⇒ BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Aranan fonksiyon ve türevine göre doğrusal halde bulunan yani;

$$a(x) \cdot \frac{dy}{dx} + b(x) y = c(x) \quad --- (16)$$

şeklinde olan diferansiyel denkleme birinci mertebeden <u>lineer dif. denklem</u> denir. x'in bir I aralığında eğer $a(x) \neq 0$ ise denklemin bütün elemanlarını $a(x)$ ile bölebiliriz.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{b(x)}{a(x)} y = \frac{c(x)}{a(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) \quad --- (17)$$

şeklini alır. Burada P ve Q fonksiyonları denklemin çözümü olan y fonksiyonu ile aynı aralıkta süreklidir.

<u>NOT</u>: $Q(x) = 0$ ise denkleme homojen dif. denk., $Q(x) \neq 0$ ise denkleme homojen olmayan dif. denk denir.

Öncelikle denklemin homojen kısmını yani $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ denkleminin çözümünü bulmaya çalışalım.

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x) y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx$$

$$\ln y + \int P(x)\,dx = \ln c \Rightarrow \ln y - \ln c = -\int P(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int P(x)\,dx$$

$$\Rightarrow y = c \cdot e^{-\int P(x)\,dx}$$ olur.

Bu çözüm homojen kısmın çözümüdür. Ancak bizim (17) denklemini bulmaya ihtiyacımız var. Bunun için 2 farklı yöntem mevcuttur.

1) Sabitlerin Değişimi Yöntemi:

(17) denkleminin çözümünü bulmak için $y = c.e^{-\int P(x)dx}$ denkleminde c sabiti yerine sonradan belirlenecek olan bir $c(x)$ fonksiyonu alınır. Böylece (17) denkleminin genel çözümünün,

$y = c(x).e^{-\int P(x)dx}$ olduğu kabul edilir. Burada türev alınır ve dönüşüm (17) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y = c(x).e^{-\int P(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}.e^{-\int P(x)dx} - c(x).P(x).e^{-\int P(x)dx}$$

Bulduklarımızı (17) denk. yazalım.

$$\frac{dc(x)}{dx}.e^{-\int P(x)dx} - \cancel{c(x).P(x).e^{-\int P(x)dx}} + \cancel{c(x).P(x).e^{-\int P(x)dx}} = Q(x)$$

$$\frac{dc(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dc}{dx} = Q(x).e^{\int P(x)dx}$$

$$\int dc = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \Rightarrow c(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c_1$$

elde edilir. Bu $c(x)$ değeri

genel çözümde yerine yazılırsa,

$$y = \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + c_1 \right] e^{-\int P(x) dx} \quad \text{olur.}$$

Ör: $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$ --- $(*)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\Rightarrow P(x) = -2x \qquad Q(x) = x \qquad \frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x)$

Önce homojen kısmı çözelim.

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int 2x\, dx = \int 0$$

$$\Rightarrow \ln y - x^2 = \ln c \Rightarrow \ln y - \ln c = x^2 \Rightarrow \ln \frac{y}{c} = x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c \cdot e^{x^2}}$$

Bu kısım homojen kısmın çözümüdür. Sabitlerin değişim yöntemini kullanırsak,

$$y = c(x) \cdot e^{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} \cdot e^{x^2} + c \cdot 2x \cdot e^{x^2}$$

Bu ifadeyi $(*)$ da yerine yazarsak,

$$\frac{dc}{dx} e^{x^2} + \cancel{c \cdot 2x \cdot e^{x^2}} - \cancel{2x \cdot c \cdot e^{x^2}} = x$$

$$\frac{dc}{dx} e^{x^2} = x \Rightarrow \int dc = \int x \cdot e^{-x^2} dx$$

$-x^2 = t$

$-2x dx = dt$

$x dx = -\frac{dt}{2}$

$$C(x) = -\int \frac{e^t dt}{2} = -\frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c_1$$

$$C(x) = \frac{e^{-x^2}}{2} + c_1$$

$$y = C(x) \cdot e^{x^2}$$

$$y = \left(\frac{e^{-x^2}}{2} + c_1\right) e^{x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} + c_1 \cdot e^{x^2}$$

S2: $y' + y \cdot \cos x = \cos x \quad \cdots \quad (**)$ denk çözünüz.

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0$ homojen denk. çözelim.

$$\frac{dy}{dx} = -y\cos x \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\cos x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \cos x \, dx = \int d(c)$$

$$\ln y + \sin x = \ln c \Rightarrow \ln \frac{y}{c} = -\sin x$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{-\sin x}$$

$(**)$ denkleminin çözümünü sabitin değişim yöntemini kullanalım.

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} e^{-\sin x} - c \cdot \cos x \cdot e^{-\sin x}$$

$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \cos x$ denk. yerine yazalım.

$$\frac{dc}{dx} e^{-\sin x} - \cancel{c \cdot \cos x \cdot e^{-\sin x}} + \cancel{c \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x} = \cos x$$

$$\frac{dc}{dx} e^{-\sin x} = \cos x$$

$$\frac{dc}{dx} = e^{\sin x} \cdot \cos x \Rightarrow \int dc = \int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx$$

$\sin x = t$

$\cos x \, dx = dt$

$$\Rightarrow c(x) = \int e^t dt = e^t + c_1$$

$$c(x) = e^{\sin x} + c_1$$

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = (e^{\sin x} + c_1) e^{-\sin x}$$

$y = 1 + c_1 e^{-\sin x}$ elde edilir.

ÖDEV SORULAR

1) $y' - 3y = e^{3x}$

2) $y' + y \cdot \tan x = x \cdot \sin 2x$

3) $y' - \frac{1}{x^2+1} y = -\frac{1}{x^2+1}$