ДЗ: лекц 2, Определители
теор. материал ←
↓
конспект

Свойства линейных операций:

2) $A+\Theta = \Theta + A$, где Θ – нулевая матрица соот. размера.

$\square$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Левая часть:

$$A+\Theta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 & \dots & a_{1n}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 & \dots & a_{2n}+0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+0 & a_{m2}+0 & \dots & a_{mn}+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} & \dots & 0+a_{1n} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} & \dots & 0+a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0+a_{m1} & 0+a_{m2} & \dots & 0+a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$= \Theta + A$ = правая часть ∎

3) $A - A = \Theta$

□ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

левая часть:

$$A - A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} & \dots & a_{1n}-a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-a_{m1} & a_{m2}-a_{m2} & \dots & a_{mn}-a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ = правая часть ∎

4) Коммутативность $A + B = B + A$

□ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

левая часть: $A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \dots & b_{1n}+a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \dots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ = $B+A$ - правая часть ∎

5) Дистрибутивность $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Левая часть $= \lambda(A+B) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} + \lambda b_{11} & \lambda a_{12} + \lambda b_{12} & \dots & \lambda a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} + \lambda \cdot b_{m1} & \lambda a_{m2} + \lambda \cdot b_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} + \lambda \cdot b_{mn} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \dots & \lambda b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda b_{m1} & \lambda b_{m2} & \dots & \lambda b_{mn} \end{pmatrix} =$

$= \lambda A + \lambda B =$ правая часть ■

6) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

□ Левая часть $= (\lambda + \mu) \cdot A = (\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \dots & \mu \cdot a_{1n} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \dots & \mu \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu a_{m1} & \mu a_{m2} & \dots & \mu \cdot a_{mn} \end{pmatrix} =$

$= \lambda A + \mu A =$ правая часть ■

7) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$

□ $A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$

Левая часть $= (\lambda \cdot \mu) \cdot A = (\lambda \cdot \mu) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} (\lambda \cdot \mu) a_{11} & (\lambda \cdot \mu) a_{12} & \dots & (\lambda \cdot \mu) \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda \cdot \mu) a_{m1} & (\lambda \cdot \mu) a_{m2} & \dots & (\lambda \cdot \mu) a_{mn} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \lambda\cdot(\mu\cdot a_{11}) & \lambda\cdot(\mu\cdot a_{12}) & \dots & \lambda(\mu\cdot a_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda(\mu\cdot a_{m1}) & \lambda\cdot(\mu\cdot a_{m2}) & \dots & \lambda(\mu\cdot a_{mn}) \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda\cdot\begin{pmatrix} \mu\cdot a_{11} & \mu\cdot a_{12} & \dots & \mu\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu\cdot a_{m1} & \mu\cdot a_{m2} & \dots & \mu\cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \lambda\cdot(\mu\cdot A) =$$

= правая часть

■

Свойства операций сложения, вычитания и умножения матриц на число:

1) Коммутативность $A+B=B+A$

2) Ассоциативность $A+(B+C)=(A+B)+C$

3) $A+0=A$

4) $A-A=0$

5) $1\cdot A=A$

□ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

левая часть $= 1\cdot A = 1\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11} & 1\cdot a_{12} & \dots & 1\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1\cdot a_{m1} & 1\cdot a_{m2} & \dots & 1\cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A =$$ правая часть

■

6) Дистрибутивность: $\alpha\cdot(A\cdot B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$

7) $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$

8) $\alpha\cdot(\beta\cdot A) = (\alpha\cdot\beta)\cdot A$

9) $0\cdot A = 0$

□ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

левая часть $= 0 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 \cdot a_{11} & 0 \cdot a_{12} & \dots & 0 \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \cdot a_{m1} & 0 \cdot m_2 & \dots & 0 \cdot a_{mn} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0 =$ правая часть

<u>Св-ва операций транспонирования матриц:</u>

1) $(A^T)^T = A$