ALJABAR LINEAR DAN MATRIKS

Revisi Materi

Matriks dari Transformasi Linear Umum

Dosen Pengampu:

Noveri Lysbetti Marpaung, S.T.,M.Sc.

Kelompok 8

Muhammad Muttakin (2207125094)

Program Studi Teknik Informatika

Jurusan Teknik Elektro

Universitas Riau

Pekanbaru

2023

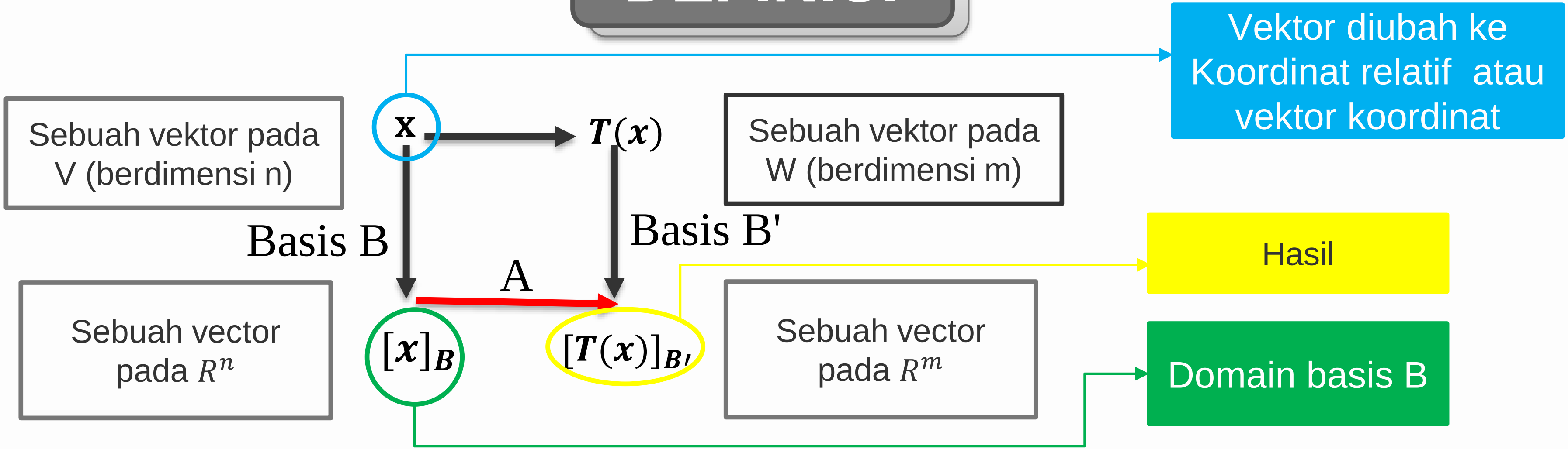
DEFINISI

Misalkan V adalah sebuah ruang vektor berdimensi n dan W adalah sebuah ruang vektor berdimensi m. Jika memilih basis B dan basis B' masing-masing untuk V dan W, maka untuk setiap vektor x pada V, matriks koordinat $[x]_B$ akan merupakan sebuah vektor pada R^n, dan matriks koordinat $[T(x)]_{B'}$, akan merupakan sebuah vektor pada R^m.

Misalkan

- V adalah ruang vektor berdimensi n, dan W adalah ruang vektor berdimensi m
- B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ adalah basis untuk V.
- B' = $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ adalah basis untuk W
- T : V $\longrightarrow$ W adalah suatu transformasi linear

DEFINISI

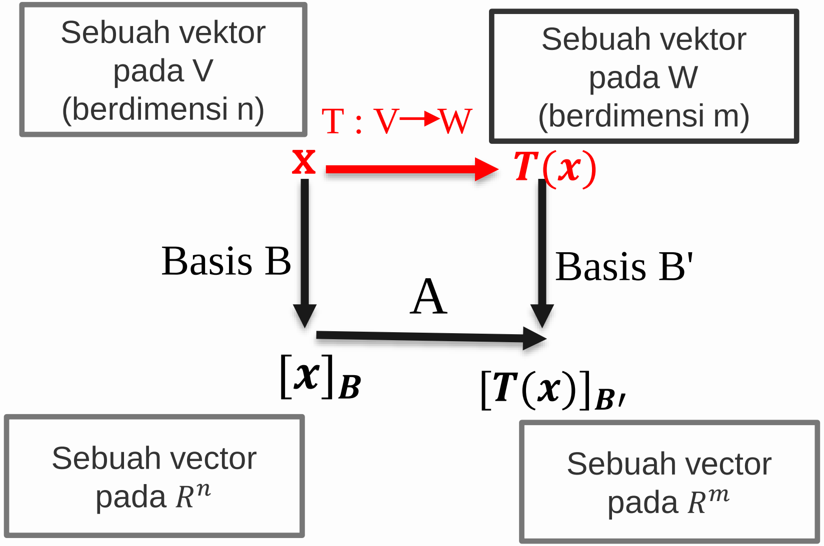


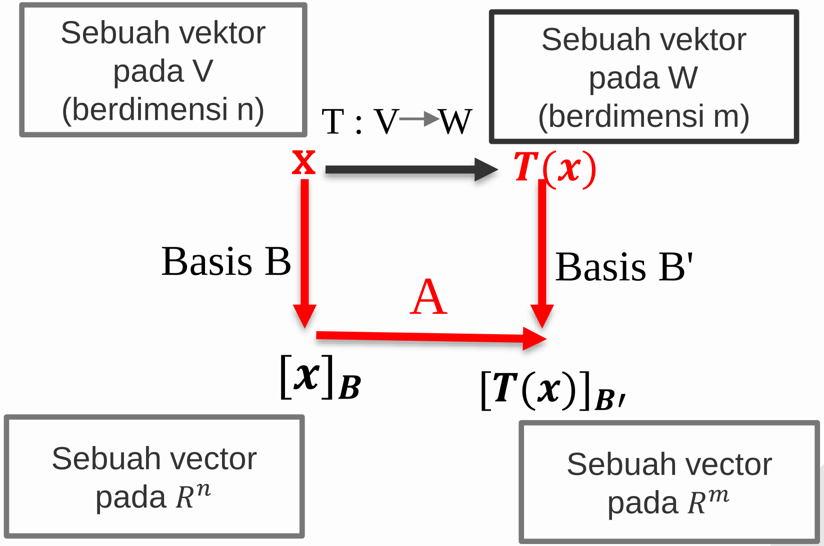
Maka dapat digunakan sebuah matriks A, yang dapat memetakan suatu vektor x pada ruang vektor V ke ruang vektor W

- Dikatakan bahwa transformasi T memetakan dari ruang vektor V ke ruang vektor W.
- Dikatakan bahwa perkalian dengan matriks A memetakan R^n ke R^m

DEFINISI

Sehingga, pemetaan dengan transformasi T pada suatu vektor x dapat menggunakan perkalian matriks dengan menggunakan Matriks Transformasi Linear Umum A.



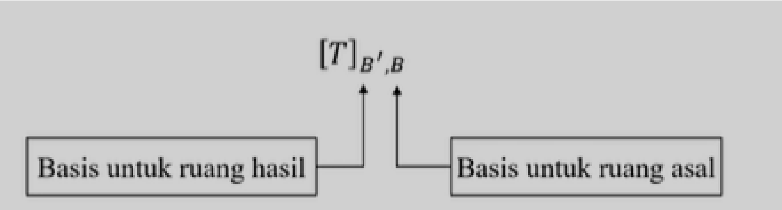


DEFINISI

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{X}]_{\boldsymbol{B}} = [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})]_{\boldsymbol{B'}}$$

Matriks A atau $[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})]_{\boldsymbol{B'}}$ disebut matriks untuk T berkenaan dengan basis B dan B'

- Anggap B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dan B' = $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$
- $[\boldsymbol{X}]_{\boldsymbol{B}}$ adalah vektor koordinat dari x terhadap basis B berada di R^n
- $[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})]_{\boldsymbol{B'}}$ adalah vektor koordinat dari T(x) terhadap basis B', berada di R^m



LANGKAH-LANGKAH

Misal terdapat suatu Transformasi Linear T : V $\longrightarrow$ W, V adalah ruang vektor dengan dimensi n memiliki basis B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dan B' = $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Maka, Matriks Tranformasi Linear Umum dari B' ke B, A **=** $[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{B}',\boldsymbol{B}}$, dapat dicari dengan Langkah-Langkah berikut.

Langkah 1 : Tentukan Transformasi setiap basis ruang asal (domain), T(u_1) , T(u_2) , … , T(u_n)

Langkah 2 : Tentukan koordinat Transformasi basis ruang asal terhadap basis ruang hasil, $[T(u_1)]_{B'}$, $[T(u_2)]_{B'}, \ldots, [T(u_n)]_{B'}$

Langkah 3 : Matriks A = $[T]_{B'.B}$ = $[[T(u_1)]_{B'}] \mid [T(u_2)]_{B'} \mid \ldots \mid [T(u_n)]_{B'}\ ]$

CONTOH

Diketahui T : $R^3 \rightarrow R^3$ dengan T$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$ = $\begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{bmatrix}$, dengan basis R^3, B = B' = $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right\}$. Tentukan Matriks A = $[T]_{B'.B}$ dan T$\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$.

Penyelesaian :

Langkah 1 : Tentukan Transformasi setiap basis ruang asal (domain) ,
$\mathrm{T}(u_1)$, $\mathrm{T}(u_2)$, ... , $\mathrm{T}(u_n)$

CONTOH

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{bmatrix}, R^3, \text{B=B'=} \left\{ \overset{b_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} . \overset{b_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} . \overset{b_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}.$$

b_1	b_2	b_3
$x_1 = 1$ $x_2 = 1$ $x_3 = 1$	$x_1 = 2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$	$x_1 = 1$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$

Perkalian transformasi setiap basis ruang asal (domain):

$$T(b_1) = \begin{bmatrix} -2(1) \\ 1 + 2(1) + 1 \\ 1 + 3(1) \end{bmatrix} T(b_2) = \begin{bmatrix} -2(0) \\ 2 + 2(1) + 0 \\ 2 + 3(0) \end{bmatrix} T(b_3) = \begin{bmatrix} -2(0) \\ 1 + 2(0) + 0 \\ 1 + 3(0) \end{bmatrix}$$

CONTOH

$\mathrm{T}(b_1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\mathrm{T}(b_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\mathrm{T}(b_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Langkah 2 : Tentukan koordinat Transformasi basis ruang asal terhadap basis ruang hasil, $[T(u_1)]_{B'}, [T(u_2)]_{B'}, \dots, [T(u_n)]_{B'}$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CONTOH

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 \\ K_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_2 \\ k_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + \ 2k_2 + \ k_3 \\ k_1 + \ k_2 + 0 \\ k_1 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

Nilai k_1 = 4

Substitusikan k_1 = 4 ke dalam persamaan 4 = $k_1 + \ k_2 + 0$

CONTOH

4 = 4+ k_2 + 0

k_2 = 0

Lalu dengan k_1 = 4 dan k_2 = 0. Tentukan nilai dari k_3

-2 = k_1 + 2 k_2 + k_3

-2 = 4 + 0 + k_3

$k_3 = -6$

Sehingga $[T(b_1)]_{B'}$ = (4, 0, -6)

CONTOH

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 \\ K_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_2 \\ k_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 2k_2 + k_3 \\ k_1 + k_2 + 0 \\ k_1 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

Nilai k_1 = 2

Substitusikan k_1 = 2 ke dalam persamaan 4 = $k_1 + k_2 + 0$

CONTOH

4 = 2+ k_2 + 0

k_2 = 2

Lalu dengan k_1 = 2 dan k_2 = 2. Tentukan nilai dari k_3

0 = k_1 + 2 k_2 + k_3

0 = 2 + 2(2) + k_3

0 = 6 + k_3

$k_3 = -6$

Sehingga $[T(b_2)]_{B'}$ = (2, 2, -6)

CONTOH

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_1\\k_1\\K_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2k_2\\k_2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k_3\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k_1 + 2k_2 + k_3\\k_1 + k_2 + 0\\k_1 + 0 + 0\end{bmatrix}$$

Nilai k_1 = 1
Substitusikan k_1 = 1 ke dalam persamaan 1 = $k_1 + k_2 + 0$

CONTOH

1 = 1+ k_2 + 0

k_2 = 0

Lalu dengan k_1 = 1 dan k_2 = 0. Tentukan nilai dari k_3

0 = k_1 + 2 k_2 + k_3

0 = 1 + 2(0) + k_3

0 = 1 + k_3

$k_3 = -1$

Sehingga $[T(b_3)]_{B'}$ = (1, 0, -1)

Jadi, $[T(b_1)]_{B'}$ = (4, 0, -6) $[T(b_2)]_{B'}$ = (2, 2, -6) $[T(b_3)]_{B'}$ = (1, 0, -1)

CONTOH

Langkah 3 : Matriks A = $[T]_{B'.B} = [[T(u_1)]_{B'}] \mid [T(u_2)]_{B'} \mid ... \mid [T(u_n)]_{B'}]$

$$A = [T]_{B'.B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_B$ ubah ke basis koordinat relatif.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 2k_2 + k_3 \\ k_1 + k_2 + 0 \\ k_1 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

Nilai k_1 = 0

Substitusikan k_1 = 0 ke dalam persamaan 2 = $k_1 + k_2 + 0$

2 = 0 + k_2 + 0

$k_2 = 2$

Lalu dengan k_1 = 0 dan k_2 = 2.

Tentukan nilai dari k_3

0 = k_1 + 2 k_2 + k_3

0 = 0 + 2(2) + k_3

0 = 4 + k_3

$k_3 = -4$

CONTOH

Langkah 3 : Matriks A = $[T]_{B'.B} = [[T(u_1)]_{B'} \mid [T(u_2)]_{B'} \mid \ldots \mid [T(u_n)]_{B'}]$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_B = (0, 2\,, -3)$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{B'} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0 + 2.2 + 1.(-3) \\ 0.2 + 2.2 + 0.2 \\ -6(0) + (-6).2 + (-1.(-3)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

CONTOH

Langkah 3 : Matriks A = $[T]_{B'.B}$ = $[[T(u_1)]_{B'}] \mid [T(u_2)]_{B'} \mid \ldots \mid [T(u_n)]_{B'}\ ]$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right)\right]_{B'} = \begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\0 & 2 & 0\\-6 & -6 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\\-9\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right) = 1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8\\4\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}9\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\1\end{bmatrix}$$

CONTOH 2

Diberikan $\left\{v_1 = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}\right\}$ adalah basis untuk $R^2. T : R^2 \longrightarrow R^3$ adalah transformasi linear sehingga T(v_1) = $\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$ dan T(v_2) = $\begin{bmatrix}0\\-3\\5\end{bmatrix}$.

Tentukan T $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

Penyelesaian:

1. Tentukan matriks transformasi T
2. Tentukan rumus transformasi linear
3. Tentukan T $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

CONTOH 2

$$T(v_1) = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T}(v_2) = \begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-3\\5\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}\begin{bmatrix}-2 & 4\\1 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & -3\\0 & 5\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & -3\\0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 4\\1 & -3\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & -3\\0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 4\\1 & -3\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & -3\\0 & 5\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -4\\-1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 2\\-\frac{3}{2} & -1\\-\frac{5}{2} & -5\end{bmatrix}$$

CONTOH 2

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x + 2y \\ \frac{-3}{2}x - y \\ \frac{-5}{2}x - 5y \end{bmatrix}$$

Menentukan T $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(2) + 2(-3) \\ \frac{-3}{2}(2) - (-3) \\ \frac{-5}{2}x - 5(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Daftar Pustaka

Howard Anton, Chris Rorres, 2005, Elementary Linear Algebra 9th Edition (Application Version), https://bit.ly/3QUC6ag, John Wiley and Sons Inc., USA, halaman 478-488, diakses pada 18 November 2023 12.15 WIB

TERIMAKASIH