2) Yerine Koyma Yöntemi :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (17)$$

denkleminin çözümünü $y = u(x) \cdot v(x)$ olmak iki tane bilinmeyen fonksiyonun çarpımı şeklinde arayalım.

u ve v, x'in birer fonksiyonudur.

$y = u \cdot v$ ise $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u$

$y' = u' \cdot v + v' \cdot u$ olur. Bu dönüşüm (17)

denkleminde yerine yazılırsa,

$u' \cdot v + v' \cdot u + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$ elde edilir.. Bu ifade u veya v ortak parantezine alınırsa,

$u' \cdot v + u\,(v' + P(x)\,v) = Q(x)$ --- (a)

veya

$v' \cdot u + v\,(u' + P(x)u) = Q(x)$ --- (b)

olur. Burada u veya v'nin herhangi birinin katsayısı "0" olacak şekilde seçilirse,

(Burada u'nun katsayısını seçelim)

$v' + P(x)v = 0$ olmalıdır. Bu denklem çözülerek $v(x)$ çarpanı bulunur. Yani,

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int P(x)\,dx = \int d(c)$$

$$\ln v + \int P(x)\,dx = \ln c$$

$$\ln v - \ln c = -\int P(x)\,dx$$

$$\ln \frac{v}{c} = -\int P(x)\,dx$$

$\frac{V}{C} = e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow V(x) = C_1 \cdot e^{-\int P(x)dx}$ bulunur.

Burada $C=1$ olmalıdır. Çünkü denklem 1. mertebeden olduğu çözümde bir tane keyfi sbt olacaktır. O nedenle burada $C=1$ seçilerek keyfi sbt ortadan kaldırılmalıdır.

Bulunan bu $V(x)$ değeri (α) denkleminde yerine yazılırsa

$$u' \cdot V + u \cdot 0 = Q(x)$$

$$u' \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$ olur. Buradan da $u(x)$ bulunur.

$$u' = Q(x)\, e^{\int P(x)dx}$$

$$\int du = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx \Rightarrow u(x) = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C$$

olur. Bulunan $u(x)$ ve $V(x)$ yerlerine yazılırsa,

$$y = u(x) \cdot V(x)$$

$$y = \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} + C \right] \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

sonucuna ulaşılır.

Ör: $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1+x^2$, $y(0)=3$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: Bu dif. denk. yerine koyma yöntemi ile çözelim.

$y = u(x)\, v(x)$ gibi bir çözümü olsun.

$y' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) - \frac{2x}{1+x^2} \cdot u(x)\, v(x) = 1+x^2$$

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \underbrace{\left[v'(x) - \frac{2x}{1+x^2} v(x) \right]}_{0} = 1+x^2 \quad \ldots (*)$$

0 old. kabul edelim.

$$v'(x) - \frac{2x}{1+x^2} v(x) = 0$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{1+x^2} v = 0 \Rightarrow \int \frac{dv}{v} - \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int d(c)$$

$$\ln v - \ln|1+x^2| = \ln c \Rightarrow \ln v - \ln c = \ln(1+x^2)$$

$$\ln \frac{v}{c} = \ln(1+x^2) \Rightarrow v = c \cdot (1+x^2)$$ burada $c=1$ olsun.

$\Rightarrow v(x) = 1+x^2$ olur.

Bu $v(x)$ ifadesini $(*)$ da yerine yazalım.

$$u'(x) \cdot \cancel{(1+x^2)} = 1+x^2$$

$$u'(x) = 1$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du - dx = 0$$

$$\int du - \int dx = \int d(c)$$

$u - x = c$

$u(x) = x + c$

$y(x) = v(x) \cdot u(x)$

$\boxed{y(x) = (1+x^2)(x+c)}$

genel çözüm elde edilir.

Şimdi $y(0)=3$ şartını yazalım.

$$y(0)=(1+0^2)(0+c)=3$$

$c=3 \Rightarrow y(x)=(1+x^2)(x+3)$

$$\boxed{y(x)=x^3+3x^2+x+3}$$

özel çözümü elde edilir.

__Ör__: $y'+y.\tan x=-\cot^2 x$ dif. denk yerine koyma yöntemi ile çözünüz.

__Çözüm__: $y(x)=u(x)\,v(x)$

$\Rightarrow y'=u'.v+u.v'$

$$u'.v+u.v'+u.v.\tan x=-\cot^2 x$$

$$v'.u+v\underbrace{(u'+u.\tan x)}_{0}=-\cot^2 x \quad \text{--- } (*)$$

$u'+u.\tan x=0 \Rightarrow \frac{du}{dx}+u.\tan x=0$

$$\int\frac{du}{u}+\int\tan x\,dx=\int dc$$

$\ln|u|-\ln|\cos x|=\ln c \Rightarrow \ln\left|\frac{u}{\cos x}\right|=\ln c$

$\Rightarrow \frac{u}{\cos x}=c \Rightarrow u(x)=c.\cos x$

Burada $c=1$ seçilmelidir.

$u(x)=\cos x$

Bulunan $u(x)$ değeri $(*)$ da yerine yazılırsa,

$$v' \cdot u + v \cdot 0 = -\cot^2 x$$

$$v' \cdot \cos x = -\cot^2 x$$

$$v' = -\frac{\cos^{\cancel{2}} x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos x}} \Rightarrow v' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\int dv + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = \int d(c) \Rightarrow v(x) - \frac{1}{\sin x} = c$$

$$\boxed{v(x) = c + \frac{1}{\sin x} = c + \operatorname{cosec} x}$$

$\sin x = t$

$\cos x\, dx = dt$

$$\int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\, dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\sin x}$$

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y(x) = \cos x \cdot (c + \operatorname{cosec} x) \Rightarrow \boxed{y(x) = \cos x \cdot c + \cot x}$$

elde edilir

ÖDEV SORULAR

1) $y' = y + \cos x - \sin x$

2) $y' + yx = x$

3) $y' + \frac{2}{x} y = 6x^2$

dif. denklemlerin yerine koyma yöntemini kullanarak çözünüz.