ÖDEV SORULAR

1) $\cos x \cdot dy - (2y\sin x - 3)\,dx = 0$ dif. denk. çözünüz.

2) $\left(\frac{3-y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{y^2-2x}{xy^2}\right)dy = 0$ " "

3) $(y\cdot\cos x + 2x\cdot e^y)\,dx + (\sin x + x^2e^y + 2)\,dy = 0$ " ".

4) $(x^2 - 4y)\,dx - x\,dy = 0$ " ".

5) $(x - x^2y)\,dy + (y + xy^2)\,dx = 0$ " ".

⇒ Homojen Diferansiyel Denklemler ⇐

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ denklemi $y' = f(x,y)$ şeklinde düzenlensin. $f(x,y)$ fonksiyonu 0. dereceden homojen olduğunda $y' = f(x,y)$ dif. denk. homojen dif. denk. denir. Bir dif. denklemin homojen olduğunu gösterebilmek için iki farklı yol mevcuttur. Bunlardan ilki $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ polinomlarının aynı dereceden homojen olmalarıdır. Yani,

$$\underbrace{(x-y)}_{P}dx + \underbrace{(x+y)}_{Q}dy = 0$$

$$P(tx,ty) = t^m \cdot P(x,y) \rightarrow tx - t \rightarrow t^1(x-y)$$
$$Q(tx,ty) = t^m \cdot Q(x,y) \rightarrow tx + ty \rightarrow t^1(x+y)$$

} homojen

olmalıdır.

2. yöntem ise $\boxed{y' = f(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)}$ olacak şekilde düzenlenebilmelidir. Bütün bu işlemlerin ardından denklemin homojen olduğu gösterilmiş olur.

Homojen bir dif. denklemin çözümü için $y=ux$ değişken değiştirmesi yapılarak denk. değişkenlerine ayrılabilir bir dif. denkleme dönüşmüş olur.

$$\frac{(x-y)\,dx}{(x-y)\,dy} = \frac{-(x+y)\,dy}{(x-y)\,dx} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-x-y}{x-y} = \frac{\cancel{x}\left(-1-\frac{x}{y}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{x}{y}\right)}$$

SORU: $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$ dif. denklemini çözünüz.

$$P(tx,ty) = tx - ty = t\,(x-y) = t\cdot P(x,y)$$

$$Q(tx,ty) = tx + ty = t\,(x+y) = t\,Q(x,y)$$

P ve Q fonksiyonlarının her ikisi de 1. dereceden olduğu için denk homojendir.

Veya, $(x-y)\,x = -(x+y)\,dy$ $\quad \dfrac{-1-\frac{x}{y}}{1-\frac{x}{y}}$

$(x-y)\,dx = -(x-y)\,dy$

$$(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$$

$$\frac{\cancel{(x+y)}\,dy}{\cancel{(x+y)}\,dx} = \frac{(y-x)\,\cancel{dx}}{(x+y)\,\cancel{dx}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y} = \frac{\cancel{x}\left(\frac{y}{x}-1\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{y}{x}\right)}$$

$$= F\left(\frac{y}{x}\right)$$

şeklinde yazılabildiğinden denklem homojendir. O halde $y=ux$ değişken değiştirmesi yapalım.

$dy = u\,dx + x\,du$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u\,dx + x\,du}{dx} = \frac{\frac{y}{x}-1}{1+\frac{y}{x}} = \frac{\frac{ux}{x}-1}{1+\frac{ux}{x}}$$

$$\Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1} - u = \frac{\cancel{u}-1-u^2-\cancel{u}}{u+1} = -\frac{(1+u^2)}{u+1}$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{-(1+u^2)}{u+1} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{u+1}{-(1+u^2)} du$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{u+1}{1+u^2} du = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{u}{1+u^2} du + \int \frac{1}{1+u^2} du = 0$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|1+u^2| + \arctan u = C$$

$$\boxed{\ln|x| + \frac{1}{2} \ln\left|1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = C}$$

olarak bulunur.

Ör: $(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ dif. denk. çözünüz.

Çözüm: $\frac{(x^2+y^2)\cancel{dx}}{2xy\,\cancel{dx}} = \frac{\cancel{2xy}\,dy}{\cancel{2xy}\,dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{\cancel{x^2}\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}{\cancel{x^2}\left(2\,\frac{y}{x}\right)}$

$= F\left(\frac{y}{x}\right)$ olduğundan denk. homojendir.

Veya,

$$P(tx,ty) = t^2x^2+t^2y^2 = t^2(x^2+y^2)$$
$$= t^{2} P(x,y)$$

$$Q(tx,ty) = -2tx \cdot ty = -2t^2xy = t^2 \cdot -2xy = t^{2} Q(x,y)$$

Hem $P(x,y)$ hem de $Q(x,y)$ 2. dereceden old. dan denk. homojendir. O halde $y = ux$ dönüşümü yapalım.

$$dy = u\,dx + x\,du$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{u\,dx + x\,du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow u + x\frac{dy}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} - u$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2-2u^2}{2u} = \frac{1-u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow \frac{2u}{1-u^2}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{2u}{u^2-1}du = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2u}{u^2-1}du = \int d(c)$$

$$\boxed{\ln|x| + \ln|u^2-1| = \ln c}$$

$$\ln|x\cdot(u^2-1)| = \ln c$$

$$x\cdot(u^2-1) = c$$

$$\boxed{x\cdot\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right) = c}$$ elde edilir.

Ör: $\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx - x\,dy = 0$ denk. çözünüz.

Çözüm: $P(tx,ty) = ty + \sqrt{t^2x^2-t^2y^2} = ty + t\sqrt{x^2-y^2}$

$= t\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)$

$= t^{1}P(x,y)$

$Q(tx,ty) = -tx = t(-x)$

$= t^{1}\cdot Q(x,y)$

Hem $P(x,y)$, hem de $Q(x,y)$ 1. dereceden old. dan (56)

denk. homojen dif. denklemdir.

$$\left.\begin{array}{l} y = ux \\ dy = u\,dx + x\,du \end{array}\right\}$$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$\left(ux + \sqrt{x^2 - u^2x^2}\right)dx - x.(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$\cancel{ux\,dx} + x\sqrt{1-u^2}\,dx - \cancel{xu\,dx} - x^2du = 0$$

$$\left(x.\sqrt{1-u^2}\right)dx - x^2\,du = 0$$

$$\frac{x.\cancel{\sqrt{1-u^2}}\,dx}{x^2.\cancel{\sqrt{1-u^2}}} - \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\sqrt{1-u^2}}\,du = 0$$

$$\int\frac{dx}{x} - \int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int d(c)$$

$$\ln|x| - \arcsin u = c$$

$$\ln|x| - \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = c$$ elde edilir.

$\frac{1}{2}$