Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт по лабораторной работе №2
по дисциплине «Математическая статистика»

Тема: Интервальные оценки
Студент: Княжев А. В.
Группа: ИУ7-62Б
Вариант: 9
Преподаватели: Власов П. А.

Москва — 2023 г.

Оглавление

1. Задание

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:
   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Данные для лабораторной работы по индивидуальному варианту:

```
X = [-8.47, -7.45, -7.12, -8.30, -8.15, -6.01, -5.20, -7.38, -6.76, -9.18,
    -6.00, -8.08, -7.96, -8.34, -6.82, -8.46, -8.07, -7.04, -7.24, -8.16,
   -8.20, -8.27, -7.79, -7.37, -7.02, -7.13, -6.99, -7.65, -8.18, -6.71,
   -8.41, -6.71, -7.04, -9.15, -7.74, -10.11, -8.20, -7.07, -7.63, -8.99,
   -6.62, -6.23, -7.13, -6.41, -7.06, -7.72, -8.44, -8.85, -8.02, -6.98,
   -6.08, -7.20, -7.48, -7.82, -9.19, -8.31, -7.95, -7.97, -6.66, -6.59,
   -9.10, -7.87, -9.02, -8.77, -7.62, -9.44, -8.05, -7.60, -7.33, -6.94,
   -8.51, -7.39, -6.44, -8.88, -8.21, -7.66, -6.91, -8.39, -7.37, -7.26,
   -6.04, -7.58, -7.28, -7.02, -7.10, -7.33, -8.63, -8.21, -7.12, -8.11,
   -9.03, -8.11, -8.79, -9.22, -7.32, -5.97, -7.26, -6.39, -7.64, -8.38,
   -7.67, -7.70, -7.70, -8.95, -6.25, -8.09, -7.85, -8.10, -7.73, -6.78,
   -7.78, -8.20, -8.88, -8.51, -7.45, -7.14, -6.63, -7.38, -7.72, -6.25]
```

2. Теоретическая часть

2.1. Теоретические сведения

2.1.1. Интервальные оценки

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой параметра θ уровня γ (γ-интервальной оценкой) называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$$

γ-доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня γ) для параметра θ называют реализацию (выборочное значение) интервальной оценки уровня γ для этого параметра.

2.1.2. Вычисление границ доверительных интервалов

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{X}$ — выборочное среднее, $S^2(\vec{X})$ — исправленная выборочная дисперсия, $t^{(n-1)}_{\alpha}$ — квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии нормальной случайной величины:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}},$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

где $S^2(\vec{X})$ — исправленная выборочная дисперсия, $h_\alpha^{(n-1)}$ — квантиль уровня α распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы.

3. Практическая часть

3.1. Код программы

```
x = [-8.47, -7.45, -7.12, -8.30, -8.15, -6.01, -5.20, -7.38, -6.76, -9.18,
    -6.00, -8.08, -7.96, -8.34, -6.82, -8.46, -8.07, -7.04, -7.24, -8.16,
    -8.20, -8.27, -7.79, -7.37, -7.02, -7.13, -6.99, -7.65, -8.18, -6.71,
    -8.41, -6.71, -7.04, -9.15, -7.74, -10.11, -8.20, -7.07, -7.63, -8.99,
    -6.62, -6.23, -7.13, -6.41, -7.06, -7.72, -8.44, -8.85, -8.02, -6.98,
    -6.08, -7.20, -7.48, -7.82, -9.19, -8.31, -7.95, -7.97, -6.66, -6.59,
    -9.10, -7.87, -9.02, -8.77, -7.62, -9.44, -8.05, -7.60, -7.33, -6.94,
    -8.51, -7.39, -6.44, -8.88, -8.21, -7.66, -6.91, -8.39, -7.37, -7.26,
    -6.04, -7.58, -7.28, -7.02, -7.10, -7.33, -8.63, -8.21, -7.12, -8.11,
    -9.03, -8.11, -8.79, -9.22, -7.32, -5.97, -7.26, -6.39, -7.64, -8.38,
    -7.67, -7.70, -7.70, -8.95, -6.25, -8.09, -7.85, -8.10, -7.73, -6.78,
    -7.78, -8.20, -8.88, -8.51, -7.45, -7.14, -6.63, -7.38, -7.72, -6.25];

gamma = input("gamma > ")

n = length(x);

mu = sum(x) / n
s2 = sum((x - mu) .^ 2) / (n - 1)

mu_min = mu - sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n)
mu_max = mu + sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n)

s2_min = s2 * (n - 1) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1)
s2_max = s2 * (n - 1) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1)

ns = zeros(1, n);

mus = zeros(1, n);
mu_mins = zeros(1, n);
mu_maxes = zeros(1, n);
```

```
s2s = zeros(1, n);
s2_mins = zeros(1, n);
s2_maxes = zeros(1, n);

mu_const = zeros(1, n);
s2_const = zeros(1, n);

for i = 1:n
    ns(i) = i;
    locx = x(1:i);

    mu_const(i) = mu;
    s2_const(i) = s2;

    mus(i) = sum(locx) / i;
    s2s(i) = sum((locx - mu) .^ 2) / (i - 1);

    mu_mins(i) = mus(i) - sqrt(s2s(i)) * tinv((1 + gamma) / 2, i - 1) /
        sqrt(i);
    mu_maxes(i) = mus(i) + sqrt(s2s(i)) * tinv((1 + gamma) / 2, i - 1) /
        sqrt(i);

    s2_mins(i) = (i - 1) * s2s(i) / chi2inv((1 + gamma) / 2, i - 1);
    s2_maxes(i) = (i - 1) * s2s(i) / chi2inv((1 - gamma) / 2, i - 1);
end

plot(ns, mu_const, ns, mus, ns, mu_mins, ns, mu_maxes, 'LineWidth', 1.5);
title('$\hat \mu$','interpreter','latex', 'FontSize', 14);
xlabel('n');
ylabel('y');
legend('$\hat \mu(\vec x_N)$', '$\hat \mu(\vec x_n)$', '$\underline{\mu}(\
  vec x_n)$', '$\overline{\mu}(\vec x_n)$', 'Interpreter', 'latex', '
  FontSize', 14);

figure;

plot(ns, s2_const, ns, s2s, ns, s2_mins, ns, s2_maxes, 'LineWidth', 1.5);
```

```
title('$\hat S^2$','interpreter','latex', 'FontSize', 14);
xlabel('n');
ylabel('z');
legend('$\hat S^2(\vec x_N)$', '$\hat S^2(\vec x_n)$', '$\underline{\sigma}^2(\vec x_n)$', '$\overline{\sigma}^2(\vec x_n)$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
```

3.2. Результат работы программы

3.2.1. Числовые характеристики

Для $\gamma = 0.9$:

$$\hat{\mu}(\vec{x}_N) = -7.6609$$

$$S^2(\vec{x}_N) = 0.7779$$

$$\underline{\mu}(\vec{x}_N) = -7.7944$$

$$\overline{\mu}(\vec{x}_N) = -7.5274$$

$$\underline{S^2}(\vec{x}_N) = 0.6364$$

$$\overline{S^2}(\vec{x}_N) = 0.9764$$

3.2.2. Графики

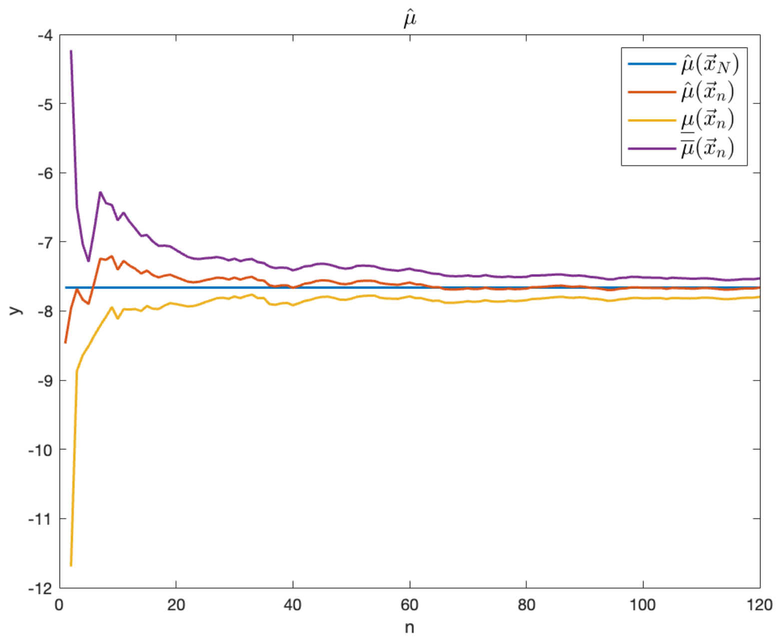

Рисунок 3.1 — Графики $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$

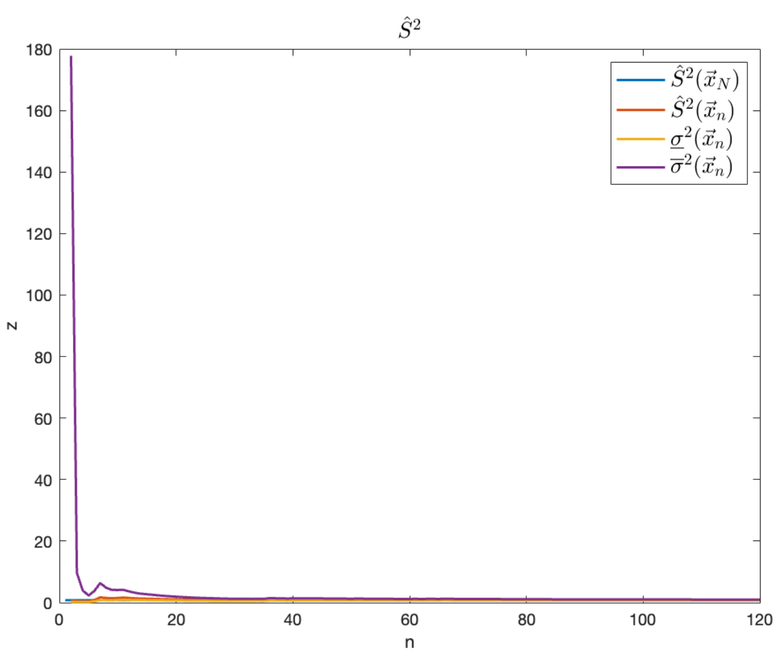

Рисунок 3.2 — Графики $z = S^2(\vec{x}_N)$, $z(n) = S^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$