

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	V
1 Mathematische Grundlagen	1
1.1 Einführung	1
1.2 Mengen	3
1.3 Körper	3
1.4 Gruppen	4
1.5 Vektorräume	4
1.6 Punkte und Vektoren	5
1.6.1 Vektoren	5
2 Koordinatensysteme	11
2.1 Rechtssystem	11
2.2 Natürliche Koordinaten	11
2.3 Homogene Koordinatensysteme	11
2.4 Koordinatentransformation	12
2.5 Rotationsmatrizen	13
2.5.1 Eigenschaften von Rotationsmatrizen	14
3 Grundlagen der Mechanik	17
3.1 Starrkörperbewegung	17
3.1.1 Vektor der Winkelgeschwindigkeit	21
3.2 Lagrange Gleichung 2. Art	22
3.2.1 Kinetische Energie	23
3.2.2 Prinzip der virtuellen Arbeit	24

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1.1 Einführung

Bei der Analyse von Problemen ist es in der Mathematik ebenso wie in anderen Fachbereichen üblich, mit Hilfe von Modellen möglichst einfache Grundstrukturen zu finden, welche für die Lösung des untersuchten Problems von Interesse sind. Dabei kann die gezielte Untersuchung eines einzelnen Modells losgelöst von der eigentlichen Problemstellung durchgeführt werden. Dadurch ist ein Modell in der Regel leichter überschaubar, als das eigentliche Problem.

Die Beschreibung des dreidimensionalen Raumes baut auf einer Reihe von Grundstrukturen auf. Die Basis bilden Mengen, deren Elemente und Abbildungen (siehe Abschnitt 1.2). Darauf aufbauend werden Gruppen (siehe 1.4) und Körper (siehe 1.3) definiert. Anschließend können Vektorräume über einem Körper und deren Elemente - die Vektoren - definiert werden (siehe 1.5). Der dreidimensionale Raum lässt sich dann mit Hilfe geeigneter Basisvektoren als Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen in Form eines Koordinatensystems darstellen. Für Vektoren und Matrizen werden bestimmte Rechenregeln (insbesondere Addition und Multiplikation) definiert und deren Handhabung in speziellen Koordinatensystemen beschrieben.

Zur Beschreibung des dreidimensionalen Raumes stellen wir uns eine Ebene E vor, welche beliebig in dem uns umgebenden Raum liegt. Jetzt wählen wir einen beliebigen Punkt dieser Ebene aus, und bezeichnen diesen als Nullpunkt O eines Koordinatensystems. Anschließend legen wir Drei Koordinatenachsen X, Y , und Z mit Hilfe von Geraden fest. Alle Drei Geraden sollen sich dabei im Punkt O schneiden und die reellen Zahlen komplett durchlaufen. Weiterhin sollen keine zwei Geraden parallel zueinander sein. Zusätzlich sollen die Geraden paarweise derart senkrecht aufeinander stehen, dass sie ein Rechtssystem bilden.

Außerdem definieren wir auf jeder Achse einen speziellen Punkt: I_x, I_y und I_z . Dieser Punkt hat vom Ursprung, entlang der jeweiligen Achse auf der er liegt, genau den Abstand 1. Man nennt diesen Abstand *Einheitslänge*.

Wir definieren einen Vektor \vec{e}_x , welcher vom Ursprung auf den Punkt I_x zeigt und zwangsläufig auf der Geraden X liegt. Analog definieren wir die Vektoren \vec{e}_y und \vec{e}_z . Diese Vektoren mit *Einheitslänge*, welche entlang der Koordinatenachsen liegen, nennen wir *Einheitsvektoren*. Als Tripel notiert haben sie entlang der Achse, in welche sie zeigen, eine 1 als Eintrag und sonst eine 0. Damit gilt $\vec{e}_x = (1,0,0)$, $\vec{e}_y = (0,1,0)$, $\vec{e}_z = (0,0,1)$. Durch die genannten Bedingungen ist es nicht möglich einen der *Einheitsvektoren* als *Linearkombination* der Anderen darzustellen. Damit bilden diese *Einheitsvektoren* die *Basis* für einen *Vektorraum* V (den dreidimensionalen Raum).

Weiterhin definieren wir einen Streckungsfaktor $\alpha \in \mathcal{R}$. Mit Hilfe von $\alpha \cdot I_x$ beschreiben wir das Bild des Punktes I_x , welches sich durch Streckung mit Streckungszentrum im Ursprung O , entlang der x -Achse, um den Streckungsfaktor α ergibt. Die Zuordnung $\alpha \rightarrow \alpha \cdot I_x$ liefert damit eine eindeutige, umkehrbare Zuordnung der reellen Zahlen auf die Punkte der Gerade x . Dabei ist das Bild der Streckung des *Einheitsvektors* \vec{e}_x äquivalent mit dem Bild der Streckung des Punktes I_x . Weiterhin definieren wir für die Achsen Y und Z die Streckungsfaktoren β und γ .

Mit Hilfe dieser Festlegungen können beliebige Punkte im Raum beschrieben werden. Alle Punkte des Raumes bilden dabei die *Menge* R^3 . Man sagt, dass die Punkte *Elemente* dieser *Menge* sind. Betrachtet man zum Beispiel einen Punkt auf der Ebene E , so kann man dieses *Element* als Tripel von reellen Zahlen interpretieren: $P = (x_1, y_1, z_1)$. Man nennt dieses Tripel die *Koordinaten* von P (bezüglich des gewählten Koordinatensystems). Der Ursprung des Koordinatensystems hat bezüglich des Koordinatensystems, dessen Ursprung er ist, immer die Koordinaten $(0,0,0)$. Den Wert von x_1 erhält man geometrisch durch Konstruktionen einer Normalen bezüglich der x -Achse, welche den Punkt P durchläuft. Den Fußpunkt dieser Normalen kann man durch Streckung des zuvor definierten Punktes I_x um den Faktor α_P erhalten. Dabei entspricht eben diese reelle Zahl α_P dem Wert von x_1 .

Die Werte für y_1 und z_1 ergeben sich analog. Die so erhaltene Zuordnung


$P \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$ bezeichnet man als eine Abbildung. Mit Hilfe dieser Abbildung wird beliebigen Punkten der Ebene E in eindeutiger Weise ein Zahlentripel von reellen Zahlen zugeordnet. Man sagt auch, dass dieses Zahlentripel ein *Element* des *Vektorraumes* V ist, welcher über dem *Körper* der reellen Zahlen definiert ist. Da die Achsen des Koordinatensystems durch die *Basis* des *Vektorraumes* beschrieben werden sind die Zahlenwerte des Tripels zwangsläufig abhängig von der Wahl der Koordinatensystemursprungs und der *Basisvektoren*.

Da dieses Zahlentripel nicht nur ein *Element* einer *Menge*, sondern ein Vektor eines *Vektorraumes* ist, gibt es alternative Schreibweisen für den Punkt P . Die üblichste Alternative ist die Darstellung als Spaltenvektor $\vec{v} \in \mathcal{R}^3$. Dabei erhält man \vec{v} durch Subtraktion der Koordinaten des Punktes P von den Koordinaten des gewählten Koordinatenursprungs. Beziehen sich alle Angaben auf das gleiche System, so entsprechen die Komponenten von \vec{v} genau Koordinaten von P und

die Darstellung als Spaltenvektor lautet: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$. Man kann \vec{v} auch als

Linearkombination der *Basis* des *Vektorraumes* V darstellen:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z = \alpha_P \vec{e}_x + \beta_P \vec{e}_y + \gamma_P \vec{e}_z$$

Bemerkung 1.1. Die Beschränkung auf die Betrachtung von Rechtssystemen ist als einführendes Beispiel besonders gut geeignet, da alle in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensysteme die damit verbundenen Eigenschaften erfüllen sollen. Wollte man auch nicht orthogonale Koordinatensystem betrachten, so führt dies zwangsläufig auf die Betrachtung von kovarianten und kontravarianten Basen und die Tensorrechnung. Eine gut lesbare Einführung in dieses Thema ist [1] zu entnehmen. Eine ausführliche Behandlung der Thematik ist in [2] enthalten. 

1.2 Mengen

1.3 Körper

Körper sind Zahlssysteme mit gewissen Axiomen für die Addition und Multiplikation, welche auf den Axiomen von Gruppen aufbauen.

Text...

1.4 Gruppen

Unter einer *inneren Verknüpfung* auf einer Menge \mathcal{M} versteht man eine Abbildung $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Sie ordnet jedem Paar (a, b) von Elementen aus \mathcal{M} ein Element $f(a, b) \in \mathcal{M}$ zu. Die innere Verknüpfung muss also eine abgeschlossene Verknüpfung sein. Es wird die Notation $a \cdot b$ anstelle von $f(a, b)$ verwendet, um den verknüpfenden Charakter der Abbildung zu verdeutlichen.

Definition 1. Eine Menge \mathcal{G} mit einer inneren Verknüpfung $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, (a, b) \rightarrow a \cdot b$, heißt eine Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Die Verknüpfung ist assoziativ, d. h. es gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}. \quad (1.1)$$

- Es existiert ein neutrales Element e in \mathcal{G} , das heißt ein Element $e \in \mathcal{G}$ mit

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \forall a \in \mathcal{G}. \quad (1.2)$$

- Zu jedem $a \in \mathcal{G}$ gibt es ein inverses Element, das heißt ein Element $b \in \mathcal{G}$ mit

$$a \cdot b = b \cdot a = e. \quad (1.3)$$

Dabei ist e das nach Gleichung (1.2) existierende (eindeutig bestimmte) neutrale Element von \mathcal{G} .

- Die Gruppe heißt kommutativ oder abelsch, falls die Verknüpfung kommutativ ist, das heißt falls zusätzlich gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathcal{G}. \quad (1.4)$$

1.5 Vektorräume

Vektorräume enthalten als fundamentale Struktur zwei Rechenoperationen: die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation mit einem Skalar (einem Element

des Körpers, über dem der Vektorraum definiert ist). Addition und Multiplikation genügen den so genannten Vektorraumaxiomen, welche bezüglich der Addition auf den Gruppenaxiomen aufbauen.

Text....

1.6 Punkte und Vektoren

Zur Beschreibung eines Punktes wird ein Koordinatensystem benötigt. Ein Punkt wird eindeutig durch seine *Position* relativ zu diesem Koordinatensystem beschrieben. Als Koordinatensystem wird das Koordinatensystem I aus 2.1 verwendet. Die Position eines Punktes p kann dann wie folgt beschrieben werden:

$$p = (x|y|z) \in \mathcal{R}^3 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Die Position von p ist damit relativ zu I eindeutig beschrieben.

1.6.1 Vektoren

Unter einem Vektor $\vec{a} \in \mathcal{R}^3$ versteht man einen Pfeil, welcher durch seine *Richtung* und seinen *Betrag* beziehungsweise seine Länge eindeutig charakterisiert wird. Die Begriffe Betrag und Länge werden im Folgenden synonym verwendet. Mit beiden Eigenschaften ist die euklidische Norm des Vektors \vec{a} gemeint. Die folgende Darstellung wird für den Betrag eines Vektors \vec{a} verwendet:

$$|\vec{a}| \equiv a := \|\vec{a}\|$$

Für einen Vektor \vec{a} gilt immer:

$$|\vec{a}| \geq 0$$

Beschreibt ein Vektor die Ausprägung einer physikalischen Größe, so gehört zu deren vollständiger Beschreibung zusätzlich zu Betrag und Richtung noch die Angabe einer Maßeinheit. Ein typisches Beispiel ist der Betrag einer Kraft $\vec{F} : |\vec{F}| = 100 \cdot N$

Bei der Arbeit mit Vektoren wird zwischen verschiedenen Typen unterschieden [3, S. 26]:

- *Freie Vektoren*¹ können beliebig im Raum verschoben werden, so lange Richtung und Betrag konstant bleiben. Damit sind parallele Verschiebungen und Verschiebungen entlang der Wirkungslinie möglich. Dieser Typ von Vektoren wird in der Regel gemeint, wenn man von Vektoren spricht. Ein typisches Beispiel sind die Einheitsvektoren \vec{e} , mit denen die Koordinatenachsen eines Koordinatensystems beschrieben werden.
- *Gebundene Vektoren* beziehen sich auf einen festen Ursprung, von dem aus sie abgetragen werden. Ein typisches Beispiel dafür ist der Ortsvektor \vec{r} eines Raumpunktes R , welcher von einem spezifischen Koordinatenursprung O aus angetragen wird: $\vec{r} = P - O = \overrightarrow{OP}$. In diesem Zusammenhang bezeichnet man den Punkt R häufig als „Punkt R mit dem Ortsvektor \vec{r} “ und notiert wahlweise $P \equiv \vec{r}$.

Da die Notation von Punkten im Sinne eines Ortsvektors und die Notation von Richtungsvektoren identisch ist, kommt es leicht zu Verwechslungen. Erschwerend kommt hinzu, dass die Konzepte von Punkt und Vektor in der Literatur häufig nicht gesondert betrachtet werden. Es ist damit die Aufgabe des Lesers sich klar zu machen, ob mit \vec{a} ein Richtungsvektor oder ein Punkt gemeint ist. Verwendet man zur Darstellung Homogene Koordinaten (siehe 2.3) so ist die Unterscheidung von Punkten und Vektoren offensichtlich.

Für die Darstellung von Vektoren gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine Variante ist die bereits verwendete Angabe von Anfangspunkt q und Endpunkt p

$$\vec{a} = p - q \equiv \overrightarrow{qp}.$$

Bei *freien Vektoren* ist die Wahl der Anfangs- und Endpunkte jedoch nicht eindeutig. Es gibt also Punkte r, s , für die gilt:

$$\vec{a} = p - q = r - s$$

mit

$$p \neq r \text{ und } q \neq s$$

Für einen *gebundenen Vektor* gibt es keine solche Punkte r, s . Durch die Angabe eines Bezugspunktes, die Richtung und den Betrag des Vektors ist auch der Endpunkt eindeutig bestimmt.

Eine weitere Darstellung für Vektoren ist die Komponentenschreibweise bezüglich

¹ *freie Vektoren* werden auch als *Richtungsvektoren* bezeichnet

eines Koordinatensystems I , welche durch Projektion auf die Basisvektoren von I gegeben ist.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

damit ergibt sich der Betrag eines Vektor zu

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \end{aligned}$$

Wenn bekannt ist, dass mit \vec{a} ein Vektor gemeint ist, so notiert man den Betrag des Vektors in Kurzform mit a .

Man bezeichnet die Skalare x, y, z als die *Komponenten*, *Koordinaten* oder auch *Einträge* des Vektors \vec{a} . Der linksseitige Index I kennzeichnet das verwendete Bezugssystem. Ist das Bezugssystem eindeutig, so wird dieser Index weggelassen.

Folgende Eigenschaften gelten für Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ (nach [4]):

- Vektoren sind *gleich*, wenn sie in Richtung und Betrag übereinstimmen

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |a| = |b| \wedge \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

- **Addition**/ Subtraktion von Vektoren erfolgt durch Addition/ Subtraktion der Komponenten

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \pm x' \\ y \pm y' \\ z \pm z' \end{pmatrix}$$

Es gelten die Rechenregeln:

- Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \pm \vec{b} + \vec{a}$$

- Assoziativgesetz:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- Multiplikation mit einem Skalar $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$ erfolgt durch Multiplikation aller Komponenten mit dem Skalar

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix}$$

Es gelten die Rechenregeln:

- Distributivgesetz:

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

- weitere Regeln:

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$$(\lambda \mu) \vec{a} = \lambda (\mu \vec{a}) = \mu (\lambda \vec{a})$$

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

- Das **Skalarprodukt skalarProd!** zweier Vektoren ist das Produkt der Beträge und dem Kosinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels φ

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |a| |b| \cos \varphi = (x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3) (x' \vec{e}_1 + y' \vec{e}_2 + z' \vec{e}_3)$$

Es gelten die Rechenregeln:

- Kommutativgesetz:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

- Distributivgesetz:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

- weitere Regeln:

$$\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle$$

Bemerkung 1.2 (Orthogonale Vektoren). Verschwindet das Skalarprodukt zweier von Null verschiedenen Vektoren, so stehen diese senkrecht aufein-

ander.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$



Bemerkung 1.3 (Winkel zwischen Vektoren). Der Kosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren ergibt sich aus dem Quotienten vom Skalarprodukt der beiden Vektoren und dem Produkt der Beträge der Vektoren.

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$$



Bemerkung 1.4 (Richtungskosinus). Ein Vektor \vec{a} bildet mit den drei Koordinatenachsen seines Bezugssystems der Reihe nach die Winkel α, β, γ , die als *Richtungswinkel* bezeichnet werden. Der Kosinus der jeweiligen Winkel wird als Richtungskosinus bezeichnet.

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{a_x}{a} \quad \cos \beta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_2 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_2|} = \frac{a_y}{a} \quad \cos \gamma = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{a}| |\vec{e}_3|} = \frac{a_z}{a}$$

Die Richtungswinkel sind jedoch nicht voneinander unabhängig, sondern über die Beziehung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

miteinander verknüpft.



- das **Vektorprodukt** (auch Kreuzprodukt) $\vec{a} \times \vec{b}$ hat als Ergebnis einen Vektor, der senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} steht und dessen Länge gleich dem Produkt der Beträge von \vec{a} , \vec{b} und dem Sinus des durch die Vektoren eingeschlossenen Winkels φ ist.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vartheta)) \vec{n} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Dabei ist \vec{n} derjenige zu \vec{a} und \vec{b} senkrechte Einheitsvektor, der diese zu einem Rechtssystem ergänzt.

Es gelten die Rechenregeln:

– Distributivgesetz:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

– Anti-Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

– weitere Regeln:

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$$

Da das Kreuzprodukt mit dem Vektor \vec{a} eine lineare Abbildung ist, kann $\vec{b} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b}$ mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{\mathbf{a}} \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

2.1 Rechtssystem

Gegeben sei ein euklidisches Koordinatensystem $I \in \mathcal{R}^3$ mit den Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Für die Basisvektoren gelte:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$

und weiterhin

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad (2.2)$$

Die Basisvektoren von I beschreiben damit ein orthonormales Rechtssystem (siehe beispielsweise [4, S. 80]). Im Folgenden wird, wenn nicht explizit anderweitig angegeben, davon ausgegangen, dass alle verwendeten Koordinatensysteme diese Eigenschaften erfüllen.

2.2 Natürliche Koordinaten

engl. natural coordinates wie ist der richtige deutsche Begriff?

2.3 Homogene Koordinatensysteme

Translation eines Vektors $\vec{v} = (x, y, z)^T$ mit einem Vektor $\vec{q} = (a, b, c)^T$:

$$\vec{v}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

statt

$$\vec{v}' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \end{bmatrix}.$$

Eine Rotationsmatrix \mathbf{R} erfüllt stets die Bedingung:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{E}$$

Eine Transformationsmatrix \mathbf{T} , welche sich aus Rotation \mathbf{R} und Translation \vec{q} zusammensetzt, wird in homogenen Koordinaten beschrieben mit:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & q_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & q_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Inverse dieser Transformationsmatrix berechnet sich unter Beachtung der Orthogonalitätseigenschaft von \mathbf{R} zu

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Betrachtet man hingegen eine Transformationsmatrix im \mathcal{R}^3 , welche eine Rotation beinhaltet, so wird die inverse dieser Transformation nach folgenden Regeln berechnet:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{R} \\ \mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \end{aligned}$$

2.4 Koordinatentransformation

Gegeben seien ein inertiales Koordinatensystem I und zwei, um eine beliebige Achse in Relation zu I gedrehte, Koordinatensysteme B, C .

Rotationen Es sei ein Punkt $q_b = (x_b, y_b, z_b)^T$ im Koordinatensystem B gegeben. Werden die Koordinatenachsen von B durch die Einheitsvektoren $\vec{e}_{1b}, \vec{e}_{2b}, \vec{e}_{3b}$ im Inertialsystem I beschrieben, so kann der Punkt von B nach

I durch eine Transformation überführt werden:

$$q_i = \begin{pmatrix} \vec{e}_{1b} & \vec{e}_{2b} & \vec{e}_{3b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{ib} q_b$$

Der Index der Transformationsmatrix ist so zu verstehen, dass der erste Buchstabe das Zielsystem und der zweite Buchstabe das Ursprungssystem der Transformationsmatrix angibt.

Analog zur Transformation eines Punktes kann auch ein Vektor $\vec{v}_b = q_b - p_b$, welcher im System B definiert wurde, in das System I transformiert werden:

$$\vec{v}_i = \mathbf{R}_{ib} \vec{v}_b = \mathbf{R}_{ib} q_b - \mathbf{R}_{ib} p_b = q_i - p_i.$$

Weiterhin können Transformationen aneinandergereiht werden. Beschreibt die Transformationsmatrix \mathbf{R}_{bc} die Verdrehung von C relativ zu B , so erhält man die Transformationsmatrix von C nach I durch eine Kombination der Transformation vom System C in das System B mit der Transformation vom System B in das System I . Die Kombination erfolgt dabei durch linksseitige Matrixmultiplikation der jeweiligen Transformationsmatrizen in der angegebenen Reihenfolge.

$$\mathbf{R}_{ic} = \mathbf{R}_{ib} \mathbf{R}_{bc}$$

Rotation und Translation

2.5 Rotationsmatrizen

Gegeben sei ein Koordinatensystem K , welches um eine Achse l relativ zu einem inertialen Koordinatensystem I gedreht wurde. Die Orientierung dieser Drehachse sei durch einen Vektor \vec{l} mit Einheitslänge beschrieben. Die Achsen von K relativ zu I seien gegeben durch die Vektoren $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3$. Die drei Spaltenvektoren werden horizontal zu einer Matrix

$$\mathbf{R} = [\vec{u} \quad \vec{w} \quad \vec{v}] = \begin{pmatrix} u_x & w_x & v_x \\ u_y & w_y & v_y \\ u_z & w_z & v_z \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

zusammengefasst. Die Matrix \mathbf{R} wird als Rotationsmatrix bezeichnet.

2.5.1 Eigenschaften von Rotationsmatrizen

Die Spalten der Rotationsmatrix $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ seien die Vektoren $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3$. Da diese ein Koordinatensystem aufspannen haben sie die in Gleichung (2.1) und Gleichung (2.2) definierten Eigenschaften. Aus Gleichung (2.1) folgt für die Matrix \mathbf{R}

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{w} & \vec{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (2.4)$$

und mit Hilfe der Regeln der linearen Algebra [4, S. 100] und Gleichung (2.1)

$$\det \mathbf{R} = \langle \vec{u}, \vec{w} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 \quad (2.5)$$

Die Menge der orthogonalen 3×3 Matrizen mit der Determinante eins wird als $\mathcal{SO}(3)$ bezeichnet [5]. Allgemein wird definiert:

$$\mathcal{SO}(n) = \{ \mathbf{R} \in \mathcal{R}^{n \times n} : \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = +1 \}. \quad (2.6)$$

Die Menge $\mathcal{SO}(3) \subset \mathcal{R}^{3 \times 3}$ bildet mit der Abbildungsvorschrift *Matrixmultiplikation* eine Gruppe entsprechend den im Abschnitt 1.4 geforderten Regeln. Die geforderten Eigenschaften werden wie folgt erfüllt:

- Die Verknüpfung ist abgeschlossen. Für $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \mathcal{SO}(3)$ gilt auch $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \in \mathcal{SO}(3)$, da

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 (\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^T = \mathbf{I} \quad (2.7)$$

$$\det(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = \det(\mathbf{R}_1)\det(\mathbf{R}_2) = +1 \quad (2.8)$$

gilt.

- Die Gruppe $\mathcal{SO}(3)$ ist assoziativ

Aus der Assoziativität der Matrixmultiplikation (Beweis siehe z. B. [6, S. 93]) folgt

$$(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3) \quad (2.9)$$

- Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element

$$\mathbf{I}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{R} \quad \forall \mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3) \quad (2.10)$$

mit

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aus Gleichung (2.4) folgt, dass $\mathbf{R}^T \in \mathcal{SO}(3)$ das inverse Element von $\mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3)$ ist.

Bemerkung 2.1. Die Lage eines Starrkörpers, welcher sich frei im Raum drehen kann, kann zu jedem Zeitpunkt durch eine eindeutige Rotationsmatrix $\mathbf{R} \in \mathcal{SO}(3)$ beschrieben werden. Die Menge der Rotationsmatrizen $\mathcal{SO}(3)$ wird daher als der Konfigurationsraum des Systems bezeichnet. Eine Trajektorie des Systems wird durch die Kurve $\mathbf{R}(t) \in \mathcal{SO}(3)$ für $t \in [0, T]$ abgebildet. Weiterhin dient die Matrix \mathbf{R} zur Transformation von Punkten von einem körperfesten, um eine beliebige Achse gedrehten, Koordinatensystem in ein Inertialsystem. Diese Funktion ist in Abschnitt 2.4 genauer dargelegt. \blacklozenge

3.1 Starrkörperbewegung

Die Bewegung eines Punktes p im euklidischen Raum wird durch die Angabe seiner Position in Bezug zu einem inertialen Koordinatensystem I zu jedem Zeitpunkt $\mathbf{t}!$ eindeutig beschrieben. Die Position des Punktes p sei durch das Tripel $(x, y, z) \in \mathcal{R}^3$ gegeben. Die Trajektorie von p kann dann durch die parametrisierte Bahn $p(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{R}^3$ beschrieben werden. Da nicht die Bewegung von einzelnen Punkten, sondern die Bewegung eines Starrkörpers beschrieben werden soll, soll zunächst der Begriff Starrkörper definiert werden.

Definition 2 (Starrkörper). *Ein Starrkörper ist dadurch gekennzeichnet, dass die Distanz zweier beliebiger Punkte p, q , welche auf dem Körper liegen, unabhängig von der Bewegung des Körpers, immer konstant bleibt. Die anfängliche Position des Punktes p sei beschrieben durch $p(0)$. Die Position nach einer beliebigen Zeit $\mathbf{t}!$ (und einer beliebigen Bewegung) sei beschrieben durch $p(t)$. Die Nomenklatur gelte für den Punkt q analog. Für einen Starrkörper wird gefordert:*

$$\|q(t) - p(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = \text{konstant}$$

Eine Starrkörperbewegung kann prinzipiell aus Rotation, Translation oder einer Überlagerung dieser Bewegungen bestehen. Wird ein Körper durch eine Teilmenge $O \in \mathcal{R}^3$ beschrieben, so kann seine Bewegung als eine kontinuierliche Zuordnung $g(t) : O \rightarrow \mathcal{R}^3$ beschrieben werden. Die kontinuierliche Zuordnungsvorschrift $g(t)$ beschreibt, wie sich die einzelnen Punkte des Körpers relativ zu einem inertialen, festen Koordinatensystem mit Voranschreiten der Zeit $\mathbf{t}!$ bewegen. Die Zuordnungsvorschrift g darf dabei die Distanz zwischen Punkten des Körpers und die Orientierung von Vektoren, welche Punkte des Körpers verbinden, nicht verändern. Damit ergibt sich die Definition einer Abbildung von Starrkörpern:

Definition 3 (Abbildung eines Starrkörpers). [5] Eine Zuordnungsvorschrift $g : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$ ist die Abbildung eines Starrkörpers genau dann, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. Distanzen bleiben unverändert: $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$ für alle Punkte $p, q \in \mathcal{R}^3$
2. Das Kreuzprodukt bleibt erhalten: $g(\vec{v} \times \vec{w}) = g(\vec{v}) \times g(\vec{w})$ für alle Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{R}^3$.

Bemerkung 3.1. Man kann mit Hilfe der Polarisationsformel zeigen, dass das Skalarprodukt durch die Abbildungsvorschrift g für einen Starrkörper erhalten bleibt [5]:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle g(\vec{v}), g(\vec{w}) \rangle.$$

Ein orthonormales Rechtssystem wird durch die Abbildungsvorschrift g demnach wieder in ein orthonormales Rechtssystem transformiert. ◆

Der Astronom und Mathematiker Giulio Mozzi zeigte bereits 1763, dass eine räumliche Bewegung in eine Drehung und eine Verschiebung entlang der Drehachse zerlegt werden kann. Da sich die Teilchen eines Starrkörpers nicht relativ zueinander bewegen können, kann die Bewegung eines Starrkörpers durch die relative Bewegung eines körperfesten Koordinatensystems K zu einem Inertialsystem beschrieben werden. Das Koordinatensystem K erfülle dabei die in 2.1 genannten Eigenschaften. Das körperfeste Koordinatensystem hat seinen Ursprung in einem beliebigen Punkt p des Körpers. Die Orientierung von K beschreibt die Rotation des Körpers und die Lage des Ursprungs von K relativ zum Inertialsystem beschreibt den translatorischen Anteil der Starrkörperbewegung. Hat K die Einheitsvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, dann kann die Bewegung von K durch die Abbildung g beschrieben werden. Genauer gesagt liefert $g(\vec{v}_1), g(\vec{v}_2), g(\vec{v}_3)$ die Orientierung von K und $g(p)$ die Lage des Ursprungs nach einer Starrkörperbewegung.

Beschreibt man die Orientierung eines Starrkörpers mit Hilfe eines Ortsvektors \vec{p} , welcher auf den Ursprung des körperfesten Koordinatensystem zeigt, einem Ortsvektor \vec{q} , welcher auf einen beliebigen Punkt des Körpers zeigt und dem Richtungsvektor \vec{s} , welcher die Punkte p und q verbindet, dann lässt sich die

Bewegung wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} {}_I\vec{q}(t) &= {}_I\vec{p}(t) + {}_I\vec{s}(t) \\ \frac{d}{dt}({}_I\vec{q}(t)) &= \frac{d}{dt}({}_I\vec{p}(t)) + \frac{d}{dt}({}_I\vec{s}(t)) \end{aligned}$$

mit

$$\|q(t) - p(t)\| \equiv |{}_I\vec{s}(t)| = \textit{konstant}$$

folgt

$$\frac{d}{dt}(|{}_I\vec{s}(t)|) = 0$$

Anwendung der Kettenregel liefert (siehe Bspw. [7, S.20])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\langle {}_I\vec{s}(t), {}_I\vec{s}(t) \rangle} \right) &= 0 \\ 2{}_I\vec{s}(t) \cdot {}_I\dot{\vec{s}}(t) &= 0 \\ \implies {}_I\vec{s}(t) &\perp {}_I\dot{\vec{s}}(t) \end{aligned}$$

Da der Geschwindigkeitsvektor ${}_I\dot{\vec{s}}(t)$ senkrecht auf ${}_I\vec{s}(t)$ stehen soll ist es sinnvoll einen Vektor $\vec{\omega}(t)$ wie folgt einzuführen:

$${}_I\dot{\vec{s}}(t) = {}_I\vec{\omega}(t) \times {}_I\vec{s}(t)$$

Damit berechnet sich die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes des Körpers zu:

$$\frac{d}{dt}({}_I\vec{q}(t)) = {}_I\dot{\vec{q}}(t) = {}_I\dot{\vec{p}}(t) + {}_I\vec{\omega}(t) \times {}_I\vec{s}(t) \quad (3.1)$$

Da die Berechnung der Summe und des Kreuzproduktes sehr unhandlich ist soll eine Ausdruck für die Geschwindigkeit in homogenen Koordinaten gefunden werden. Die Herleitung lautet wie folgt:

Die Vektorgleichung soll auch in homogenen Koordinaten gelten:

$${}^H_I\vec{q}(t) = {}^H_I\vec{p}(t) + {}^H_I\vec{s}(t)$$

Ausführliche Schreibweise unter der Beachtung, dass $\vec{s}(t)$ ein Richtungsvektor ist

$$\begin{pmatrix} {}_I\vec{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\vec{p}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}_I\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformation von $\vec{s}(t)$ in körperfeste Koordinaten

$$\begin{pmatrix} {}_I\vec{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\vec{p}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{Q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv T} \begin{pmatrix} {}_K\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} {}_I\vec{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} {}_I\vec{p}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{Q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_K\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Beachtung der Kettenregel und Differentiationsregel für homogene Matrizen

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\vec{Q}} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_K\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{Q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_K\dot{\vec{s}}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

lokales $\vec{s}(t)$ ist zeitlich konstant

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\vec{Q}} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{\dot{R}}} \begin{pmatrix} {}_K\vec{s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation von $\vec{s}(t)$ in globale Koordinaten I

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\vec{Q}} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{\dot{R}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{Q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}^T}_{\mathbf{T}^T} \begin{pmatrix} {}_I\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{q}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_I\dot{\vec{p}}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\vec{Q}} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\vec{Q} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_I\vec{s}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation in kartesische Koordinaten

$${}_I\dot{\vec{q}}(t) = {}_I\dot{\vec{p}}(t) + \underbrace{\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T}_{:=\mathbf{\Omega}} {}_I\vec{s}(t)$$

Vergleich mit Gleichung (3.1) unter Beachtung der Ersetzung des Kreuzproduktes durch eine Matrix nach Gleichung (1.5) beweist die Äquivalenz dieser alternativen Herleitung

$${}_I\dot{\vec{q}}(t) = {}_I\dot{\vec{p}}(t) + \mathbf{\Omega}_I \vec{s}(t)$$

Kompakte Form in homogenen Koordinaten:

$${}^H\dot{\vec{q}}(t) = {}^H\dot{\vec{p}}(t) + \dot{\mathbf{T}}\mathbf{T}^T {}^H\vec{s}(t)$$

3.1.1 Vektor der Winkelgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \\
 &= \begin{pmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} & \dot{r}_{13} \\ \dot{r}_{21} & \dot{r}_{22} & \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{31} & \dot{r}_{32} & \dot{r}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}^T \\
 &= \begin{pmatrix} \dot{r}_{11} r_{11} + \dot{r}_{12} r_{12} + \dot{r}_{13} r_{13} & \dot{r}_{11} r_{21} + \dot{r}_{12} r_{22} + \dot{r}_{13} r_{23} & \dot{r}_{11} r_{31} + \dot{r}_{12} r_{32} + \dot{r}_{13} r_{33} \\ \dot{r}_{21} r_{11} + \dot{r}_{22} r_{12} + \dot{r}_{23} r_{13} & \dot{r}_{21} r_{21} + \dot{r}_{22} r_{22} + \dot{r}_{23} r_{23} & \dot{r}_{21} r_{31} + \dot{r}_{22} r_{32} + \dot{r}_{23} r_{33} \\ \dot{r}_{31} r_{11} + \dot{r}_{32} r_{12} + \dot{r}_{33} r_{13} & \dot{r}_{31} r_{21} + \dot{r}_{32} r_{22} + \dot{r}_{33} r_{23} & \dot{r}_{31} r_{31} + \dot{r}_{32} r_{32} + \dot{r}_{33} r_{33} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \vec{\omega} &= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \dot{r}_{31} r_{21} + \dot{r}_{32} r_{22} + \dot{r}_{33} r_{23} \\ \dot{r}_{11} r_{31} + \dot{r}_{12} r_{32} + \dot{r}_{13} r_{33} \\ \dot{r}_{21} r_{11} + \dot{r}_{22} r_{12} + \dot{r}_{23} r_{13} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \langle \dot{v}, w \rangle \\ \langle \dot{u}, v \rangle \\ \langle \dot{w}, u \rangle \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Drall

$$\mathbf{L}_P = \begin{pmatrix} A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z \\ -F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z \\ -E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_P &= \mathbf{J}_P \vec{\omega} \\ \mathbf{J}_P &= \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{L}_P &= \frac{1}{2} (\dots \\ &\quad \omega_x (A\omega_x - E\omega_z - F\omega_y) + \dots \\ &\quad \omega_y (B\omega_y - D\omega_z - F\omega_x) + \dots \\ &\quad \omega_z (C\omega_z - D\omega_y - E\omega_x))\end{aligned}$$

Einsetzen der Terme für Komponenten der Winkelgeschw.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} (A(\dot{v}^2)(w^2) + B(\dot{u}^2)(v^2) + C(\dot{w}^2)(u^2)) + \dots \\ &\quad \frac{1}{2} \left(-D\dot{u}\dot{w} \underbrace{uv}_{=0} - E\dot{v}\dot{w} \underbrace{uw}_{=0} - F\dot{u}\dot{v} \underbrace{vw}_{=0} \right)\end{aligned}$$

3.2 Lagrange Gleichung 2. Art

Ein System mit n generalisierten Koordinaten $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ und m Zwangsbedingungen $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)^T = \vec{0}$, dessen Kinetische Energie T und potentielle Energie V durch $L = T - V$ beschrieben werden kann, lässt sich nach [8, S. 124] charakterisieren durch:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \vec{q}^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \vec{\lambda} - \vec{Q}_{ex} \right) \right] dt = 0 \quad (3.2)$$

Dabei gelten die Dimensionen

$$\delta \vec{q} \in \mathcal{R}^n \quad L \in \mathcal{R} \quad \vec{q} \in R^n \quad \boldsymbol{\Phi} \in R^{m \times n} \quad \vec{\lambda} \in R^m \quad \vec{Q} \in R^n$$

Der Vergleich mit der üblichen Form der Gleichung von Lagrange (2. Art) Gleichung (3.3) macht einige Unterschiede deutlich.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0 \quad (3.3)$$

mit

$$\vec{q} \in R^{n-m}$$

Die generalisierten Koordinaten müssen mit Hilfe der Zwangsbedingungen auf einen Satz von Minimalkoordinaten reduziert werden. Diese Minimalkoordinaten müssen voneinander unabhängig sein.

3.2.1 Kinetische Energie

Die kinetische Energie K eines Starrkörpers wird durch die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes \vec{A} , welcher ein Element des Körpers ist, und seiner Massenverteilung nach Gleichung (3.4) beschrieben.

$$K = \frac{1}{2} \int_m \dot{\vec{A}}^2 dm \quad (3.4)$$

Der Punkt \vec{A} kann in den Koordinaten des körperfesten Koordinatensystems mit Ursprung \vec{P} durch den Vektor $(x, y, z, 1)^T$ und die Transformationsmatrix \mathbf{T} beschrieben werden. Die kinetische Energie lässt sich dann entsprechend umformen.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_m (x, y, z, 1) \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}} (x, y, z, 1)^T \\ &= \frac{1}{2} \int_m (x, y, z, 1) \begin{bmatrix} \dot{u}^2 & \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle & \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle & \langle \dot{u}, \dot{\vec{P}} \rangle \\ \langle \dot{w}, \dot{u} \rangle & \dot{w}^2 & \langle \dot{w}, \dot{v} \rangle & \langle \dot{w}, \dot{\vec{P}} \rangle \\ \langle \dot{v}, \dot{u} \rangle & \langle \dot{v}, \dot{w} \rangle & \dot{v}^2 & \langle \dot{v}, \dot{\vec{P}} \rangle \\ \langle \dot{\vec{P}}, \dot{u} \rangle & \langle \dot{\vec{P}}, \dot{w} \rangle & \langle \dot{\vec{P}}, \dot{v} \rangle & \dot{\vec{P}}^2 \end{bmatrix} (x, y, z, 1)^T \\ &= \frac{1}{2} \dot{\vec{P}}^2 \int_m dm + \frac{1}{2} \dot{u}^2 \int_m x^2 dm + \frac{1}{2} \dot{w}^2 \int_m y^2 dm + \frac{1}{2} \dot{v}^2 \int_m z^2 dm \\ &\quad + \langle \dot{u}, \dot{w} \rangle \int_m xy dm + \langle \dot{u}, \dot{v} \rangle \int_m xz dm + \langle \dot{w}, \dot{v} \rangle \int_m yz dm \\ &\quad + \langle \dot{u}, \dot{\vec{P}} \rangle \int_m x dm + \langle \dot{v}, \dot{\vec{P}} \rangle \int_m z dm + \langle \dot{w}, \dot{\vec{P}} \rangle \int_m y dm \end{aligned}$$

und unter der Annahme, dass \vec{P} der Schwerpunkt des Körpers ist folgt mit Hilfe des Trägheitstensors

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{P}}^2 \\
&+ \frac{1}{4}I_x \left(-\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \dot{v}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{4}I_y \left(\dot{u}^2 - \dot{w}^2 + \dot{v}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{4}I_z \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 - \dot{v}^2 \right) \\
&+ C_{xz}\langle \dot{u}, \dot{v} \rangle + C_{xy}\langle \dot{u}, \dot{w} \rangle + C_{yz}\langle \dot{w}, \dot{v} \rangle
\end{aligned}$$

3.2.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Eine virtuelle Verschiebung ist eine infinitesimale, rein virtuelle Änderung des Zustands eines Systems, ohne dass die Zeit dabei voran schreitet. Die Zustandsänderung muss dabei mit den Zwangsbedingungen verträglich sein. Zur Darstellung einer virtuellen Bewegung wird meist das Symbol δ voran gestellt.

Wenn ein System durch generalisierte Koordinaten \vec{q} beschrieben wird, dann wird die virtuelle Verschiebung dieses Systems durch $\delta\vec{q}$ notiert. Virtuelle Verschiebungen verhalten sich genau so wie andere, infinitesimale Variationen einer Größe. Damit sind virtuelle Verschiebungen ähnlich dem Differentialoperator, wobei die Besonderheit, dass die Zeit als konstante Größe angenommen wird, zu beachten ist. Das Beispiel 3.1 soll dies verdeutlichen.

Bei der Arbeit mit virtuellen Verschiebungen gelten die gleichen Gesetze wie bei Anwendung des Differentialoperators bezüglich Summen, Produkten und Verkettungen. Außerdem kann der Variationsoperator virtuelle Verschiebung mit dem Differential- und Integraloperator vertauscht werden.

Beispiel 3.1 (Virtuelle Verschiebungen). Gegeben sei eine Funktion $\phi(\vec{q}, t) \in \mathcal{R}$, welche von n generalisierten Koordinaten $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ und außerdem explizit von der Zeit t abhängt. Diese Funktion könnte Beispielsweise die Position eines Körpers beschreiben. Die virtuelle Verschiebung dieser Funktion berechnet

sich nach folgendem Schema:

$$\delta\phi(\vec{q}, t) = \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \phi(\vec{q}, t) \quad \frac{\partial}{\partial q_2} \phi(\vec{q}, t) \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial q_n} \phi(\vec{q}, t) \right] \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix}$$

Man beachte dabei, dass die generalisierten Koordinaten von der Zeit abhängig sein können. Da die Zeit bei einer virtuellen Verschiebung als konstant angenommen wird, hat eine solche Zeitabhängigkeit keinen Einfluss auf die Berechnung. \diamond

Die virtuelle Arbeit δW_i welche durch eine Kraft \vec{F}_i , die an einem Punkt \vec{r}_i angreift, entsteht, ist definiert durch:

$$\delta W_i = \vec{F}_i^T \delta \vec{r}_i$$

. Die virtuelle Arbeit δW_k , welche durch ein Moment \vec{M}_k entsteht, ist definiert durch:

$$\delta W_k = \vec{M}_k^T \delta \vec{\varphi}_k$$

Das System befindet sich dann im Kräftegleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit für beliebige virtuelle Verschiebungen verschwindet. Für ein System, auf das n Kräfte und m Momente wirken, muss bei Gleichgewicht der Kräfte daher (3.5) erfüllt sein.

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^T \delta \vec{r}_i + \sum_{k=1}^m \vec{M}_k^T \delta \vec{\varphi}_k = 0 \quad (3.5)$$

Die gesamte virtuelle Arbeit eines Systems kann auch als Summe der generalisierten Kräfte des Systems interpretiert werden. Gleichung (3.6) zeigt diesen Zusammenhang. Mit Hilfe der generalisierten Koordinaten \vec{q} lässt sich Gleichung (3.6) derart umformen, dass man den zur Lösung von (3.2) benötigten Ausdruck für Q_{ex} erhält.

$$\delta W = \sum_{i=1}^k Q_i \delta \vec{r}_i \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

In einem System mit n generalisierten Koordinaten an welchem k Kräfte angreifen, wird die virtuelle Arbeit durch Gleichung (3.6) beschrieben.

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial q_1} + \frac{\partial W_2}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial W_k}{\partial q_1} \\ \frac{\partial W_1}{\partial q_2} + \frac{\partial W_2}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial W_k}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial W_1}{\partial q_n} + \frac{\partial W_2}{\partial q_n} + \dots + \frac{\partial W_k}{\partial q_n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix}$$

Betrachtet man einen Punkt P_l in einem lokalen, körperfesten Koordinatensystem, so lässt sich dieser Punkt beschreiben durch

$$P = \begin{bmatrix} x_l(t) \\ y_l(t) \\ z_l(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vec{q} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(t) & w_x(t) & v_x(t) & q_1(t) \\ u_y(t) & w_y(t) & v_y(t) & q_2(t) \\ u_z(t) & w_z(t) & v_z(t) & q_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allgemeine Punktbeschreibung

$$\vec{r}^g = \vec{r}_0^g + \vec{\varphi}^g \times (\vec{r}^g - \vec{r}_0^g)$$

Virtuelle Verschiebung = virtuelle Translation und virt. Rotation

$$\delta \vec{r}^g = \delta \vec{r}_0^g + \delta \vec{\varphi}^g \times (\vec{r}^g - \vec{r}_0^g)$$

Kreuzprodukt durch Matrixprodukt ersetzen

$$= \delta \vec{r}_0^g + \delta \boldsymbol{\Theta} \cdot (\vec{r}^g - \vec{r}_0^g)$$

Formulierung mit Rotationsmatrix und lokalem Vektor

$$= \delta \vec{r}_0^g + \delta (\mathbf{R} \vec{z}^l)$$

Lokaler Vektor ist konstant, daher hat Operator δ keinen Einfluss

$$= \delta \vec{r}_0^g + \delta \mathbf{R} \cdot \vec{z}^l$$

Übergang zu globalem Vektor mit $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

$$= \delta \vec{r}_0^g + \delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \vec{z}^g$$

Hier steht Text