⇒ n. Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler ⇐ Teorisi

(102)

Lineer dif. denklemler, diferansiyel denklemlerin önemli bir alt sınıfını teşkil ederler. Bu denk. sınıfı için gerek çözümlerin özellikleri gerekse çözümlerin elde edilmesi bakımından sistematik bir teori vardır.

x bağımsız y bağımlı değişkeni göstermek üzere n. mertebeden en genel lineer dif. denklem;

$$(\cancel{29})^{32} \; --- \; a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) y = Q(x)$$

biçimindedir. Görüldüğü üzere denklem $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ türevlerine göre 1. derecedendir. $(\cancel{29})^{32}$ denkleminde a_i ler ve Q x ekseninin $J \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlarıdır. a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$ fonksiyonlarına $(\cancel{29})^{32}$ denkleminin <u>katsayıları</u> denir. Bu katsayıların bazıları veya tümü sabit olabilir. Eğer tümü birden sabit ise denkleme <u>sabit katsayılı dif. denk.</u>, en az biri sabit değilse <u>değişken katsayılı dif. denk</u> denir. Eğer $Q(x) = 0$ ise $(\cancel{29})^{32}$ denklemine n. mertebeden <u>homojen</u> lineer dif. denk., $Q(x) \neq 0$ ise (29) denklemine <u>homojen olmayan</u> dif. denk adı verilir.

ÖR: $x^3y'' + xy' + y = 3$ ⇒ 2. mertebeden değişken katsayılı lineer homojen olmayan denklem.

$y^{IV} - y'' = 2xe^x$ ⇒ 4. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan denk.

$2xy'' - e^x y' = 0$ ⇒ 2. mertebeden değişken katsayılı lineer homojen denk.

$y''' + y'' + 2y' + 5y = 0$ ⇒ 3. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen denk.

⇒ Diferansiyel Operatör ⇐

Analizde türev işlemi genellikle "D" harfiyle gösterilir. Buna göre bir y fonksiyonunun türevi;

$$y' = \frac{dy}{dx} = Dy \quad \text{--- (30) (33)}$$

şeklindedir. Burada D'ye türev operatörü denir.

D, türetilebilir bir fonksiyonu başka bir fonksiyona dönüştürür. Örneğin;

$$D(e^{4x}) = 4e^{4x}, \quad D(2x^2 - 6x) = 4x - 6$$

$$D(\cos 2x) = -2\sin 2x, \quad D(x^3 + x^2 + x + 1) = 3x^2 + 2x + 1$$

olur. D, türev operatörü lineerdir. Yani f ve g türetilebilir iki fonk ve a ve b iki keyfi sabit o.ü.

$$D(af(x) + bg(x)) = aD(f(x)) + bD(g(x)) \quad \text{dir.}$$

Bu, türev alma kurallarının bir sonucudur. Yüksek mertebeden türevlerden D cinsinden ifade edilebilir. Gerçekten de y, n. mertebeden türetilebilir bir fonk. olsun,

$$\frac{dy}{dx} = Dy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = D(Dy) = D^2y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = D.(D^2y) = D^3y$$

$$- - -$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

olarak elde edilir. Tıpkı D gibi, $D^2, D^3 \ldots$ operatörleri de lineerdir.

Lineer dif. denk. teorisinde D'nın polinomları olan ifadeler ortaya çıkar. Gerçekten de ~~(29)~~ (32) denkleminin sol tarafındaki türevler yerine D cinsinden eşitliği yazılırsa,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x)$$

$$a_0(x)D^ny + a_1(x)D^{n-1}y + \cdots + a_{n-1}(x)Dy + a_n(x)y = Q(x)$$

$$\left(a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)\right).y = Q(x)$$

elde edilir. Burada ortaya çıkan

" $a_0(x)\Delta^n + a_1(x)\Delta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\Delta + a_n(x)$ "

ifadesi Δ'ye göre n. dereceden bir polinomdur. Bu ifadeye n. mertebeden (dereceden) bir diferansiyel operatör denir. ve "L" ile gösterilir. Buna göre

$$L = a_0(x)\Delta^n + a_1(x)\Delta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\Delta + a_n(x) \quad --- (\cancel{31})\ 34$$

olur. Burada "L" aynı zamanda bir fonksiyona uygulanacak bir işlem veya işlem grubunu tanımlayan bir semboldür. "L"nin x'in özel bir fonksiyonuna uygulanması sonucu "Ly" ile gösterilir. Eğer y, $x$in özel bir fonk. ise "Ly" de x'in başka bir fonksiyonudur. Örnek olarak; $L = \Delta^2 + 2\Delta - 4$ ifadesi bir diferansiyel operatördür. Ve bu operatörün $y = e^{2x}$ fonksiyonuna uygulanması yine x'in bir fonksiyonunu verir.

$$L = \Delta^2 + 2\Delta - 4 \qquad y = e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad Ly = (\Delta^2 + 2\Delta - 4)(e^{2x}) = \Delta^2 e^{2x} + 2\Delta e^{2x} - 4e^{2x}$$

$$= \Delta 2e^{2x} + \cancel{4e^{2x}} - \cancel{4e^{2x}}$$

$$= 4e^{2x}$$ fonk. elde edilir.

($\cancel{31}$ 34) ile tanımlanan L dif. operatörünün önemli bir özelliği de lineer olmasıdır.

⟹ Lineer Diferansiyel Operatörler Cebiri ⟸

Diferansiyel operatörler lineer diferansiyel denklemler teorisinde çok önemlidir. Özellikle sabit katsayılı lineer dif. denk. çözümlerinin elde edilmesinde böyle operatörler ve onların reel sayıların özelliklerine benzeyen cebirsel özellikler kullanılır.

$L_1 = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$ ve $L_2 = b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_m$

iki lineer dif. operatör olsun. Katsayılar sbt yada x'e bağımlı olabilirler. Eğer gerekli mertebeden türetilebilir her fonk. için * $L_1 y = L_2 y$ ise $L_1 = L_2$ 'dir.

* L_1 ve L_2 operatörlerinin toplamı,

$$(L_1 + L_2)y = L_1 y + L_2 y = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n)y + (b_0 D^m + \dots + b_m)y$$

şeklinde tanımlanır. Sağ taraf D'nin aynı dereceden terimleri bir araya getirilerek birleştirilebilir. Yani diferansiyel operatörler D'nin polinomlarıymış gibi toplanabilir.

<u>Ör</u>: $L_1 = xD^2 - D + 2$ ve $L_2 = xD + x$

$$L_1 + L_2 = (xD^2 - D + 2) + (xD + x)$$

$$= xD^2 + (x-1)D + (2+x)$$

olur

<u>Ör</u>: $(D+1) + (D-1) = 2D$

$(D^2 + D - 2) + (D - 1) = D^2 + 2D - 3$

Ör: $(xD+D-1)+(D+x) = (x+1)D+(x-1)$

$(D^2-3xD+2)+(D^2+3xD+2x^2) = 2D^2+(2x^2+2)$

olur.

* L_1'in soldan bir k sabiti ve x'in bir g fonksiyonu ile çarpımları;

$k.(L_1 y) = (k.L_1)y \qquad g(x)(L_1 y) = (g(x).L_1)y$

şeklindedir.

Ör: $L_1 = xD^2-D+2 \Rightarrow 2L_1 = ? \qquad x^2L_1 = ?$

$2L_1 = 2(xD^2-D+2) = 2xD^2-2D+4$

$x^2L_1 = x^2(xD^2-D+2) = x^3D^2-x^2D+2x^2$

* Son olarak lineer dif. operatörler birbirleri ile çarpılabilir. Yani;

$(L_1.L_2)y = L_1.(L_2 y)$

şeklindedir.

Ör: $L_1 = D+1$ ve $L_2 = D-1$

$(L_1.L_2)y = L_1.(L_2 y) = (D+1)(Dy-y)$

$= D^2y - \cancel{Dy} + \cancel{Dy} - y$

$= D^2y - y = (D^2-1)y$

2. yol

$= (D+1)(D-1)y$

$= (D^2-\cancel{D}+\cancel{D}-1)y$

$= (D^2-1)y$ olur.

$$L_2 \cdot L_1 = (D-1)\cdot(D+1) = D^2 + \cancel{D} - \cancel{D} - 1 = D^2 - 1 \quad \text{olur.}$$

<u>NOT</u>: Sabit katsayılı lineer diferansiyel operatörler D'nın polinomlarıymış gibi çarpılabilir. Bu özellik değişken katsayılı lineer dif. operatörler için <u>genellikle</u> doğru değildir.

<u>Ör</u>: $L_1 = xD + 1$ ve $L_2 = xD - 1 \Rightarrow L_1 \cdot L_2 = ?$

<u>1. YOL</u>:

$$(L_1 \cdot L_2)y = L_1(L_2 y) = (xD+1)\cdot(xDy - y)$$

$$= xD(xDy - y) + (xDy - y)$$

$$= xD(xDy) - x\cancel{D}y + x\cancel{D}y - y$$

$$= x(1\cdot Dy + x\cdot D^2 y) - y$$

$$= x^2D^2y + xDy - y \;// \quad \text{olur.}$$

$(xD+1)(xy'-y)$

$xD(xy') - xDy + xy' - y$

$x(y' + xy'') - \cancel{xy'} + \cancel{xy'} - y$

$xy' + x^2y'' - y$

$xDy + x^2D^2y - y$

<u>2. YOL</u>: $(L_1 \cdot L_2)y = L_1.(L_2 y) = (xD+1)(xDy - y)$

$$= (xD+1)(xy' - y)$$

$$= xD(xy' - y) + xy' - y$$

$$= x(1\cdot y' + xy'' - y') + xy' - y$$

$$= xy' + x^2y'' - \cancel{xy'} + \cancel{xy'} - y$$

$$= x^2y'' + xy' - y$$

$$= x^2D^2y + xDy - y \;// \quad \text{olur}$$

$L_2 y = (xD-1)y$

$= xDy - y$

$= xy' - y$

Ör: $L_1 = xD^2 + 2xD + 2 \qquad L_2 = xD + 1 \Rightarrow L_1 . L_2 = ?$

Çözüm: $(L_1 . L_2)y = L_1 . (L_2 y) = (xD^2 + 2xD + 2)(xDy + y)$

$= (xD^2 + 2xD + 2)(xy' + y)$

$= xD^2(xy') + xD^2(y) + 2xD(xy') + 2xDy) + 2xy' + 2y$

$= xD(1y' + x.y'') + xy'' + 2x(1.y' + xy'') \cancel{+} 2xy' + 2xy' + 2y$

$= x(y'' + 1.y'' + xy''') + xy'' + 2xy' + 2x^2y'' + 4xy' + 2y$

$= xy'' + xy'' + x^2y''' + xy'' + 2xy' + 2x^2y'' + 4xy' + 2y$

$= x^2y''' + (3x + 2x^2)y'' + 6xy' + 2y$

$= x^2D^3y + (3x + 2x^2)D^2y + 6xDy + 2y$

$= (x^2D^3 + (3x + 2x^2)D^2 + 6xD + 2)\ y$

elde edilir.

Ör: $L_1(y) = y'' - 3xy' + 2y \quad , \quad L_2(y) = y'' + 3xy' + 2x^2y$

$\Rightarrow (L_1 . L_2)(y) = ?$

Çözüm:

$L_1(y) = D^2y - 3xDy + 2y \qquad L_2(y) = D^2y + 3xDy + 2x^2y$

$L_1(y) = (D^2 - 3xD + 2)y \qquad L_2(y) = (D^2 + 3xD + 2x^2)y$

$$(L_1 \cdot L_2)(y) = L_1 \cdot (L_2(y)) = (D^2 - 3xD + 2)(y'' + 3xy' + 2x^2y)$$

$$= D^2y'' + D^2(3xy') + D^2(2x^2y) - 3xDy'' - 3xD(3xy') - 3xD(2x^2y)$$
$$+ 2y'' + 6xy' + 4x^2y$$

$$= y^{iv} + D(3y' + 3xy'') + D(4xy + 2x^2y') - 3xy''' - 3x(3y' + 3xy'')$$
$$- 3x(4xy + 2x^2y') + 2y'' + 6xy' + 4x^2y$$

$$= y^{iv} + 3y'' + 3y'' + \cancel{3xy'''} + 4y + 4xy' + 4xy' + 2x^2y'' - \cancel{3xy'''} - 9xy'$$
$$- 9x^2y'' - 12x^2y - 6x^3y' + 2y'' + 6xy' + 4x^2y$$

$$= y^{iv} + (8 - 7x^2)y'' + (5x - 6x^3)y' + (4 - 8x^2)y$$

$$= D^4y + (8 - 7x^2)D^2y + (5x - 6x^3)Dy + (4 - 8x^2)y$$

$$= \left[D^4 + (8 - 7x^2)D^2 + (5x - 6x^3)D + (4 - 8x^2)\right]y$$

elde edilir

Ör: Aşağıdaki diferansiyel denklemleri operatör formda yazınız

a) $y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow D^2y - 3Dy + 2y = 0 \Rightarrow (D^2 - 3D + 2)y = 0$

b) $y''' + y'' - 2y = 0 \Rightarrow D^3y + D^2y - 2y = 0 \Rightarrow (D^3 + D^2 - 2)y = 0$

c) $2y''' + y' - 3y = 0 \Rightarrow 2D^3y + Dy - 3y = 0 \Rightarrow (2D^3 + D - 3)y = 0$

d) $y''' - 2y'' + 3y' - 2y = x^2 \Rightarrow D^3y - 2D^2y + 3Dy - 2y = x^2 \Rightarrow (D^3 - 2D^2 + 3D - 2)y = x^2$

Ör: Aşağıdaki diferansiyel operatörleri sadeleştiriniz.

a) $x^2(D^2-D+1)+x(xD^2+(x+1)D-2)$

$= \cancel{x^2D^2}-\cancel{x^2D}+x^2+\cancel{x^2D^2}+\cancel{x^2D}+xD-2x$

$=2x^2D^2+xD+x^2-2x$

b) $(D-1)(D^2+D+1) = D(D^2+D+1)-D^2-D-1$

$= D^3+\cancel{D^2}+\cancel{D}-\cancel{D^2}-\cancel{D}-1$

$= D^3-1$

c) $(xD-1)(y'+2y) = xD(y')+xD(2y)-y'-2y$

$= xy''+2xy'-y'-2y$

$= xy''+(2x-1)y'-2y$

$=(xD^2+(2x-1)D-2)y$ //

Ör: $(xD+x)(xD-1) \neq (xD-1)(xD+x)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$=(xD+x)(xy'-y)$

$=xD(xy')-xDy+x^2y'-xy$

$=x(y'+xy'')-xy'+x^2y'-xy$

$=\cancel{xy'}+x^2y''-\cancel{xy'}+x^2y'-xy$

$=x^2y''+x^2y'-xy$

$=(x^2D^2+x^2D-x)y$

$=L_1(y)$

$=(xD-1)(xy'+xy)$

$=(xD(xy')+xD(xy)-xy'-xy$

$=x(y'+xy'')+x(y+xy')-xy'-xy$

$=x^2y'+x^2y''+\cancel{xy}+\cancel{xy'}-\cancel{xy'}-\cancel{xy}$

$=x^2y''+x^2y'$

$=(x^2D^2+x^2D)y$

$=L_2(y)$

$\boxed{L_1 \neq L_2}$ oldu.

Örn: $(D+e^x)(e^xD+1) \neq (e^xD+1)\cdot(D+e^x)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$= (D+e^x)(e^xy'+y)$$
$$= D(e^xy') + Dy + e^{2x}y' + e^xy$$
$$= e^xy' + e^xy'' + y' + e^{2x}y' + e^xy$$
$$= e^xy'' + (e^x+e^{2x}+1)y' + e^xy$$
$$= \left[e^xD^2 + (e^x+e^{2x}+1)D + e^x\right]y$$
$$= L_1(y)$$

$$= (e^xD+1)(y'+e^xy)$$
$$= e^xD(y') + e^xD(e^xy) + y' + e^xy$$
$$= e^xy'' + e^x(e^xy+e^xy') + y' + e^xy$$
$$= e^xy'' + e^{2x}y + e^{2x}y' + y' + e^xy$$
$$= e^xy'' + [e^{2x}+1]y' + [e^{2x}+e^x]y$$
$$= \left[e^xD^2 + (e^{2x}+1)D + (e^{2x}+e^x)\right]y$$
$$= L_2(y)$$

$\boxed{L_1 \neq L_2}$ oldu.

= ÖDEV =

Aşağıdaki operatörler için L_1+L_2, $2L_1+5L_2$, $2xL_1$, $L_1\cdot L_2$ ve $L_2\cdot L_1$ işlemlerinin sonucunu bulunuz.

a) $L_1 = (D+1)$, $L_2 = (D-1)$

b) $L_1 = (D^2+D-2)$, $L_2 = (D-1)$

c) $L_1 = (x+1)D - 1$, $L_2 = D + x$

d) $L_1(y) = y'' - 3xy' + 2y$, $L_2(y) = y'' + 3xy' + 2x^2y$