

# Technische Universität Dresden

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik

Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie

## Motorradzeugs

vorgelegt von: Marius Müller

geboren am: 29. September 1989 in Dresden

zum Erlangen des akademischen Grades

## Diplomingenieur

(Dipl.-Ing.)

Betreuer:

Dipl.-Ing. Markus

noch ein Betreuer

Verantwortlicher Hochschullehrer:

Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack

Tag der Einreichung:

10.08.2022

Bitte ersetzen Sie diese Seite vor dem Binden mit der Aufgabenstellung.

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tage dem Prüfungsausschuss der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik eingereichte zum Thema

## **Motorradzeugs**

selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, wurden als solche kenntlich gemacht.

Dresden, 2. Februar 2222

Marius Müller

## **Kurzfassung**

An dieser Stelle fügen Sie bitte eine deutsche Kurzfassung ein.

## **Abstract**

Please insert the English abstract here.

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	III
<b>Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen</b>	V
<b>Verzeichnis der verwendeten Indizes</b>	VII
<b>Symbolverzeichnis</b>	IX
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	XI
<b>Tabellenverzeichnis</b>	XIII
<b>1 Stand der Technik</b>	1
1.1 Mathematische Grundlagen	1
1.1.1 Koordinatensysteme	1
1.1.2 Punkte und Vektoren	1
1.1.3 Gruppen [2, S. 13]	5
1.2 Starrkörperbewegung	6
1.2.1 Rotationsmatrizen	7
1.2.2 Koordinatensysteme	8
<b>2 Literaturverzeichnis</b>	I
<b>Anhang</b>	A-1



# Abkürzungsverzeichnis

---

**FDM**      Finite Differenzen Methode





# Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

---

$\alpha$	$\text{m}^2/\text{s}$	Temperaturleitfähigkeit
$\rho$	$\text{kg}/\text{m}^3$	Dichte
$c$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$	spezifische Wärmekapazität
$k$	$\frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$	thermische Leitfähigkeit
$L$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$	latente Wärme



# Verzeichnis der verwendeten Indizes

---

<b>l</b>	liquid/flüssig
<b>s</b>	solid/fest
<b>i</b>	interface/Grenzschicht
<b>m</b>	melting point/Schmelzpunkt
<b>U</b>	Unterseite
<b>O</b>	Oberseite



# Symbolverzeichnis

---

Notation	Bedeutung
$\ \cdot\ $	euklidische Norm
$\vec{a}$	Vektor
$\mathbf{A}$	Matrix
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
Symbol	Bedeutung
$t$	Zeit



# Abbildungsverzeichnis

---





# Tabellenverzeichnis

---



## 1.1 Mathematische Grundlagen

### 1.1.1 Koordinatensysteme

Gegeben sei ein euklidisches Koordinatensystem  $I \in R^3$  mit den Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Für die Basisvektoren gelte:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (1.1)$$

und weiterhin

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad (1.2)$$

Die Basisvektoren von  $I$  beschreiben damit ein orthonormales Rechtssystem (siehe beispielsweise [1, S. 80]). Im Folgenden wird, wenn nicht explizit anderweitig angegeben, davon ausgegangen, dass alle verwendeten Koordinatensysteme diese Eigenschaften erfüllen.

### 1.1.2 Punkte und Vektoren

Zur Beschreibung eines Punktes wird ein Koordinatensystem benötigt. Ein Punkt wird eindeutig durch seine *Position* relativ zu diesem Koordinatensystem beschrieben. Als Koordinatensystem wird das Koordinatensystem  $I$  aus 1.1.1 verwendet. Die Position eines Punktes  $p$  kann dann wie folgt beschrieben werden:

$$p = (x|y|z) \in \mathcal{R}^3 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Die Position von  $p$  ist damit relativ zu  $I$  eindeutig beschrieben.

Ein Vektor  $\vec{a} \in \mathcal{R}^3$  hat im Gegensatz zum Punkt eine *Richtung* und einen *Betrag* beziehungsweise eine Länge. Die Begriffe Betrag und Länge werden im

Folgenden synonym verwendet. Mit beiden Eigenschaften ist die euklidische Norm des Vektors  $\vec{a}$  gemeint. Folgende Darstellung wird für den Betrag eines Vektors  $\vec{a}$  verwendet:

$$|\vec{a}| := \|\vec{a}\|$$

Eine Vektor kann frei im Raum verschoben werden, so lange seine Richtung und sein Betrag konstant bleiben. Man spricht daher auch von freien Vektoren. Für die Darstellung von Vektoren gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine Variante ist die Angabe von Anfangspunkt  $p$  und Endpunkt  $q$

$$\vec{a} = q - p = \overrightarrow{qp}.$$

Da Vektoren frei verschiebbar sind, ist die Wahl der Anfangs- und Endpunkte jedoch nicht eindeutig. Es gibt daher andere Punkte  $r, s$ , für die gilt:

$$\vec{a} = q - p = r - s$$

mit

$$q \neq r \text{ und } p \neq s$$

Eine weitere Darstellung ist die Komponentenschreibweise bezüglich eines Koordinatensystems  $I$ , welche durch Projektion auf die Basisvektoren von  $I$  gegeben ist:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

damit ergibt sich der Betrag eines Vektor zu

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$$

Folgende Eigenschaften gelten für Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  (nach [1]):

- Vektoren sind *gleich*, wenn sie in Richtung und Betrag übereinstimmen

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |a| = |b| \wedge \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$$

- **Addition**/ Subtraktion von Vektoren erfolgt durch Addition/ Subtraktion

der Komponenten

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \pm x' \\ y \pm y' \\ z \pm z' \end{pmatrix}$$

Es gelten die Rechenregeln:

– Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \pm \vec{b} + \vec{a}$$

– Assoziativgesetz:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$  erfolgt durch Multiplikation aller Komponenten mit dem Skalar

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix}$$

Es gelten die Rechenregeln:

– Distributivgesetz:

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

– weitere Regeln:

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$$(\lambda \mu) \vec{a} = \lambda (\mu \vec{a}) = \mu (\lambda \vec{a})$$

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

- Das **Skalarprodukt**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zweier Vektoren ist das Produkt der Beträge und dem Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels  $\varphi$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |a||b| \cos \varphi = (x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3) (x' \vec{e}_1 + y' \vec{e}_2 + z' \vec{e}_3)$$

Es gelten die Rechenregeln:

– Kommutativgesetz:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

– Distributivgesetz:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

– weitere Regeln:

$$\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle$$

*Bemerkung 1.1* (Orthogonale Vektoren). Verschwindet das Skalarprodukt zweier von Null verschiedenen Vektoren, so stehen diese senkrecht aufeinander.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$



*Bemerkung 1.2* (Winkel zwischen Vektoren). Der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren ergibt sich aus dem Quotienten vom Skalarprodukt der beiden Vektoren und dem Produkt der Beträge der Vektoren.

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$$



*Bemerkung 1.3* (Richtungskosinus). Ein Vektor  $\vec{a}$  bildet mit den drei Koordinatenachsen der Reihe nach die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , die als *Richtungswinkel* bezeichnet werden. Der Kosinus der jeweiligen Winkel wird als Richtungskosinus bezeichnet.

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{a_x}{a} \quad \cos \beta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_2|} = \frac{a_y}{a} \quad \cos \gamma = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_3|} = \frac{a_z}{a}$$

Die Richtungswinkel sind jedoch nicht voneinander unabhängig, sondern über die Beziehung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

miteinander verknüpft.



- das **Vektorprodukt** (auch Kreuzprodukt)  $\vec{a} \times \vec{b}$  hat als Ergebnis einen Vektor, der senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  steht und dessen Länge gleich dem Produkt der Beträge von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und dem Sinus des durch die Vektoren

eingeschlossenen Winkels  $\varphi$  ist.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Es gelten die Rechenregeln:

– Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

– Anti-Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

– weitere Regeln:

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$$

### 1.1.3 Gruppen [2, S. 13]

Unter einer *inneren Verknüpfung* auf einer Menge  $\mathcal{M}$  versteht man eine Abbildung  $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . Sie ordnet jedem Paar  $(a, b)$  von Elementen aus  $\mathcal{M}$  ein Element  $f(a, b) \in \mathcal{M}$  zu. Es wird die Notation  $a \cdot b$  anstelle von  $f(a, b)$  verwendet, um den verknüpfenden Charakter der Abbildung zu verdeutlichen.

**Definition 1.** Eine Menge  $\mathcal{G}$  mit einer inneren Verknüpfung  $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, (a, b) \rightarrow a \cdot b$ , heißt eine Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Die Verknüpfung ist assoziativ, d. h. es gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}. \quad (1.3)$$

2. Es existiert ein neutrales Element  $e$  in  $\mathcal{G}$ , das heißt ein Element  $e \in \mathcal{G}$  mit

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \forall a \in \mathcal{G}. \quad (1.4)$$

3. Zu jedem  $a \in \mathcal{G}$  gibt es ein inverses Element, das heißt ein Element  $b \in \mathcal{G}$  mit

$$a \cdot b = b \cdot a = e. \quad (1.5)$$

Dabei ist  $e$  das nach Gleichung (1.4) existierende (eindeutig bestimmte) neutrale Element von  $\mathcal{G}$ .

4. Die Gruppe heißt kommutativ oder abelsch, falls die Verknüpfung kommutativ ist, das heißt falls zusätzlich gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathcal{G}. \quad (1.6)$$

## 1.2 Starrkörperbewegung

Die Bewegung eines Punktes  $p$  im euklidischen Raum wird durch die Angabe seiner Position in Bezug zu einem inertialen Koordinatensystem  $I$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig beschrieben. Die Position des Punktes  $p$  sei durch das Tripel  $(x, y, z) \in \mathcal{R}^3$  gegeben. Die Trajektorie von  $p$  kann dann durch die parametrisierte Bahn  $p(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{R}^3$  beschrieben werden. Da nicht die Bewegung von einzelnen Punkten, sondern die Bewegung eines Starrkörpers beschrieben werden soll, soll zunächst der Begriff Starrkörper definiert werden.

**Definition 2** (Starrkörper). *Ein Starrkörper ist dadurch gekennzeichnet, dass die Distanz zweier beliebiger Punkte  $p, q$ , welche auf dem Körper liegen, unabhängig von der Bewegung des Körpers, immer konstant bleibt. Die anfängliche Position des Punktes  $p$  sei beschrieben durch  $p(0)$ . Die Position nach einer beliebigen Zeit  $t$  (und einer beliebigen Bewegung) sei beschrieben durch  $p(t)$ . Die Nomenklatur gelte für den Punkt  $q$  analog. Für einen Starrkörper wird gefordert:*

$$\|p(t) - q(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = \text{konstant}$$

Eine Starrkörperbewegung kann prinzipiell aus Rotation, Translation oder einer Überlagerung dieser Bewegungen bestehen. Wird ein Körper durch eine Teilmenge  $O \in \mathcal{R}^3$  beschrieben, so kann seine Bewegung als eine kontinuierliche Zuordnung  $g(t) : O \rightarrow \mathcal{R}^3$  beschrieben werden. Die kontinuierliche Zuordnungsvorschrift  $g(t)$  beschreibt, wie sich die einzelnen Punkte des Körpers relativ zu einem inertialen, festen Koordinatensystem mit Voranschreiten der Zeit  $t$  bewegen. Die Zuordnungsvorschrift  $g$  darf dabei die Distanz zwischen Punkten des Körpers und die Orientierung von Vektoren, welche Punkte des Körpers verbinden, nicht verändern. Damit ergibt sich die Definition einer Abbildung von Starrkörpern:



**Definition 3** (Abbildung eines Starrkörpers). [3] Eine Zuordnungsvorschrift  $g : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$  ist die Abbildung eines Starrkörpers genau dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Distanzen bleiben unverändert:  $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$  für alle Punkte  $p, q \in \mathcal{R}^3$
2. Das Kreuzprodukt bleibt erhalten:  $g(\vec{v} \times \vec{w}) = g(\vec{v}) \times g(\vec{w})$  für alle Vektoren  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{R}^3$ .

*Bemerkung 1.4.* Man kann mit Hilfe der Polarisationsformel zeigen, dass das Skalarprodukt durch die Abbildungsvorschrift  $g$  für einen Starrkörper erhalten bleibt [3]:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle g(\vec{v}), g(\vec{w}) \rangle.$$

Ein orthonormales Rechtssystem wird durch die Abbildungsvorschrift  $g$  demnach wieder in ein orthonormales Rechtssystem transformiert.  $\blacklozenge$

Der Astronom und Mathematiker Giulio Mozzi zeigte bereits 1763, dass eine räumliche Bewegung in eine Drehung und eine Verschiebung entlang der Drehachse zerlegt werden kann. Da sich die Teilchen eines Starrkörpers nicht relativ zueinander bewegen können, kann die Bewegung eines Starrkörpers durch die relative Bewegung eines körperfesten Koordinatensystems  $K$  zu einem Inertialsystem beschrieben werden. Das Koordinatensystem  $K$  erfülle dabei die in 1.1.1 genannten Eigenschaften. Das körperfeste Koordinatensystem hat seinen Ursprung in einem beliebigen Punkt  $p$  des Körpers. Die Orientierung von  $K$  beschreibt die Rotation des Körpers und die Lage des Ursprungs von  $K$  relativ zum Inertialsystem beschreibt den translatorischen Anteil der Starrkörperbewegung. Hat  $K$  die Einheitsvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ , dann kann die Bewegung von  $K$  durch die Abbildung  $g$  beschrieben werden. Genauer gesagt liefert  $g(\vec{v}_1), g(\vec{v}_2), g(\vec{v}_3)$  die Orientierung von  $K$  und  $g(p)$  die Lage des Ursprungs nach einer Starrkörperbewegung.

### 1.2.1 Rotationsmatrizen

Gegeben sei ein Koordinatensystem  $K$ , welches um eine Achse  $w$  relativ zu einem inertialen Koordinatensystem  $I$  gedreht wurde. Die Achsen von  $K$  relativ zu

$I$  seien gegeben durch die Vektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3$ . Die drei Spaltenvektoren werden horizontal zu einer Matrix

$$\mathbf{R} = [\vec{u} \quad \vec{w} \quad \vec{v}] \quad (1.7)$$

zusammengefasst. Die Matrix  $\mathbf{R}$  wird als Rotationsmatrix bezeichnet.

### Eigenschaften von Rotationsmatrizen

Die Spalten der Rotationsmatrix  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  seien die Vektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3$ . Da diese ein Koordinatensystem aufspannen haben sie die in Gleichung (1.1) und Gleichung (1.2) definierten Eigenschaften. Aus Gleichung (1.1) folgt für die Matrix  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (1.8)$$

und mit Hilfe der Regeln der linearen Algebra [1, S. 100] und Gleichung (1.1)

$$\det \mathbf{R} = \langle \vec{u}, \vec{w} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 \quad (1.9)$$

Die Menge der orthogonalen  $3 \times 3$  Matrizen mit der Determinante eins wird als  $\mathcal{SO}(3)$  bezeichnet [3]. Allgemein wird definiert:

$$\mathcal{SO}(n) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{R}^{n \times n} : \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = +1 \}. \quad (1.10)$$

### 1.2.2 Koordinatensysteme

# Literaturverzeichnis

---

- [1] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*. Springer Science + Business Media, 2014. DOI: 10.1007/978-3-658-05620-9. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-05620-9>.
- [2] S. Bosch, *Lineare Algebra*. Springer Berlin Heidelberg, 2014. DOI: 10.1007/978-3-642-55260-1. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-55260-1>.
- [3] S. S. S. Richard M. Murray Zexiang Li, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC PR INC, 11. März 1994, 480 Seiten, ISBN: 0849379814. Adresse: [http://www.ebook.de/de/product/3803129/richard\\_m\\_murray\\_zexiang\\_li\\_s\\_shankar\\_sastry\\_a\\_mathematical\\_introduction\\_to\\_robotic\\_manipulation.html](http://www.ebook.de/de/product/3803129/richard_m_murray_zexiang_li_s_shankar_sastry_a_mathematical_introduction_to_robotic_manipulation.html).



# Anhang

---

<b>A Anhang mit Sachen</b>	<b>A-3</b>
----------------------------	------------



# Anhang mit Sachen

---









