Ör: $y'' - 9y = 0$ dif. denk. genel çöz. bulunuz.

$\Rightarrow \quad r^2 - 9 = 0$

$(r-3)(r+3) = 0$

$r_1 = 3 \quad r_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} y_1 = e^{r_1 x} = e^{3x} \\ y_2 = e^{r_2 x} = e^{-3x} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}}$

denklemin genel çözümü.

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0$$

old. dan y_1 ve y_2 lineer bağımsızdır.

(ii) (5) denkleminin kökleri kompleks olsun.

Eğer $r_1 = \alpha + i\beta$ şeklinde bir kompleks kök ise denklemin katsayıları reel olduğundan r_1'in eşleniği olan $r_2 = \alpha - i\beta$ da karakteristik denklemin bir diğer kökü olmalıdır.

(i) maddesindeki gibi $r_1 = \alpha + i\beta$ kompleks kökü için (3) dif. denkleminin $y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x}$ çözümü elde edilir. Ancak bu ifade kompleks çözümdür. Uygulamada çoğunlukla reel çözümlerin bulunması istenir. Euler formülü yardımıyla y_1 çözümü;

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$

$$= e^{\alpha x} \cdot \left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)$$

$$= e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + i\, e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \quad --- \quad (6)$$

biçiminde yazılır. Buradan reel katsayılı (3) homojen lineer denklemin kompleks çözümlerinin hem reel hemde sanal kısımları alınarak,

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \quad , \quad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \quad --- \quad (7)$$

reel çözümleri elde edilir.

Kolayca gösterilebilir ki karakteristik denklemin $r_2 = \alpha - i\beta$ eşlenik kompleks kökü için elde edilen, $y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x}$ kompleks çözümünün reel ve sanal kısımları da (7) deki y_1 ve y_2 reel çözümlerinin bir lineer kombinasyonudur. Yani $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$, (7) deki çözümlerden farklı reel çözümler vermez.

Sonuç olarak karakteristik denklemin $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ kompleks kök çifti için (3) dif. denkleminin (7) 'de verilen y_1, y_2 reel çözümler elde edilir.

$$w(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x) & e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha \cos\beta x - \beta \sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha \sin\beta x + \beta \cos\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x}(\cancel{\alpha \cos\beta x \sin\beta x} + \beta \cdot \cos^2\beta x) - e^{2\alpha x}(\cancel{\alpha \cdot \sin\beta x \cdot \cos\beta x} - \beta \cdot \sin^2\beta x)$$

$$= e^{2\alpha x}(\beta \cos^2\beta x + \beta \cdot \sin^2\beta x) = \beta \cdot e^{2\alpha x} \neq 0$$ olduğundan

y_1 ve y_2 çözümleri lineer bağımsızdır derir.

Sonuç olarak;

$$y = c_1 . y_1 + c_2 . y_2$$

$$y = c_1 . e^{\alpha x} . \cos\beta x + c_2 . e^{\alpha x} . \sin\beta x$$

genel çözümü (3) dif. denkleminin genel çözümünü verir.

ÖR: $y'' - 4y' + 13y = 0$ dif. denk genel çözümünü bulun.

$$\Rightarrow (D^2 - 4D + 13)y = 0$$

$y = e^{rx}$ $\qquad r^2 e^{rx} - 4re^{rx} + 13e^{rx} = 0$

$y' = re^{rx}$ $\qquad \underbrace{(r^2 - 4r + 13)}_{=0} \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} = 0$

$y'' = r^2 e^{rx}$

$r^2 - 4r + 13 = 0 \Rightarrow$ karakteristik denklem

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$$

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

$r_2 = 2 - 3i$ olduğundan r_1 ve r_2 kompleks köklerdir.

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(2+3i)x} = e^{2x} . e^{i3x} = e^{2x}(\cos 3x + i \sin 3x)$$
$$= e^{2x} . \cos 3x + i\, e^{2x} . \sin 3x$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = e^{2x} . \cos 3x} \text{ ve } \boxed{y_2 = e^{2x} \sin 3x} \text{ olur.}$$

$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$

$\boxed{y = c_1 . e^{2x} . \cos 3x + c_2 . e^{2x} . \sin 3x}$ genel çözümü bulunur.

Ör: $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

$\Rightarrow$ $r^2 + 16 = 0$ $\Rightarrow$ karakteristik denklem

$r^2 = -16$

$\boxed{r_1 = 4i, \quad r_2 = -4i}$ kompleks kök bulundu.

$y_1 = e^{r_1 x} = e^{i4x} = \cos 4x + i \sin 4x$

$\Rightarrow \boxed{y_1 = \cos 4x}$ ve $\boxed{y_2 = \sin 4x}$ olur.

$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -4\sin 4x & 4\cos 4x \end{vmatrix} = 4\cos^2 4x + 4\sin^2 4x = 4 \neq 0$ old. dan y_1 ve y_2 lin. bağımsız

$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$

$\boxed{y = c_1 . \cos 4x + c_2 . \sin 4x}$ denklemin genel çözümüdür. Şimdi başlangıç şartlarını yerine koyarak denklemin özel çözümünü bulunuz

$2 = c_1 . \cos 0 + c_2 . \sin 0$

$\boxed{2 = c_1}$

$y' = -4c_1 \cdot \sin 4x + 4c_2 \cdot \cos 4x$

$-2 = -4 . c_1 . \sin 0 + 4 . c_2 . \cos 0$

$-2 = 4c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = -1/2}$

$\Rightarrow \boxed{y = 2\cos 4x - \frac{\sin 4x}{2}}$ özel çözümü bulunur.

(iii) (5) denkleminin kökleri çakışık olsun.

Eğer r_1, (5) denkleminin çakışık reel kökü ise (5) karakteristik denklemi $a_0(r-r_1)^2=0$ olur. Dolayısıyla (3) dif. denklemi $a_0(D-r_1)^2y=0$ biçiminde yazılabilir.

$y_1=e^{r_1x}$ ifadesinin (3) denkleminin bir çözümü olduğu açıktır. Buradan $y_2=x\cdot e^{r_1x}$ olarak elde edilir. Diğer taraftan $\forall x\in(-\infty,\infty)$ için;

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & xe^{r_1x} \\ r_1e^{r_1x} & e^{r_1x}(1+r_1x) \end{vmatrix}=e^{2r_1x}(1+r_1x)-xr_1e^{2r_1x}$$
$$=e^{2r_1x}\neq 0$$

olduğundan y_1 ve y_2 lineer bağımsızdır. O halde genel çözüm,

$$y=c_1\cdot y_1+c_2\cdot y_2 \Rightarrow y=c_1e^{r_1x}+c_2x\cdot e^{r_1x}$$

$$\boxed{y=e^{r_1x}(c_1+c_2\cdot x)}$$ şeklinde elde edilir.

Ör: $y''+2y'+1=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\Rightarrow r^2+2r+1=0 \Rightarrow$ karakteristik denk.

$(r+1)^2=0 \Rightarrow \boxed{r_1=r_2=-1}$ çakışık kök vardır.

$\boxed{y_1=e^{r_1x}=e^{-x}}$ ve $\boxed{y_2=x\cdot e^{r_1x}=x\cdot e^{-x}}$ olur.

$$W=\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x} \end{vmatrix}=e^{-2x}-\cancel{xe^{-2x}}+\cancel{xe^{-2x}}=e^{-2x}\neq 0$$
oldu.

$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$

$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \Rightarrow \boxed{y = e^{-x}(c_1 + c_2 x)}$ genel çözümü bulunur.

Ör: $y'' - 2y' + 1 = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 10$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$\Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow$ karakteristik denk.

$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$ çakışık kök vardır.

$\boxed{y_1 = e^x}$ ve $\boxed{y_2 = x e^x}$ elde edilir.

$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 \Rightarrow \boxed{y = c_1 e^x + c_2 x e^x} \Rightarrow$ genel çözüm

$y(0) = 5 \Rightarrow 5 = c_1 e^0 + c_2 . 0 . e^0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 5}$

$y'(0) = 10 \Rightarrow y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x$

$10 = c_1 e^0 + c_2 e^0 + c_2 0 e^0$

$10 = 5 + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = 5}$

$y = 5e^x + 5xe^x \Rightarrow \boxed{y = 5e^x(x+1)} \Rightarrow$ özel çözüm olur.

ÖDEV SORULAR

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

2) $y'' - 6y' + 13y = 0$

3) $y'' + 9y = 0$

4) $2y'' + 2y' + y = 0$

5) $y'' - y' - 6y = 0$

6) $y'' - 2y' + 2y = 0$

7) $y'' - 4y' + 4y = 0$

8) $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

9) $y'' + 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

10) $y'' + y = 0$, $y(\pi/3) = 0$, $y'(\pi/3) = 0$