şeklinde bir sisteme $n-$bilinmeyenli m tane denklemden oluşan ***lineer denklem sistemi*** *denir. Bu lineer denklem sistem kısaca*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \; 1 \leq i \leq m$$

şeklinde de ifade edilir. Eğer b_i değerlerinin hepsi sıfır ise sisteme ***homojen;*** *en az bir b_i değeri sıfırdan farklı ise sisteme* ***homojen olmayan lineer denklem*** *sistemi adı verilir.*

Tanım 2.3.5 *Bir lineer denklem sistemini sağlayan $x_1, x_2, ..., x_n$ sayıları bulunamıyorsa bu denklem sistemine* ***tutarsız denklem sistemi*** *denir. Aksi durumda, yani en az birer tane $x_1, x_2, ..., x_n$ sayıları bulunabiliyorsa bu denklem sistemine* ***tutarlı denklem sistemi*** *denir.*

Gösterim 2.3.6 *(2.4) ile verilen lineer denklem sistemi matrisler yardımıyla*

$$AX = B \tag{2.5}$$

şeklinde de ifade edilebilir, burada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

dir. Ayrıca A ya (2.4) lineer denklem sisteminin ***katsayılar matrisi*** *denir. (2.5) ifadesi açık bir şekilde*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.7

$$\left[A \vdots B\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

*matrisine (2.4) lineer denklem sisteminin **ilaveli katsayılar matrisi** adı verilir.*

Örnek 2.3.8

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 5$$
$$-2x_1 + x_3 = 7$$
$$3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 3$$

lineer denklem sistemi verilsin. Bunu matris formunda ifade edip ilaveli katsayılar matrisini bulalım:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3\times4}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_{4\times1}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}}_{B}$$

olduğundan ilaveli katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & \vdots & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -4 & \vdots & 3 \end{bmatrix}_{3\times5}$$

dir.

2.3.1 Katsayılar matrisinin tersi yardımıyla lineer denklem sisteminin çözümü

$AX = B$ lineer denklem sistemi verilsin. A regüler ise, yani A^{-1} mevcut ise

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

olmak üzere

$$X = A^{-1}B$$

çözümü mevcuttur.

Uyarı 2.3.9 *Bu metot katsayılar matrisinin regülerliği sayesinde uygulandığından, A matrisi karesel ve determinantı sıfırdan farklı olmak zorundadır.*

Örnek 2.3.10

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y - z &= -1 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini çözelim. Öncelikle $AX = B$ şeklinde matris formunda yazılacak olursa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olur. A matrisinin regülerliğini kontrol edebilmek için A nın determinantını hesaplayalım. Bunun için birinci satıra Laplace açılımı uygulanırsa:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

bulunur. Ayrıca A nın tersi için

$$adjA = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$A^{-1} = \frac{adj A}{\det A} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir, yani $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$ *dir.*

Örnek 2.3.11

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + 3y + 4z &= -2 \\ x + 5y + 7z &= 4 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini çözelim. Bir önceki örnekte olduğu gibi $AX = B$ *ve*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

dir. $\det A = 2 \neq 0$ *olduğundan* A^{-1} *mevcuttur ve*

$$adj A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$A^{-1} = \frac{adj A}{\det A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

olup

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

elde edilir, yani $x = -2$, $y = -10$, $z = 8$ *dir.*

2.3.2 Gauss ve Gauss-Jordan yoketme metotları

Bir $AX = B$ lineer denklem sistemi ve bu lineer denklem sisteminin ilaveli katsayılar matrisi $\left[A \vdots B\right]$ verilsin. Bahsi edilen metot aşağıdaki adımlar takip edilerek uygulanabilir:

1. $\left[A \vdots B\right]$ matrisine elemanter satır operasyonları uygulamak suretiyle elde edilen matris $\left[C \vdots D\right]$ olsun.

2. $\left[A \vdots B\right]$ ve $\left[C \vdots D\right]$ matrisleri denk olduğundan bunlara karşılık gelen $AX = B$ ve $CX = D$ lineer denklem sistemleri de birbirine denk olur.

3. Bu lineer denklem sistemleri aynı çözüme sahiptir.

Tanım 2.3.12 $\left[A \vdots B\right]$ *matrisinden* $\left[C \vdots D\right]$ *matrisini satırca eşolon formunda veren metoda* ***Gauss yoketme;*** $\left[C \vdots D\right]$ *matrisini satırca indirgenmiş eşolon formunda veren metoda ise* ***Gauss-Jordan yoketme metodu*** *denir.*

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Alman matematikçi. Gelmiş geçmiş en büyük matematikçilerden birisi!

Resim-6: Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Wilhelm Jordan (1842-1899). Alman mühendis.

Resim-7: Wilhelm Jordan (1842-1899)

Örnek 2.3.13

$$
\begin{aligned}
x + 2y - z &= -6 \\
3x - y + 2z &= 11 \\
2x + 5y - 4z &= -20
\end{aligned}
$$

lineer denklem sistemini Gauss-Jordan yoketme metodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\left[A \vdots B\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & \vdots & -6 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 11 \\ 2 & 5 & -4 & \vdots & -20 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_2:\alpha_3\to\alpha_3-2\alpha_1}{\overset{\varepsilon_1:\alpha_2\to\alpha_2-3\alpha_1}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & \vdots & -6 \\ 0 & -7 & 5 & \vdots & 29 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & \vdots & -8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\varepsilon_4:\alpha_1\to\alpha_1-2\alpha_3}{\overset{\varepsilon_3:\alpha_2\to\alpha_2+7\alpha_3}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & -9 & \vdots & -27 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & \vdots & -8 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_6:\alpha_3\leftrightarrow\alpha_2}{\overset{\varepsilon_5:\alpha_2\to\frac{-1}{9}\alpha_2}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & \vdots & 10 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & \vdots & -8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\varepsilon_8:\alpha_1\leftrightarrow\alpha_1-3\alpha_3}{\overset{\varepsilon_7:\alpha_2\to\alpha_2+2\alpha_3}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki verilen lineer denklem sisteme denk olan lineer denklem sistemi

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu ise sistemin çözümünü temsil eder.

Örnek 2.3.14

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 + 21x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 3 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini Gauss-Jordan yoketme metodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\left[A\vdots B\right]=\left[\begin{array}{cccc:c}2&1&6&2&1\\ \mathbf{1}&0&3&0&0\\ 7&1&21&2&1\\ 2&3&6&6&3\end{array}\right]\underset{\varepsilon_1:\alpha_1\to\alpha_2}{\approx}\left[\begin{array}{cccc:c}\mathbf{1}&0&3&0&0\\ 2&1&6&2&1\\ 7&1&21&2&1\\ 2&3&6&6&3\end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{\varepsilon_2:\alpha_2\to\alpha_2-2\alpha_1\\ \varepsilon_3:\alpha_3\to\alpha_3-7\alpha_1\\ \varepsilon_4:\alpha_4\to\alpha_4-2\alpha_1}}{\approx}\left[\begin{array}{cccc:c}\mathbf{1}&0&3&0&0\\ 0&\mathbf{1}&0&2&1\\ 0&1&0&2&1\\ 0&3&0&6&3\end{array}\right]\underset{\varepsilon_5:\alpha_3\to\alpha_3-\alpha_2}{\approx}\left[\begin{array}{cccc:c}\mathbf{1}&0&3&0&0\\ 0&\mathbf{1}&0&2&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&3&0&6&3\end{array}\right]$$

$$\underset{\varepsilon_6:\alpha_4\to\alpha_4-3\alpha_2}{\approx}\left[\begin{array}{cccc:c}\mathbf{1}&0&3&0&0\\ 0&\mathbf{1}&0&2&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

olduğundan verilen denklem sistemi,

$$x_1+0x_2+3x_3+0x_4=0$$
$$0x_1+x_2+0x_3+2x_4=1$$

denklem sistemine denktir. $x_3=k,\ x_4=t$ *denirse* x_1 *ve* x_2 *bilinmeyenleri* $x_1=-3k$ *ve* $x_2=1-2t$ *olur ki çözümler*

$$x_1=-3k,\ x_2=1-2t,\ x_3=k,\ x_4=t$$

şeklinde elde edilir.

Uyarı 2.3.15 *Yukarıda ifade edilen metot için eğer,*

1. $rankA\neq rank\left[A\vdots B\right]$ *ise sistemin çözümü yoktur.*

2. *$rank A = rank \left[A \vdots B\right]$ ise sistemin çözümü vardır. Bu durumda $rank A = r$ için*

(**a**) *$r = n$ ise tek çözüm,*

(**b**) *$r < n$ ise sonsuz çözüm vardır. Bu çözümler $n - r$ parametreye bağlı olarak bulunur.*

Yukarıdaki örneklere bakıldığında ilk örneğin katsayılar matrisinin rankı $r = 3$ olup $n = r$ olduğundan tek çözüm; ikinci örnekte ise $r = 2 < n$ olduğundan sonsuz çözüm vardır ve bu çözümler $n - r = 2$ parametreye bağlıdır.

Örnek 2.3.16

$$\begin{aligned} 2x + 5y - z &= 1 \\ x + 3y + 3z &= 0 \\ 4x + 11y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini Gauss yoketme metodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\left[A \vdots B\right] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & \vdots & 1 \\ \mathbf{1} & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 4 & 11 & 5 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_1:\alpha_1 \to \alpha_2}{\approx} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 5 & -1 & \vdots & 1 \\ 4 & 11 & 5 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\varepsilon_3:\alpha_3 \to \alpha_3 - 4\alpha_1}{\overset{\varepsilon_2:\alpha_2 \to \alpha_2 - 2\alpha_1}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & -7 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -7 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_5:\alpha_2 \to -\alpha_2}{\overset{\varepsilon_4:\alpha_3 \to \alpha_3 - \alpha_2}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 7 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

olup verilen lineer denklem sistemine denk olan sistem

$$\begin{aligned} x + 3y + 3z &= 0 \\ 0x + y + 7z &= -1 \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Son sistemde ilk iki denklemin çözümlerinin son denklemi sağladığı açıktır. Ayrıca $z = t$ denirse istenilen çözümler

$$x = 3 + 18t,\ \ y = -1 - 7t,\ \ z = t$$

şeklinde olur.

Örnek 2.3.17

$$\begin{aligned} x + y - z &= 5 \\ 2x + 3y + 2z &= -2 \\ 3x + 4y + z &= 2 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini Gauss yoketme motodu ile inceleyelim. Bunun için

$$\left[A \vdots B\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & \vdots & 5 \\ 2 & 3 & 2 & \vdots & -2 \\ 3 & 4 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_2:\alpha_3\to\alpha_3-3\alpha_1}{\overset{\varepsilon_1:\alpha_2\to\alpha_2-2\alpha_1}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & \vdots & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & \vdots & -12 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & -13 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\varepsilon_4:\alpha_3\to\alpha_3-\alpha_2}{\overset{\varepsilon_3:\alpha_1\to\alpha_1-\alpha_2}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -5 & \vdots & 17 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & \vdots & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

olur. O halde verilen lineer denklem sistemine denk olan lineer denklem sistem

$$\begin{aligned} x - 5z &= 17 \\ x + 4z &= -12 \\ 0x + 0y + 0z &= -1 \end{aligned}$$

şeklindedir. $0x + 0y + 0z \neq -1$ *olduğundan bu lineer denklem sistemi tutarsızdır ve çözümü yoktur.*

2.3.3 Homojen lineer denklem sistemi

Tanım 2.3.18 *A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $AX = 0$ şeklinde verilen bir homojen denklem sistemi daima $X = 0$ için sağlanır. $X = 0$ çözümüne sistemin* ***aşikar çözümü*** *ve $X \neq 0$ çözümlerine de sistemin* ***aşikar olmayan çözümü*** *denir.*

Örnek 2.3.19

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

homojen lineer denklem sistemi verilsin. Bu lineer denklem sistemini Gauss-Jordan metodu ile irdeleyelim. Buna göre

$$\left[A\vdots 0\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_2:\alpha_2\to\alpha_2-\alpha_3}{\overset{\varepsilon_1:\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\varepsilon_4:\alpha_3\to\alpha_3-\alpha_1}{\overset{\varepsilon_3:\alpha_2\to-1\alpha_2}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_5:\alpha_3\to\alpha_3-2\alpha_2}{\approx} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere verilen sisteme denk olan sistem

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 0$$
$$1x_2 + (-1)\,x_4 = 0$$
$$1x_3 + 1x_4 = 0$$

olur ki çözümler $x_1 = r$, $x_2 = -r$, $x_3 = r$, $x_4 = -r$ şeklinde elde edilir.

Teorem 2.3.20 *A, $m \times n$ tipinde bir matris ve $m < n$ olsun. Bu taktirde $AX = 0$ homojen sisteminin aşikar olmayan bir çözümü vardır.*

Örnek 2.3.21 *Yukarıdaki örnekte sistemin katsayılar matrisi*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup satır sayısı sütun sayısından küçük olduğundan aşikar olmayan bir çözüme sahiptir.

Uyarı 2.3.22 *Daima* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \vdots 0 \end{bmatrix} = r$ *olduğundan homojen lineer denklem sisteminin çözümü vardır. Eğer* $r = n$ *ise sistemin tek çözümü (sıfır çözümü) ve* $r < n$ *ise sistemin* $n - r$ *parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.*

Gerçekten de yukarıdaki örnekte katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup, rankı 3 olduğundan $n - r = 4 - 3 = 1$ parametereye bağlı bir çözüm vardır.

Teorem 2.3.23 A, $n \times n$ *tipinde bir matris ve* $AX = 0$ *homojen lineer denklem sisteminin sadece* $X = 0$ *aşikar çözümü varsa* A *matrisi* I_n *birim matrisine satırca denktir.*

Bu teorem aşağıdaki örnek yardımıyla daha da netleşebilir:

Örnek 2.3.24 *Sadece aşikar çözüme sahip olan*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin I_3 *birim matrisine satırca denk olduğunu gösterelim.*

$$\begin{bmatrix} A \vdots 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \underset{\varepsilon_2 : \alpha_2 \to -\alpha_2}{\overset{\varepsilon_1 : \alpha_2 \leftrightarrow \alpha_2 - \alpha_1}{\approx}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon_3 : \alpha_3 \leftrightarrow \alpha_3 - \alpha_1}{\approx} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_4 : \alpha_3 \leftrightarrow \alpha_3 - 2\alpha_2}{\approx} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.3.25 *Eğer A, $m \times n$ tipinde bir matris ve $AX = 0$ sistemi sadece aşikar çözüme sahip ise $m \geq n$ dir.*

2.3.4 Cramer denklem sistemleri

Tanım 2.3.26 *A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $AX = B$ lineer denklem sistemi verilsin. Eğer $m = n$ ve $\det A \neq 0$ ise $AX = B$ lineer denklem sistemine* ***Cramer denklem sistemi*** *adı verilir.*

Örnek 2.3.27

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 6 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri için $A_1X = B$ sistemi Cramer denklem sistemi iken, $A_2X = B$ ve $A_3X = B$ Cramer olmayan denklem sistemleridir.

Teorem 2.3.28 (Cramer Yöntemi) *$AX = B$ veya daha açık şekilde*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

denklem sistemi verilsin. $\det A \neq 0$ *ise $AX = B$ lineer denklem sisteminin bir tek $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ çözümü vardır ve bu çözüm*

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, ..., \triangle_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\det A}, x_2 = \frac{\triangle_2}{\det A}, ..., x_n = \frac{\triangle_n}{\det A}$$

dir.

Gabriel Cramer (1704-1752). İsviçreli matematikçi.

Resim-8: Gabriel Cramer (1704-1752)

Örnek 2.3.29

$$2x + y = 5$$

$$-x + 3y = 1$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulalım. Sistemin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det A = 7 \neq 0$$

olduğundan Cramer yöntemi ile denklem sisteminin tek bir çözümü vardır:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = 2, \ \ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = 1$$

elde edilir.

Örnek 2.3.30

$$\begin{aligned} -2x+3y-z&=1\\ x+2y-z&=4\\ -2x-y+z&=-3 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulalım. Sistemin katsayılar matrisi

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\det A=-2\neq 0$ *olduğundan Cramer yöntemi ile denklem sisteminin tek bir çözümü vardır:*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1\\ 4 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A}=2,\ y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\det A}=3,\ z=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\det A}=4$$

bulunur.

Örnek 2.3.31

$$\begin{aligned} x-3y+4z&=-4\\ 2x+y&=7\\ 3x-y+z&=7 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulalım. Sistemin katsayılar matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\det A = -13 \neq 0$ *olduğundan Cramer yöntemi ile denklem sisteminin tek bir çözümü vardır:*

$$x = \frac{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = 3, \quad y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = 1, \quad z = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}}{\det A} = -1$$

bulunur.

2.3.5 Bölüm sonu alıştırmaları

1. Aşağıdaki denklemlerin çözümlerini belirtiniz:

(**a**) $3x + 4y = 2$,

(**b**) $2x + y + 4z = 8$,

(**c**) $-2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$.

2. Aşağıdaki denklem sistemlerini Gauss yoketme yöntemiyle çözünüz:

(**a**)

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 2 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned},$$

(**b**)

$$\begin{aligned} 5x + 15y &= 2 \\ 7x + 21y &= 1 \end{aligned},$$

(**c**)

$$\begin{aligned} -4x + 12y &= -8 \\ 6x - 18y &= 12 \end{aligned},$$

(**d**)

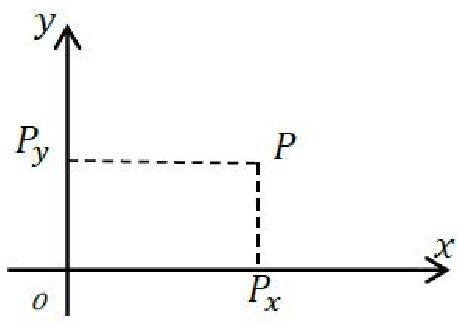
$$\begin{aligned} 2x + 5y - 4z &= 0 \\ -x - 3y + z &= 6 \end{aligned},$$

Bölüm 3

Vektör Uzayları

3.1 Düzlemde vektörler

$\mathbb{R}$ ile reel sayılar kümesi gösterilsin. Bu küme bir doğru ile birebir eşlenebilir. Düzlemin bir O noktasında, Şekil-1 deki gibi, dik olarak kesişen iki doğru reel sayılarla eşlenmiş olsun.



Şekil-1: Koordinat eksenleri

Dik koordinat eksenleri denilen bu doğruları x ve y ile gösterelim ve $\mathbb{R}$ nin kendisiyle kartezyen çarpımından meydana gelen

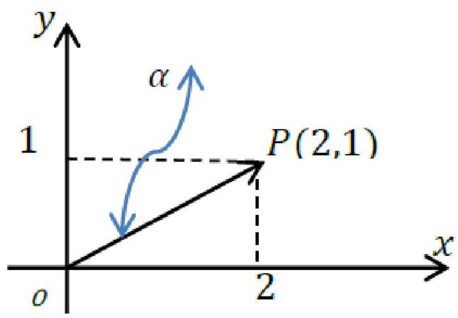
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

kümesini ele alalım. Buna göre, düzlemde seçilen dik koordinat eksenlerinden yararlanarak düzlem ve $\mathbb{R}^2$ arasında birebir bir eşleme kurulabilir:

Düzlemde bir P noktası verildiğinde; P den geçen ve y doğrusuna paralel olan doğrunun x eksenini kestiği nokta P_x ile ve benzer şekilde P den geçen ve x doğrusuna paralel olan doğrunun y eksenini kestiği nokta P_y ile gösterilsin. Böylece düzlemin her noktasına bir (P_x, P_y) ikilisi karşılık getirilmiş olur.

$\mathbb{R}^2$ kümesine düzlemin yanı sıra 2-boyutlu uzay adı da verilmektedir. Burada ismi geçen boyut kavramı daha sonra izah edilecektir.

Fizikte, vektörlerden hem büyüklük hem de yöne sahip olan nicelikler olarak bahsedilir. Ancak Matematikte, bu kavramlar sayılar ve indisler yardımıyla ifade edilir. Daha açık bir ifadeyle $\mathbb{R}^2$ de bir $\alpha = (a_1, a_2)$ ikilisine *vektör* adı verilir.



Şekil-2: Düzlemde vektörler

Burada α vektörüne P noktasının *konum vektörü* de denilmektedir.

Tanım 3.1.1 $\mathbb{R}^2$ *düzleminde vektörler arasında* ***toplama ve skalerle çarpma*** *denilen işlemler aşağıdaki gibi ifade edilir:*

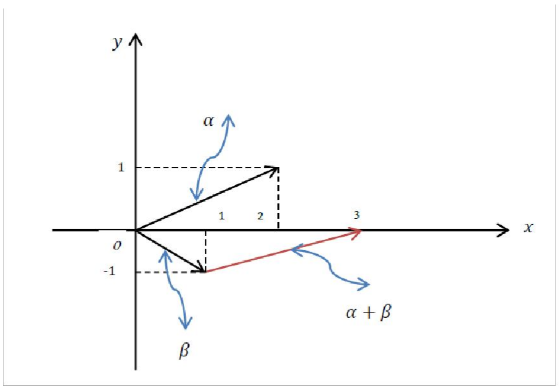
- $\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha = (a_1, a_2)\,,\ \beta = (b_1, b_2)\,,$

$$\alpha \oplus \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\,.$$

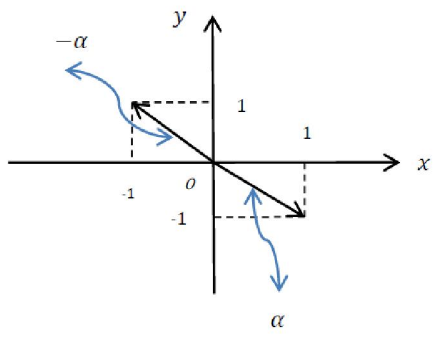
- $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha = (a_1, a_2)\,,\ c \in \mathbb{R}, c.\alpha = (ca_1, ca_2)\,.$

Bundan sonra vektörler için toplama skalerle çarpma işlemleri basitçe +

ve . ile gösterilecektir



Şekil-3: Vektörlerde toplama



Şekil-4: Skalerle çarpma

Tanım 3.1.2 *Düzlemde* $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$ *vektörlerinin* ***eşitliği***

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow a_1 = b_1 \text{ ve } a_2 = b_2$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.3 $\mathbb{R}^2$ *düzleminde bir* $\alpha = (a_1, a_2)$ *vektörünün* ***uzunluğu***

$$\|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

ile; $\alpha = (a_1, a_2)$ *ve* $\beta = (b_1, b_2)$ *vektörleri arasındaki* ***uzunluk*** *ise*

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

pozitif reel sayıları ile ifade edilir.

Böylece $\mathbb{R}^2$ düzleminde vektörler için tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

V1 *Değişme özelliği:* $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

V2 *Birleşme özelliği:* $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;

V3 *Birim eleman:* $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, $0 \in \mathbb{R}^2$;

V4 *Ters eleman*: $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$;

V5 *Dağılma özelliği*: $c.(\alpha+\beta)=c.\alpha+c.\beta,\ c\in\mathbb{R}$;

V6 *Dağılma özelliği:* $(c+d).\alpha=c.\alpha+d.\alpha,\ c,d\in\mathbb{R}$;

V7 *Birleşme özelliği:* $c.(d.\alpha)=cd.\alpha$;

V8 *Birim eleman:* $1.\alpha=\alpha$.

Düzlemde vektörler kavramı sonraki bölümlerde vektör uzaylarına genelleştirilecektir.

3.1.1 Bölüm sonu alıştırmaları

1. $\alpha=(2,0)$, $\beta=(-3,4)$ ve $\gamma=(3,-2)$ vektörler için $\alpha-\beta-\gamma$ vektörünün bileşenlerini hesaplayınız.

2. $\alpha=(2^{m+4},3)$, $\beta=\left(\frac{1}{4},27^{m}\right)$ ve $\alpha=\beta$ ise $\frac{m}{n}$ oranı kaçtır?

3. $\alpha=(2,5)$, $\beta=(-3,-4)$ ve $\gamma=(-5,-2)$ vektörler için eğer

$$\gamma=c.\alpha+d.\beta,\ \ c,d\in\mathbb{R},$$

ise $c+d$ toplamı kaçtır?

4. $\alpha=(3,4)$ ve $\beta=(-1,m)$ vektörleri için eğer

$$c.\alpha+d.\beta=0,\ \ c,d\in\mathbb{R},$$

ise m kaçtır?

5. $\alpha=(4,2)$ ve $\beta=(1,-2)$ vektörleri için $d(\alpha,\beta)$ uzunluğunu hesaplayınız.

3.2 Reel vektör uzayları

Tanım 3.2.1 $\mathbb{V}\neq\emptyset$ *boştan farklı bir küme olsun. Eğer* $\mathbb{V}$ *üzerinde*

$$+:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{V},\ \ .:\mathbb{R}\times\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{V}$$

toplama ve skalerle çarpma işlemleri yukarıdaki V1-V8 özelliklerini sağlarsa, $\mathbb{V}$ *kümesine bir* ***reel vektör uzayı*** *ve* $\mathbb{V}$ *nin her bir elemanına da* ***vektör*** *adı verilir.*

Örnek 3.2.2 $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi üzerinde bilinen toplama* $+$ *ve çarpma* $.$ *işlemleri ile birlikte* $(\mathbb{R},+,.)$ *üçlüsü bir reel vektör uzayıdır. Gerçekten de bu işlemlerin V1-V8 özelliklerini sağladığı açıktır.*

Örnek 3.2.3 $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times ... \times \mathbb{R}}_{n-\ tane} = \{(x_1,...,x_n) : x_1,...,x_n \in \mathbb{R}\}$ *kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan toplama* $+$ *ve çarpma* $.$ *işlemleri ile birlikte* $(\mathbb{R},+,.)$ *üçlüsü bir reel vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına* ***standart reel vektör uzayı*** *denir.* $\alpha = (a_1,...,a_n)$, $\beta = (\beta_1,...,\beta_n) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ *için*

$$\alpha + \beta = (a_1 + a_2, ..., \alpha_n + \beta_n)\,, \ c.\alpha = (c\alpha_1, ..., c\alpha_n)\,.$$

Örnek 3.2.4 $\mathbb{P}_n = \{derecesi \ \leq n \ olan \ polinomlar\}$ *kümesi üzerinde aşağıda gibi tanımlanan polinomların toplamı* $+$ *ve skalerle çarpımı* $.$ *işlemleri birlikte* $(\mathbb{P}_n,+,.)$ *üçlüsü bir reel vektör uzayıdır:* $\mathbb{P}_n$ *de* $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$ *ve* $c \in \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)\,x + ... + (a_n + b_n)\,x^n, \\ c.p(x) = ca_0 + ca_1x + ... + ca_nx^n. \end{cases}$$

Örnek 3.2.5 $\mathbb{S} = \left\{ f|\, f : \mathbb{R}^n \overset{sürekli}{\longrightarrow} \mathbb{R} \right\}$ *reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi üzerinde aşağıdaki gibi verilen fonksiyonların toplamı* $+$ *ve skalerle çarpımı* $.$ *işlemleri ile birlikte* $(\mathbb{S},+,.)$ *üçlüsü bir vektör uzayıdır:*

$$\begin{cases} (f+g)\,(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_n) + g(x_1,...,x_n)\,, \\ (c.f)\,(x_1,...,x_n) = cf(x_1,...,x_n)\,, \end{cases}$$

Örnek 3.2.6 $\mathbb{R}_n^m$, $m \times n-$ *tipindeki matrislerin kümesi üzerinde aşağıdaki gibi verilen matrislerin toplamı* $+$ *ve skalerle çarpımı* $.$ *işlemleri ile birlikte* $(\mathbb{R}_n^m,+,.)$ *üçlüsü bir reel vektör uzayıdır:* $A = (a_{ij})\,, B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_n^m$, $c \in \mathbb{R}$,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})\,, \ c.A = (ca_{ij})\,.$$

Örnek 3.2.7 $\mathbb{Z}$ *tam sayılar kümesi bir reel vektör uzayı değildir. Çünkü her* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *ve* $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ *için* $\sqrt{2}.\alpha \notin \mathbb{Z}$ *olduğundan skalerle çarpım işlemi tanımlı değildir.*

Uyarı 3.2.8 $\mathbb{R}^n$ *uzayında vektörler* $\alpha = (a_1, ..., a_n)$ *gösteriminin yanı sıra*

$$\alpha = (a_1, ..., a_n)^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

şeklinde bir sütun matrisi olarak da ifade edilir.

Tanım 3.2.9 $\mathbb{V}$ *vektör uzayı ve üzerinde aşağıdaki işlem tanımlansın:*

$$\odot : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}, \; \alpha \odot \beta.$$

Eğer her $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{V}$ *ve* $c, d \in \mathbb{R}$ *için*

1. $(c.\alpha + d.\beta) \odot \gamma = c.\alpha \odot \gamma + d.\beta \odot \gamma$

2. $\alpha \odot (c.\beta + d.\gamma) = c.\alpha \odot \beta + d.\alpha \odot \gamma$
   özellikleri sağlanırsa $\mathbb{V}$ *vektör uzayına bir* ***cebir*** *adı verilir.*

Örnek 3.2.10 $n \times n$ *tipinde karesel matrislerin kümesi matris toplamı ve skalerle çarpımı işlemlerinin yanı sıra* ***matris çarpımı*** *ile birlikte bir* ***cebirdir****. Gerçekten de matris çarpımı işlemi yukarıdaki 1 ve 2 nolu özellikleri sağlar. (Bakınız Teorem 2.1.27, (2) ve (3).)*

3.2.1 Altuzaylar

Tanım 3.2.11 $\mathbb{V}$ *bir vektör uzayı ve* $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ *olsun. Eğer* $\mathbb{W}, \mathbb{V}$ *de tanımlanan işlemlere göre (V1)-(V8) özelliklerini sağlarsa* $\mathbb{W}$ *ya* $\mathbb{V}$ *nin bir* ***alt vektör uzayı*** *ya da kısaca* ***altuzayı*** *denir.*

Örnek 3.2.12 *Her vektör uzayının en az iki altuzayı vardır; kendisi ve* $\{0\}$ *(Toplama işleminin birimi). Bu uzaylara* ***aşikar altuzaylar*** *denir.*

Örnek 3.2.13 $\mathbb{P}$ *ile bütün polinomların kümesi gösterilsin. Buna göre*

$$\mathbb{P}_2 = \{derecesi \leq 2 \text{ } olan \text{ } polinomlar\}$$

kümesi $\mathbb{P}$ *nin bir altuzayı olur.*

Örnek 3.2.14 $n \geq 1$ *olmak üzere* $\mathbb{R}^{n-1}$ *uzayı* $\mathbb{R}^n$ *nin bir altuzayıdır.*

Teorem 3.2.15 $\mathbb{V}$ *bir vektör uzayı ve* $\mathbb{W} \neq \emptyset$, $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ *olsun.* $\mathbb{W}$ *nın* $\mathbb{V}$ *nin bir altuzayı olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerek ve yeterdir:*

1. $\alpha, \beta \in \mathbb{W} \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{W}$

2. $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{W} \Longrightarrow c.\alpha \in \mathbb{W}$.

Örnek 3.2.16 *Aşağıda verilen kümenin* $\mathbb{R}^3$ *ün bir altuzayı olduğunu gösterelim:*

$$\mathbb{W} = \{(a_1, a_2, a_1 + a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

$\alpha = (a_1, a_2, a_1 + a_2)$, $\beta = (b_1, b_2, b_1 + b_2)$ *olmak üzere*

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2))$$

olup $\alpha + \beta \in \mathbb{W}$ *dir. Ayrıca her* $c \in \mathbb{R}$ *için*

$$c.\alpha = (ca_1, ca_2, ca_1 + ca_2)$$

$c.\alpha \in \mathbb{W}$ *olur ki bu* $\mathbb{W}$ *nın* $\mathbb{R}^3$ *nın bir altuzayı olduğunu gösterir.*

Örnek 3.2.17 A, $m \times n$ *tipinde bir matris olsun.* $AX = 0$ *homojen sisteminin bütün çözümlerinin bir altuzay olduğunu gösterelim: Bütün çözümler*

$$(x_1, ..., x_n)^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde olup $\mathbb{R}^n$ *de bir vektör ile temsil edilirler. O halde bu çözümlerin kümesi* $\mathbb{R}^n$ *nın bir altkümesidir. Eğer* X_1 *ve* X_2 *iki çözümse*

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$$

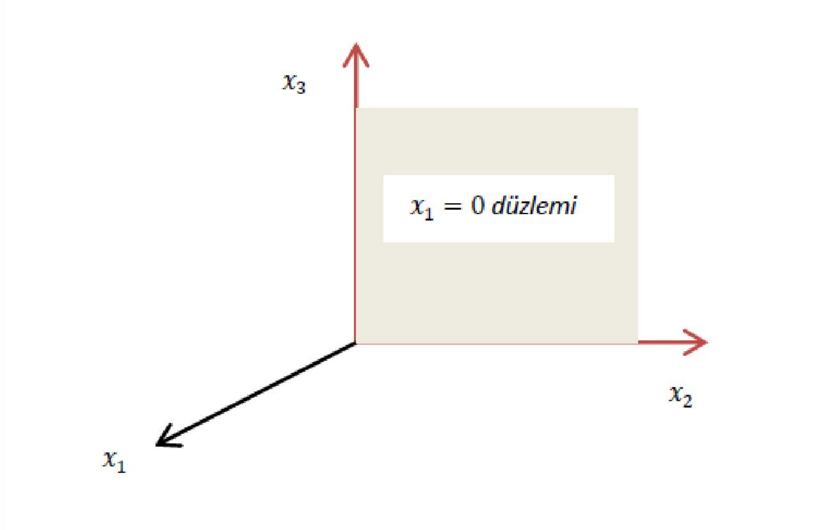
olup $X_1 + X_2$ *de bir çözüm olur. Ayrıca*

$$A(cX_1) = c(AX_1) = c.0 = 0$$

olduğundan çözümler kümesi $\mathbb{R}^n$ *nın bir altuzayıdır. Bu uzaya homojen sistemin* ***çözüm uzayı*** *denir.*

Örnek 3.2.18 *$AX = B$, $B \neq 0$, sisteminin çözümlerinin $\mathbb{R}^n$ nin bir altuzayı olmadığını bir alıştırma olarak gösteriniz.*

Örnek 3.2.19 *$\mathbb{R}^3$ uzayında $x_1 = 0$ düzleminin bir altuzay olduğunu gösterelim:*



Şekil-5: $x_1 = 0$ altuzayı.

$x_1 = 0$ düzlemi $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ şeklinde ifade edilebilir. Bu düzlemde bulunan her α, β vektörleri için

$$\alpha = (0, y_1, z_1), \beta = (0, y_2, z_2) \Longrightarrow \alpha + \beta = (0, y_1 + z_1, y_2 + z_2)$$

ve ayrıca $c \in \mathbb{R}$ için

$$c.\alpha = (0, cy_1, cz_1)$$

olduğundan $x_1 = 0$ düzlemi $\mathbb{R}^3$ nın bir altuzayıdır.

Örnek 3.2.20 *$\mathbb{V}$ bir reel vektör uzayı olsun. $\mathbb{V}$ içinde sabit α_1, α_2 vektörleri için*

$$\mathbb{S} = \{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

kümesinin $\mathbb{V}$ nin bir altuzayı olduğunu gösterelim. Her $\beta_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ ve $\beta_2 = d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2$ için

$$\beta_1 + \beta_2 = (c_1 + d_1)\alpha_1 + (c_2 + d_2)\alpha_2 \in \mathbb{S}$$

ve $d.\beta_1 = (dc_1)\alpha_1 + (dc_2)\alpha_2 \in \mathbb{S}$ olup $\mathbb{S}$ kümesi $\mathbb{V}$ nin altuzayı olur.

Bu kavram aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

Tanım 3.2.21 *$\mathbb{V}$ bir reel vektör uzayı ve $\mathbb{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset V$ ise*

$$Span(\mathbb{S}) = \{c_1.\alpha_1 + ... + c_k.\alpha_k : c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}\}$$

*kümesi $\mathbb{V}$ nin bir altuzayıdır (gösteriniz). Bu uzaya $\mathbb{S}$ nın **ürettiği (gerdiği) uzay** adı verilir.*

3.2.2 Lineer bağımlılık-bağımsızlık

Tanım 3.2.22 *$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı ve $\mathbb{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subset \mathbb{V}$ olsun. Eğer bir $\alpha \in \mathbb{V}$ vektörü $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$ için*

$$\alpha = c_1.\alpha_1 + ... + c_k.\alpha_k$$

*şeklinde yazılabiliyorsa, α ya $\mathbb{S}$ deki vektörlerin bir **lineer kombinasyonu (doğrusal birleşimi)** denir.*

Örnek 3.2.23 $\mathbb{R}^3$ *de $\alpha = (2, 1, 5)$ vektörü $\alpha_1 = (1, 2, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0, 2)$ ve $\alpha_3 = (1, 1, 0)$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur. Gerçekten*

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

denirse

$$c_1 + c_2 + c_3 = 2,\ 2c_1 + c_3 = 1,\ c_1 + 2c_2 = 5$$

sistemi çözüldükten sonra $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = -1$ bulunur ki bu

$$\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$$

olması demektir.

Örnek 3.2.24 $\mathbb{R}^3$ *de $\alpha_1 = (2, 1, 2)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)$, $\alpha_3 = (2, 1, 0)$ ve $\alpha_4 = (1, 0, -1)$ verilsin. $\alpha = (0, -2, 4)$ vektörünün $Span\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesinde olup olmadığını inceleyelim: eğer*

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4,\ c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R},$$

yazılırsa, aşağıdaki sistem elde edilir:

$$2c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 = 0,\ c_1 + c_3 = -2,\ 2c_1 + c_2 - c_4 = 4.$$

Buradan $c_1 = c_4$, $c_2 = 4 - c_4$, $c_3 = -2 - c_4$, olup sonsuz miktarda $c_1, ..., c_4$ bulunur ki $\alpha \in Span\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olması demektir.

Tanım 3.2.25 *$\mathbb{V}$ bir reel vektör uzayı ve $\mathbb{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subset V$ olsun. Eğer $\mathbb{V}$ deki her bir vektör $\mathbb{S}$ nin elemanlarının bir lineer kombinasyonu ise $\mathbb{S}$ kümesi $\mathbb{V}$ yi* ***üretir (gerer)*** *ya da $\mathbb{V}$ uzayı $\mathbb{S}$ tarafından* ***üretilir (gerilir)*** *denir.*

Örnek 3.2.26 *$\mathbb{R}^3$ uzayında $\alpha_1 = (1, 2, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0, 2)$, $\alpha_3 = (1, 1, 0)$ verilsin. $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ uzayını ürettiğini gösterelim: $\alpha = (x, y, z)$ ve $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$ olsun. Her x, y, z için c_1, c_2, c_3 sabitlerinin bulunabileceğini göstereceğiz. Bunun için*

$$c_1 = \frac{-2x + 2y + z}{3},\ c_1 = \frac{x - y + z}{3},\ c_1 = \frac{4x - y - 2z}{3}$$

bulunur ki $Span\,\{\mathbb{S}\} = \mathbb{R}^3$ olması demektir.

Örnek 3.2.27 *$\mathbb{P}_2$ uzayında $\alpha_1 = t^2+2t+1$ ve $\alpha_2 = t^2+2$ ise $Span\,\{\alpha_1, \alpha_2\} = \mathbb{P}_2$ olduğunu gösterelim, yani $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ olacak şekilde c_1, c_2 sabitlerini bulmalıyız. Bunun için*

$$at^2 + bt + c = c_1\left(t^2 + 2t + 1\right) + c_2\left(t^2 + 2\right)$$

eşitliğinden

$$c_1 + c_2 = a,\ 2c_1 = b,\ c_1 + 2c_2 = c$$

sistemi bulunur. İlaveli katsayılar matrisi yazıp indirgenmiş forma getirilirse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \vdots & 2a - c \\ 0 & \mathbf{1} & \vdots & c - a \\ 0 & 0 & \vdots & b - 4a + 2c \end{bmatrix}$$

olur. Eğer $b - 4a + 2c \neq 0$ ise çözüm yoktur. Bu eşitsizliği sağlayan a, b, c sayıları bulunabileceğinden $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi V yi geremez.

Tanım 3.2.28 *$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı ve $\mathbb{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subset \mathbb{V}$ olsun. Eğer*

$$c_1\alpha_1 + ... + c_k\alpha_k = 0$$

iken $c_1 = ... = c_k = 0$ oluyorsa $\mathbb{S}$ kümesine ***lineer bağımsız;*** *aksi halde,yani yukarıdaki eşitlik sağlanırken $c_1, ..., c_k$ lerden en az biri sıfırdan farklı ise $\mathbb{S}$ kümesine* ***lineer bağımlı*** *adı verilir.*

Örnek 3.2.29 $\mathbb{R}^4$ *uzayında* $\alpha_1 = (1,0,1,2)$, $\alpha_2 = (0,1,1,2)$, $\alpha_3 = (1,1,1,3)$ *verilsin.* $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ *kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. Buna göre*

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$$

olmak üzere

$$c_1 + c_3 = 0,\ c_2 + c_3 = 0,\ c_1 + c_2 + c_3 = 0,\ 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

sistemin çözümünden $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ *elde edilir ki* $\mathbb{S}$ *lineer bağımsız olur.*

Örnek 3.2.30 $\mathbb{R}^3$ *de* $\alpha_1 = (1,2,-1)$, $\alpha_2 = (1,-2,1)$, $\alpha_3 = (-3,2,1)$ *ve* $\alpha_4 = (2,0,0)$ *verilsin.* $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ *kümesi lineer bağımlıdır. Gerçekten,*

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = 0$$

iken

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 - 3c_3 + 2c_4 &= 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + 2c_3 &= 0 \\ -c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin aşikar olmayan bir çözümü vardır. Örneğin $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$ *ve* $c_4 = 0$ *bir çözüm olup* $\mathbb{S}$ *nin lineer bağımlı olması için yeterlidir.*

Uyarı 3.2.31 $\mathbb{R}^n$ *de verilen* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *vektörlerin lineer bağımlı olup olmadığı determinant fonksiyonu yardımıyla kolayca incelenebilir. Eğer*

$$\det(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$$

ise bunlar lineer bağımlı, aksi durumda ise lineer bağımsızdır.

Uyarı 3.2.32 *Bir reel vektör uzayında* $\mathbb{S} = \{0\}$ *kümesi lineer bağımldır. Çünkü sıfırdan farklı her* c *skaleri için* $c.0 = 0$ *dir.*

Teorem 3.2.33 $\mathbb{S}_1$ *ve* $\mathbb{S}_2$ *bir reel vektör uzayının sonlu altkümeleri ve* $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}_2$ *olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur:*

1. $\mathbb{S}_1$ *lineer bağımlı ise* $\mathbb{S}_2$ *de lineer bağımlıdır.*

2. $\mathbb{S}_2$ *lineer bağımsız ise* $\mathbb{S}_1$ *de lineer bağımsızdır.*

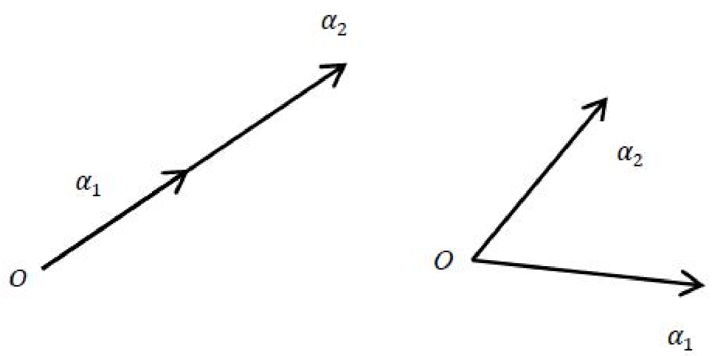
Uyarı 3.2.34 *Yukarıdaki uyarı ve teorem bize* 0 *(sıfır) ı içeren her kümenin lineer bağımlı olduğunu ifade eder.*

Uyarı 3.2.35 $\mathbb{R}^2$ *de lineer bağımlılık aşağıdaki gibi yorumlanabilir:* $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ $\mathbb{R}^2$ *de lineer bağımlı ise* $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ *dır ve* c_1, c_2 *den en az biri sıfırdan farklıdır. Genelliği bozmadan* $c_1 \neq 0$ *kabul edilirse*

$$\alpha_1 = -\frac{c_2}{c_1}\alpha_2$$

olur. Bu birinin diğerinin bir katı olması anlamına gelir. Yani

$$\{\alpha_1, \alpha_2\} \text{ lineer bağımlıdır} \Leftrightarrow \text{Biri diğerinin bir katıdır} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{Merkezden geçen aynı doğru üzerindedir.}$$



Şekil-6: Lineer bağımlı ve lineer bağımsız vektörler

Uyarı 3.2.36 *Benzer bir sonuç* $\mathbb{R}^3$ *için de geçerlidir:* $\mathbb{R}^3$ *uzayında*

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \text{ lineer bağımlıdır} \Leftrightarrow \text{Bu üç vektör merkezden geçen aynı}$$
$$\text{düzlem içindedir.}$$

(Gösteriniz.)

Teorem 3.2.37 $\mathbb{V}$ *bir vektör uzayı ve* $\mathbb{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathbb{V}$ *olsun.* $\mathbb{S}$ *nin lineer bağımlı olması için bir* α_j *vektörünün kendinden önce gelen vektörlerin bir lineer kombinasyonu olması gerek ve yeterdir.*

Sonuç 3.2.38 *$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı ve $\mathbb{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathbb{V}$olsun. $\mathbb{S}$ nin lineer bağımlı olması için $\mathbb{S}$ deki bir vektörün diğerlerinin lineer kombinasyonu olması gerek ve yeterdir.*

Sonuç 3.2.39 *$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı ve $\mathbb{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ $\mathbb{V}$ yi üretsin. α_j kendinden önce gelen vektörlerin bir lineer kombinasyonu olsun. O zaman*

$$\tilde{\mathbb{S}} = \mathbb{S} - \{\alpha_j\} = \{\alpha_1, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_n\}$$

kümesi de $\mathbb{V}$ yi gerer.

Örnek 3.2.40 *$\mathbb{R}^4$ de $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (0, 1, 1, 0)$ ve $\alpha_4 = (2, 1, 1, 0)$ vektörleri için $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olsun. $\mathbb{W} = Span(\mathbb{S})$ diyelim. $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$ olduğundan, $\tilde{\mathbb{S}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ denirse $\mathbb{W} = Span\left(\tilde{\mathbb{S}}\right)$ olur ki bu $\mathbb{W}$ uzayını üretmek için α_4 elemanına ihtiyaç olmadığını ifade eder.*

3.2.3 Baz ve boyut

Tanım 3.2.41 *$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı ve $\mathbb{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \mathbb{V}$ olsun. Eğer $\mathbb{S}$ lineer bağımsız ve $Span(\mathbb{S}) = \mathbb{V}$ ise $\mathbb{S}$ ye $\mathbb{V}$ nin bir **bazı** denir.*

Örnek 3.2.42 *$\mathbb{R}^3$ uzayında $\mathbb{S} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ verilsin. $\mathbb{S}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir bazıdır (gösteriniz) ve bu baza $\mathbb{R}^3$ ün **standart bazı** denir. Daha genel olarak $\mathbb{R}^n$ uzayının standart bazı*

$$\xi_1 = (1, ..., 0), ..., \xi_n = (0, ..., 1)$$

şeklindedir. $\mathbb{R}^3$ nın standart baz elemanları $\xi_1 = (1, 0, 0), \xi_2 = (0, 1, 0), \xi_3 = (0, 0, 1)$ ile gösterilir ve $\mathbb{R}^3$ deki her bir $\alpha = (a, b, c)$ vektörü

$$\alpha = a.\xi_1 + b.\xi_2 + c.\xi_3$$

şeklinde yazılır.

Örnek 3.2.43 *$\mathbb{S} = \{t^2 + 1, t - 1, 2t + 2\}$ kümesinin $\mathbb{P}_2$ nin bir bazı olduğunu gösterelim. $\mathbb{S}$ nin lineer bağımsız ve $Span(\mathbb{S}) = \mathbb{P}_2$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$c_1\left(t^2 + 1\right) + c_2(t - 1) + c_3(2t + 2) = 0$$

$c_1 = 0,\ c_2 + 2c_3 = 0$ ve $-c_2 + 2c_3 = 0$ olup $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ve $\mathbb{S}$ lineer bağımsızdır. Ayrıca Span $(\mathbb{S}) = \mathbb{P}_2$ için

$$at^2 + bt + c = c_1\left(t^2 + 1\right) + c_2\left(t - 1\right) + c_3\left(2t + 2\right)$$

olacak şekilde her a, b, c için c_1, c_2, c_3 skalerlerinin bulunabileceğini göstermeliyiz. Yukarıdaki eşitlikten

$$c_1 = a,\ c_2 = \frac{a + b - c}{2},\ c_3 = \frac{c + b - a}{2}$$

olur ki bu Span $(\mathbb{S}) = \mathbb{P}_2$ olduğunu gösterir.

Örnek 3.2.44 $\mathbb{R}^4$ *de*

$$\mathbb{S} = \{\alpha_1 = (1,0,1,0), \alpha_2 = (0,1,-1,2), \alpha_3 = (0,2,2,1), \alpha_4 = (1,0,0,1)\}$$

nin bir baz olduğunu bir alıştırma olarak gösteriniz.

Teorem 3.2.45 *$\mathbb{V}$ reel vektör uzayının bir bazı $\mathbb{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ olsun. O zaman $\mathbb{V}$ deki her bir eleman $\mathbb{S}$ deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu olacak şekilde tek türlü olarak yazılabilir.*

Tanım 3.2.46 *Bir $\mathbb{V}$ reel vektör uzayının bazındaki eleman sayısına (eğer sonlu ise) $\mathbb{V}$ nin **boyutu** denir boy $(\mathbb{V})$ ile gösterilir. Eğer $\mathbb{V} = \{0\}$ ise boy $(\mathbb{V}) = 0$ olarak kabul edilir.*

Örnek 3.2.47 *$\mathbb{S} = \{t^2, t, 1\}$ kümesi $\mathbb{P}_2$ için bir baz olup boy $(\mathbb{P}_2) = 3$ dir.*

Örnek 3.2.48 *$\mathbb{S} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ için bir baz olup boy $(\mathbb{R}^3) = 3$.*

Tanım 3.2.49 *Bazı sonlu sayıda elemandan oluşan vektör uzaylarına **sonlu-boyutlu vektör uzayı**; aksi durumda ise, **sonsuz-boyutlu vektör uzayı** adı verilir.*

Uyarı 3.2.50 *Aşağıdakiler baz ve boyut kavramları için önemlidir:*

1. *Eleman sayısı sonlu tek reel vektör uzay $\{0\}$ dir, çünkü her c skaleri için $c.0 \in \{0\}$ dir.*

2. *$\mathbb{V}$ nin herhangi iki bazının eleman sayısı eşittir.*

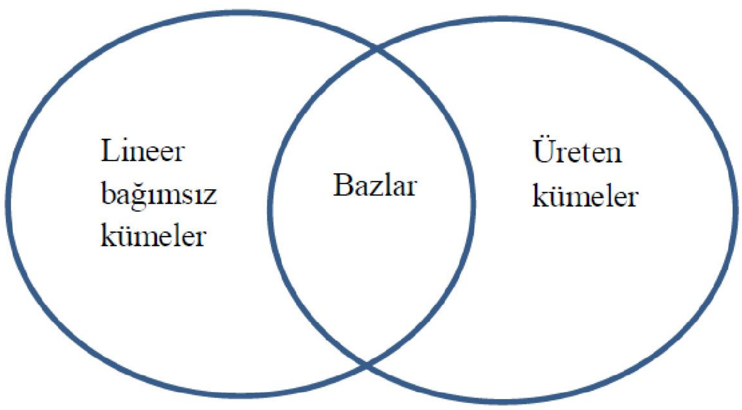
3. *$\mathbb{V}$, $n-$boyutlu bir uzay ve $\mathbb{S} = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subset \mathbb{V}$ kümesi lineer bağımsız ise $k \leq n$ dir.*

4. *$\mathbb{V}$, $n-$boyutlu bir uzay olsun. $\mathbb{V}$ deki lineer bağımsız ve eleman sayısı en fazla olan küme n elemanlıdır ve $\mathbb{V}$ nin bazıdır.*

5. *boy $(\mathbb{V}) = n$ ise $m > n$ elemanlı bir küme lineer bağımlıdır.*

6. *boy $(\mathbb{V}) = n$ ise $p < n$ elemanlı bir küme $\mathbb{V}$ yi üretemez.*

Aşağıdaki şekilde lineer bağımsız kümeler, baz ve üreten kümeler arasındaki ilişki verilmektedir.



Şekil-7: Baz, lineer bağımsızlık, üreten kümeler

3.2.4 Skaler (İç) çarpım

Aşağıda standart reel vektör uzayında skaler çarpım, norm ve açı gibi kavramlar ifade edilecektir.

Tanım 3.2.51 *$\mathbb{R}^n$ de $\alpha = (a_1, ..., a_n)$ ve $\beta = (b_1, ..., b_n)$ vektörleri verilsin. Buna göre*

$$\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$$

*değerine α ile β nın **skaler çarpımı** (ya da **iç çarpım**) denir.*

Örnek 3.2.52 *$\mathbb{R}^4$ de $\alpha = (1, 2, -1, 3)$ ve $\beta = (2, -1, 1, k)$ vektörleri için $\alpha \cdot \beta = 0$ ise k değerini bulalım. Çözüm $k = \frac{1}{3}$ olarak kolayca elde edilebilir.*

Teorem 3.2.53 *$\mathbb{R}^n$ de α, β, γ vektörleri ve $c, d \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

1. $(c.\alpha + d.\beta) \cdot \gamma = c.\alpha \cdot \gamma + d.\beta \cdot \gamma$, $\alpha \cdot (c.\beta + d.\gamma) = c.\alpha \cdot \beta + d.\alpha \cdot \gamma$;

2. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

3. $\alpha \cdot \alpha \geq 0$; $\alpha \cdot \alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$.

Uyarı 3.2.54 *Yukarıdaki 1,2 ve 3 numaralı özelliklere; sırasıyla, **bilineerlik**, **simetri** ve **pozitif tanımlılık** adı verilir.*

Tanım 3.2.55 *Üzerinde skaler çarpım tanımlı $\mathbb{R}^n$ uzayına $n-$**boyutlu Öklit uzayı** adı verilir.*

Öklit Megaren MÖ 330-275. İskenderiyeli matematikçi. Geometrinin babası

Resim-9: Öklit Megaren (MÖ 330-275)

Öklit'in bilimsel kişiliği, unutulmayan sözlerini de yansımıştır: Bir gün dersini bitirdiğinde öğrencilerinden biri yaklaşır, "Verdiğiniz ispatlar çok güzel; ama pratikte bunlar neye yarar?" diye sorduğunda, Öklit kapıda bekleyen kölesini çağırır, "Bu delikanlıya 5-10 kuruş ver, vaktinin boşa gitmediğini görsün!" demekle yetinir.

Tanım 3.2.56 *$\mathbb{R}^n$ uzayında bir $\alpha = (a_1, ..., a_n)$ vektörünün* ***normu***

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\|\alpha\| = 1$ ise α ya ***birim vektör*** *adı verilir.*

Uyarı 3.2.57 *Bir $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ vektörü yönündeki tek birim vektör $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ dir. Bu aynı zamanda bir vektörü birim vektör yapmak için bir metottur.*

Örnek 3.2.58 *$\mathbb{R}^n$ de $\alpha = (1, -3, 4, 2)$ vektörünü birim uzunluklu olarak yeniden ifade edelim. Bunun için*

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\|\alpha\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right)$$

olur.

Teorem 3.2.59 *Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:*

1. *Cauchy-Schwarz eşitsizliği*

$$|\alpha \cdot \beta| \leq \|\alpha\| \, \|\beta\| \, ;$$

2. *Minkowski ya da üçgen eşitsizliği*

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\| \, .$$

27. $\mathbb{R}^3$ de $\{(1,0,-1),(2,-1,1),(-1,-1,4)\}$ kümesine Gram-Schmidt metodu uygulanabilir mi?

28. $\mathbb{R}^3$ de $\{(1,1,0),(2,0,1),(2,2,1)\}$ vektörlerinin lineer bağımlı-bağımsız olduklarını kontrol ettikten sonra (eğer lineer bağımsız ise) Gram-Schmidt metodunu uygulayınız.

29. $\mathbb{R}^n$ de ortogonal vektörlerin birbirine göre izdüşümleri hakkında ne söyleyebilirsiniz. Geometrik olarak yorumlayınız.

3.3 Kompleks vektör uzayları

Kompleks sayılar kümesinin kendisi ile n kez kartezyen çarpımından meydana gelen

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C} = \{(z_1,...,z_n) : z_1,...,z_n \in \mathbb{C}\}$$

kümesi üzerinde

$$(z_1,...,z_n) + (w_1,...,w_n) = (z_1 + w_1,...,z_n + w_n)$$

ve

$$z(z_1,...,z_n) = (zz_1,...,zz_n), \ z \in \mathbb{C},$$

işlemleri tanımlanırsa $\mathbb{C}^n$ bir vektör uzayı olup *$n-$boyutlu kompleks vektör uzay*ı adını alır.

Örnek 3.3.1 $\mathbb{C}^3$ *de* $\alpha = (2+3\mathbf{i}, 4-\mathbf{i}, 3)$ *ve* $\beta = (3-2\mathbf{i}, 5\mathbf{i}, 4-6\mathbf{i})$ *vektörleri için*

$$\alpha + \beta = (5+\mathbf{i}, 4+4\mathbf{i}, 7-6\mathbf{i})$$

ve

$$(5-2\mathbf{i})\,\alpha = (16+11\mathbf{i}, 18-13\mathbf{i}, 15-6\mathbf{i})$$

olur.

Tanım 3.3.2 $\mathbb{C}^n$ *de* $\alpha = (z_1,...,z_n)$ *ve* $\beta = (w_1,...,w_n)$ *vektörleri için,* α *ile* β *nın iç çarpımı*

$$\alpha \cdot \beta = z_1\bar{w}_1 + ... + z_n\bar{w}_n$$

ile tanımlanır. α *nın normu*

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot a} = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + ... + z_n\bar{z}_n} = \sqrt{|z_1|^2 + ... + |z_n|^2}$$

dir.

Uyarı 3.3.3 $\|\alpha\|$ *değeri daima reel ve pozitiftir.*

Örnek 3.3.4 $\mathbb{C}^3$ *de* $\alpha = (2+3\mathbf{i}, 4-\mathbf{i}, 3+5\mathbf{i})$ *ve* $\beta = (3-4\mathbf{i}, 5\mathbf{i}, 4-2\mathbf{i})$ *vektörleri için*

$$\alpha \cdot \beta = (2+3\mathbf{i})\left(\overline{3-4\mathbf{i}}\right) + (4-\mathbf{i})\left(\overline{5\mathbf{i}}\right) + (3+5\mathbf{i})\left(\overline{4-2\mathbf{i}}\right) = -9+19\mathbf{i}$$

ve

$$\alpha \cdot \alpha = |2+3\mathbf{i}|^2 + |4-\mathbf{i}|^2 + |3+5\mathbf{i}|^2 = 64$$

dolayısıyla $\|\alpha\| = 8$ *olur.*

Tanım 3.3.5 *Üzerinde tanımlı iç çarpım tanımlı* $\mathbb{C}^n$ *uzayına* $n-$***boyutlu kompleks Öklit uzayı*** *adı verilir.*

Teorem 3.3.6 $\mathbb{C}^n$ *de* α, β, γ *vektörleri ve* $z, w \in \mathbb{C}$ *için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

1. $(z.\alpha + w.\beta) \cdot \gamma = z.\alpha \cdot \gamma + w.\beta \cdot \gamma,\ \alpha \cdot (z.\beta + w.\gamma) = z.\alpha \cdot \beta + w.\alpha \cdot \gamma;$

2. $\alpha \cdot \beta = \overline{\alpha \cdot \beta};$

3. $\alpha \cdot \alpha \geq 0;\ \alpha \cdot \alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0.$

Uyarı 3.3.7 $\mathbb{C}^n$ *uzayında da Cauchy-Schwarz ve Minkowski (ya da üçgen) eşitsizlikleri sağlanmaktadır.*

3.3.1 Bölüm sonu alıştırmaları

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız:

   (a) $\mathbf{i}^0, \mathbf{i}^3, \mathbf{i}^5, \mathbf{i}^{10};$

   (b) $\mathbf{i}^{39}, \mathbf{i}^{174}, \mathbf{i}^{256}, \mathbf{i}^{327};$

   (c) $(4-3\mathbf{i})^2,\ (1+3\mathbf{i})^2,\ (1-\mathbf{i})^3;$

   (d) $\frac{2-7\mathbf{i}}{5+3\mathbf{i}}.$

2. $6+4\mathbf{i}$, $2+\mathbf{i}$, $1-2\mathbf{i}$, 5, $-3\mathbf{i}$, $\mathbf{i}$ sayılarının eşleniklerini bulunuz.

3. Aşağıda verilen vektörler için $\|\alpha\|$, $\|\beta\|$ ve $\alpha \cdot \beta$ değerini bulunuz:

(**a**) $\alpha = (1 + 2\mathbf{i}, 3 - \mathbf{i}, -1 - 4\mathbf{i})$, $\beta = (1 - 2\mathbf{i}, 1 + \mathbf{i}, 1 + \mathbf{i})$
(**b**) $\alpha = (2\mathbf{i}, \mathbf{i}, -6\mathbf{i})$, $\beta = (3 - 2\mathbf{i}, 4 - \mathbf{i}, 5\mathbf{i})$
(**c**) $\alpha = (1, 0, -1)$, $\beta = (1 - 2\mathbf{i}, 1 + \mathbf{i}, 1 + \mathbf{i})$.

4. $\mathbb{C}^n$ de her α, β vektörleri için aşağıdaki eşitliği gerçekleyiniz:

$$\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,\alpha \cdot \beta + \|\beta\|^2,$$

burada $\mathrm{Re}\,\alpha \cdot \beta$ ile $\alpha \cdot \beta$ kompleks sayısının reel kısmı ifade edilmektedir.

5. $\mathbb{C}^n$ de her α, β vektörleri için aşağıdaki eşitliği gerçekleyiniz:

$$|\|\alpha\| - \|\beta\|| \leq \|\alpha - \beta\|$$

6. $\mathbb{C}^n$ de her α, β vektörleri için aşağıdaki eşitliği gerçekleyiniz:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{4} \sum_{k=4}^{4} \mathbf{i}^k \left\|\alpha + \mathbf{i}^k \beta\right\|^2.$$

7. $\mathbb{C}^\infty = \{(z_0, z_1, z_2, ...) : x_i \in \mathbb{C},\ i \in \mathbb{N}\}$ sonsuz diziler kümesinin bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

3.4 Lineer dönüşümler ve matrisler

Lineer Cebir dersinin asıl konusu matrisler yardımıyla lineer dönüşümleri incelemektir.

3.4.1 Lineer dönüşümler

Tanım 3.4.1 *$\mathbb{V}$ ve $\mathbb{W}$ iki reel (ya da kompleks) vektör uzayı ve $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ bir fonksiyon olsun. Eğer*

1. *her $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$ için $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$;*

2. *her $c \in \mathbb{R}$ (ya da $z \in \mathbb{C}$) ve her $\alpha \in V$ için $L(c.\alpha) = c.L(\alpha)$ ise L ye $\mathbb{V}$ den $\mathbb{W}$ ya bir* ***lineer dönüşüm*** *denir.*

Uyarı 3.4.2 *Dönüşüm kavramı daha genel hallerde fonksiyonun yerine kullanılır. Daha açık bir ifadeyle, görüntü kümesi reel yada kompleks sayılar olan her dönüşüm bir fonksiyon olarak ifade edilir.*

Uyarı 3.4.3 $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ *bir lineer dönüşüm ise* $L(0) = 0$ *dır. Gerçekten her* $\alpha \in \mathbb{V}$ *için*

$$L(\alpha - \alpha) \overset{1}{=} L(\alpha) + L(-\alpha) \overset{2}{=} L(\alpha) - L(\alpha) = 0$$

olur. Ancak bu durumun tersi her zaman doğru olmayabilir.

Lemma 3.4.4 $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ *fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olması için her* $c \in \mathbb{R}$ *ve* $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$ *olmak üzere*

$$L(\alpha + c.\beta) = L(\alpha) + c.L(\beta)$$

olması gerek ve yeterdir.

Örnek 3.4.5 *Bir reel (ya da kompleks)* $\mathbb{V}$ *vektör uzayında* $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ *dönüşümü*

$$L(\alpha) = c.\alpha, c \in \mathbb{R}$$

(ya da $c \in \mathbb{C}$*) olarak tanımlanıyor. L nin lineer olduğunu gösterelim: Her* $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$ *ve her* $d \in \mathbb{R}$ *(ya da* $c \in \mathbb{C}$*) için*

$$\begin{aligned} L(\alpha + d.\beta) &= c.(\alpha + d.\beta) = (c.\alpha) + d.(c.\beta) \\ &= L(\alpha) + d.L(\beta) \end{aligned}$$

olur ki L lineer bir dönüşüm olur.

Örnek 3.4.6 $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(x, y, z) = (x, y)$$

şeklinde tanımlanan L izdüşüm dönüşümünün lineer olduğunu gösterelim: Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ *için*

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3)\,, \ \beta = (b_1, b_2, b_3)$$

olsun. O zaman, her $c \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} L(\alpha + c.\beta) &= L((a_1, a_2, a_3) + c.(b_1, b_2, b_3)) \\ &= L(a_1 + cb_1, a_2 + cb_2, a_3 + cb_3) \\ &= (a_1 + cb_1, a_2 + cb_2) \\ &= (a_1, a_2) + c.(b_1, b_2) \\ &= L(\alpha) + c.L(\beta) \end{aligned}$$

olup L dönüşümü lineerdir.

Örnek 3.4.7 *$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (x - y, x + y)$ olarak tanımlanan L nin lineer bir dönüşüm olduğunu gösterelim: Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2)$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için*

$$\begin{aligned} L(\alpha + c.\beta) &= L((a_1, a_2) + c.(b_1, b_2)) = L((a_1 + cb_1, a_2 + cb_2)) \\ &= (a_1 + cb_1 - a_2 + cb_2, a_1 + cb_1 + a_2 + cb_2) \\ &= (a_1 - a_2, a_1 + a_2) + c.(b_1 - b_2, b_1 + b_2) \\ &= L(\alpha) + c.L(\beta) \end{aligned}$$

olur ki L lineerdir.

Örnek 3.4.8 *$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,*

$$L(x, y, z) = (x + 1, 2y, z)$$

şeklinde verilen dönüşümün lineer olup olmadığını inceleyelim: Eğer L bir lineer dönüşüm ise $L(0,0,0) = (0,0,0)$ olur. Halbuki $L(0,0,0) = (1,0,0)$ olduğundan L lineer değildir.

Uyarı 3.4.9 *$\mathbb{V}$ ve $\mathbb{W}$ iki reel (ya da kompleks) vektör uzayı olsun. Literatürde bunlar arasında tanımlı bir lineer dönüşüme* ***homomorfizm*** *de denilmektedir. $\mathbb{V}$ ve $\mathbb{W}$ arasındaki bütün homomorfizmlerin kümesi $Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ ile gösterilir. Üstelik, $Hom(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ kümesi de bir reel (ya da kompleks) vektör uzayıdır.*

Tanım 3.4.10 *$L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ bir lineer dönüşüm, $\mathbb{H}$ kümesi $\mathbb{V}$ vektör uzayının bir altkümesi olsun. Bu durumda*

$$L(\mathbb{H}) = \{L(\alpha) : \alpha \in \mathbb{H}\}$$

kümesine $\mathbb{H}$ nın L altındaki görüntü kümesi ya da kısaca görüntüsü adı verilir.

sistemi ve benzer şekilde

$$L(1,1) = (2,3,-1) = a_{12}(1,1,0) + a_{22}(1,0,1) + a_{32}(-1,2,1),$$

denkleminden

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} - a_{32} = 2, \\ a_{12} + 2a_{32} = 3, \\ a_{22} + a_{32} = -1, \end{cases}$$

elde edilip bu sistemler çözülürse $[a_{ij}]_{3\times 2}$ *matrisi*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3.4.3 Öz değerler ve öz vektörler

Tanım 3.4.20 *$A \in \mathbb{R}_n^n$, $n \times n$ tipinde bir matris olsun.*

$$A\alpha = t.\alpha$$

olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir $\alpha \in \mathbb{R}^n$ vektörü varsa $t \in \mathbb{R}$ sayısına A matrisinin bir ***öz (karakteristik*** *ya da* ***aygen)*** ***değeri*** *denir. t sayısı A matrisinin bir öz değeri olmak üzere*

$$A\alpha = t.\alpha$$

eşitliğini sağlayan α vektörüne ise A matrisinin t öz değerine karşılık gelen bir ***öz (karakteristik*** *ya da* ***aygen)*** ***vektörü*** *denir.*

Uyarı 3.4.21 *Aşağıda bir matrisin öz değerleri ve öz vektörlerini bulmak için bir metot ifade edilmiştir:*

$$A\alpha = t.\alpha$$

eşitliği aynı zamanda

$$(A - t.I_n)\,\alpha = 0 \tag{3.1}$$

şeklinde de yazılabileceğinden (3.1) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olabilmesi için

$$\det(A - t.I_n) = 0 \tag{3.2}$$

olması gerek ve yeterdir. Dolayısıyla A matrisinin öz değerleri (3.2) denklemini sağlayan t sayılarıdır. Her bir t öz değeri için (3.1) denkleminin aşikar olmayan çözümleri bulunur. Bunlar A nın t ye karşılık gelen öz vektörleridir.

Örnek 3.4.22

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$$

olmak üzere A matrisinin öz değerlerini bulalım. Bunun için

$$\det(A - t.I_2) = 0$$

denklemini inceleyelim, yani

$$A - t.I_2 = \begin{bmatrix} 5-t & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7-t \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{vmatrix} 5-t & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7-t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 32 = (t-4)(t-8) = 0$$

olduğundan A matrisinin $t_1 = 4$ ve $t_2 = 8$ olacak şekilde iki tane öz değeri vardır.