Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Mathematische Grundlagen 1

1.1 Einführung

Bei der Analyse von Problemen ist es in der Mathematik ebenso wie in anderen Fachbereichen üblich, mit Hilfe von Modellen möglichst einfache Grundstrukturen zu finden, welche für die Lösung des untersuchten Problems von Interesse sind. Dabei kann die gezielte Untersuchung einer solchen Grundstruktur losgelöst von der eigentlichen Problemstellung durchgeführt werden. Dadurch ist ein Modell in der Regel leichter überschaubar, als das eigentliche Problem.
Als einführendes Beispiel wird eine geeignete Beschreibung des dreidimensionalen Raumes entworfen. Dieses ist in weiten Teilen [1] nachempfunden.
Die Beschreibung des dreidimensionalen Raumes baut auf einer Reihe von Grundstrukturen auf. Die Basis bilden Mengen, deren Elemente und Abbildungen (siehe Abschnitt 1.2). Darauf aufbauend werden im Abschnitt 1.4 Gruppen als Mengen mit einer inneren Abbildung definiert. Im Abschnitt 1.5 werden die Eigenschaften von Gruppen weiter eingeschränkt, was auf den Begriff des Körper führt. Anschließend können Vektorräume über einem Körper und deren Elemente - die Vektoren - definiert werden (siehe 1.6). Wegen ihrer hohen Relevanz für diese Arbeit werden im Abschnitt 1.7 die Rechenregeln von Vektoren und Matrizen eingeführt. Außerdem wird der Unterschied zwischen Punkten und Vektoren aufgeführt. Die Ausführungen zu diesen Elementen der linearen Algebra sind [1], [2] und [3] entnommen. Die Eigenschaften von Vektoren sind [4] entnommen.
Der dreidimensionale Raum [1] wird auf Basis der so eingeführten Begriffe mit Hilfe einer geeigneten Basis als Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen in Form eines Koordinatensystems im Kapitel 2 eingeführt.
Um die Position eines Körpers im Raum beschreiben zu können werden fernerhin für Vektoren und Matrizen unter anderem die Rechenregeln Addition

1 der dreidimensionale Raum wird in dieser Arbeit als Anschauungsraum bezeichnet

und Multiplikation nach [4] definiert. Im Kapitel 2 werden die so eingeführten Gesetze verwendet um die Handhabung von Koordinatensystemen im Detail zu beschreiben.

Zur Beschreibung des dreidimensionalen Raumes sei eine Ebene E gegeben, welche beliebig im Anschauungsraum liegt. Weiterhin sei ein beliebiger Punkt dieser Ebene gegeben, welcher als Nullpunkt O eines Koordinatensystems dienen soll. Zusätzlich seien drei Geraden $X, Y,$ und Z gegeben, welche als Koordinatenachsen dienen. Alle drei Geraden sollen sich dabei im Punkt O schneiden und die reellen Zahlen komplett durchlaufen. Außerdem sollen keine zwei Geraden parallel zueinander sein. Ferner sollen die Geraden paarweise derart senkrecht aufeinander stehen, dass sie ein Rechtssystem bilden. Überdies sei auf jeder Gerade ein spezieller Punkt definiert: I_x, I_y und I_z. Dieser Punkt habe vom Ursprung, entlang der jeweiligen Achse auf der er liegt, genau den Abstand 1. Man bezeichnet diesen Abstand als *Einheitslänge*.
Hinzukommend wird ein Vektor $\overrightarrow{e}_x$ definiert, welcher vom Ursprung aus auf den Punkt I_x zeigt und damit zwangsläufig auf der Geraden X liegt. Analog werden die Vektoren $\overrightarrow{e}_y$ und $\overrightarrow{e}_z$ definiert. Diese Vektoren mit *Einheitslänge*, welche entlang der Koordinatenachsen liegen, werden *Einheitsvektoren* genannt. Als Tripel notiert haben sie entlang der Achse, in welche sie zeigen, eine 1 als Eintrag und sonst eine 0. Damit gilt $\overrightarrow{e}_x = (1{,}0{,}0)\,, \overrightarrow{e}_y = (0{,}1{,}0)\,, \overrightarrow{e}_z = (0{,}0{,}1)$. Durch die genannten Bedingungen ist es nicht möglich einen der *Einheitsvektoren* als *Linearkombination* der Anderen darzustellen. Damit bilden diese *Einheitsvektoren* eine *Basis* für einen *Vektorraum* V. Da die *Einheitsvektoren* genau drei unabhängige Vektoren sind ist der von ihnen aufgespannten Raum *Vektorraum* gleich dem dreidimensionalen Raum.
Weiterhin sei ein Streckungsfaktor $\alpha \in \mathcal{R}$ definiert. Mit Hilfe von $\alpha \cdot I_x$ sei das Bild des Punktes I_x beschrieben, welches sich durch Streckung mit Streckungszentrum im Ursprung O, entlang der x-Achse, um den Streckungsfaktor α ergibt. Die Zuordnung $\alpha \to \alpha \cdot I_x$ liefert damit eine eindeutige, umkehrbare Zuordnung der reellen Zahlen auf die Punkte der Geraden X. Dabei ist das Bild der Streckung des *Einheitsvektors* $\overrightarrow{e}_x$ äquivalent mit dem Bild der Streckung des Punktes I_x. Zusätlich seien für die Achsen Y und Z die Streckungsfaktoren β und γ nach dem gleichen Schema definiert.

Mit Hilfe dieser Festlegungen können beliebige Punkte im Raum beschrieben werden. Alle Punkte des Raumes bilden dabei die *Menge* R^3. Man sagt, dass die Punkte *Elemente* dieser *Menge* sind. Betrachtet man zum Beispiel einen Punkt auf der Ebene E, so kann man dieses *Element* als Tripel von reellen Zahlen interpretieren: $P = (x_1, y_1, z_1)$. Man nennt dieses Tripel die *Koordinaten* von P (bezüglich des gewählten Koordinatensystems). Der Ursprung des Koordinatensystems hat bezüglich des Koordinatensystems, dessen Ursprung er ist, immer die Koordinaten (0,0,0). Den Wert von x_1 erhält man geometrisch durch Konstruktion einer Normalen bezüglich der x-Achse, welche den Punkt P durchläuft. Den Fußpunkt dieser Normalen kann man durch Streckung des zuvor definierten Punktes I_x um den Faktor α_P erhalten. Dabei entspricht eben diese reelle Zahl α_P dem Wert von x_1.
Die Werte für y_1 und z_1 ergeben sich analog. Die so erhaltene Zuordnung $P \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$ bezeichnet man als eine Abbildung. Mit Hilfe dieser Abbildung wird beliebigen Punkten der Ebene E in eindeutiger Weise ein Zahlentripel von reellen Zahlen zugeordnet. Man sagt auch, dass dieses Zahlentripel ein *Element* des *Vektorraumes V* ist, welcher über dem *Körper* der reellen Zahlen definiert ist. Aufgrund dessen, dass die Achsen des Koordinatensystems durch die *Basis* des *Vektorraumes* beschrieben werden, sind die Zahlenwerte des Tripels zwangsläufig abhängig von der Wahl des Koordinatensystemursprungs und der *Basisvektoren.* Da dieses Zahlentripel nicht nur ein *Element* einer *Menge*, sondern insbesondere ein Vektor eines *Vektorraumes* ist, gibt es alternative Schreibweisen für den Punkt P. Die Üblichste ist die Darstellung als Spaltenvektor $\overrightarrow{v} \in \mathcal{R}^3$. Dabei erhält man $\overrightarrow{v}$ durch Subtraktion der Koordinaten des Punktes P von den Koordinaten des gewählten Koordinatenursprungs. Beziehen sich alle Angaben auf das gleiche System, so entsprechen die Komponenten von $\overrightarrow{v}$ genau den Koordinaten von P und die Darstellung als Spaltenvektor lautet: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$. Man kann $\overrightarrow{v}$ auch als *Linearkombination* der *Basis* des *Vektorraumes V* darstellen:

$$\overrightarrow{v} = x_1 \overrightarrow{e}_x + y_1 \overrightarrow{e}_y + z_1 \overrightarrow{e}_z = \alpha_P \overrightarrow{e}_x + \beta_P \overrightarrow{e}_y + \gamma_P \overrightarrow{e}_z$$

Bemerkung 1.1. Die Beschränkung auf die Betrachtung von Rechtssystemen ist als einführendes Beispiel besonders gut geeignet, da alle in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensysteme die damit verbundenen Eigenschaften erfüllen sollen. Wollte man auch nicht orthogonale Koordinatensystem betrachten, so führt dies zwangsläufig auf die Betrachtung von kovarianten und kontravarianten Basen und die Tensorrechnung. Eine Einführung in dieses Thema ist [5] zu entnehmen. Eine ausführliche Behandlung der Thematik ist in [6] enthalten. ♦

1.2 Mengen

Definition 1 (Mengen; nach G. Cantor)**.** *Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge [7].*
Ist $\mathcal{M}$ eine Menge und x ein Objekt, so notiert man $x \in \mathcal{M}$, wenn die Menge $\mathcal{M}$ das Objekt x enthält und $x \notin \mathcal{M}$, wenn dies nicht der Fall ist.
*Enthält die Menge $\mathcal{M}$ keine Elemente, so nennt man dies die **leere Menge**[2] $\{\}$ beziehungsweise $\emptyset$.*

Mengen können durch Aufzählung aller Elemente oder durch die Angabe von Eigenschaften, welche die Elemente erfüllen sollen, definiert werden. In Beispiel 1.1 sind verschiedene Mengendefinition zu finden.
Die angegebene Definition für Mengen ist zwar anschaulich, verzichtet aber auf eine axiomatische Begründung. Im Rahmen dieser Arbeit ist diese Definition jedoch ausreichend. Ein präzise Definition von Mengen erfordert erheblichen Aufwand und ist beispielsweise in [8] enthalten.
Die folgenden Mengen sind von besonderer Bedeutung:

- die natürlichen Zahlen $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- die ganzen Zahlen $\mathcal{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$
- die rationalen Zahlen $\mathcal{Q} = \{\frac{p}{q} \big| q{,}p \in \mathcal{Z}, q \neq 0\}$
- die reellen Zahlen $\mathcal{R}$ als Menge aller, unter Umständen nicht abbrechenden, Dezimalbrüche [2, S. 12]

2 jede Menge besitzt die leere Menge als Teilmenge

Beispiel 1.1 (Mengendefinitionen).

$$\mathcal{M}_1 = \{1{,}2{,}5{,}8{,}10\}$$
$$\mathcal{M}_2 = \{x|x \text{ ist eine ganze Zahl und ungerade}\}$$

◊

Die Reihenfolge der Elemente einer Menge ist ohne Bedeutung. Daher gilt $\mathcal{M}_1 = \{1{,}4{,}8\} = \{4{,}8{,}1\}$. Enthält eine Menge ein Element mehrfach, so ist diese Multiplizität ohne Bedeutung, daher gilt $\mathcal{M}_1 = \{1{,}3{,}5\} = \{1{,}3{,}5{,}3{,}5\}$. Zur Handhabung von Mengen gibt es eine Reihe von Axiomen, auf welche im Folgenden eingegangen wird.

1.2.1 Teilmengen

Es sei $\mathcal{X}$ eine Menge und $P(x)$ eine Aussage. Die Gültigkeit der Aussage (wahr oder falsch) sei für alle Elemente x überprüfbar. Man nennt dann

$$\mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{X}|\, P(x) \text{ ist wahr}\} \tag{1.1}$$

eine **Teilmenge** von $\mathcal{X}$ und notiert $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$.
Die Mengen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ heißen *gleich*, wenn jedes Element von $\mathcal{X}$ auch in $\mathcal{Y}$ enthalten ist und umgekehrt: $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \Leftrightarrow \forall x\, (x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow x \in \mathcal{Y})$.
Gilt $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \neq \mathcal{X}$, so nennt man $\mathcal{Y}$ eine *echte Teilmenge* von $\mathcal{X}$ und notiert $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{X}$ [3].
Die Gesamtheit aller Teilmengen einer Menge $\mathcal{X}$ bildet die sogenannte **Potenzmenge** $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \{\mathcal{U}|\mathcal{U} \subset \mathcal{X}\}$.

Bemerkung 1.2 (Notation für Teilmengen). In der Literatur ist die Kennzeichnung einer echten Teilmenge im Gegensatz zu einer Teilmenge nicht einheitlich. Es gibt folgende Notationen:

- Teilmenge: $\subset$, echte Teilmenge: $\subsetneq$
- Teilmenge: $\subseteq$, echte Teilmenge: $\subset$

♦

3 Mit dem Symbol $\wedge$ ist das logische Und - die *Konjunktion* - und mit dem Symbol $\vee$ ist das logische Oder - die *Disjunktion* - gemeint. Für Erklärungen zu diesen logischen Operatoren siehe [9, S. 28]

1.2.2 Vereinigung und Durchschnitt

Sei $\mathcal{X}$ eine Menge und $\mathcal{I}$ eine Indexmenge, das heißt die Elemente von $\mathcal{I}$ sollen als Indizes dienen. Ist für jedes $i \in \mathcal{I}$ eine Teilmenge $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$ gegeben, so nennt man

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i := \{x \in \mathcal{X} | \text{ es existiert ein } i \in \mathcal{I} \text{ mit } x \in \mathcal{X}_i\} \tag{1.2}$$

die **Vereinigung** der Mengen $\mathcal{X}_i, i \in \mathcal{I}$. In der so entstehenden Teilmenge von $\mathcal{X}$ sind also all jene x enthalten, die in wenigstens einer der vereinten Teilmengen $\mathcal{X}_i$ enthalten sind.
Der **Durchschnitt**[4] der Mengen wird mit

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i := \{x \in \mathcal{X} | x \in \mathcal{X}_i \quad \forall i \in \mathcal{I}\} \tag{1.3}$$

beschrieben. In der durch den Durchschnitt gebildeten Teilmenge von $\mathcal{X}$ sind also diejenigen Elemente x der Menge $\mathcal{X}$ enthalten, welche in allen Teilmengen $\mathcal{X}_i$ enthalten sind, von denen der Durchschnitt gebildet wurde.
Für die Verknüpfung von zwei Mengen schreibt man insbesondere:

$$\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 = \{x | x \in \mathcal{X}_1 \vee x \in \mathcal{X}_2\}$$

für die Vereinigung und

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \{x | x \in \mathcal{X}_1 \wedge x \in \mathcal{X}_2\}$$

für den Durchschnitt.
Ist der Durchschnitt zweier Mengen leer, gilt also

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset \tag{1.4}$$

dann bezeichnet man die Mengen als **disjunkt**.

1.2.3 Differenz von Mengen

Sind $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_2$ Teilmengen einer Menge $\mathcal{X}$, so heißt

$$\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_2 := \{x \in \mathcal{X}_1 | x \notin \mathcal{X}_2\} \tag{1.5}$$

die **Differenz** von $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_2$. Auch dies ist eine Teilmenge von $\mathcal{X}$ und sogar von $\mathcal{X}_1$.

4 den *Durchschnitt* von Mengen bezeichnet man auch kurz als *Schnitt*

1.2.4 Kartesisches Produkt

Es seien $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ Mengen. Dann heißt

$$\prod_{i=1}^{n} = \{ (x_1, \ldots, x_n) |\, x_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}_n \} \tag{1.6}$$

das **kartesische Produkt** der Mengen $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$. Eine gleichbedeutenden Notation lautet $\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$. Die Elemente $(x_1, \ldots, x_n)$ werden als **n-Tupel** mit Komponenten $x_i \in \mathcal{X}_i, i = 1, \ldots, n$, bezeichnet.
Zwei n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n), (x'_1, \ldots, x'_n)$ gelten genau dann als gleich, wenn $x_i = x'_i$ für $i = 1, \ldots, n$ erfüllt ist.
Das 2-Tupel $(3, 5)$ beschreibt einen Punkt auf einer Zahlenebene. Ein 2-Tupel bezeichnet man als *Paar*.
Ein 3-Tupel bezeichnet man als *Tripel*. Ein Beispiel für ein Tripel ist der Körper $(\mathcal{R}, +, \cdot)$, welcher durch die Menge der reellen Zahlen $\mathcal{R}$ mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation gebildet wird.

1.2.5 Mächtigkeit

Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, dann bezeichnet man mit

$$|\mathcal{X}| \tag{1.7}$$

die **Mächtigkeit** der Menge und meint damit die Anzahl der Elemente, welche in $\mathcal{X}$ enthalten sind. Es gilt

$$|\mathcal{X}| := \begin{cases} n, & \text{falls } \mathcal{X} \text{ endlich ist und } n \text{ Elemente enthält} \\ \infty, & \text{falls } \mathcal{X} \text{ nicht endlich ist.} \end{cases}$$

1.2.6 Rechengesetze für Mengen

Kommutativität usw. siehe [2, S.14]

1.3 Abbildung

Definition 2 (Abbildung)**.** *Eine Abbildung $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ zwischen zwei Mengen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in \mathcal{X}$ ein wohlbestimmtes Element*

$y \in \mathcal{Y}$ zuordnet, welches mit $f(x)$ bezeichnet mit. Man schreibt auch $x \longmapsto f(x)$. Man bezeichnet $\mathcal{X}$ als den Definitionsbereich und $\mathcal{Y}$ als den Bild- oder Wertebereich[5] *der Abbildung f.*

1.3.1 Komposition von Abbildungen

Gegeben seien zwei Abbildungen $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ und $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ zwischen Mengen. Dann kann man die Abbildungen komponieren:

$$g \circ f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Z}, \qquad x \longmapsto g(f(x)). \tag{1.8}$$

Alternative Bezeichnungen für eine Komposition lauten *Hintereinanderausführung* und *Verkettung*.

Beispiel 1.2 (Ort als Bild der Zeit). Ordnet man jedem Zeitpunkt t den Ort beziehungsweise die Position des Schwerpunkts eines Körpers zu, so entspricht dies einer Abbildung $f : t \longmapsto f(t)$ Der Definitionsbereich sei beispielsweise gegeben durch beliebige, positive, reelle Zahlen und der Wertebereich durch beliebige, reelle Zahlen. Der Körper kann sich dann frei im Anschauungsraum bewegen und seine Position ist mit Hilfe der Abbildung $f(t)$ eindeutig beschrieben. $\diamond$

Bemerkung 1.3 (Umkehrbarkeit einer Abbildung). In der Definition einer Abbildung wird gefordert, dass jedem $x \in \mathcal{X}$ ein eindeutiges Bild $y \in \mathcal{Y}$ zuordnet wird. Die Umkehrung, dass jedem $y \in \mathcal{Y}$ ein eindeutiges Urbild $x \in \mathcal{X}$ zugeordnet werden kann, kann daraus nicht geschlussfolgert werden. $\blacklozenge$

Seien $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}, \mathcal{N} \subset \mathcal{Y}$ und $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ eine Abbildung, so nennt man:

$$f(\mathcal{M}) := \{y \in \mathcal{Y} | \text{ es existiert ein } x \in \mathcal{M} \text{ mit } y = f(x)\} \tag{1.9}$$

Bild(-menge) von $\mathcal{M}$ unter der Abbildung f und

$$f^{-1}(\mathcal{N}) := \{x \in \mathcal{X} | f(x) \in \mathcal{N}\} \tag{1.10}$$

Urbild(-menge) von $\mathcal{N}$ unter der Abbildung f.
Weiterhin bezeichnet man f als

- **injektiv**, falls für $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$, das heißt, dass verschiedene Elemente des Definitionsbereichs auf verschiedene Elemente des Wertebereichs abgebildet werden beziehungsweise dass das

5 der Bildbereich wird auch Zielmenge genannt

Urbild $f^{-1}(y)$ eines jeden $y \in \mathcal{Y}$ entweder leer ist, oder aus genau einem $x \in \mathcal{X}$ besteht

- **surjektiv**, falls gilt: $\forall y \in \mathcal{Y} \quad \exists x \in \mathcal{X} : f(x) = y$, das heißt jedes Element des Wertebereichs wird durch Abbildung mindestens eines Elements aus dem Definitionsbereich erreicht
- **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist. Für bijektive Abbildungen f lässt sich die **Umkehrabbildung** $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}, g := f^{-1}$ bilden, welche jedem Element der Bildmenge ein Element aus dem Definitionsbereich zuordnet.

1.3.2 Eigenschaften von Abbildungen

siehe [3], insbesondere für *Kompositionen* [2, S. 37]

1.4 Gruppen

Unter einer **inneren Verknüpfung** auf einer Menge $\mathcal{M}$ versteht man eine Abbildung $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Sie ordnet jedem Paar (a, b) von Elementen aus $\mathcal{M}$ ein Element $f(a, b) \in \mathcal{M}$ zu. Die innere Verknüpfung muss also eine abgeschlossene[6] Verknüpfung sein. Es wird die Notation $a \cdot b$ anstelle von $f(a,b)$ verwendet, um den verknüpfenden Charakter der Abbildung zu verdeutlichen.
Ist die Verknüpfung kommutativ, gilt also $f(a,b) = f(b,a)$ für alle $a,b \in \mathcal{M}$, so wird die Verknüpfung f durch $a + b$ notiert.

Definition 3. *Eine Menge $\mathcal{G}$ mit einer inneren Verknüpfung $\circ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$, $(a, b) \longmapsto a \circ b$, heißt eine Gruppe $(\mathcal{G}, \circ)$, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- *Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ, d. h. es gilt*

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}. \tag{1.11}$$

- *Es existiert ein **neutrales Element** e in $\mathcal{G}$, das heißt ein Element $e \in \mathcal{G}$*

6 der Begriff *Abgeschlossenheit* wird im Abschnitt 1.5 genauer erklärt

mit

$$e \circ a = a \circ e = a \quad \forall a \in \mathcal{G}. \tag{1.12}$$

Das neutrale Element einer Gruppe ist offensichtlich zugleich links-neutral und rechts-neutral.

- *Zu jedem $a \in \mathcal{G}$ gibt es ein **inverses Element**, das heißt ein Element $b \in \mathcal{G}$ mit*

$$a \circ b = b \circ a = e. \tag{1.13}$$

Dabei ist e das nach Gleichung (1.12) existierende (eindeutig bestimmte) neutrale Element von $\mathcal{G}$. Das inverse Element b einer Gruppe ist links-invers und recht-invers.

- *Die Gruppe $(\mathcal{G}, \circ)$ heißt kommutativ oder **abelsch**, falls die Verknüpfung kommutativ ist, das heißt falls zusätzlich gilt:*

$$a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in \mathcal{G}. \tag{1.14}$$

Beispiel 1.3 (Beispiele für Gruppen).

- Die Menge $\mathcal{Z}$ mit der Verknüpfung Addition „+“
- Die Menge $\mathcal{R}$ mit der Verknüpfung Addition „+“ und $\mathcal{R}^* := \mathcal{R} - \{0\}$ mit der Multiplikation „·“

◊

Bemerkung 1.4 (multiplikative Verknüpfungen). Ist die Verknüpfung einer Gruppe in multiplikativer Schreibweise gegeben, so wird

- das neutrale Element e als **Einselement** bezeichnet und als 1 notiert
- das inverse Element b zu a als a^{-1} notiert
- das Verknüpfungszeichen „·“ meist weggelassen
- für endliche Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{G}$ das Produkt der Elemente als $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ definiert, wobei $\prod_{i=1}^{0} a_i := 1$ gilt.

♦

Bemerkung 1.5 (additive Verknüpfungen). Ist die Verknüpfung einer Gruppe kommutativ, so verwendet man die additive Schreibweise und

- bezeichnet das neutrale Element e als **Nullelement** und schreibt 0
- notiert das inverse Element b zu a als $-a$
- definiert für endliche Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{G}$ die Summe der Elemente als $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \ldots + a_n$, wobei $\sum_{i=1}^{0} a_i := 0$ gilt.

♦

1.5 Körper

Körper sind Zahlsysteme mit gewissen Axiomen für die Addition und Multiplikation, welche auf den Axiomen von Gruppen aufbauen.

Definition 4 (Körper)**.** *Ein Körper ist eine Menge $\mathcal{K}$ mit zwei inneren Verknüpfungen, geschrieben als Addition und Multiplikation, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$\mathcal{K}$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition, das heißt die Addition ist assoziativ nach Gleichung (1.11), hat ein neutrales Element 0 nach Gleichung (1.12) und ein inverse Element $-a \in \mathcal{K}$ nach Gleichung (1.13) zu $a \in \mathcal{K}$ und sie ist kommutativ nach Gleichung (1.14)*
2. *$\mathcal{K}^* = K \backslash \{0\}$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation, das heißt die Multiplikation ist assoziativ nach Gleichung (1.11), hat das neutrale Element 1 nach Gleichung (1.12) und das inverse Element a^{-1} nach Gleichung (1.13) für $a, a^{-1} \in \mathcal{K}$ und sie ist kommutativ nach Gleichung (1.14)*
3. *Es gelten die Distributivgesetze:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

für $a,b,c \in \mathcal{K}$

Wird ein Körper mit den zugehörigen Verknüpfungen angegeben, so kann man $\mathcal{K}$ als Tripel $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ notieren.

Bemerkung 1.6 (Abgeschlossenheit)*.* Entsprechend der Definition 4 für einen

Körper $\mathcal{K}$ bilden die Rechenoperationen Addition und Multiplikation Elemente des Körpers auf Elemente des Körpers ab. Da $\mathcal{K}$ nie verlassen wird spricht man in diesem Zusammenhang von der **Abgeschlossenheit** des Körpers $\mathcal{K}$. ♦

Bemerkung 1.7 (Körper und Gruppen). Ist $\mathcal{K}$ ein Körper mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation, dann sind $(\mathcal{K}, +)$ und $(\mathcal{K} - \{0\}, \cdot)$ Gruppen.
Die Menge aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen über einem Körper mit Matrizenmultiplikation bildet die *allgemeine lineare Gruppe*. ♦

Beispiel 1.4 (Körper). Häufig verwendete Körper sind

- die Menge der rationalen Zahlen $\mathcal{Q}$ mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation
- die Menge der reellen Zahlen $\mathcal{R}$ mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation
- die Menge $\mathcal{R}\times\mathcal{R} := \{\,(x, y)|\, x,y \in \mathcal{R}\}$ der Paare (2-Tupel) reeller Zahlen mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation. Mit den Verknüpfungen

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)
\end{aligned}
$$

  und den neutralen Elementen der Addition: (0,0) und Multiplikation: (1,0) bildet diese Menge einen Körper. Jedes Zahlenpaar (x, y) kann als Linearkombination dargestellt werden:

$$(x, y) = x \cdot (1{,}0) + y \cdot (0, 1)\,.$$

  Führt man folgende Schreibweisen ein:

  - (1,0) : 1
  - (0,1) : i und bezeichnet i als imaginäre Einheit,

  so erhält man die Darstellung $(x, y) \equiv x + iy$. Die so erhaltenen, reellen Zahlenpaare bezeichnet man als die **komplexen Zahlen**, welche in *algebraischer Normalform* vorliegen. Der Körper der komplexen Zahlen lautet damit $(\mathcal{C}, + ,\cdot)$.

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathcal{N}$ bildet mit der Addition *keinen* Körper, denn es gibt kein inverses Element bezüglich der Addition. Für das Element 5 ist beispielsweise das zu erwartende, inverse Element -5 offensichtlich $-5 \notin \mathcal{N}$. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathcal{Z}$ bildet mit der Addition zwar eine abelsche Gruppe aber keinen Körper, denn es gibt kein inverses Element bezüglich der Multiplikation. Das Element $a = 8 \in \mathcal{Z}$ hat zum Beispiel kein inverses Element $b = 1 \cdot a^{-1}$ für welches $b \in \mathcal{Z}$ gilt. $\Diamond$

1.5.1 Weitere Eigenschaften und Begriffe

insbesondere Homomorphismen für Gruppen und Körper [3, S. 86, 87, 89, 93]
Kern und Bild eines Homomorphismus [3, S. 86, 93!]

1.6 Vektorräume

Ein Vektorraum ist durch eine abelsche Gruppe mit der inneren Verknüpfung Addition $(\mathcal{V}, +)$ (Abschnitt 1.4), einen Körper $\mathcal{K}$ (Abschnitt 1.5) mit Skalaren als Elementen, eine äußere Multiplikation, welche Elemente von $\mathcal{K}$ mit denen von $\mathcal{V}$ verknüpft und auf $\mathcal{V}$ abbildet, und vier Verträglichkeitsgesetzen - den so genannten Vektorraumaxiomen - gegeben. Der Körper $\mathcal{K}$ entspricht häufig den reellen Zahlen $\mathcal{R}$ oder den komplexen Zahlen $\mathcal{C}$.

Definition 5 ($\mathcal{K}-$Vektorraum)**.** *Es sei $\mathcal{K}$ ein Körper, $(\mathcal{V}, +)$ eine abelsche Gruppe und*

$$\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \longrightarrow V, \qquad (\lambda, \overrightarrow{x}) \longmapsto \lambda \cdot \overrightarrow{x} \tag{1.15}$$

eine Abbildung. Ferner seien die Vektoren $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathcal{V}$ und die Skalare $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$ gegeben. Man nennt $\mathcal{V}$ einen Vektorraum über dem Körper $\mathcal{K}$ oder kurz einen $\mathcal{K}-$ Vektorraum genau dann, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

Assoziativität der Multiplikation mit Skalaren

$$(\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{x}) \tag{1.16}$$

Distributivität

$$\lambda \cdot (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{y} \tag{1.17}$$

und

$$(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{x} \tag{1.18}$$

Für die Multiplikation gibt es ein neutrales 1-Element

$$1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} \tag{1.19}$$

Die Vektorraumaxiome nach Gleichung (1.16) - Gleichung (1.19) beschreiben eine Verträglichkeit der zwei Verknüpfungen Addition und Multiplikation des $\mathcal{K}-$Vektorraums.
Die Elemente eines Vektorraumes werden als **Vektoren** bezeichnet. Vektoren werden allein durch ihre Eigenschaften definiert. Typische Beispiele für Vektoren sind Elemente der Vektorräume $\mathcal{R}^2$ und $\mathcal{R}^3$, aber auch Funktionen können Vektoren sein. Ein Vektor ist also nicht zwangsläufig ein Pfeil mit Länge und Richtung.
Das neutrale Element der Addition der abelschen Gruppe $\mathcal{V}$ wird als Nullvektor bezeichnet und mit $\overrightarrow{0}$ gekennzeichnet. Ist aus dem Kontext erkennbar, dass es sich um einen Nullvektor handelt, so wird die besondere Notation als Vektor häufig weggelassen und man schreibt 0 für den Nullvektor.

Bemerkung 1.8 (unendliche Vektorräume). Für jeden Körper $\mathcal{K}$ und jede natürliche Zahl n ist die Menge

$$\mathcal{V} = \mathcal{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle| v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{K} \right\}$$

mit komponentenweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren aus $\mathcal{K}$ ein $\mathcal{K}-$Vektorraum. Insbesondere werden somit für den Körper der reellen Zahlen $\mathcal{R}$ der reelle Vektorraum $\mathcal{R}^n$ und für den Körper der komplexen Zahlen $\mathcal{C}$ der komplexe Vektorraum $\mathcal{C}^n$ definiert. ♦

Definition 6 (Untervektorraum)**.** *Sei $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}-$Vektorraum. Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ heißt ein $\mathcal{K}-$Untervektorraum oder* ***linearer Unterraum von*** *$\mathcal{V}$, wenn gilt:*

$$\mathcal{U} \neq \emptyset \tag{1.20}$$

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{U} \implies \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in \mathcal{U} \tag{1.21}$$

$$\alpha \in \mathcal{K}, \overrightarrow{a} \in \mathcal{U} \implies \alpha \overrightarrow{a} \in \mathcal{U} \tag{1.22}$$

Bemerkung 1.9 (Untervektorraum). Ein Untervektorraum enthält in jedem Fall den Nullvektor. Außerdem ist ein Untervektorraum bezüglich der Addition und der Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen. Ein Untervektorraum von einem Vektorraum ist stets selbst ein Vektorraum. ♦

Definition 7 (Linearkombination)**.** *Sei $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}-$Vektorraum. Ein beliebiger Vektor $\vec{v} \in \mathcal{V}$ heißt **Linearkombination** einer Anzahl von Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$, falls Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathcal{K}$ derart existieren, dass*

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i$$

erfüllt ist. Der Vektor $\vec{v}$ lässt sich dann aus den Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ mit den Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ linear kombinieren. Eine äquivalente Aussage wäre, dass der Vektor $\vec{v}$ von den Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear abhängig ist.

Definition 8 (Spann, Lineare Hülle)**.** *Sei $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}-$Vektorraum. Die Menge aller möglichen Linearkombinationen einer gegebenen Menge von Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$ wird als **Spann** oder die **lineare Hülle** dieser Vektoren bezeichnet:*

$$\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} = \left\{ v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathcal{K} \right\} \tag{1.23}$$

Definition 9 (Erzeugendensystem)**.** *Eine Anzahl von Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$ eines $\mathcal{K}-$Vektorraumes $\mathcal{V}$ heißt **Erzeugendensystem** von $\mathcal{V}$, wenn gilt:*

$$\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} = \mathcal{V} \tag{1.24}$$

Es lässt sich also jeder Vektor des $\mathcal{K}-$Vektorraumes $\mathcal{V}$ durch Linearkombination eines zugehörigen Erzeugendensystems darstellen. Ist die Mächtigkeit des Erzeugendensystems endlich, so ist $\mathcal{V}$ endlich erzeugt.
*Jedes Erzeugendensystem eines endlichen Vektorraumes $\mathcal{V}$ enthält eine **Basis**.*

Bemerkung 1.10 (Erzeugendensystem für $\mathcal{R}^n$). Jeder Vektorraum $\mathcal{V}$, der über dem Körper der reellen Zahlen $\mathcal{R}$ definiert wird, besitzt ein Erzeugendensystem. Im $\mathcal{R}-$ Vektorraum $\mathcal{R}^n$ bilden die *Einheitsvektoren* $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ ein Erzeugendsystem. Ein Einheitsvektor $\vec{e}_i$ hat in der i-ten Zeile eine eins als Eintrag. Alle weiteren Einträge dieses Einheitsvektors sind null.

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ i-te Zeile}$$

Ein solches Erzeugendensystem wird als *kanonische Basis* bezeichnet. ♦

Definition 10 (Lineare Unabhängigkeit)**.** *Eine Menge von Vektoren* $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ *eines* $\mathcal{K}-$ *Vektorraums* $\mathcal{V}$ *heißt* ***linear unabhängig****, wenn sich keiner der Vektoren* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *als Linearkombination der Übrigen darstellen lässt. Die Gleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \tag{1.25}$$

mit den Koeffizienten $\lambda_i \in \mathcal{K}$ *besitzt also nur die triviale Lösung* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$*. Es gilt also*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0 \quad \forall i.$$

Eine nicht linear unabhängige Menge heißt ***linear abhängig****. Bei einer linear abhängigen Menge gibt es nicht triviale Lösungen der Gleichung (1.25) und damit nicht triviale Darstellungen des Nullvektors. Es existieren also* λ *mit* $\lambda \neq 0$*, so dass gilt* $\vec{v}_i = \lambda \vec{v}_j$*. Die Vektoren* $\vec{v}_i$*,* $\vec{v}_j$ *sind dann Vielfache voneinander beziehungsweise parallel zueinander.*

Bemerkung 1.11 (Lineare Abhängigkeit)*.* Eine linear unabhängige Menge ist unverkürzbar. Werden Vektoren aus dieser Menge entfernt, so spannt die Menge weniger Raum auf.
Bei einer linear abhängigen Menge liegt wenigstens einer der Vektoren in der linearen Hülle der Anderen. Er kann daher weggelassen werden, ohne die Hülle zu verkleinern. ♦

Definition 11 (Basis)**.** *Ein System von Vektoren* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *eines* $\mathcal{K}-$ *Vektorraumes* $\mathcal{V}$ *wird als* ***Basis*** *von* $\mathcal{V}$ *bezeichnet, wenn gilt:*

1. *Die Vektoren* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *bilden ein Erzeugendensystem von* $\mathcal{V}$*, es gilt also* $\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} = \mathcal{V}$.
2. *Das System* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *ist linear unabhängig. Die Basis ist daher unverkürbar.*

Die Anzahl der Elemente einer Basis eines Vektorraumes $\mathcal{V}$ *wird als* ***Dimension*** *des Vektorraumes bezeichnet:* $\dim \mathcal{V}$.

1.6.1 Matrizen

Es seien m und n natürliche Zahlen. Eine $m \times n$ Matrix $\boldsymbol{A}$ über dem Körper $\mathcal{K}$ ist eine Abbildung

$$\boldsymbol{A} : \begin{cases} \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \mathcal{K}, \\ (i, j) \longmapsto a_{ij}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet i den Zeilenindex und j den Spaltenindex. Die Körperelemente $a_{ij} \in \mathcal{K}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ nennt man **Komponenten** oder die **Einträge** der Matrix $\boldsymbol{A}$. Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ kann übersichtlich durch m Zeilen und n Spalten dargestellt werden:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, bei der alle Komponenten gleich 0 sind, nennt man **Nullmatrix**:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, bei der gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

nennt man **Einheitsmatrix**:

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{K}^{m\times n}$ **ist ein** $\mathcal{K}-$**Vektorraum**.
Die Menge $\mathcal{K}^{m\times n}$ aller $m \times n$ Matrizen bildet über $\mathcal{K}$ mit komponentenweiser Addition:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

und der Multiplikation mit einem Skalar λ:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

einen $\mathcal{K}-$Vektorraum.

1.7 Punkte und Vektoren im Anschuungsraum

Der Anschauungsraum ist eine geometrische Idealisierung des uns umgebenden physikalischen Raums. Zur Beschreibung dieses Raums dienen Punkte p. Die Position dieser Punkte wird relativ zu einem gewählten Koordinatensystem I mit Hilfe von Koordinatentripeln beschrieben. Die Koordinatentripel können als Elemente des Vektorraumes $\mathcal{R}^3$ aufgefasst werden:

$$p = (x|y|z) \in \mathcal{R}^3 = x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2 + z\overrightarrow{e}_3$$

Die Position von p ist damit relativ zu I eindeutig beschrieben. Der Ursprung von I wird mit dem Nullvektor $\overrightarrow{0} \in \mathcal{R}^3$ identifiziert.
Da die Beschreibung des Punktes p als Element des Vektorraumes $\mathcal{R}^3$ betrachtet werden soll, ist die gewählte Beschreibungsform ein Vektor. Da der Vektorraum $\mathcal{R}^3$ die im Abschnitt 1.6 geforderten Eigenschaften haben muss, gelten bestimmte Rechenregeln für einen solchen Vektor. Diese Rechenregeln werden um weitere Verknüpfungen - das Skalarprodukt und das Kreuzprodukt - ergänzt.

Bei geometrischen Überlegungen wird zwischen Positionen, Richtungen und Abständen klar unterschieden. Diese drei Eigenschaften lassen sich mit Hilfe von Vektoren beschreiben. Die Bedeutung eines Vektors als Element eines Vektorraumes $\mathcal{V}$ über einem Körper $\mathcal{K}$ wird dafür jedoch abgeändert.

1.7.1 Vektoren des $\mathcal{R}^3$

Der Anschauungsraum soll durch Elemente des Vektorraums $\mathcal{R}^3$ beschrieben werden. Der Vektorraum wird durch eine abelsche Gruppe aus Tripeln (x, y, z) mit x,y,$z \in \mathcal{R}$, einen Körper und eine Verknüpfung zwischen diesen gebildet. Für die Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^3$ gelten daher folgende Regeln (nach [4]):

- Da die Tripel Elemente einer abelschen Gruppe mit der inneren Verknüpfung Addition sind (siehe Abschnitt 1.4), werden Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ komponentenweise addiert. Mit Hilfe des inversen Elements der Addition lässt sich die Subtraktion ebenso darstellen und beide Verknüpfungen können kompakt notiert werden:

  $$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \pm x' \\ y \pm y' \\ z \pm z' \end{pmatrix}$$

  Außerdem gelten zwangsläufig die Rechenregeln:

  - Kommutativgesetz:

    $$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = \pm \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$$

  - Assoziativgesetz:

    $$\overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c}$$

- Die Multiplikation von einem Vektor $\overrightarrow{a} \in \mathcal{R}^3$ mit einem Skalar $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$ entspricht der äußeren Verknüpfung der abelschen Gruppe mit dem Körper. Sie erfolgt durch Multiplikation aller Komponenten des Vektors mit dem

Skalar:

$$\lambda \cdot \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix}$$

Es gelten die Rechenregeln:

– Distributivgesetz:

$$\lambda \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \right) = \lambda \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b}$$

– weitere Regeln:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \overrightarrow{a} &= \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{a} \\ (\lambda\mu) \overrightarrow{a} &= \lambda (\mu \overrightarrow{a}) = \mu (\lambda \overrightarrow{a}) \\ |\lambda \overrightarrow{a}| &= |\lambda||\overrightarrow{a}| \end{aligned}$$

Mit diesen Regeln werden die Vektorraumaxiome aus Abschnitt 1.6 erfüllt.

Für zwei verschiedene Paare von Punkten des Anschauungsraums $(p,q), (r,s)$ kann man solche finden, dass die Differenz der Punkte für beide Paare gleich ist. Es gilt dann also

$$\overrightarrow{a} = q - p = s - r$$

mit

$$p \neq r \text{ und } q \neq s.$$

Man nennt diese Punktpaare *äquivalent*. Sie beschreiben die gleiche *Translation*. Die Translation kann man sinnvoll durch einen Pfeil kennzeichnen, welcher durch seine *Richtung* und seinen *Betrag* beziehungsweise seine Länge eindeutig charakterisiert wird. Die Begriffe Betrag und Länge werden im Folgenden synonym verwendet. Mit beiden Eigenschaften ist die euklidische Norm des Vektors $\overrightarrow{a}$ gemeint. Die folgende Darstellung wird für den Betrag eines Vektors $\overrightarrow{a}$ verwendet:

$$|\overrightarrow{a}| \equiv a := \|\overrightarrow{a}\|_2$$

Für einen Vektor $\overrightarrow{a}$ gilt immer:

$$|\overrightarrow{a}| \geq 0$$

Der durch Differenzbildung erhaltene Pfeil $\overrightarrow{a}$ entspricht dem, was man im Sinne

der Geometrie meist unter einem (freien) Vektor versteht. Er umfasst **alle** Pfeile, deren Anfangspunk p und Endpunkt q der Bedingung $\overrightarrow{a} = q - p$ genügen.
Wählt man als Anfangspunkt für einen Vektor (Pfeil) den Nullvektor, welcher dem gewählten Koordinatenursprung entspricht, so können alle Punkte des Anschauungsraumes mit Pfeilen beschrieben werden. Für die Beschreibung eines Punktes reichen also auch die Angabe eines Abstandes und einer Richtung bezogen auf den Koordinatenursprung.
Punkte und Pfeile werden also beide durch Vektoren beschrieben. Punkte sind dabei im Anschauungsraum fest und Pfeile können verschoben werden, so lange sie ihre Richtung und Länge beibehalten. Häufig bezeichnet man beide geometrischen Gebilde einfach als Vektor, ohne deutlich zu machen, ob das gemeinte Objekt verschiebbar oder fest ist.
Beschreibt ein Vektor die Ausprägung einer physikalischen Größe, so gehört zu deren vollständiger Beschreibung zusätzlich zu Betrag und Richtung noch die Angabe einer Maßeinheit. Ein typisches Beispiel ist der Betrag einer Kraft $\overrightarrow{F} : |\overrightarrow{F}| = 100 \cdot N$
Die Unterscheidung der geometrischen Objekte, welche durch einen Vektor repräsentiert werden, kann durch folgende Bezeichnung erfolgen [10, S. 26]:

- *Freie Vektoren*[7] können beliebig im Raum verschoben werden, so lange Richtung und Betrag konstant bleiben. Damit sind parallele Verschiebungen und Verschiebungen entlang der Wirkungslinie möglich. Dieser Typ von Vektoren wird in der Regel gemeint, wenn man im Sinne der Geometrie von Vektoren spricht. Ein typisches Beispiel sind die Einheitsvektoren $\overrightarrow{e}$, mit denen die Koordinatenachsen eines Koordinatensystems beschrieben werden.

- *Gebundene Vektoren* beziehen sich auf einen festen Ursprung, von dem aus sie abgetragen werden. Ein typisches Beispiel dafür ist der Ortsvektor $\overrightarrow{r}$ eines Raumpunktes R, welcher von einem spezifischen Koordinatenursprung O aus angetragen wird: $\overrightarrow{r} = P - O = \overrightarrow{OP}$. In diesem Zusammenhang bezeichnet man den Punkt R häufig als „Punkt R mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{r}$“ und notiert wahlweise $P \equiv \overrightarrow{r}$.

Da die Notation von Punkten im Sinne eines Ortsvektors und die Notation von Richtungsvektoren identisch ist, kommt es leicht zu Verwechslungen. Erschwe-

7 *freie Vektoren* werden auch als *Richtungsvektoren* bezeichnet

rend kommt hinzu, dass die Konzepte von Punkt und Vektor in der Literatur häufig nicht gesondert betrachtet werden. Es ist damit die Aufgabe des Lesers sich klar zu machen, ob mit $\overrightarrow{a}$ ein Richtungsvektor oder ein Punkt gemeint ist. Verwendet man zur Darstellung Homogene Koordinaten (siehe 2.3) so ist die Unterscheidung von Punkten und Vektoren eindeutig.
Neben der Darstellung eines Vektors als Spaltenvektor und der Darstellung durch Anfangs- und Endpunkt gibt es eine weitere Darstellung: die Komponentenschreibweise bezüglich eines Koordinatensystems I mit expliziter Angabe der Basisvektoren, auf welche der Vektor projiziert wird.

$$\overrightarrow{{}_I a} = \overrightarrow{{}_I a_x} + \overrightarrow{{}_I a_y} + \overrightarrow{{}_I a_z} = x\,\overrightarrow{{}_I e_1} + y\,\overrightarrow{{}_I e_2} + z\,\overrightarrow{{}_I e_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

damit ergibt sich der Betrag eines Vektor zu

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{{}_I a}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle} \end{aligned}$$

Wenn bekannt ist, dass mit $\overrightarrow{a}$ ein Vektor gemeint ist, so notiert man den Betrag des Vektors in Kurzform mit a.

Man bezeichnet die Skalare x, y, z als die *Komponenten*, *Koordinaten* oder auch *Einträge* des Vektors $\overrightarrow{{}_I a}$. Der linksseitige Index I kennzeichnet das verwendete Bezugssystem. Ist das Bezugssystem eindeutig, so wird dieser Index weggelassen.
Hier steht noch eine kurze Einführung zu den weiteren Operationen Skalarprodukt und Kreuzprodukt.

- Vektoren sind *gleich*, wenn sie in Richtung und Betrag übereinstimmen

  $$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow |a| = |b| \wedge \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$$

- Das **Skalarprodukt skalarProd!** zweier Vektoren ist das Produkt der Beträge und dem Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels φ

  $$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = |a||b| \cos\varphi = (x\,\overrightarrow{e}_1 + y\,\overrightarrow{e}_2 + z\,\overrightarrow{e}_3)\,(x'\,\overrightarrow{e}_1 + y'\,\overrightarrow{e}_2 + z'\,\overrightarrow{e}_3)$$

  Es gelten die Rechenregeln:

- Kommutativgesetz:

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \rangle$$

- Distributivgesetz:

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \rangle = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle + \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \rangle$$

- weitere Regeln:

$$\lambda \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \langle \lambda \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = \langle \overrightarrow{a}, \lambda \overrightarrow{b} \rangle$$

Bemerkung 1.12 (Orthogonale Vektoren). Verschwindet das Skalarprodukt zweier von Null verschiedenen Vektoren, so stehen diese senkrecht aufeinander.

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$$

♦

Bemerkung 1.13 (Winkel zwischen Vektoren). Der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren ergibt sich aus dem Quotienten vom Skalarprodukt der beiden Vektoren und dem Produkt der Beträge der Vektoren.

$$\cos\varphi = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} \qquad |\overrightarrow{a}| \neq 0, |\overrightarrow{b}| \neq 0$$

♦

Bemerkung 1.14 (Richtungskosinus). Ein Vektor $\overrightarrow{a}$ bildet mit den drei Koordinatenachsen seines Bezugssystems der Reihe nach die Winkel α, β, γ, die als *Richtungswinkel* bezeichnet werden. Der Kosinus der jeweiligen Winkel wird als Richtungskosinus bezeichnet.

$$\cos\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{e}_1 \rangle}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{e}_1|} = \frac{a_x}{a} \qquad \cos\beta = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{e}_2 \rangle}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{e}_2|} = \frac{a_y}{a}$$

$$\cos\gamma = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{e}_3 \rangle}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{e}_3|} = \frac{a_z}{a}$$

Die Richtungswinkel sind jedoch nicht voneinander unabhängig, sondern über die Beziehung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

miteinander verknüpft. ♦

- das **Vektorprodukt** (auch Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ hat als Ergebnis einen

Vektor, der senkrecht auf $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ steht und dessen Länge gleich dem Produkt der Beträge von $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und dem Sinus des durch die Vektoren eingeschlossenen Winkels φ ist.

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left(|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin(\vartheta)\right)\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\overrightarrow{n}$ derjenige zu $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ senkrechte Einheitsvektor, der diese zu einem Rechtssystem ergänzt.
Es gelten die Rechenregeln:

- Distributivgesetz:
$$\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$$
$$\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$$

- Anti-Kommutativgesetz:
$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\right)$$

- weitere Regeln:
$$\lambda\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = (\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \left(\lambda\overrightarrow{b}\right)$$

Da das Kreuzprodukt mit dem Vektor $\overrightarrow{a}$ eine lineare Abbildung ist, kann $\overrightarrow{b} \to \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden:

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \hat{\boldsymbol{a}}\,\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

Koordinatensysteme 2

2.1 Rechtssystem

Gegeben sei ein euklidisches Koordinatensystem $I \in \mathcal{R}^3$ mit den Basisvektoren $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$. Für die Basisvektoren gelte:

$$\langle \overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \tag{2.1}$$

und weiterhin

$$\overrightarrow{e}_1 \times \overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{e}_3 \tag{2.2}$$

Die Basisvektoren von I beschreiben damit ein orthonormales Rechtssystem (siehe beispielsweise [4, S. 80]). Im Folgenden wird, wenn nicht explizit anderweitig angegeben, davon ausgegangen, dass alle verwendeten Koordinatensysteme diese Eigenschaften erfüllen.

2.2 Natürliche Koordinaten

engl. natural coordinates wie ist der richtige deutsche Begriff?

2.3 Homogene Koordinatensysteme

Translation eines Vektors $\overrightarrow{v} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ mit einem Vektor $\overrightarrow{q} = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$:

$$\overrightarrow{v}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

statt

$$\vec{v}' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{bmatrix}.$$

Eine Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}$ erfüllt stets die Bedingung:

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = E$$

Eine Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$, welche sich aus Rotation $\boldsymbol{R}$ und Translation $\vec{q}$ zusammensetzt, wird in homogenen Koordinaten beschrieben mit:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & q_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & q_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Inverse dieser Transformationsmatrix berechnet sich unter Beachtung der Orthogonalitätseigenschaft von $\boldsymbol{R}$ zu

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Betrachtet man hingegen eine Transformationsmatrix im $\mathcal{R}^3$, welche eine Rotation beinhaltet, so wird die inverse dieser Transformation nach folgenden Regeln berechnet:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}$$
$$T^{-1} = \boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

2.4 Koordinatentransformation

Gegeben seien ein inertiales Koordinatensystem I und zwei, um eine beliebige Achse in Relation zu I gedrehte, Koordinatensysteme B,C.

Rotationen Es sei ein Punkt $q_b = (x_b, y_b, z_b)^{\mathrm{T}}$ im Koordinatensystem B gegeben. Werden die Koordinatenachsen von B durch die Einheitsvektoren $\vec{e}_{1b}, \vec{e}_{2b}, \vec{e}_{3b}$ im Inertialsystem I beschrieben, so kann der Punkt von B nach

I durch eine Transformation überführt werden:

$$q_i = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_{1b} & \overrightarrow{e}_{2b} & \overrightarrow{e}_{3b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_{ib} q_b$$

Der Index der Transformationsmatrix ist so zu verstehen, dass der erste Buchstabe das Zielsystem und der zweite Buchstabe das Ursprungssystem der Transformationsmatrix angibt.
Analog zur Transformation eines Punktes kann auch ein Vektor $\overrightarrow{v}_b = q_b - p_b$, welcher im System B definiert wurde, in das System I transformiert werden:

$$\overrightarrow{v}_i = \boldsymbol{R}_{ib} \overrightarrow{v}_b = \boldsymbol{R}_{ib} q_b - \boldsymbol{R}_{ib} p_b = q_i - p_i.$$

Weiterhin können Transformationen aneinandergereiht werden. Beschreibt die Transformationsmatrix $\boldsymbol{R}_{bc}$ die Verdrehung von C relativ zu B, so erhält man die Transformationsmatrix von C nach I durch eine Kombination der Transformation vom System C in das System B mit der Transformation vom System B in das System I. Die Kombination erfolgt dabei durch linksseitige Matrixmultiplikation der jeweiligen Transformationsmatrizen in der angegebenen Reihenfolge.

$$\boldsymbol{R}_{ic} = \boldsymbol{R}_{ib} \boldsymbol{R}_{bc}$$

Rotation und Translation

2.5 Rotationsmatrizen

Gegeben sei ein Koordinatensystem K, welches um eine Achse l relativ zu einem inertialen Koordinatensystem I gedreht wurde. Die Orientierung dieser Drehachse sei durch einen Vektor $\overrightarrow{l}$ mit Einheitslänge beschrieben. Die Achsen von K relativ zu I seien gegeben durch die Vektoren $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{R}^3$. Die drei Spaltenvektoren werden horizontal zu einer Matrix

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u} & \overrightarrow{w} & \overrightarrow{v} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & w_x & v_x \\ u_y & w_y & v_y \\ u_z & w_z & v_z \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

zusammengefasst. Die Matrix $\boldsymbol{R}$ wird als Rotationsmatrix bezeichnet.

2.5.1 Eigenschaften von Rotationsmatrizen

Die Spalten der Rotationsmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathcal{R}^{3\times 3}$ seien die Vektoren $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3$. Da diese ein Koordinatensystem aufspannen haben sie die in Gleichung (2.1) und Gleichung (2.2) definierten Eigenschaften. Aus Gleichung (2.1) folgt für die Matrix $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{w} & \vec{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \tag{2.4}$$

und mit Hilfe der Regeln der linearen Algebra [4, S. 100] und Gleichung (2.1)

$$\det \boldsymbol{R} = \langle \vec{u}, \vec{w} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 \tag{2.5}$$

Die Menge der orthogonalen 3×3 Matrizen mit der Determinante eins wird als $\mathcal{SO}(3)$ bezeichnet [11]. Allgemein wird definiert:

$$\mathcal{SO}(n) = \left\{ \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}^{n\times n} : \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}, \det \boldsymbol{R} = +1 \right\}. \tag{2.6}$$

Die Menge $\mathcal{SO}(3) \subset \mathcal{R}^{3\times 3}$ bildet mit der Abbildungsvorschrift *Matrixmultiplikation* eine Gruppe entsprechend den im Abschnitt 1.4 geforderten Regeln. Die geforderten Eigenschaften werden wie folgt erfüllt:

- Die Verknüpfung ist abgeschlossen. Für $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2 \in \mathcal{SO}(3)$ gilt auch $\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 \in \mathcal{SO}(3)$, da

$$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 (\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \tag{2.7}$$

$$\det(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2) = \det(\boldsymbol{R}_1)\det(\boldsymbol{R}_2) = +1 \tag{2.8}$$

  gilt.

- Die Gruppe $\mathcal{SO}(3)$ ist assoziativ

  Aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation (Beweis siehe z. B. [1, s. 93]) folgt

$$(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_3) \tag{2.9}$$

- Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{R} \quad \forall \boldsymbol{R} \in \mathcal{SO}(3) \tag{2.10}$$

mit

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aus Gleichung (2.4) folgt, dass $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \in \mathcal{SO}\,(3)$ das inverse Element von $\boldsymbol{R} \in \mathcal{SO}\,(3)$ ist.

Bemerkung 2.1. Die Lage eines Starrkörpers, welcher sich frei im Raum drehen kann, kann zu jedem Zeitpunkt durch eine eindeutige Rotationsmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathcal{SO}\,(3)$ beschrieben werden. Die Menge der Rotationsmatrizen $\mathcal{SO}\,(3)$ wird daher als der Konfigurationsraum des Systems bezeichnet. Eine Trajektorie des Systems wird durch die Kurve $\boldsymbol{R}\,(t) \in \mathcal{SO}\,(3)$ für $t \in [0,T]$ abgebildet. Weiterhin dient die Matrix $\boldsymbol{R}$ zur Transformation von Punkten von einem körperfesten, um eine beliebige Achse gedrehten, Koordinatensystem in ein Inertialsystem. Diese Funktion ist in Abschnitt 2.4 genauer dargelegt. ♦

Grundlagen der Mechanik 3

3.1 Starrkörperbewegung

Die Bewegung eines Punktes p im euklidischen Raum wird durch die Angabe seiner Position in Bezug zu einem inertialen Koordinatensystem I zu jedem Zeitpunkt **t!** eindeutig beschrieben. Die Position des Punktes p sei durch das Tripel $(x, y, z) \in \mathcal{R}^3$ gegeben. Die Trajektorie von p kann dann durch die parametrisierte Bahn $p(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{R}^3$ beschrieben werden. Da nicht die Bewegung von einzelnen Punkten, sondern die Bewegung eines Starrkörpers beschrieben werden soll, soll zunächst der Begriff Starrkörper definiert werden.

Definition 12 (Starrkörper)**.** *Ein Starrkörper ist dadurch gekennzeichnet, dass die Distanz zweier beliebiger Punkte p, q, welche auf dem Körper liegen, unabhängig von der Bewegung des Körpers, immer konstant bleibt. Die anfängliche Position des Punktes p sei beschrieben durch $p(0)$. Die Position nach einer beliebigen Zeit **t!** (und einer beliebigen Bewegung) sei beschrieben durch $p(t)$. Die Nomenklatur gelte für den Punkt q analog. Für einen Starrkörper wird gefordert:*

$$\|q(t) - p(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = konstant$$

Eine Starrkörperbewegung kann prinzipiell aus Rotation, Translation oder einer Überlagerung dieser Bewegungen bestehen. Wird ein Körper durch eine Teilmenge $O \in \mathcal{R}^3$ beschrieben, so kann seine Bewegung als eine kontinuierliche Zuordnung $g(t) : O \to R^3$ beschrieben werden. Die kontinuierliche Zuordnungsvorschrift $g(t)$ beschreibt, wie sich die einzelnen Punkte des Körpers relativ zu einem inertialen, festen Koordinatensystem mit Voranschreiten der Zeit **t!** bewegen. Die Zuordnungsvorschrift g darf dabei die Distanz zwischen Punkten des Körpers und die Orientierung von Vektoren, welche Punkte des Körpers verbinden, nicht verändern. Damit ergibt sich die Definition einer Abbildung von Starrkörpern:

Definition 13 (Abbildung eines Starrkörpers)**.** *[11] Eine Zuordnungsvorschrift* $g : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ *ist die Abbildung eines Starrkörpers genau denn, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

1. *Distanzen bleiben unverändert:* $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$ *für alle Punkte* $p, q \in \mathcal{R}^3$
2. *Das Kreuzprodukt bleibt erhalten:* $g(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = g(\overrightarrow{v}) \times g(\overrightarrow{w})$ *für alle Vektoren* $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{R}^3$*.*

Bemerkung 3.1. Man kann mit Hilfe der Polarisationsformel zeigen, dass das Skalarprodukt durch die Abbildungsvorschrift g für einen Starrkörper erhalten bleibt [11]:

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle g(\overrightarrow{v}), g(\overrightarrow{w}) \rangle.$$

Ein orthonormales Rechtssystem wird durch die Abbildungsvorschrift g demnach wieder in ein orthonormales Rechtssystem transformiert. ♦

Der Astronom und Mathematiker Giulio Mozzi zeigte bereits 1763, dass eine räumliche Bewegung in eine Drehung und eine Verschiebung entlang der Drehachse zerlegt werden kann. Da sich die Teilchen eines Starrkörpers nicht relativ zueinander bewegen können, kann die Bewegung eines Starrkörpers durch die relative Bewegung eines körperfesten Koordinatensystems K zu einem Inertialsystem beschrieben werden. Das Koordinatensystem K erfülle dabei die in 2.1 genannten Eigenschaften. Das körperfeste Koordinatensystem hat seinen Ursprung in einem beliebigen Punkt p des Körpers. Die Orientierung von K beschreibt die Rotation des Körpers und die Lage des Ursprungs von K relativ zum Inertialsystem beschreibt den translatorischen Anteil der Starrkörperbewegung. Hat K die Einheitsvektoren $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$, dann kann die Bewegung von K durch die Abbildung g beschrieben werden. Genauer gesagt liefert $g(\overrightarrow{v}_1), g(\overrightarrow{v}_2), g(\overrightarrow{v}_3)$ die Orientierung von K und $g(p)$ die Lage des Ursprungs nach einer Starrkörperbewegung.

Beschreibt man die Orientierung eines Starrkörpers mit Hilfe eines Ortsvektors $\overrightarrow{p}$, welcher auf den Ursprung des körperfesten Koordinatensystem zeigt, einem Ortsvektor $\overrightarrow{q}$, welcher auf einen beliebigen Punkt des Körpers zeigt und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{s}$, welcher die Punkte p und q verbindet, dann lässt sich die

Bewegung wie folgt beschreiben:

$$
\begin{aligned}
{}_I\vec{q}\,(t) &= {}_I\vec{p}\,(t) + {}_I\vec{s}\,(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left({}_I\vec{q}\,(t)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left({}_I\vec{p}\,(t)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left({}_I\vec{s}\,(t)\right)
\end{aligned}
$$

mit

$$\|q\,(t) - p\,(t)\| \equiv |{}_I\vec{s}\,(t)| = konstant$$

folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|{}_I\vec{s}\,(t)|\right) = 0$$

Anwendung der Kettenregel liefert (siehe Bspw. [12, S.20])

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{\langle {}_I\vec{s}\,(t)\,, {}_I\vec{s}\,(t)\rangle}\right) &= 0 \\
2\,{}_I\vec{s}\,(t)\;{}_I\dot{\vec{s}}\,(t) &= 0 \\
\implies\; {}_I\vec{s}\,(t) &\perp {}_I\dot{\vec{s}}\,(t)
\end{aligned}
$$

Da der Geschwindigkeitsvektor ${}_I\dot{\vec{s}}\,(t)$ senkrecht auf ${}_I\vec{s}\,(t)$ stehen soll ist es sinnvoll einen Vektor $\vec{\omega}\,(t)$ wie folgt einzuführen:

$${}_I\dot{\vec{s}}\,(t) = {}_I\vec{\omega}\,(t) \times {}_I\vec{s}\,(t)$$

Damit berechnet sich die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes des Körpers zu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left({}_I\vec{q}\,(t)\right) = {}_I\dot{\vec{q}}\,(t) = {}_I\dot{\vec{p}}\,(t) + {}_I\vec{\omega}\,(t) \times {}_I\vec{s}\,(t) \tag{3.1}$$

Da die Berechnung der Summe und des Kreuzproduktes sehr unhandlich ist soll eine Ausdruck für die Geschwindigkeit in homogenen Koordinaten gefunden werden. Die Herleitung lautet wie folgt:

Die Vektorgleichung soll auch in homogenen Koordinaten gelten:

$${}^H_I\vec{q}\,(t) = {}^H_I\vec{p}\,(t) + {}^H_I\vec{s}\,(t)$$

Ausführliche Schreibweise unter der Beachtung, dass $\vec{s}\,(t)$ ein Richtungsvektor ist

$$\begin{pmatrix} {}_I\vec{q}\,(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\vec{p}\,(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}_I\vec{s}\,(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformation von $\overrightarrow{s}(t)$ in körperfeste Koordinaten

$$\begin{pmatrix} {}_I\overrightarrow{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\overrightarrow{p}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \overrightarrow{Q} \\ \overrightarrow{0} & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv T} \begin{pmatrix} {}_K\overrightarrow{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} {}_I\overrightarrow{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} {}_I\overrightarrow{p}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \overrightarrow{Q} \\ \overrightarrow{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_K\overrightarrow{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Beachtung der Kettenregel und Differentiationsregel für homogene Matrizen

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\overrightarrow{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\overrightarrow{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{R}} & \dot{\overrightarrow{Q}} \\ \overrightarrow{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_K\overrightarrow{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \overrightarrow{Q} \\ \overrightarrow{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_K\dot{\overrightarrow{s}}(t) \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

lokales $\overrightarrow{s}(t)$ ist zeitlich konstant

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\overrightarrow{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\overrightarrow{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{R}} & \dot{\overrightarrow{Q}} \\ \overrightarrow{0} & 1 \end{pmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{T}}} \begin{pmatrix} {}_K\overrightarrow{s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation von $\overrightarrow{s}(t)$ in globale Koordinaten I

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\overrightarrow{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\overrightarrow{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{R}} & \dot{\overrightarrow{Q}} \\ \overrightarrow{0} & 1 \end{pmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{T}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \overrightarrow{Q} \\ \overrightarrow{0} & 1 \end{pmatrix}^T}_{\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} {}_I\overrightarrow{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\overrightarrow{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\overrightarrow{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{R}} & \dot{\overrightarrow{Q}} \\ \overrightarrow{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\overrightarrow{Q} \\ \overrightarrow{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_I\overrightarrow{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation in kartesische Koordinaten

$${}_I\dot{\overrightarrow{q}}(t) = {}_I\dot{\overrightarrow{p}}(t) + \underbrace{\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}}_{:=\boldsymbol{\Omega}}\,{}_I\overrightarrow{s}(t)$$

Vergleich mit Gleichung (3.1) unter Beachtung der Ersetzung des Kreuzproduktes durch eine Matrix nach Gleichung (1.26) beweist die Äquivalenz dieser alternativen Herleitung

$${}_I\dot{\overrightarrow{q}}(t) = {}_I\dot{\overrightarrow{p}}(t) + \boldsymbol{\Omega}\,{}_I\overrightarrow{s}(t)$$

Kompakte Form in homogenen Koordinaten:

$${}^H_I\dot{\overrightarrow{q}}(t) = {}^H_I\dot{\overrightarrow{p}}(t) + \dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,{}^H_I\overrightarrow{s}(t)$$

3.1.1 Vektor der Winkelgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} &= \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} & \dot{r}_{13} \\ \dot{r}_{21} & \dot{r}_{22} & \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{31} & \dot{r}_{32} & \dot{r}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \dot{r}_{11}\,r_{11} + \dot{r}_{12}\,r_{12} + \dot{r}_{13}\,r_{13} & \dot{r}_{11}\,r_{21} + \dot{r}_{12}\,r_{22} + \dot{r}_{13}\,r_{23} & \dot{r}_{11}\,r_{31} + \dot{r}_{12}\,r_{32} + \dot{r}_{13}\,r_{33} \\ \dot{r}_{21}\,r_{11} + \dot{r}_{22}\,r_{12} + \dot{r}_{23}\,r_{13} & \dot{r}_{21}\,r_{21} + \dot{r}_{22}\,r_{22} + \dot{r}_{23}\,r_{23} & \dot{r}_{21}\,r_{31} + \dot{r}_{22}\,r_{32} + \dot{r}_{23}\,r_{33} \\ \dot{r}_{31}\,r_{11} + \dot{r}_{32}\,r_{12} + \dot{r}_{33}\,r_{13} & \dot{r}_{31}\,r_{21} + \dot{r}_{32}\,r_{22} + \dot{r}_{33}\,r_{23} & \dot{r}_{31}\,r_{31} + \dot{r}_{32}\,r_{32} + \dot{r}_{33}\,r_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{\omega} &= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{r}_{31}\,r_{21} + \dot{r}_{32}\,r_{22} + \dot{r}_{33}\,r_{23} \\ \dot{r}_{11}\,r_{31} + \dot{r}_{12}\,r_{32} + \dot{r}_{13}\,r_{33} \\ \dot{r}_{21}\,r_{11} + \dot{r}_{22}\,r_{12} + \dot{r}_{23}\,r_{13} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle \dot{v}, w \rangle \\ \langle \dot{u}, v \rangle \\ \langle \dot{w}, u \rangle \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Drall

$$\boldsymbol{L}_P = \begin{pmatrix} A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z \\ -F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z \\ -E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor

$$\boldsymbol{L}_P = \boldsymbol{J}_P \overrightarrow{\omega}$$

$$\boldsymbol{J}_P = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}\boldsymbol{L}_P = \frac{1}{2}(\dots \\ &\omega_x(A\omega_x - E\omega_z - F\omega_y) + \dots \\ &\omega_y(B\omega_y - D\omega_z - F\omega_x) + \dots \\ &\omega_z(C\omega_z - D\omega_y - E\omega_x)) \end{aligned}$$

Einsetzen der Terme für Komponenten der Winkelgeschw.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left(A(\dot{v}^2)(w^2) + B(\dot{u}^2)(v^2) + C(\dot{w}^2)(u^2)\right) + \dots \\ &\frac{1}{2}\left(-D\dot{u}\dot{w}\underbrace{uv}_{=0} - E\dot{v}\dot{w}\underbrace{uw}_{=0} - F\dot{u}\dot{v}\underbrace{vw}_{=0}\right) \end{aligned}$$

3.2 Lagrange Gleichung 2. Art

Ein System mit n generalisierten Koordinaten $\overrightarrow{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^{\mathrm{T}}$ und m Zwangsbedingungen $\overrightarrow{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)^{\mathrm{T}} = \overrightarrow{0}$, dessen Kinetische Energie T und potentielle Energie V durch $L = T - V$ beschrieben werden kann, lässt sich nach [13, S. 124] charakterisieren durch:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\delta\overrightarrow{q}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\overrightarrow{\lambda} - \overrightarrow{Q}_{ex}\right)\right] \mathrm{d}t = 0 \tag{3.2}$$

Dabei gelten die Dimensionen

$$\delta\overrightarrow{q} \in \mathcal{R}^n \qquad L \in \mathcal{R} \qquad \overrightarrow{q} \in R^n \qquad \boldsymbol{\Phi} \in R^{m\times n} \qquad \overrightarrow{\lambda} \in R^m \qquad \overrightarrow{Q} \in R^n$$

Der Vergleich mit der üblichen Form der Gleichung von Lagrange (2. Art) Gleichung (3.3) macht einige Unterschiede deutlich.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{q}} = 0 \tag{3.3}$$

mit

$$\overrightarrow{q} \in R^{n-m}$$

Die generalisierten Koordinaten müssen mit Hilfe der Zwangsbedingungen auf einen Satz von Minimalkoordinaten reduziert werden. Diese Minimalkoordinaten müssen voneinander unabhängig sein.

3.2.1 Kinetische Energie

Die kinetische Energie K eines Starrkörpers wird durch die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes $\overrightarrow{A}$, welcher ein Element des Körpers ist, und seiner Massenverteilung nach Gleichung (3.4) beschrieben.

$$K = \frac{1}{2} \int\limits_m \dot{\overrightarrow{A}}^2 \,\mathrm{d}m \tag{3.4}$$

Der Punkt $\overrightarrow{A}$ kann in den Koordinaten des körperfesten Koordinatensystems mit Ursprung $\overrightarrow{P}$ durch den Vektor $(x, y, z, 1)^{\mathrm{T}}$ und die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ beschrieben werden. Die kinetische Energie lässt sich dann entsprechend umformen.

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \int\limits_m (x, y, z, 1)\, \dot{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{T}}\, (x, y, ,z, 1)^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_m (x, y, z, 1) \begin{bmatrix} \dot{\overrightarrow{u}}^2 & \langle \dot{\overrightarrow{u}}, \dot{\overrightarrow{w}} \rangle & \langle \dot{\overrightarrow{u}}, \dot{\overrightarrow{v}} \rangle & \langle \dot{\overrightarrow{u}}, \dot{\overrightarrow{P}} \rangle \\ \langle \dot{\overrightarrow{w}}, \dot{\overrightarrow{u}} \rangle & \dot{\overrightarrow{w}}^2 & \langle \dot{\overrightarrow{w}}, \dot{\overrightarrow{v}} \rangle & \langle \dot{\overrightarrow{w}}, \dot{\overrightarrow{P}} \rangle \\ \langle \dot{\overrightarrow{v}}, \dot{\overrightarrow{u}} \rangle & \langle \dot{\overrightarrow{v}}, \dot{\overrightarrow{w}} \rangle & \dot{\overrightarrow{v}}^2 & \langle \dot{\overrightarrow{v}}, \dot{\overrightarrow{P}} \rangle \\ \langle \dot{\overrightarrow{P}}, \dot{\overrightarrow{u}} \rangle & \langle \dot{\overrightarrow{P}}, \dot{\overrightarrow{w}} \rangle & \langle \dot{\overrightarrow{P}}, \dot{\overrightarrow{v}} \rangle & \dot{\overrightarrow{P}}^2 \end{bmatrix} (x, y, z, 1)^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{1}{2} \dot{\overrightarrow{P}}^2 \int\limits_m \mathrm{d}m + \frac{1}{2} \dot{\overrightarrow{u}}^2 \int\limits_m x^2 \,\mathrm{d}m + \frac{1}{2} \dot{\overrightarrow{w}}^2 \int\limits_m y^2 \,\mathrm{d}m + \frac{1}{2} \dot{\overrightarrow{v}}^2 \int\limits_m z^2 \,\mathrm{d}m \\
&+ \langle \dot{\overrightarrow{u}}, \dot{\overrightarrow{w}} \rangle \int\limits_m xy \,\mathrm{d}m + \langle \dot{\overrightarrow{u}}, \dot{\overrightarrow{v}} \rangle \int\limits_m xz \,\mathrm{d}m + \langle \dot{\overrightarrow{w}}, \dot{\overrightarrow{v}} \rangle \int\limits_m yz \,\mathrm{d}m \\
&+ \langle \dot{\overrightarrow{u}}, \dot{\overrightarrow{P}} \rangle \int\limits_m x \,\mathrm{d}m + \langle \dot{\overrightarrow{v}}, \dot{\overrightarrow{P}} \rangle \int\limits_m z \,\mathrm{d}m + \langle \dot{\overrightarrow{w}}, \dot{\overrightarrow{P}} \rangle \int\limits_m y \,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

und unter der Annahme, dass $\overrightarrow{P}$ der Schwerpunkt des Körpers ist folgt mit Hilfe des Trägheitstensors

$$\begin{aligned}
K = &\frac{1}{2} m \dot{\overrightarrow{P}}^2 \\
&+ \frac{1}{4} I_x \left(-\dot{\overrightarrow{u}}^2 + \dot{\overrightarrow{w}}^2 + \dot{\overrightarrow{v}}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{4} I_y \left(\dot{\overrightarrow{u}}^2 - \dot{\overrightarrow{w}}^2 + \dot{\overrightarrow{v}}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{4} I_z \left(\dot{\overrightarrow{u}}^2 + \dot{\overrightarrow{w}}^2 - \dot{\overrightarrow{v}}^2 \right) \\
&+ C_{xz} \langle \dot{\overrightarrow{u}}, \dot{\overrightarrow{v}} \rangle + C_{xy} \langle \dot{\overrightarrow{u}}, \dot{\overrightarrow{w}} \rangle + C_{yz} \langle \dot{\overrightarrow{w}}, \dot{\overrightarrow{v}} \rangle
\end{aligned}$$

3.2.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Eine virtuelle Verschiebung ist eine infinitesimale, rein virtuelle Änderung des Zustands eines Systems, ohne das die Zeit dabei voran schreitet. Die Zustandsänderung muss dabei mit den Zwangsbedingungen verträglich sein. Zur Darstellung einer virtuellen Bewegung wird meist das Symbol δ voran gestellt.
Wenn ein System durch generalisierte Koordinaten $\overrightarrow{q}$ beschrieben wird, dann wird die virtuelle Verschiebung dieses Systems durch $\delta \overrightarrow{q}$ notiert. Virtuelle Verschiebungen verhalten sich genau so wie andere, infinitesimale Variationen einer Größe. Damit sind virtuelle Verschiebungen ähnlich dem Differentialoperator, wobei die Besonderheit, dass die Zeit als konstante Größe angenommen wird, zu beachten ist. Das Beispiel 3.1 soll dies verdeutlichen.
Bei der Arbeit mit virtuellen Verschiebungen gelten die gleichen Gesetze wie bei Anwendung des Differentialoperators bezüglich Summen, Produkten und Verkettungen. Außerdem kann der Variationsoperator virtuelle Verschiebung mit dem Differential- und Integraloperator vertauscht werden.

Beispiel 3.1 (Virtuelle Verschiebungen). Gegeben sei eine Funktion $\phi(\overrightarrow{q}, t) \in \mathcal{R}$, welche von n generalisierten Koordinaten $\overrightarrow{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und außerdem explizit von der Zeit t abhängt. Diese Funktion könnte Beispielsweise die Position eines Körpers beschreiben. Die virtuelle Verschiebung dieser Funktion berechnet sich nach folgendem Schema:

$$\delta\phi(\overrightarrow{q},t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1}\phi(\overrightarrow{q},t) & \frac{\partial}{\partial q_2}\phi(\overrightarrow{q},t) & \ldots & \frac{\partial}{\partial q_n}\phi(\overrightarrow{q},t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix}$$

Man beachte dabei, dass die generalisierten Koordinaten von der Zeit abhängig sein können. Da die Zeit bei einer virtuellen Verschiebung als konstant angenommen wird, hat eine solche Zeitabhängigkeit keinen Einfluss auf die Berechnung. ♢

Die virtuelle Arbeit δW_i welche durch eine Kraft $\overrightarrow{F}_i$, die an einem Punkt $\overrightarrow{r}_i$ angreift, entsteht, ist definiert durch:

$$\delta W_i = \overrightarrow{F}_i^{\mathrm{T}} \delta \overrightarrow{r}_i$$

. Die virtuelle Arbeit δW_k, welche durch ein Moment $\overrightarrow{M}_k$ entsteht, ist definiert durch:

$$\delta W_k = \overrightarrow{M}_k^{\mathrm{T}} \delta \overrightarrow{\varphi}_k$$

.

Das System befindet sich dann im Kräftegleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit für beliebige virtuelle Verschiebungen verschwindet. Für ein System, auf das n Kräfte und m Momente wirken, muss bei Gleichgewicht der Kräfte daher (3.5) erfüllt sein.

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i^{\mathrm{T}} \delta \overrightarrow{r}_i + \sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{M}_k^{\mathrm{T}} \delta \overrightarrow{\varphi}_k = 0 \tag{3.5}$$

Die gesamte virtuelle Arbeit eines Systems kann auch als Summe der generalisierten Kräfte des Systems interpretiert werden. Gleichung (3.6) zeigt diesen Zusammenhang. Mit Hilfe der generalisierten Koordinaten $\overrightarrow{q}$ lässt sich Gleichung (3.6) derart umformen, dass man den zur Lösung von (3.2) benötigten Ausdruck für Q_{ex} erhält.

$$\delta W = \sum_{i=1}^{k} Q_i \delta \overrightarrow{r}_i \tag{3.6}$$

$$\tag{3.7}$$

In einem System mit n generalisierten Koordinaten an welchem k Kräfte angreifen, wird die virtuelle Arbeit durch Gleichung (3.6) beschrieben.

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial q_1} + \frac{\partial W_2}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial W_k}{\partial q_1} \\ \frac{\partial W_1}{\partial q_2} + \frac{\partial W_2}{\partial q_2} + \ldots + \frac{\partial W_k}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial W_1}{\partial q_n} + \frac{\partial W_2}{\partial q_n} + \ldots + \frac{\partial W_k}{\partial q_n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix}$$

Betrachtet man einen Punkt P_l in einem lokalen, körperfesten Koordinatensystem, so lässt sich dieser Punkt beschreiben durch

$$P = \begin{bmatrix} x_l(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(t) & w_x(t) & v_x(t) & q_1(t) \\ u_y(t) & w_y(t) & v_y(t) & q_2(t) \\ u_z(t) & w_z(t) & v_z(t) & q_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allgemeine Punktbeschreibung

$$\vec{r}^{\,g} = \vec{r}^{\,g}_0 + \vec{\varphi}^{\,g} \times (\vec{r}^{\,g} - \vec{r}^{\,g}_0)$$

Virtuelle Verschiebung = virtuelle Translation und virt. Rotation

$$\delta\vec{r}^{\,g} = \delta\vec{r}^{\,g}_0 + \delta\vec{\varphi}^{\,g} \times (\vec{r}^{\,g} - \vec{r}^{\,g}_0)$$

Kreuzprodukt durch Matrixprodukt ersetzen

$$= \delta\vec{r}^{\,g}_0 + \delta\boldsymbol{\Theta} \cdot (\vec{r}^{\,g} - \vec{r}^{\,g}_0)$$

Formulierug mit Rotationsmatrix und lokalem Vektor

$$= \delta\vec{r}^{\,g}_0 + \delta\left(\boldsymbol{R}\vec{z}^{\,l}\right)$$

Lokaler Vektor ist konstant, daher hat Operator δ keinen Einfluss

$$= \delta\vec{r}^{\,g}_0 + \delta\boldsymbol{R} \cdot \vec{z}^{\,l}$$

Übergang zu globalem Vektor mit $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$

$$= \delta\vec{r}^{\,g}_0 + \delta\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\vec{z}^{\,g}$$

Hier steht Text

Literaturverzeichnis

[1] S. Bosch, *Lineare Algebra*. Springer Berlin Heidelberg, 2014. DOI: 10.1007/978-3-642-55260-1. Adresse: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-55260-1.

[2] M. S. Matthias Plaue, *Mathematik für das Bachelorstudium I*. Spektrum-Akademischer Vlg, 11. Mai 2009, XIV S., ISBN: 3827420679. Adresse: http://www.ebook.de/de/product/7973734/matthias_plaue_mike_scherfner_mathematik_fuer_das_bachelorstudium_i.html.

[3] F. Modler und M. Kreh, *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*. Springer Nature, 2014. DOI: 10.1007/978-3-642-37366-4. Adresse: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-37366-4.

[4] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*. Springer Science + Business Media, 2014. DOI: 10.1007/978-3-658-05620-9. Adresse: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-05620-9.

[5] A. Röthlisberger, N. Rothfuchs, A. Metlar und P. Reinhard, *Vektoralgebra*, Vorlesungsskirpt Multilineare Algebra und ihre Anwendungen, SS 2007, Mai 2007. Adresse: https://people.math.ethz.ch/~grsam/MultLinAlgSS07/group8.pdf.

[6] K. Jänich, *Vektoranalysis*. Springer-Verlag GmbH, 11. Jan. 2005, XII275 S., ISBN: 3540237410. Adresse: http://www.ebook.de/de/product/3169876/klaus_jaenich_vektoranalysis.html.

[7] G. Cantor, „Beiträge zur begründung der transfiniten mengenlehre“, *Mathematische Annalen 46*, 1895.

[8] G. Asser, *Grundbegriffe der Mathematik. 1, Mengen, Abbildungen, natürliche Zahlen /*, 2., berichtigte Aufl. Berlin : Dt. Verl. d. Wiss., 1975. Adresse: http://slubdd.de/katalog?TN_libero_mab2761333.

[9] T. Arens, R. Busam, F. Hettlich, C. Karpfinger und H. Stachel, *Grundwissen Mathematikstudium*. Springer Science + Business Media, 2013. DOI: 10.1007/978-3-8274-2309-2. Adresse: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8274-2309-2.

[10] T. Rießinger, „Vektorrechnung", in *Mathematik für Ingenieure*, Springer, 1. Jan. 2007, ISBN: 978-3-540-68180-9. DOI: 10.1007/978-3-540-68181-6_3. Adresse: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-68181-6_3.

[11] R. M. Murray, Z. Li und S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC PR INC, 11. März 1994, 480 Seiten, ISBN: 0849379814. Adresse: http://www.ebook.de/de/product/3803129/richard_m_murray_zexiang_li_s_shankar_sastry_a_mathematical_introduction_to_robotic_manipulation.html.

[12] F. U. Mathiak, *Technische Mechanik 3*. Gruyter, Walter de GmbH, 11. Sep. 2015, X S., ISBN: 3110438046. Adresse: http://www.ebook.de/de/product/23897945/friedrich_u_mathiak_technische_mechanik_3.html.

[13] J. G. de Jalón und E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer New York, 1994. DOI: 10.1007/978-1-4612-2600-0. Adresse: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-2600-0.

[14] R. Lot, „A motorcycle tire model for dynamic simulations: Theoretical and experimental aspects", *Meccanica*, Bd. 39, Nr. 3, S. 207–220, Juni 2004. DOI: 10.1023/b:mecc.0000022842.12077.5c. Adresse: http://dx.doi.org/10.1023/B:MECC.0000022842.12077.5c.

[15] M. Tanelli, M. Corno und S. Saveresi, *Modelling, Simulation and Control of Two-Wheeled Vehicles*. JOHN WILEY & SONS INC, 31. März 2014, 348 Seiten, ISBN: 111995018X. Adresse: http://www.ebook.de/de/product/21283014/mara_tanelli_matteo_corno_sergio_saveresi_modelling_simulation_and_control_of_two_wheeled_vehicles.html.

[16] P. Thede und L. Parks, *Race Tech's Motorcycle Suspension Bible*. Motorbooks International, 1. Mai 2010, 256 Seiten, ISBN: 0760331405. Adresse:

http://www.ebook.de/de/product/8809885/paul_thede_lee_parks_race_tech_s_motorcycle_suspension_bible.html.

[17] J. Stoffregen, *Motorradtechnik*. Vieweg+Teubner Verlag, 23. Mai 2012, x488 S., ISBN: 3834817163. Adresse: http://www.ebook.de/de/product/18260420/juergen_stoffregen_motorradtechnik.html.

[18] V. Cossalter und R. Lot, „A motorcycle multi-body model for real time simulations based on the natural coordinates approach“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 37, Nr. 6, S. 423–447, 2002. DOI: 10.1076/vesd.37.6.423.3523. eprint: http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1076/vesd.37.6.423.3523.

[19] K. Magnus und H. H. Müller-Slany, *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Teubner B.G. GmbH, 11. Okt. 2005, 302 Seiten, ISBN: 3835100076. Adresse: http://www.ebook.de/de/product/3555786/kurt_magnus_hans_heinrich_mueller_slany_grundlagen_der_technischen_mechanik.html.

[20] I. J. Besselink, A. J. Schmeitz und H. B. Pacejka, „An improved magic formula/swift tyre model that can handle inflation pressure changes“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 48, Nr. sup1, S. 337–352, Dez. 2010. DOI: 10.1080/00423111003748088. Adresse: http://dx.doi.org/10.1080/00423111003748088.

[21] H. B. Pacejka, „Tire characteristics and vehicle handling and stability“, in *Tire and Vehicle Dynamics*, Elsevier BV, 2012, S. 1–58. DOI: 10.1016/b978-0-08-097016-5.00001-2. Adresse: http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-08-097016-5.00001-2.

[22] J. G. de Jalón, N. Shimizu und D. Gómez, „Natural coordinates for teaching multibody systems with matlab“, in *Volume 5: 6th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B, and C*, ASME International, 2007. DOI: 10.1115/detc2007-35358. Adresse: http://dx.doi.org/10.1115/DETC2007-35358.

[23] P. Flores, R. Pereira, M. Machado und E. Seabra, *The Pneumatic Tire*, A. N. Gent und J. D. Walter, Hrsg. National Highway Traffic Safety Administration, Washington, DC, 2006.

[24] J. Baumgarte, „Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 1, Nr. 1, S. 1–16, Juni 1972. DOI: 10.1016/0045-7825(72)90018-7. Adresse: http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(72)90018-7.

[25] P. Flores, R. Pereira, M. Machado und E. Seabra, „Investigation on the baumgarte stabilization method for dynamic analysis of constrained multibody systems“, in *Proceedings of EUCOMES 08*, Springer Science + Business Media, 2008, S. 305–312. DOI: 10.1007/978-1-4020-8915-2_37.

[26] T. Westermann, *Mathematik für Ingenieure mit Maple*. Springer Berlin Heidelberg, 30. März 2006. Adresse: http://www.ebook.de/de/product/22005420/thomas_westermann_mathematik_fuer_ingenieure_mit_maple.html.

[27] N. W. Akimoff, *Elementary course in Lagrange's equations and their applications to solutions of problems of dynamics, with numerous examples*. Philadelphia, Pa., Philadelphia book company, 1917.

[28] H. B. Pacejka und E. Bakker, „THE MAGIC FORMULA TYRE MODEL“, *Vehicle System Dynamics*, Bd. 21, Nr. sup001, S. 1–18, Jan. 1992. DOI: 10.1080/00423119208969994. Adresse: http://dx.doi.org/10.1080/00423119208969994.

[29] M. Cline und D. Pai, „Post-stabilization for rigid body simulation with contact and constraints“, in *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.03CH37422)*, Institute of Electrical und Electronics Engineers (IEEE), 2003. DOI: 10.1109/robot.2003.1242171. Adresse: http://dx.doi.org/10.1109/ROBOT.2003.1242171.

[30] P. Flores, M. Machado, E. Seabra und M. T. da Silva, „A parametric study on the baumgarte stabilization method for forward dynamics of constrained multibody systems“, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Bd. 6, Nr. 1, S. 011 019, 2011. DOI: 10.1115/1.4002338. Adresse: http://dx.doi.org/10.1115/1.4002338.

[31] K. C. PARK und J. C. CHIOU, „Stabilization of computational procedures for constrained dynamical systems“, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Bd. 11, Nr. 4, S. 365–370, Juli 1988. DOI: 10.2514/3.20320. Adresse: http://dx.doi.org/10.2514/3.20320.

[32] E. J. Haug und R. C. Deyo, Hrsg., *Real-Time Integration Methods for Mechanical System Simulation*. Springer Science + Business Media, 1991. DOI: 10.1007/978-3-642-76159-1. Adresse: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-76159-1.

[33] G. W. Ernst Hairer, *Solving Ordinary Differential Equations II*. Springer-Verlag GmbH, 11. März 2010, XV S., ISBN: 3642052207. Adresse: http://www.ebook.de/de/product/9074956/ernst_hairer_gerhard_wanner_solving_ordinary_differential_equations_ii.html.

[34] M. A. Neto und J. Ambrósio, „Stabilization methods for the integration of dae in the presence of redundant constraints“, *Multibody System Dynamics*, Bd. 10, Nr. 1, S. 81–105, 2003. DOI: 10.1023/a:1024567523268. Adresse: http://dx.doi.org/10.1023/A:1024567523268.