1.6. Bir Matrisin Eşelon Formu

Tanım: Aşağıdaki şartları sağlayan bir matrise bir Eşelon Matris denir:

i- Tüm elemanları sıfır olan satırlar matrisin alt kısmındadır.

ii- Diğer tüm satırların sıfırdan farklı ilk elemanı 1 dir.

iii- $(i+1)$. satır sıfırdan farklı eleman içeriyorsa, sıfırdan farklı ilk elemanın bulunduğu kolon i. satırın sıfırdan farklı ilk elemanının bulunduğu kolonun sağında yer alır.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ matrisleri 3×3 tipinde eşelon matrislerdir.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisleri eşelon formda değildir.

Tanım: Aşağıdaki şartları sağlayan bir matrise İndirgenmiş Eşelon Matris denir:

i- Tüm elemanları sıfır olan satırlar matrisin alt kısmındadır.

ii- Diğer tüm satırların sıfırdan farklı ilk elemanı 1 dir.

iii- $(i+1)$. satır sıfırdan farklı eleman içeriyorsa, sıfırdan farklı ilk elemanın bulunduğu kolon i. satırın sıfırdan farklı ilk elemanının bulunduğu kolonun sağında yer alır.

iv- 1'i içeren bir kolonun diğer tüm elemanları sıfırdır.

Örnek: Aşağıdaki matrislerin her biri indirgenmiş eşelon matristir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Örnek: Aşağıdaki matrislerin hiç biri indirgenmiş eşelon matris değildir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.7. Satırca Denklik ve Temel Satır İşlemleri

Bir B matrisi A matrisinden aşağıdaki temel satır işlemlerinden sonlu sayıda bir dizisi ile elde edildiğinde A matrisine B ye Satırca Eşdeğerdir denir.

1_ i. satır ile j. satırın yer değiştirmesi

$$\mathcal{E} : S_i \longrightarrow S_j$$

2_ i. satırın sıfırdan farklı bir k skaları ile çarpılması

$$\mathcal{E} : S_i \longrightarrow kS_i$$

3_ i. satırın, k defa j. satıra eklenmesi

$$\mathcal{E} : S_i \longrightarrow S_i + kS_j \;.$$

Burada, $\mathcal{E}$ satır operasyonlarını temsil eder.

→ Aşağıda bir matrisin satırca indirgenmiş eşelon forma getirilmesi için kullanılacak bir algoritma verelim.

Algoritma : Bir $A=[a_{ij}]$ matrisi için:

1. Adım. Sıfırdan farklı bileşene sahip ilk kolonu bulunuz. Bu k_1 kolonu olsun.

2. Adım. Satırları, k_1 kolonunun ilk satırları yani $a_{1k_1} \neq 0$ olacak şekilde değiştiriniz. Eğer $a_{1k_1} = 1$ ise, doğrudan 4. Adıma geçiniz, aksi halde akışa devam ediniz.

3. Adım. a_{1k_1} bileşeninin bulunduğu satırı (1. satırı) $1/a_{1k_1}$ skaları ile çarpınız, yani

$$S_1 \longrightarrow 1/a_{1k_1} S_1$$

işlemini uygulayınız.

4. Adım. a_{1k_1} bileşeninin altındaki, yani $i>1$ için, satırları sıfır yapacak şekilde a_{1k_1} bileşenini merkez olarak kullanınız ve herbir $i>1$'e karşılık gelen satıra

$$S_i \longrightarrow -a_{ik_1} S_1 + a_{1k_1} S_i$$

işlemini uygulayınız.

5. Adım. Eğer merkez elemanın altındaki satırlara uygulanan temel satır işlemleri neticesinde sıfır satırları oluşursa DURULUR (A, satırca indirgenmiştir). Diğer durumda sıradaki adıma geçiniz.

6. Adım. k_1 kolonundan sonra gelen ilk kolonu tespit ediniz. Bu k_2 kolonu olsun.

7. Adım. Satırları, k_2 kolonunun ikinci satırı yani $a_{2k_2} \neq 0$ olacak şekilde değiştiriniz. Eğer $a_{2k_2} = 1$ ise, doğrudan 9. Adıma geçiniz, aksi halde akışa devam ediniz.

8. Adım. a_{2k_2} bileşeninin bulunduğu 2. satırı $1/a_{2k_2}$ skaları ile çarpınız, yani

$$S_2 \longrightarrow 1/a_{2k_2}\, S_2$$

işlemini uygulayınız.

9. Adım. a_{2k_2} bileşeninin altındaki ve üstündeki satırları sıfır yapacak şekilde a_{2k_2} bileşenini merkez olarak kullanınız ve $i \neq 2$ için

$$S_i \longrightarrow -a_{ik_2} S_2 + a_{2k_2} S_i$$

işlemini uygulayınız.

10. Adım. Bu şekilde devam ederek A matrisinin indirgenmiş eşelon matrisine ulaşırsınız.

Örnek: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin indirgenmiş eşelon matrisini bulalım.

Sıfırdan farklı bileşene sahip olan kolon $k_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ dır.

$a_{1k_1} = 0$ ve $a_{3k_1} = 1$ olduğu için verilen matriste 1. satır ile 3. satırı yer değiştirelim. Yani,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_1 : S_1 \rightarrow S_3$$

Şimdi $a_{1k_1} = 1$ merkez elemanının altındaki bileşenleri sıfır yapacak işlemleri uygulayalım:

$$\mathcal{E}_2 : S_2 \longrightarrow -3S_1 + S_2 .$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

Daha sonra k_1 kolonundan sonra gelen ilk sıfırdan farklı elemana sahip kolon $\underbrace{\begin{bmatrix} -7 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=k_2}$ dır. $a_{2k_2} = 20 \neq 1$ olduğundan

$$\mathcal{E}_3 : S_2 \longrightarrow 1/20\, S_2$$

işlemini uyguladıyız.

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

Yine, $a_{2k_2} = 1$ merkez elemanının altındaki ve üstündeki bileşenleri sıfır yapacak işlemleri uygulayalım:

$$\mathcal{E}_4 : S_1 \longrightarrow 7S_2 + S_1$$

$$\mathcal{E}_5 : S_3 \longrightarrow -S_2 + S_3 .$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_5}{\overset{\varepsilon_4}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$ olur. Öyleyse B

matrisi verilen matrisin indirgenmiş eşelon formudur.

Satırca İndirgenmiş eşelon matrislerin oldukça çok uygulaması vardır. Bu kısımda bunlardan bir tanesini verelim.

Algoritma : Bir matrisin tersini bulmak ; $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için

1.Adım. $n\times 2n$ tipinde bir M blok matrisi

$$M=\left[A \mid I_n\right]$$

olacak biçimde oluşturalım.

2.Adım. M satırca eşelon matrise indirgenir. Eğer bu işlemin sonucu, M nin A yarısında bir sıfır satır oluşursa DURULUR (A nın tersi yoktur). Diğer durumda A nın yarısı üçgensel matris olur.

3.Adım. M, $[I_n \mid B]$ satırca indirgenmiş eşelon form halini alır.

4.Adım. $A^{-1}=B$ olur.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım.

Öncelikle, A matrisi 3×3 tipinde olduğu için oluşturulacak

M blok matrisi

$$M=\begin{bmatrix} A \mid I_3 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

şeklindedir. Şimdi M yi eşelon biçime indirgeyelim:

$$M=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\varepsilon_1: S_2 \rightarrow -2S_1+S_2$

$\varepsilon_2: S_3 \rightarrow -4S_1+S_3$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\varepsilon_3: S_3 \rightarrow S_2+S_3$

şeklinde M nin sol yarısı üçgenseldir; o halde A nın tersi var olup akışa devam edilir.

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad I_3 \qquad\qquad A^{-1}$

$\varepsilon_4: S_2 \rightarrow -S_2$

$\varepsilon_5: S_3 \rightarrow -S_3$

$\varepsilon_6: S_2 \rightarrow -S_3+S_2$

$\varepsilon_7: S_1 \rightarrow -2S_3+S_1$

elde edilir. Sonuç olarak, $A^{-1}=\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ dır.

NOT: Temel satır işlemlerine benzer temel kolon işlemleri de vardır:

1- i. kolon ile j. kolonun yer değiştirmesi

$$\varepsilon : K_i \longrightarrow K_j$$

2- i. kolonun sıfırdan farklı bir k skaları ile çarpılması

$$\varepsilon : K_i \longrightarrow k K_i$$

3- i. kolonunun, k defa j. kolona eklenmesi

$$\varepsilon : K_i \longrightarrow K_i + k K_j$$

1.8. Kongrüant Simetrik Matrisler

Tanım: Singüler olmayan bir P matrisi verilsin. Bu takdirde,

$$B = P^T A P$$

eşitliğini sağlayan B matrisi, A matrisine Kongrüanttır denir.

Böyle bir durumda, A simetrik, yani $A^T = A$ olsun. O zaman

$$B^T = (P^T A P)^T = P^T A^T P = P^T A P = B$$

olur ki açıkça B matrisi de simetriktir. Diyagonal matrisler simetrik matrislerin özel durumu olduğundan, sadece simetrik matrisler köşegen matrislere kongrüanttır.

→ Şimdi, Lineer Cebir'de önemli bir yeri olan aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem: A bir reel simetrik matris olsun. O zaman öyle bir singüler olmayan P matrisi vardır ki

$$B = P^T A P$$

olacak şekildeki B matrisi diyagonaldir.

→ Aşağıda bir reel simetrik matrisin kongrüans altında köşegen hale gelmesi için kullanılacak bir algoritma verelim:

Algoritma: *Simetrik bir matrisin kongrüans köşegenlemesi*

Bir reel simetrik $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için

1. Adım. $n \times 2n$ tipinde bir M blok matrisi

$$M = \left[A \mid I_n \right]$$

olacak biçimde oluşturalım.

2. Adım. a_{11} bileşeni incelenir.

I. Durum: $a_{11} \neq 0$ olsun. M yi aşağıdaki şekle indirgemek için

$S_i \rightarrow -a_{i1} S_1 + a_{11} S_i \quad , \quad i = 2, 3, \ldots, n$

satır işlemleri ve sonra M nin sol yarısına

$K_i \longrightarrow -a_{i1} K_1 + a_{11} K_i$

kolon işlemleri uygulanır:

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & 0 & * & * \\ 0 & D & * & * \end{array}\right]$$

elde edilir.

II. Durum: $a_{11} = 0$, ancak bazı $i>1$ için $a_{ii} \neq 0$ olsun. a_{ii} elemanını birinci birinci köşegen bileşeni konumuna getirmek için

$$S_1 \longleftrightarrow S_i$$

satır işlemi ve sonra ilgili

$$K_1 \longleftrightarrow K_i$$

kolon işlemi uygulanır. Bu işlemler matrisi I. Duruma getirir.

III. Durum: Tüm köşegen elemanları $a_{ii} = 0$ olsun. $a_{ij} \neq 0$ olacak şekilde i, j seçilir. Daha sonra

$$S_i \rightarrow S_j + S_i$$

satır işlemleri ve ilgili

$$K_i \rightarrow K_j + K_i$$

kolon işlemleri uygulanarak $2a_{ij} \neq 0$ bileşeni i. köşegen bileşeni konumuna gelir. Bu işlemler matrisi II. Duruma getirir.

3. Adım. 2. Adım herbir yeni matris için bir önceki matrisin ilk satır ve kolonu ihmal edilerek A köşegensel olana kadar tekrarlanır. $M = [B \mid Q]$

4. Adım. $P = Q^T$ alınır. O zaman

$$B = P^T A P$$

dur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ simetrik matrisinin kongrüans köşegenlemesini bulalım.

Öncelikle 3×6 tipindeki M blok matrisini yazalım:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

. Bu matrisde $a_{11}=1$ olduğu için algoritmanın 2. Adımındaki I. Durumu takip ederek önce satır işlemleriyle

$$M \underset{\varepsilon_2}{\overset{\varepsilon_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \begin{array}{l} \varepsilon_1 : S_2 \to -2S_1 + S_2 \\ \varepsilon_2 : S_3 \to 3S_1 + S_3 \end{array}$$

ve sonra kolon işlemleriyle

$$\underset{\varepsilon_4}{\overset{\varepsilon_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \begin{array}{l} \varepsilon_3 : K_2 \to -2K_1 + K_2 \\ \varepsilon_4 : K_3 \to 3K_1 + K_3 \end{array}$$

elde edilir. Benzer işlemleri 1. satır ve 1. kolonu ihmal ederek devam edersek, önce satır işlemiyle

$$\overset{\varepsilon_5}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right], \quad \varepsilon_5 : S_3 \to -2S_2 + S_3$$

ve sonra kolon işlemleriyle

$$\overset{\mathcal{E}_6}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right] , \quad \mathcal{E}_6 : K_3 \rightarrow -2K_2 + K_3$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{B} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{P^T}$$

olur. Böylece A matrisi,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$B = P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

şeklinde kongrüans köşegenlenmesi halini alır.

1.9. Elementer Matrisler

Tanım: $n \times n$ tipinde I birim matrisine temel satır işlemlerinden herhangi biri tam olarak bir kez uygulandığında elde edilen matrise Elementer Matris denir. Toplam üç tip temel satır işlemlerine karşılık gelen üç tip elementer matris vardır.

1. Tip: I birim matrisinde herhangi iki satırın yer değiştirmesiyle elde edilen matris 1. Tip Elementer Matris adını alır.

Örnek: 3×3 tipindeki I birim matrisi

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere birinci satırın ikinci satır ile yer değiştirmesiyle

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. tip elementer matris elde edilir.

3x3 tipinde herhangi bir A matrisi verildiğinde

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A E_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

bulunur.

2. Tip: I birim matrisinde herhangi bir satırın sıfırdan farklı bir skalar ile çarpılmasıyla elde edilen matris 2. Tip Elementer Matris adını alır.

Örnek: 3x3 tipindeki I birim matrisinin ikinci satırını 2 skaları ile çarparsak

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. tip elementer matris elde edilir.

3x3 tipindeki bir A matrisi için

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A E_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. Tip: I birim matrisinde herhangi bir satırın bir skalar ile çarpımının başka bir satıra eklenmesiyle elde edilen matris 3. Tip Elementer Matris adını alır.

Örnek: 3x3 tipindeki I birim matrisinin 3. satırını 4 skaları ile çarpım ikinci satıra eklersek

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. tip elementer matris elde edilir.

3x3 tipindeki bir A matrisi için

$$E_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+4a_{31} & a_{22}+4a_{32} & a_{23}+4a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A E_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 4a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 4a_{22}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 4a_{32}+a_{33} \end{bmatrix}$$

bulunur.

Teorem: Eğer E bir elementer matris ise E regülerdir ve E^{-1} ters matrisi E ile aynı tipe sahip bir elementer matristir.

Tanım: nxn tipinde iki matris A ve B olsun. Eğer

$$B = E_k, E_{k-1} \dots E_1 A$$

olacak şekilde sonlu sayıda $E_1, E_2, \dots, E_k$ elementer matrisi varsa B matrisi A ya Satırca Denk denir.

1.10. LU Ayrıştırması

$n \times n$ tipinde bir A matrisinin satır değiştirme işlemleri kullanılmadan üst üçgensel U biçimine getirilebilen bir matris olduğunu kabul edelim. Şimdi A yı üçgenselleştirebilen algoritmayı aşağıda verelim:

Algoritma: Bir matrisi üçgenleştirme. $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için

1. Adım. $i=1,2,\dots,n-1$ için tekrar ediniz;

2. Adım. $j=i+1,\dots,n$ için tekrar ediniz.

(a) $m_{ij} := a_{ij}/a_{ii}$ alınız.

(b) $R_j := m_{ij}R_i + R_j$ alınız.

[2. adım iç döngüsünün sonu]

[1. adım dış döngüsünün sonu]

3. Adım. Çıkınız. Elde edilen matris A nın üst üçgenleştirilmiş halidir.

A matrisi için alt üçgensel L matrisinin bulunuşu:

Yukarıdaki algoritmada temel satır işlemlerinin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ olduğunu kabul edelim. Bu işlemlerin tersleri $i=1,2,\dots,n-1$ için

$$-m_{ij}R_i + R_j \to R_j \qquad (j=i+1,\dots,n)$$

şeklindedir. Bu ters işlemleri sondan başa I birim matrise uygulayarak L matrisini

$$L = E_1^{-1}E_2^{-1}\dots E_k^{-1}I$$

şeklinde buluruz.

Teorem: $n \times n$ tipinde bir A matrisinin satır değiştirme işlemleri kullanılmadan üçgensel U biçimine getirilebilen matris olsun. O zaman

$$A = LU$$

şeklinde yazılabilir, burada L, köşegeninde 1-ler olan alt üçgensel bir matris ve U, köşegeninde sıfır olmayan üst üçgensel bir matristir.

UYARI: Yukarıdaki teorem sadece satır değişimi kullanılmadan üçgensel hale getirilebilen regüler A matrislerine uygulanabilir. Böyle matrislere LU Ayrıştırması olan matrisler denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ matrisinin LU ayrıştırmasını bulunuz.

İlk olarak A matrisinin üst üçgenleştiren algoritmaya başlayalım:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = U$$ elde edilir. Burada

$\mathcal{E}_1: S_2 \to 3S_1 + S_2$

$\mathcal{E}_2: S_3 \to -2S_1 + S_3$

$\mathcal{E}_3: S_3 \to \frac{3}{2}S_2 + S_3$

m_{ij} katsayıları; $m_{21} = 3$, $m_{31} = -2$ ve $m_{32} = \frac{3}{2}$ dır. Böylece $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ ve $\mathcal{E}_3$ operasyonlarının ters operasyonları

$$\mathcal{E}_1^{-1}: S_2 \to -3S_1 + S_2$$

$$\mathcal{E}_2^{-1}: S_3 \to 2S_1 + S_3$$

$$\mathcal{E}_3^{-1}: S_3 \to -\frac{3}{2}S_2 + S_3$$

şeklindedir. Şimdi bu ters

operasyonları I_3 birim matrisine uygularsak

$$E_1^{-1} = \varepsilon_1^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2^{-1} = \varepsilon_2^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3^{-1} = \varepsilon_3^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde E_1^{-1}, E_2^{-1} ve E_3^{-1} elementer matrisleri elde edilir. O halde,

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Gerçekten,

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 13 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır.

KAYNAKLAR

1-Schaum's Outline of LİInear Algebra, Seymour Lipschutz and Marc Lipson.
2-Doğrusal Cebir, Cemal Koç ve Songül Esin, Matematik Vakfı 1995.
3-Lineer Cebir Prof. Dr. Süleyman Çiftçi, Dora Yayınları 2015.
4-Linear Algebra with Applications, Steven J. Leon, Global Edition.