1.1.71. $A = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.1.72

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+8 \\ 3+8 & 9+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$

$A^T A = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+12 \\ 2+12 & 4+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$

1.1.73. $A = (1 \; 2 \; 3 \; 4)$, $A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A A^T = (1+4+9+16) = (30)$

$A^T \cdot A = (1 \quad 4 \quad 9 \quad 16)$

1.1.75. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$

1.1.77. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

□

$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1+4+9 & 4+10+18 & 7+16+27 \\ 4+10+18 & 16+25+36 & 28+40+54 \\ 7+16+27 & 28+40+54 & 49+64+81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \\ 50 & 122 & 194 \end{pmatrix}$

$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1+16+49 & 2+20+56 & 3+24+63 \\ 2+20+56 & 4+25+64 & 6+30+72 \\ 3+24+63 & 6+30+72 & 9+36+81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{pmatrix}$

1.1.78.

□ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ II−2I $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ~~I⇔II~~ ~~$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$~~ ~~II−II~~

II−2I $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

$= 12·20$
0

1.1.79

□ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ II·III $= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ I⇔III $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ III−2I $=$

$= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ III−1,5II $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.1.80 □ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ III·II $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ III−2I $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$II - 3I$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.1.81.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ $I \leftrightarrow III$ $\begin{pmatrix} 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 2 & -1 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ $II - \frac{1}{2}I$

$\begin{pmatrix} 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 0 & 2,5 & 5 & -2,5 & 7,5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ $III - \frac{1}{4}I$ $\begin{pmatrix} 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 0 & 2,5 & 5 & -2,5 & 7,5 \\ 0 & 3,75 & 7,5 & -3,75 & 11,25 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ $IV - \frac{3}{4}I$

$\begin{pmatrix} 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 0 & 2,5 & 5 & -2,5 & 7,5 \\ 0 & 3,75 & 7,5 & -3,75 & 11,25 \\ 0 & 6,25 & 12,5 & 6,25 & 18,75 \end{pmatrix}$ $III - IV$ $II \leftrightarrow 4$ $\begin{pmatrix} 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 0 & 6,25 & 12,5 & -6,25 & 18,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & 5 & -2,5 & 7,5 \end{pmatrix}$ $IV - \frac{2}{5}II$

$\begin{pmatrix} 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 0 & 6,25 & 12,5 & -6,25 & 18,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.1.82.
$D\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -11 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}III$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 0 & 7 \\ 1 & -0,5 & 1 & 1,5 & -5,5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ $II - I$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & 3 & 3 \\ 1 & -0.5 & 1 & 1.5 & -5.5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{III}-\text{I}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & 3 & 3 \\ 0 & 0.5 & -4 & 4.5 & -9.5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{IV}-\text{I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & 3 & 3 \\ 0 & 0.5 & -4 & 4.5 & -9.5 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tfrac{1}{3}\text{II}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & -4 & 4.5 & -9.3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} 2\cdot R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 9 & -19 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{III}-\text{II}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & -34 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -20 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{IV}-\text{II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -\tfrac{1}{4}\text{III}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11.83.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & -7 & -4 & 7 \\ 7 & -1 & -15 & 8 & -11 \\ 1 & -1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \tfrac{1}{3}\text{II}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{7}{3} & -\tfrac{4}{3} & \tfrac{7}{3} \\ 7 & -1 & -15 & -8 & -11 \\ 1 & -1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \tfrac{1}{7}\text{III}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{7}{3} & -\tfrac{4}{3} & \tfrac{7}{3} \\ 1 & -\tfrac{1}{7} & -\tfrac{15}{7} & -\tfrac{8}{7} & -\tfrac{11}{7} \\ 1 & -1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{II}-\text{I}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -\tfrac{4}{3} & -\tfrac{4}{3} & -\tfrac{4}{3} & -\tfrac{5}{3} \\ 1 & -\tfrac{1}{7} & -\tfrac{15}{7} & -\tfrac{8}{7} & -\tfrac{11}{7} \\ 1 & -1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{III}-\text{I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{39}{7} \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad IV-I \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{39}{7} \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad -\frac{3}{4}\cdot II$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{39}{7} \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad -\frac{7}{8}\cdot III \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{39}{8} \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad -\frac{1}{2}\cdot IV$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{39}{8} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad III-II \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{8} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad IV-I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} III\cdot\frac{8}{29} \\ IV\cdot\frac{4}{7} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad IV-III \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.85.

1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{8}\cdot II \\ -\frac{1}{4}\cdot III \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} II-I \\ III-I \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{8}{5}\cdot II \\ -\frac{4}{3}\cdot III \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad III-II \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \begin{matrix} 15\cdot III \\ \cdot II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I+15\,III \quad II+\frac{2}{5}\,III$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.87

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -4 & 7 \\ 2 & 2 & 10 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3}\cdot II \\ \frac{1}{2}\cdot III \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 1 & 1 & 5 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 1 & -2 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} II-I \\ III-I \\ IV-I \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{2} IV \\ -\frac{3}{2} II \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} III-II \\ IV-II \end{matrix}$$

III↔IV

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$