

## **Отчёт по лабораторной работе №2**

**«Численные методы решения дифференциальных уравнений»**

Выполнили:

Адаменко С. С.

Гневнов А. Е.

Суворов Р.М.

## Отчёт Адаменко С.С.

**Тема:** Численные методы решения дифференциальных уравнений

**Используемое оборудование:** ПК, языки программирования: Python, HTML, CSS, SQL, JavaScript; используемые сторонние библиотеки: Django, Matplotlib, Numpy, SQLite3; среда разработки Visual Studio Code.

**Постановка задачи:** Изучить численные методы Эйлера и Рунге-Кутты и предложенные варианты алгоритмов их реализации. Разработать программы решения дифференциальных уравнений, используя актуальный для студента язык программирования. Разработать программы решения дифференциальных уравнений второго порядка и системы дифференциальных уравнений с использованием численных методов Эйлера и Рунге-Кутты.

**Математическая модель:**

Контрольный пример 1.

Решить дифференциальное уравнение  $y' = y*(1 - x)$  на отрезке  $[0; 1]$  с начальными условиями  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .

1.1 Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера/ Рунге-Кутты разбив отрезок на 10 частей.

Контрольный пример 2.

Решить дифференциальное уравнение вида:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$$

на интервале  $[1; 1.5]$  с начальными условиями:

$$y(1) = 0.77$$

$$y'(1) = -0.44$$

$$h = 0.1$$

Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера, разбив отрезок на 10 частей.

Контрольный пример 3.

Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5z \\ \frac{dy}{dt} = \sin(t-1)x - y - 3z \\ \frac{dz}{dt} = -x + 2z \end{cases}$$

с начальными условиями  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $z(0) = 1$  составить таблицу значений функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  на отрезке  $[0; 0.3]$  с шагом  $h = 0.003$ . Использовать метод Эйлера.

3.1 Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера, разбив отрезок на 10 частей.

3.2 Получить результаты решения системы дифференциальных уравнений методом Эйлера, уменьшив шаг в 10 раз.

### Метод Эйлера:

$$y' = f(x, y)$$

в заданном диапазоне изменения переменной  $a \leq x \leq b$  с начальными условиями  $y_0 = y(a)$  отрезок  $[a, b]$  разбивается на  $n$  частей с шагом  $h = (b - a) / n$ . В пределах этого шага производная

заменяется разностным отношением  $y' = \Delta y / \Delta x = f(x, y)$ ,

$$\Delta y = h * y' = h * f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h_x$$

### Метод Рунге-Кутты:

Этот метод отличается от метода Эйлера тем, что на каждом шаге интегрирования вычисляется так называемая усреднённая производная  $\bar{F}_i$ :

$$y_{i+1} = y_i + F_i$$

или

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \Delta y_i$$

$$F_i = (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})/6;$$

$$k_{1i} = hf(x_i, y_i);$$

$$k_{2i} = hf(x_i + h/2, y_i + k_{1i}/2);$$

$$k_{3i} = hf(x_i + h/2, y_i + k_{2i}/2);$$

$$k_{4i} = hf(x_i + h, y_i + k_{3i}).$$

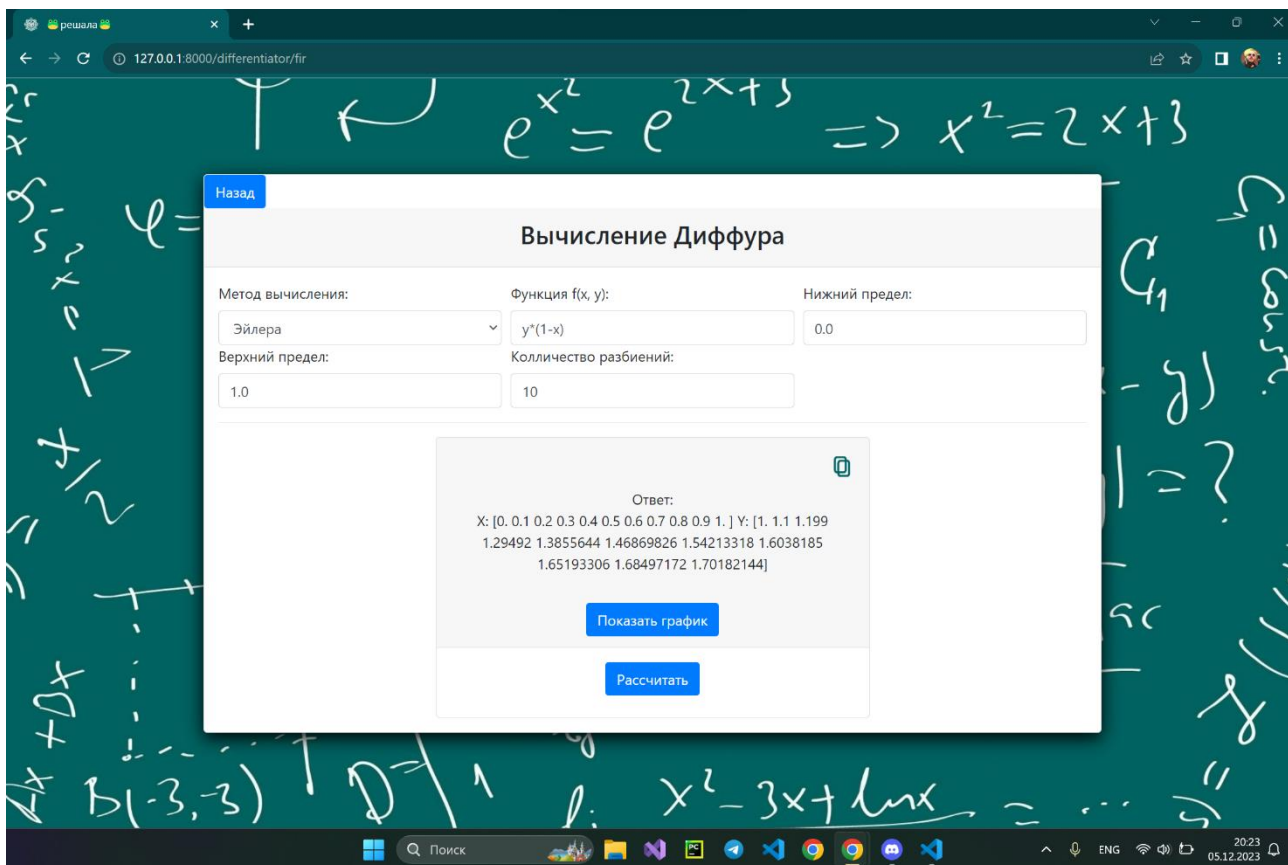
В любом методе  $x_i = x_{i-1} + h$  при  $a \leq x < b$

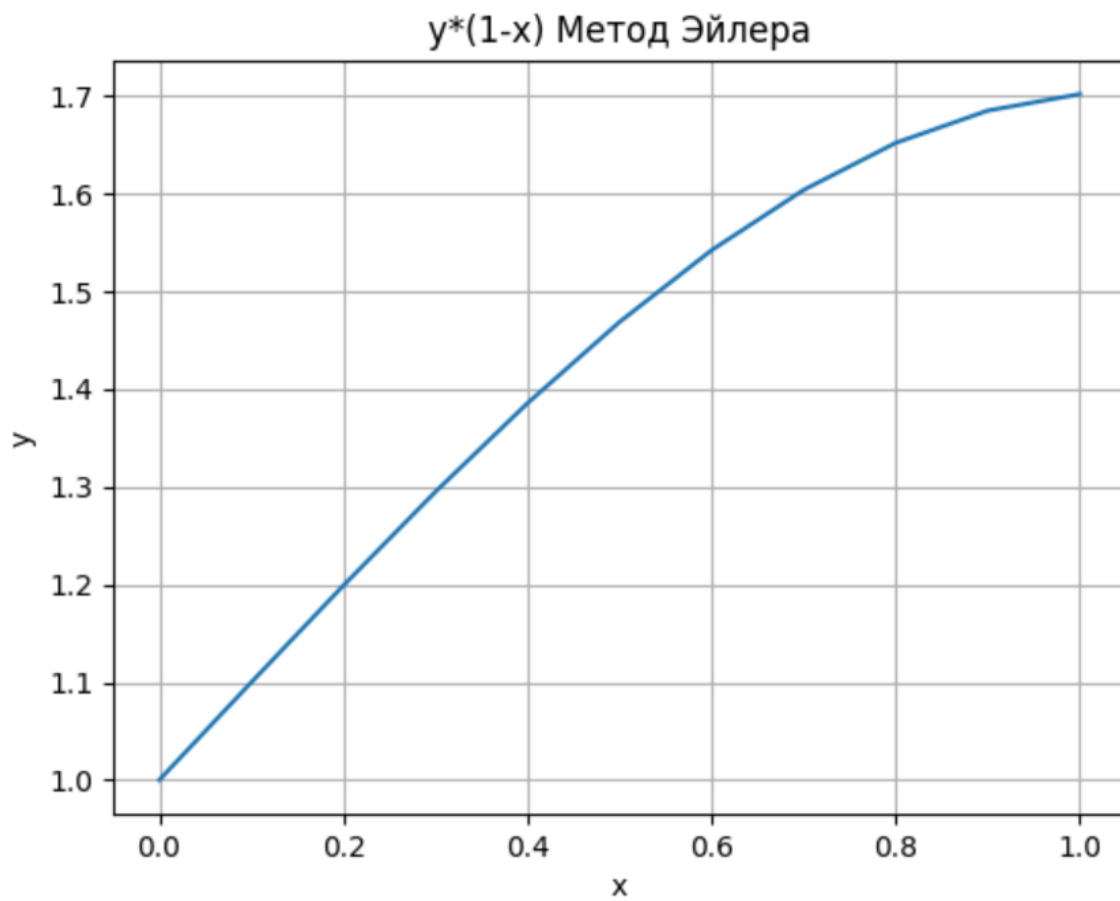
## Код программы:

[https://github.com/webbsalad/Computational\\_Mathematics\\_LW1](https://github.com/webbsalad/Computational_Mathematics_LW1)

Для открытия веб-приложения, необходимо скачать файлы, в терминале зайти в директорию, выполнить команду «python manage.py run server».

## Результат выполнения работы:





$x(i)$	$y(i)$
0	1.
0.1	1.1
0.2	1.199
0.3	1.29492
0.4	1.3855644

0.5	1.46869826
0.6	1.54213318
0.7	1.6038185
0.8	1.65193306
0.9	1.68497172
1	1.70182144

127.0.0.1:8000/differentiator/fir

$e^{x^2} = e^{2x+3} \Rightarrow x^2 = 2x+3$

$C_1 = \text{const.}$

$1 = ?$

$x^2 - 3x + \ln x = \dots$

$B(-3, 3)$

$D = \dots$

### Вычисление Диффура

Метод вычисления: Рунге-Кутта

Функция f(x, y):  $y'(1-x)$

Нижний предел: 0.0

Верхний предел: 1.0

Количество разбиений: 10

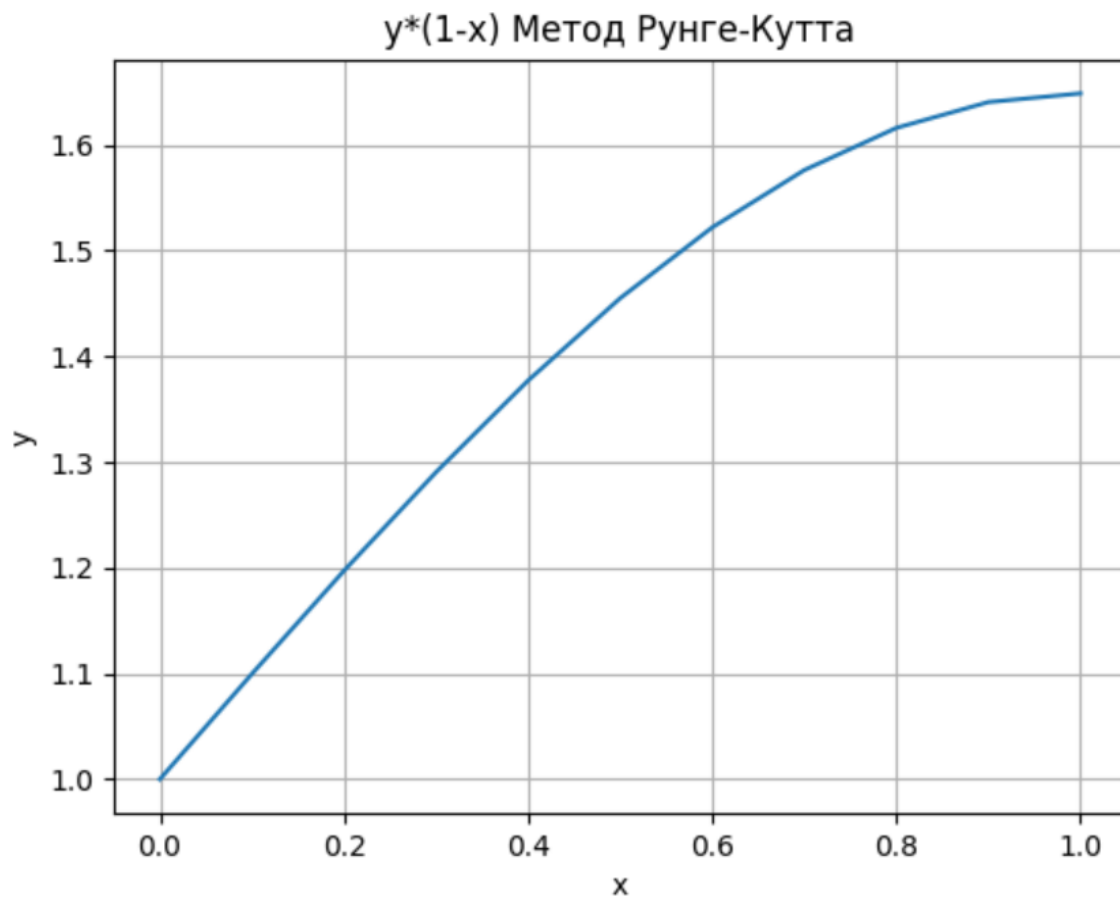
Ответ:

X: [0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0] Y: [1.09965878 1.19721723 1.29046145 1.37712756 1.45499119 1.52196132 1.57617313 1.61607414 1.64049798 1.64872101]

Показать график

Рассчитать

2024 05.12.2023



x(i)	y(i)
0	1
0.1	1.09965878
0.2	1.19721723
0.3	1.29046145
0.4	1.37712756
0.5	1.45499119

0.6	1.52196132
0.7	1.57617313
0.8	1.61607414
0.9	1.64049798
1	1.64872101

Назад

### Вычисление Диффура второго порядка методом Эйлера

Начальные значения без ввода:

$$y'' + y' / x + y = 0$$

на интервале [1; 1.5] с начальными условиями:

$$y = 0.77; y' = -0.44$$

Ответ:

X: [1.1, 1.2000000000000002, 1.3000000000000003, 1.4000000000000004, 1.5000000000000004] Y: [0.726, 0.6783, 0.6273150000000001, 0.5734689230769231, 0.5171958445054945] Z: [-0.477, -0.50985,

Рассчитать

x(i)	y(i)	z(i)
------	------	------



1.1	0.726	-0.477
1.2	0.6783	-0.50985
1.3	0.627315	-0.5384607692307692
1.4	0.5734689230769231	-0.5627307857142857
1.5	0.5171958445054945	-0.5825622923076923

Назад

### Вычисление Системы методом Эйлера

Начальные значения без ввода:

$$dx = -2x + 5z$$

$$dy = \sin(t - 1)x - y + 3z$$

$$dz = -x + 2z$$

С начальными условиями:  $x_0 = 2; y_0 = 1; z_0 = 1$

Ответ:

Xt:	[0. 0.03 0.06 0.09 0.12 0.15 0.18 0.21 0.24 0.27 0.3 ]
Yt:	[2. 2.03 2.0582 2.084573 2.10909362 2.13173812 2.15248444 2.1713122 2.18820272 2.20313906 2.21610601]
Zt:	[1. 1.00951174 1.01899085 1.02847664

Рассчитать

x(t)	y(t)	z(t)
------	------	------

0	2	1
0.03	2.03	1.00951174
0.06	2.0582	1.01899085
0.09	2.084573	1.02847664
0.12	2.10909362	1.038006
0.15	2.13173812	1.04761308
0.18	2.15248444	1.05732906
0.21	2.1713122	1.06718188
0.24	2.18820272	1.07719601
0.27	2.20313906	1.08739224
0.3	2.21610601	1.09778745

### **Сравнительный анализ полученных результатов:**

Возьмём контрольный пример в виде дифференциального уравнения первого порядка  $y' = y*(1 - x)$  на отрезке  $[0; 1]$  с начальными условиями  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ , мы выяснили, что метод Рунге-Кутты более точный для вычисления дифференциальных уравнений.

### **Вывод:**

Нам удалось, верно, реализовать численные методы решения дифференциальных уравнений посредством веб-приложения. В ходе работы получилось выяснить, что самым точным методом для дифференцирования функции первого порядка является метод Рунге-Кутты.

## Отчёт Суворов Р.М.

**Тема:** Численные методы решения дифференциальных уравнений

**Используемое оборудование:** ПК, языки программирования: Python, HTML, CSS, SQL, JavaScript; используемые сторонние библиотеки: Django, Matplotlib, Numpy, SQLite3; среда разработки Visual Studio Code.

**Постановка задачи:** Изучить численные методы Эйлера и Рунге-Кутты и предложенные варианты алгоритмов их реализации. Разработать программы решения дифференциальных уравнений, используя актуальный для студента язык программирования. Разработать программы решения дифференциальных уравнений второго порядка и системы дифференциальных уравнений с использованием численных методов Эйлера и Рунге-Кутты.

**Математическая модель:**

Контрольный пример 1.

Решить дифференциальное уравнение  $y' = y*(1 - x)$  на отрезке  $[0; 1]$  с начальными условиями  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .

1.1 Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера/ Рунге-Кутты разбив отрезок на 10 частей.

Контрольный пример 2.

Решить дифференциальное уравнение вида:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$$

на интервале  $[1; 1.5]$  с начальными условиями:

$$y(1) = 0.77$$

$$y'(1) = -0.44$$

$$h = 0.1$$

Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера, разбив отрезок на 10 частей.

Контрольный пример 3.

Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5z \\ \frac{dy}{dt} = \sin(t-1)x - y - 3z \\ \frac{dz}{dt} = -x + 2z \end{cases}$$

с начальными условиями  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $z(0) = 1$  составить таблицу значений функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  на отрезке  $[0; 0.3]$  с шагом  $h = 0.003$ . Использовать метод Эйлера.

3.1 Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера, разбив отрезок на 10 частей.

3.2 Получить результаты решения системы дифференциальных уравнений методом Эйлера, уменьшив шаг в 10 раз.

### Метод Эйлера:

$$y' = f(x, y)$$

в заданном диапазоне изменения переменной  $a \leq x \leq b$  с начальными условиями  $y_0 = y(a)$  отрезок  $[a, b]$  разбивается на  $n$  частей с шагом  $h = (b - a) / n$ . В пределах этого шага производная

заменяется разностным отношением  $y' = \Delta y / \Delta x = f(x, y)$ ,

$$\Delta y = h * y' = h * f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h_x$$

### Метод Рунге-Кутты:

Этот метод отличается от метода Эйлера тем, что на каждом шаге интегрирования вычисляется так называемая усреднённая производная  $\bar{F}_i$ :

$$y_{i+1} = y_i + F_i$$

или

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \Delta y_i$$

$$F_i = (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})/6;$$

$$k_{1i} = hf(x_i, y_i);$$

$$k_{2i} = hf(x_i + h/2, y_i + k_{1i}/2);$$

$$k_{3i} = hf(x_i + h/2, y_i + k_{2i}/2);$$

$$k_{4i} = hf(x_i + h, y_i + k_{3i}).$$

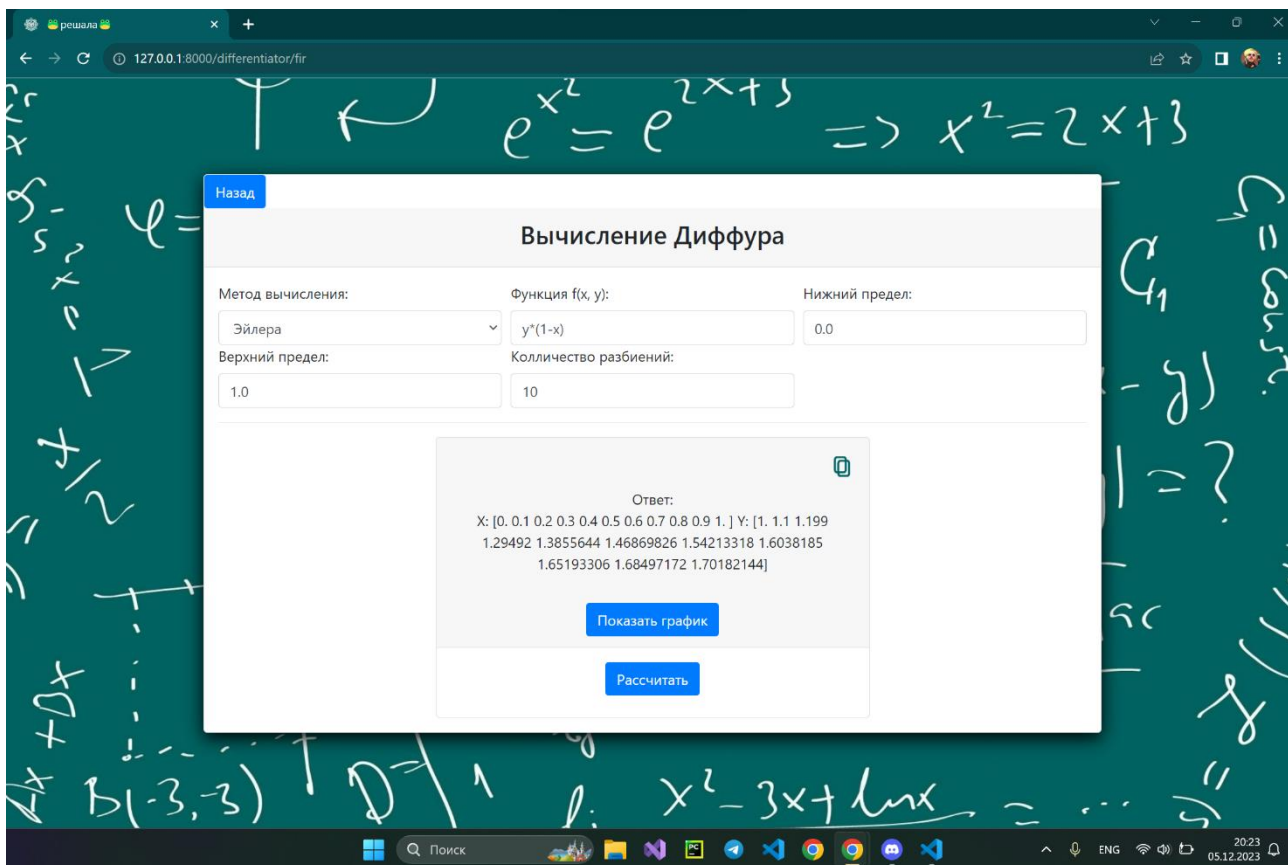
В любом методе  $x_i = x_{i-1} + h$  при  $a \leq x < b$

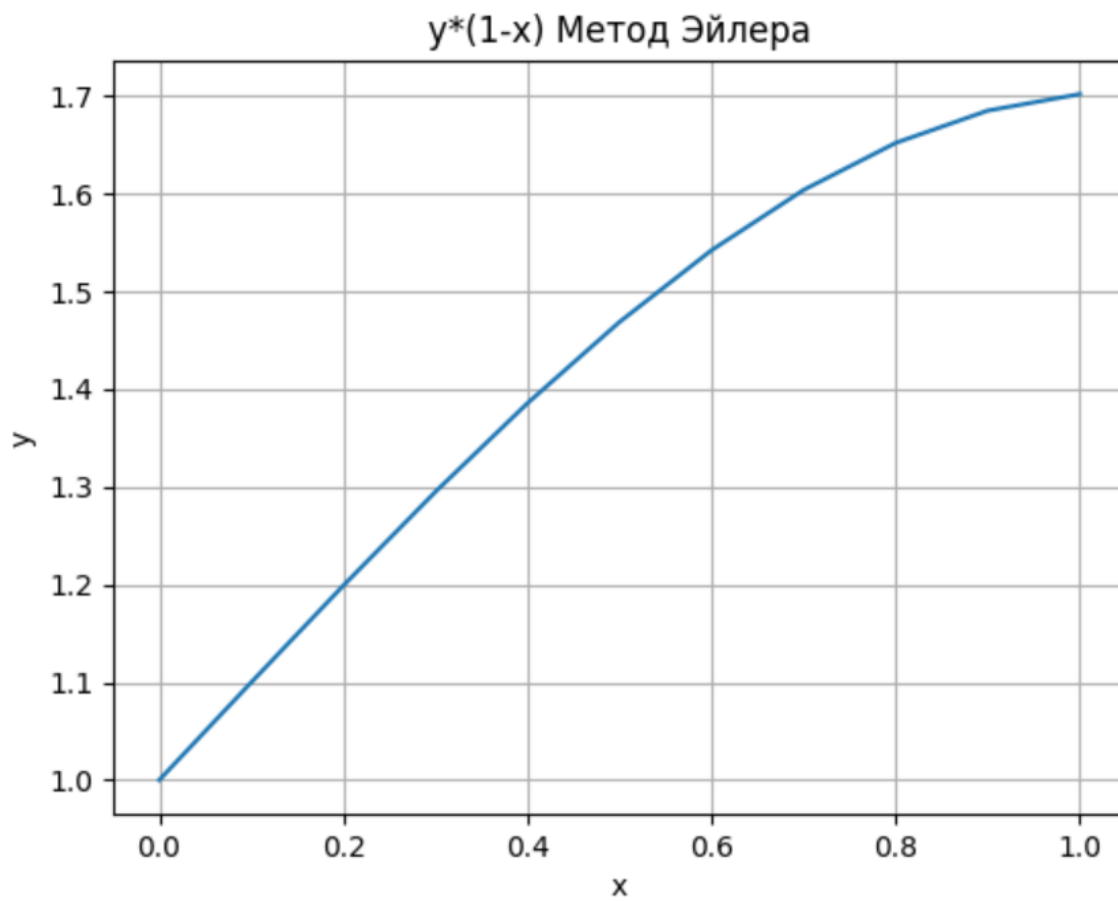
## Код программы:

[https://github.com/webbsalad/Computational\\_Mathematics\\_LW1](https://github.com/webbsalad/Computational_Mathematics_LW1)

Для открытия веб-приложения, необходимо скачать файлы, в терминале зайти в директорию, выполнить команду «python manage.py run server».

## Результат выполнения работы:





x(i)	y(i)
0	1.
0.1	1.1
0.2	1.199
0.3	1.29492
0.4	1.3855644

0.5	1.46869826
0.6	1.54213318
0.7	1.6038185
0.8	1.65193306
0.9	1.68497172
1	1.70182144

127.0.0.1:8000/differentiator/fir

$e^{x^2} = e^{2x+3} \Rightarrow x^2 = 2x+3$

$C_1 = \text{const.}$

$1 = ?$

$x^2 - 3x + \ln x = \dots$

$B(-3, 3)$

$D = \dots$

### Вычисление Диффура

Метод вычисления: Рунге-Кутта

Функция f(x, y):  $y'(1-x)$

Нижний предел: 0.0

Верхний предел: 1.0

Количество разбиений: 10

Ответ:

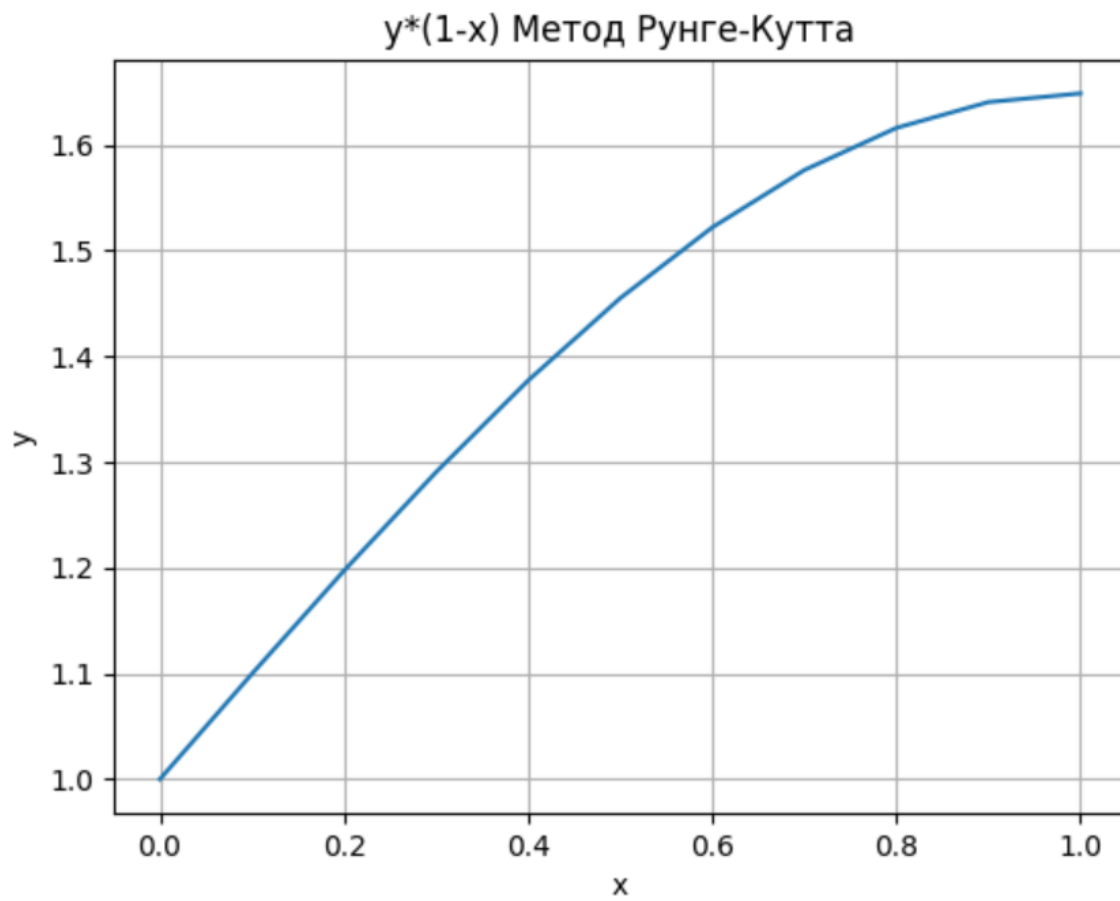
X: [0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0] Y: [1.09965878 1.19721723 1.29046145 1.37712756 1.45499119 1.52196132 1.57617313 1.61607414 1.64049798 1.64872101]

Показать график

Рассчитать

2024 05.12.2023





x(i)	y(i)
0	1
0.1	1.09965878
0.2	1.19721723
0.3	1.29046145
0.4	1.37712756
0.5	1.45499119

0.6	1.52196132
0.7	1.57617313
0.8	1.61607414
0.9	1.64049798
1	1.64872101

Назад

### Вычисление Диффура второго порядка методом Эйлера

Начальные значения без ввода:

$$y'' + y' / x + y = 0$$

на интервале [1; 1.5] с начальными условиями:

$$y = 0.77; y' = -0.44$$

Ответ:

X: [1.1, 1.2000000000000002, 1.3000000000000003, 1.4000000000000004, 1.5000000000000004] Y: [0.726, 0.6783, 0.6273150000000001, 0.5734689230769231, 0.5171958445054945] Z: [-0.477, -0.50985,

Рассчитать

x(i)	y(i)	z(i)
------	------	------

1.1	0.726	-0.477
1.2	0.6783	-0.50985
1.3	0.627315	-0.5384607692307692
1.4	0.5734689230769231	-0.5627307857142857
1.5	0.5171958445054945	-0.5825622923076923

Назад

### Вычисление Системы методом Эйлера

Начальные значения без ввода:

$$dx = -2x + 5z$$

$$dy = \sin(t - 1)x - y + 3z$$

$$dz = -x + 2z$$

С начальными условиями:  $x_0 = 2; y_0 = 1; z_0 = 1$

Ответ:

Xt:	[0. 0.03 0.06 0.09 0.12 0.15 0.18 0.21 0.24 0.27 0.3 ]
Yt:	[2. 2.03 2.0582 2.084573 2.10909362 2.13173812 2.15248444 2.1713122 2.18820272 2.20313906 2.21610601]
Zt:	[1. 1.00951174 1.01899085 1.02847664

Рассчитать

x(t)	y(t)	z(t)
------	------	------

0	2	1
0.03	2.03	1.00951174
0.06	2.0582	1.01899085
0.09	2.084573	1.02847664
0.12	2.10909362	1.038006
0.15	2.13173812	1.04761308
0.18	2.15248444	1.05732906
0.21	2.1713122	1.06718188
0.24	2.18820272	1.07719601
0.27	2.20313906	1.08739224
0.3	2.21610601	1.09778745

### **Сравнительный анализ полученных результатов:**

Возьмём контрольный пример в виде дифференциального уравнения первого порядка  $y' = y*(1 - x)$  на отрезке  $[0; 1]$  с начальными условиями  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ , мы выяснили, что метод Рунге-Кутты более точный для вычисления дифференциальных уравнений.

### **Вывод:**

Нам удалось, верно, реализовать численные методы решения дифференциальных уравнений посредством веб-приложения. В ходе работы получилось выяснить, что самым точным методом для дифференцирования функции первого порядка является метод Рунге-Кутты.

## Отчёт Гневнов А.Е.

**Тема:** Численные методы решения дифференциальных уравнений

**Используемое оборудование:** ПК, языки программирования: Python, HTML, CSS, SQL, JavaScript; используемые сторонние библиотеки: Django, Matplotlib, Numpy, SQLite3; среда разработки Visual Studio Code.

**Постановка задачи:** Изучить численные методы Эйлера и Рунге-Кутты и предложенные варианты алгоритмов их реализации. Разработать программы решения дифференциальных уравнений, используя актуальный для студента язык программирования. Разработать программы решения дифференциальных уравнений второго порядка и системы дифференциальных уравнений с использованием численных методов Эйлера и Рунге-Кутты.

**Математическая модель:**

Контрольный пример 1.

Решить дифференциальное уравнение  $y' = y*(1 - x)$  на отрезке  $[0; 1]$  с начальными условиями  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .

1.1 Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера/ Рунге-Кутты разбив отрезок на 10 частей.

Контрольный пример 2.

Решить дифференциальное уравнение вида:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$$

на интервале  $[1; 1.5]$  с начальными условиями:

$$y(1) = 0.77$$

$$y'(1) = -0.44$$

$$h = 0.1$$

Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера, разбив отрезок на 10 частей.

Контрольный пример 3.

Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5z \\ \frac{dy}{dt} = \sin(t-1)x - y - 3z \\ \frac{dz}{dt} = -x + 2z \end{cases}$$

с начальными условиями  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $z(0) = 1$  составить таблицу значений функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  на отрезке  $[0; 0.3]$  с шагом  $h = 0.003$ . Использовать метод Эйлера.

3.1 Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера, разбив отрезок на 10 частей.

3.2 Получить результаты решения системы дифференциальных уравнений методом Эйлера, уменьшив шаг в 10 раз.

### Метод Эйлера:

$$y' = f(x, y)$$

в заданном диапазоне изменения переменной  $a \leq x \leq b$  с начальными условиями  $y_0 = y(a)$  отрезок  $[a, b]$  разбивается на  $n$  частей с шагом  $h = (b - a) / n$ . В пределах этого шага производная

заменяется разностным отношением  $y' = \Delta y / \Delta x = f(x, y)$ ,

$$\Delta y = h * y' = h * f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h_x$$

### Метод Рунге-Кутты:

Этот метод отличается от метода Эйлера тем, что на каждом шаге интегрирования вычисляется так называемая усреднённая производная  $\bar{F}_i$ :

$$y_{i+1} = y_i + F_i$$

или

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \Delta y_i$$

$$F_i = (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})/6;$$

$$k_{1i} = hf(x_i, y_i);$$

$$k_{2i} = hf(x_i + h/2, y_i + k_{1i}/2);$$

$$k_{3i} = hf(x_i + h/2, y_i + k_{2i}/2);$$

$$k_{4i} = hf(x_i + h, y_i + k_{3i}).$$

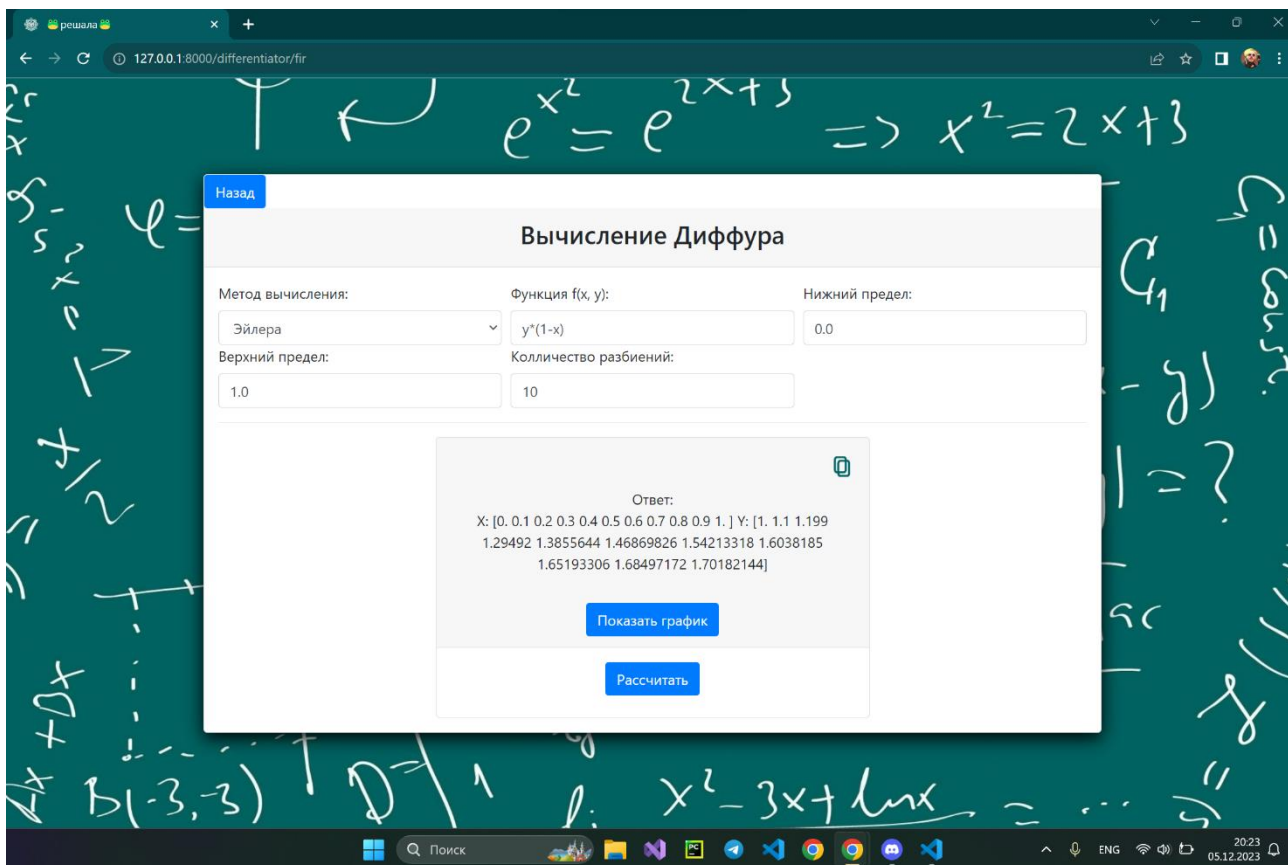
В любом методе  $x_i = x_{i-1} + h$  при  $a \leq x < b$

## Код программы:

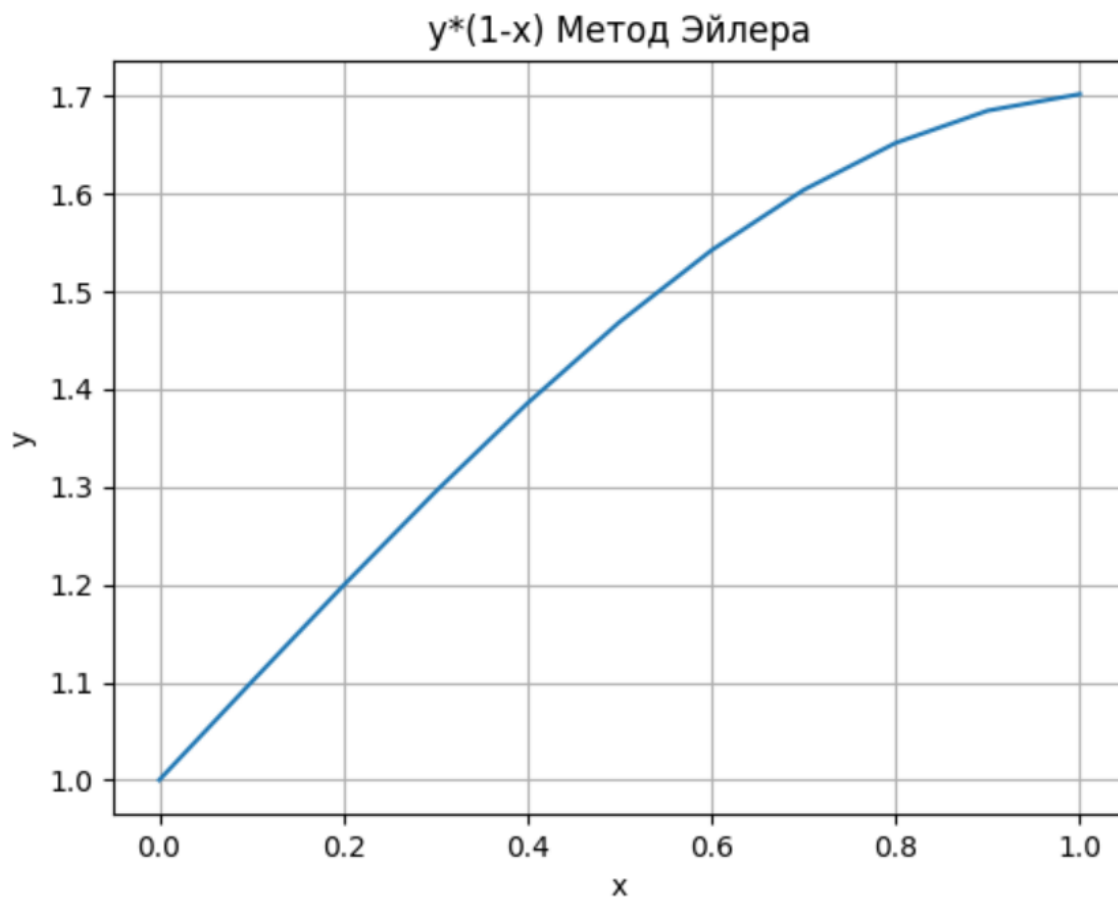
[https://github.com/webbsalad/Computational\\_Mathematics\\_LW1](https://github.com/webbsalad/Computational_Mathematics_LW1)

Для открытия веб-приложения, необходимо скачать файлы, в терминале зайти в директорию, выполнить команду «python manage.py run server».

## Результат выполнения работы:







x(i)	y(i)
0	1.
0.1	1.1
0.2	1.199
0.3	1.29492
0.4	1.3855644

0.5	1.46869826
0.6	1.54213318
0.7	1.6038185
0.8	1.65193306
0.9	1.68497172
1	1.70182144

Назад

### Вычисление Диффура

Метод вычисления: Рунге-Кутта      Функция  $f(x, y)$ :  $y'(1-x)$       Нижний предел: 0.0

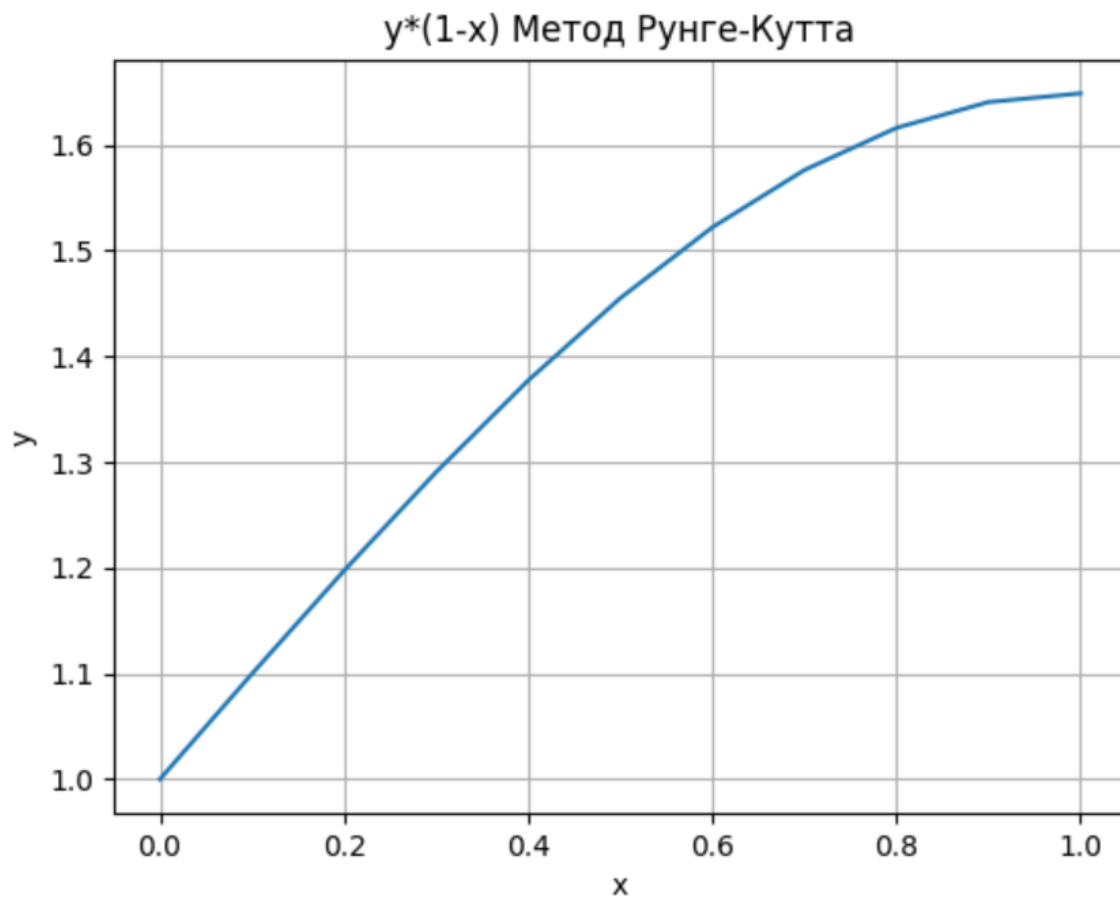
Верхний предел: 1.0      Количество разбиений: 10

Ответ:

X: [0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0] Y: [1.09965878 1.19721723 1.29046145 1.37712756 1.45499119 1.52196132 1.57617313 1.61607414 1.64049798 1.64872101]

[Показать график](#)

[Рассчитать](#)



x(i)	y(i)
0	1
0.1	1.09965878
0.2	1.19721723
0.3	1.29046145
0.4	1.37712756
0.5	1.45499119

0.6	1.52196132
0.7	1.57617313
0.8	1.61607414
0.9	1.64049798
1	1.64872101

Назад

### Вычисление Диффура второго порядка методом Эйлера

Начальные значения без ввода:

$$y'' + y' / x + y = 0$$

на интервале [1; 1.5] с начальными условиями:

$$y = 0.77; y' = -0.44$$

Ответ:

X: [1.1, 1.2000000000000002, 1.3000000000000003, 1.4000000000000004, 1.5000000000000004] Y: [0.726, 0.6783, 0.6273150000000001, 0.5734689230769231, 0.5171958445054945] Z: [-0.477, -0.50985,

Рассчитать

x(t)	y(t)	z(t)
------	------	------

1.1	0.726	-0.477
1.2	0.6783	-0.50985
1.3	0.627315	-0.5384607692307692
1.4	0.5734689230769231	-0.5627307857142857
1.5	0.5171958445054945	-0.5825622923076923

Назад

### Вычисление Системы методом Эйлера

Начальные значения без ввода:

$$dx = -2x + 5z$$

$$dy = \sin(t - 1)x - y + 3z$$

$$dz = -x + 2z$$

С начальными условиями:  $x_0 = 2; y_0 = 1; z_0 = 1$

Ответ:

Xt:	[0. 0.03 0.06 0.09 0.12 0.15 0.18 0.21 0.24 0.27 0.3 ]
Yt:	[2. 2.03 2.0582 2.084573 2.10909362 2.13173812 2.15248444 2.1713122 2.18820272 2.20313906 2.21610601]
Zt:	[1. 1.00951174 1.01899085 1.02847664

Рассчитать

x(i)	y(i)	z(i)
------	------	------

0	2	1
0.03	2.03	1.00951174
0.06	2.0582	1.01899085
0.09	2.084573	1.02847664
0.12	2.10909362	1.038006
0.15	2.13173812	1.04761308
0.18	2.15248444	1.05732906
0.21	2.1713122	1.06718188
0.24	2.18820272	1.07719601
0.27	2.20313906	1.08739224
0.3	2.21610601	1.09778745

### **Сравнительный анализ полученных результатов:**

Возьмём контрольный пример в виде дифференциального уравнения первого порядка  $y' = y*(1 - x)$  на отрезке  $[0; 1]$  с начальными условиями  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ , мы выяснили, что метод Рунге-Кутты более точный для вычисления дифференциальных уравнений.

### **Вывод:**

Нам удалось, верно, реализовать численные методы решения дифференциальных уравнений посредством веб-приложения. В ходе работы получилось выяснить, что самым точным методом для дифференцирования функции первого порядка является метод Рунге-Кутты.