

# **Technische Universität Dresden**

**Fakultät Verkehrswissenschaften „Friedrich List“**

**Institut für Verkehrstelematik**

**Professur für Informationstechnik für Verkehrssysteme**

## **Studienarbeit**

**Modellierung technischer Systeme mit Hilfe homogener  
Koordinaten am Beispiel eines Motorradmodells**

vorgelegt von: Marius Müller

Matrikelnummer: 3661272

geboren am: 29. September 1989 in Dresden

Betreuer:

Dipl.-Ing. Markus Köbe (TU Dresden LKT)

Dipl.-Ing. Robert Richter (TU Dresden ITVS)

Verantwortlicher Hochschullehrer:

Prof. Dr.-Ing. Oliver Michler

Tag der Einreichung:

15.01.2017

# Bibliografischer Nachweis

---

Marius Müller

## **Modellierung technischer Systeme mit Hilfe homogener Koordinaten am Beispiel eines Motorradmodells**

Studienarbeit: 73 Seiten, 5 Abbildungen, 67 Literaturangaben

15.01.2017

Technische Universität Dresden

Fakultät Verkehrswissenschaften „Friedrich List“

Institut für Verkehrstelematik

Autorenreferat:

Technische Systeme können auf verschiedenste Arten und zu verschiedensten Zwecken modelliert werden. Bei mechanischen Systemen ist meist die Bewegung von Interesse. Die Aufteilung in mehrere Starrkörper ist ein üblicher Ansatz der Modellbildung. Ein derart erhaltenes Mehrkörpersystem muss so durch Parameter beschrieben werden, dass die Lage aller Teilkörper bestimmt, und damit die Bewegung des Gesamtsystems beschrieben werden kann. Die Wahl von Parametern nach der Methode der natürlichen Koordinaten wird erläutert. Die Bewegungsbeschreibung geschieht üblicherweise mit Vektoren, welche als Elemente des  $\mathcal{R}^3$  aufgefasst werden. Die mathematischen Grundlagen dieser Beschreibungsform werden dargelegt. Die Repräsentation des Ortes als Tripel erlaubt keine Darstellung der Starrkörperbewegung in Form einer linearen Abbildung. Dieses Problem wird durch die Einführung homogener Koordinaten gelöst. Mit Hinblick auf diese Variante der Koordinatendarstellung werden Grundprinzipien der Kinematik hergeleitet und es wird auf die Lösung von Bewegungsgleichungen eingegangen. Die Verwendbarkeit dieser Darstellung wird anhand ausgewählter Modellgleichungen, mit denen ein Motorrad beschrieben werden kann, gezeigt.

Bitte ersetzen Sie diese Seite vor dem Binden mit der Aufgabenstellung.

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tage dem Prüfungsausschuss der Fakultät Verkehrswissenschaften „Friedrich List“ eingereichte Studienarbeit zum Thema

## **Modellierung technischer Systeme mit Hilfe homogener Koordinaten am Beispiel eines Motorradmodells**

selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, wurden als solche kenntlich gemacht.

Dresden, 15. Januar 2017

Marius Müller

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1 Einleitung</b>	1
<b>2 Mathematische Grundlagen</b>	2
2.1 Einführung	2
2.2 Mengen	5
2.2.1 Teilmengen	6
2.2.2 Vereinigung und Durchschnitt	7
2.2.3 Differenz von Mengen	8
2.2.4 Kartesisches Produkt	8
2.2.5 Mächtigkeit	9
2.3 Abbildung	9
2.3.1 Komposition von Abbildungen	9
2.4 Gruppen	11
2.5 Körper	12
2.6 Vektorräume	14
2.6.1 Matrizen	18
2.7 Punkte und Vektoren im Anschauungsraum	20
2.7.1 Vektoren des $\mathcal{R}^3$	21
<b>3 Koordinatensysteme</b>	28
3.1 Kartesische normierte Rechtssysteme	29
3.2 Koordinatentransformation in homogenen Koordinaten	30
3.2.1 Rotationen und deren Darstellung mittels Matrizen	30
3.2.2 Homogene Koordinaten	34
3.2.3 Transformationen	37
3.3 Natürliche Koordinaten	39
3.3.1 Eigenschaften natürlicher Koordinaten	42

3.4 Wichtige Begriffe und weitere Konzepte . . . . .	42
<b>4 Grundlagen der Mechanik . . . . .</b>	<b>44</b>
4.1 Starrkörperbewegung . . . . .	44
4.2 Lagrange Gleichung 2. Art . . . . .	50
4.2.1 Kinetische Energie . . . . .	52
4.2.2 Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	54
4.3 Differential-algebraische Gleichungen . . . . .	59
<b>5 Modelle von Motorrädern . . . . .</b>	<b>63</b>
5.1 Das Motorradmodell von V. Cossalter und R. Lot . . . . .	64
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>7 Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>vi</b>

# Abkürzungsverzeichnis

---

**DAE** Differential-algebraische Gleichung

# Symbolverzeichnis

---

Notation	Bedeutung
$\ \cdot\ $	euklidische Norm
$\vec{a}$	Vektor
$\mathbf{A}$	Matrix
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
$\cdot \times \cdot$	Vektorprodukt



# Abbildungsverzeichnis

---

2.1 Ebene mit drei Geraden . . . . .	3
3.1 Darstellung eines Vektors in verschiedenen Koordinatensystemen	38
4.1 Starrkörper mit körperfestem Koordinatensystem . . . . .	46
5.1 Motorrad als Mehrkörpersystem mit natürlichen Koordinaten [CL02, S. 10] . . . . .	65
5.2 Reifenkräfte im Kontaktpunkt von Straße und Reifen [CL02, S. 6]	71

# Thesen zur Studienarbeit

---

1. Die Elemente des Vektorraumes  $\mathcal{R}^3$  über dem Körper der reellen Zahlen sind ein geeignetes Mittel, um Punkte im Anschauungsraum zu beschreiben.
2. Wird ein Starrkörper mit Hilfe von Vektoren in Form von Tripeln beschrieben, so kann die Translation eines Starrkörpers nicht durch eine lineare Abbildung beschrieben werden.
3. Die Translation eines Starrkörpers kann durch eine lineare Abbildung dargestellt werden, wenn die Darstellung der Bewegung durch Tripel geeignet erweitert wird.
4. Homogene Koordinaten ermöglichen eine simple Darstellung komplexer Transformationen von Punkten eines Starrkörpers.
5. Die Parametrierung eines Mehrkörpersystems mit natürlichen Koordinaten ist möglich.
6. Die Parametrierung eines Mehrkörpersystems mit natürlichen Koordinaten ermöglicht eine besonders simple Formulierung von Zwangsbedingungen.

Problemstellungen der Kinetik lassen sich in geeigneter Weise im dreidimensionalen Raum formulieren. Dabei dient dieser zur Beschreibung der Lage und der Lageänderung des zu analysierenden Systems.

Um den dreidimensionalen Raum selbst beschreiben zu können wurden zahlreiche mathematische Konzepte entwickelt. Im Folgenden soll ein grundlegender Überblick über diese Konzepte gegeben werden, welche dem Fachgebiet der Linearen Algebra zuzuordnen sind. Ihre Darstellung ist dem Lehrbuch von S. Bosch [Bos14] entnommen. Anhand eines Beispiels werden einige wichtige Begriffe eingeführt. Diese werden in den folgenden Abschnitten detailliert erklärt. Anschließend werden die zur Modellierung verwendeten kinematischen Konzepte erläutert. Insbesondere werden die Homogenen Koordinaten als eine Darstellungsvariante von Punkten und deren Bewegung im dreidimensionalen Raum eingeführt. Weiterhin wird das Konzept der natürlichen Koordinaten erklärt, mit Hilfe dessen ein System von Starrkörpern parametrisiert werden kann. Die Bewegung von Starrkörpern wird speziell unter Verwendung dieser zwei Konzepte untersucht. Die Verwendung der Gleichung von Lagrange 2. Art und das Prinzip der virtuellen Arbeit spielen in diesem Zusammenhang eine besonders wichtige Rolle. Anhand ausgewählter Gleichungen aus der Arbeit von V. Cossalter und R. Lot [CL02] werden die eingeführten Konzepte exemplarisch dargelegt.

## 2.1 Einführung

Bei der Analyse von Problemen ist es in der Mathematik, ebenso wie in anderen Fachbereichen üblich, mit Hilfe von Modellen möglichst einfache Grundstrukturen zu finden, welche für die Lösung des zu untersuchenden Problems von Interesse sind. Dabei kann die gezielte Untersuchung einer solchen Grundstruktur losgelöst von der eigentlichen Problemstellung durchgeführt werden. Dadurch ist ein Modell in der Regel leichter überschaubar, als das eigentliche Problem.

Als einführendes Beispiel wird eine geeignete Beschreibung des dreidimensionalen Raumes entworfen. Dieses ist in weiten Teilen [Bos14] nachempfunden.

Die Beschreibung des dreidimensionalen Raumes baut auf einer Reihe von Grundstrukturen auf. Die Basis bilden Mengen, deren Elemente und Abbildungen (siehe Abschnitt 2.2). Darauf aufbauend werden im Abschnitt 2.4 Gruppen als Mengen mit einer inneren Abbildung definiert. Im Abschnitt 2.5 werden die Eigenschaften von Gruppen weiter eingeschränkt, was auf den Begriff des Körpers führt. Anschließend können Vektorräume über einem Körper und deren Elemente - die Vektoren - definiert werden (siehe Abschnitt 2.6). Im Unterkapitel 2.6.1 werden Matrizen definiert und es wird auf einige Rechenregeln und Eigenschaften eingegangen. Wegen ihrer hohen Relevanz für diese Arbeit werden im Abschnitt 2.7 die Rechenregeln von Vektoren eingeführt. Außerdem wird der Unterschied zwischen Punkten und Vektoren deutlich gemacht. Die Ausführungen zu diesen Elementen der linearen Algebra sind [Bos14], [PS09], [Ass75] und [MK14] entnommen. Die Eigenschaften von Vektoren sind [Pap14] entnommen.

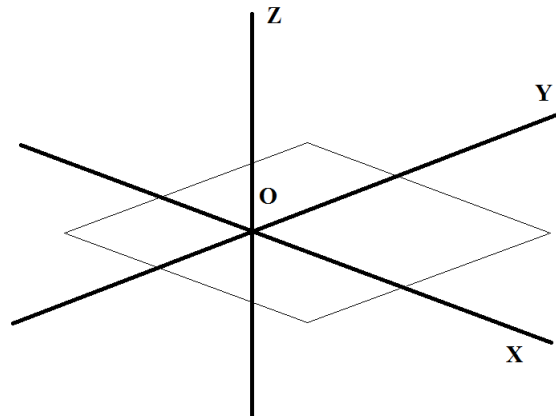
Der dreidimensionale Raum <sup>1</sup> wird auf Basis der so eingeführten Begriffe mit Hilfe einer geeigneten Basis als Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen in Form eines Koordinatensystems im Kapitel 3 eingeführt.

---

<sup>1</sup> der dreidimensionale Raum wird in dieser Arbeit als Anschauungsraum bezeichnet

Um die Position eines Körpers im Raum beschreiben zu können, werden ferner für Vektoren und Matrizen unter anderem die Rechenregeln Addition und Multiplikation nach [Pap14] definiert. Im Kapitel 3 werden die so eingeführten Gesetze verwendet, um die Handhabung von Koordinatensystemen im Detail zu beschreiben.

Zur Beschreibung des dreidimensionalen Raumes sei eine Ebene  $E$  gegeben, welche beliebig im Anschauungsraum liegt. Weiterhin sei ein beliebiger Punkt dieser Ebene gegeben, welcher als Nullpunkt  $O$  eines Koordinatensystems dienen soll. Zusätzlich seien drei Geraden  $X, Y$ , und  $Z$  gegeben, welche als Koordinatenachsen dienen. Alle drei Geraden sollen sich dabei im Punkt  $O$  schneiden und die reellen Zahlen komplett durchlaufen. Außerdem sollen keine zwei Geraden parallel zueinander sein. Ferner sollen die Geraden paarweise derart senkrecht aufeinander stehen, dass sie ein Rechtssystem bilden. Diese Anordnung ist in Abbildung 2.1 abgebildet. Überdies sei auf jeder Gerade ein spezieller Punkt



**Abbildung 2.1:** Ebene mit drei Geraden

definiert:  $I_x, I_y$  und  $I_z$ . Dieser Punkt habe vom Ursprung, entlang der jeweiligen Achse auf der er liegt, genau den Abstand 1. Man bezeichnet diesen Abstand als *Einheitslänge*.

Hinzukommend wird ein Vektor  $\vec{e}_x$  definiert, welcher vom Ursprung aus auf den Punkt  $I_x$  zeigt und damit zwangsläufig auf der Geraden X liegt. Analog werden die Vektoren  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  definiert. Diese Vektoren mit *Einheitslänge*, welche entlang der Koordinatenachsen liegen, werden *Einheitsvektoren* genannt. Als Tripel notiert haben sie entlang der Achse, in welche sie zeigen, eine 1 als Eintrag

und sonst eine 0. Damit gilt  $\vec{e}_x = (1,0,0)$ ,  $\vec{e}_y = (0,1,0)$ ,  $\vec{e}_z = (0,0,1)$ . Durch die genannten Bedingungen ist es nicht möglich einen der *Einheitsvektoren* als *Linearkombination* der anderen Beiden darzustellen. Damit bilden diese *Einheitsvektoren* eine *Basis* für einen *Vektorraum*  $V$ . Da die *Einheitsvektoren* genau drei unabhängige Vektoren sind, ist der von ihnen aufgespannte *Vektorraum* gleich dem dreidimensionalen Raum.

Weiterhin sei ein Streckungsfaktor  $\alpha \in \mathcal{R}$  definiert. Mit Hilfe von  $\alpha \cdot I_x$  sei das Bild des Punktes  $I_x$  beschrieben, welches sich durch Streckung mit Streckungszentrum im Ursprung  $O$ , entlang der x-Achse, um den Streckungsfaktor  $\alpha$  ergibt. Die Zuordnung  $\alpha \rightarrow \alpha \cdot I_x$  liefert damit eine eindeutige, umkehrbare Zuordnung der reellen Zahlen auf die Punkte der Geraden  $X$ . Dabei ist das Bild der Streckung des *Einheitsvektors*  $\vec{e}_x$  äquivalent mit dem Bild der Streckung des Punktes  $I_x$ . Zusätzlich seien für die Achsen  $Y$  und  $Z$  die Streckungsfaktoren  $\beta$  und  $\gamma$  nach dem gleichen Schema definiert.

Mit Hilfe dieser Festlegungen können beliebige Punkte im Raum beschrieben werden. Alle Punkte des Raumes bilden dabei die *Menge*  $R^3$ . Man sagt, dass die Punkte *Elemente* dieser *Menge* sind. Betrachtet man zum Beispiel einen Punkt auf der Ebene  $E$ , so kann man dieses *Element* als Tripel von reellen Zahlen interpretieren:  $P = (x_1, y_1, z_1)$ . Man nennt dieses Tripel die *Koordinaten* von  $P$  (bezüglich des gewählten Koordinatensystems). Der Ursprung des Koordinatensystems hat bezüglich des Koordinatensystems, dessen Ursprung er ist, immer die Koordinaten  $(0,0,0)$ . Den Wert von  $x_1$  erhält man geometrisch durch Konstruktion einer Normalen bezüglich der x-Achse, welche den Punkt  $P$  durchläuft. Den Fußpunkt dieser Normalen kann man durch Streckung des zuvor definierten Punktes  $I_x$  um den Faktor  $\alpha_P$  erhalten. Dabei entspricht eben diese reelle Zahl  $\alpha_P$  dem Wert von  $x_1$ .

Die Werte für  $y_1$  und  $z_1$  ergeben sich analog. Die so erhaltene Zuordnung  $P \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$  bezeichnet man als eine Abbildung. Mit Hilfe dieser Abbildung wird beliebigen Punkten der Ebene  $E$  in eindeutiger Weise ein Zahlentripel von reellen Zahlen zugeordnet. Man sagt auch, dass dieses Zahlentripel ein *Element* des *Vektorraumes*  $V$  ist, welcher über dem *Körper* der reellen Zahlen definiert ist. Aufgrund dessen, dass die Achsen des Koordinatensystems durch die *Basis* des *Vektorraumes* beschrieben werden, sind die Zahlenwerte des Tripels zwangsläufig

abhängig von der Wahl des Koordinatensystemursprungs und der *Basisvektoren*. Da dieses Zahlentripel nicht nur ein *Element* einer *Menge*, sondern insbesondere ein Vektor eines *Vektorraumes* ist, gibt es alternative Schreibweisen für den Punkt  $P$ . Die Üblichste ist die Darstellung als Spaltenvektor  $\vec{v} \in \mathcal{R}^3$ . Dabei erhält man  $\vec{v}$  durch Subtraktion der Koordinaten des Punktes  $P$  von den Koordinaten des gewählten Koordinatenursprungs. Beziehen sich alle Angaben auf das gleiche System, so entsprechen die Komponenten von  $\vec{v}$  genau den Koordinaten von  $P$  und die Darstellung als Spaltenvektor lautet:  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ . Man kann  $\vec{v}$  auch als *Linearkombination* der *Basis* des *Vektorraumes*  $V$  darstellen:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z = \alpha_P \vec{e}_x + \beta_P \vec{e}_y + \gamma_P \vec{e}_z$$

*Bemerkung 2.1.* Die Beschränkung auf die Betrachtung von Rechtssystemen ist als einführendes Beispiel besonders gut geeignet, da alle in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensysteme die damit verbundenen Eigenschaften erfüllen sollen. Wollte man auch nicht orthogonale Koordinatensysteme betrachten, so führt dies zwangsläufig auf die Betrachtung von kovarianten und kontravarianten Basisvektoren und die Tensorrechnung. Eine Einführung in dieses Thema ist [RRMR07] zu entnehmen. Eine ausführliche Behandlung der Thematik ist in [Jän05] enthalten. ◆

## 2.2 Mengen

**Definition 1** (Mengen; nach G. Cantor). *Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge [Can95]. Ist  $\mathcal{M}$  eine Menge und  $x$  ein Objekt, so notiert man  $x \in \mathcal{M}$ , wenn die Menge  $\mathcal{M}$  das Objekt  $x$  enthält und  $x \notin \mathcal{M}$ , wenn dies nicht der Fall ist. Enthält die Menge  $\mathcal{M}$  keine Elemente, so nennt man dies die **leere Menge** <sup>2</sup>  $\{\}$  beziehungsweise  $\emptyset$ .*

Mengen können durch Aufzählung aller Elemente oder durch die Angabe von Eigenschaften, welche die Elemente erfüllen sollen, definiert werden. In Beispiel

---

<sup>2</sup> jede Menge besitzt die leere Menge als Teilmenge

2.1 sind verschiedene Mengendefinition zu finden.

Die angegebene Definition für Mengen ist zwar anschaulich, verzichtet aber auf eine axiomatische Begründung. Im Rahmen dieser Arbeit ist diese Definition jedoch ausreichend. Eine präzise Definition von Mengen erfordert erheblichen Aufwand und ist beispielsweise in [Ass75] enthalten.

Die folgenden Mengen sind von besonderer Bedeutung:

- die natürlichen Zahlen  $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- die ganzen Zahlen  $\mathcal{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- die rationalen Zahlen  $\mathcal{Q} = \{\frac{p}{q} \mid q, p \in \mathcal{Z}, q \neq 0\}$
- die reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  als Menge aller, unter Umständen nicht abbrechenden, Dezimalbrüche [PS09, S. 12]

*Beispiel 2.1* (Mengendefinitionen).

$$\mathcal{M}_1 = \{1, 2, 5, 8, 10\}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl und ungerade}\}$$

◇

Die Reihenfolge der Elemente einer Menge ist ohne Bedeutung. Daher gilt  $\mathcal{M}_1 = \{1, 4, 8\} = \{4, 8, 1\}$ . Enthält eine Menge ein Element mehrfach, so ist diese Multiplizität ohne Bedeutung, daher gilt  $\mathcal{M}_1 = \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 5, 3, 5\}$ . Zur Handhabung von Mengen gibt es eine Reihe von Axiomen, auf welche im Folgenden eingegangen wird.

### 2.2.1 Teilmengen

Es sei  $\mathcal{X}$  eine Menge und  $P(x)$  eine Aussage. Die Gültigkeit der Aussage (wahr oder falsch) sei für alle Elemente  $x$  überprüfbar. Man nennt dann

$$\mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{X} \mid P(x) \text{ ist wahr}\} \tag{2.1}$$

eine **Teilmenge** von  $\mathcal{X}$  und notiert  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ .

Die Mengen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  heißen *gleich*, wenn jedes Element von  $\mathcal{X}$  auch in  $\mathcal{Y}$  enthalten ist und umgekehrt:  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \Leftrightarrow \forall x (x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow x \in \mathcal{Y})$ .

Gilt  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \neq \mathcal{X}$ , so nennt man  $\mathcal{Y}$  eine *echte Teilmenge* von  $\mathcal{X}$  und notiert



$\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{X}$ .<sup>3</sup>

Die Gesamtheit aller Teilmengen einer Menge  $\mathcal{X}$  bildet die sogenannte **Potenzmenge**  $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \{\mathcal{U} | \mathcal{U} \subset \mathcal{X}\}$ .

*Bemerkung 2.2* (Notation für Teilmengen). In der Literatur ist die Kennzeichnung einer echten Teilmenge im Gegensatz zu einer Teilmenge nicht einheitlich. Es gibt folgende Notationen:

- Teilmenge:  $\subset$ , echte Teilmenge:  $\subsetneq$
- Teilmenge:  $\subseteq$ , echte Teilmenge:  $\subset$



## 2.2.2 Vereinigung und Durchschnitt

Sei  $\mathcal{X}$  eine Menge und  $\mathcal{I}$  eine Indexmenge, das heißt die Elemente von  $\mathcal{I}$  sollen als Indizes dienen. Ist für jedes  $i \in \mathcal{I}$  eine Teilmenge  $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$  gegeben, so nennt man

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i := \{x \in \mathcal{X} \mid \text{es existiert ein } i \in \mathcal{I} \text{ mit } x \in \mathcal{X}_i\} \quad (2.2)$$

die **Vereinigung** der Mengen  $\mathcal{X}_i, i \in \mathcal{I}$ . In der so entstehenden Teilmenge von  $\mathcal{X}$  sind also all jene  $x$  enthalten, die in wenigstens einer der vereinten Teilmengen  $\mathcal{X}_i$  enthalten sind.

Der **Durchschnitt**<sup>4</sup> der Mengen wird mit

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{X}_i := \{x \in \mathcal{X} \mid x \in \mathcal{X}_i \quad \forall i \in \mathcal{I}\} \quad (2.3)$$

beschrieben. In der durch den Durchschnitt gebildeten Teilmenge von  $\mathcal{X}$  sind also diejenigen Elemente  $x$  der Menge  $\mathcal{X}$  enthalten, welche in allen Teilmengen  $\mathcal{X}_i$  enthalten sind, von denen der Durchschnitt gebildet wurde.

Für die Verknüpfung von zwei Mengen schreibt man insbesondere:

$$\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 = \{x \mid x \in \mathcal{X}_1 \vee x \in \mathcal{X}_2\}$$

<sup>3</sup> Mit dem Symbol  $\wedge$  ist das logische Und - die *Konjunktion* - und mit dem Symbol  $\vee$  ist das logische Oder - die *Disjunktion* - gemeint. Für Erklärungen zu diesen logischen Operatoren siehe [ABHK13, S. 28]

<sup>4</sup> den *Durchschnitt* von Mengen bezeichnet man auch kurz als *Schnitt*

für die Vereinigung und

$$\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 = \{x \mid x \in \mathcal{X}_1 \vee x \in \mathcal{X}_2\}$$

für den Durchschnitt.

Ist der Durchschnitt zweier Mengen leer, gilt also

$$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset \tag{2.4}$$

dann bezeichnet man die Mengen als **disjunkt**.

### 2.2.3 Differenz von Mengen

Sind  $\mathcal{X}_1$  und  $\mathcal{X}_2$  Teilmengen einer Menge  $\mathcal{X}$ , so heißt

$$\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_2 := \{x \in \mathcal{X}_1 \mid x \notin \mathcal{X}_2\} \tag{2.5}$$

die **Differenz** von  $\mathcal{X}_1$  und  $\mathcal{X}_2$ . Auch dies ist eine Teilmenge von  $\mathcal{X}$  und sogar von  $\mathcal{X}_1$ .

### 2.2.4 Kartesisches Produkt

Es seien  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$  Mengen. Dann heißt

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{X}_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathcal{X}_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}_n\} \tag{2.6}$$

das **kartesische Produkt** der Mengen  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ . Eine gleichbedeutende Notation lautet  $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ . Die Elemente  $(x_1, \dots, x_n)$  werden als **n-Tupel** mit Komponenten  $x_i \in \mathcal{X}_i, i = 1, \dots, n$ , bezeichnet.

Zwei n-Tupel  $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)$  gelten genau dann als gleich, wenn  $x_i = x'_i$  für  $i = 1, \dots, n$  erfüllt ist.

Das 2-Tupel  $(3, 5)$  beschreibt einen Punkt auf einer Zahlenebene. Ein Tupel, welche genau zwei Elemente beinhaltet, bezeichnet man als *Paar*.

Ein 3-Tupel bezeichnet man als *Tripel*. Ein Beispiel für ein Tripel ist der Körper  $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ , welcher durch die Menge der reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation gebildet wird.

### 2.2.5 Mächtigkeit

Sei  $\mathcal{X}$  eine Menge, dann bezeichnet man mit

$$|\mathcal{X}| \tag{2.7}$$

die **Mächtigkeit** der Menge und meint damit die Anzahl der Elemente, welche in  $\mathcal{X}$  enthalten sind. Es gilt

$$|\mathcal{X}| := \begin{cases} n, & \text{falls } \mathcal{X} \text{ endlich ist und } n \text{ Elemente enthält} \\ \infty, & \text{falls } \mathcal{X} \text{ nicht endlich ist.} \end{cases}$$

## 2.3 Abbildung

**Definition 2** (Abbildung). *Eine Abbildung  $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  zwischen zwei Mengen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  ist eine Vorschrift, welche jedem  $x \in \mathcal{X}$  ein wohlbestimmtes Element  $y \in \mathcal{Y}$  zuordnet, welches mit  $f(x)$  bezeichnet wird. Man schreibt auch  $x \longmapsto f(x)$ . Man bezeichnet  $\mathcal{X}$  als den Definitionsbereich und  $\mathcal{Y}$  als den Bild-<sup>5</sup> oder Wertebereich der Abbildung  $f$ .*

### 2.3.1 Komposition von Abbildungen

Gegeben seien zwei Abbildungen  $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  und  $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$  zwischen Mengen. Dann kann man die Abbildungen komponieren:

$$g \circ f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Z}, \quad x \longmapsto g(f(x)). \tag{2.8}$$

Alternative Bezeichnungen für eine Komposition lauten *Hintereinanderausführung* und *Verkettung*.

*Beispiel 2.2* (Ort als Bild der Zeit). Ordnet man jedem Zeitpunkt  $t$  den Ort beziehungsweise die Position des Schwerpunkts eines Körpers zu, so entspricht dies einer Abbildung  $f : t \longmapsto f(t)$ . Der Definitionsbereich sei beispielsweise gegeben durch beliebige positive reelle Zahlen und der Wertebereich durch beliebige reelle Zahlen. Der Körper kann sich dann frei im Anschauungsraum bewegen und seine Position ist mit Hilfe der Abbildung  $f(t)$  eindeutig beschrieben.  $\diamond$

---

<sup>5</sup> der Bildbereich wird auch Zielmenge genannt

*Bemerkung 2.3* (Umkehrbarkeit einer Abbildung). In der Definition einer Abbildung wird gefordert, dass jedem  $x \in \mathcal{X}$  ein eindeutiges Bild  $y \in \mathcal{Y}$  zugeordnet wird. Die Umkehrung, dass jedem  $y \in \mathcal{Y}$  ein eindeutiges Urbild  $x \in \mathcal{X}$  zugeordnet werden kann, kann daraus nicht geschlussfolgert werden.  $\blacklozenge$

Seien  $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}, \mathcal{N} \subset \mathcal{Y}$  und  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Abbildung, so nennt man:

$$f(\mathcal{M}) := \{y \in \mathcal{Y} \mid \text{es existiert ein } x \in \mathcal{M} \text{ mit } y = f(x)\} \quad (2.9)$$

**Bild**(-menge) von  $\mathcal{M}$  unter der Abbildung  $f$  und

$$f^{-1}(\mathcal{N}) := \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \in \mathcal{N}\} \quad (2.10)$$

**Urbild**(-menge) von  $\mathcal{N}$  unter der Abbildung  $f$ .

Weiterhin bezeichnet man  $f$  als

- **injektiv**, falls für  $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$  gilt:  $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ , das heißt, dass verschiedene Elemente des Definitionsbereichs auf verschiedene Elemente des Wertebereichs abgebildet werden beziehungsweise dass das Urbild  $f^{-1}(y)$  eines jeden  $y \in \mathcal{Y}$  entweder leer ist, oder aus genau einem  $x \in \mathcal{X}$  besteht
- **surjektiv**, falls gilt:  $\forall y \in \mathcal{Y} \quad \exists x \in \mathcal{X} : f(x) = y$ , das heißt jedes Element des Wertebereichs wird durch Abbildung mindestens eines Elements aus dem Definitionsbereich erreicht
- **bijektiv**, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist. Für bijektive Abbildungen  $f$  lässt sich die **Umkehrabbildung**  $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, g := f^{-1}$  bilden, welche jedem Element der Bildmenge ein Element aus dem Definitionsbereich zuordnet.

**Definition 3** (Lineare Abbildung). Eine Abbildung  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  zwischen den Vektorräumen  $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$  über dem Körper  $\mathcal{K}$  heißt lineare Abbildung über  $\mathcal{K}$ , falls gilt:

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \text{für } a, b \in \mathcal{V} \quad (2.11)$$

$$f(\alpha a) = \alpha f(a) \quad \text{für } \alpha \in \mathcal{K}, a \in \mathcal{V}. \quad (2.12)$$

Daraus folgen die notwendigen Rechenregeln

$$f(0) = 0$$

$$f(-a) = -f(a) \quad \text{für } a \in \mathcal{V}.$$

## 2.4 Gruppen

Unter einer **inneren Verknüpfung** auf einer Menge  $\mathcal{M}$  versteht man eine Abbildung  $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . Sie ordnet jedem Paar  $(a, b)$  von Elementen aus  $\mathcal{M}$  ein Element  $f(a, b) \in \mathcal{M}$  zu. Die innere Verknüpfung muss also eine abgeschlossene <sup>6</sup> Verknüpfung sein. Es wird die Notation  $a \cdot b$  anstelle von  $f(a, b)$  verwendet, um den verknüpfenden Charakter der Abbildung zu verdeutlichen. Ist die Verknüpfung kommutativ, gilt also  $f(a, b) = f(b, a)$  für alle  $a, b \in \mathcal{M}$ , so wird die Verknüpfung  $f$  durch  $+$  notiert.

**Definition 4.** Eine Menge  $\mathcal{G}$  mit einer inneren Verknüpfung  $\circ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $(a, b) \mapsto a \circ b$ , heißt eine Gruppe  $(\mathcal{G}, \circ)$ , wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Die Verknüpfung  $\circ$  ist assoziativ, d. h. es gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}. \quad (2.13)$$

- Es existiert ein **neutrales Element**  $e$  in  $\mathcal{G}$ , das heißt ein Element  $e \in \mathcal{G}$  mit

$$e \circ a = a \circ e = a \quad \forall a \in \mathcal{G}. \quad (2.14)$$

Das neutrale Element einer Gruppe ist offensichtlich zugleich links-neutral und rechts-neutral.

- Zu jedem  $a \in \mathcal{G}$  gibt es ein **inverses Element**, das heißt ein Element  $b \in \mathcal{G}$  mit

$$a \circ b = b \circ a = e. \quad (2.15)$$

Dabei ist  $e$  das nach Gleichung (2.14) existierende (eindeutig bestimmte) neutrale Element von  $\mathcal{G}$ . Das inverse Element  $b$  einer Gruppe ist links-invers und recht-invers.

- Die Gruppe  $(\mathcal{G}, \circ)$  heißt kommutativ oder **abelsch**, falls die Verknüpfung kommutativ ist, das heißt falls zusätzlich gilt:

$$a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in \mathcal{G}. \quad (2.16)$$

*Beispiel 2.3* (Beispiele für Gruppen).

---

<sup>6</sup> der Begriff *Abgeschlossenheit* wird im Abschnitt 2.5 genauer erklärt

- Die Menge  $\mathcal{Z}$  mit der Verknüpfung Addition „+“
- Die Menge  $\mathcal{R}$  mit der Verknüpfung Addition „+“ und  $\mathcal{R}^* := \mathcal{R} - \{0\}$  mit der Multiplikation „ $\cdot$ “

◇

*Bemerkung 2.4* (multiplikative Verknüpfungen). Ist die Verknüpfung einer Gruppe in multiplikativer Schreibweise gegeben, so wird

- das neutrale Element  $e$  als **Einselement** bezeichnet und als 1 notiert
- das inverse Element  $b$  zu  $a$  als  $a^{-1}$  notiert
- das Verknüpfungszeichen „ $\cdot$ “ meist weggelassen
- für endliche Elemente  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{G}$  das Produkt der Elemente als  $\prod_{i=1}^n a_i := a_1 \cdot \dots \cdot a_n$  definiert, wobei  $\prod_{i=1}^0 a_i := 1$  gilt.

◆

*Bemerkung 2.5* (additive Verknüpfungen). Ist die Verknüpfung einer Gruppe kommutativ, so verwendet man die additive Schreibweise und

- bezeichnet das neutrale Element  $e$  als **Nullelement** und schreibt 0
- notiert das inverse Element  $b$  zu  $a$  als  $-a$
- definiert für endliche Elemente  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{G}$  die Summe der Elemente als  $\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + \dots + a_n$ , wobei  $\sum_{i=1}^0 a_i := 0$  gilt.

◆

## 2.5 Körper

Körper sind Zahlssysteme mit gewissen Axiomen für die Addition und Multiplikation, welche auf den Axiomen von Gruppen aufbauen.

**Definition 5** (Körper). *Ein Körper ist eine Menge  $\mathcal{K}$  mit zwei inneren Verknüpfungen, geschrieben als Addition und Multiplikation, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1.  $\mathcal{K}$  ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition, das heißt die Addition

ist assoziativ nach Gleichung (2.13), hat ein neutrales Element 0 nach Gleichung (2.14) und ein inverses Element  $-a \in \mathcal{K}$  nach Gleichung (2.15) zu  $a \in \mathcal{K}$  und sie ist kommutativ nach Gleichung (2.16)

2.  $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$  ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation, das heißt die Multiplikation ist assoziativ nach Gleichung (2.13), hat das neutrale Element 1 nach Gleichung (2.14) und das inverse Element  $a^{-1}$  nach Gleichung (2.15) für  $a, a^{-1} \in \mathcal{K}$  und sie ist kommutativ nach Gleichung (2.16)

3. Es gelten die Distributivgesetze:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

für  $a, b, c \in \mathcal{K}$

Wird ein Körper mit den zugehörigen Verknüpfungen angegeben, so kann man  $\mathcal{K}$  als Tripel  $(\mathcal{K}, +, \cdot)$  notieren.

*Bemerkung 2.6* (Abgeschlossenheit). Entsprechend der Definition 5 für einen Körper  $\mathcal{K}$  bilden die Rechenoperationen Addition und Multiplikation Elemente des Körpers auf Elemente des Körpers ab. Da  $\mathcal{K}$  nie verlassen wird, spricht man in diesem Zusammenhang von der **Abgeschlossenheit** des Körpers  $\mathcal{K}$ . ♦

*Bemerkung 2.7* (Körper und Gruppen). Ist  $\mathcal{K}$  ein Körper mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation, dann sind  $(\mathcal{K}, +)$  und  $(\mathcal{K} - \{0\}, \cdot)$  Gruppen.

Die Menge aller invertierbaren  $n \times n$  Matrizen über einem Körper mit Matrizenmultiplikation bildet die *allgemeine lineare Gruppe*. ♦

*Beispiel 2.4* (Körper). Häufig verwendete Körper sind

- die Menge der rationalen Zahlen  $\mathcal{Q}$  mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation
- die Menge der reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation
- die Menge  $\mathcal{R} \times \mathcal{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathcal{R}\}$  der Paare (2-Tupel) reeller Zahlen mit

den Verknüpfungen Addition und Multiplikation. Mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

und den neutralen Elementen der Addition:  $(0,0)$  und Multiplikation:  $(1,0)$  bildet diese Menge einen Körper. Jedes Zahlenpaar  $(x, y)$  kann als Linearkombination dargestellt werden:

$$(x, y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1).$$

Führt man folgende Schreibweisen ein:

- $(1,0) : 1$
- $(0,1) : i$  und bezeichnet  $i$  als imaginäre Einheit,

so erhält man die Darstellung  $(x, y) \equiv x + iy$ . Die so erhaltenen, reellen Zahlenpaare bezeichnet man als die **komplexen Zahlen**, welche in *algebraischer Normalform* vorliegen. Der Körper der komplexen Zahlen lautet damit  $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ .

Die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathcal{N}$  bildet mit der Addition *keinen* Körper, denn es gibt kein inverses Element bezüglich der Addition. Für das Element 5 ist beispielsweise das zu erwartende, inverse Element  $-5$  offensichtlich  $-5 \notin \mathcal{N}$ . Die Menge der ganzen Zahlen  $\mathcal{Z}$  bildet mit der Addition zwar eine abelsche Gruppe aber keinen Körper, denn es gibt kein inverses Element bezüglich der Multiplikation. Das Element  $a = 8 \in \mathcal{Z}$  hat zum Beispiel kein inverses Element  $b = 1 \cdot a^{-1}$  für welches  $b \in \mathcal{Z}$  gilt.  $\diamond$

## 2.6 Vektorräume

Ein Vektorraum ist durch eine abelsche Gruppe mit der inneren Verknüpfung Addition  $(\mathcal{V}, +)$  (Abschnitt 2.4), einen Körper  $\mathcal{K}$  (Abschnitt 2.5) mit Skalaren als Elementen, eine äußere Multiplikation, welche Elemente von  $\mathcal{K}$  mit denen von  $\mathcal{V}$  verknüpft und auf  $\mathcal{V}$  abbildet, und vier Verträglichkeitsgesetzen - den so genannten Vektorraumaxiomen - gegeben. Der Körper  $\mathcal{K}$  entspricht häufig den reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  oder den komplexen Zahlen  $\mathcal{C}$ .



**Definition 6** ( $\mathcal{K}$ -Vektorraum). *Es sei  $\mathcal{K}$  ein Körper,  $(\mathcal{V}, +)$  eine abelsche Gruppe und*

$$\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad (\lambda, \vec{x}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{x} \quad (2.17)$$

*eine Abbildung. Ferner seien die Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V}$  und die Skalare  $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$  gegeben. Man nennt  $\mathcal{V}$  einen Vektorraum über dem Körper  $\mathcal{K}$  oder kurz einen  $\mathcal{K}$ -Vektorraum genau dann, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

*Assoziativität der Multiplikation mit Skalaren*

$$(\lambda\mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) \quad (2.18)$$

*Distributivität*

$$\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y} \quad (2.19)$$

*und*

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x} \quad (2.20)$$

*Für die Multiplikation gibt es ein neutrales 1-Element*

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad (2.21)$$

Die Vektorraumaxiome nach Gleichung (2.18) - Gleichung (2.21) beschreiben eine Verträglichkeit der zwei Verknüpfungen Addition und Multiplikation des  $\mathcal{K}$ -Vektorraums.

Die Elemente eines Vektorraumes werden als **Vektoren** bezeichnet. Vektoren werden allein durch ihre Eigenschaften definiert. Typische Beispiele für Vektoren sind Elemente der Vektorräume  $\mathcal{R}^2$  und  $\mathcal{R}^3$ , aber auch Funktionen können Vektoren sein. Ein Vektor ist also nicht zwangsläufig ein Pfeil mit Länge und Richtung.

Das neutrale Element der Addition der abelschen Gruppe  $\mathcal{V}$  wird als Nullvektor bezeichnet und mit  $\vec{0}$  gekennzeichnet. Ist aus dem Kontext erkennbar, dass es sich um einen Nullvektor handelt, so wird die besondere Notation als Vektor häufig weggelassen und man schreibt 0 für den Nullvektor.

*Bemerkung 2.8* (unendliche Vektorräume). Für jeden Körper  $\mathcal{K}$  und jede natürli-

che Zahl  $n$  ist die Menge

$$\mathcal{V} = \mathcal{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid v_1, \dots, v_n \in \mathcal{K} \right\}$$

mit komponentenweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren aus  $\mathcal{K}$  ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum. Insbesondere werden somit für den Körper der reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  der reelle Vektorraum  $\mathcal{R}^n$  und für den Körper der komplexen Zahlen  $\mathcal{C}$  der komplexe Vektorraum  $\mathcal{C}^n$  definiert.  $\blacklozenge$

**Definition 7** (Untervektorraum). Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum. Eine Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  heißt ein  $\mathcal{K}$ -Untervektorraum oder **linearer Unterraum von  $\mathcal{V}$** , wenn gilt:

$$\mathcal{U} \neq \emptyset \tag{2.22}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{U} \implies \vec{a} + \vec{b} \in \mathcal{U} \tag{2.23}$$

$$\alpha \in \mathcal{K}, \vec{a} \in \mathcal{U} \implies \alpha \vec{a} \in \mathcal{U} \tag{2.24}$$

*Bemerkung 2.9* (Untervektorraum). Ein Untervektorraum enthält in jedem Fall den Nullvektor. Außerdem ist ein Untervektorraum bezüglich der Addition und der Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen. Ein Untervektorraum von einem Vektorraum ist stets selbst ein Vektorraum.  $\blacklozenge$

**Definition 8** (Linearkombination). Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum. Ein beliebiger Vektor  $\vec{v} \in \mathcal{V}$  heißt **Linearkombination** einer Anzahl von Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$ , falls Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathcal{K}$  derart existieren, dass

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i$$

erfüllt ist. Der Vektor  $\vec{v}$  lässt sich dann aus den Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  mit den Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  linear kombinieren. Eine äquivalente Aussage wäre, dass der Vektor  $\vec{v}$  von den Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  linear abhängig ist.

**Definition 9** (Spann, Lineare Hülle). Sei  $\mathcal{V}$  ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum. Die Menge aller möglichen Linearkombinationen einer gegebenen Menge von Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$  wird als **Spann** oder die **lineare Hülle** dieser Vektoren bezeichnet:

$$\text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \} = \left\{ v = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i \mid \lambda_i \in \mathcal{K} \right\} \tag{2.25}$$

**Definition 10** (Erzeugendensystem). Eine Anzahl von Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$  eines  $\mathcal{K}$ -Vektorraumes  $\mathcal{V}$  heißt **Erzeugendensystem** von  $\mathcal{V}$ , wenn gilt:

$$\text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \} = \mathcal{V} \quad (2.26)$$

Es lässt sich also jeder Vektor des  $\mathcal{K}$ -Vektorraumes  $\mathcal{V}$  durch Linearkombination eines zugehörigen Erzeugendensystems darstellen. Ist die Mächtigkeit des Erzeugendensystems endlich, so ist  $\mathcal{V}$  endlich erzeugt.

Jedes Erzeugendensystem eines endlichen Vektorraumes  $\mathcal{V}$  enthält eine **Basis**.

*Bemerkung 2.10* (Erzeugendensystem für  $\mathcal{R}^n$ ). Jeder Vektorraum  $\mathcal{V}$ , der über dem Körper der reellen Zahlen  $\mathcal{R}$  definiert wird, besitzt ein Erzeugendensystem. Im  $\mathcal{R}$ -Vektorraum  $\mathcal{R}^n$  bilden die Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  ein Erzeugendensystem. Ein Einheitsvektor  $\vec{e}_i$  hat in der i-ten Zeile eine eins als Eintrag. Alle weiteren Einträge dieses Einheitsvektors sind null.

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Zeile}$$

Ein solches Erzeugendensystem wird als *kanonische Basis* bezeichnet. ◆

**Definition 11** (Lineare Unabhängigkeit). Eine Menge von Vektoren  $\{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$  eines  $\mathcal{K}$ -Vektorraums  $\mathcal{V}$  heißt **linear unabhängig**, wenn sich keiner der Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  als Linearkombination der Übrigen darstellen lässt. Die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad (2.27)$$

mit den Koeffizienten  $\lambda_i \in \mathcal{K}$  besitzt also nur die triviale Lösung  $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$ .

Es gilt also

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0 \quad \forall i.$$

Eine nicht linear unabhängige Menge heißt **linear abhängig**. Bei einer linear abhängigen Menge gibt es nicht triviale Lösungen der Gleichung (2.27) und damit

nicht triviale Darstellungen des Nullvektors. Es existieren also  $\lambda$  mit  $\lambda \neq 0$ , so dass gilt  $\vec{v}_i = \lambda \vec{v}_j$ . Die Vektoren  $\vec{v}_i, \vec{v}_j$  sind dann Vielfache voneinander beziehungsweise parallel zueinander.

**Bemerkung 2.11** (Lineare Abhängigkeit). Eine linear unabhängige Menge ist unverkürzbar. Werden Vektoren aus dieser Menge entfernt, so spannt die Menge weniger Raum auf.

Bei einer linear abhängigen Menge liegt wenigstens einer der Vektoren in der linearen Hülle der Anderen. Er kann daher weggelassen werden, ohne die Hülle zu verkleinern.  $\blacklozenge$

**Definition 12** (Basis). Gegeben sei ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{V}$ . Ein System von Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  von  $\mathcal{V}$  wird als **Basis** von  $\mathcal{V}$  bezeichnet, wenn gilt:

1. Die Vektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  bilden ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{V}$ , es gilt also  $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \mathcal{V}$ .
2. Das System  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  ist linear unabhängig. Die Basis ist daher unverkürzbar.

Die Anzahl der Elemente einer Basis eines Vektorraumes  $\mathcal{V}$  wird als **Dimension** des Vektorraumes bezeichnet:  $\dim \mathcal{V}$ .

### 2.6.1 Matrizen

Es seien  $m$  und  $n$  natürliche Zahlen. Eine  $m \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  über dem Körper  $\mathcal{K}$  ist eine Abbildung

$$\mathbf{A} : \begin{cases} \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathcal{K}, \\ (i, j) \longmapsto a_{ij}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet  $i$  den Zeilenindex und  $j$  den Spaltenindex. Die Körperelemente  $a_{ij} \in \mathcal{K}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  nennt man **Komponenten** oder die **Einträge** der Matrix  $\mathbf{A}$ . Eine Matrix  $\mathbf{A}$  kann übersichtlich durch  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten dargestellt werden:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, bei der alle Komponenten gleich 0 sind, nennt man **Nullmatrix**:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, bei der gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

nennt man **Einheitsmatrix**:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{K}^{m \times n}$  ist ein  $\mathcal{K}$ -Vektorraum.

Die Menge  $\mathcal{K}^{m \times n}$  aller  $m \times n$  Matrizen bildet über  $\mathcal{K}$  mit komponentenweiser Addition:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

und der Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda$ :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

einen  $\mathcal{K}$ -Vektorraum.

**Definition 13** (Matrixprodukt). *Es seien eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}^{m \times n}$  und  $\mathbf{B}$  eine Matrix mit Spaltenvektoren  $\mathbf{B} = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_r) \in \mathcal{K}^{n \times r}$ . Dann ist*

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{A}\vec{s}_1, \dots, \mathbf{A}\vec{s}_r) \in \mathcal{K}^{m \times r} \quad (2.28)$$

das **Matrixprodukt** oder kurz das Produkt von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ .

**Definition 14** (Inverse einer Matrix). *Es seien zwei Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}^{n \times n}$  gegeben. Gilt*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I},$$

so bezeichnet man  $\mathbf{B}$  als die inverse Matrix zu  $\mathbf{A}$  und notiert  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ . Existiert die Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ , so nennt man  $\mathbf{A}$  **regulär** oder auch **nicht singulär** und es gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

wobei  $\mathbf{I}$  die  $n \times n$  Einheitsmatrix bezeichnet.

**Definition 15** (Transponierte einer Matrix). Sei eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}^{m \times n}$  gegeben mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

dann bezeichnet man die durch Vertauschung der Spalten und Zeilen von  $\mathbf{A}$  erhaltene Matrix als Transponierte zu  $\mathbf{A}$ . Es gilt dann

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 2.12** (Ableitung von Matrizen). Sei  $\mathbf{A} \in \mathcal{K}^{m \times n}$  eine Matrix mit Komponenten  $(a_{ij})$ , welche differenzierbare Funktionen der reellen Variablen  $t$  seien. Dann heißt die Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right) \quad (2.29)$$

Ableitung von  $\mathbf{A}$  nach  $t$ . Die Matrix wird also differenziert, indem jede Komponente einzeln differenziert wird.

Sei weiter eine Matrix  $\mathbf{B} \in \mathcal{K}^{n \times r}$  gegeben, deren Komponenten  $(b_{ij})$  ebenfalls differenzierbare Funktionen der reellen Variablen  $t$  seien. Für die Ableitung des Matrixprodukts gilt dann die Produktregel:

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mathbf{B} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.30)$$



## 2.7 Punkte und Vektoren im Anschauungsraum

Der Anschauungsraum ist eine geometrische Idealisierung des uns umgebenden physikalischen Raums. Zur Beschreibung dieses Raums dienen Punkte  $p$ . Die Position dieser Punkte wird relativ zu einem gewählten Koordinatensystem  $I$

mit Hilfe von Koordinatentripeln beschrieben. Die Koordinatentripel können als Elemente des Vektorraumes  $\mathcal{R}^3$  aufgefasst werden:

$$p = (x, y, z)$$

Die Position von  $p$  ist damit relativ zu  $I$  eindeutig beschrieben. Der Ursprung von  $I$  wird mit dem Nullvektor  $\vec{0} \in \mathcal{R}^3$  identifiziert.

Da die Beschreibung des Punktes  $p$  als Element des Vektorraumes  $\mathcal{R}^3$  betrachtet werden soll, ist die gewählte Beschreibungsform ein Vektor. Da der Vektorraum  $\mathcal{R}^3$  die im Abschnitt 2.6 geforderten Eigenschaften haben muss, gelten bestimmte Rechenregeln für einen solchen Vektor. Diese Rechenregeln werden um weitere Verknüpfungen - das Skalarprodukt und das Kreuzprodukt - ergänzt.

Bei geometrischen Überlegungen wird zwischen Positionen, Richtungen und Abständen klar unterschieden. Diese drei Eigenschaften lassen sich mit Hilfe von Vektoren beschreiben. Die Bedeutung eines Vektors als Element eines Vektorraumes  $\mathcal{V}$  über einem Körper  $\mathcal{K}$  wird dafür jedoch abgeändert.

### 2.7.1 Vektoren des $\mathcal{R}^3$

Der Anschauungsraum soll durch Elemente des Vektorraums  $\mathcal{R}^3$  beschrieben werden. Der Vektorraum wird durch eine abelsche Gruppe aus Tripeln  $(x, y, z)$  mit  $x, y, z \in \mathcal{R}$ , einen Körper und eine Verknüpfung zwischen diesen gebildet.

Vektoren werden üblicherweise als Spalten notiert. Für die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^3$  gelten daher folgende Regeln (nach [Pap14]):

- Da die Tripel Elemente einer abelschen Gruppe mit der inneren Verknüpfung Addition sind (siehe Abschnitt 2.4), werden Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  komponentenweise addiert. Mit Hilfe des inversen Elements der Addition lässt sich die Subtraktion ebenso darstellen und beide Verknüpfungen können kompakt

notiert werden:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \pm x' \\ y \pm y' \\ z \pm z' \end{pmatrix}$$

Außerdem gelten notwendigerweise die Rechenregeln:

– Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \pm \vec{b} + \vec{a}$$

– Assoziativgesetz:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- Die Multiplikation von einem Vektor  $\vec{a} \in \mathcal{R}^3$  mit einem Skalar  $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$  entspricht der äußeren Verknüpfung der abelschen Gruppe mit dem Körper. Sie erfolgt durch Multiplikation aller Komponenten des Vektors mit dem Skalar:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix}$$

Es gelten die Rechenregeln:

– Distributivgesetz:

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

– und außerdem die Regeln:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \vec{a} &= \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \\ (\lambda \mu) \vec{a} &= \lambda (\mu \vec{a}) = \mu (\lambda \vec{a}) \\ |\lambda \vec{a}| &= |\lambda| |\vec{a}| \end{aligned}$$

Mit diesen Regeln werden die Vektorraumaxiome aus Abschnitt 2.6 erfüllt.

Für zwei verschiedene Paare von Punkten des Anschauungsraums  $(p, q), (r, s)$  kann man solche finden, dass die Differenz der Punkte für beide Paare gleich ist. Es gilt dann also

$$\vec{a} = q - p = s - r$$



mit

$$p \neq r \text{ und } q \neq s.$$

Man nennt diese Punktpaare *äquivalent*. Sie beschreiben die gleiche *Translation*. Die Translation kann man sinnvoll durch einen Pfeil kennzeichnen, welcher durch seine *Richtung* und seinen *Betrag*, beziehungsweise seine Länge eindeutig charakterisiert wird. Die Begriffe Betrag und Länge werden im Folgenden synonym verwendet. Mit beiden Begriffen ist die euklidische Norm des Vektors  $\vec{a}$  gemeint. Die folgende Darstellung wird für den Betrag eines Vektors  $\vec{a}$  verwendet:

$$|\vec{a}| \equiv a := \|\vec{a}\|_2$$

Für einen Vektor  $\vec{a}$  gilt immer:

$$|\vec{a}| \geq 0$$

Wenn bekannt ist, dass mit  $\vec{a}$  ein Vektor gemeint ist, so notiert man den Betrag des Vektors in Kurzform mit  $a$ .

Der durch Differenzbildung erhaltene Pfeil  $\vec{a}$  entspricht dem, was man im Sinne der Geometrie meist unter einem (freien) Vektor versteht. Er umfasst **alle** Pfeile, deren Anfangspunkt  $p$  und Endpunkt  $q$  der Bedingung  $\vec{a} = q - p$  genügen.

Man nennt zwei Vektoren *gleich*, wenn sie in Richtung und Betrag übereinstimmen:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |a| = |b| \wedge \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}.$$

Wählt man als Anfangspunkt für einen Vektor-Pfeil den Nullvektor, welcher dem gewählten Koordinatenursprung entspricht, so können alle Punkte des Anschauungsraumes mit Pfeilen beschrieben werden. Für die Beschreibung eines Punktes genügt daher die Angabe eines Abstandes und einer Richtung bezogen auf den Koordinatenursprung.

Punkte - die Elemente des Anschauungsraums - und Pfeile - die relative Lage von Punkten des Anschauungsraums zueinander - werden also beide durch Vektoren beschrieben. Punkte sind dabei im Anschauungsraum fest und Pfeile können verschoben werden, so lange sie ihre Richtung und Länge beibehalten. Häufig bezeichnet man beide geometrischen Gebilde einfach als Vektor, ohne deutlich zu machen, ob das gemeinte Objekt verschiebbar oder fest ist.

Beschreibt ein Vektor die Ausprägung einer physikalischen Größe, so gehört zu deren vollständiger Beschreibung zusätzlich zu Betrag und Richtung noch

die Angabe einer Maßeinheit. Ein typisches Beispiel ist der Betrag einer Kraft  $\vec{F} : |\vec{F}| = 100 \cdot N$

Die Unterscheidung der geometrischen Objekte, welche durch einen Vektor repräsentiert werden, kann durch folgende Bezeichnung erfolgen [Rie07, S. 26] oder [Wlo92, S. 68]:

- *Freie Vektoren*<sup>7</sup> können beliebig im Raum verschoben werden, so lange Richtung und Betrag konstant bleiben. Damit sind parallele Verschiebungen und Verschiebungen entlang der Wirkungsline möglich. Dieser Typ von Vektoren wird in der Regel gemeint, wenn man im Sinne der Geometrie von Vektoren spricht. Ein typisches Beispiel sind die Einheitsvektoren  $\vec{e}$ , mit denen die Koordinatenachsen eines Koordinatensystems beschrieben werden.
- *Gebundene Vektoren* beziehen sich auf einen festen Ursprung, von dem aus sie angetragen werden. Ein typisches Beispiel dafür ist der Ortsvektor  $\vec{r}$  eines Raumpunktes  $R$ , welcher von einem spezifischen Koordinatenursprung  $O$  aus angetragen wird:  $\vec{r} = P - O = \overrightarrow{OP}$ . In diesem Zusammenhang bezeichnet man den Punkt  $R$  häufig als „Punkt  $R$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$ “ und notiert wahlweise  $P \equiv \vec{r}$ .

Da die Notation von Punkten im Sinne eines Ortsvektors und die Notation von Richtungsvektoren identisch sind, kommt es leicht zu Verwechslungen. Erschwerend kommt hinzu, dass die Konzepte von Punkt und Vektorpfeil in der Literatur häufig nicht gesondert betrachtet werden. Es ist damit die Aufgabe des Lesers sich klar zu machen, ob mit  $\vec{a}$  ein Richtungsvektor oder ein Punkt gemeint ist. Verwendet man zur Darstellung homogene Koordinaten (siehe 3.2.2) so ist die Unterscheidung von Punkten und Vektoren eindeutig.

Neben der Darstellung eines Vektors als Spaltenvektor und der Darstellung durch Anfangs- und Endpunkt gibt es eine weitere Darstellung: die Komponentenschreibweise bezüglich eines Koordinatensystems  $I$  mit expliziter Angabe der Basisvektoren, auf welche der Vektor projiziert wird.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

---

<sup>7</sup> *freie Vektoren* werden auch als *Richtungsvektoren* bezeichnet

damit ergibt sich der Betrag eines Vektor zu

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \end{aligned}$$

Man bezeichnet die Skalare  $x, y, z$  als die *Komponenten*, *Koordinaten* oder auch *Einträge* des Vektors  $\vec{a}$ . Der linksseitige Index  $I$  kennzeichnet das Koordinatensystem, bezüglich dessen Basis die Vektorkomponenten angegeben werden. Dieses Koordinatensystem wird als *Bezugssystem* bezeichnet. Ist das Bezugssystem eindeutig, so wird dieser Index weggelassen.

Für die bereits eingeführten Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{R}^3$  werden zusätzlich zu den Vektorraumaxiomen die Verknüpfungen Skalarprodukt und Kreuzprodukt definiert. Beide Verknüpfungen haben interessante geometrische Bedeutungen, auf welche nach Angabe der Rechenregeln im Detail eingegangen wird. Das Skalarprodukt lässt sich im Gegensatz zum Kreuzprodukt direkt für höherdimensionale Vektorräume definieren.

- Das **Skalarprodukt**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zweier Vektoren ist das Produkt der Beträge und dem Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels  $\varphi$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = (x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3) (x' \vec{e}_1 + y' \vec{e}_2 + z' \vec{e}_3) \quad (2.31)$$

Notiert man  $\vec{a}, \vec{b}$  als einspaltige Matrizen, so kann man das Skalarprodukt auch mit Hilfe des Matrixprodukts nach Gleichung (2.28) definieren:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a}^T \vec{b}$$

Für das Skalarprodukt gelten die Rechenregeln:

- Kommutativgesetz:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

- Distributivgesetz:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

- weitere Regeln:

$$\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle$$

*Bemerkung 2.13* (Orthogonale Vektoren). Verschwindet das Skalarprodukt

zweier von Null verschiedenen Vektoren, so stehen diese senkrecht aufeinander.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

◆

*Bemerkung 2.14* (Winkel zwischen Vektoren). Der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren ergibt sich aus dem Quotienten vom Skalarprodukt der beiden Vektoren und dem Produkt der Beträge der Vektoren.

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$$

◆

*Bemerkung 2.15* (Richtungskosinus). Ein Vektor  $\vec{a}$  bildet mit den drei Koordinatenachsen seines Bezugssystems der Reihe nach die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , die als *Richtungswinkel* bezeichnet werden. Der Kosinus der jeweiligen Winkel wird als Richtungskosinus bezeichnet.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{a_x}{a} & \cos \beta &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_2|} = \frac{a_y}{a} \\ \cos \gamma &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_3|} = \frac{a_z}{a} \end{aligned}$$

Die Richtungswinkel sind jedoch nicht voneinander unabhängig, sondern über die Beziehung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

miteinander verknüpft.

◆

- Das **Vektorprodukt** (auch Kreuzprodukt)  $\vec{a} \times \vec{b}$  hat als Ergebnis einen Vektor, der senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  steht und dessen Länge gleich dem Produkt der Beträge von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und dem Sinus des durch die Vektoren eingeschlossenen Winkels  $\varphi$  ist.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vartheta)) \vec{n} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Dabei ist  $\vec{n}$  derjenige zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrechte Einheitsvektor, der diese zu einem Rechtssystem ergänzt.

Es gelten die Rechenregeln:

– Distributivgesetz:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}\end{aligned}$$

– Anti-Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

– weitere Regeln:

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$$

Da das Kreuzprodukt mit dem Vektor  $\vec{a}$  eine lineare Abbildung ist, kann  $\vec{b} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b}$  mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{\mathbf{a}} \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Ein Matrix dieser Struktur bezeichnet man als *schiefssymmetrisch*. Sie hat die Eigenschaft, dass

$$\hat{\mathbf{a}}^T = -\hat{\mathbf{a}} \quad (2.34)$$

gilt.

Mit Hilfe von Koordinatensystemen kann der Anschauungsraum geeignet beschrieben werden. Im Kapitel 2 wurde im Rahmen des Einführungsbeispiels bereits eine Darstellung für Koordinatensysteme entworfen. Für die Entwicklung eines Koordinatensystems werden die Koordinatenachsen benötigt, welche durch geeignete Geraden beschrieben werden. Die Richtung der Geraden wird durch die *Einheitsvektoren* definiert. Die Koordinatenachsen schneiden sich im *Koordinatenursprung*. Durch die Festlegung dieser Elemente kann die Position eines Punktes im Raum als Vektor beschrieben werden.

Zur Beschreibung des Anschauungsraums werden genau drei Koordinatenachsen mit drei Einheitsvektoren und einem Ursprungspunkt benötigt. Die drei Einheitsvektoren müssen so gewählt werden, dass sie einen Vektorraum entsprechend Definition 6 aufspannen, sie bilden also eine Basis nach Definition 12. Die Position eines Raumpunktes kann dann durch einen Ortsvektor beschrieben werden, welcher ein Element eben dieses Vektorraumes ist. Dieser Ortsvektor lässt sich als eine nach Definition 8 gegebene Linearkombination der Basisvektoren darstellen. Seine Darstellung ist abhängig von der konkreten Basis.

Zunächst soll ein besonderer Typ von Koordinatensystemen beschrieben werden - die Rechtssysteme. Diese sind ein grundlegendes Mittel, um die Bewegung von Körpern zu beschreiben. Da die Festlegung einer Basis für einen Vektorraum nicht eindeutig ist, kann die Darstellung von einem Koordinatensystem nicht eindeutig sein. Die Umrechnung verschiedener Varianten geschieht mit Hilfe von Transformationen. Die Transformation von einem körperfesten in ein inertiales Koordinatensystem kann durch die Überlagerung einer Translation und einer Rotation abgebildet werden. Auf die Rotation wird im Abschnitt 3.2.1 im Detail eingegangen.

Die Elemente von Rechtssystemen werden als Elemente des  $\mathcal{R}^3$  aufgefasst und üblicherweise mit Hilfe von genau drei Komponenten  $(x, y, z)^T$  notiert. Diese

Darstellung kann durch eine zusätzliche Komponente zu einem 4-Tupel erweitert werden. Die so erhaltenen *homogenen Koordinaten* werden im Abschnitt 3.2.2 eingeführt und es wird auf deren besondere Eigenschaften eingegangen. Insbesondere kann die Transformation von Koordinatensystemen, welche im Abschnitt 3.2.3 erläutert wird, unter Verwendung homogener Koordinaten kompakt durch lineare Abbildungen dargestellt werden.

Bei der Beschreibung eines Mehrkörpersystems gibt es vielfältige Ansätze um die Lage einzelner Elemente zu parametrieren. Ein möglicher Ansatz ist die Vorgabe natürlicher Koordinaten, welche im Abschnitt 3.3 beschrieben werden. Im letzten Teil des Kapitels werden wichtige Begriffe erklärt und es wird auf weitere Konzepte zur Modellbildung verwiesen.

### 3.1 Kartesische normierte Rechtssysteme

Gegeben sei ein euklidisches Koordinatensystem <sup>1</sup>  $I \in \mathcal{R}^3$  mit den Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Für die Basisvektoren gelte:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (3.1)$$

Die Basisvektoren von  $I$  stehen also paarweise senkrecht aufeinander und bilden somit ein *orthogonales* Koordinatensystem. Ein orthogonales euklidisches Koordinatensystem wird als *Kartesisches Koordinatensystem* bezeichnet. Weiterhin ist die Länge jedes Basisvektors gleich eins. Die Basis wird daher als *normiert* bezeichnet und das aufgespannte Koordinatensystem als *orthonormiertes System* bezeichnet.

Gilt außerdem

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad (3.2)$$

so bezeichnet man  $I$  als ein rechtshändiges Koordinatensystem oder auch Rechtssystem. Eine anschauliche Interpretation von Gleichung (3.2) ist, dass jeder Einheitsvektor aus seinem Vorgänger auf kürzestem Wege durch Drehung im mathematisch positiven Drehsinn hervorgeht. Der Vektor  $\vec{e}_1$  ist in diesem Sinne gleichzeitig der Nachfolger vom Einheitsvektor  $\vec{e}_3$  und der Vorgänger von  $\vec{e}_2$ ,

---

<sup>1</sup> mit dem Begriff euklidisches Koordinatensystem wird ein Koordinatenraum  $\mathcal{R}^3$  mit Skalarprodukt nach Gleichung (2.31) bezeichnet

welcher wiederum der Vorgänger von  $\vec{e}_3$  ist.

Im Folgenden wird, wenn nicht explizit anderweitig angegeben, davon ausgegangen, dass die Basisvektoren eines Koordinatensystems Gleichung (3.1) und Gleichung (3.2) erfüllen.

*Beispiel 3.1* (Kartesischen Rechtssystem). Mit Hilfe der in Bemerkung 2.10 angegebenen Bildungsvorschrift lässt sich auf einfache Weise eine Basis für ein kartesisches Rechtssystem angeben:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

◇

## 3.2 Koordinatentransformation in homogenen Koordinaten

### 3.2.1 Rotationen und deren Darstellung mittels Matrizen

Ändert ein Körper seine Orientierung im Raum, so bewegen sich alle Punkte des Körpers um eine Drehachse und man bezeichnet diese Bewegung als *Rotation*. Ist die Lage dieser Achse konstant, so bezeichnet man dies als Rotation um eine feste Achse. Verläuft die Drehachse durch einen raumfesten Punkt, so handelt es sich um eine Kreiselbewegung. In jedem Fall kann die Drehbewegung durch eine zeitlich veränderliche oder konstante Rotationsmatrix ausgedrückt werden. Zur Formulierung der Rotationsmatrix seien ein körperfestes Koordinatensystem  $K$  und ein inertiales Koordinatensystem  $I$  gegeben. Die Koordinatensysteme  $I$  und  $K$  haben weiterhin den gleichen Ursprung. Das System  $K$  ist demnach durch Drehung um eine Achse  $l$ , welche durch den Ursprung verläuft, hervorgegangen. Die Orientierung dieser Drehachse sei durch einen Vektor  $\vec{l}$  mit Einheitslänge beschrieben. Die Achsen von  $K$  relativ zu  $I$  seien gegeben durch die Einheitsvektoren  ${}_I\vec{u}, {}_I\vec{w}, {}_I\vec{v} \in \mathcal{R}^3$ . Diese drei Spaltenvektoren werden horizontal zu einer



Matrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} {}_I\vec{u} & {}_I\vec{w} & {}_I\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^I u_x & {}^I w_x & {}^I v_x \\ {}^I u_y & {}^I w_y & {}^I v_y \\ {}^I u_z & {}^I w_z & {}^I v_z \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

zusammengefasst. Die Matrix  $\mathbf{R}$  wird als Rotationsmatrix oder Drehmatrix bezeichnet. Sie gibt die relative Verdrehung von  $K$  zu  $I$  an. Die Spaltenvektoren, welche zur Matrix  $\mathbf{R}$  zusammengefasst werden, sind im Folgenden, wenn nicht explizit anderweitig angegeben, in der Basis des Inertialsystems angegeben.

Die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  kann auch durch Verwendung einer absoluten Angabe der Einheitsvektoren beider Koordinatensysteme angegeben werden. Bilden die Einheitsvektoren  ${}_I\vec{e}_1, {}_I\vec{e}_2, {}_I\vec{e}_3 \in \mathcal{R}^3$  eine Basis von  $I$  und die Vektoren  ${}_K\vec{u}, {}_K\vec{w}, {}_K\vec{v}$  die Basis für  $K$ , so können diese Spaltenvektoren geeignet als Matrizen angeordnet werden und die Rotationsmatrix, welche die Verdrehung von  $K$  relativ zu  $I$  angibt, wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} {}_K\vec{u} & {}_K\vec{w} & {}_K\vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^K u_x & {}^K w_x & {}^K v_x \\ {}^K u_y & {}^K w_y & {}^K v_y \\ {}^K u_z & {}^K w_z & {}^K v_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} {}_I\vec{e}_1 & {}_I\vec{e}_2 & {}_I\vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^I e_{1,x} & {}^I e_{2,x} & {}^I e_{3,x} \\ {}^I e_{1,y} & {}^I e_{2,y} & {}^I e_{3,y} \\ {}^I e_{1,z} & {}^I e_{2,z} & {}^I e_{3,z} \end{bmatrix}$$

$${}^K_I \mathbf{R} = \mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{B}_K \quad (3.4)$$

Handelt es sich bei der Basis von  $I$  um eine Standardbasis, wie sie im Beispiel 3.1 angegeben ist, so vereinfacht sich Gleichung (3.4) zu

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}_K. \quad (3.5)$$

### Eigenschaften von Rotationsmatrizen

Entsprechend Gleichung (3.3) seien die Vektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3$  die Spalten der Rotationsmatrix  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ . Da diese ein Koordinatensystem aufspannen sollen, haben sie die in Gleichung (3.1) und Gleichung (3.2) definierten Eigenschaften.

Aus Gleichung (3.1) folgt für die Matrix  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{w} & \vec{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (3.6)$$

was umgeformt werden kann zu

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}. \quad (3.7)$$

Mit Hilfe der Regeln der linearen Algebra [Pap14, S. 100] und Gleichung (3.1) folgt aus Gleichung (3.6)

$$\det \mathbf{R} = \langle \vec{u}, \vec{w} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1. \quad (3.8)$$

Die Menge der orthogonalen  $3 \times 3$  Matrizen mit der Determinante eins wird als  $\mathcal{SO}(3)$  bezeichnet [MLS94]. Allgemein wird definiert:

$$\mathcal{SO}(n) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{R}^{n \times n} : \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = +1 \}. \quad (3.9)$$

Die Menge  $\mathcal{SO}(3) \subset \mathcal{R}^{3 \times 3}$  bildet mit der Abbildungsvorschrift *Matrixmultiplikation* eine Gruppe entsprechend den im Abschnitt 2.4 geforderten Regeln. Sie wird als *spezielle orthogonale Gruppe* bezeichnet. Die Elemente dieser Gruppe erhalten die Rechtshändigkeit von Koordinatensystemen. Die geforderten Eigenschaften einer Gruppe werden wie folgt erfüllt:

- Die Verknüpfung ist abgeschlossen. Für  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \mathcal{SO}(3)$  gilt auch  $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \in \mathcal{SO}(3)$ , da

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 (\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^T = \mathbf{I} \quad (3.10)$$

$$\det(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = \det(\mathbf{R}_1) \det(\mathbf{R}_2) = +1 \quad (3.11)$$

gilt.

- Die Gruppe  $\mathcal{SO}(3)$  ist assoziativ

Aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation (Beweis siehe z. B. [Bos14, s. 93]) folgt

$$(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3) \quad (3.12)$$

- Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element

$$\mathbf{I}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{R} \quad \forall \mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3) \quad (3.13)$$

mit

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aus Gleichung (3.6) folgt, dass  $\mathbf{R}^T \in \mathcal{SO}(3)$  das inverse Element von  $\mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3)$  ist:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T. \quad (3.14)$$

Differenziert man Gleichung (3.6) nach der Zeit und beachtet die Zeitabhängigkeit der Rotationsmatrizen, so erhält man mit der Produktregel nach Gleichung (2.30)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{R}(t) \mathbf{R}^T(t)}{\partial t} \\ \implies 0 &= \dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{R}^T(t) + \mathbf{R}(t) \dot{\mathbf{R}}^T(t) \\ \underbrace{\dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{R}^T(t)}_{:= \boldsymbol{\Omega}} &= -\mathbf{R}(t) \dot{\mathbf{R}}^T(t) \\ \boldsymbol{\Omega} &= -\boldsymbol{\Omega}^T \end{aligned} \quad (3.15)$$

Die so definierte Matrix  $\boldsymbol{\Omega}$  erfüllt also offensichtlich Gleichung (2.34) und ist daher schiefssymmetrisch. Die Bedeutung dieser Matrix wird im Abschnitt 4.1 erläutert.

*Bemerkung 3.1* (Eigenvektor von  $\mathbf{R}$ ). Die Matrix  $\mathbf{R}$  hat die besondere Eigenschaft, dass ihr Eigenvektor mit dem Eigenwert gleich eins der Drehachse entspricht, um welche die Rotation durchgeführt wird.  $\blacklozenge$

*Bemerkung 3.2.* Die Lage eines Starrkörpers, welcher sich frei im Raum drehen kann, kann zu jedem Zeitpunkt durch eine eindeutige Rotationsmatrix  $\mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3)$  beschrieben werden. Die Menge der Rotationsmatrizen  $\mathcal{SO}(3)$  wird daher als der Konfigurationsraum des Systems bezeichnet. Eine Trajektorie des Systems wird durch die Kurve  $\mathbf{R}(t) \in \mathcal{SO}(3)$  für  $t \in [0, T]$  abgebildet. Weiterhin dient die Matrix  $\mathbf{R}$  zur Transformation von Punkten von einem körperfesten, um eine beliebige Achse gedrehten, Koordinatensystem in ein Inertialsystem. Insbesondere ist die  $3 \times 3$  Einheitsmatrix nach Gleichung (3.13) das neutrale Element der Gruppe der Rotationsmatrizen. Eine Transformation mit dieser Matrix ist damit eine Transformation ohne Drehung. Die allgemeine Transformation von Koordinatensystemen ist im Abschnitt 3.2.3 genauer dargelegt.  $\blacklozenge$

### 3.2.2 Homogene Koordinaten

Die Darstellung von Bewegungen mit Hilfe homogener Koordinaten, wie sie beispielsweise von D. W. Wloka in [Wlo92, S. 72] eingeführt werden, ermöglicht eine einheitliche kompakte Darstellung von Translationen und Rotationen eines Körpers durch Verwendung einer einzigen Transformationsmatrix. Dazu werden die Vektoren des  $\mathcal{R}^3$ , mit denen der Anschauungsraum beschrieben wird, um eine vierte Komponente erweitert. Dieser *Skalierungsfaktor* wird üblicherweise null oder eins gesetzt. Andere Skalierungsfaktoren werden bei der Arbeit mit Computergrafiken verwendet.

Transformiert man einen Richtungsvektor, wie er in Abschnitt 2.7.1 beschrieben wird, so verwendet man die null als Skalierungsfaktor. Für Punkte beziehungsweise Ortsvektoren wird die eins als Skalierungsfaktor benutzt.

Gegeben sei ein Vektor  $\vec{z}$ , welcher zwei beliebige Punkte eines Körpers verbindet. Bewegt sich der Körper derart, dass dieser Vektor seine Orientierung nicht ändert, so bezeichnet man diese Bewegung als *Translation*. Die Translation für den Vektorraum  $\mathcal{R}^3$  mit dem Vektor  $\vec{q} \in \mathcal{R}^3$  ist definiert als

$$f : \vec{r} \longrightarrow \vec{r} + \vec{q} \qquad \vec{r}, \vec{q} \in \mathcal{R}^3.$$

Diese Abbildung ist nicht linear. Es gilt

$$f(\vec{r} + \vec{y}) = \vec{r} + \vec{y} + \vec{q},$$

wodurch Gleichung (2.12) nicht erfüllt wird. Die Translation lässt sich daher nicht als Matrix darstellen. Man kann aber zeigen, dass die Translation bijektiv ist. Es existiert also eine Umkehrabbildung für die Translation. Könnte man die Translation als Matrix darstellen, so wäre die Zusammenfassung einer beliebigen Folge von Rotationen und Translationen in einer einzigen Matrix  $\mathbf{A}$  möglich. Jeder Körperpunkt, der durch einen Ortsvektor  $\vec{r}$  beschrieben werden kann, ließe sich dann nach einer beliebigen Anzahl und Reihenfolge von Verdrehungen und Verschiebungen durch eine einzige Matrix-Vektor-Multiplikation berechnen:  $\vec{r}' = \mathbf{A} \vec{r}$ . Dies wird durch die Einführung homogener Koordinaten erreicht.

Üblicherweise notiert man die Translation eines Vektors  $\vec{r} = (x, y, z)^T$  mit einem

Vektor  $\vec{q} = (a, b, c)^T$  als

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \end{bmatrix}.$$

Die Translation entspricht einer additiven Verschiebung des Vektors  $\vec{r}$ . Mit Hilfe einer erweiterten Darstellung kann die Translation als Matrix-Vektor Multiplikation dargestellt werden. Man erweitert dazu den in homogenen Koordinaten gegebenen Vektor  $\vec{r}$  um eine  $3 \times 3$  Einheitsmatrix in homogener Darstellung zu einer  $4 \times 4$  Matrix und notiert dann

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{3 \times 3} & \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \vec{r} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Erweiterung zu einer Matrix erfolgt also mit dem nach Gleichung (3.13) gegebenen neutralen Element der speziellen orthogonalen Gruppe  $\mathcal{SO}(3)$ .

Stellt man die Rotation eines Körpers mit Hilfe eines Koordinatensystems dar, welches sich mit dem Körper mit dreht, so kann die Rotationsmatrix durch die drei Basisvektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}$  dieses Koordinatensystems beschrieben werden. Die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  schreibt man dann nach Gleichung (3.3) mit

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & w_x & v_x \\ u_y & w_y & v_y \\ u_z & w_z & v_z \end{pmatrix}.$$

Da die drei Spalten dieser Matrix jeweils die Komponenten von Richtungsvektoren enthalten, werden diese bei der Transformation in homogene Koordinaten um den Skalierungsfaktor null ergänzt und man notiert

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_x & w_x & v_x \\ u_y & w_y & v_y \\ u_z & w_z & v_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ , welche die komplette Bewegung eines Körpers beinhalten soll, setzt sich aus Rotation  $\mathbf{R}$  und Translation  $\vec{q}$  zusammen. Sie

wird in homogenen Koordinaten beschrieben mit:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & w_x & v_x & a \\ u_y & w_y & v_y & b \\ u_z & w_z & v_z & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Die Inverse einer solchen Transformationsmatrix berechnet sich unter Beachtung der Orthogonalitätseigenschaft von  $\mathbf{R}$  beziehungsweise Gleichung (3.6) zu

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

In Folge dessen, dass die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  in homogenen Koordinaten invertierbar ist, wird die Transformation von Vektoren bedeutend vereinfacht.

*Bemerkung 3.3* (Gruppe der homogenen Transformationsmatrizen). Nach dem *Charles Theorem* kann jede homogene Transformation  $\mathbf{T}$  aus einer Translation und einer Rotation um dieselbe Achse zusammengesetzt werden. Diese Bewegung wird als *Schraubung* bezeichnet. Die Transformationsmatrizen bilden mit der Matrixmultiplikation die *spezielle euklidische Gruppe*  $\mathcal{SE}(3)$ :

$$\mathcal{SE}(3) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} : \mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3), \vec{q} \in \mathcal{R}^3 \right\} \quad (3.18)$$



Soll die Matrix  $\mathbf{T}$  nach der Zeit abgeleitet werden, so muss das Ergebnis dem der enthomogenisierten Form entsprechen. Dabei ist zu beachten, dass ein Geschwindigkeitsvektor offensichtlich nicht die Position eines Punktes beschreibt. Statt dessen wird durch einen Geschwindigkeitsvektor die Richtung und ein Größenmaß für die Bewegung angegeben. Daher ist der Skalierungsfaktor eines Vektors in homogener Darstellung, auf welchen der Differentialoperator angewandt wurde, gleich null. Die für die Beschreibung von Bewegungen besonders wichtige Ableitung nach der Zeit lautet damit in homogenen Koordinaten

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \vec{r}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{q}(t)}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

für einen Vektor und

$$\frac{\partial \mathbf{T}(t)}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}(t) & \frac{\partial}{\partial t} \vec{q}(t) \\ \vec{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

für eine Matrix.

Die so berechnete Matrix  $\dot{\mathbf{T}}$  ist demnach kein Element der speziellen euklidischen Gruppe, wie sie in Gleichung (3.18) definiert wurde.

### 3.2.3 Transformationen

Gegeben seien ein inertiales Koordinatensystem  $I$  und zwei, um eine beliebige Achse in Relation zu  $I$  gedrehte, Koordinatensysteme  $B, C$ , welche den gleichen Ursprung wie  $I$  besitzen. Weiterhin sei ein Punkt durch einen Ortsvektor  $\vec{r} = ({}_Bx, {}_By, {}_Bz)^T$  im Koordinatensystem  $B$  gegeben. Werden die Koordinatenachsen von  $B$  durch die Einheitsvektoren  $\vec{e}_{B1}, \vec{e}_{B2}, \vec{e}_{B3}$  im Inertialsystem  $I$  beschrieben, so kann der Punkt von  $B$  nach  $I$  durch eine Transformation überführt werden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{e}_{B1} & \vec{e}_{B2} & \vec{e}_{B3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_Bx \\ {}_By \\ {}_Bz \end{pmatrix} = {}^B_I \mathbf{R} \vec{r}$$

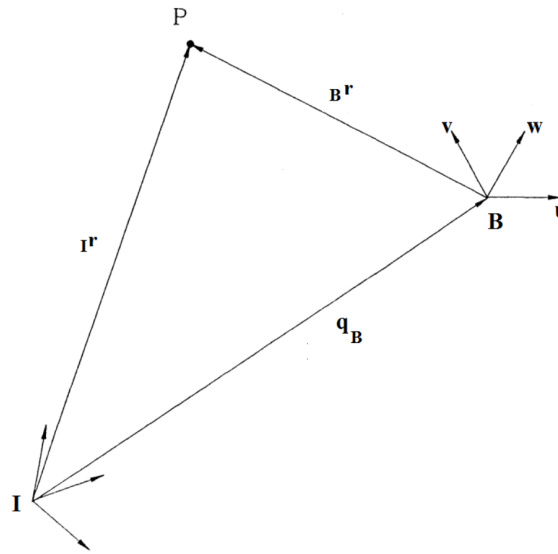
Der linksseitige tiefgestellte Index gibt das System an, in dem ein Vektor definiert wurde. Der rechtsseitige tiefgestellte Index dient der besseren Unterscheidbarkeit von definierten Größen. Im Fall einer Transformationsmatrix  ${}^B_I \mathbf{R}$  gibt der linksseitige hochgestellte Index das Ursprungssystem und der linksseitige tiefgestellte Index das Zielsystem der Transformation an.

Transformationen können aneinandergereiht werden. Beschreibt die Transformationsmatrix  ${}^C_B \mathbf{R}$  die Verdrehung von  $C$  relativ zu  $B$ , so erhält man die Transformationsmatrix von  $C$  nach  $I$  durch eine Kombination der Transformation vom System  $C$  in das System  $B$  mit der Transformation vom System  $B$  in das System  $I$ . Die Kombination erfolgt dabei durch linksseitige Matrixmultiplikation der jeweiligen Transformationsmatrizen in der angegebenen Reihenfolge.

$${}^C_I \mathbf{R} = {}^B_I \mathbf{R} {}^C_B \mathbf{R}$$

Da entsprechend Gleichung (3.11) die Menge der Rotationsmatrizen abgeschlossen ist, ist die durch Aneinanderreihung von Drehungen gewonnene Matrix  ${}^C_I \mathbf{R}$  ebenfalls eine Rotationsmatrix.

Sind die Koordinatensysteme  $B$  und  $C$  zum Inertialsystem nicht nur verdreht,



**Abbildung 3.1:** Darstellung eines Vektors in verschiedenen Koordinatensystemen

sondern auch um Vektoren  $\vec{q}_B, \vec{q}_C$  verschoben, so wird zur Transformation von Vektoren die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  nach Gleichung (3.16) benötigt. Für zwei Systeme  $I$  und  $B$  ist diese Situation in Abbildung 3.1 dargestellt. Ein im System  $B$  gegebener Vektor  ${}_B\vec{r} = ({}_Bx, {}_By, {}_Bz)^T$  kann dann mit Hilfe der Matrix  ${}_I^B\mathbf{T}$  in das Inertialsystem übertragen werden. Es gilt also

$${}_I\vec{r} = {}_I^B\mathbf{T} {}_B\vec{r}. \quad (3.21)$$

Diese Darstellung kann auf einfache Weise invertiert werden:

$${}_B\vec{r} = \underbrace{{}_I^B\mathbf{T}^{-1}}_{:= {}_B^I\mathbf{T}} {}_I\vec{r} \quad (3.22)$$

und mit Gleichung (3.17) folgt

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} {}_I^B\mathbf{R}^T & -{}_I^B\mathbf{R}^T\vec{q}_B \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \vec{r} \quad (3.23)$$

Analog zur Aneinanderreihung von Rotationen können auch allgemeine Transformationen hintereinander ausgeführt werden. So erhält man den im System  $C$  gegebenen Vektor  ${}_C\vec{r}$  im Inertialsystem mit

$$\vec{r} = \underbrace{{}_I^B\mathbf{T} {}_B^C\mathbf{T}}_{:= {}_I^C\mathbf{T}} {}_C\vec{r}. \quad (3.24)$$

*Bemerkung 3.4* (Reihenfolge von Transformationen). Die Reihenfolge, in welcher



Transformationsmatrizen miteinander multipliziert werden ist von fundamentaler Bedeutung, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Anschaulich lässt sich folgende Regel formulieren:

Soll ein Objekt  $\vec{x}$  durch eine Reihe von Transformationen  $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n$  in das System  $N$  überführt werden und beziehen sich alle Transformationen *auf das Inertialsystem*, so errechnet man die Gesamttransformation durch linksseitige Multiplikation der Transformationsmatrizen in der Reihenfolge, in welcher die Transformationen ausgeführt werden sollen. Es ergibt sich

$${}_N^I\mathbf{T} = {}_I\mathbf{T}_n {}_I\mathbf{T}_{n-1} \cdots {}_I\mathbf{T}_1 \quad (3.25)$$

und es folgt für  $\vec{x}$

$${}_N\vec{x} = {}_N^I\mathbf{T} {}_I\vec{x}. \quad (3.26)$$

Bezieht sich bei einer Reihe an Transformationen jede Transformation *auf das aktuelle System*, so werden einzelne Transformationen rechtsseitig aneinander gereiht. Es gilt

$${}_N^I\mathbf{T} = {}_1^I\mathbf{T}_2 {}_2^I\mathbf{T} \cdots {}_{N-1}^I\mathbf{T}$$

und es folgt für  $\vec{x}$

$${}_N\vec{x} = {}_N^I\mathbf{T} {}_I\vec{x}.$$



### 3.3 Natürliche Koordinaten

Der erste Schritt bei der Modellbildung für ein mechanisches System ist die Festlegung geeigneter Parameter, mit Hilfe derer die kinematischen Größen Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Systems zu jedem Zeitpunkt beschrieben werden können. Lässt sich ein System in mehrere Subsysteme einteilen, so müssen die Parameter die Kinematik dieser Subsysteme abbilden. Die Wahl der Parameter geschieht mit Hilfe der Vorgabe von Koordinaten. Ein System aus zwei Punktmassen könnte man beispielsweise durch die Koordinaten  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  beschreiben. Die Wahl der Koordinaten bietet sehr viele Freiheiten. Die Üblichsten Koordinatenarten sind *relative Koordinaten*, *Referenzpunktkoordinaten* und *absolute Koordinaten*. Eine besondere Form der absoluten

Koordinaten sind die *natürlichen Koordinaten* <sup>2</sup>.

In der deutschen Literatur wird in Grundlagenwerken zur Kinematik und Kinetik wie beispielsweise [Mat15, S. 6] mit dem Begriff „natürliche Koordinaten“ in der Regel ein körperfestes Koordinatensystem gemeint, welches als „begleitendes Dreibein“ bezeichnet wird. In Veröffentlichungen, welche die Modellierung von Mehrkörpersysteme grundlegend behandeln, werden natürliche Koordinaten wenig beachtet ([Bes12], [RS14], [SHB10], [Gat11], [SE14], [PS14], [HKSS12], [Wlo92], [Woe11], [GHSW06]). Die Definition von körperfesten Koordinatensystemen wird zwar zumeist dargestellt, die konkrete Festlegung der Einheitsvektoren des körperfesten Koordinatensystems erfolgt im Detail jedoch, wenn überhaupt, nur in Form von Rotationsmatrizen unter Zuhilfenahme von Euler-Winkeln, Kardan-Winkeln oder anderen trigonometrischen Funktionen. Die explizite Nutzung aller Elemente der Rotationsmatrix ist selten.

Im Rahmen dieser Arbeit ist unter natürlichen Koordinaten die von Javier García de Jalón und Eduardo Bayo [JB94] vorgestellte Variante der Parameterfestlegung zu verstehen. Eine Übersicht zum Konzept, der Eignung und der Weiterentwicklung der natürlichen Koordinaten ist [Jal07] zu entnehmen. Außerdem sind in [JSG07] prinzipielle Erklärungen zu dieser Methode aufgeführt.

Die Grundidee der Modellierung mit natürlichen Koordinaten besteht in der Festlegung von drei oder mehr Punkten, welche nicht auf einer Linie liegende Elemente des zu beschreibenden Körpers sind. Die Position der Punkte wird mit Hilfe absoluter kartesischer Koordinaten in Form von Vektoren abgebildet. Die vorgegeben Ortsvektoren der gewählten Punkte sind kein Satz unabhängiger Koordinaten. Statt dessen bestehen zwischen den Punkten geometrische Beziehungen wie beispielsweise konstante Winkel oder Distanzen, welche als Zwangsbedingungen zwischen den Vektoren beschrieben werden können. Die Zwangsbedingungen lassen sich durch diese Wahl von Körperpunkten in einfacher Weise durch Verknüpfung von Vektoren mit Hilfe des Skalarprodukts ausdrücken. Die so entstehenden Gleichungen sind quadratisch. Eine Variante von natürlichen Koordinaten wird in [CL02] eingeführt, um ein Mehrkörpermodell für

---

2 die englischen Bezeichnungen für natürliche Koordinaten im Sinne dieser Arbeit sind *natural coordinates* und *fully cartesian coordinates*

ein Motorrad zu erstellen. Auf diese Darstellung wird im Folgenden Eingegangen.

In einem Mehrkörpersystem wird jedem Körper  $i$  ein eigenes, körperfestes Koordinatensystem zugeordnet. Dieses wird durch einen Ursprung  $P_i$  und drei Einheitsvektoren  $\vec{u}_i = (u_{x,i}, u_{y,i}, u_{z,i})^T$ ,  $\vec{w}_i = (w_{x,i}, w_{y,i}, w_{z,i})^T$ ,  $\vec{v}_i = (v_{x,i}, v_{y,i}, v_{z,i})^T$  derart definiert, dass ein orthonormales Koordinatensystem aufgespannt wird. Die Komponenten dieser drei Einheitsvektoren werden als generalisierten Koordinaten verwendet. Der Ursprung des Systems liegt nicht notwendigerweise im Massenschwerpunkt des Körpers. Die Position des Ursprungs wird durch einen Ortsvektor  $\vec{q} = (x_i, y_i, z_i)^T$  definiert, dessen Komponenten durch drei weitere generalisierte Koordinaten beschrieben werden. Für jeden Körper werden demnach zwölf generalisierte Koordinaten eingeführt. Mit Hilfe der Basisvektoren lässt sich dann eine Rotationsmatrix

$$R_i = \begin{bmatrix} u_{x,i} & w_{x,i} & v_{x,i} \\ u_{y,i} & w_{y,i} & v_{y,i} \\ u_{z,i} & w_{z,i} & v_{z,i} \end{bmatrix}$$

definieren, welche die Orientierung des Körpers im Raum beschreibt. Da die Vektoren  $\vec{u}_i$ ,  $\vec{w}_i$  und  $\vec{v}_i$  eine orthonormale Basis bilden sollen, sind die zugeordneten generalisierten Koordinaten nicht unabhängig voneinander. Statt dessen müssen die Vektoren Gleichung (3.1) erfüllen. Es gilt also

$$\langle \vec{u}_i, \vec{w}_i \rangle = 0 \quad \langle \vec{u}_i, \vec{v}_i \rangle = 0 \quad \langle \vec{w}_i, \vec{v}_i \rangle = 0$$

und weiterhin

$$\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle - 1 = 0 \quad \langle \vec{w}_i, \vec{w}_i \rangle - 1 = 0 \quad \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle - 1 = 0.$$

Die so erzeugten Zwangsbedingungen sind offensichtlich sehr einfach.

Die Koordinatensysteme der einzelnen Körper werden zweckmäßigerweise so festgelegt, dass möglichst viele Basisvektoren parallel zueinander liegen. Parallele Richtungsvektoren können dann gemäß Abschnitt 2.7.1 gleich gesetzt werden und daher durch identische generalisierte Koordinaten abgebildet werden. Weiterhin sollten geometrische Zwangsbedingungen durch eine geschickte Ausrichtung der Koordinatensysteme zueinander möglichst simpel formuliert werden können. Im Kapitel 5 werden diese Forderungen anhand eines Beispiels ausführlich erläutert.

### 3.3.1 Eigenschaften natürlicher Koordinaten

Die von V. Cossalter und R. Lot in [CL02] eingeführte Variante der Parameterfestlegung für ein Mehrkörpersystem hat wichtige Eigenschaften für das Systemmodell zur Folge.

Zum Einen erfolgt die Beschreibung des Systems ausschließlich mit Hilfe eines Satzes redundanter kartesischer Koordinaten, welcher als generalisierte Koordinaten verwendet werden. Da diese mit direktem Bezug zum Inertialsystem definiert werden, ist die Einführung zusätzlicher Referenzsysteme nicht notwendig. Im Zusammenhang mit der Festlegung der Einheitsvektoren eines jeden körperfesten Koordinatensystems lassen sich geometrische Zwangsbedingungen daher sehr einfach formulieren. Die Jacobi-Matrix ist demzufolge eine lineare oder sogar konstante Funktion der redundanten Koordinaten. Zum Anderen wird der Einfluss von Entwurfsvariablen wie den Abmessungen eines Bauteils direkt angegeben und kann dadurch direkt beim Bauteildesign berücksichtigt werden. Außerdem sind die Rotationsmatrizen, mit denen die Orientierung von Körpern beschrieben wird, lineare Funktionen anstelle von trigonometrischen oder anderen nichtlinearen Funktionen.

## 3.4 Wichtige Begriffe und weitere Konzepte

**Minimalkoordinaten und verallgemeinerte Koordinaten**<sup>3</sup> Bei der Festlegung von Parametern zur Lagebeschreibung werden die Begriffe *Minimalkoordinaten* und *verallgemeinerte Koordinaten* häufig verwendet. Diese zwei Begriffe werden teilweise synonym verwendet, was nur in einem bestimmten Kontext sinnvoll ist.

Mit Minimalkoordinaten werden Parameter bezeichnet, welche linear unabhängig sind und deren Anzahl dem Freiheitsgrad des Systems entsprechen. Lässt sich ein Mehrkörpersystem als offene Kette beziehungsweise in Baumstruktur modellieren, so lässt sich die Lage aller Elemente direkt mit den Minimalkoordinaten beschreiben. [Bes12, S.27 f.] Besitzt ein System kinematische Schleifen, so werden zu den Minimalkoordinaten weitere redundante Koordinaten benötigt,

---

3 In diesem Abschnitt wird anstelle des Begriffs *generalisierte Koordinaten* der Begriff *verallgemeinerte Koordinaten* verwendet. Beide Begriffe sind synonym und werden nicht immer klar zu den Minimalkoordinaten abgegrenzt.

um die Lage aller Teilkörper beschreiben zu können. [SHB10, S.63] Sowohl für Systeme mit, als auch ohne geschlossene kinematische Schleifen wird der Begriff verallgemeinerte Koordinaten verwendet. Es wird aber nicht unbedingt deutlich, ob mit verallgemeinerten Koordinaten lediglich die Minimalkoordinaten, oder aber der um redundante Koordinaten erweiterte Parametersatz gemeint ist. [Woe11, S.133] Da in dieser Arbeit mit dem Modellierungsansatz der natürlichen Koordinaten gearbeitet wird und dieser redundante Parameter zur Folge hat (siehe Abschnitt 3.3), wird mit verallgemeinerten Koordinaten kein minimaler Satz an Koordinaten gemeint. Statt dessen werden Minimalkoordinaten immer explizit als solche bezeichnet.

**Kinematische Ketten und weitere Konzepte zur Festlegung von Systemparametern** Die Begriffe der offenen und geschlossenen kinematischen Kette werden von D. Schramm et al. in [SHB10, S. 52 ff.] erläutert.

Als alternativen Ansatz zur Modellparametrierung mit natürlichen Koordinaten werden häufig Relativkoordinaten verwendet. W. Schiehlen et al. geben in [SE14] eine Einführung in diesen Ansatz. Verwendet man kinematische Ketten zur Modellbeschreibung, so können die von R. L. Huston in [Hus86] eingeführten Topologie-Matrizen bei der Arbeit mit Relativkoordinaten nützlich sein. Eine weitere Alternative zur Festlegung der Koordinaten ist das Verfahren nach Denavit und Hartenberg, welches von D. W. Wloka in [Wlo92, S. 111 ff.] ausführlich beschrieben wird.

## 4.1 Starrkörperbewegung

Die Bewegung eines Punktes  $p$  im euklidischen Raum wird durch die Angabe seiner Position in Bezug zu einem inertialen normierten Rechtssystem  $I$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig beschrieben. Die Position des Punktes  $\vec{p}$  sei durch den Vektor  $(x, y, z)^T \in \mathcal{R}^3$  gegeben. Die Trajektorie von  $\vec{p}$  kann dann durch die parametrisierte Bahn  $\vec{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{R}^3$  beschrieben werden. Da nicht die Bewegung von einzelnen Punkten, sondern die Bewegung eines Starrkörpers beschrieben werden soll, soll zunächst der Begriff Starrkörper definiert werden.

**Definition 16** (Starrkörper). *Ein Starrkörper ist dadurch gekennzeichnet, dass die Distanz zweier beliebiger Punkte  $\vec{p}, \vec{q}$ , welche auf dem Körper liegen, unabhängig von der Bewegung des Körpers, immer konstant bleibt. Die anfängliche Position des Punktes  $\vec{p}$  sei beschrieben durch  $\vec{p}(0)$ . Die Position nach einer beliebigen Zeit  $t$  (und einer beliebigen Bewegung) sei beschrieben durch  $\vec{p}(t)$ . Die Nomenklatur gelte für den Punkt  $\vec{q}$  analog. Für einen Starrkörper wird gefordert:*

$$\|\vec{p}(t) - \vec{q}(t)\| = \|\vec{p}(0) - \vec{q}(0)\| = \text{konstant}$$

Eine Starrkörperbewegung kann prinzipiell aus Rotation, Translation oder einer Überlagerung dieser Bewegungen bestehen. Wird ein Körper durch eine Teilmenge  $\mathcal{O} \in \mathcal{R}^3$  beschrieben, so kann seine Bewegung als eine kontinuierliche Zuordnung  $g(t) : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{R}^3$  beschrieben werden. Die kontinuierliche Zuordnungsvorschrift  $g(t)$  beschreibt, wie sich die einzelnen Punkte des Körpers relativ zu einem inertialen, festen Koordinatensystem mit Voranschreiten der Zeit  $t$  bewegen. Die Zuordnungsvorschrift  $g$  darf dabei die Distanz zwischen Punkten des Körpers und die Orientierung von Vektoren, welche Punkte des Körpers verbinden, nicht

verändern. Damit ergibt sich die Definition einer Abbildung von Starrkörpern:

**Definition 17** (Abbildung eines Starrkörpers). [MLS94] Eine Zuordnungsvorschrift  $g : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$  ist die Abbildung eines Starrkörpers genau dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Distanzen bleiben unverändert:  $\|g(\vec{p}) - g(\vec{q})\| = \|\vec{p} - \vec{q}\|$  für alle Punkte  $\vec{p}, \vec{q} \in \mathcal{R}^3$
2. Das Kreuzprodukt bleibt erhalten:  $g(\vec{v} \times \vec{w}) = g(\vec{v}) \times g(\vec{w})$  für alle Vektoren  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{R}^3$ .

*Bemerkung 4.1.* Man kann mit Hilfe der Polarisationsformel zeigen, dass das Skalarprodukt durch die Abbildungsvorschrift  $g$  für einen Starrkörper erhalten bleibt [MLS94]:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle g(\vec{v}), g(\vec{w}) \rangle.$$

Ein orthonormales Rechtssystem wird durch die Abbildungsvorschrift  $g$  demnach wieder in ein orthonormales Rechtssystem transformiert.  $\blacklozenge$

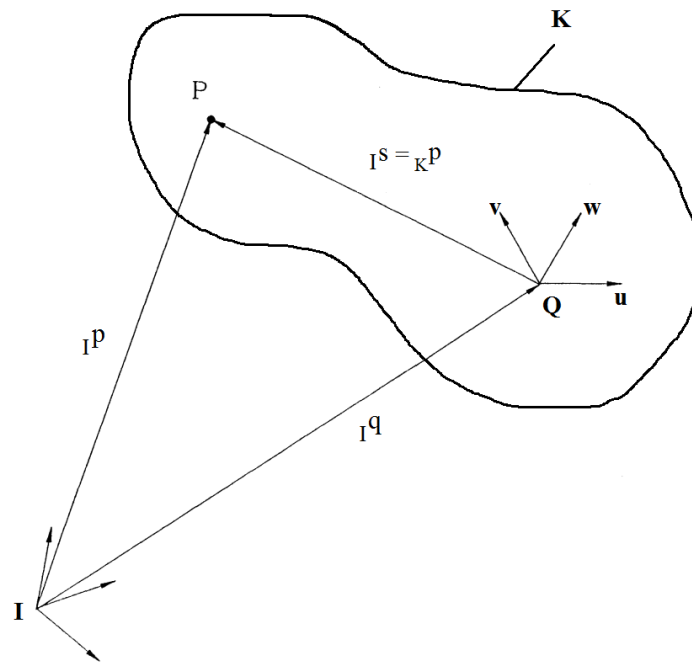
Der Astronom und Mathematiker Giulio Mozzi zeigte bereits 1763, dass eine räumliche Bewegung in eine Drehung und eine Verschiebung entlang der Drehachse zerlegt werden kann. Da sich die Teilchen eines Starrkörpers nicht relativ zueinander bewegen können, kann die Bewegung eines Starrkörpers durch die relative Bewegung eines körperfesten Koordinatensystems  $K$  zu einem Inertialsystem  $I$  beschrieben werden. Das Koordinatensystem  $K$  erfülle dabei die in Abschnitt 3.1 genannten Eigenschaften. Das körperfeste Koordinatensystem habe seinen Ursprung in einem beliebigen Punkt  $Q$  des Körpers. Die Orientierung von  $K$  beschreibt die Rotation des Körpers und die Lage des Ursprungs von  $K$  relativ zum Inertialsystem beschreibt den translatorischen Anteil der Starrkörperbewegung. Der Körper ist in Abbildung 4.1 abgebildet. Hat  $K$  die Einheitsvektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}$ , dann kann die Bewegung von  $K$  durch die Abbildung  $g$  beschrieben werden. Genauer gesagt liefert  $g(\vec{u}), g(\vec{w}), g(\vec{v})$  die Orientierung von  $K$  und  $g(\vec{p})$  die Lage des Ursprungs nach einer Starrkörperbewegung.

Beschreibt man die Orientierung eines Starrkörpers mit Hilfe eines Ortsvektors  $\vec{I}\vec{q}$ , welcher auf den Ursprung  $Q$  des körperfesten Koordinatensystems zeigt, einem Ortsvektor  $\vec{I}\vec{p}$ , welcher auf einen beliebigen Punkt  $P$  des Körpers mit  $\vec{I}\vec{q} \neq \vec{I}\vec{p}$  zeigt und dem Richtungsvektor  $\vec{I}\vec{s}$ , welcher die Punkte  $Q$  und  $P$  verbin-

det, dann erhält man mit folgender Rechnung eine Formel zur Beschreibung der Bewegung in homogenen Koordinaten.

Die Vektoren  $\vec{s}_I^H$  und  $\vec{p}_K^H$  beschreiben offensichtlich den gleichen körperfesten Punkt  $P$ . Im ersten Fall in Relation zum Inertialsystem und im zweiten Fall relativ zum körperfesten System. Es gilt

$$\vec{s}_I^H = \vec{p}_K^H.$$



**Abbildung 4.1:** Starrkörper mit körperfestem Koordinatensystem

*Bemerkung 4.2* (Addition von Vektoren mit verschiedenen Basen). Die Vektoren  $\vec{s}_I^H$ ,  $\vec{p}_K^H$  beschreiben grafisch den gleichen Vektor. Die Vektoren sind bezüglich unterschiedlicher Basen definiert. Die jeweilige Basis sind die Einheitsvektoren vom Koordinatensystem  $I$  beziehungsweise  $K$ . Die numerischen Komponenten dieser Vektoren sind also verschieden. Eine Addition von Vektoren mit unterschiedlichen Basen ist nicht möglich. Statt dessen muss einer der Vektoren vor der Addition in die Basis des anderen Vektors transformiert werden. Die Rechnung

$$\vec{p}_I = \vec{q}_I + \vec{s}_I$$



ist legitim, die Rechnung

$$\vec{p}_I = \vec{q}_I + \vec{p}_K$$

hingegen nicht. ◆

Es gilt nach Gleichung (3.21) für die Transformation des Punktes  $P$  von körperfesten Koordinaten in das Inertialsystem

$$\begin{aligned} \vec{p}_I^H &= {}^K_I \mathbf{T} \vec{p}_K^H \\ \begin{bmatrix} \vec{p}_I \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^K_I \mathbf{R} & \vec{q}_I \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_K \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Zur besseren Unterscheidbarkeit soll die Zeitabhängigkeit jetzt explizit angegeben werden. Nach der Starrkörperbedingung ist  $\vec{p}_K^H$  konstant, die Elemente der Transformationsmatrix  ${}^K_I \mathbf{T}$  sind hingegen nicht zwangsläufig unabhängig von der Zeit. Differenziert man Gleichung (4.1) nach der Zeit, so folgt daher

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{p}_I^H(t) \right) = \frac{d}{dt} \left( {}^K_I \mathbf{T}(t) \vec{p}_K^H \right)$$

mit der Produktregel folgt dann

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{p}_I^H(t) \right) = \frac{d}{dt} \left( {}^K_I \mathbf{T}(t) \right) \vec{p}_K^H + {}^K_I \mathbf{T}(t) \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \vec{p}_K^H \right)}_{=0}$$

und mit Gleichung (3.20)

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{p}}_I(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^K_I \dot{\mathbf{R}}(t) & \dot{\vec{q}}_I(t) \\ \vec{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_K \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der so erhaltene Geschwindigkeitsterm hat den Nachteil, dass sich die Gleichungselemente auf verschiedene Bezugssysteme beziehen. Daher transformiert man den Vektor des Punktes  $P$  wieder in das Inertialsystem und erhält damit die kompakte Form der Bewegungsgleichung in homogenen Koordinaten

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\vec{p}}_I(t) \\ 0 \end{bmatrix} &= {}^K_I \dot{\mathbf{T}} {}^K_I \mathbf{T}^{-1}(t) \begin{bmatrix} \vec{p}_I(t) \\ 1 \end{bmatrix} \\ \dot{\vec{p}}_I^H(t) &= {}^K_I \dot{\mathbf{T}} {}^K_I \mathbf{T}^{-1}(t) \vec{p}_I^H(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Notiert man Gleichung (4.2) ausführlich, so kann man eine Matrix  $\boldsymbol{\Omega}$  nach Abschnitt 3.2.1 einführen, welche die Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors enthält. Es folgt unter Verwendung von Gleichung (3.17) für Gleichung

(4.2)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{I\dot{p}}(t) \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^K_I\dot{\mathbf{R}}(t) & \vec{I\dot{q}}(t) \\ \vec{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^K_I\mathbf{R}^T(t) & -{}^K_I\mathbf{R}^T(t) \vec{I\dot{q}}(t) \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I\dot{p}}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{I\dot{p}}(t) \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^K_I\dot{\mathbf{R}}(t) & {}^K_I\mathbf{R}^T(t) & -{}^K_I\dot{\mathbf{R}}(t) {}^K_I\mathbf{R}^T(t) \vec{I\dot{q}}(t) + \vec{I\dot{q}}(t) \\ \vec{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I\dot{p}}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$${}_I\boldsymbol{\Omega}(t) = {}^K_I\dot{\mathbf{R}}(t) {}^K_I\mathbf{R}^T(t) \quad (4.3)$$

in obigen Ausdruck ein, so erhält man die ausführliche Darstellung der Bewegungsgleichung in homogenen Koordinaten zu

$$\begin{bmatrix} \vec{I\dot{p}}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_I\boldsymbol{\Omega}(t) & -{}_I\boldsymbol{\Omega}(t) \vec{I\dot{q}}(t) + \vec{I\dot{q}}(t) \\ \vec{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I\dot{p}}(t) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Führt man noch eine Enthomogenisierung von Gleichung (4.4) durch, so folgt ein Ausdruck für die Geschwindigkeit des Körperpunktes  $P$  in kartesischen Koordinaten.

$$\begin{aligned} \vec{I\dot{p}}(t) &= {}_I\boldsymbol{\Omega}(t) \underbrace{(\vec{I\dot{p}}(t) - \vec{I\dot{q}}(t))}_{= \vec{I\dot{s}}(t)} + \vec{I\dot{q}}(t) \\ \vec{I\dot{p}}(t) &= \vec{I\dot{q}}(t) + {}_I\boldsymbol{\Omega}(t) \vec{I\dot{s}}(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Gleichung (4.5) kann ohne den Umweg über homogene Koordinaten direkt hergeleitet werden. Dazu geht man erneut von einem Starrkörper mit den festen Punkten  $Q, P$ , den zugehörigen Ortsvektoren  $\vec{I\dot{q}}, \vec{I\dot{p}}$  und dem Verbindungsvektor  $\vec{I\dot{s}}$  der zwei Körperpunkte aus. Als Ausgangsgleichung dient die Summengleichung dieser drei Vektoren.

$$\vec{I\dot{p}}(t) = \vec{I\dot{q}}(t) + \vec{I\dot{s}}(t)$$

Die Differentiation nach der Zeit liefert

$$\frac{d}{dt}(\vec{I\dot{p}}(t)) = \frac{d}{dt}(\vec{I\dot{q}}(t)) + \frac{d}{dt}(\vec{I\dot{s}}(t))$$

woraus unter Beachtung der Starrkörperbedingung

$$\begin{aligned} \|\vec{I\dot{p}}(t) - \vec{I\dot{q}}(t)\| &\equiv \|\vec{I\dot{s}}(t)\| = \textit{konstant} \\ \implies \langle \vec{I\dot{s}}(t), \vec{I\dot{s}}(t) \rangle &= \textit{konstant} \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{d}{dt} (\langle \vec{s}_I(t), \vec{s}_I(t) \rangle) = 0.$$

Die Anwendung der Produktregel liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\langle \vec{s}_I(t), \vec{s}_I(t) \rangle) &= 0 \\ \langle \dot{\vec{s}}_I(t), \vec{s}_I(t) \rangle + \langle \vec{s}_I(t), \dot{\vec{s}}_I(t) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

was sich durch die Kommutativität des Skalarprodukts zusammenfassen lässt zu

$$2 \langle \dot{\vec{s}}_I(t), \vec{s}_I(t) \rangle = 0.$$

Nach der in Kapitel 2 aufgeführten Bemerkung 2.13 impliziert diese Gleichung, dass

$$\dot{\vec{s}}_I(t) \perp \vec{s}_I(t)$$

gilt. Da der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\vec{s}}_I(t)$  senkrecht auf  $\vec{s}_I(t)$  stehen soll ist es sinnvoll einen Vektor  $\vec{\omega}_I(t) = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  wie folgt einzuführen:

$$\dot{\vec{s}}_I(t) = \vec{\omega}_I(t) \times \vec{s}_I(t)$$

Damit berechnet sich die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes des Körpers zu:

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_I(t)) = \dot{\vec{p}}_I(t) = \dot{\vec{q}}_I(t) + \vec{\omega}_I(t) \times \vec{s}_I(t) \quad (4.6)$$

Ersetzt man den Term  $\vec{\omega}_I(t) \times$  durch eine Multiplikation mit einer schiefssymmetrischen Matrix  ${}_I\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$  nach Gleichung (2.32), so erhält man

den Ausdruck

$$\dot{\vec{p}}_I(t) = \dot{\vec{q}}_I(t) + {}_I\boldsymbol{\Omega} \vec{s}_I(t), \quad (4.7)$$

was Gleichung (4.5) entspricht. Diese Variante der Herleitung für die Bewegungsgleichung eines Starrkörpers ist also äquivalent zu der Herleitung mit Hilfe homogener Transformationsmatrizen.

## 4.2 Lagrange Gleichung 2. Art

Der Ansatz nach Lagrange ist eine Möglichkeit, um die Bewegung von Systemen mit Zwangsbedingungen zu beschreiben. Ein frühes Werk zur Arbeit mit diesem Ansatz wurde von N. W. Akimoff [Aki17] verfasst. Eine Übersicht über weitere Formalismen zur Beschreibung von Mehrkörpersystemen ist im Werk von W. Schiehlen und P. Eberhard [SE14, S. 131 ff.] zu finden. Im Buch von Pfeiffer [PS14, S.56 ff.] wird die Eignung verschiedener Verfahren bewertet. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur der Ansatz von Lagrange behandelt. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Darstellung der bekannten Gleichungen in den generalisierten Koordinaten, welche man bei Parametrierung eines Mehrkörpersystems mit natürlichen Koordinaten erhält. Das Ziel ist eine ausführliche Herleitung der Ansatzgleichungen, wie sie in der Arbeit von V. Cossalter und R. Lot in [CL02] verwendet werden.

Gegeben sei ein System, welches durch  $n$  generalisierten Koordinaten  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ , welche nicht notwendigerweise voneinander unabhängig sein müssen, und  $m$  holonomen<sup>1</sup> Zwangsbedingungen  $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)^T = \vec{0}$  charakterisiert wird. Die kinetische Energie  $T$  und potentielle Energie  $V$  sei durch  $L = T - V$  verknüpft. Das gesamte System lässt sich nach [JB94, S. 124] dann mit der *Gleichung von Lagrange 2. Art* beschreiben, welche in Gleichung (4.8) angegeben ist.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \underbrace{\delta \vec{q}^T}_{h(t)} \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} + \boldsymbol{\Phi}_{\vec{q}}^T \vec{\lambda} - \vec{Q}_{ex} \right)}_{g(t)} \right] dt = \vec{0}, \quad (4.8)$$

wobei die Matrix  $\boldsymbol{\Phi}_{\vec{q}}$  die Jacobi-Matrix der Zwangsbedingungen bezüglich der generalisierten Koordinaten ist und  $\vec{\lambda}$  hat die Lagrange-Multiplikatoren als Komponenten. Es gelten die Dimensionen

$$\delta \vec{q} \in \mathcal{R}^n \quad L \in \mathcal{R} \quad \vec{q} \in \mathcal{R}^n \quad \boldsymbol{\Phi}_{\vec{q}} \in \mathcal{R}^{m \times n} \quad \vec{\lambda} \in \mathcal{R}^m \quad \vec{Q}_{ex} \in \mathcal{R}^n$$

Mit Hilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung [Red02, S. 107 f.] lässt sich Gleichung (4.8) umformen. Das Fundamentallemma der Variationsrechnung

<sup>1</sup> Holonome Zwangsbedingungen sind solche, die von der Position aber nicht von der Geschwindigkeit eines Körpers abhängen.

kann wie folgt formuliert werden:

Eine integrierbare Funktion  $g(t)$  entspricht der Nullfunktion auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ , wenn die Aussage

$$\int_a^b g(t) \cdot h(t) dt = 0$$

für beliebige stetige Funktionen  $h(t)$  in diesem Intervall erfüllt ist.

Für beliebige Variationen des Ortes  $h(t) = \delta \vec{q}(t)^T$  soll Gleichung (4.8) erfüllt sein und damit ist  $g(t)$  gleich der Nullfunktion. Die  $m$  Langrange-Multiplikatoren  $\lambda$  sind daher so zu wählen, dass

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \vec{\lambda} - \vec{Q}_{ex} = \vec{0} \quad (4.9)$$

gilt. Beachtet man nun, dass die Potentialkräfte  $V$  wie in [Hum02, S. 190] angegeben wird, nicht von den Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{q}}$  abhängen, so kann man Gleichung (4.9) derart umformen, dass die generalisierten Kräfte  $\vec{Q}$ , welche sich aus der virtuellen Arbeit ergeben, explizit auftreten.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial \vec{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \vec{\lambda} - \vec{Q}_{ex} &= \vec{0} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial V}{\partial \vec{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \vec{\lambda} - \vec{Q}_{ex} &= \vec{0} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \vec{\lambda} - \vec{Q} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Diese Gleichung der Dimension  $n$  bildet gemeinsam mit den  $m$  Zwangsbedingungen  $\vec{\phi} = \vec{0}$  ein System von  $(n + m)$  Differential-algebraische Gleichungen (DAEs).

Lassen sich die Zwangsbedingungen derart umformen, dass die generalisierten Koordinaten  $\vec{q}$  auf einen Satz von Minimalkoordinaten  $\vec{q}_{min} \in R^{n-m}$  umformbar sind und können außerdem alle generalisierten Kräfte durch Ableitung der potentiellen Energie  $V$  beschrieben werden, so vereinfacht sich Gleichung (4.9) zu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_{min}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}_{min}} = 0 \quad (4.11)$$

Die Umformung auf Minimalkoordinaten führt aber zu sehr komplexen Darstellungen der Elemente von  $\vec{q}_{min}$ . Außerdem ist die Umformung auf Minimalkoordinaten bei komplexen Systemen eine nicht triviale Aufgabe, da nicht offensichtlich

ist, welche Elemente von  $\vec{q}$  überhaupt einen Satz von linear unabhängigen Koordinaten bilden können. Werden Systeme mit natürlichen Koordinaten nach Abschnitt 3.3 parametrisiert, so ist die Anzahl der generalisierten Koordinaten besonders hoch. Eine Systembeschreibung nach Gleichung (4.10) ist daher zu bevorzugen. Im Folgenden wird daher auf die Lösung dieser Gleichung eingegangen.

### 4.2.1 Kinetische Energie

Die kinetische Energie  $K$  eines Starrkörpers wird durch die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes  $P$  mit dem Ortsvektor  $\vec{p}$ , welcher ein Element des Körpers ist, und seiner Massenverteilung nach Gleichung (4.12) beschrieben. Besteht ein System aus mehreren Teilkörpern, so wird Gleichung (4.12) für jeden Körper einzeln betrachtet. [MM05, S. 206 ff.]

$$K = \frac{1}{2} \int_m \dot{\vec{p}}^2 dm \quad (4.12)$$

Der Punkt  $\vec{p}$  kann in den Koordinaten des körperfesten Koordinatensystems angegeben werden. Dazu sind der Ursprung  $\vec{q}$  und die Orientierung des körperfesten Systems  $K$  notwendig. Die Orientierung wird durch die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  nach Gleichung (3.3) angegeben. Die Transformation von körperfesten in inertielle Koordinaten geschieht dann nach Gleichung (3.21) mit Hilfe der von der Zeit abhängigen Transformationsmatrix

$$T(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) & \vec{q}(t) \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Zeitabhängigkeit wird im Folgenden nicht mehr explizit angegeben.

Seien die Koordinaten von  $\vec{p}$  im Koordinatensystem  $K$  in homogener Darstellung gegeben mit  $\vec{{}_K p} = (x, y, z, 1)^T$ , so lässt sich die Bestimmungsgleichung der kinetischen Energie wie folgt umformen:

$$K = \frac{1}{2} \int_m \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{T} \vec{{}_K p}) \right)^2 dm$$

unter der Beachtung, dass  $\overrightarrow{{}_K\dot{p}}$  zeitlich konstant ist, folgt

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \int_m (x, y, z, 1) \dot{\mathbf{T}}^T \dot{\mathbf{T}} (x, y, z, 1)^T dm \\
&= \frac{1}{2} \int_m (x, y, z, 1) \begin{bmatrix} \dot{u}^2 & \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle & \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle & \langle \dot{u}, \dot{q} \rangle \\ \langle \dot{w}, \dot{u} \rangle & \dot{w}^2 & \langle \dot{w}, \dot{v} \rangle & \langle \dot{w}, \dot{q} \rangle \\ \langle \dot{v}, \dot{u} \rangle & \langle \dot{v}, \dot{w} \rangle & \dot{v}^2 & \langle \dot{v}, \dot{q} \rangle \\ \langle \dot{q}, \dot{u} \rangle & \langle \dot{q}, \dot{w} \rangle & \langle \dot{q}, \dot{v} \rangle & \dot{q}^2 \end{bmatrix} (x, y, z, 1)^T dm \\
&= \frac{1}{2} \dot{q}^2 \int_m dm + \frac{1}{2} \dot{u}^2 \int_m x^2 dm + \frac{1}{2} \dot{w}^2 \int_m y^2 dm + \frac{1}{2} \dot{v}^2 \int_m z^2 dm \\
&\quad + \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle \int_m xy dm + \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle \int_m xz dm + \langle \dot{w}, \dot{v} \rangle \int_m yz dm \\
&\quad + \langle \dot{u}, \dot{q} \rangle \int_m x dm + \langle \dot{w}, \dot{q} \rangle \int_m y dm + \langle \dot{v}, \dot{q} \rangle \int_m z dm
\end{aligned}$$

und mit Hilfe des symmetrischen Trägheitstensors  $\mathbf{I}$ , wie er beispielsweise in [MM05, S. 199] definiert wird

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} I_{xx} & -C_{xy} & -C_{xz} \\ -C_{xy} & I_{yy} & -C_{yz} \\ -C_{xz} & -C_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \int_m (y^2 + z^2) dm & -\int_m (xy) dm & -\int_m (xz) dm \\ -\int_m (xy) dm & \int_m (x^2 + z^2) dm & -\int_m (yz) dm \\ -\int_m (xz) dm & -\int_m (yz) dm & \int_m (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

und unter der Annahme, dass der Ursprung  $\vec{q}$  des körperfesten Koordinatensystems der Schwerpunkt des Körpers ist, wodurch die letzten drei Terme in der Summengleichung gleich null sind, ergibt sich nach einigen Umformungsschritten

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} I_{xx} (-\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \dot{v}^2) \\
&\quad + \frac{1}{4} I_{yy} (\dot{u}^2 - \dot{w}^2 + \dot{v}^2) \\
&\quad + \frac{1}{4} I_{zz} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 - \dot{v}^2) \\
&\quad + C_{xz} \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle + C_{xy} \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle + C_{yz} \langle \dot{w}, \dot{v} \rangle.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Diese Herleitung entspricht den Ausführungen in [CL02].

Ist der gewählte Ursprung  $\vec{q}$  des körperfesten Koordinatensystems nicht der Schwerpunkt  $S$  des Körpers, so muss  $\dot{q}^2$  in Gleichung (4.13) durch den transfor-

mierten Schwerpunkt ersetzt werden. In einem bewegten Mehrkörpersystem ist die Angabe des Schwerpunktes eines Teilkörpers in Relation zum Inertialsystem nicht sinnvoll, da der zugehörige Ortsvektor von der Bewegung abhängig wäre. Es wird daher davon ausgegangen, dass der Schwerpunkt  $S$  des betrachteten Körpers relativ zum körperfesten Koordinatensystem  $K$  dieses Körpers bekannt ist und durch den Vektor  $\overrightarrow{{}_K S}$  notiert wird. Der Term  $\dot{\vec{q}}^2$  wird dann ersetzt durch  $\left(\frac{d\overrightarrow{{}_K S}}{dt}\right)^2 = \left(\dot{\overrightarrow{{}_K S}}\right)^2$  und Gleichung (4.13) lautet damit

$$\begin{aligned}
 K = & \frac{1}{2}m \left(\dot{\overrightarrow{{}_K S}}\right)^2 \\
 & + \frac{1}{4}I_{xx} \left(-\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \dot{v}^2\right) \\
 & + \frac{1}{4}I_{yy} \left(\dot{u}^2 - \dot{w}^2 + \dot{v}^2\right) \\
 & + \frac{1}{4}I_{zz} \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 - \dot{v}^2\right) \\
 & + C_{xz} \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle + C_{xy} \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle + C_{yz} \langle \dot{w}, \dot{v} \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Setzt man in Gleichung (4.14) den Vektor  $(0,0,0,1)$  für  $\overrightarrow{{}_K S}$  ein, so erhält man direkt Gleichung (4.13). Dieses Vorgehen ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass der Koordinatenursprung von  $K$  gleich dem Körperschwerpunkt ist.

Wird ein Starrkörper mit natürlichen Koordinaten nach Abschnitt 3.3 parametrisiert, so wird dessen Position durch ein mitbewegtes Koordinatensystem beschrieben. Die so festgelegten generalisierten Koordinaten  $\vec{q}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{v}$  des Körpers beschreiben daher in Verbindung mit den durch Versuche bestimmbar Größen Schwerpunktlage, Massenträgheitsmomente  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  und Deviationsmomente  $C_{xy}, C_{xz}, C_{yz}$  nach Gleichung (4.14) die kinetische Energie dieses Starrkörpers. Die kinetische Energie des Gesamtsystems ergibt sich dann durch Summation der kinetischen Energie aller Teilkörper.

## 4.2.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Eine virtuelle Verschiebung ist eine infinitesimale, rein virtuelle Änderung des Zustands eines Systems, ohne dass die Zeit dabei voran schreitet. Die Zustandsänderung muss dabei mit den Zwangsbedingungen verträglich sein. Zur Darstellung einer virtuellen Bewegung wird meist das Symbol  $\delta$  voran gestellt. [Woe11, S.136



ff.]

Wenn ein System durch generalisierte Koordinaten  $\vec{q}$  beschrieben wird, dann wird die virtuelle Verschiebung dieses Systems durch  $\delta\vec{q}$  notiert. Virtuelle Verschiebungen verhalten sich genau so wie andere, infinitesimale Variationen einer Größe. Damit sind virtuelle Verschiebungen ähnlich dem Differentialoperator, wobei die Besonderheit, dass die Zeit als konstante Größe angenommen wird, zu beachten ist. Das Beispiel 4.1 soll dies verdeutlichen.

Bei der Arbeit mit virtuellen Verschiebungen gelten die gleichen Gesetze wie bei Anwendung des Differentialoperators bezüglich Summen, Produkten und Verkettungen. Außerdem kann der Variationsoperator virtuelle Verschiebung mit dem Differential- und Integraloperator vertauscht werden.

*Beispiel 4.1* (Virtuelle Verschiebungen). Gegeben sei eine Funktion  $g(\vec{q}, t) \in \mathcal{R}$ , welche von  $n$  generalisierten Koordinaten  $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$  und außerdem explizit von der Zeit  $t$  abhängt. Diese Funktion könnte beispielsweise die Position eines Körpers beschreiben. Die virtuelle Verschiebung dieser Funktion berechnet sich nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned} \delta g(\vec{q}, t) &= \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial q_1} g(\vec{q}, t) \quad \frac{\partial}{\partial q_2} g(\vec{q}, t) \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial q_n} g(\vec{q}, t) \right]}_{:= \frac{\partial g(\vec{q}, t)}{\partial \vec{q}}^T} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix} \\ &= \left\langle \frac{\partial g(\vec{q}, t)}{\partial \vec{q}}, \delta \vec{q} \right\rangle \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass die generalisierten Koordinaten von der Zeit abhängig sein können. Da die Zeit bei einer virtuellen Verschiebung als konstant angenommen wird, hat eine solche Zeitabhängigkeit keinen Einfluss auf die Berechnung.  $\diamond$

Die virtuelle Arbeit  $\delta W_i$ , welche durch eine Krafteinwirkung  $\vec{F}_i$  eine virtuelle Verschiebung  $\delta$  eines Punktes  $\vec{r}_i$  erzeugt, ist definiert durch:

$$\delta W_i = \left\langle \vec{F}_i, \delta \vec{r}_i \right\rangle.$$

Die virtuelle Arbeit  $\delta W_j$ , welche durch ein Moment  $\vec{M}_j$  entsteht, ist definiert durch:

$$\delta W_j = \left\langle \vec{M}_j, \delta \vec{\phi}_j \right\rangle.$$

Ein System befindet sich dann im Kräftegleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit für beliebige virtuelle Verschiebungen verschwindet. Für ein System, auf das  $k$  Kräfte und  $l$  Momente wirken, muss daher Gleichung (4.15) erfüllt sein.

$$\delta W = \sum_{i=1}^k \langle \vec{F}_i, \delta \vec{r}_i \rangle + \sum_{j=1}^l \langle \vec{M}_j, \delta \vec{\phi}_j \rangle = 0 \quad (4.15)$$

Die virtuelle Verschiebung der kartesischen Ortsvektoren  $\delta \vec{r}_i \in \mathcal{R}^3$  hängt von den  $n$  generalisierten Koordinaten  $\vec{q} \in \mathcal{R}^n$  ab und lässt sich daher umformen zu

$$\delta \vec{r}_i = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_i(\vec{q})}{\partial \vec{q}}}_{\in \mathcal{R}^{3 \times n}} \underbrace{\delta \vec{q}}_{\in \mathcal{R}^n}. \quad (4.16)$$

Die virtuellen Rotationen  $\delta \vec{\phi}_k \in \mathcal{R}^3$  unterliegen der gleichen Beziehung. Es gilt

$$\delta \vec{\phi}_j = \underbrace{\frac{\partial \vec{\phi}_j(\vec{q})}{\partial \vec{q}}}_{\in \mathcal{R}^{3 \times n}} \underbrace{\delta \vec{q}}_{\in \mathcal{R}^n}. \quad (4.17)$$

Die gesamte virtuelle Arbeit eines Systems kann auch als Summe der generalisierten Kräfte  $Q_i$  des Systems interpretiert werden. Die generalisierten Kräfte lassen sich dann zu einem Vektor  $\vec{Q}$  zusammenfassen. Gleichung (4.18) zeigt diesen Zusammenhang. Mit Hilfe der virtuellen Verschiebung der generalisierten Koordinaten  $\delta \vec{q}$  lässt sich die virtuelle Arbeit als Produkt aus  $\delta \vec{q}$  und dem Vektor der generalisierten Kräfte darstellen. Der so erhaltene Ausdruck ist in Gleichung (4.19) dargestellt. Zusammen mit dem in Gleichung (4.14) angegebenen Ausdruck zur Bestimmung der kinetischen Energie kann damit der in (4.10) definierte Ausdruck der Gleichung von Lagrange zweiter Art aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
\delta W &= \sum_{i=1}^k \left\langle \vec{F}_i, \frac{\partial \vec{r}_i(\vec{q})}{\partial \vec{q}} \delta \vec{q} \right\rangle + \sum_{j=1}^l \left\langle \vec{M}_j, \frac{\partial \vec{\phi}_j(\vec{q})}{\partial \vec{q}} \delta \vec{q} \right\rangle \\
&= \delta \vec{q}^T \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial \vec{r}_i(\vec{q})}{\partial \vec{q}} \right)^T \vec{F}_i + \delta \vec{q}^T \sum_{j=1}^l \left( \frac{\partial \vec{\phi}_j(\vec{q})}{\partial \vec{q}} \right)^T \vec{M}_j \\
&= \underbrace{\delta \vec{q}^T}_{\in \mathcal{R}^{1 \times n}} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^k \underbrace{\left( \frac{\partial \vec{r}_i(\vec{q})}{\partial \vec{q}} \right)^T}_{\in \mathcal{R}^{n \times 3}} \underbrace{\vec{F}_i}_{\in \mathcal{R}^{3 \times 1}} + \sum_{j=1}^l \underbrace{\left( \frac{\partial \vec{\phi}_j(\vec{q})}{\partial \vec{q}} \right)^T}_{\in \mathcal{R}^{n \times 3}} \underbrace{\vec{M}_j}_{\in \mathcal{R}^{3 \times 1}} \right)}_{=: \vec{Q} \in \mathcal{R}^{n \times 1}} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

$$\delta W = \delta \vec{q}^T \vec{Q} \quad (4.19)$$

Entsprechend dem Ansatz der natürlichen Koordinaten wird jedem Starrkörper ein mitbewegtes Koordinatensystem  $K$  angeheftet. Dieses Koordinatensystem wird durch vier Vektoren  $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}, \vec{q}$  beschrieben. Die Komponenten dieser Vektoren bilden zusammen die generalisierten Koordinaten

$$\vec{g} = (\vec{q}^T, \vec{u}^T, \vec{w}^T, \vec{v}^T)^T.$$

Dies wurde im Abschnitt 3.3 dargelegt. An dieser Stelle werden die generalisierten Koordinaten durch  $\vec{g}$  anstelle von  $\vec{q}$  bezeichnet, um eine Verwechslung mit dem Ortsvektor des Ursprungs von  $K$  zu vermeiden.

Zur Aufstellung von Gleichung (4.19) sollen jetzt Ausdrücke für die virtuellen Verrückungen entsprechend Gleichung (4.16) und die virtuellen Rotationen nach Gleichung (4.17) in Abhängigkeit der zwölf generalisierten Koordinaten eines Starrkörpers entwickelt werden.

Die virtuelle Verschiebung eines Punktes  $P$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_P$  kann direkt nach Gleichung (4.16) mit Hilfe der Regeln der partiellen Ableitung berechnet werden. Der Ortsvektor muss dabei in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten beschrieben werden. Durch die Verwendung natürlicher Koordinaten ist die Beschreibung von Punkten sehr einfach, da geometrische Beziehungen durch simple Gleichungen ausgedrückt werden können. Soll beispielsweise die virtuelle Verschiebung des Ursprungs von  $K$  beschrieben werden, so kann diese

wie folgt berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \vec{q} = (q_x, q_y, q_z)^T \\
\vec{g} &= (\vec{q}^T, \vec{u}^T, \vec{w}^T, \vec{v}^T)^T \\
&= (q_x \ q_y \ q_z \ u_x \ u_y \ u_z \ w_x \ w_y \ w_z \ v_x \ v_y \ v_z)^T \\
\delta \vec{p} &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{g}} \delta \vec{g} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta \vec{g}
\end{aligned}$$

Im Abschnitt 3.2.1 wurde Gleichung (3.6) bereits partiell nach der Zeit abgeleitet und damit eine schiefsymmetrische Matrix  $\mathbf{\Omega}$  in Gleichung (3.15) hergeleitet. Im Abschnitt 4.1 wurde dargelegt, dass  $\mathbf{\Omega}$  die Komponenten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit enthält. Auf ähnliche Weise soll jetzt ein Operator für den Vektor der virtuellen Rotationen  $\delta_K \vec{\phi} = (\delta_K \phi_x, \delta_K \phi_y, \delta_K \phi_z)^T$  hergeleitet werden. Durch Anwendung des Variationsparameter  $\delta$  auf Gleichung (3.6) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\delta(\mathbf{I}) &= \delta(\mathbf{R}^T \mathbf{R}) \\
\implies \mathbf{0} &= \delta(\mathbf{R}^T) \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \delta(\mathbf{R}) \\
\underbrace{\mathbf{R}^T \delta(\mathbf{R})}_{:= \delta_K \mathbf{\Omega}} &= -\delta(\mathbf{R}^T) \mathbf{R} \\
\delta_K \mathbf{\Omega} &= -\delta_K \mathbf{\Omega}^T.
\end{aligned}$$

Die so eingeführte Matrix  $\delta_K \mathbf{\Omega}$  erfüllt also Gleichung (2.34) und ist damit schiefsymmetrisch. Wendet man den Operator der virtuellen Verschiebung auf die Komponenten der Matrix  $\delta_K \mathbf{\Omega}$  an, so erhält man eine kompakte Darstellung

für die Elemente von  $\delta_K \vec{\phi}$ . Sie ist in Gleichung (4.21) dargestellt.

$$\begin{aligned}
 \delta_K \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{R}^T \delta(\mathbf{R}) \\
 &= \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{w} & \vec{v} \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\delta_K \phi_z & \delta_K \phi_y \\ \delta_K \phi_z & 0 & -\delta_K \phi_x \\ -\delta_K \phi_y & \delta_K \phi_x & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \langle \vec{u}, \delta \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \delta \vec{w} \rangle & \langle \vec{u}, \delta \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{w}, \delta \vec{u} \rangle & \langle \vec{w}, \delta \vec{w} \rangle & \langle \vec{w}, \delta \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{v}, \delta \vec{u} \rangle & \langle \vec{v}, \delta \vec{w} \rangle & \langle \vec{v}, \delta \vec{v} \rangle \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \delta_K \vec{\phi} &= \begin{bmatrix} \delta_K \phi_x \\ \delta_K \phi_y \\ \delta_K \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \vec{v}, \delta \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{u}, \delta \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{w}, \delta \vec{u} \rangle \end{bmatrix} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

*Bemerkung 4.3* (virtuelle Rotationen). Die Definition der virtuellen Rotation nach Gleichung (4.21) suggeriert einen Vektor, der in Relation zu einem körperfesten Koordinatensystem angegeben ist. Dies wird gesondert durch den linksseitig tiefgestellten Index  $_K$  hervorgehoben. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass sie die Basisvektoren des rotierten Koordinatensystems direkt verwendet. Will man die virtuelle Rotation global angeben, so ist dies mit Hilfe der Transformationsregeln für Tensoren zweiter Stufe nach Gleichung (4.22) möglich.

$$\delta_I \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R} \delta_K \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}^T \quad (4.22)$$

Die in Gleichung (4.22) verwendete lineare Transformation ist eine Ähnlichkeitstransformation. Daher werden die Eigenwerte von  $\delta_K \boldsymbol{\Omega}$  dadurch nicht verändert. Die Eigenvektoren werden hingegen in das Inertialsystem transformiert. ♦

## 4.3 Differential-algebraische Gleichungen

Gegeben sei ein Mehrkörpersystem, welches mit  $n$  generalisierten Koordinaten  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$  und  $m$  holonomen Zwangsbedingungen  $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_m)^T$  beschrieben wird. Weiterhin sei das System mit der Gleichung von Lagrange 2. Art nach Gleichung (4.10) modelliert. Das zur Beschreibung der Bewegung des Mehrkörpersystems zu lösende Gleichungssystem bildet dann ein System von DAEs  $F(\vec{\dot{x}}, \vec{x}, t) = 0$ . Eine DAE ist dadurch charakterisiert, dass sie von einer

abhängigen Zustandsvariable  $\vec{x}$ , einer unabhängigen Variable und Ableitungen der Zustandsvariable nach dieser unabhängigen Variablen abhängt. Bei mechanischen Systemen ist die unabhängige Variable in der Regel die Zeit  $t$  und eine Beschreibung der Form  $F(\ddot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}}, t) = 0$  ist daher gerechtfertigt.

Für die Charakterisierung von DAEs sind die Begriffe *differentieller Grad der DAE* und *differentieller Index der DAE* besonders wichtig.

Unter dem differentiellen Grad versteht man den höchsten im System vorkommenden Grad einer Ableitung von  $\vec{x}$  nach der unabhängigen Variablen. In Gleichung (4.10) ist die unabhängige Variable die Zeit  $t$ . Der höchste Grad einer Ableitung nach der Zeit ist offensichtlich im Term

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} \right)$$

enthalten. Die höchste Ableitung ist  $\ddot{\vec{q}}$ , womit sich ein differentieller Grad von zwei ergibt. Die meisten mechanischen Systeme sind beschleunigungsabhängig. Da die Zustandsvariable im einfachsten Fall den Ort abbildet und die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit der Beschleunigung entspricht, ist der höchste Grad einer Ableitung der Zustandsvariable gleich zwei und Systeme dieser Art haben einen differentiellen Grad von zwei. Der differentielle Grad eines Systems lässt sich reduzieren, indem für die Ableitung der generalisierten Koordinaten  $\dot{\vec{q}}$  mit  $\vec{v} = \dot{\vec{q}}$  neue Variablen eingeführt werden. Die generalisierten Koordinaten  $\vec{q}$  werden dann mit den neu eingeführten Variablen  $\vec{v}$  und den Lagrange-Multiplikatoren  $\vec{\lambda}$  zum Zustandsvektor  $\vec{x}$  zusammengefasst. Die Terme in Gleichung (4.10) werden entsprechend ihrer Abhängigkeit von der Zustandsvariable neu sortiert und das System lässt sich durch

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} &= \vec{v} \\ \mathbf{M}(\vec{q}) \dot{\vec{v}} &= \vec{f}(\vec{q}, \vec{v}) - \boldsymbol{\Phi}_{\vec{q}}^T \vec{\lambda} \\ \vec{0} &= \vec{\phi} \end{aligned} \tag{4.23}$$

beschreiben, was in Kurzform notiert

$$F(\ddot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}}, t) = 0 \tag{4.24}$$

entspricht. [SRF90, S. 22]

Der differentielle Index wird nach [Gea88] im Folgenden definiert.

**Definition 18** (Index einer DAE). *Gegeben sei eine DAE  $F(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, t) = 0$ . Der Index dieser DAE wird definiert als*

$$k = 0, \quad (4.25)$$

*wenn  $\frac{\partial F}{\partial \dot{\vec{x}}}$  nicht singulär ist. Andernfalls ist  $k > 0$ . Den Index bestimmt man dann anhand der kleinsten Zahl  $s$ , für die das Gleichungssystem (4.26) für  $\vec{x}(\vec{x}, t)$  gelöst werden kann.*

$$\begin{aligned} F(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, t) &= 0 \\ \frac{d}{dt}F(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{x}}}F(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, t) \underbrace{\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial t}}_{=: \vec{x}^{(2)}} + \dots = 0 \\ &\vdots \\ \frac{d^s}{dt^s}F(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{x}}}F(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, t) \vec{x}^{(s)} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Der Index von Systemen, welche nach Gleichung (4.23) beschrieben werden, ist gleich drei. [SRF90, S. 22 f.]

Die Lösung von Systemen nach Gleichung (4.23) ist ein Themenkomplex aktueller Forschung. Eine Übersicht zu den verschiedenen Problemstellungen und deren Lösungsansätzen bei der Berechnung von DAEs ist in [HD91] und [SRF90] enthalten. Eine Sammlung verschiedener Veröffentlichungen zu dieser Thematik ist in der aktuellen von A. Illmann und T. Reis editierten Buchreihe [IR13], [IR15a] und [IR15b] veröffentlicht.

Spezielle Probleme sind unter anderem die Reduktion des Index auf eins und die dadurch notwendige Stabilisierung der nach der Indexreduktion verbleibenden Gleichungen. Eine Indexreduktion ist notwendig, weil die verbreiteten numerischen Integrationsalgorithmen für DAEs einen Index von eins voraussetzen.

Ein verhältnismäßig simpler Ansatz wurde von J. W. Baumgarte in [Bau72] vorgestellt und in [Bau83] weiterentwickelt. Nach diesem Verfahren werden die Zwangsbedingungen  $\vec{\phi}$  in Gleichung (4.23) durch eine parametrisierte Ableitung von  $\vec{\phi}$  ersetzt. Es gilt dann

$$\vec{\phi}' = \ddot{\vec{\phi}} + 2\alpha \dot{\vec{\phi}} + \beta^2 \vec{\phi}, \quad \alpha > 0. \quad (4.27)$$

Bei einer Indexreduktion von drei auf eins könnte man einfach  $\vec{\phi}' = \ddot{\vec{\phi}}$  setzen. Wird statt dessen aber Gleichung (4.27) verwendet, so wird die Gleichung für

$\vec{\phi}'$  asymptotisch stabil und die numerische Integration von Gleichung (4.23) so stabilisiert. Die konkrete Wahl der Parameter  $\alpha, \beta$  ist aber je nach System unterschiedlich durchzuführen und bleibt bisher ohne allgemeine Lösung. Die Veröffentlichungen [FPMS08] und [FMSS11] sind Arbeiten, welche sich der Lösung dieses Problems widmen.

Alternative Ansätze zur Stabilisierung der Bewegungsgleichung sind unter anderem in [Gea88], [PC88], [ACPR95], [FBR01], [CP03] und [NA03] zu finden.

Im Anschluss an die Reduktion des differentiellen Grades auf eins, die Indexreduktion auf eins und die Wahl eines Stabilisierungsverfahrens verbleibt zur Lösung von Gleichung (4.23) noch die Wahl eines geeigneten Integrationsverfahrens. Der Solver *DASSL*, welcher in [BCP95] ausführlich vorgestellt wird, und dessen Weiterentwicklungen, sind probate Wahlmöglichkeiten. Alle Integrationsverfahren benötigen als Eingabewerte Anfangswerte  $\vec{x}(t=0), \dot{\vec{x}}(t=0)$ , welche mit den Zwangsbedingungen konsistent sind. Die Berechnung dieser Werte ist ein nicht-triviales Problem. Mögliche Lösungsansätze werden in [BCP95] und [BHP98] aufgezeigt. Mit besonderem Fokus auf die Fahrzeugtechnik wird außerdem in [SRF90] diese Problemstellung behandelt.



Die Modellierung von Motorrädern ist Gegenstand aktueller Forschung. Insbesondere die Arbeiten von R. S. Sharp [Sha01], [SHA85], [SL01] sowie die Arbeiten von V. Cossalter und R. Lot [CL02], [CLM10] werden vielfach zitiert. Eine Übersicht über die historische Entwicklung von Motorradmodellen und zahlreiche Quellen sind in [LS06] zu finden. Außerdem liefert [SM13] eine umfangreiche Quellenübersicht zur Modellierung und dem Fahrverhalten von Einspurfahrzeugen. Weitere aktuelle Modelle sind unter anderem in [KU07], [NASM13], dem umfangreichen Buch von M. Tanelli [TCS14] und [LM15] dargestellt. Zusätzlich sei noch das Buch von J. Stoffregen [Sto12] genannt, welches Grundlagen und Konzepte der Motorradtechnik beleuchtet.

Es existieren offensichtlich zahlreiche Modelle, welche die Bewegung von Motorrädern beschreiben. Deren Genauigkeit unterscheidet sich teilweise stark. Besonders der Einfluss der Bewegung des Fahrers wird oft nicht oder nur rudimentär modelliert, obwohl die Masse des Fahrers im Vergleich zur Fahrzeugmasse signifikant ist. Weiterhin haben die Anzahl an Teilkörpern, in welche ein Motorrad zerlegt wird, die Beachtung von Federn und Dämpfern und die Modellierung der Reifen großen Einfluss auf die Modellgenauigkeit. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf dem genauen Kontaktpunkt zwischen Reifen und Straße und den dort wirkenden Kräften. Diese sind unter anderem abhängig von der Schräglage des Motorrads, der Reifengeometrie und der Reifenverformung, welche durch Gravitationskräfte und Antriebs- beziehungsweise Bremsmomente entsteht. Für die Beschreibung der Reifenkräfte ist die Entwicklung der *Magic Formula* durch H. B. Pacejka und E. Bakker [PB92] das meist verwendete Standardwerkzeug. Dieser weit verbreitete Ansatz wurde vielfach weiterentwickelt und speziell auf Motorradreifen angepasst. Das Buch von P. Flores et. al. [FPMS06] greift diesen Ansatz auf und erläutert dessen Anwendung. Die Arbeiten [BSP10], [Pac12], [RD14] und [Lot04] sind eine kleine Auswahl aktueller Arbeiten zu diesem Thema.

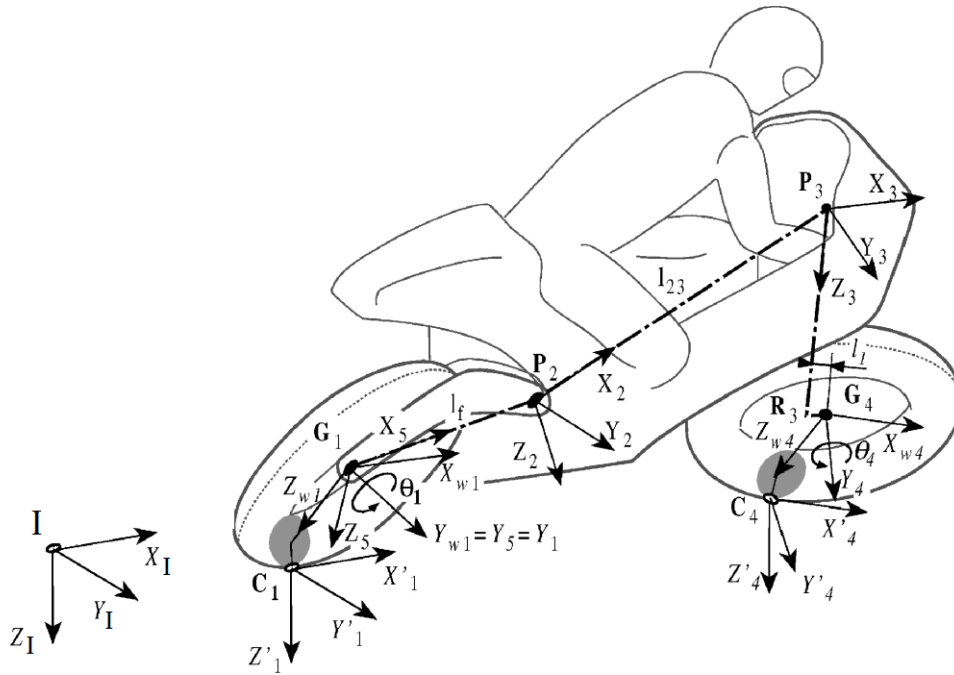
Das von V. Cossalter und R. Lot in [CL02] vorgestellte Motorradmodell hebt sich insofern von der Masse der bekannten Motorradmodelle ab, als es laut Aussage der Autoren trotz hoher Modellgenauigkeit in Echtzeit berechnet werden kann. Speziell dieses Modell ist daher gut geeignet, um als Basis für Algorithmen zu fungieren, welche Motorradkenndaten, wie beispielsweise die während der Fahrt wirkenden Reifenkräfte, in Echtzeit benötigen. Solche Algorithmen könnten zum Beispiel die wahrscheinlichsten Trajektorien ermitteln, welche ein Motorrad in unmittelbarer Zukunft befahren wird, um so eventuelle Kollisionen oder andere gefährliche Situationen vorherzusehen. Bei Erwartung einer gefährlichen Situation könnten dann entsprechende Gegenmaßnahmen eingeleitet werden, um Schäden beziehungsweise Verletzungen für Maschine und Fahrer zu vermeiden oder zumindest abzuschwächen.

Im Folgenden werden einige Gleichungen des von V. Cossalter und R. Lot im Jahr 2002 in [CL02] veröffentlichten Motorradmodells beispielhaft untersucht, da sie eine direkte Anwendung der in den Kapiteln 3 und 4 hergeleiteten Beziehungen zur Beschreibung der Bewegung von Körpern darstellen.

## 5.1 Das Motorradmodell von V. Cossalter und R. Lot

Das Motorrad wird als ein Mehrkörpersystems modelliert. Die Festlegung der Parameter, welche die Koordinaten der Teilkörper beschreiben, geschieht mit Hilfe der im Abschnitt 3.3 vorgestellten Methode der natürlichen Koordinaten. Das Mehrkörpersystem ist in Abbildung 5.1 abgebildet. Das System wird mit Hilfe von zehn Koordinatensystemen beschrieben. Die Koordinatensysteme werden im Folgenden mit Hilfe ihrer zugehörigen homogenen Transformationsmatrizen identifiziert. Die Transformationsmatrizen  $\mathbf{T}_i, i = 1, \dots, 10$  beinhalten jeweils eine Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_i$  und einen Ortsvektor  $\vec{q}_i$  entsprechend Gleichung (3.16), mit Hilfe derer ein Übergang zum Inertialsystem  $I$  möglich ist. Die Komponenten von  $\mathbf{R}_i$  und  $\vec{q}_i$  sind die generalisierten Koordinaten des Systems. Für zehn Koordinatensysteme werden daher, wie in Abschnitt 3.3 dargelegt wurde,

$$12 \cdot 10 = 120$$



**Abbildung 5.1:** Motorrad als Mehrkörpersystem mit natürlichen Koordinaten  
[CL02, S. 10]

generalisierte Koordinaten eingeführt. Werden die Koordinatensysteme entsprechend dem Ansatz der natürlichen Koordinaten geschickt zueinander ausgerichtet, so sinkt die Anzahl der benötigten Einheitsvektoren drastisch und die Anzahl an benötigten generalisierten Koordinaten wird stark reduziert. Die Systembeschreibung wird dadurch einfacher und der Rechenaufwand geringer. Auf einige dieser Überlegungen wird im Folgenden eingegangen. Die Bezeichnung einzelner Elemente weicht dabei von der Darstellung in [CL02] ab, weil diese so einfacherer der Darstellung in Abbildung 5.1 zuzuordnen sind.

Das Inertialsystem wird durch die Einheitsvektoren

$$\vec{c}_{x,I} = (1,0,0)^T \quad \vec{c}_{y,I} = (0,1,0)^T \quad \vec{c}_{z,I} = (0,0,1)^T$$

aufgespannt und durch den Ortsvektor  $\vec{O} = (0,0,0)^T$  im Raum fixiert. Die Vektoren  $\vec{c}_{x,I}$  und  $\vec{c}_{y,I}$  bilden die Ebene, auf welcher sich das Motorrad bewegen kann. Die Einheitsvektoren der Koordinatensysteme werden so festgelegt, dass  $\vec{u}_i$  in x-Richtung,  $\vec{w}_i$  in y-Richtung und  $\vec{v}_i$  in z-Richtung bezüglich  $I$  positive Werte annehmen.

Das Hinterrad wird durch drei Koordinatensysteme beschrieben. Zwei der Koor-

koordinatensysteme haben ihren Ursprung im Radmittelpunkt, das Dritte bewegt sich mit dem Kontaktpunkt zwischen Hinterreifen und Straße mit und wird durch  $\mathbf{T}'_1$  identifiziert. Da dieser Kontaktpunkt in der Ebene, welche von  $\vec{c}_{x,I}$  und  $\vec{c}_{y,I}$  aufgespannt wird, liegen muss, ist die z-Komponente von  $\vec{w}'_1$  konstant null. Der Vektor  $\vec{v}'_1$  liegt des weiteren parallel zu  $\vec{c}_{z,I}$  und benötigt daher gar keine generalisierten Koordinaten. Das Koordinatensystem  $\mathbf{T}_{w1}$  ist so ausgerichtet, dass die x-Achse immer in Fahrtrichtung zeigt. Der Einheitsvektor  $\vec{u}_{w1}$  liegt parallel zur Fahrbahn und benötigt daher keine variable z-Komponente. Die x-Achsen von  $\mathbf{T}'_1$  und  $\mathbf{T}_{w1}$  werden außerdem als parallel definiert, wodurch drei weitere generalisierte Koordinaten obsolet werden. Da alle Koordinatensysteme normierte Rechtssysteme sein sollen, stehen die Vektoren  $\vec{u}'_1, \vec{w}'_1$  senkrecht aufeinander. Das System  $\mathbf{T}'_1$  liegt weiterhin in einer konstanten Ebene, wodurch für die Definition von  $\vec{u}'_1, \vec{w}'_1$  bereits zwei generalisierte Koordinaten ausreichen.  $\mathbf{T}_1$  ist fest mit dem Hinterrad verankert und geht aus  $\mathbf{T}_{w1}$  direkt durch Drehung um die  $Y_{w1}$  Achse hervor. Diese Drehung benötigt nur eine generalisierte Koordinate. Da beide Systeme den gleichen Ursprung haben, entfallen weitere drei generalisierte Koordinaten. Insgesamt stellt man fest, dass sich diese drei Koordinatensysteme durch deren geschickte Definition mit Hilfe von 15 anstelle von  $12 \cdot 3 = 36$  generalisierten Koordinaten  $\vec{q}$  beschreiben lassen.

Für  $\mathbf{T}_{w1}$  gilt

$$\begin{aligned}\vec{u}_{w1} &= (u_{w1,x}, u_{w1,y}, 0, 0)^T \\ \vec{w}_{w1} &= (w_{w1,x}, w_{w1,y}, w_{w1,z}, 0)^T \\ \vec{v}_{w1} &= (v_{w1,x}, v_{w1,y}, v_{w1,z}, 0)^T \\ \vec{q}_{w1} &= (q_{w1,x}, q_{w1,y}, q_{w1,z}, 1)^T.\end{aligned}$$

Für  $\mathbf{T}'_1$  gilt

$$\begin{aligned}\vec{u}'_1 &= \vec{u}_{w1} \\ \vec{w}'_1 &= (-u_{w1,y}, u_{w1,x}, 0, 0)^T \\ \vec{v}'_1 &= (0, 0, 1, 0)^T \\ \vec{q}'_1 &= (q'_{1,x}, q'_{1,y}, q'_{1,z}, 1)^T.\end{aligned}$$

Für  $\mathbf{T}_1$  gilt

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_{rot,w1}^{-1} \mathbf{T}_{w1},$$

wobei die Rotation um die Achse  $Y_{w1}$  mit

$$\mathbf{T}_{rot,w1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erfolgt.

Für den Vektor der generalisierten Koordinaten ergibt sich damit

$$\vec{q} = (u_{w1,x}, u_{w1,y}, w_{w1,x}, w_{w1,y}, w_{w1,z}, v_{w1,x}, v_{w1,y}, v_{w1,z}, \\ q_{w1,x}, q_{w1,y}, q_{w1,z}, q'_{1,x}, q'_{1,y}, q'_{1,z}, \theta_1)^T$$

Diese Überlegungen gelten für das Vorderrad analog, wobei sich das Rad natürlich mit der Lenkachse mit dreht. Die Richtungsvektoren  $\vec{w}_3$  und  $\vec{w}_{w4}$  sind daher gleich.

Die übrigen vier Koordinatensysteme beschreiben die Lage der Hinterradschwinge, die Lenkerposition und die Lage der ungedämpften Vorderradmassen. Die Hinterradschwinge wird mit Hilfe von  $\mathbf{T}_5$  und  $\mathbf{T}_2$  beschrieben.  $\mathbf{T}_5$  hat seinen Ursprung an der gleichen Stelle wie  $\mathbf{T}_{w1}$ . Die x-Achse zeigt jedoch nicht gerade nach vorn, sondern auf das Gelenk, in welchem die Hinterradschwinge mit dem Motorradrahmen verbunden ist. Die Y-Achse von  $\mathbf{T}_5$  ist identisch mit der von  $\mathbf{T}_{w1}$ . Für die Beschreibung von  $\mathbf{T}_5$  werden daher sechs neue generalisierte Koordinaten notwendig.  $\mathbf{T}_2$  hat den Ursprung in der Rahmenaufhängung der Hinterradschwinge und eine y-Achse, welche zu der von  $\mathbf{T}_{w1}$  parallel ist. Die Richtungsvektoren dieser Achsen sind demnach identisch. Die x-Achse von  $\mathbf{T}_2$  ist so ausgerichtet, dass sie senkrecht auf der Lenkachse steht. Die zur Beschreibung dieser zwei Systeme notwendigen Vektoren lauten also

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 &= (u_{2,x}, u_{2,y}, u_{2,z}, 0)^T \\ \vec{w}_2 &= \vec{w}_{w1} \\ \vec{v}_2 &= (v_{2,x}, v_{2,y}, v_{2,z}, 0)^T \\ \vec{q}_2 &= (q_{2,x}, q_{2,y}, q_{2,z}, 1)^T \end{aligned}$$

für  $\mathbf{T}_2$  und

$$\vec{u}_5 = (u_{5,x}, u_{5,y}, u_{5,z}, 0)^T$$

$$\vec{w}_5 = \vec{w}_{w1}$$

$$\vec{v}_5 = (v_{5,x}, v_{5,y}, v_{5,z}, 0)^T$$

$$\vec{q}_5 = \vec{q}_{w1}$$

für  $\mathbf{T}_5$ .

Das System  $\mathbf{T}_3$  wird so ausgerichtet, dass die z-Achse entlang der Lenkachse verläuft. Der Ursprung liegt im Schnittpunkt der Lenkachse mit der auf der Lenkachse senkrecht stehenden Ebene, welche den Ursprung von  $\mathbf{T}_2$  als Element hat. Die Elemente von  $\mathbf{T}_3$  lauten damit

$$\vec{u}_3 = (u_{3,x}, u_{3,y}, u_{3,z}, 0)^T$$

$$\vec{w}_3 = (w_{3,x}, w_{3,y}, w_{3,z}, 0)^T$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_2$$

$$\vec{q}_3 = (q_{3,x}, q_{3,y}, q_{3,z}, 1)^T.$$

Das letzte Koordinatensystem umfasst die ungedämpften Massen am Vorderrad. Es benötigt keine neuen generalisierten Koordinaten, da es sich mit Ausnahme der Rotation mit dem Vorderrad mitbewegt.

Insgesamt ergeben sich durch die so definierten Koordinatensysteme also 51 generalisierte Koordinaten, welche sich aus 15 generalisierten Koordinaten für das Hinterrad, 15 für die Schwinge, 9 für den Lenker und 12 für das Vorderrad zusammen setzen. Die vorläufig berechnete Anzahl von 120 Koordinaten konnte demnach durch geeignete Festlegung der Koordinatensysteme zueinander um mehr als die Hälfte reduziert werden.

Die Anzahl generalisierter Koordinaten ist immer noch hoch. In Folge der Modellierung mit natürlichen Koordinaten lassen sich aber im nächsten Schritt die Zwangsbedingungen auf sehr einfache Art formulieren. Wie im Abschnitt 3.3 dargelegt wurde, müssen alle Vektoren  $\vec{u}_i$ ,  $\vec{w}_i$ ,  $\vec{v}_i$  Einheitslänge haben und senkrecht aufeinander stehen. Diese Bedingungen lassen sich auf triviale Weise mit dem Skalarprodukt formulieren. Stellt man diese Bedingungen für alle

eingeführten Richtungsvektoren auf, so ergeben sich 26 Zwangsbedingungen. Mit Hilfe weiterer Gleichungen kann die Geometrie des Motorrads beschrieben werden.

Beispielhaft sei die konstante Länge der Hinterradschwinge betrachtet. Durch die geschickte Wahl der Koordinatenursprünge von  $\mathbf{T}_{w1}$  und  $\mathbf{T}_2$  ist die Gleichung sehr einfach aufzustellen. Sei die Schwingenlänge durch den Parameter  $l_{schw}$  gegeben. Die geforderte konstante Länge lässt sich dann mit dem Skalarprodukt als

$$\langle \vec{q}_2 - \vec{q}_{w1}, \vec{q}_2 - \vec{q}_{w1} \rangle - l_{schw}^2 = 0$$

formulieren. Dabei ist darauf zu achten, dass die Zwangsbedingung der Form  $\phi(\vec{q}) = 0$  entspricht. Auf ähnliche Weise lassen sich sieben weitere geometrische Beziehungen als Zwangsbedingungen formulieren. Dabei sind alle Gleichungen frei von trigonometrischen Funktionen. In Folge dessen lässt sich die Jacobimatrix der Zwangsbedingungen  $\Phi_{\vec{q}}(\vec{q})$  einfach berechnen.

Die generalisierten Koordinaten könnten mit Hilfe der Zwangsbedingungen auf einen Satz Minimalkoordinaten reduziert werden. Dieser Ansatz ist aber nicht zweckmäßig, da der Rechenaufwand für die algebraische Umformung sehr hoch ist und die erhaltenen Ausdrücke für die Minimalkoordinaten sehr komplex wären. Daher verwendet man zur Lösung des Systems den Ansatz von Langrange 2. Art, wie er in Gleichung (4.10) angegeben ist.

Der zur Lösung von Gleichung (4.10) benötigte Ausdruck für die kinetische Energie wurde bereits in Abschnitt 4.2.1 ausführlich hergeleitet. Mit Hilfe der generalisierten Koordinaten, den Schwerpunktkoordinaten und den Elementen des Trägheitstensors kann die Gleichung für die kinetische Energie nach Gleichung (4.14) direkt aufgestellt werden. Dabei ist lediglich darauf zu achten, dass nur die Systeme  $\mathbf{T}_{w1}$ ,  $\mathbf{T}_2$ ,  $\mathbf{T}_3$ ,  $\mathbf{T}_{w4}$ ,  $\mathbf{T}_5$  und  $\mathbf{T}_6$  in diese Gleichung eingehen. Die übrigen vier Koordinatensysteme werden ausschließlich zur Beschreibung der Reifenbewegung und der Reifenkräfte benötigt.

Die Formulierung der virtuellen Arbeit und die Umformung zu generalisierten Kräften ist keine triviale Aufgabe. Als Beispiel der Anwendung der in Abschnitt 4.2.2 hergeleiteten Gleichungen sollen die virtuelle Arbeit der Gravitation und der am Hinterrad wirkenden Reifenkräfte erläutert werden. [CL02, S.14 f.]

Die Gravitationskraft lässt sich mit Hilfe der Erdbeschleunigung  $g$  und der Masse eines Körpers bestimmen. Notiert man die Erdbeschleunigung unter Beachtung ihrer Wirkrichtung als homogenen Vektor mit  $\vec{g} = (0,0,g,1)^T$  und multipliziert diesen mit der Körpermasse und der virtuellen Verschiebung des Körperschwerpunkts, so erhält man die virtuelle Arbeit der Gravitationskraft. Es ergibt sich für einen Körper  $i$

$$\delta W_{g,i} = m_i \left\langle \vec{g}, \delta \left( {}^K_I \mathbf{T}_{iK} \overrightarrow{S}_i \right) \right\rangle,$$

wobei mit  $\overrightarrow{S}_i$  der konstante Schwerpunkt des Körpers in Relation zu seinem körperfesten Koordinatensystem gegeben ist. Wendet man den Operator der virtuellen Verschiebung auf alle Elemente von  ${}^K_I \mathbf{T}$  entsprechend Gleichung (2.29) an und beachtet die Umformungsregeln aus Gleichung (4.16), so folgt

$$\begin{aligned} \delta \left( {}^K_I \mathbf{T}_{iK} \overrightarrow{S}_i \right) &= \delta \begin{pmatrix} {}^I u_{i,x} & {}^I w_{i,x} & {}^I v_{i,x} & {}^I q_{i,x} \\ {}^I u_{i,y} & {}^I w_{i,y} & {}^I v_{i,y} & {}^I q_{i,y} \\ {}^I u_{i,z} & {}^I w_{i,z} & {}^I v_{i,z} & {}^I q_{i,z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} {}^K S_{i,x} \\ {}^K S_{i,y} \\ {}^K S_{i,z} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \delta \begin{bmatrix} {}^I u_{i,x} {}^K S_{i,x} + {}^I w_{i,x} {}^K S_{i,y} + {}^I v_{i,x} {}^K S_{i,z} + q_{i,x} \\ {}^I u_{i,y} {}^K S_{i,x} + {}^I w_{i,y} {}^K S_{i,y} + {}^I v_{i,y} {}^K S_{i,z} + q_{i,y} \\ {}^I u_{i,z} {}^K S_{i,x} + {}^I w_{i,z} {}^K S_{i,y} + {}^I v_{i,z} {}^K S_{i,z} + q_{i,z} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \begin{bmatrix} {}^I u_{i,x} {}^K S_{i,x} + {}^I w_{i,x} {}^K S_{i,y} + {}^I v_{i,x} {}^K S_{i,z} + q_{i,x} \\ {}^I u_{i,y} {}^K S_{i,x} + {}^I w_{i,y} {}^K S_{i,y} + {}^I v_{i,y} {}^K S_{i,z} + q_{i,y} \\ {}^I u_{i,z} {}^K S_{i,x} + {}^I w_{i,z} {}^K S_{i,y} + {}^I v_{i,z} {}^K S_{i,z} + q_{i,z} \\ 1 \end{bmatrix} \delta \vec{q} \end{aligned}$$

für die virtuelle Verschiebung des Schwerpunkts. Die virtuelle Arbeit ergibt sich damit durch geeignete Umformung zu

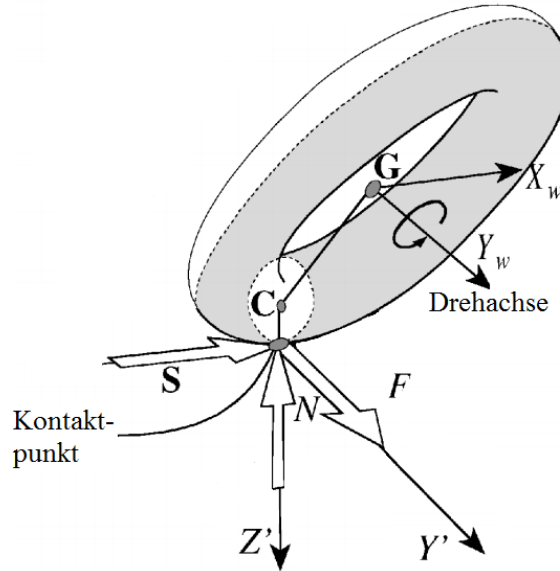
$$\begin{aligned} \delta W_{g,i} &= m_i \left\langle \vec{g}, \delta \left( {}^K_I \mathbf{T}_{iK} \overrightarrow{S}_i \right) \right\rangle \\ &= m_i \left\langle \delta \left( {}^K_I \mathbf{T}_{iK} \overrightarrow{S}_i \right), \vec{g} \right\rangle \\ &= m_i \left( \delta \left( {}^K_I \mathbf{T}_{iK} \overrightarrow{S}_i \right) \right)^T \vec{g}. \end{aligned}$$



In ausführlicher Notation führt dies auf

$$\begin{aligned} \delta W_{g,i} &= m_i \left( \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \begin{bmatrix} I^{u_{i,x}} K S_{i,x} + I^{w_{i,x}} K S_{i,y} + I^{v_{i,x}} K S_{i,z} + q_{i,x} \\ I^{u_{i,y}} K S_{i,x} + I^{w_{i,y}} K S_{i,y} + I^{v_{i,y}} K S_{i,z} + q_{i,y} \\ I^{u_{i,z}} K S_{i,x} + I^{w_{i,z}} K S_{i,y} + I^{v_{i,z}} K S_{i,z} + q_{i,z} \\ 1 \end{bmatrix} \delta \vec{q} \right)^T \vec{g} \\ &= \underbrace{\delta \vec{q}^T m_i \left( \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \begin{bmatrix} I^{u_{i,x}} K S_{i,x} + I^{w_{i,x}} K S_{i,y} + I^{v_{i,x}} K S_{i,z} + q_{i,x} \\ I^{u_{i,y}} K S_{i,x} + I^{w_{i,y}} K S_{i,y} + I^{v_{i,y}} K S_{i,z} + q_{i,y} \\ I^{u_{i,z}} K S_{i,x} + I^{w_{i,z}} K S_{i,y} + I^{v_{i,z}} K S_{i,z} + q_{i,z} \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T}_{\mathbf{Q}_{g,i}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und man erhält einen Ausdruck für die generalisierte Kraft, welche durch die Gravitation entsteht. Der Term  $\mathbf{Q}_{g,i}$  hat die in Gleichung (4.18) und Gleichung (4.19) geforderte Form und ist daher zur Lösung von Gleichung (4.10) geeignet.



**Abbildung 5.2:** Reifenkräfte im Kontaktpunkt von Straße und Reifen [CL02, S. 6]

Der Kraftvektor der Reifenkräfte soll im Kontaktpunkt zwischen Hinterrad und Straße angreifen, wie es in Abbildung 5.2 abgebildet wird. Die definierten Kräfte sind dann mit Hilfe von  $\mathbf{T}'_1$  in das Inertialsystem transformierbar und es gilt

$$\overrightarrow{{}_I F_{T1}} = \mathbf{T}'_{1K} \overrightarrow{F_{T1}}.$$

Sind die Reifenkräfte im Inertialsystem bekannt, so muss deren Einfluss auf die

virtuelle Arbeit durch eine virtuelle Verschiebung und eine virtuelle Rotation modelliert werden. Für den ersten Term ist die Verschiebung des Reifenmittelpunktes  $\overrightarrow{{}_I S_{w1}}$  von Interesse. Es gilt

$$\delta W_{T1,S} = \overrightarrow{{}_I F_{T1}} \delta \overrightarrow{{}_I S_{w1}}.$$

Da der Reifenmittelpunkt gleich dem Ursprung von  $\mathbf{T}_{w1}$  ist, vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\delta W_{T1,S} = \overrightarrow{{}_I F_{T1}} \delta \vec{q}_{w1}.$$

Für den Term der virtuellen Arbeit, welcher durch virtuelle Rotation entsteht, wird der Vektor  $\vec{a}_{T1}$  benötigt, welcher den Schwerpunkt des Hinterrades mit dem Kraftangriffspunkt der Reifenkräfte verbindet. Da dieser Vektor offensichtlich die Ursprünge der Systeme  $\mathbf{T}_{w1}$  und  $\mathbf{T}'_1$  verbindet, lautet er

$$\vec{a}_{T1} = \vec{q}'_1 - \vec{q}_{w1}.$$

Die virtuelle Arbeit lautet dann

$$\delta W_{T1,rot} = \left\langle \vec{a}_{T1} \times \overrightarrow{{}_I F_{T1}}, \mathbf{T}_1 \delta \overrightarrow{\phi}(\mathbf{T}_1) \right\rangle,$$

wobei der Term  $\delta \overrightarrow{\phi}(\mathbf{T}_1)$  der lokalen virtuellen Rotation von  $\mathbf{T}_1$  entspricht, wie er allgemein in Gleichung (4.20) hergeleitet wurde. Die gesamte virtuelle Arbeit der Reifenkräfte des Hinterrades lautet damit

$$\delta W_{W1} = \delta W_{T1,S} + \delta W_{T1,rot} = \overrightarrow{{}_I F_{T1}} \delta \vec{q}_{w1} \left\langle \vec{a}_{T1} \times \overrightarrow{{}_I F_{T1}}, \mathbf{T}_1 \delta \overrightarrow{\phi}(\mathbf{T}_1) \right\rangle$$

Mit den bereits angewandten Umformungsschritten lässt sich auch diese Gleichung in eine generalisierte Arbeit und die virtuelle Verschiebung der generalisierten Koordinaten zerlegen.

Die weiteren Gleichungen, welche notwendig sind, um die gesamte virtuelle Arbeit zu berechnen, sind in [CL02, S.14 f.] angegeben.

Die genaue Modellierung der Reifen ist ein besonderes Merkmal der Arbeit [CL02]. Es wird das Reifenmodell, welches in [Lot04] veröffentlicht wurde, verwendet. Es zeichnet sich dadurch aus, dass der genaue Kontaktpunkt zwischen Reifen und Straße betrachtet wird. Dies wird möglich, indem der Reifen als verformbar angenommen wird. In Folge dieser Modellierung sind die Kennwerte, welche zur Charakterisierung des Reifenverhaltens notwendig sind, von geringer Anzahl und mit vergleichsweise wenig Aufwand messtechnisch zu erfassen.

In der vorliegenden Arbeit wurden die mathematischen Strukturen erläutert, welche zur Beschreibung des dreidimensionalen Raumes mit Vektoren notwendig sind. Die Rechtssysteme wurden eingeführt, mit deren Hilfe mechanische Problemstellungen modelliert und gelöst werden können. Die übliche Darstellung von Vektoren als Tripel wurde um eine vierte Komponente erweitert. Es wurde gezeigt, dass die so erhaltene Darstellung die Beschreibung der Bewegung eines Starrkörpers mittels linearer Abbildungen ermöglicht. Außerdem wurde gezeigt, wie mit Hilfe homogener Koordinaten komplexe Transformationen kompakt darstellbar sind. Die Parametrierung von Mehrkörpersystemen wurde anhand der Methode der natürlichen Koordinaten erläutert. Darüber hinaus wurden grundlegende kinematische Beziehungen unter Beachtung der Verwendung homogener Koordinaten hergeleitet. Insbesondere deren kompakte Formulierung war ein wichtiger Teil dieser Arbeit. Anhand eines Mehrkörpermodells für ein Motorrad wurden die aufgezeigten Verfahren beispielhaft angewandt. Insbesondere die simple Formulierung von Zwangsbedingungen wurde deutlich gemacht. Es zeigte sich, dass Mehrkörpersysteme bei Parametrierung mit natürlichen Koordinaten und unter Verwendung einer homogenen Koordinatendarstellung mit dem Ansatz von Lagrange 2. Art als System von DAEs darstellbar sind. Die bei der Lösung von DAEs auftretenden Probleme wurden aufgezeigt und mögliche Lösungen referenziert.

Für künftige Arbeiten bleibt vor allem die Lösung der DAEs, welche sich aus der Modellierung von mechanischen Systemen ergeben. Insbesondere die Berechnung konsistenter Anfangswerte und die durch Indexreduktion notwendige Stabilisierung der Gleichungen sind Problemstellungen ohne allgemeine Lösungen.

# Literatur

---

- [ABHK13] Tilo Arens u. a. *Grundwissen Mathematikstudium*. Springer Science + Business Media, 2013.
- [ACPR95] Uri M. Ascher u. a. „Stabilization of Constrained Mechanical Systems with DAEs and Invariant Manifolds“. In: *Mechanics of Structures and Machines* 23.2 (1995), S. 135–157.
- [Aki17] Nicholas Wladimir Akimoff. *Elementary course in Lagrange’s equations and their applications to solutions of problems of dynamics, with numerous examples*. Philadelphia, Pa., Philadelphia book company, 1917.
- [Ass75] Günter Asser. *Grundbegriffe der Mathematik. 1, Mengen, Abbildungen, natürliche Zahlen. 2.*, berichtigte Aufl. Berlin : Dt. Verl. d. Wiss., 1975.
- [Bau72] J. W. Baumgarte. „Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1.1 (1972), S. 1–16.
- [Bau83] J. W. Baumgarte. „A New Method of Stabilization for Holonomic Constraints“. In: *Journal of Applied Mechanics* 50.4a (1983), S. 869.
- [BCP95] K. E. Brenan, S. L. Campbell und L. R. Petzold. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), 1995.
- [Bes12] Dieter Bestle. *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Springer, 2012. 268 Seiten.

- 
- [BHP98] Peter N. Brown, Alan C. Hindmarsh und Linda R. Petzold. „Consistent Initial Condition Calculation for Differential-Algebraic Systems“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 19.5 (1998), S. 1495–1512.
- [Bos14] Siegfried Bosch. *Lineare Algebra*. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [BSP10] I. J.M. Besselink, A. J.C. Schmeitz und H. B. Pacejka. „An improved Magic Formula/Swift tyre model that can handle inflation pressure changes“. In: *Vehicle System Dynamics* 48.Supp 1 (2010), S. 337–352.
- [Can95] Georg Cantor. „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“. In: *Mathematische Annalen* 46 (1895).
- [CL02] Vittore Cossalter und Roberto Lot. „A Motorcycle Multi-Body Model for Real Time Simulations Based on the Natural Coordinates Approach“. In: *Vehicle System Dynamics* 37.6 (2002), S. 423–447.
- [CLM10] V. Cossalter, R. Lot und M. Massaro. „An advanced multibody code for handling and stability analysis of motorcycles“. In: *Meccanica* 46.5 (2010), S. 943–958.
- [CP03] M.B. Cline und D.K. Pai. „Post-stabilization for rigid body simulation with contact and constraints“. In: *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.03CH37422)*. Institute of Electrical und Electronics Engineers (IEEE), 2003.
- [FBR01] G. Fábíán, D.A. Van Beek und J.E. Rooda. „Index Reduction and Discontinuity Handling Using Substitute Equations“. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 7.2 (2001), S. 173–187.
- [FMSS11] Paulo Flores u. a. „A Parametric Study on the Baumgarte Stabilization Method for Forward Dynamics of Constrained Multibody Systems“. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 6.1 (2011), S. 011019.
-

- 
- [FPMS06] Paulo Flores u. a. *The Pneumatic Tire*. Hrsg. von Alan N. Gent und Joseph D. Walter. National Highway Traffic Safety Administration, Washington, DC, 2006.
- [FPMS08] Paulo Flores u. a. „Investigation on the Baumgarte Stabilization Method for Dynamic Analysis of Constrained Multibody Systems“. In: *Proceedings of EUCOMES 08*. Springer Science + Business Media, 2008, S. 305–312.
- [Gat11] Hubert Gattringer. *Starr-elastische Robotersysteme*. Springer Nature, 2011.
- [Gea88] C. W. Gear. „Differential-Algebraic Equation Index Transformations“. In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 9.1 (1988), S. 39–47.
- [GHSW06] Dietmar Gross u. a. *Technische Mechanik Band 3: Kinetik*. 9. Aufl. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [GP83] C. W. Gear und L. R. Petzold. „Singular implicit ordinary differential equations and constraints“. In: *Numerical Methods*. Springer Nature, 1983, S. 120–127.
- [HD91] Edward J. Haug und Roderic C. Deyo, Hrsg. *Real-Time Integration Methods for Mechanical System Simulation*. Springer Science + Business Media, 1991.
- [HKSS12] Manfred Husty u. a. *Kinematik und Robotik*. Springer, 2012. 652 Seiten.
- [Hum02] J. L. Humar. *Dynamics of Structures: Second Edition*. TAYLOR & FRANCIS, 2002. 967 Seiten.
- [Hus86] R. L. Huston. „Useful Procedures in Multibody Dynamics“. In: *Dynamics of Multibody Systems*. Springer Nature, 1986, S. 69–77.
- [HW10] Ernst Hairer und Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II*. Springer-Verlag GmbH, 2010. XV S.
- [IR13] Achim Ilchmann und Timo Reis, Hrsg. *Surveys in Differential-Algebraic Equations I*. Springer Nature, 2013.
- [IR15a] Achim Ilchmann und Timo Reis, Hrsg. *Surveys in Differential-Algebraic Equations II*. Springer International Publishing, 2015.
-

- 
- [IR15b] Achim Ilchmann und Timo Reis, Hrsg. *Surveys in Differential-Algebraic Equations III*. Springer International Publishing, 2015.
- [Jal07] Javier García de Jalón. „Twenty-five years of natural coordinates“. In: *Multibody System Dynamics* 18.1 (2007), S. 15–33.
- [Jän05] Klaus Jänich. *Vektoranalysis*. Springer-Verlag GmbH, 2005. 275 S.
- [JB94] Javier García de Jalón und Eduardo Bayo. *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer New York, 1994.
- [JSG07] Javier García de Jalón, Nobuyuki Shimizu und David Gómez. „Natural Coordinates for Teaching Multibody Systems With Matlab“. In: *Volume 5: 6th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B, and C*. ASME International, 2007.
- [KU07] Hideaki Kanoh und Tsubasa Uchida. „Modeling of a Two-Wheeled Vehicle Compensated for Exact Contact of the Wheel to the Ground Plane and Simulation“. In: *First Asia International Conference on Modelling & Simulation (AMS'07)*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2007.
- [LM15] Luca Leonelli und Nicolò Mancinelli. „A multibody motorcycle model with rigid-ring tyres: formulation and validation“. In: *Vehicle System Dynamics* 53.6 (2015), S. 775–797.
- [Lot04] Roberto Lot. „A Motorcycle Tire Model for Dynamic Simulations: Theoretical and Experimental Aspects“. In: *Meccanica* 39.3 (2004), S. 207–220.
- [LS06] D.J.N. Limebeer und R.S. Sharp. „Bicycles, motorcycles, and models“. In: *IEEE Control Systems Magazine* 26.5 (2006), S. 34–61.
- [Mat15] Friedrich U. Mathiak. *Technische Mechanik 3*. Gruyter, Walter de GmbH, 2015.
- [MK14] Florian Modler und Martin Kreh. *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*. Springer Nature, 2014.
-

- [MLS94] Richard M. Murray, Zexiang Li und S. Shankar Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC PR INC, 1994. 480 Seiten.
- [MM05] Kurt Magnus und Hans Heinrich Müller-Slany. *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Teubner B.G. GmbH, 2005. 302 Seiten.
- [NA03] Maria Augusta Neto und Jorge Ambrósio. „Stabilization Methods for the Integration of DAE in the Presence of Redundant Constraints“. In: *Multibody System Dynamics* 10.1 (2003), S. 81–105.
- [NASM13] L. Nehaoua u. a. „Dynamic modelling of a two-wheeled vehicle: Jourdain formalism“. In: *Vehicle System Dynamics* 51.5 (2013), S. 648–670.
- [Pac12] Hans B. Pacejka. „Tire Characteristics and Vehicle Handling and Stability“. In: *Tire and Vehicle Dynamics*. Elsevier BV, 2012, S. 1–58.
- [Pap14] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*. Springer Science + Business Media, 2014.
- [PB92] Hans B. Pacejka und Egbert Bakker. „THE MAGIC FORMULA TYRE MODEL“. In: *Vehicle System Dynamics* 21.Supp 1 (1992), S. 1–18.
- [PC88] K. C. Park und J. C. Chiou. „Stabilization of computational procedures for constrained dynamical systems“. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 11.4 (1988), S. 365–370.
- [PS09] Matthias Plaue und Mike Scherfner. *Mathematik für das Bachelorstudium I*. Spektrum-Akademischer Vlg, 2009. XIV S.
- [PS14] Friedrich Pfeiffer und Thorsten Schindler. *Einführung in die Dynamik*. Springer Nature, 2014.
- [RD14] Bharat Mohan Redrouthu und Sidharth Das. „Tyre modelling for rolling resistance“. 2014.
- [Red02] J. N. Reddy. *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. JOHN WILEY & SONS INC, 2002. 608 Seiten.



- 
- [Rie07] Thomas Rießinger. „Vektorrechnung“. In: *Mathematik für Ingenieure*. Springer, 2007.
- [RRMR07] André Röthlisberger u. a. *Vektoralgebra*. Vorlesungsskript Multilineare Algebra und ihre Anwendungen, SS 2007. 2007.
- [RS14] Georg Rill und Thomas Schaeffer. *Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation*. Vieweg+Teubner Verlag, 2014. xi S.
- [SE14] Werner Schiehlen und Peter Eberhard. *Technische Dynamik*. Springer Nature, 2014.
- [Sha01] Robin S. Sharp. „Stability, Control and Steering Responses of Motorcycles“. In: *Vehicle System Dynamics* 35.4-5 (2001), S. 291–318.
- [SHA85] R. S. SHARP. „The Lateral Dynamics of Motorcycles and Bicycles“. In: *Vehicle System Dynamics* 14.4-6 (1985), S. 265–283.
- [SHB10] Dieter Schramm, Manfred Hiller und Roberto Bardini. *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. Springer Nature, 2010.
- [SL01] Robin S. Sharp und David J.N. Limebeer. „A Motorcycle Model for Stability and Control Analysis“. In: *Multibody System Dynamics* 6.2 (2001), S. 123–142.
- [SM13] A. L. Schwab und J. P. Meijaard. „A review on bicycle dynamics and rider control“. In: *Vehicle System Dynamics* 51.7 (2013), S. 1059–1090.
- [SRF90] B. Simeon, P. Rentrop und C. Führer. *Introduction to Differential-Algebraic Equations in Vehicle System Dynamics*. sonstiger Bericht. TUM/M 9006. 1990.
- [Sto12] Jürgen Stoffregen. *Motorradtechnik*. Vieweg+Teubner Verlag, 2012. x488 S.
- [TCS14] Mara Tanelli, Matteo Corno und Sergio Saveresi. *Modelling, Simulation and Control of Two-Wheeled Vehicles*. JOHN WILEY & SONS INC, 2014. 348 Seiten.
- [Wlo92] Dieter W. Wloka. *Robotersysteme 1*. Springer Nature, 1992.
- [Woe11] Christoph Woernle. *Mehrkörpersysteme*. Springer Nature, 2011.
-