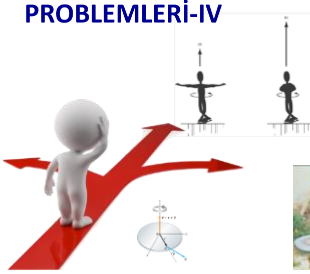
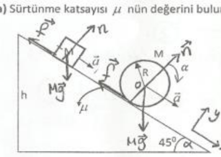
FİZİK-1
PROBLEMLERİ-IV



PROBLEM 1: Şekilde görüldüğü gibi M kütleli R yarıçaplı küre kaymadan yuvarlanmakta ve M kütleli blokta küre ile aynı a ivmesi ile kaymaktadır. Kürenin eylemsizlik momenti $I = \frac{2}{3}MR^2$ dir. Kuvvetleri şekil üzerinde gösteriniz.

a) Sürtünme katsayısı μ nün değerini bulunuz.

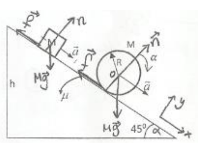


Blok : $\Sigma F_x = Mg\sin\alpha - f = Ma$ (1)

$\Sigma F_y = n - Mg\cos\alpha = 0$ (2)

$n = Mg\cos\alpha$; $f = \mu \cdot n$

$\boxed{f = \mu Mg\cos\alpha}$



Küre : $\Sigma \tau_0 = f \cdot R = I\alpha$, $\alpha = \frac{a}{R}$

$f = \frac{I}{R^2} a$

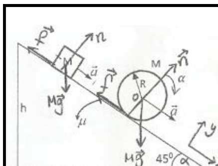
$\mu \cancel{M} g\cos\alpha = \frac{2}{3}\cancel{M}\cancel{R^2} \frac{a}{\cancel{R^2}}$

$\boxed{a = \frac{3}{2}\mu g\sin\alpha}$

(1) $\Rightarrow \cancel{Mg}\sin\cancel{\alpha} - \mu \cancel{Mg}\cos\cancel{\alpha} = \cancel{M}\frac{3}{2}\mu \cancel{g}\sin\cancel{\alpha}$

$1 = \mu(1 + \frac{3}{2})$

$\boxed{\mu = \frac{2}{5}}$



b) Enerji yöntemini kullanarak her iki cismin yüzeyi terk ederken aynı hıza sahip olacaklarını gösteriniz. Cisimlerin h yüksekliğinden ilk hızsız ve hareket boyunca $d = 5m$ yol aldıklarını kabul ediniz.

$g = 10m/s^2$ ve $sin45 = cos45 = 0,7$ alınız.

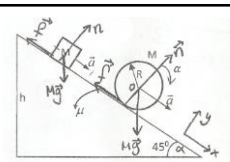
Blok : $Mgh - f \cdot d = \frac{1}{2}MV^2$

$\cancel{M}gd\sin 45 - \mu \cancel{M}g\cos 45 . d = \frac{1}{2}\cancel{M}V^2$

$10.5 \cdot (0,7) - \frac{2}{\cancel{5}} \cdot 10 \cdot (0,7) \cdot \cancel{5} = \frac{1}{2}V^2$

$35 - 14 = \frac{V^2}{2} \Rightarrow V^2 = 42$

$\boxed{V = \sqrt{42}\ m/s}$



Küre : $Mgh = \frac{1}{2}I_{KM}\omega^2 + \frac{1}{2}MV^2$; $\omega = \frac{V}{R}$

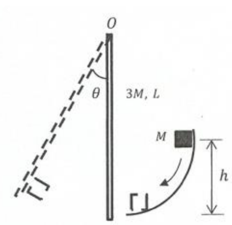
$\cancel{M}gd\sin 45 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \cancel{M}\cancel{R^2}\left(\frac{V^2}{\cancel{R^2}}\right) + \frac{1}{2}\cancel{M}V^2$

$10 \cdot 5 \cdot 0,7 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)V^2$

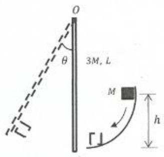
$7\cancel{35} = \frac{\cancel{5}}{6}V^2$

$V^2 = 42 \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{42}\ m/s}$

PROBLEM 2



Şekilde gösterildiği gibi kütlesi M olan bir cisim h yüksekliğinden durgun halden serbest bırakılıyor ve sürtünmesiz bir yüzey üzerinden kayarak düşey durumda bulunan bir çubuğa çarpıyor ve yapışıyor. O noktası etrafında hareket edebilen çubuk ve kütle sistemi θ açısı kadar yükseliyor ve duruyor. Şekilde verilen parametreleri kullanarak $cos\theta$'nın değerini h ve L cinsinden bulunuz. (M kütleli L uzunluklu çubuk için $I_{KM} = \frac{1}{12}ML^2$).



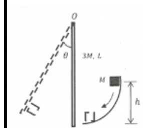
Çubuğa çarpmadan önceki hız:

$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$ (1)

Açısal Momentum Korunumu:

$\vec{L}_i = \vec{L}_s$

$\boxed{Mv.L = I_0^{sis}\,\omega}$ (2)

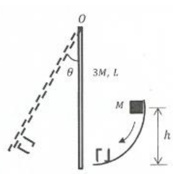


$I_0^{sis} = I_0^{ç} + I_0^{M}$

$I_0^{sis} = \frac{1}{12}(3M)L^2 + 3M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + ML^2$

$I_0^{sis} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1\right)ML^2 = \left(\frac{1+3+4}{4}\right)ML^2$

$\boxed{I_0^{sis} = 2ML^2}$ (3)

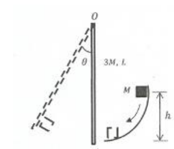


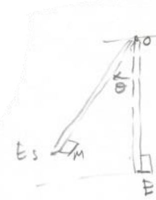
$(2) \Rightarrow \omega = \frac{MvL}{I_0^{sis}}$

(1) ve (3) yazılır.

$\omega = \frac{\cancel{M}.\sqrt{2gh}.\cancel{L}}{2\cancel{M}L^{\cancel{2}}}$

$\boxed{\omega = \frac{\sqrt{2gh}}{2L}}$

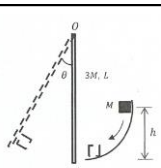




Çubuk + kütle için Enerji korunumu yazılırsa;

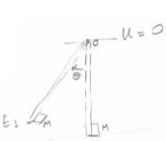
$K_i + U_i = K_s + U_s$

$K_i + U_i = K_s + U_s$



$\frac{1}{2}I_0^{sis}\omega^2 - MgL - 3Mg\frac{L}{2} = 0 - MgL\cos\theta - 3Mg\frac{L}{2}\cos\theta$

$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}ML^{\cancel{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2gh}}{2\cancel{L}}\right)^2 - \frac{5}{2}MgL = \frac{5}{2}MgL\cos\theta$



$\cancel{M}\cdot\frac{2gh}{4} = \frac{5}{2}\cancel{M}gL(1-\cos\theta)$

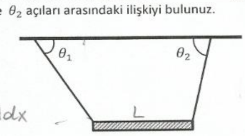
$h = 5L(1-\cos\theta)$

$\frac{h}{5L} = 1 - \cos\theta$

$\boxed{\cos\theta = 1 - \frac{h}{5L}}$

PROBLEM 3

M kütleli ve L uzunluklu bir çubuk, uçlarından tavan ile sırasıyla θ_1 ve θ_2 açıları yapan iki kablo yardımıyla yatay olarak desteklenmektedir. Çubuk yere paralel ve statik dengededir. Çubuk düzgün olmayan kütle yoğunluğuna sahip ve lineer kütle yoğunluğu $\lambda = 2x$ ile değişmekte ise, θ_1 ve θ_2 açıları arasındaki ilişkiyi bulunuz.

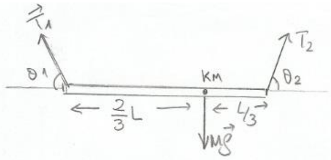


$dm = \lambda dx$

$x_{KM} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\lambda dx}{\int \lambda dx} = \frac{\int_0^L x(2x)dx}{\int_0^L 2x\,dx}$

$x_{KM} = \frac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^L}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^L} \Rightarrow \boxed{x_{KM} = \frac{2}{3}L}$

Ağırlık merkezinin yeri



$$\Sigma F_x = T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 - Mg = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma \tau_{KM} = T_2 \sin\theta_2 \cdot \frac{L}{3} - T_1 \sin\theta_1 \frac{2L}{3} = 0 \quad (3)$$

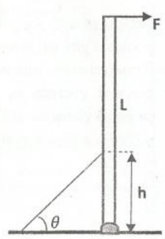
$$\boxed{T_2 \sin\theta_2 = 2T_1 \sin\theta_1} \quad (4)$$

$$(1) \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$ (4)'te yazılır

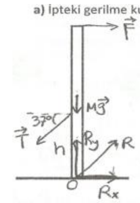
$$\cancel{T_1} \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \cdot \sin\theta_2 = 2 \cancel{T_1} \sin\theta_1$$

$$\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} = 2 \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} \Rightarrow \boxed{\tan\theta_2 = 2\tan\theta_1}$$

PROBLEM 4 Şekilde zemine menteşeyle tutturulmuş olan $60N$ ağırlığında ve $L = 3{,}2$ m uzunluğunda düzgün bir kalas görülüyor. Üst ucuna yatay olarak $F = 50N$ kuvveti uygulanan kiriş, zeminle $\theta = 37^0$ açı yapan ve kalasın $h = 2m$ yükseklikteki bir iple dikey konumunda tutuluyor. $sin37 = 0{,}6$ $cos37 = 0{,}8$.



a) İpteki gerilme kuvvetini bulunuz.



$$\Sigma F_x = F + R_x - T\cos 37 = 0 \quad (1)$$

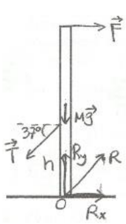
$$\Sigma F_y = R_y - Mg - T\sin 37 = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma \tau_o = F \cdot L - (T\cos 37) \cdot h = 0 \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow T = \frac{F.L}{h\sin 37} = \frac{50 \cdot 3{,}2}{2 \cdot 0{,}8}$$

$$\boxed{T = 100N}$$

b) Kalasa menteşe tarafından uygulanan kuvveti birim vektörler cinsinden bulunuz.



$$(1) \Rightarrow R_x = T\cos 37 - F$$

$$R_x = 100 \cdot (0{,}8) - 50$$

$$\boxed{R_x = 30N}$$

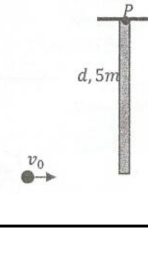
$$(2) \Rightarrow R_y = Mg + T\sin 37$$

$$R_y = 60 + 100 \cdot 0{,}6$$

$$\boxed{R_y = 120N}$$

$$\boxed{\vec{R} = (30\hat{i} + 120\hat{j})N}$$

PROBLEM 5 **(i)** d uzunluklu $5m$ kütleli düzgün bir çubuk, şekildeki gibi üst ucundan serbestçe dönebilecek şekilde P noktasından tutturulmuştur. m kütleli yapışkan bir parçacık yatayda v_0 hızıyla çubuğun en alt noktasına çarparak yapışıyor. (M kütleli l uzunluklu bir çubuğun kütle merkezine göre eylemsizlik momenti; $I_{KM} = \frac{1}{2}Ml^2$).



a) Çarpışmadan sonra çubuk+kütle sisteminin açısal hızını bulunuz.

$$L_i = L_s$$

$$m v_0 d = I_p^{sis}\,\omega \Rightarrow \omega = \frac{m v_0 d}{I_p^{sis}}$$

$$I_p^{sis} = I_p^{G} + md^2 = \frac{1}{12}(5m)d^2 + 5m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + md^2$$

$$I_p^{sis} = \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{4} + 1\right)md^2$$

$$\boxed{I_p^{sis} = \frac{8}{3}md^2}$$

$$\omega = \frac{\cancel{m}v_0\cancel{d}}{\frac{8}{3}\cancel{m}d^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{3}{8}\frac{V_0}{d}}$$

b) Çarpışmada kaybolan enerjiyi hesaplayınız.

$$K_i = \frac{1}{2}mV_0^2$$

$$K_s = \frac{1}{2}I_p^{sis}\omega^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{8}^{4}}{3}md^2\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{V_0}{d}\right)^2$$

$$K_s = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{3}}md\,\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{64}_{16}}\cdot\frac{V_0^2}{d^2}$$

$$\boxed{K_s = \frac{3}{16}mV_0^2}$$

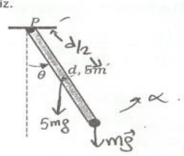
$$\Delta K = \frac{3}{16}mV_0^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 \Rightarrow \boxed{\Delta K = -\frac{5}{16}mV_0^2}$$

(ii) Yandaki çubuk+kütle sisteminin çarpışma sonrası salınım hareketi yaptığını kabul ederek;

a) Salanım hareketinin diferansiyel denklemini verilenler cinsinden elde ediniz.

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\alpha = \ddot{\theta}$$



$$\sum \tau_p = -5mg\frac{d}{2}\sin\theta - mgd\sin\theta = I_p^{sis}\alpha$$

$$-\frac{7}{2}mgd\sin\theta = I_p^{sis}\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{7mgd}{2I_p^{sis}}\sin\theta = 0}$$

b) Küçük salınımlar için, salınımın periyodunu hesaplayınız.

$\sin\theta \approx \theta$ olur.

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{7mgd}{2I_p}}_{\omega^2}\theta = 0$$

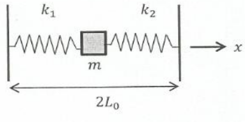
$$\omega^2 = \frac{7mgd}{2I_p} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{7mgd}{2I_p}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2I_p^{sis}}{7mgd}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\cdot\frac{8}{3}md^2}{7mgd}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{16}{21}\frac{d}{g}}}$$

PROBLEM 6

Şekildeki her iki yay gerilmemiş halde L_0 uzunluğuna sahiptir ve yay sabitleri sırasıyla k_1 ve k_2 dir. m kütleli cisim x-doğrultusunda salınmaktadır ve denge noktasından itibaren t anındaki yerdeğiştirmesi $x(t)$'dir. Cismin maksimum kinetik enerjisi ise E dir.



a) Salınımınların genliğini bulunuz.

$$E = \frac{1}{2}k_1A^2 + \frac{1}{2}k_2A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k_1+k_2}}$$

b) Newton'un ikinci yasasını kullanarak $x(t)$ için bir denklem bulunuz.

$-k_1x \leftarrow \boxed{m}$ → Hareket Yönü

$-k_2x \leftarrow$

$$\sum F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = ma_x$$

$$-k_1x - k_2x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

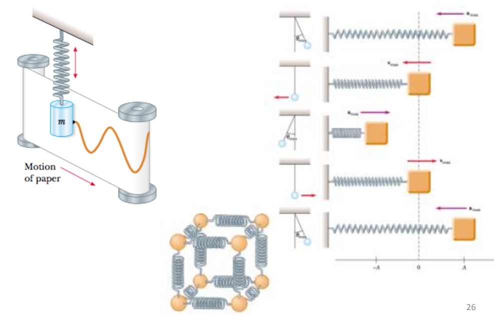
$$\boxed{\ddot{x} + \left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)x = 0}$$

c) Salınımların periyodunu bulunuz.

$$\omega^2 = \frac{k_1+k_2}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

Titreşim Hareketi Problemleri



Örnek : x-ekseni üzerinde basit titreşim hareketi yapan bir cismin konumu $x(t) = 4\cos(3\pi t+\pi)$ ifadesi ile veriliyor (t saniye ve x cm cinsindendir).
$a-$) Hareketin frekansını ve periyodunu bulunuz.
$b-$) Hareketin genliğini ve faz sabitini bulunuz.
c–) Cismin $t = 0.25$ s anındaki konumunu bulunuz.

$a-$) $\omega = 3\pi \rightarrow \omega = 2\pi f = 3\pi \rightarrow f = 1.5$ hertz

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2}{3} = 0.67 \text{ s}$$

$b-$) $x(t) = x_m\cos(\omega t+\phi) \rightarrow x_m = 4$ cm ve $\phi = \pi$

$c-$) $x(0.25) = 4\cos(3\pi \frac{1}{4} + \pi) = 2.83$ cm

Örnek : Yay sabiti 8 N / m olan bir yaya bağlı 0.5 kg kütleli cisim, genliği 10 cm olan basit harmonik hareket yapıyor.
$a-$) Cismin maksimum hızı ve ivmesi nedir?
$b-$) Cisim denge noktasından 6 cm uzakta iken hızı ve ivmesi nedir?
$c-$) Cisim $x = 8$ cm' den $x = 0$' a ne kadar zamanda gider?

$a-$) $x(t) = x_m\cos(\omega t+\phi)$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4$ rad/s ; $x_m = 10$ cm

$$x(t) = 10\cos(4t) \rightarrow \left.\begin{matrix} v(t) = -40\sin(4t) \\ a(t) = -160\cos(4t) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} v_m = 40 \text{ cm/s} = 0.4 \text{ m/s} \\ a_m = 160 \text{ cm/s}^2 = 1.6 \text{ m/s}^2 \end{matrix}$$

$b-$) $x(t) = 10\cos(4t) = 6 \Rightarrow t = \frac{\cos^{-1}(0.6)}{4} = 0.23$ s

$$v(0.23) = -40\sin(4\times 0.23) = -32 \text{ cm/s} = -0.32 \text{ m/s}$$

$$a(0.23) = -160\cos(4\times 0.23) = -97 \text{ cm/s}^2 = -0.97 \text{ m/s}^2$$

$c-$) $x(t) = 10\cos(4t)$

$$x_1 = 8 \rightarrow t_1 = \frac{\cos^{-1}(0.8)}{4} = 0.161 \text{ s}$$

$$x_2 = 0 \rightarrow t_2 = \frac{\cos^{-1}(0)}{4} = 0.392 \text{ s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.231 \text{ s}$$

Örnek : Yay sabiti 25 N / m olan bir yaya bağlı 1.0 kg kütleli bir cisim x - ekseni üzerinde basit harmonik hareket yapıyor. Cisim $t = 0$' da, $x = -3$ cm noktasından serbest bırakıldığına göre,
$a-$) Hareketin periyodu nedir?
$b-$) Cismin konumunu, hızını ve ivmesini zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.
c–) Cismin maksimum hızı ve ivmesi nedir?

$a-$) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{1.0}} = 5$ rad/s ; $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2(3.14)}{5} = 1.256$ s

$b-$) $x(t) = x_m\cos(\omega t+\phi) \Rightarrow t = 0$'da $x = -3$ cm $\Rightarrow \phi = \pi$ olmalıdır.

$$x(t) = 3\cos(5t-\pi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -15\sin(5t-\pi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -75\cos(5t-\pi)$$

$$\boxed{\begin{matrix} c-)\ v_m = -15\underbrace{\sin(5t-\pi)}_{-1} = 15 \text{ cm/s} \\ a_m = -75\underbrace{\cos(5t-\pi)}_{-1} = 75 \text{ cm/s}^2 \end{matrix}}$$

Örnek : Yay sabiti 20 N / m olan bir yaya bağlı 0.5 kg kütleli cisim x-ekseni üzerinde genliği 3 cm olan basit harmonik hareket yapıyor.

$a-$) Sistemin mekanik enerjisini ve cismin maksimum hızını bulunuz.

$b-$) Cisim denge noktasından 2 cm uzakta iken hızı nedir?

c$-$) Cisim bu noktadayken kinetik ve potansiyel enerjisi nedir?

$$a-)\ E = K + U = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}(20)(0.03)^2 = 9\times10^{-3}\ \text{J}$$

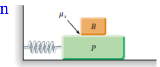
$$x = 0 \to U = 0 \to E = \frac{1}{2}mv_m^2 \to v_m = \sqrt{\frac{2(9\times10^{-3})}{0.5}} = 0.19\ \text{m/s}$$

$$b-)\ E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \to v = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}} = \mp 0.141\ \text{m/s}$$

$$c-)\ K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.5)(\mp 0.141)^2 = 5\times10^{-3}\ \text{J}$$

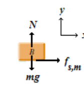
$$U = E - K = 9\times10^{-3} - 5\times10^{-3} = 4\times10^{-3}\ \text{J}$$

Örnek : Sürtünmesiz yatay bir yüzeyde bulunan P bloğunun üzerinde m kütleli başka bir blok (B bloğu) bulunmaktadır. Blokların temas yüzeylerinde statik sürtünme katsayısı $\mu_s = 0.6$' dır. P bloğu bir yaya bağlıdır ve $f = 1.5$ Hz frekansında basit harmonik hareket yapmaktadır. B bloğunun P' nin üzerinden kaymaması için, harmonik hareketin maksimum genliği ne olmalıdır?



B bloğu da P bloğu ile birlikte basit harmonik hareket yapar.

$$\sum F_y = N - mg = 0 \to N = mg \to f_{s,m} = \mu_s mg = ma_m$$



Basit harmonik harekette, $a_m = \omega^2 x_m$ ile verilir.

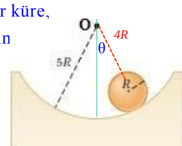
$$\mu_s mg = ma_m \to \mu_s g = a_m = (2\pi f x_m^2) \to x_m = \frac{\mu_s g}{(2\pi f)^2}$$

$x_m = 0.0662$ m = 6.62 cm

Örnek : Kütlesi m ve yarıçapı R olan katı bir küre, $5R$ yarıçaplı silindirik bir yüzeyde kaymadan yuvarlanarak, düşey eksen etrafında küçük salınımlar yapıyor. Salınım periyodunun

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{28R}{5g}}$$

olduğunu gösteriniz?



$v = 4R\omega_0 \;\to\; \omega_0$: küçük kürenin O noktasına göre açısal hızı
$v = R\omega \;\to\; \omega$: küçük kürenin kendi eksenine göre açısal hızı
$\Big\}\ \omega = 4\omega_0$

$$E = \underbrace{mg4R(1-\cos\theta)}_{U} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}_{K} \quad \text{bulunur.}$$

$v = 4R\omega_0$ ve $\omega = 4\omega_0$ ifadelerini enerji eşitliğinde yerine yazar ve zamana göre türev alıp sıfıra eşitlersek (enerji korunduğu için zamanla değişmez)

$$E = mg4R(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m(4R\omega_0)^2 + \frac{1}{5}mR^2(4\omega_0)^2 \quad \left\{\text{küre için } I = \frac{2}{5}mR^2\right\}$$

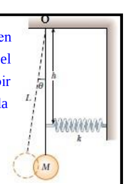
$$\frac{dE}{dt} = 4g\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + 16R\omega_0\frac{d\omega_0}{dt} + \frac{32}{5}R\omega_0\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \{\sin\theta \approx \theta \text{ küçük açı}\}$$

$$4g\theta\omega_0 + 16R\omega_0\alpha + \frac{32}{5}R\omega_0\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{20g}{112R}\theta = -\frac{5g}{28R}\theta \to \alpha = -\omega^2\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{28R}} = \frac{2\pi}{T} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{28R}{5g}} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : Kütlesi M olan bir cisim, O noktası etrafında serbestçe dönebilen L uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğa monte edilerek şekildeki gibi fiziksel bir sarkaç yapılmıştır. Sarkaç, bağlantı noktasından h kadar aşağıdaki bir noktadan da yay sabit k olan bir yaya bağlanmıştır. Sistem bir miktar sola çekilip serbest bırakılıyor ve basit harmonik hareket yapıyor. Salınımın frekansını bulunuz.



Enerjinin korunumundan,

$$E = MgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{yazılabilir.}$$

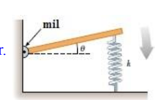
$v = L\omega$, $x = h\sin\theta$ ve $\cos\theta \cong 1$ ifadelerini yukarda yerine yazar ve zamana göre türev alırsak,

$$\alpha = -\left(\frac{MgL + kh^2\cos\theta}{ML^2}\right)\theta$$

bulunur. Küçük açı $\{\cos\theta \cong 1\}$ yaklaşımı ile birlikte,

$$2\pi f = \left(\frac{MgL + kh^2}{ML^2}\right)^{1/2} \to f = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{gL + \frac{kh^2}{M}} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek : Kütlesi m ve uzunluğu L olan ince bir çubuk, bir ucundan geçen mil etrafında serbestçe dönebilmektedir. Çubuğun diğer ucu da yay sabiti k olan bir yaya bağlanmıştır. Çubuğun sağ ucu şekildeki gibi küçük bir θ açısı kadar kaldırılıp serbest bırakılıyor ve sistem basit salınım hareketi yapıyor. Salınımın periyodunu bulunuz.



Denge konumunda $\sum\tau = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{mg}{2k}$ bulunur. (x_0, sistem dengede iken yaydaki sıkışma miktarı). Enerjinin korunumundan:

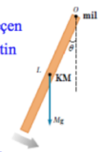
$$E = mg\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{6}mv^2$$

Her iki tarafın zamana göre türevini alır sıfıra eşitlersek,

$$kxv + \frac{1}{3}mva = 0 \to a = -\frac{3k}{m}x \qquad \text{bulunur.}$$

Buradan da periyoda geçersek, $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$ elde edilir.

Örnek : Kütlesi M ve uzunluğu L olan ince bir çubuk, bir ucundan geçen mil etrafında serbestçe dönebilmektedir. Küçük salınımlar için hareketin periyodunu bulunuz.



I. Yol :

Enerjinin korunumundan,

$$E = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

yazılabilir.

Her iki tarafın zamana göre türevini alır sıfıra eşitlersek;

$$Mg\frac{L}{2}\underbrace{\sin\theta}_{\theta}\omega+\frac{1}{3}ML^2\omega\alpha = 0 \to \alpha = -\frac{3g}{2L}\theta \to \frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{3g}{2L}} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

II. Yol :

$$\sum\tau = I\alpha \to \alpha = -\frac{Mg\frac{L}{2}\sin\theta}{\frac{1}{3}ML^2} = -\frac{3g}{2L}\theta \to \frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{3g}{2L}} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Örnek : Bir cisim 3 m yarıçaplı bir çember etrafında 8 rad / s sabit açısal hızla dönmektedir. $t = 0$ anında cismin x koordinatı 2 m noktasıdır ve sağa doğru hareket etmektedir. Cismin x koordinatını, çizgisel hızının ve ivmesinin x – bileşenlerini bulunuz.

$\omega = 8$ rad/s ve $x_m = 3$ m olarak verilmiştir. Buna göre,

$x(t) = x_m\cos(\omega t+\phi) = 3\cos(8t+\phi)$

$t = 0$ ' da, $x = 2$ m olduğuna göre,

$$2 = 3\cos(\phi) \to \phi = \cos^{-1}(\frac{2}{3}) = 48.2^{o}$$

Cisim $t = 0$ anında sağa doğru hareket ettiği için, $\left(\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} > 0\right)$ olmalıdır. Bu nedenle de, $\phi = -48.2^{o} = -0.841$ rad alınmalıdır.

$$x(t) = 3\cos(8t-0.841) \to \begin{cases} v_x = -24\sin(8t-0.841) \\ a_x = -192\cos(8t-0.841) \end{cases}$$

38