Теорема Кронекера – Капелли. Метод Гаусса

- Записываем систему.
- Записываем расширенную матрицу системы.
- Используя элементарные преобразования, приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду.
- Рассмотрим ранг матрицы A и ранг расширенной матрицы (A|B).
- Проверяем: определена или неопределенна система.
- Проверяем: совместна ли система.
- Если система совместна, ищем общее и частное решение.

Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы.

- Записываем систему.
- Пишем формулу, по который мы будем решать AX=B => $X=A^{-1}*B$.
- Ищем определитель $\det A \neq 0$
- При помощи присоединенной матрицы ищем обратную матрицу, по формуле $A^{-1} = \frac{1}{detA} * \tilde{A}$ присоединенную матрицу.
- Далее по формуле ищем корени.
- Выписываем ответ.

Метод Крамера

- Ищем определитель D
- Ищем определитель D_k, получающийся из определителя D заменой «k»-ого столбца на столбец свободных членов
- по формуле Крамера $X_k = \frac{D_k}{D}$ ищем ответ.

Однородные СЛАУ

- Записываем матрицу
- Приводим к ступенчатому виду
- Так как однородные СЛАУ всегда совместны, то проверяем определенна или неопределенна СЛАУ:

1. Если определенна, то записываем Систему
2. Если система неопределенна, то ищем количество главных и свободных переменных через миноры

- Записываем систему
- Ищем общее решение и фундаментальную систему решений
- Выписываем ответ

Теорема Кронекера – Капелли. Метод Гаусса

Метод Гаусса. Пример

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \approx$$

Метод Крамера

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3, \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 22 & 3 & 1 \\ 39 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 22 & 1 \\ 5 & 39 & 3 \end{vmatrix} = -15, \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 22 \\ 5 & 4 & 39 \end{vmatrix} = -9,$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-15}{-3} = 5, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9}{-3} = 3$$

Однородные СЛАУ

Однородные системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда имеет решение:

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad \dots \quad x_n = 0$ **- тривиальное решение.**

Оно является единственным решением системы в случае, когда

$$r(A) = n$$

Если $r(A) < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9,$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -36 \\ -27 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$