Задание по материалам лекции
„метод наименьших квадратов"

1) Дан полином 3-ей степени общего вида: $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$

Возьмём измеренные значения:

$$\begin{cases} a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 - y_1 = \varepsilon_1 \\ a_3 x_2^3 + a_2 x_2^3 + a_1 x_2 + a_0 - y_2 = \varepsilon_2 \\ \vdots \\ a_3 x_m^3 + a_2 x_m^2 + a_1 x_m + a_0 - y_m = \varepsilon_m \end{cases} \quad (1)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_m$ - уклонения

Нужно подобрать такой параметр, чтобы сумма квадратов уклонений была минимальна.

$U = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_m^2 \quad (2)$

$(2) \xrightarrow{b} (1): U = (a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 - y_1)^2 + (a_3 x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 - y_2)^2 + \ldots +$
$+ (a_3 x_m^3 + a_2 x_m^2 + a_1 x_m + a_0 - y_m)^2 =$

Необходимо, чтобы частные производные по каждому из коэф. равнялись нулю.

$\frac{\partial U}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial U}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial a_2} = 0, \frac{\partial U}{\partial a_3} = 0 \Rightarrow$ найдём их

$$\begin{cases} a_3 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_0 m = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ a_3 \sum_{i=1}^{m} x_i^4 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i \\ a_3 \sum_{i=1}^{m} x_i^5 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x^4 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x^3 + a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^2 \\ a_3 \sum_{i=1}^{m} x_i^6 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x^5 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x^4 + a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^3 \end{cases} \quad \text{I}$$

2) Рассмотрим матричную интерпретацию МНК для того же полинома и того же кол-ва измерений m: $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = y$

В матричном виде: $X \cdot A = Y$ или $\underbrace{X^T \cdot X}_{C} \cdot A = \underbrace{X^T \cdot Y}_{Y_1}$

Запишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & x_m^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

а) Найдём матрицу $C = X^T X$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_m^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & x_m^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i^3 \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^4 \\ \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^4 & \sum_{i=1}^m x_i^5 \\ \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^4 & \sum_{i=1}^m x_i^5 & \sum_{i=1}^m x_i^6 \end{pmatrix}$$

б) Найдём матрицу $Y_1 = X^T \cdot Y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_m^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i x_i \\ \sum_{i=1}^m y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^m y_i x_i^3 \end{pmatrix}$$

в) Запишем уравнение $C \cdot A = Y_1$:

$$\begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i^3 \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^4 \\ \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^4 & \sum_{i=1}^m x_i^5 \\ \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^4 & \sum_{i=1}^m x_i^5 & \sum_{i=1}^m x_i^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i x_i \\ \sum_{i=1}^m y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^m y_i x_i^3 \end{pmatrix}$$

Представим это в виде СЛУ:

$$\begin{cases} a_0 m + a_1 \sum_{i=1}^m x_i + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^3 = \sum_{i=1}^m y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^m x_i + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^4 = \sum_{i=1}^m y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=1}^m x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^5 = \sum_{i=1}^m y_i x_i^2 \\ a_0 \sum_{i=1}^m x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^4 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^5 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^6 = \sum_{i=1}^m y_i x_i^3 \end{cases} \quad \text{II}$$

При сравнении СЛУ I и II можно увидеть, что они совпадают, что доказывает, что матричная интерпретация МНК справедлива и корректна.