⇒ Homojen Hale Dönüştürülebilen Diferansiyel Denklemler ⇐

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx - (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$$

denklemi $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ şeklinde düzenlenmiş olsun.

Burada a_i, b_i, c_i, $(i = 1,2)$ belli sabitler olmak üzere bu katsayılara bağlı olarak yukarıdaki denklem için iki durum söz konusudur.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ düzlemde iki doğruyu göstersinler.

1) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ ise doğrular kesişir. Bu durumda,

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ sisteminin tek bir (h,k) gibi bir çözümü verdir. Bu durumda,

$$\left.\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned}\right\}$$ dönüşümü yapılarak denklem homojen dif. denkleme dönüştürülür.

2) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ ise doğrular paraleldir. Bu durumda,

$z = a_1x + b_1y$ veya $z = a_2x + b_2y$, $dz = dx + dy$

$dy = dz - dx$

dönüşümü yapılarak denk yine homojen dif. denk dönüştürülür. Değişkenlerine ayrılabilir hale getirerek çözülür.

<u>Ör</u>: $(x + 2y + 7)y' + (2x - y + 4) = 0$ dif. denk. çözünüz.

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y - 4}{x + 2y + 7}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -2 \quad & b_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \quad & b_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{a_1}{a_2} = -2 \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ oldıdan bu doğrular kesişir. Bu durumda

(h,k) gibi bir çözüm mevcuttur.

$$\left.\begin{array}{lll} x = X + h & \Rightarrow x = X - 3 & \Rightarrow dx = dX \\ y = Y + k & \Rightarrow y = Y - 2 & \Rightarrow dy = dY \end{array}\right\} \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{array}{l} -2h + k - 4 = 0 \\ h + 2k + 7 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2h + k = 4 \\ h + 2k = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -2\cancel{h} + k = 4 \\ \cancel{2h} + 4k = -14 \\ \hline 5k = -10 \\ k = -2 \\ h = -3 \end{array}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y - 4}{x + 2y + 7} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{-2(X-3) + (Y-2) - 4}{X - 3 + 2(Y-2) + 7}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-2X + Y}{X + 2Y} = \frac{\cancel{X}\left(-2 + \frac{Y}{X}\right)}{\cancel{X}\left(1 + 2\frac{Y}{X}\right)} = F\left(\frac{Y}{X}\right)$$ olarak yazılabildiğinden denk. homojen oldu.

$Y = uX \rightarrow dY = u\,dX + X\,du \rightarrow$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$\frac{u\,dX + X\,du}{dX} = \frac{-2 + \frac{uX}{X}}{1 + 2 \cdot \frac{uX}{X}}$$

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{-2 + u}{1 + 2u}$$

$$X \cdot \frac{du}{dX} = \frac{-2 + u}{1 + 2u} - u = \frac{-2 + \cancel{u} - \cancel{u} - 2u^2}{1 + 2u} = \frac{-2(1 + u^2)}{1 + 2u}$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{-2(1+u^2)}{1+2u}$$

$$\frac{1+2u}{-2(1+u^2)}\, du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1+2u}{2(1+u^2)}\, du = \int d(c)$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1+u^2}\, du = \int d(c)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{2}\ln|1+u^2| = C$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| = C$$

$$\boxed{\ln|x+3| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y+2}{x+3}\right) + \frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y+2}{x+3}\right)^2\right| = C}$$

elde edilir.

Ör: $(x+y+1)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$ dif. denk. çözünüz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{-2x-2y+1}$

$a_1 = 1 \quad b_1 = 1$

$a_2 = -2 \quad b_2 = -2$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

old. dan doğrular paraleldir.

$z = a_1x + b_1y$ veya $z = a_2x + b_2y$ kullanılabilir.

$z = x+y$

$dz = dx + dy$

$dy = dz - dx$

yerlerine yazalım.

$$\frac{dz - dx}{dx} = \frac{z+1}{-2z+1}$$

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z+1}{-2z+1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z+1}{-2z+1} + 1 = \frac{z+1 - 2z+1}{-2z+1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-z+2}{-2z+1} \Rightarrow -\frac{2z+1}{-z+2}\,dz = dx$$

$$\int dx + \int \frac{2z - 1}{2-z}\,dz = \int d(c)$$

$$x + \int \frac{2z-4+3}{2-z}\,dz = c \Rightarrow x - \int \frac{2z-4}{z-2}\,dz + \int \frac{3}{2-z}\,dz = c$$

$$x - 2z - 3\ln|z-2| = c$$

$$x - 2(x+y) - 3\ln|x+y-2| = c$$

elde edilir.

ÖDEV SORULAR

1) $(x-y-1)\,dx + (4y+x-1)\,dy = 0$

Karışık Sorular

1) $\left(y + \frac{1}{x}\right)dx + x\,dy = 0$

2) $xy' + 2xy^2 - y = 0$

3) $(x^2+y^2)\,dy + 2y^2\,dx = 0$

4) $(1+2x)\,y\,dy + (1+y^2)\,dx = 0$