

Лабораторная работа.

Метод наименьших квадратов.

Постановка задачи:

В результате опыта имеем ряд значений переменных X и Y. Однако, характер функциональной зависимости между X и Y неизвестен. Найти аналитическое выражение зависимости между X и Y методом наименьших квадратов матричной интерпретации.

Математическая модель:

Искомая функция в общем виде может описываться многочленом степени $(n - 1)$. А именно:

$$a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = y$$

Дадим матричную интерпретацию решаемой задачи, учитывая, что у нас m измерений.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 & x_m^3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Матрица факторных
признаков

Матрица
искомых
коэффициентов

Матрица
результатирующих
признаков

Запишем сокращённо

$$X * A = Y$$

$$X^T * X * A = X^T * Y$$

Матричная форма записи МНК

Введём обозначения:

$$C = X^T * X$$

$$Y1 = X^T * Y$$

$$C * A = Y1$$

$$A = C^{-1}Y1$$

Алгоритм вычислений

1. Ввести элементы матриц X и Y
2. Вычислить X^T
3. Перемножить $X^T * X$ и $X^T * Y$
4. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$C * A = Y1$$

и найти коэффициенты (параметры) a_0, a_1, \dots, a_m

Зависимость линейная

$$y_i = a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

1) $X^T * X$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix}$$

2) $X^T * Y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$X^T * X * A = X^T * Y$$

$$C * A = Y1$$

Код программы:

```
1.py > ...
1 import numpy as np
2
3 # Ввод данных
4 n = int(input('Введите размерность квадратной матрицы: '))
5
6 # Матрица X
7 matrix_X = np.array([[int(input(f'Введите элемент [{i+1}][{j+1}] матрицы X: ')) for j in range(n)] for i in range(n)])
8
9 # Матрица Y
10 matrix_Y = np.array([[int(input(f'Введите элемент [{i+1}][{j+1}] матрицы Y: ')) for j in range(1)] for i in range(n)])
11
12 # Вывод матриц X и Y
13 print("\nВведенная матрица X:\n", matrix_X)
14 print("\nВведенная матрица Y:\n", matrix_Y)
15
16 # Матрица X^T
17 matrix_XT = matrix_X.T
18
19 # Перемножение C = X^T * X
20 matrix_C = np.dot(matrix_XT, matrix_X)
21
22 # Перемножение Y1 = X^T * Y
23 matrix_Y1 = np.dot(matrix_XT, matrix_Y)
24
25 # Обратная матрица C (C^-1)
26 obratnay_C = np.round(np.linalg.inv(matrix_C), 5)
27
28 # Нахождение матрицы A (коэффициенты)
29 matrix_A = np.round(np.dot(obratnay_C, matrix_Y1), 5)
30
31 # Вывод результатов
32 print("\nМатрица X^T:\n", matrix_XT)
33 print("\nПеремножение X^T и X (C):\n", matrix_C)
34 print("\nПеремножение X^T и Y (Y1):\n", matrix_Y1)
35 print("\nОбратная матрица C (C^-1):\n", obratnay_C)
36 print("\nМатрица с коэффициентами a:\n", matrix_A)
37 |
```

Результат работы программы:

```
PS C:\Users\gnevn\OneDrive\Рабочий стол\учеба\РГПУ\АД\ЛР8> python -u "c:\Users\gnevn\OneDrive\Рабочий стол\учеба\РГПУ\АД\ЛР8\1.py"
Введите размерность квадратной матрицы: 3
Введите элемент [1][1] матрицы X: 1
Введите элемент [1][2] матрицы X: 2
Введите элемент [1][3] матрицы X: 3
Введите элемент [2][1] матрицы X: 4
Введите элемент [2][2] матрицы X: 5
Введите элемент [2][3] матрицы X: 6
Введите элемент [3][1] матрицы X: 7
Введите элемент [3][2] матрицы X: 8
Введите элемент [3][3] матрицы X: 9
Введите элемент [1][1] матрицы Y: 1
Введите элемент [2][1] матрицы Y: 2
Введите элемент [3][1] матрицы Y: 3

Введенная матрица X:
[[1 2 3]
 [4 5 6]
 [7 8 9]]

Введенная матрица Y:
[[1]
 [2]
 [3]]

Матрица X^T:
[[1 4 7]
 [2 5 8]
 [3 6 9]]
```

Перемножение X^T и X (C):

```
[[ 66  78  90]
 [ 78  93 108]
 [ 90 108 126]]
```

Перемножение X^T и Y ($Y1$):

```
[[30]
 [36]
 [42]]
```

Обратная матрица C (C^{-1}):

```
[[ -3.51843721e+13  7.03687442e+13 -3.51843721e+13]
 [ 7.03687442e+13 -1.40737488e+14  7.03687442e+13]
 [-3.51843721e+13  7.03687442e+13 -3.51843721e+13]]
```

Матрица с коэффициентами a :

```
[[ -0.46875]
 [ 0. ]
 [ 0.46094]]
```

Вывод:

В результате работы был написан код, который использует матричную интерпретацию метода наименьших квадратов для анализа зависимости между матрицами X и Y . В ходе работы программы мы выполняем следующие шаги:

1. Получаем транспонированную матрицу X , необходимую для дальнейших вычислений.
2. Вычисляем произведение транспонированной матрицы X на исходную матрицу X , что представляет собой основную матрицу C .
3. Умножаем транспонированную матрицу X на матрицу Y , получая матрицу $Y1$.
4. Вычисляем обратную матрицу C , используя полученную основную матрицу.
5. Находим матрицу коэффициентов a путем умножения обратной матрицы C на матрицу $Y1$.

Этот процесс позволяет нам определить коэффициенты, характеризующие зависимость между X и Y.