

Тема 1. Доказательство математической индукции

1.1.36.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$$

1.1.37.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

$$2B - 5A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ -30 & 20 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ -30 & 20 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.38.  $A - 2E$   $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 & 3 - 0 \\ 3 - 0 & -2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1.1.39.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$4A - 7B = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 20 & 12 \\ 8 & 0 & -12 & 4 \\ 20 & -4 & 0 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 14 & 49 & -35 \\ -56 & 7 & 21 & 0 \\ 28 & 14 & -14 & 35 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & -29 & 97 \\ 64 & -4 & -33 & 9 \\ -8 & -10 & 14 & -19 \end{pmatrix}$$

1.1.40.

$$\text{D} \quad 5A - 3B + 2C, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5A - 3B + 2C = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 15 & 25 & 5 \\ -5 & 10 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 3 & -6 \\ 9 & 6 & 21 \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 10 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -20 & -7 & 8 \\ 28 & 19 & -6 \\ -5 & 18 & 27 \end{pmatrix} \quad \text{■}$$

$$1.1.41. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot -1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot -1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{■}$$

1.1.42. D

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \cancel{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \text{■}$$

1.1.43.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot -4 + 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \\ -1 \cdot -4 + 2 \cdot -3 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$  неозначимо

1.1.44.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 & 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 0 \cdot 5 & 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \\ -3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & -3 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) & -3 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 5 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) & 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$$

1.1.45.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & -2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-4) & -2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 4 & 5 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + 0 \cdot (-4) & 5 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-5) \cdot 4 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-3) + (-5) \cdot (-4) & 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + (-5) \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 14 \\ 5 & -22 & 11 \\ -18 & -21 & -32 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 5 + (-3) \cdot 2 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 7 \\ 4 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5 + 3 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + (-4) \cdot 4 + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 5 \\ 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 5 \\ 4 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -18 & -2 & -14 \\ -13 & -13 & 5 \\ -18 & -9 & 29 \end{pmatrix} \quad \text{■}$$

1.1.46.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) & -1 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15 + 12 & -5 + 3 \\ -15 - 2 & 5 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6+0 & -2+0 \\ -9+2 & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0 & -2+0 \\ 6+7 & -2-6 \\ -6-7 & 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$$

1.1.47.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -5+6 & 3+(-3) \\ -10+10 & 6-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5+6 & -15+15 \\ 2-2 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{■}$$

1.1.49.  $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$(AB) \cdot C = \begin{pmatrix} -3 \\ -15+0+12 & 0+0+9 \\ 12-2^6-4 & 0+1^2-3 \\ 8+\overset{2}{6}-8 & 0-3+6 \\ 3-10^5-12 & 0+5+9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+27 \\ -12-6 \\ -40+9 \\ -10+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 9 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30+0+3 \\ -24+2-1 \\ -12-21+2 \\ -6-35+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}$$

1.1.50.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\square A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.51.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\square A = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.52.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\square A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$