Основные алгоритмы и методы, используемые при решении задач по теме «Определители».

<u>Определитель можно вычислить только для квадратной матрицы!</u>

1. Вычисления определителей второго порядка.

Чтобы вычислить определитель матрицы второго порядка, надо от произведения элементов главной диагонали отнять произведение элементов побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Пример

Задание. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

Решение. $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 55 + 14 = 69$

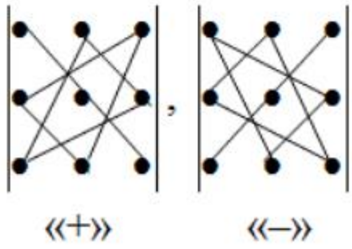
Ответ. $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 69$

2. Методы вычисления определителей третьего порядка.

Для вычисления определителей третьего порядка существует такие правила:

2.1. Правило треугольника.

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Пример

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ методом треугольников.

Решение. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) +$

$$+3 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 54$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 54$

2.2. Правило Саррюса.

Справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком "плюс"; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком "минус":

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ с помощью правила Саррюса.

Решение. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot 1 +$

$$+(-1) \cdot 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 \cdot (-2) = 54$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 54$

3. Разложение определителя по строке или столбцу.

Определитель равен сумме произведений элементов строки определителя на их алгебраические дополнения. Обычно выбирают ту строку/столбец, в которой/ом есть нули. Строку или столбец, по которой/ому ведется разложение, будет обозначать стрелкой.

Пример

Задание. Разложив по первой строке, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \leftarrow = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$

$$1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Этот метод позволяет вычисление определителя свести к вычислению определителя более низкого порядка.

Пример

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение. Выполним следующие преобразования над строками определителя: из второй строки отнимем четыре первых, а из третьей первую строку, умноженную на семь, в результате, согласно свойствам определителя, получим определитель, равный данному.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 - 4 \cdot 1 & 5 - 4 \cdot 2 & 6 - 4 \cdot 3 \\ 7 - 7 \cdot 1 & 8 - 7 \cdot 2 & 9 - 7 \cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 \cdot (-3) & 2 \cdot (-6) \end{vmatrix} = 0$$

Определитель равен нулю, так как вторая и третья строки являются пропорциональными.

Ответ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Для вычисления определителей четвертого порядка и выше применяется либо разложение по строке/столбцу, либо приведение к треугольному виду, либо с помощью теоремы Лапласа.

4. Разложение определителя по элементам строки или столбца.

Пример

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам какой-то строки или какого-то столбца.

Решение. Предварительно выполним элементарные преобразования над строками определителя, сделав как можно больше нулей либо в строке, либо в столбце. Для этого вначале от первой строки отнимем девять третьих, от второй - пять третьих и от четвертой - три третьих строки, получаем:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-1 & 8-0 & 7-9 & 6-18 \\ 5-5 & 4-0 & 3-5 & 2-10 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0$$

Полученный определитель третьего порядка также разложим по элементам строки и столбца, предварительно получив нули, например, в первом столбце. Для этого от первой строки отнимаем две вторые строки, а от третьей - вторую:

$$\begin{vmatrix} 8 & -2 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (2 \cdot 8 - 4 \cdot 4) = 0$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Последний и предпоследний определители можно было бы и не вычислять, а сразу сделать вывод о том, что они равны нулю, так как содержат пропорциональные строки.

5. Приведение определителя к треугольному виду.

С помощью элементарных преобразований над строками или столбцами определитель приводится к треугольному виду и тогда его значение, согласно свойствам определителя, равно произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Пример

Задание. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ приведением его к треугольному виду.

Решение. Сначала делаем нули в первом столбце под главной диагональю. Все преобразования будет выполнять проще, если элемент a_{11} будет равен 1. Для этого мы поменяем местами первый и второй столбцы определителя, что, согласно свойствам определителя, приведет к тому, что он сменит знак на противоположный:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Далее получим нули в первом столбце, кроме элемента a_{11} , для этого из третьей строки вычтем две первых, а к четвертой строке прибавим первую, будем иметь:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Далее получаем нули во втором столбце на месте элементов, стоящих под главной диагональю. И снова, если диагональный элемент будет равен ± 1 , то вычисления будут более простыми. Для этого меняем местами вторую и третью строки (и при этом меняется на противоположный знак определителя):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Далее делаем нули во втором столбце под главной диагональю, для этого поступаем следующим образом: к третьей строке прибавляем три вторых, а к четвертой - две вторых строки, получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

Далее из третьей строки выносим (-10) за определитель и делаем нули в третьем столбце под главной диагональю, а для этого к последней строке прибавляем третью:

$$\Delta = -10 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = (-10) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-8) = -80$$

Ответ. $\Delta = -80$

6. Теорема Лапласа.

Теорема:

Пусть - определитель -го порядка. Выберем в нем произвольные строк (или столбцов), причем. Тогда сумма произведений всех миноров -го порядка, которые содержатся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю.

Пример

Задание. Используя теорему Лапласа, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Решение. Выберем в данном определителе пятого порядка две строки - вторую и третью, тогда получаем (слагаемые, которые равны нулю, опускаем):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -23 + 128 + 90 = 195$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 195$