Diferansiyel Denklemler 1

1. HAFTA

DERS NOTLARI

Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

$y(x) = x - 1$
bağımlı bağımsız
$x=5 \rightarrow y=4$
$x=0 \rightarrow y=-1$

$y'' + 2y' + y = e^x$
y = bağımlı
x = bağımsız

→ türevi alınan bağımlı

1

⇒ Diferansiyel Denklemlere Giriş ⇐

Fen bilimleri ve mühendislikte birçok olayın açıklamasına yardımcı olmak üzere matematiksel formüller veya modeller geliştirilir. Bu modeller genellikle bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun bazı türevlerini içeren bir denklem olarak ortaya çıkar. Böyle bir denkleme "diferansiyel denklem" denir.

Eğer bir diferansiyel denklem bir değişkenin bir veya daha çok değişkene göre türevlerini ihtiva ediyorsa türevi alınan değişkene "bağımlı değişken", türevin alındığı değişkenlere "bağımsız değişken" denir.

$y(x) = x + 1$
$x = 5 \rightarrow y = 6$
x: bağımsız, y: bağımlı

$y = f(x)$'in türevi $\dfrac{dy}{dx} = y' \Rightarrow$
→ y bağımlı d.
→ x bağımsız d.

Bağımlı değişkene "bilinmeyen fonksiyon" da denir.

~~Def:~~ Tanım: Eğer bir dif. denklemin bilinmeyen fonksiyonu yalnızca bir bağımsız değişkene bağımlı ise bu dif. denkleme "adi diferansiyel denklem" denir. Eğer iki veya daha fazla bağımsız değişkene bağımlıysa bu dif. denkleme "kısmi dif. denk." denir.

→ biz adi görcez

Ör:

$$x \cdot y' = y$$
$$(xy - y^2)\,dx + x^2 dy = 0$$

} denklemleri birer adi dif. denklemdir.
→ 1 bağımsız değişken

Ör:

$$x \frac{\partial u}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - x^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

} denklemleri birer kısmi dif. denklemdir.
→ 2 bağımsız değişken

⇒ Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması ⇐

Diferansiyel denklemler inceleme kolaylığı bakımından mertebe, derece ve lineerlik özelliklerine göre sınıflandırılır.

Tanım: Bir diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesine dif. denklemin mertebesi denir.

→ karşılık türev

Ör: $xy' = y \Rightarrow$ denk. 1. mertebedendir.

$x^2 y'' + xy' + 2y = e^x \Rightarrow$ denk. 2. mertebedendir.

$\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)^2 + 2\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$ denk. 4. mertebedendir.

NOT: y bağımlı, x bağımsız değişken o.ü. n. mertebeden en genel dif. denk.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (n \neq 0)$$ şeklindedir.

Burada F, $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ argümanlı bir fonksiyondur.

Tanım: Eğer bir dif. denklem var olan tüm türevlere göre bir polinom denklem biçiminde ise en yüksek mertebeden türevin kuvvetine (üssüne) dif. denk derecesi denir.

Bu durumda her dif. denklem var olan türevlere göre bir polinom şeklinde yazılamaz. Böyle denklemlerin derecesi tanımlı değildir. Mertebe = $y = x''$ → 2. mertebe

↳ Mertebenin üstü kesirse derece 0

Ör: $(y'')^1 + (y')^2 = \ln y''$ ⇒ denkleminin derecesi tanımlı değildir.
↳ 1. derece

Ör: $xy' = y$ ⇒ denklemi 1. derecedendir.

$x^2y'' + xy' + 2y = e^x$ ⇒ denklemi 1. derecedendir.
2. mertebe

Polinom olmalı

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$ denk. 2. derecedendir.

Ör: $\left((y'')^{2/3}\right)^3 = (1+y')^3$ dif. denkleminin mertebesini ve derecesini bulunuz. → mertebe 2, derece 2

$(y'')^2 = (1+y')^3$

Çözüm: Eşitliğin her iki tarafının 3. kuvvetini alalım.

$(y'')^2 = (1+y')^3$ denklemi elde edilir.

Bu denklem ise 2. mertebeden ve 2. derecedendir.

Ör: $y = y(x)$ olmak üzere ve $y' = \frac{dy}{dx}$ ise aşağıdaki dif. denklemlerin mertebe ve derecelerini yazınız.

a) $y' = \cos x + x^2$ ⇒ denk. 1. mertebeden ve 1. derecedendir.

b) $y'' + 3y = x$ ⇒ " 2. mertebeden ve 1. derecedendir.

c) $(y'')^3 + (y^{iv})^1 = 0$ ⇒ " 4. mertebeden ve 1. derecedendir.

d) $(y^{iv})^2 + y'' + 3y = 0 \Rightarrow$ denk. 4. mertebeden ve 2. dereceden

e) $y'' + 9y + (y''')^2 = x \Rightarrow$ denk. 3. mertebeden ve 2. derecedendir.

Tanım: Eğer bir dif. denk. bilinmeyen fonk. ve bilinmeyen fonksiyonun var olan türevlerine göre 1. dereceden ise denkleme "lineerdir" denir.

NOT: *Bağımlı değişken y ve türevleri 1. dereceden olmalıdır. (Kuvvetleri olmamalıdır.) *

* Denklemde bağımlı değişken ve *türevleri çarpım durumunda olmamalıdır.

ÖR: $(y'')^{\cancel{2}} = (1+y')^3 \Rightarrow$ denk. lineer değildir.

$y' = \cos x + x^2 \Rightarrow$ denk lineerdir. $\quad y\cancel{y}'' + 2y' = 0$

$y'' + 3y = x \Rightarrow$ denk. lineerdir.

$(y''')^3 + y'' = 0 \Rightarrow$ denk. lineer değildir.

$y^{v} + y'' + 3y = 0 \Rightarrow$ denk lineerdir.

NOT: Eğer bir dif. denk. lineer ise denklem kesinlikle 1. derecedendir. Fakat her 1. dereceden denk. lineer olmak zorunda değildir.

ÖR: $y'' + (y)^{\cancel{2}} = 0 \Rightarrow$ denk. 2. mertebeden, 1. derecedendir. Fakat "y^2" teriminden dolayı lineer değildir.

⇒ Diferansiyel Denklemlerin Oluşturulması ⇐

Bu bölümde bir veya daha çok keyfi sabit içeren bir bağıntıdan keyfi sabitlerin yok edilmesiyle bir dif. denklemin nasıl elde edilebileceğini göreceğiz. 1. mertebeden bir dif. denklemin genel çözümü bir tane keyfi sbt içerir. Yani 1. mertebeden bir dif. denklem $f(x,y,y')=0$ olarak genel biçimde yazılabilir. Bu denklemin genel çözümü $\phi(x,y,c)=0$ olsun. Bu genel çözüm xy-düzleminde bir parametreli bir eğri ailesi belirtir. Buna göre parametreye bağlı bir eğri ailesinin dif. denklemini bulmak için eğri ailesinin denkleminde bağımsız değişkene göre bir kez türev alınır. Elde edilen denklem ile eğri ailesinin denklemi arasında parametre yok edilerek eğri ailesinin dif. denklemi elde edilir.

İntegralleri çözdüğünde çıkan "c" keyfi sabittir.

Denklem kaçıncı mertebedense o kadar keyfi sabit olur

Benzer şekilde 2. mertebeden bir dif. denklemin genel çözümü iki tane keyfi sbt içerir. O halde iki parametreye bağlı bir eğri ailesinin dif. denklemini bulmak için ise iki kere türev alınarak parametrelerin yok edilmesi gerekir.

Soru: $y = x + c$ doğru ailesinin dif. denk. bulunuz.

Çözüm: $\boxed{y' = 1}$ dif. denklemi bulunur. Eğer bulduğumuz bu ifade de "c" sabiti mevcut olsaydı amacımız bu c sabitini yok etmek olacaktı.

1 keyfi sabit var "1." mertebe

$(y)' = (x+c)'$

$\boxed{y' = 1}$

1 sbt

$x = 1$

Amaç*
keyfi sabitleri yok edene kadar işlem yapmak

Ör: $y = cx^2$ parabol ailesinin dif. denk. bulunuz.

$\hookrightarrow y' = 2cx$

Çözüm: $y' = 2cx$ oldu.

$$y = cx^2 \Rightarrow \boxed{c = \frac{y}{x^2}} \Rightarrow y' = 2cx$$

$$y' = 2cx \qquad c = \frac{y'}{2x}$$

$$y' = 2 \cdot \frac{y}{x^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{x}$$

$$y = cx^2$$

$$c = \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{y'}{2x} = \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{y'x^2 = 2yx}{x} \Rightarrow y'x = 2y$$

$$y' = \frac{2y}{x} \Rightarrow xy' = 2y$$

$$\Rightarrow \boxed{xy' - 2y = 0}$$

dif. denk. bulunur.

Öz: "1" yarıçaplı bir çember ailesinin dif. denk. bulunuz.

$r = 1$

Çözüm:

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = 1$$

$$2(x - c_1) + 2(y - c_2) \cdot y' = 0 \qquad (1.\ türev)$$

$$2 + 2y' \cdot y' + 2(y - c_2)\, y'' = 0 \qquad (2.\ türev)$$

$$2 + 2(y')^2 + 2(y - c_2) \cdot y'' = 0$$

$$2(y - c_2)\, y'' = -2 - 2(y')^2$$

$$(y - c_2) = \frac{-1 - (y')^2}{y''}$$

$$c_2 = y + \left(\frac{1 + (y')^2}{y''}\right) \quad \text{bulunur.}$$

$2(x - c_1) + 2(y - c_2) \cdot y' = 0$ ifadesinde yerine yazalım.

$$\cancel{2}(x-c_1) = -\cancel{2}(y-c_2).y'$$

$$x + (y-c_2)y' = c_1$$

$$c_1 = x + \left(\cancel{y} - \cancel{y} - \left(\frac{1+(y')^2}{y''}\right)\right).y'$$

$$c_1 = x - \left(\frac{y' + (y')^3}{y''}\right)$$ bulunur.

c_1 ve c_2 ilk denklemde yerine yazılırsa,

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = 1$$

$$\left(\cancel{x} - \cancel{x} + \left(\frac{y'+(y')^3}{y''}\right)\right)^2 + \left(\cancel{y} - \cancel{y} - \left(\frac{1+(y')^2}{y''}\right)\right)^2 = 1$$

$$\frac{(y')^2 + 2(y')^4 + (y')^6}{(y'')^2} + \frac{1 + 2(y')^2 + (y')^4}{(y'')^2} = 1$$

$$(y')^6 + 3(y')^4 + 3(y')^2 + 1 = (y'')^2$$

$$\boxed{\left((y')^2+1\right)^3 = (y'')^2}$$

dif. denk. elde edilir

ÖR: $c \in \mathbb{R}$ bir keyfi sabit o.ü. "$y(x) = ce^{2x} + x^2$" eğri ailesinin dif. denk. bulunuz.

Çözüm: $y = ce^{2x} + x^2 \Rightarrow$ c'yi yalnız bırakıp 1. türevde yerine yazalım.

(1. türev) $y' = 2ce^{2x} + 2x$

$$y = ce^{2x} + x^2$$

$$c = \frac{y - x^2}{e^{2x}}$$

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{y - x^2}{\cancel{e^{2x}}}\right) \cdot \cancel{e^{2x}} + 2x$$

$$y' = 2y - 2x^2 + 2x$$

$$\boxed{y' - 2y = 2x - 2x^2}$$ dif. denk. elde edilir.

ÖR: $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler o.ü, $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$ ile verilen eğri ailesinin sağladığı dif. denk. bulunuz.

Çözüm: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$

$$2 / \; y' = -2c_1e^{-2x} + 3c_2e^{3x}$$

$$y'' = 4c_1e^{-2x} + 9c_2e^{3x}$$

$$2y' = -\cancel{4c_1e^{-2x}} + 6c_2e^{3x}$$

$$+\; y'' = \cancel{4c_1e^{-2x}} + 9c_2e^{3x}$$

$$y'' + 2y' = 15c_2e^{3x}$$

$$\boxed{c_2 = \frac{y'' + 2y'}{15e^{3x}}}$$ bulunur.

$$-3 / \; y' = -2c_1e^{-2x} + 3c_2e^{3x}$$

$$y'' = 4c_1e^{-2x} + 9c_2e^{3x}$$

$$-3y' = 6c_1e^{-2x} - \cancel{9c_2e^{3x}}$$

$$+\; y'' = 4c_1e^{-2x} + \cancel{9c_2e^{3x}}$$

$$y'' - 3y' = 10c_1e^{-2x}$$

$$\boxed{c_1 = \frac{y'' - 3y'}{10e^{-2x}}}$$ bulunur.

Bulunan c_1 ve c_2 değerleri eğri ailesinin denk- (9)
leminde yerine yazılırsa;

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y = \left(\frac{y'' - 3y'}{10 \cancel{e^{-2x}}}\right) \cancel{e^{-2x}} + \left(\frac{y'' + 2y'}{15 \cancel{e^{3x}}}\right) \cancel{e^{3x}}$$

$$y = \frac{y'' - 3y'}{10/3} + \frac{y'' + 2y'}{15/2}$$

$$y = \frac{3y'' - 9y' + 2y'' + 4y'}{30} \Rightarrow y = \frac{5y'' - 5y'}{30}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' - y' - 6y = 0}$$

denklemi elde edilir.