⇒ Bernoulli Diferansiyel Denklemi ⇐

$P(x)$ ve $Q(x)$ x'in fonksiyonları olmak üzere

$$y' + P(x)y = Q(x).y^n \quad --- \quad (18)$$

şeklinde ifade edilen denkleme Bernoulli dif. denklemi denir. Burada $n \neq 0$ ve $n \neq 1$ dir. Çünkü eğer $n=0$ olursa denk. lineer dif. denk. olur. Eğer $n=1$ dursa denklem değişkenlerine ayrılabilir dif. denk. olurdu. Bernoulli dif. denkleminin çözümü için denklemin her tarafı y^n ile bölünürse,

$$\frac{y'}{y^n} + P(x).y^{1-n} = Q(x) \quad --- \quad (19)$$

olur. Bu son denklemi lineer dif. denk. dönüştürebilmek için $u = y^{1-n}$ dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda,

$$u' = (1-n)\,y^{-n}.y' \Rightarrow y^{-n}.y' = \frac{u'}{1-n}$$

elde edilir. Bu ifadeler (19) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{u'}{1-n} + P(x).u = Q(x)$$

$$u' + P(x).u.(1-n) = Q(x).(1-n)$$

şeklindeki dif. denk. elde edilir.

Bu dif. denklem artık lineer bir dif. denk. haline geldi. Lineer dif. denklemi çözme yöntemlerinden biriyle çözülür. Ve sonuçta,

$u = y^{1-n}$ yerine yazılarak Bernoulli dif. denkleminin çözümü elde edilir.

Ör: $y' + y = xy^3$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklem Bernoulli dif. denklemidir

$$\frac{y'}{y^3} + y^{-2} = x \Rightarrow u = y^{1-n} \quad u = y^{-2}$$

$$u' = -2y^{-3}y'$$

$$y^{-3} \cdot y' = \frac{u'}{-2}$$

$$\frac{u'}{-2} + u = x$$

$$u' - 2u = -2x \Rightarrow P(x) = -2 \quad Q(x) = -2x$$

oldu ve denklem lineer dif. denklem haline geldi. Sabitin değişim yöntemi ile çözelim.

$$u' - 2u = 0$$

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0$$

$$\int \frac{du}{u} - \int 2dx = \int dc$$

$$\ln|u| - 2x = \ln c$$

$$\ln u - \ln c = 2x$$

$$\ln\left|\frac{u}{c}\right| = 2x$$

$$\frac{u}{c} = e^{2x}$$

$$\boxed{u = c_1 e^{2x}}$$

elde edilir. Burada sabiti değiştirelim.

$$u = c(x) \cdot e^{2x}$$

$$u' = c' e^{2x} + 2 \cdot c \cdot e^{2x}$$

$$c'e^{2x} + \cancel{2ce^{2x}} - \cancel{2ce^{2x}} = -2x$$

$$c' = -2x\,e^{-2x} \Rightarrow \frac{dc}{dx} = -2xe^{-2x}$$

$$\Rightarrow dc + 2xe^{-2x}dx = 0$$

$x = u \qquad e^{-2x}dx = dv$

$dx = du \qquad -\frac{1}{2}e^{-2x} = v$

$$\int dc + 2\int x e^{-2x}dx = \int d(c)$$

$$c(x) + 2\cdot\left(-\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right) = c_1$$

$$c(x) - xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} = c_1$$

$$c(x) = c_1 + xe^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{2}$$

$$u(x) = c(x).\,e^{2x} \Rightarrow u(x) = \left(c_1 + xe^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{2}\right).\,e^{2x}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = c_1 e^{2x} + x + \frac{1}{2}}$$

$$u = y^{-2} \Rightarrow \boxed{y^{-2} = c_1 e^{2x} + x + \frac{1}{2}}$$ elde edilir.

ÖR: $y' - \frac{1}{3x}y = \ln x . y^4$ dif. denk. çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denk Bernoulli dif. denklemidir. $(n=4)$

$$\frac{y'}{y^4} - \frac{1}{3x}y^{-3} = \ln x \Rightarrow u = y^{1-n} \Rightarrow u = y^{-3}$$

$$\frac{y'}{y^4} = \frac{u'}{-3} \Leftarrow \Rightarrow u' = -3y^{-4}y'$$

$$\frac{u'}{-3} - \frac{1}{3x} u = \ln x$$

$$u' + \frac{u}{x} = -3\ln x \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x} \quad Q(x) = -3\ln x$$

old. dan denklem lineer hale geldi. Yerine koyma yöntemi ile çözelim.

$u = v \cdot t$

$u' = v' t + v \cdot t'$

$$v' t + v \cdot t' + \frac{v \cdot t}{x} = -3\ln x$$

$$v' \cdot t + v \underbrace{\left(t' + \frac{t}{x}\right)}_{0 \text{ olmalı..}} = -3\ln x$$

$$\frac{dt}{dx} + \frac{t}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dx}{x} = \int dc$$

$$\Rightarrow \ln t + \ln x = \ln c$$

$$t \cdot x = c$$

$$t = \frac{c}{x} \quad \underline{c = 1 \text{ durse}}$$

$$t = \frac{1}{x} \quad \text{olur.}$$

$$v' \frac{1}{x} = -3\ln x$$

$$v' = -3x\ln x$$

$$\frac{dv}{dx} = -3x\ln x \Rightarrow dv + 3x\ln x\, dx = 0$$

$$\int dv + 3\int x\ln x\, dx = 0$$

$\ln x = u$ $\quad$ $x\,dx = dv$

$\frac{1}{x} dx = du$ $\quad$ $\frac{x^2}{2} = v$

$$v(x) + 3\left(\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx\right) = c_1$$

$$v(x) + \frac{3}{2}\ln x \cdot x^2 - \frac{3}{4}x^2 = c_1$$

$$v(x) = c_1 + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^2 \cdot \ln x}{2}$$

$$u = v \cdot t \implies u(x) = \left(c_1 + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^2 \ln x}{2}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$u(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{3x}{4} - \frac{3x\ln x}{2}$$

$$u = y^{-3} \implies \boxed{y^{-3} = \frac{c_1}{x} + \frac{3x}{4} - \frac{3x\ln x}{2}}$$

Ör: $(4-x^2)y' + 4y = (2+x) \cdot y^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $(4-x^2) \cdot \dfrac{y'}{y^2} + 4 \cdot y^{-1} = (2+x)$

$$u = y^{1-n} \implies u = y^{1-2} = y^{-1} \implies u' = -1y^{-2} \cdot y'$$

$$\implies -u' = \frac{y'}{y^2}$$

$$(x^2-4) \cdot u' + 4u = (2+x)$$

$$u' + \frac{4}{x^2-4}u = \left(\frac{2+x}{x^2-4}\right) \implies$$ Denk. lineer dif. denk. oldu. Sabitin değişim yöntemini kullanalım.

$$u' + \frac{4}{x^2-4} u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{4}{x^2-4} dx = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u} + 4 \int \frac{dx}{x^2-4} = \int dc$$

$$\ln|u| + 4 \int \frac{dx}{x^2-4} = \ln c$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = Ax + 2A + Bx - 2B$$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 2A - 2B &= 1 \end{aligned} \quad \Big/ \quad \begin{aligned} 2A + \cancel{2B} &= 0 \\ 2A - \cancel{2B} &= 1 \end{aligned}$$

$$+ \quad 4A = 1 \Rightarrow A = 1/4 \qquad B = -1/4$$

$$\ln|u| + 4 \left[\frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx \right] = \ln c$$

$$\ln|u| + \ln|x-2| - \ln|x+2| = \ln c$$

$$\ln \left| \frac{u \cdot (x-2)}{x+2} \right| = \ln c$$

$$u = c \cdot \frac{(x+2)}{(x-2)} \Rightarrow u = c(x) \cdot \frac{x+2}{x-2} \text{ diyelim.}$$

$$u' = c' \cdot \frac{x+2}{x-2} + c \cdot \left(\frac{x-2-x-2}{(x-2)^2} \right)$$

$$u' = c' \cdot \frac{x+2}{x-2} - \frac{4c}{(x-2)^2}$$

$$c' \cdot \frac{x+2}{x-2} - \frac{4c}{(x-2)^2} + \frac{4}{x^2-4} \cdot c \cdot \frac{x+2}{x-2} = \frac{2+x}{x^2-4}$$

$$c' \cdot \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x-2}} = \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)}$$

$$c' = \frac{1}{x+2} \Rightarrow dc - \frac{dx}{x+2} = 0$$

$$\int dc - \int \frac{dx}{x+2} = \int dc_1$$

$$c(x) - \ln|x+2| = c_1$$

$$c(x) = c_1 + \ln|x+2|$$

$$u(x) = c(x) \cdot \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow u(x) = \left(c_1 + \ln|x+2| \right) \cdot \frac{x+2}{x-2}$$

$$u = y^{-1} \Rightarrow \boxed{y^{-1} = \left(c_1 + \ln|x+2| \right) \cdot \frac{x+2}{x-2}}$$

elde edilir.