ÖDEV SORULAR

1) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$

2) $xy' - y = -2x^6y^4$

3) $x\,dy - (y + xy^3(1+\ln x))\,dx = 0$

⇒ Riccati Diferansiyel Denklemi ⇐

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad --- \quad (20)$$

tipindeki denkleme Riccati dif. denk. denir. Burada P, Q ve R, x'in sürekli fonksiyonlarıdır, ve ayrıca $P \neq 0$ dır. En genel halde Riccati denkleminin genel çözümü elementer fonk. yardımıyla ifade edilemez. Bu durumda Riccati dif. denkleminin bir özel çözümünün bilinmesi halinde uygun bir değişken değişimi ile lineer dif. denk. dönüştürülür. Ve bu şekilde genel çözümü elde edilebilir.

O halde y_1, Riccati denkleminin bir özel çözümü olsun. Denklemde, u yeni bağımlı değişken olmak üzere,

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad --- \quad (21)$$

değişken değişimini yapalım. (21) denk. her iki tarafın türevi alınırsa,

$$y' = y_1' - \frac{1}{u^2}u' \quad \ldots (22)$$

elde edilir. (21) ve (22) ifadeleri (20) denkleminde yerine yazılsın.

$$y_1' - \frac{1}{u^2}\cdot u' = P(x)\cdot\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 + Q(x)\cdot\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + R(x)$$

olur. Burada $y_1' = P(x)\cdot y_1^2 + Q(x)\cdot y_1 + R(x)$ dır. Çünkü y_1, (20) denkleminin özel çözümü olduğu için denklemi sağlamalıdır. Şimdi y_1' değerini son denklemde yerine yazalım.

$$\cancel{\left(P(x)\, y_1^2 + Q(x)\, y_1 + R(x)\right)} - \frac{u'}{u^2} = \cancel{P(x)\, y_1^2} + 2P(x)\cdot y_1\cdot\frac{1}{u} + P(x)\cdot\frac{1}{u^2}$$

$$+\cancel{Q(x)\cdot y_1} + \frac{Q(x)}{u} + \cancel{R(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-u'}{\cancel{u^2}} = \frac{2P(x)\, y_1\cdot u + P(x) + Q(x)\, u}{\cancel{u^2}}$$

$$\Rightarrow \quad u' + u\left(2P(x)\, y_1 + Q(x)\right) = -P(x)$$

elde edilir. Elde edilen son denklem artık bir lineer dif. denk haline dönüşmüştür. Lineer dif. denk. çözerek sonuç elde edilir.

Ör: $x^3 y' = x^2 y + y^2 - x^2$ bir özel çözümü $y_1 = x$ ise denk. çözümünü bulunuz.

⇒ Çözüm:

$$y' = \frac{1}{x^3} y^2 + \frac{1}{x} y - \frac{1}{x}$$

$$P(x) = \frac{1}{x^3} \qquad Q(x) = \frac{1}{x} \qquad R(x) = -\frac{1}{x}$$

old. dan denklem Riccati dif. denklemidir.

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = x + \frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$

$$1 - \frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x^3}\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{x}$$

$$1 - \frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x^3}\left(x^2 + \frac{2x}{u} + \frac{1}{u^2}\right) + 1 + \frac{1}{xu} - \frac{1}{x}$$

$$\cancel{1} - \frac{u'}{u^2} = \cancel{\frac{1}{x}} + \frac{2}{x^2 u} + \frac{1}{x^3 u^2} \cancel{+1} + \frac{1}{xu} \cancel{-\frac{1}{x}}$$

$$-\frac{u'}{\cancel{u^2}} = \frac{2xu + 1 + x^2 u}{x^3 \cancel{u^2}}$$

$$u' + u\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^3} \Rightarrow \text{Denklem lineer hale geldi}$$

Çözmek için sbt'm değişim yöntemini kullanalım.

$$u' + u\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\int \frac{du}{u} + \int\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx = \int d(c)$$

$$\ln|u| - \frac{2}{x} + \ln|x| = \ln c$$

$$\ln\left|\frac{u.x}{c}\right| = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{u.x}{c} = e^{2/x} \Rightarrow u = c.\frac{e^{2/x}}{x}$$

olur. $u = c(x).\dfrac{e^{2/x}}{x} \Rightarrow u' = c'.\dfrac{e^{2/x}}{x} + c.\dfrac{-\frac{2}{x^2}e^{2/x}.x - e^{2/x}}{x^2}$

$$c'\frac{e^{2/x}}{x} - c\frac{2e^{2/x}}{x^3} - c\frac{e^{2/x}}{x^2} + c.\frac{e^{2/x}}{x}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^3}$$

$$c'\frac{e^{2/x}}{x} - c.\cancel{\frac{2e^{2/x}}{x^3}} - c.\cancel{\frac{e^{2/x}}{x^2}} + c.\cancel{\frac{2e^{2/x}}{x^3}} + c\cancel{\frac{e^{2/x}}{x^2}} = -1/x^3$$

$$c'.\frac{e^{2/x}}{x} = -\frac{1}{x^3} \Rightarrow c' = -\frac{e^{-2/x}}{x^2}$$

$$\Rightarrow \int dc + \int \frac{e^{-2/x}}{x^2}dx = \int 0$$

$$\Rightarrow c(x) + \int \frac{e^{-2/x}}{x^2}dx = c_1$$

$$-\frac{2}{x} = t$$

$$\frac{2}{x^2}dx = dt$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{2}$$

$$C(x) + \int \frac{e^t}{2}\,dt = c_1 \Rightarrow C(x) + \frac{e^t}{2} = c_1$$

$$C(x) + \frac{e^{-2/x}}{2} = c_1$$

$$C(x) = c_1 - \frac{e^{-2/x}}{2} \Rightarrow u(x) = C(x).\frac{e^{2/x}}{x}$$

$$\Rightarrow u(x) = \left(c_1 - \frac{e^{-2/x}}{2}\right).\frac{e^{2/y}}{x}$$

$$\Rightarrow u(x) = c_1 . \frac{e^{2/x}}{x} - \frac{1}{2x}$$

$y = x + \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{y-x}$ yazalım.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{y-x} = c_1 \frac{e^{2/x}}{x} - \frac{1}{2x}}$$ elde edilir.

Ör: $y' - \frac{3}{x}y - \frac{4}{x^2} = y^2$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = -\frac{2}{x}$ ise denklemin çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y' = y^2 + \frac{3}{x}y + \frac{4}{x^2}$

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

$$y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{u}$$

$$y' = \frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2}$$

$$\frac{2}{x^2}-\frac{u'}{u^2}=\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{u}\right)^2+\frac{3}{x}\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{u}\right)+\frac{4}{x^2}$$

$$\cancel{\frac{2}{x^2}}-\frac{u'}{u^2}=\cancel{\frac{4}{x^2}}-\frac{4}{xu}+\frac{1}{u^2}-\cancel{\frac{6}{x^2}}+\frac{3}{xu}+\cancel{\frac{4}{x^2}}$$

$$-\frac{u'}{\cancel{u^2}}=\left(\frac{-4u+x+3u}{x\cancel{u^2}}\right)$$

$$-u'=\frac{-u}{x}+1 \Rightarrow \boxed{u'-\frac{1}{x}u=-1}$$

lineer denk. elde edilir.
Yerine koyma yöntemini kullanalım.

$u=v\cdot t$

$u'=v'\cdot t+v\cdot t'$

$v'\cdot t+v\cdot t'-\frac{1}{x}v\cdot t=-1$

$v'\cdot t+v\left(\underbrace{t'-\frac{1}{x}t}_{0}\right)=-1$

$t'-\frac{1}{x}t=0$

$\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dx}{x}=\int 0$

$\ln t-\ln x=\ln c$

$\ln\frac{t}{x}=\ln c$

$t=c\cdot x$

$c=1$ ise $\boxed{t=x}$ olur.

$v'\cdot t=-1$

$v'\cdot x=-1$

$dv=-\frac{1}{x}dx$

$\int dv+\int\frac{dx}{x}=\int 0$

$v+\ln x=c_1$

$\boxed{v=c_1-\ln x}$

$u(x)=v\cdot t$

$u(x)=(c_1-\ln x)\cdot x$

$\boxed{\frac{x}{xy+2}=c_1x-x\cdot\ln x}$

elde edilir.

Ricatti Diferansiyel Denklemi ÖDEV Soruları

1) $y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$, dif. denkleminin bir özel çözümü $y_1(x) = \frac{1}{x}$ ise $y(1) = 2$ şartı altındaki özel çözümü bulunuz.

2) $y' - (x+y)^2 + 1 = 0$, dif. denkleminin bir özel çözümü $y_1(x) = -x$ ise bu denklemin genel çözümünü bulunuz.

3) $y' + e^x - 3y + e^{-x} y^2 = 0$, dif. denkleminin bir özel çözümü $y_1(x) = e^x$ ise bu denklemin genel çözümünü bulunuz.

4) $y' - \frac{3}{x} y - \frac{4}{x^2} = y^2$, dif. denkleminin bir özel çözümü $y_1(x) = -\frac{2}{x}$ ise bu denklemin genel çözümünü bulunuz.