1. Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Lineer Dif. Denklemler

$n>2$ için önce $L(D)$ dif. operatörün bir özelliğini ispat edelim. (12)

Teorem: $L(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$

ifadesi sabit katsayılı lineer diferansiyel operatördür. Bu takdirde "r" reel veya kompleks bir sayı o.ü.

$$L(D) e^{rx} = e^{rx} . L(r) \quad --- \quad (9)$$

dır.

İspat: Her $m>0$ için, $Dy = y' \Rightarrow De^{rx} = re^{rx}$

$$D^2 e^{rx} = r^2 e^{rx}$$

$$D^3 e^{rx} = r^3 e^{rx}$$

$$- \; - \; -$$

$$D^m e^{rx} = r^m . e^{rx}$$ olduğu açıktır.

Böylece,
$$L(D) e^{rx} = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) e^{rx}$$

$$= a_0 D^n e^{rx} + a_1 D^{n-1} e^{rx} + \dots + a_{n-1} D e^{rx} + a_n e^{rx}$$

$$= a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx}$$

$$= e^{rx} (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n)$$

$$= e^{rx} . L(r) //.$$

elde edilir.

Teoremden anlaşılacağı gibi: $y = e^{rx}$ fonksiyonun (1) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart r'nin

$$L(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad --- \quad (10)$$

denklemini sağlamasıdır. Bu $L(r)$ polinomuna karakteristik polinom, (10) denklemine de karakteristik denklem denir.

Karakteristik denklemin n. dereceden bir polinom denklemi olması durumunda n tane kökü mevcuttur. Bu köklerin;

→ Tümü reel ve farklı olabilir.

→ Bazıları kompleks olabilir.

→ Bazıları çakışık olabilir.

Şimdi bu halleri ayrı ayrı ele alalım.

1.) Köklerin tümü reel ve farklı olsun.

(10) karakteristik denkleminin $r_1, r_2, ---, r_n$ köklerinin tümü reel ve farklı ise,

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \quad ---, \quad y_n = e^{r_n x}$$ fonksiyonları $(-\infty, \infty)$

aralığında (1) denkleminin n farklı çözümüdür. Bunların Wronskianı;

$$W(y_1, y_2, ---, y_n)(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & --- & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & --- & r_n e^{r_n x} \\ \vdots & \vdots & --- & \vdots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & --- & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(r_1 + r_2 + --- + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & --- & 1 \\ r_1 & r_2 & ----- & r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & --- & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılır. Bu determinantın sonucu sıfırdan farklı olduğu durumda çözümlerin lineer bağımsızlığı gösterilmiş olur.

Böylece, $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sbtler olmak üzere (1) denkleminin genel çözümü;

$$\boxed{y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}}$$

olur.

NOT: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$ determinantına Vandermonde determinantı denir.

Ör: $y''' + 2y'' - 3y' = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\Rightarrow$ $r^3 + 2r^2 - 3r = 0$ $\Rightarrow$ karakteristik denklem

$r(r^2 + 2r - 3) = 0$

$r(r-1)(r+3) = 0$

$\boxed{r_1 = 0}$ $\boxed{r_2 = 1}$ $\boxed{r_3 = -3}$ $\Rightarrow$ köklerin tümü reel ve farklıdır.

$y_1 = e^{0x} = 1$ $\quad y_2 = e^{r_2 x} = e^{x}$ $\quad y_3 = e^{r_3 x} = e^{-3x}$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$

$\boxed{y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-3x}}$ $\Rightarrow$ genel çözümü elde edilir.

2.) Köklerin bazıları kompleks olsun.

$r_1 = \alpha + i\beta$, (10) karakteristik denkleminin bir kökü ise denklemin katsayıları reel sabitler olduğundan $r_2 = \alpha - i\beta$ da karakteristik denk. bir köküdür. Daha önce de görüldüğü gibi bu eşlenik komplekş kök çifti için;

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad , \quad y_2 = e^{\alpha x}.\sin\beta x$$

reel çözümleri elde edilir. Karakteristik denklemin başka farklı kompleks köklere sahip olması halinde benzer durumlar geçerlidir.

Ör: $y^{IV} - y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\Rightarrow$ $r^4 - 1 = 0$ $\Rightarrow$ karakteristik denklem

$$(r^2-1).(r^2+1) = 0$$

$$(r-1).(r+1).(r^2+1) = 0$$

$r_1 = 1$ $\quad r_2 = -1$ $\quad r_3 = i$ $\quad r_4 = -i$

$y_1 = e^{r_1 x} = e^{x}$ $\quad y_2 = e^{r_2 x} = e^{-x}$ $\quad y_3 = e^{\alpha x}.\cos\beta x = \cos x$ $\quad y_4 = e^{\alpha x}\sin\beta x = \sin x$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4$$

$$\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3.\cos x + c_4.\sin x}$$

3) Köklerin bazıları çakışık olsun.

Varsayalım ki r_1, (10) karakteristik denkleminin k katlı bir reel kökü olsun. Bu durumda çözümler; $r_1 = r_1 = \dots = r_1$ için;

$$y_1 = e^{r_1 x} \;,\; y_2 = xe^{r_1 x} \;,\; y_3 = x^2 e^{r_1 x} \;,\; y_4 = x^3 e^{r_1 x} \;\dots ,\; y_k = x^{k-1} e^{r_1 x}$$

olarak elde edilir.

Eğer karakteristik denk. katlı kökü kompleks ise yukarıdaki durumlar yine geçerlidir.

Yani, $r_1=\alpha+i\beta$, (10) denkleminin k katlı bir kökü ise katsayılar reel old. dan $r_2=\alpha-i\beta$ da k katlı bir köktür. Dolayısıyla bu katlı eşlenik kök çifti için

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad y_3=x\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\quad y_4=xe^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$$

$$y_5=x^2e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\quad y_6=x^2e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\quad \dots,\quad y_{k-1}=x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$y_k=x^{k-1}e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$$

reel çözümler elde edilir.

Ör: $y'''+5y''=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\Rightarrow\ r^3+5r^2=0 \Rightarrow$ karakteristik denk.

$r^2(r+5)=0$

$r_1=r_2=0 \qquad r_3=-5$

$$\left.\begin{aligned} y_1&=e^{r_1x}=e^0=1\\ y_2&=xe^{r_1x}=x\cdot e^0=x\\ y_3&=e^{r_3x}=e^{-5x}\end{aligned}\right\} \Rightarrow y=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$$

$$y=c_1+c_2x+c_3e^{-5x}$$ denklemin genel çözümüdür.