse: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-68181-6\\_3](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-68181-6_3).
- [11] D. W. Wloka, *Robotersysteme 1*. Springer Nature, 1992. DOI: 10.1007/978-3-642-93509-1. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-93509-1>.
- [12] F. Pfeiffer und T. Schindler, *Einführung in die Dynamik*. Springer Nature, 2014. DOI: 10.1007/978-3-642-41046-8. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-41046-8>.
- [13] R. M. Murray, Z. Li und S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC PR INC, 11. März 1994, 480 Seiten, ISBN: 0849379814. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/3803129/richard\\_m\\_murray\\_zexiang\\_li\\_s\\_shankar\\_sastry\\_a\\_mathematical\\_introduction\\_to\\_robotic\\_manipulation.html](http://www.ebook.de/de/product/3803129/richard_m_murray_zexiang_li_s_shankar_sastry_a_mathematical_introduction_to_robotic_manipulation.html).
- [14] F. U. Mathiak, *Technische Mechanik 3*. Gruyter, Walter de GmbH, 11. Sep. 2015, X S., ISBN: 3110438046. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/23897945/friedrich\\_u\\_mathiak\\_technische\\_mechanik\\_3.html](http://www.ebook.de/de/product/23897945/friedrich_u_mathiak_technische_mechanik_3.html).
- [15] D. Bestle, *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Springer, 28. Juni 2012, 268 Seiten, ISBN: 3642523536. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/21060808/dieter\\_bestle\\_analyse\\_und\\_optimierung\\_von\\_mehrkoerpersystemen.html](http://www.ebook.de/de/product/21060808/dieter_bestle_analyse_und_optimierung_von_mehrkoerpersystemen.html).
- [16] G. Rill und T. Schaeffer, *Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation*. Vieweg+Teubner Verlag, 10. Sep. 2014, xi S., ISBN: 3658060832. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/22487591/georg\\_rill\\_thomas\\_schaeffer\\_grundlagen\\_und\\_methodik\\_der\\_mehrkoerpersimulation.html](http://www.ebook.de/de/product/22487591/georg_rill_thomas_schaeffer_grundlagen_und_methodik_der_mehrkoerpersimulation.html).

- [17] D. Schramm, M. Hiller und R. Bardini, *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. Springer Nature, 2010. DOI: 10.1007/978-3-540-89315-8. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-89315-8>.
- [18] H. Gattringer, *Starr-elastische Robotersysteme*. Springer Nature, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-22828-5. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-22828-5>.
- [19] W. Schiehlen und P. Eberhard, *Technische Dynamik*. Springer Nature, 2014. DOI: 10.1007/978-3-658-06185-2. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-06185-2>.
- [20] M. Husty, A. Karger, H. Sachs und W. Steinhilper, *Kinematik und Robotik*. Springer, 4. Okt. 2012, 652 Seiten, ISBN: 3642638228. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/20178489/manfred\\_husty\\_adolf\\_karger\\_hans\\_sachs\\_waldemar\\_steinhilper\\_kinematik\\_und\\_robotik.html](http://www.ebook.de/de/product/20178489/manfred_husty_adolf_karger_hans_sachs_waldemar_steinhilper_kinematik_und_robotik.html).
- [21] C. Woernle, *Mehrkörpersysteme*. Springer Nature, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-15982-4. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-15982-4>.
- [22] J. G. de Jalón und E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer New York, 1994. DOI: 10.1007/978-1-4612-2600-0. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-2600-0>.
- [23] J. G. de Jalón, „Twenty-five years of natural coordinates“, *Multibody System Dynamics*, Bd. 18, Nr. 1, S. 15–33, Juni 2007. DOI: 10.1007/s11044-007-9068-0. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/s11044-007-9068-0>.
- [24] V. Cossalter und R. Lot, „A motorcycle multi-body model for real time simulations based on the natural coordinates approach“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 37, Nr. 6, S. 423–447, 2002. DOI: 10.1076/vesd.37.6.423.3523. eprint: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1076/vesd.37.6.423.3523>.

- [25] R. L. Huston, „Useful procedures in multibody dynamics“, in *Dynamics of Multibody Systems*, Springer Nature, 1986, S. 69–77. DOI: 10.1007/978-3-642-82755-6\_6. Adresse: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-82755-6\\_6](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-82755-6_6).
- [26] J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. JOHN WILEY & SONS INC, 11. Aug. 2002, 608 Seiten, ISBN: 047117985X. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/3604484/j\\_n\\_reddy\\_energy\\_principles\\_and\\_variational\\_methods\\_in\\_applied\\_mechanics.html](http://www.ebook.de/de/product/3604484/j_n_reddy_energy_principles_and_variational_methods_in_applied_mechanics.html).
- [27] R. Lot, „A motorcycle tire model for dynamic simulations: Theoretical and experimental aspects“, *Meccanica*, Bd. 39, Nr. 3, S. 207–220, Juni 2004. DOI: 10.1023/b:mecc.0000022842.12077.5c. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1023/B:MECC.0000022842.12077.5c>.
- [28] M. Tanelli, M. Corno und S. Saveresi, *Modelling, Simulation and Control of Two-Wheeled Vehicles*. JOHN WILEY & SONS INC, 31. März 2014, 348 Seiten, ISBN: 111995018X. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/21283014/mara\\_tanelli\\_matteo\\_corno\\_sergio\\_saveresi\\_modelling\\_simulation\\_and\\_control\\_of\\_two\\_wheeled\\_vehicles.html](http://www.ebook.de/de/product/21283014/mara_tanelli_matteo_corno_sergio_saveresi_modelling_simulation_and_control_of_two_wheeled_vehicles.html).
- [29] P. Thede und L. Parks, *Race Tech's Motorcycle Suspension Bible*. Motorbooks International, 1. Mai 2010, 256 Seiten, ISBN: 0760331405. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/8809885/paul\\_thede\\_lee\\_parks\\_race\\_tech\\_s\\_motorcycle\\_suspension\\_bible.html](http://www.ebook.de/de/product/8809885/paul_thede_lee_parks_race_tech_s_motorcycle_suspension_bible.html).
- [30] J. Stoffregen, *Motorradtechnik*. Vieweg+Teubner Verlag, 23. Mai 2012, x488 S., ISBN: 3834817163. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/18260420/juergen\\_stoffregen\\_motorradtechnik.html](http://www.ebook.de/de/product/18260420/juergen_stoffregen_motorradtechnik.html).
- [31] K. Magnus und H. H. Müller-Slany, *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Teubner B.G. GmbH, 11. Okt. 2005, 302 Seiten, ISBN: 3835100076. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/3555786/kurt\\_magnus\\_hans\\_heinrich\\_mueller\\_slany\\_grundlagen\\_der\\_technischen\\_mechanik.html](http://www.ebook.de/de/product/3555786/kurt_magnus_hans_heinrich_mueller_slany_grundlagen_der_technischen_mechanik.html).

- [32] I. J. Besselink, A. J. Schmeitz und H. B. Pacejka, „An improved magic formula/swift tyre model that can handle inflation pressure changes“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 48, Nr. sup1, S. 337–352, Dez. 2010. DOI: 10.1080/00423111003748088. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1080/00423111003748088>.
- [33] H. B. Pacejka, „Tire characteristics and vehicle handling and stability“, in *Tire and Vehicle Dynamics*, Elsevier BV, 2012, S. 1–58. DOI: 10.1016/b978-0-08-097016-5.00001-2. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-08-097016-5.00001-2>.
- [34] J. G. de Jalón, N. Shimizu und D. Gómez, „Natural coordinates for teaching multibody systems with matlab“, in *Volume 5: 6th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B, and C*, ASME International, 2007. DOI: 10.1115/detc2007-35358. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1115/DETC2007-35358>.
- [35] P. Flores, R. Pereira, M. Machado und E. Seabra, *The Pneumatic Tire*, A. N. Gent und J. D. Walter, Hrsg. National Highway Traffic Safety Administration, Washington, DC, 2006.
- [36] J. Baumgarte, „Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 1, Nr. 1, S. 1–16, Juni 1972. DOI: 10.1016/0045-7825(72)90018-7. Adresse: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(72\)90018-7](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(72)90018-7).
- [37] P. Flores, R. Pereira, M. Machado und E. Seabra, „Investigation on the baumgarte stabilization method for dynamic analysis of constrained multibody systems“, in *Proceedings of EUCOMES 08*, Springer Science + Business Media, 2008, S. 305–312. DOI: 10.1007/978-1-4020-8915-2\_37.
- [38] T. Westermann, *Mathematik für Ingenieure mit Maple*. Springer Berlin Heidelberg, 30. März 2006. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/22005420/thomas\\_westermann\\_mathematik\\_fuer\\_ingenieure\\_mit\\_maple.html](http://www.ebook.de/de/product/22005420/thomas_westermann_mathematik_fuer_ingenieure_mit_maple.html).



- [39] N. W. Akimoff, *Elementary course in Lagrange's equations and their applications to solutions of problems of dynamics, with numerous examples*. Philadelphia, Pa., Philadelphia book company, 1917.
- [40] H. B. Pacejka und E. Bakker, „THE MAGIC FORMULA TYRE MODEL“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 21, Nr. sup001, S. 1–18, Jan. 1992. DOI: 10.1080/00423119208969994. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1080/00423119208969994>.
- [41] M. Cline und D. Pai, „Post-stabilization for rigid body simulation with contact and constraints“, in *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.03CH37422)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2003. DOI: 10.1109/robot.2003.1242171. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1109/ROBOT.2003.1242171>.
- [42] P. Flores, M. Machado, E. Seabra und M. T. da Silva, „A parametric study on the baumgarte stabilization method for forward dynamics of constrained multibody systems“, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Bd. 6, Nr. 1, S. 011019, 2011. DOI: 10.1115/1.4002338. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1115/1.4002338>.
- [43] K. C. PARK und J. C. CHIOU, „Stabilization of computational procedures for constrained dynamical systems“, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Bd. 11, Nr. 4, S. 365–370, Juli 1988. DOI: 10.2514/3.20320. Adresse: <http://dx.doi.org/10.2514/3.20320>.
- [44] E. J. Haug und R. C. Deyo, Hrsg., *Real-Time Integration Methods for Mechanical System Simulation*. Springer Science + Business Media, 1991. DOI: 10.1007/978-3-642-76159-1. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-76159-1>.
- [45] E. Hairer und G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II*. Springer-Verlag GmbH, 11. März 2010, XV S., ISBN: 3642052207. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/9074956/ernst\\_hairer\\_gerhard\\_wanner\\_solving\\_ordinary\\_differential\\_equations\\_ii.html](http://www.ebook.de/de/product/9074956/ernst_hairer_gerhard_wanner_solving_ordinary_differential_equations_ii.html).

- [46] M. A. Neto und J. Ambrósio, „Stabilization methods for the integration of dae in the presence of redundant constraints“, *Multibody System Dynamics*, Bd. 10, Nr. 1, S. 81–105, 2003. DOI: 10.1023/a:1024567523268. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1024567523268>.
- [47] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall, *Technische Mechanik Band 3: Kinetik*, 9. Aufl. Springer Berlin Heidelberg, 2006. DOI: 10.1007/3-540-34085-8. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/3-540-34085-8>.