# ATURAN BIG OH

ANALISIS DAN DESAIN ALGORITMA 1

# ATURAN BIG OH

- **Scaling**
- **Transitivity**
- **Rule of sums**
- **Rule of products**
- **Limit rule**

# SCALING

- **Lemma: untuk semua faktor konstan $c > 0$, fungsi $cf(n)$ merupakan $O(f(n))$.**
- **Contoh :**
  - $50n \in O(n)$
  - $50{,}000{,}000\ n \in O(n)$
  - $0.05n \in O(n)$
  - $0.0000005\ n \in O(n)$

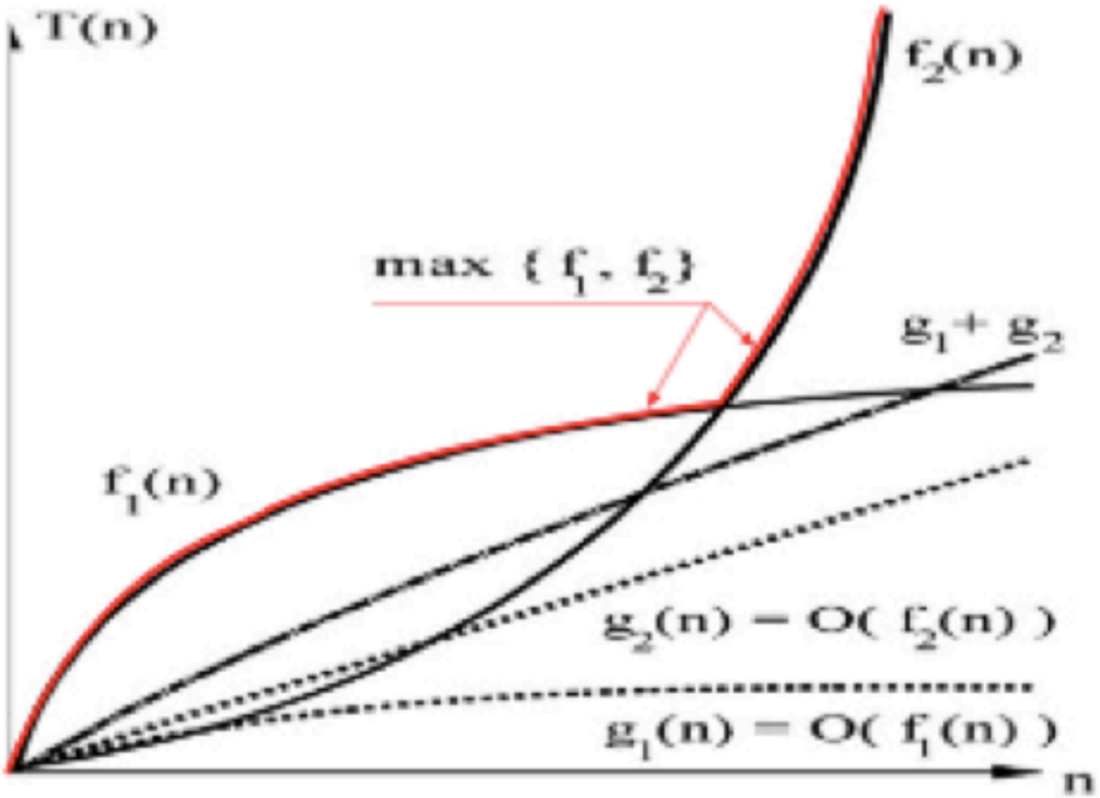
# TRANSITIVITY

- **Lemma: jika h merupakan O(g) dan g merupakan O(f), maka h adalah O(f)**
  - Arti: jika pertumbuhan h tertinggi adalah secepat pertumbuhan g, yang pertumbuhan tertingginya secepat f, maka pertumbuhan tertinggi h adalah secepat f.
- **Contoh :**
  - $h \in O(g); g \in O(n^2) \rightarrow h \in O(n^2)$
  - $\log_{10} n \in O(n^{0.01})$ ; $n^{0.01} \in O(n) \rightarrow \log_{10} n \in O(n)$
  - $2^n \in O(3^n)$ ; $n^{50} \in O(2^n) \rightarrow n^{50} \in 3^n$
- **Bukti : jika $h(n) \leq c_1 g(n)$ untuk $n > n_1$ dan $g(n) \leq c_2 f(n)$ untuk $n > n_2$, maka $h(n) \leq c_1 c_2 f(n)$ untuk $n > \max\{n_1, n_2\}$**

# ATURAN PENJUMLAHAN

- **Lemma: jika $g_1 \in O(f_1)$ dan $g_2 \in O(f_2)$, maka $g_1 + g_2 \in O(\max\{f_1, f_2\})$.**
- **Pertumbuhan dari jumlahan sama cepat dengan term yang pertumbuhannya paling cepat :**
  - Jika $g \in O(f)$ dan $h \in O(f)$, maka $g + h \in O(f)$
  - Jika $g \in O(f)$, maka $g + f \in O(f)$
- **Contoh :**
  - Jika $h \in O(n)$ dan $g \in O(n^2)$, maka $g + h \in O(n^2)$
  - Jika $h \in O(n \log n)$ dan $g \in O(n)$, maka $g + h \in O(n \log n)$
- **Bukti :**
  - Jika $g_1(n) \leq c_1 f_1(n)$ untuk $n > n_1$ dan $g_2(n) \leq c_2 f_2(n)$ untuk $n > n_2$, maka $g_1(n) + g_2(n) \leq c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) \leq \max\{c_1, c_2\} (f_1(n) + f_2(n)) \leq 2 \max\{c_1, c_2\} \max\{ f_1(n), f_2(n)\}$ untuk $n > \max\{ n_1, n_2\}$

- **Ilustrasi**



# ATURAN PERKALIAN

- **Lemma: jika $g_1 \in O(f_1)$ dan $g_2 \in O(f_2)$, maka $g_1 g_2 \in O(f_1 f_2)$.**
  - Jika $g \in O(f)$ dan $h \in O(f)$, maka $gh \in O(f^2)$.
  - Jika $g \in O(f)$, maka $gh \in O(fh)$.
- **Contoh:**
  - Jika $g \in O(n)$ dan $h \in O(n^2)$, maka $gh \in O(n^3)$.
  - Jika $g \in O(n)$ dan $h \in O(\log n)$, maka $gh \in O(n \log n)$.
- **Bukti :**
  - Jika $g_1(n) \leq c_1 f_1(n)$ untuk $n > n_1$ dan $g_2(n) \leq c_2 f_2(n)$ untuk $n > n_2$, maka $g_1(n)\, g_2(n) \leq c_1 c_2\, f_1(n) f_2(n)$ untuk $n > \max\{ n_1, n_2\}$

# ATURAN LIMIT

- **Misalkan limit perbandingan** $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$ **ada (bisa tak hingga, ∞), maka:**
  - Jika L = 0 maka
    - $f \in o(g)$, sehingga $f \in O(g)$
    - g adalah $\Omega(f)$ (g bukan $O(f)$)
  - Jika $0 < L < \infty$ maka
    - $f \in \Theta(g)$, sehingga $f \in O(g)$ dan $f \in \Omega(g)$
    - $g \in \Theta(f)$, sehingga $g \in O(f)$ dan $g \in \Omega(f)$
  - Jika $L = \infty$ maka:
    - $f \in \omega(g)$ sehingga $f \in \Omega(g)$ (f bukan $O(g)$)
    - $g \in o(f)$ sehingga $g \in O(f)$
  - Jika $L < \infty$ maka $f \in O(g)$

# ATURAN LIMIT

- **Catatan : aturan L'Hopital**
  - Jika f dan g fungsi positif dan terdiferensiasi untuk x > 0 tetapi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \quad \text{atau} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

limit L dapat dihitung dengan aturan kalkulus L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

# CONTOH

- **Buktikan bahwa $x^2 + 10 = \Theta(x^2)$.**
- **Bukti dengan limit:**

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+10}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{10}{x^2}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Karena $0 < L < \infty$ maka $x^2 + 10 = \Theta(x^2)$.

# CONTOH

- **Fungsi eksponensial tumbuh lebih cepat daripada polinomial : $n^k$ adalah $O(b^n)$ untuk semua $b > 1$, $n > 1$, dan $k \geq 0$.**
- **Bukti : diferensiasi (k kali) terhadap $n^k$ dan $b^n$ menghasilkan :**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{kn^{k-1}}{b^n \ln b} = \lim_{n\to\infty} \frac{k(k-1)n^{k-2}}{b^n (\ln b)^2} = \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{k!}{b^n (\ln b)^k} = 0.$$

- **Karena hasil perbandingan limit sama dengan 0, maka $n^k$ adalah $o(b^n)$ sehingga $n^k$ adalah $O(b^n)$.**

# LATIHAN

- **Apakah $27n^2 + 2n + 12 = \Theta(n^2)$? Buktikan tanpa menggunakan aturan limit.**
- **Menggunakan aturan limit, buktikan bahwa $2n^3 + 5n + 1 = \Theta(n^3)$.**