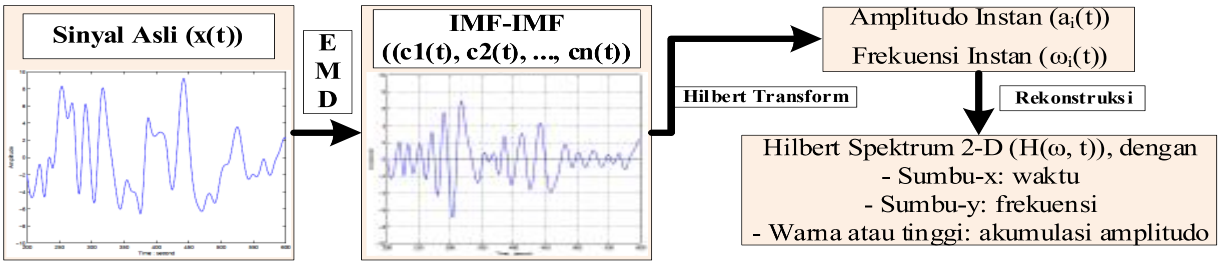
Hilbert-Huang Transform

(HHT)



1. Empirical Mode Decomposition (EMD)

Ialah memecah sinyal menjadi potongan-potongan “murni” yang disebut IMF (Intrinsic Mode Functions). Proses ini dilaksanakan melalui **metode *sifting* (metode untuk mendapatkan IMF satu per satu)** dengan langkah umum sebagai berikut:

1. Identifikasi semua titik ekstrem lokal dari sinyal $x(t)$. (residu $r_0(t) = h_0(t)$)
2. Bentuk amplop atas e_{max}(t) dan bawah e_{min}(t) menggunakan *Spline Cubic*

***Contoh perhitungan Spline Cubic 10 data sinyal, misalkan:**

$\{(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), \ldots, (X_9, Y_9)\} =$ X_1 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Y_1 : 0 1 0 2 1 3 2 4 3 5

Pada interfal [X_i. X_{i+1}], perlu dibentuk 9 buah spline kubik $S_i(x)$

Persamaan UMUM:

$$S_i(x) = a_i + b_i\,(x-x_i) + c_i\,(x-x_i)^2 + d_i\,(x-x_i)^3$$

Langkah I: Spline harus harus melewati titik-titik data

pada kondisi 9 segment, diperlukan 2 titik per segmen => 18 persamaan. Spline harus melewati 2 titik:

$$\text{Titik awal } (x_i, y_i)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Titik akhir } (x_{i+1}, y_{i+1})$$

Segmen ke-0: [0,1]

$S_0(x) = a_0 + b_0\,(x-0) + c_0\,(x-0)^2 + d_0\,(x-0)^3$

$S_0(0) = a_0 = 0$, dari $y_0 = 0$
$S_0(1) = a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 1$, dari $y_1 = 1$

Segmen ke-1: [1,2]

$S_1(x) = a_1 + b_1\,(x-1) + c_1\,(x-1)^2 + d_1\,(x-1)^3$

$S_1(1) = a_1 = 1$, dari y_1
$S_1(2) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0$, dari y_2

Segmen ke-2: [2,3]

$S_2(x) = a_2 + b_2 (x-2) + c_2 (x-2)^2 + d_2 (x-2)^3$

$S_2(2) = a_2 = 0$, dari y_2
$S_2(3) = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 2$, dari y_3

Segmen ke-3: [3,4]

$S_3(x) = a_3 + b_3 (x-3) + c_3 (x-3)^2 + d_3 (x-3)^3$

$S_3(3) = a_3 = 2$, dari y_3
$S_3(4) = a_3 + b_3 + c_3 + d_3 = 1$, dari y_4

Segmen ke-4: [4,5]

$S_4(x) = a_4 + b_4 (x-4) + c_4 (x-4)^2 + d_4 (x-4)^3$

$S_4(4) = a_4 = 1$, dari y_4
$S_4(5) = a_4 + b_4 + c_4 + d_4 = 3$, dari y_5

Segmen ke-5: [5,6]

$S_5(x) = a_5 + b_5 (x-5) + c_5 (x-5)^2 + d_5 (x-5)^3$

$S_5(5) = a_5 = 3$, dari y_5
$S_5(6) = a_5 + b_5 + c_5 + d_5 = 2$, dari y_6

Segmen ke-6: [6,7]

$S_6(x) = a_6 + b_6 (x-6) + c_6 (x-6)^2 + d_6 (x-6)^3$

$S_6(6) = a_6 = 6$, dari y_6
$S_6(7) = a_6 + b_6 + c_6 + d_6 = 4$, dari y_7

Segmen ke-7: [7,8]

$S_7(x) = a_7 + b_7 (x-7) + c_7 (x-7)^2 + d_7 (x-7)^3$

$S_7(7) = a_7 = 4$, dari y_7
$S_7(8) = a_7 + b_7 + c_7 + d_7 = 3$, dari y_8

Segmen ke-8: [8,9]

$S_8(x) = a_8 + b_8 (x-8) + c_8 (x-8)^2 + d_8 (x-8)^3$

$S_8(8) = a_8 = 3$, dari y_8
$S_8(9) = a_8 + b_8 + c_8 + d_8 = 5$, dari y_9

Langkah II: Kontinuitas Turunan Pertama dan Kedua

- Turunan pertama kontinu di titik dalam (8 titik): x_1 s/d x_8

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$$
$$\Downarrow$$
$$b_i + 2c_i + 3d_i = b_{i+1}$$

*untuk i=0,…,7

1. $b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1$
2. $b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2$
3. $b_2 + 2c_2 + 3d_2 = b_3$
4. $b_3 + 2c_3 + 3d_3 = b_4$
5. $b_4 + 2c_4 + 3d_4 = b_5$
6. $b_5 + 2c_5 + 3d_5 = b_6$
7. $b_6 + 2c_6 + 3d_6 = b_7$
8. $b_7 + 2c_7 + 3d_7 = b_8$

8 Persamaan

Turunan Pertama (f'(x)) = kemiringan kurva dalam arah perubahan (tidak ada tikungan tajam pada Kurva)

- Turunan kedua continue di $x_1, \ldots, x_8$

$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$$

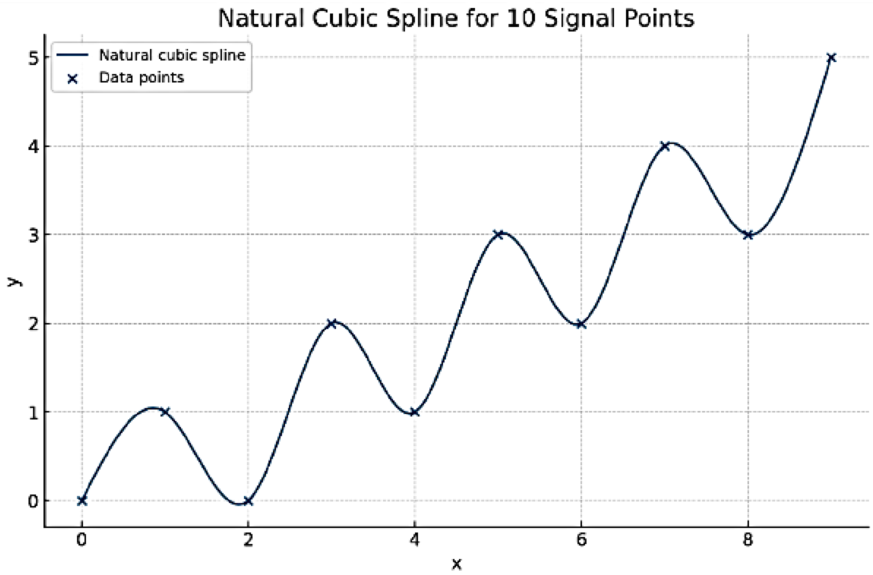
$$\Downarrow$$

$$2c_i + 6d_i = 2c_{i+1}$$

1. $2c_0 + 6d_0 = 2c_1$
2. $2c_1 + 6d_1 = 2c_2$
3. $2c_2 + 6d_2 = 2c_3$
4. $2c_3 + 6d_3 = 2c_4$
5. $2c_4 + 6d_4 = 2c_5$
6. $2c_5 + 6d_5 = 2c_6$
7. $2c_6 + 6d_6 = 2c_7$
8. $2c_7 + 6d_7 = 2c_8$

8 persamaan

Turunan Kedua (f''(x)) = kelengkungan (seberapa tajam kelengkungan berubah (percepatan kurva terjadi secara halus)).



Langkah III: Boundary Condition (2 persamaan)

Untuk natural spline, diperlukan syarat batas:

1. $S_0''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{2c_0 = 0}$
2. $S_n''(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow \quad S_8''(x_9) = 0$

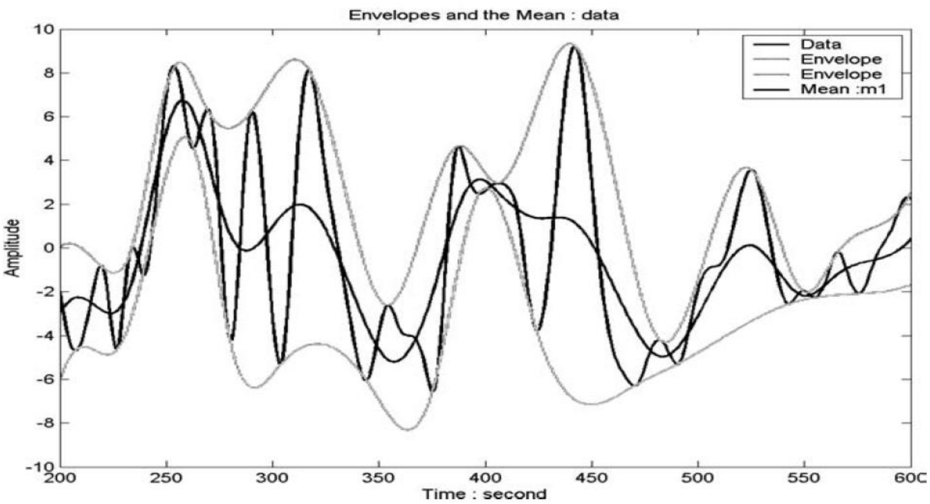
$$\Rightarrow \mathbf{2c8 + 6d8 = 0}$$

Ujung kiri (x_0) dan Ujung kanan (x_8) tidak memiliki pasangan di luar untuk disambungkan. Oleh karena itu, diperlukan aturan tambahan untuk mengatur spline di dua ujung tersebut yang disebut dengan Boundary Condition (syarat batas).

3. Hitung rata-rata amplop:

$$m(t) = \frac{e_{max}(t) + e_{min}(t)}{2} \tag{1}$$

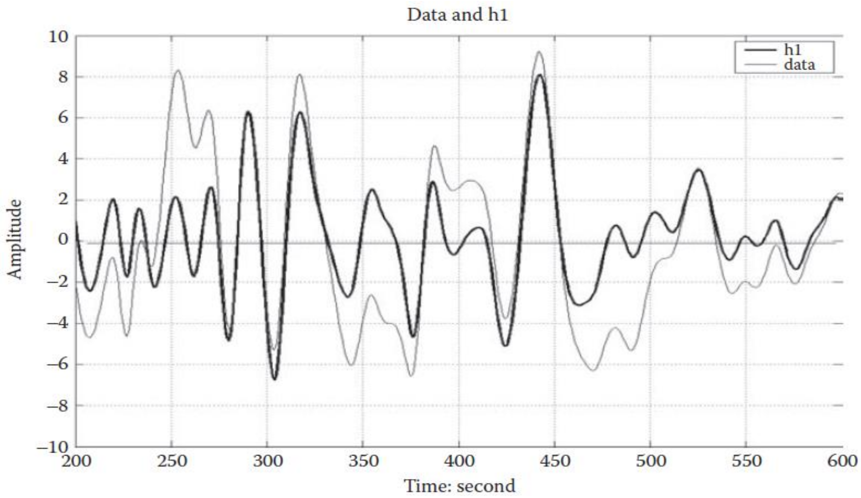
***Rata-rata kedua amplop ini adalah trend lokal $m_1(t)$ — digambar sebagai garis di tengah-tengah amplop atas dan bawah.**



4. Kurangi sinyal awal dengan rata-rata amplop untuk memperoleh komponen detail sebagai "kandidat IMF"

$$h_1(t) = x(t) - m_1(t) \tag{2}$$

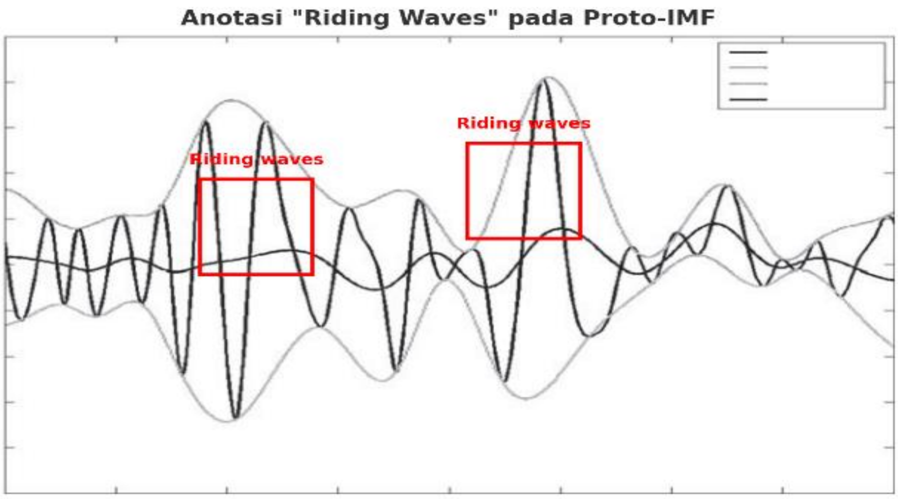
$h_1(t)$ disebut **proto-IMF (PIMF)**.



***Penjelasan sederhananya**

- Dalam EMD, tujuannya adalah mendapatkan **Intrinsic Mode Function (IMF) (**komponen osilasi murni) yang memiliki dua syarat:
  1. Jumlah **zero-crossing** ≈ jumlah **ekstrem lokal**.
  2. Rata-rata amplop atas dan bawah ≈ 0 di semua titik waktu.
- Saat baru sekali melakukan:

  $h_1(t) = x(t) - m_1(t)$, hasilnya **belum tentu** memenuhi kedua syarat di atas.
- Hasil sementara inilah yang disebut **Proto-IMF (PIMF)** — kandidat IMF yang masih mengandung ketidaksempurnaan, seperti:
  - **Riding waves** (osilasi kecil di atas gelombang utama).
  - Ketidaksimetrian antara amplop atas dan bawah.
  - Rata-rata amplop belum benar-benar mendekati nol.



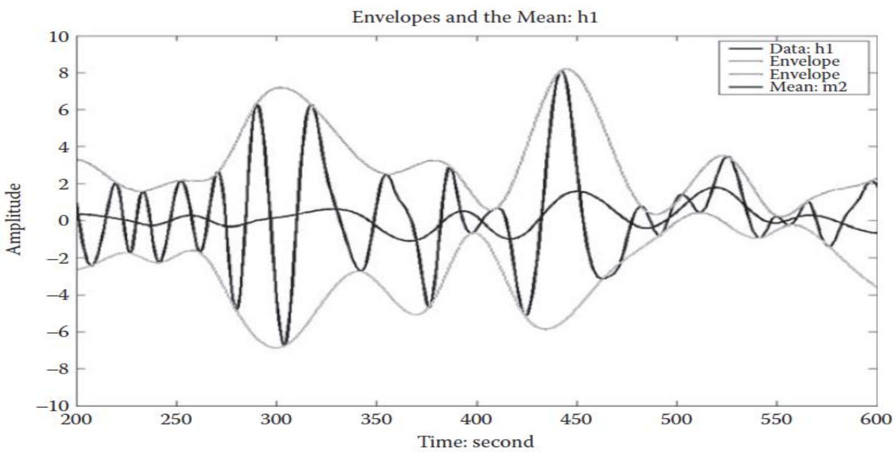
Apa yang dilakukan setelah mendapat PIMF?

- PIMF akan **di-sifting ulang**: digunakan sebagai data baru, dibuat amplop atas & bawah lagi, dihitung rata-rata, lalu dikurangi kembali.
- Proses ini diulang sampai:
  - Riding waves hilang.
  - Sinyal simetris terhadap nol.
  - Memenuhi kriteria IMF.
- Barulah PIMF tersebut naik "status" menjadi IMF.

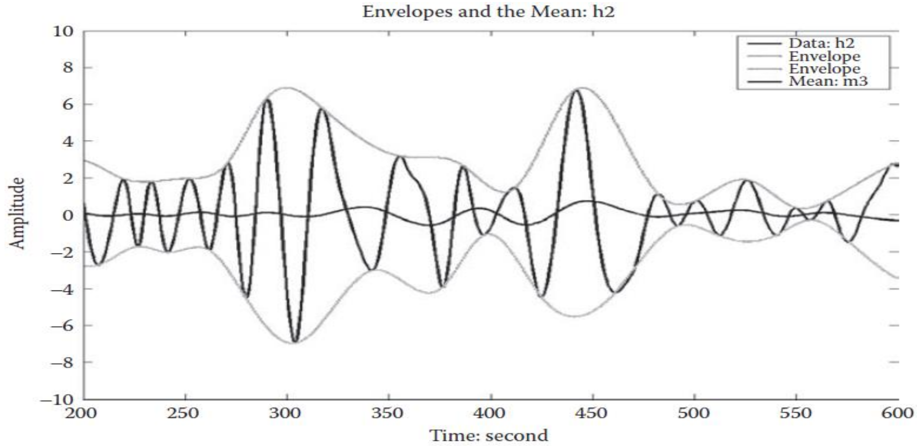
*Pada gambar terlihat bahwa sebagian besar "riding waves" sudah hilang, tapi **masih ada beberapa osilasi kecil di atas gelombang utama** → artinya proses *sifting* perlu diulang.

5. Cek apakah $h_1(t)$ sudah memenuhi kriteria IMF (jumlah nol-crossing ≈ jumlah extrema, dan simetri lokal).

- Kalau **belum**, pakai $h_1(t)$ sebagai data baru dan ulangi langkah 2-5.
- Kalau **sudah**, $h_1(t)$ menjadi IMF pertama ($c_1(t)$).



***Gambar 1.12(A)**: Menggunakan $h_1(t)$ sebagai data baru, proses pembentukan amplop & pengurangan diulang, mungkin dapat menghasilkan hingga $h_{11}(t)$ lalu $h_{12}(t)$, dst.



***Gambar (B)**: Menunjukkan hasil iterasi lanjutan di mana rata-rata amplop semakin mendekati nol, dan gelombang menjadi lebih simetris terhadap sumbu nol.

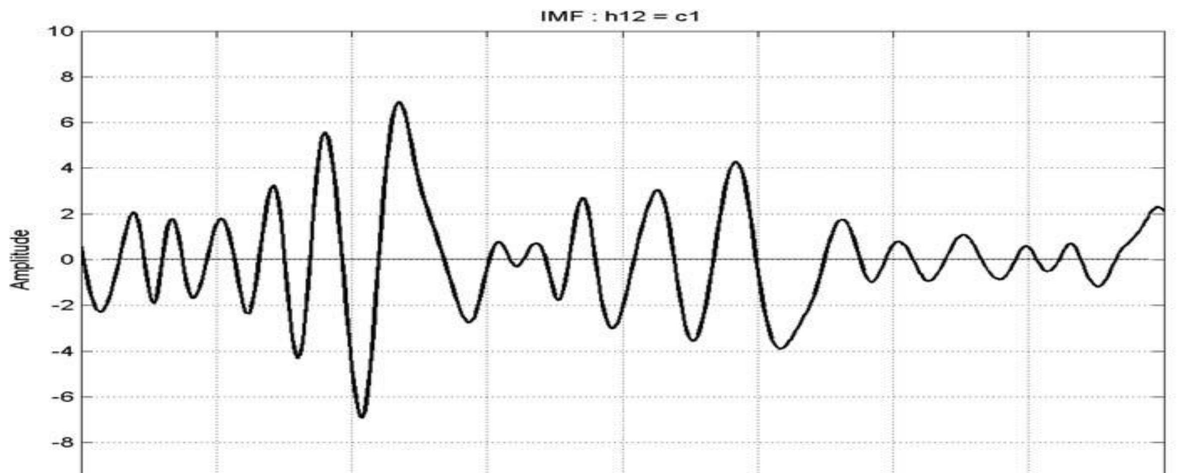
Iterasi ini bertujuan memastikan syarat IMF terpenuhi:

1. Jumlah nol-crossing dan jumlah ekstrem lokal harus sama atau berbeda paling banyak satu.
   - **Zero-crossing (ZC)**: titik di mana sinyal memotong garis nol (amplitudo = 0), baik dari positif ke negatif maupun sebaliknya.
   - **Ekstrem lokal (EL)**: puncak (*maximum*) atau lembah (*minimum*) pada sinyal.

2. Nilai rata-rata dari amplop atas dan bawah (yang dibentuk dari interpolasi titik maksimum dan minimum lokal) harus nol pada setiap titik waktu.

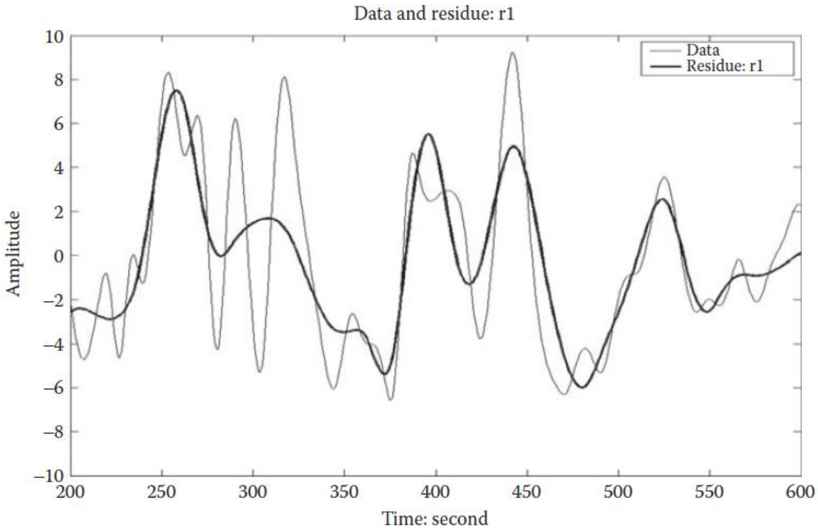
Figure 1.12c – IMF Pertama Ditemukan

- Setelah **12 kali sifting**, $h_{1k}(t)$ akhirnya memenuhi kriteria IMF.
- Hasil ini dinamakan **IMF pertama** ($c_1(t)$).
- Bentuknya merupakan osilasi murni pada skala waktu paling pendek yang ada di sinyal awal.



6. Kurangi sinyal asli dengan IMF pertama untuk mendapatkan "residu" baru.

$$r_1(t) = r_0(t) - c_1(t) \tag{3}$$



- Residu $r_1(t)$ terlihat seperti “rata-rata bergerak” yang lebih halus, mewakili komponen dengan skala waktu lebih panjang.
- Residu ini akan menjadi **data masukan untuk mencari IMF kedua** melalui proses yang sama.

7. Ulangi semua proses di atas untuk residu, dapatkan IMF kedua, ketiga, dst.

   ***Residu = sinyal yang tersisa setelah IMF yang sudah ditemukan dihapus. Residu ini diproses lagi untuk mengekstrak IMF berikutnya, hingga semua komponen terurai.**

Secara formal, sinyal *x(t)* dalam dekomposisi keseluruhan dapat direpresentasikan sebagai:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j(t) + r_n(t) \tag{4}$$

dimana: *x(t)* adalah = **sinyal asli** (data mentah). $C_j(t)$ adalah IMF ke-j, dan $r_n(t)$ adalah residual akhir yang tidak lagi mengandung osilasi.

“Pencarian” IMF berhenti ketika:

- Residu sudah menjadi sinyal monotonic (garis naik atau turun terus, garis konstan, atau fungsi tanpa osilasi lagi), atau
- Residu sudah sangat kecil (mendekati nol atau noise tidak berarti).

2. *Hilbert Spectral Analysis (HSA)*

Adalah analisis setiap IMF untuk melihat **bagaimana frekuensi dan amplitudonya berubah sepanjang waktu**. **Hilbert Spectrum** H(ω,t) adalah peta 2D di mana:

=> **Sumbu-X** = waktu t, **Sumbu-Y** = frekuensi ω, **Warna/Intensitas** = amplitudo a <=

persamaan Transformasi Hilbert

$$H[C_j(t)] = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_j(\tau)}{t-\tau} \qquad (5)$$

- **$c_j(t)$** = IMF ke-j (hasil dari EMD).
- **$H[c_j(t)]$** = Hilbert transform dari IMF ke-j, hasilnya adalah versi *90° phase shifted* dari IMF tersebut.
- **PV** (*principal value*) = aturan khusus integrasi untuk menghindari singularitas saat $t=\tau$.
- Faktor **$1/\pi$** = normalisasi Hilbert transform.

Hubungan dengan IMF: Setelah EMD, misalkan diperoleh kumpulan IMF: $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_{10}(t)$, (masing-masing mewakili komponen osilasi pada skala waktu berbeda).

- Persamaan di atas diaplikasikan **ke setiap IMF secara terpisah**. Misalnya:
  - Untuk IMF pertama $c_1(t)$, dihitung: $\hat{c}_1(t)=H[c_1(t)]$
  - Untuk IMF kedua $c_2(t)$: $\hat{c}_2(t)=H[c_2(t)]$
  - dan seterusnya sampai IMF ke-10 $c_{10}(t)$: $\hat{c}_{10}(t)=H[c_{10}(t)]$
- Dari setiap pasang $(c_j(t), \hat{c}_j(t))$ terbentuk **sinyal analitik**:

$$z(t) = C_j(t) + jH[C_j(t)] = a_j(t)\, e^{j\theta_j(t)} \qquad (6)$$

$$z(t) = C_j(t) + j\hat{C}_j(t)$$

- **Untuk tiap IMF** → hitung:
  - Amplitudo instan $a_j(t)$: $\sqrt{C_j^{\,2}(t) + H[C_j(t)]^2}$,
  - Fase instan $\theta_j(t) = \arctan\left(\frac{H[C_j(t)]}{C_j(t)}\right)$
  - Frekuensi instan $\omega_j(t)$: $\frac{d\theta_j(t)}{dt}$

  *Sehingga pada setiap IMF, dihasilkan pasangan data: **$(t, \omega_j(t), a_j(t))$**

  yang artinya: "Pada waktu t, IMF ke-j punya frekuensi ω_j dan amplitudo a_j."

- **Satukan semua $(t, \omega_j(t), a_j(t))$** dari **semua IMF** ke **satu peta Hilbert Spectrum**

$$H(\omega,t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t).\,\delta(\omega - \omega_j(t)) \qquad (7)$$

Hilbert Spectrum H(ω,t) menginformasikan **berapa besar amplitudo** pada frekuensi ω **pada waktu tertentu** t.

Jika ingin mengetahui **berapa besar total kontribusi frekuensi** ω **selama seluruh durasi sinyal** (0 sampai T), maka **integralkan terhadap waktu**, dalam:

$$h(\omega) = \int_0^T H(\omega, t)dt \tag{8}$$

h(ω) = **Marginal Spectrum,** merepresentasikan akumulasi intensitas (atau energi/amplitudo total) sinyal pada frekuensi ω selama periode waktu T (sepanjang waktu dari 0 sampai T)).

Integrasi ini menghilangkan dimensi waktu sehingga spektrum 2D $H(\omega,t)$ menjadi spektrum 1D $h(\omega)$ yang menunjukkan distribusi amplitudo frekuensi total.

Jadi, prosesnya adalah:

1. Hitung amplitudo dan frekuensi instan tiap IMF → dapat (t, $\omega_j(t)$, $a_j(t)$).
2. Buat spektrum $H(\omega,t)$ sebagai kumpulan amplitudo pada frekuensi instan (dengan fungsi delta).
3. Integrasi $H(\omega,t)$ sepanjang waktu menghasilkan $h(\omega)$, spektrum frekuensi total sinyal selama waktu T.

Dengan demikian, persamaan

$$h(\omega) = \int_0^T H(\omega, t)dt$$

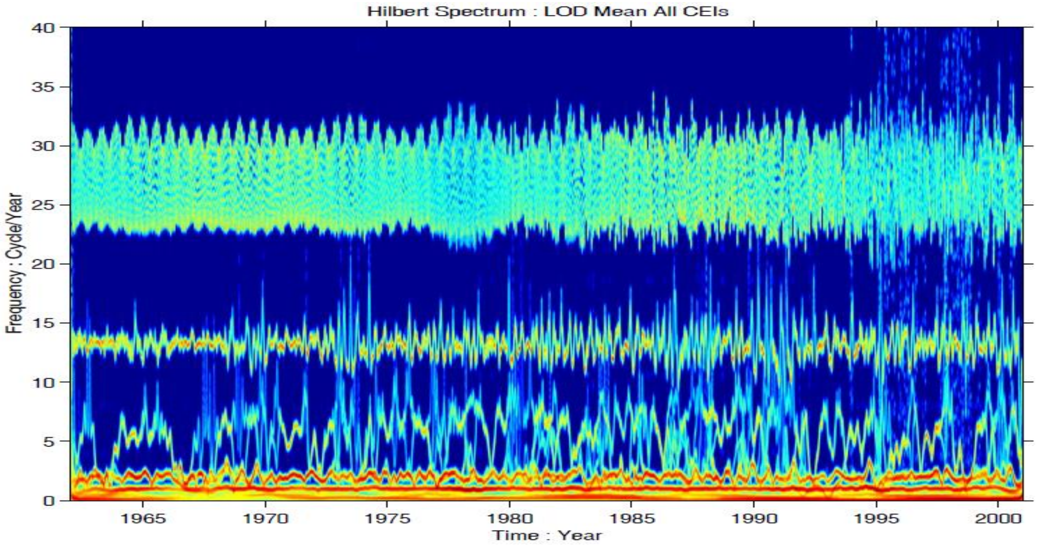
adalah cara mengubah spektrum waktu-frekuensi menjadi spektrum frekuensi total dari agregasi semua IMF pada setiap frekuensi selama kurun waktu tersebut, dengan penejelasan detailnya:

- Setiap IMF memberikan kontribusi amplitudo pada frekuensi instan $\omega_j(t)$ pada waktu t.
- Agregasi berarti menjumlahkan atau mengumpulkan semua amplitudo dari semua IMF yang muncul pada frekuensi tertentu ω selama rentang waktu 0 sampai T.
- Hasilnya adalah spektrum frekuensi total $h(\omega)$, yang mencerminkan seberapa besar energi atau amplitudo terkumpul di frekuensi ω selama seluruh periode pengamatan.

Jadi, agregasi di sini adalah proses menggabungkan seluruh kontribusi frekuensi-amplitudo dari semua IMF ke dalam satu spektrum frekuensi yang menyeluruh selama waktu tersebut.

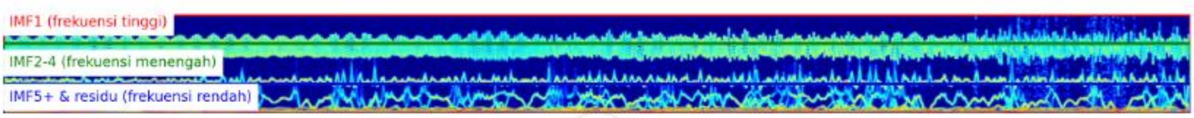
*misalkan ada 10 IMF, maka n=10.

*Artinya: - Semua IMF menyumbang garis-garis frekuensi di **satu grafik** waktu–frekuensi–amplitudo.
- Warna/tingkat intensitas menunjukkan amplitudo dari komponen itu pada waktu tertentu.



Pembagian IMF yang bisa dibaca dari gambar

1. **IMF dengan frekuensi tinggi (bagian paling atas)**
   - Terlihat sebagai pita warna biru–hijau–kuning di bagian frekuensi paling tinggi.
   - Ini biasanya IMF1 (atau IMF1 + IMF2) yang menangkap osilasi cepat.
   - Amplitudo-nya konstan sepanjang waktu, tapi ada variasi pola.
2. **IMF menengah (bagian tengah)**
   - Garis-garis dengan frekuensi tetap atau sedikit berfluktuasi.
   - Bisa jadi IMF3, IMF4, atau IMF5 — berisi komponen frekuensi menengah.
   - Perubahan amplitudo terlihat sebagai bagian yang kadang lebih cerah (kuning) atau redup (hijau).
3. **IMF rendah (bagian bawah dekat 0 Hz)**
   - Terlihat sebagai garis-garis frekuensi sangat rendah dan warna merah–kuning dekat sumbu waktu.
   - Ini biasanya IMF terakhir (IMF8–IMF10) + residu yang menyimpan tren jangka panjang.
   - Fluktuasi lambat dan mendominasi amplitudo di bagian bawah.



Kotak warna di atas menunjukkan perkiraan pembagian IMF pada Hilbert Spectrum ini:

- **Merah (atas) → IMF1 →** komponen frekuensi tinggi.
- **Hijau (tengah) → IMF2–4 →** komponen frekuensi menengah.
- **Biru (bawah) → IMF5+ & residu →** komponen frekuensi rendah dan tren jangka panjang.

Semua IMF ini digabungkan di satu spektrum untuk memberikan gambaran lengkap perubahan frekuensi & amplitudo sinyal sepanjang waktu.

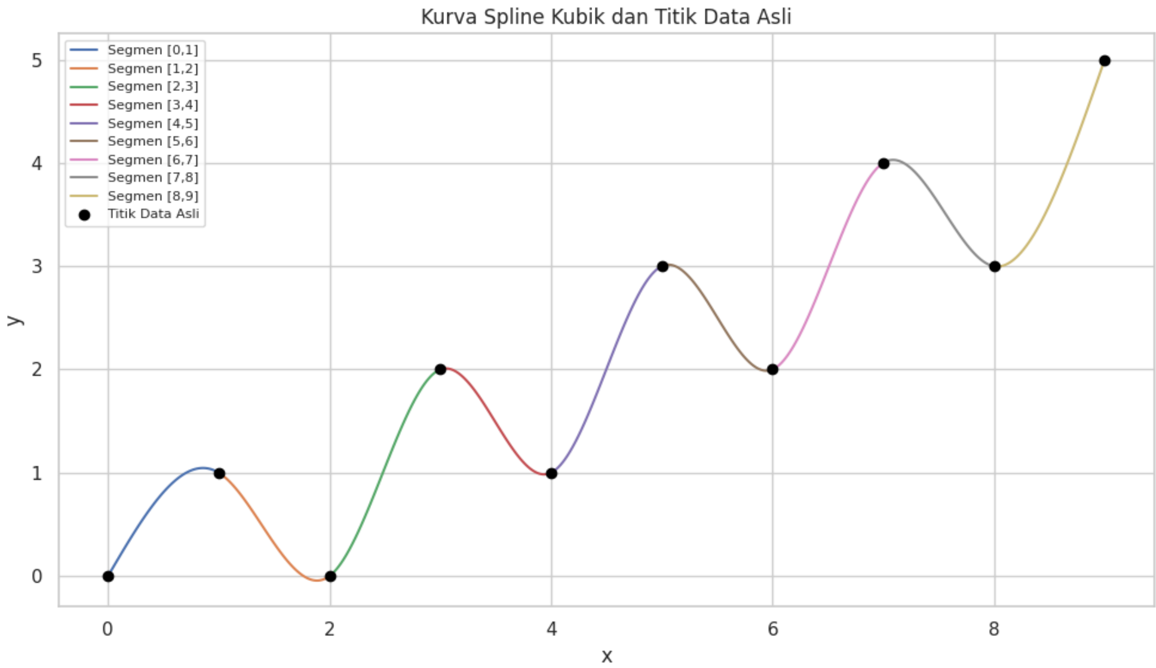


Figure 1 kurva akhir dari contoh 10 nilai y