

# Rappels VIP : Probabilités et Statistiques

Afshine AMIDI et Shervine AMIDI

6 octobre 2018

## Introduction aux probabilités à l'analyse combinatoire

□ **Univers de probabilités** – L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'univers de probabilités d'une expérience aléatoire et est noté  $S$ .

□ **Évènement** – Toute partie  $E$  d'un univers est appelé un évènement. Ainsi, un évènement est un ensemble d'issues possibles d'une expérience aléatoire. Si l'issue de l'expérience aléatoire est contenue dans  $E$ , alors on dit que  $E$  s'est produit.

□ **Axiomes de probabilités** – Pour chaque évènement  $E$ , on note  $P(E)$  la probabilité que l'évènement  $E$  se produise.

$$(1) \quad 0 \leq P(E) \leq 1 \quad (2) \quad P(S) = 1 \quad (3) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

□ **Permutation** – Une permutation est un arrangement de  $r$  objets parmi  $n$  objets, dans un ordre donné. Le nombre de tels arrangements est donné par  $P(n, r)$ , défini par :

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

□ **Combinaison** – Une combinaison est un arrangement de  $r$  objets parmi  $n$  objets, où l'ordre ne compte pas. Le nombre de tels arrangements est donné par  $C(n, r)$ , défini par :

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Remarque : on note que pour  $0 \leq r \leq n$ , on a  $P(n, r) \geq C(n, r)$ .

## Probabilité conditionnelle

□ **Théorème de Bayes** – Pour des évènements  $A$  et  $B$  tels que  $P(B) > 0$ , on a :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Remarque : on a  $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A|B)P(B)$ .

□ **Partition** – Soit  $\{A_i, i \in [1, n]\}$  tel que pour tout  $i$ ,  $A_i \neq \emptyset$ . On dit que  $\{A_i\}$  est une partition si l'on a :

$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

Remarque : pour tout évènement  $B$  dans l'univers de probabilités, on a  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$ .

□ **Formule étendue du théorème de Bayes** – Soit  $\{A_i, i \in [1, n]\}$  une partition de l'univers de probabilités. On a :

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

□ **Indépendance** – Deux évènements  $A$  et  $B$  sont dits indépendants si et seulement si on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

## Variable aléatoires

□ **Variable aléatoire** – Une variable aléatoire, souvent notée  $X$ , est une fonction qui associe chaque élément de l'univers de probabilité à la droite des réels.

□ **Fonction de répartition** – La fonction de répartition  $F$  (en anglais *CDF* - *Cumulative distribution function*), qui est croissante monotone et telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

est définie de la manière suivante :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Remarque : on a  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ .

□ **Densité de probabilité** – La densité de probabilité  $f$  (en anglais *PDF* - *Probability density function*) est la probabilité que  $X$  prenne des valeurs entre deux réalisations adjacentes d'une variable aléatoire.

□ **Relations vérifiées par les PDF et CDF** – Voici les propriétés importantes à savoir dans les cas discret (D) et continu (C).

Case	CDF $F$	PDF $f$	Propriétés du PDF
(D)	$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$	$f(x_j) = P(X = x_j)$	$0 \leq f(x_j) \leq 1$ and $\sum_j f(x_j) = 1$
(C)	$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$	$f(x) = \frac{dF}{dx}$	$f(x) \geq 0$ and $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

□ **Variance** – La variance d'une variable aléatoire, souvent notée  $\text{Var}(X)$  ou  $\sigma^2$ , est une mesure de la dispersion de ses fonctions de distribution. Elle est déterminée de la manière suivante :

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

□ **Écart-type** – L'écart-type d'une variable aléatoire, souvent notée  $\sigma$ , est une mesure de la dispersion de sa fonction de distribution, exprimée avec les mêmes unités que la variable aléatoire. Il est déterminé de la manière suivante :

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

□ **Espérance et moments de la distribution** – Voici les expressions de l'espérance  $E[X]$ , l'espérance généralisée  $E[g(X)]$ ,  $k^{\text{ième}}$  moment  $E[X^k]$  et fonction caractéristique  $\psi(\omega)$  dans les cas discret et continu.

Case	$E[X]$	$E[g(X)]$	$E[X^k]$	$\psi(\omega)$
(D)	$\sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$	$\sum_{i=1}^n g(x_i) f(x_i)$	$\sum_{i=1}^n x_i^k f(x_i)$	$\sum_{i=1}^n f(x_i) e^{i\omega x_i}$
(C)	$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$

*Remarque : on a  $e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)$ .*

□ **Transformation de variables aléatoires** – Soit  $X, Y$  des variables liées par une certaine fonction. En notant  $f_X$  et  $f_Y$  les fonctions de distribution de  $X$  et  $Y$  respectivement, on a :

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

□ **Loi d'intégration de Leibniz** – Soit  $g$  une fonction de  $x$  et potentiellement  $c$ , et  $a, b$ , les limites de l'intervalle qui peuvent dépendre de  $c$ . On a :

$$\frac{\partial}{\partial c} \left( \int_a^b g(x) dx \right) = \frac{\partial b}{\partial c} \cdot g(b) - \frac{\partial a}{\partial c} \cdot g(a) + \int_a^b \frac{\partial g}{\partial c}(x) dx$$

□ **Inégalité de Tchebychev** – Soit  $X$  une variable aléatoire de moyenne  $\mu$ . Pour  $k, \sigma > 0$ , on a l'inégalité suivante :

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

## Variables aléatoires conjointement distribuées

□ **Densité conditionnelle** – La densité conditionnelle de  $X$  par rapport à  $Y$ , souvent notée  $f_{X|Y}$ , est définie de la manière suivante :

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

□ **Indépendance** – Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dites indépendantes si l'on a :

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

□ **Densité marginale et fonction de répartition** – À partir de la densité de probabilité  $f_{XY}$ , on a :

Cas	Densité marginale	Fonction de répartition
(D)	$f_X(x_i) = \sum_j f_{XY}(x_i, y_j)$	$F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f_{XY}(x_i, y_j)$
(C)	$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$	$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(x', y') dx' dy'$

□ **Covariance** – On définit la covariance de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , que l'on note  $\sigma_{XY}^2$  ou plus souvent  $\text{Cov}(X, Y)$ , de la manière suivante :

$$\text{Cov}(X, Y) \triangleq \sigma_{XY}^2 = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

□ **Corrélation** – En notant  $\sigma_X, \sigma_Y$  les écart-types de  $X$  et  $Y$ , on définit la corrélation entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , que l'on note  $\rho_{XY}$ , de la manière suivante :

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X \sigma_Y}$$

*Remarques : on note que pour toute variable aléatoire  $X, Y$ , on a  $\rho_{XY} \in [-1, 1]$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendants, alors  $\rho_{XY} = 0$ .*

□ **Distributions importantes** – Voici les distributions importantes à savoir :

Type	Distribution	PDF	$\psi(\omega)$	$E[X]$	$\text{Var}(X)$
(D)	$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ Binomial	$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x \in \llbracket 0, n \rrbracket$	$(pe^{i\omega} + q)^n$	$np$	$npq$
	$X \sim \text{Po}(\mu)$ Poisson	$P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$ $x \in \mathbb{N}$	$e^{\mu(e^{i\omega} - 1)}$	$\mu$	$\mu$
(C)	$X \sim \mathcal{U}(a, b)$ Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in [a, b]$	$\frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{(b-a)i\omega}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
	$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ Gaussien	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $x \in \mathbb{R}$	$e^{i\omega\mu - \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}$	$\mu$	$\sigma^2$
	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$ Exponentiel	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x \in \mathbb{R}_+$	$\frac{1}{1 - \frac{i\omega}{\lambda}}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

## Estimation des paramètres

□ **Échantillon aléatoire** – Un échantillon aléatoire est une collection de  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  qui sont indépendantes et identiquement distribuées avec  $X$ .

□ **Estimateur** – Un estimateur est une fonction des données qui est utilisée pour trouver la valeur d'un paramètre inconnu dans un modèle statistique.

□ **Biais** – Le biais d'un estimateur  $\hat{\theta}$  est défini comme étant la différence entre l'espérance de la distribution de  $\hat{\theta}$  et de la valeur vraie, i.e. :

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$

*Remarque : un estimateur est dit non biaisé lorsque l'on a  $E[\hat{\theta}] = \theta$ .*

□ **Moyenne empirique et variance empirique** – La moyenne empirique et la variance empirique d'un échantillon aléatoire sont utilisées pour estimer la valeur vraie  $\mu$  et la variance vraie  $\sigma^2$  d'une distribution, notés  $\bar{X}$  et  $s^2$  et sont définies de la manière suivante :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{and} \quad s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

□ **Théorème de la limite centrale** – Soit un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$  suivant une distribution donnée de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ , alors on a :

$$\bar{X} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$