⇒ Tam Diferansiyel Denklemler ⇐

→ Sonra bir denklem verecek dx'in önündekini y'ye göre türev alıp birbirine eşit mi bakacaksın

Birinci mertebeden ve birinci dereceden diferansiyel denklemleri çözmek için bir diğer yöntem, bir fonksiyonun tam diferansiyeli kavramına dayanır.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad --- (10)$$

şeklinde bir dif. denklemde " $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ " şartı sağlanıyorsa bu tip dif. denk. tam diferansiyel denklemdir. Bu dif. denk. Bu takdirde bir " $U(x,y)$ " fonksiyonu bu denklemin bir çözümü olsun. O halde bu fonksiyon,

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

olacak şekilde mevcuttur. Çözüm için $U(x,y)$ fonksiyonunu bulmak yeterlidir. Bu U fonksiyonu $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ denkleminden her iki tarafın x'e göre integrali alınarak;

$$U(x,y) = \underbrace{\int P(x,y)\,dx}_{S(x,y)} + f(y) \quad --- (11)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadede $f(y)$ fonksiyonunu bulmak gerekir. O nedenle,

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} + f'(y) = Q(x,y)$$

eşitliğinin kullanılması $f'(y)$'i verecektir. Bulunan $f(y)$

değeri (11) denkleminde yerine yazılarak tam diferansiyel denklemin çözümü elde edilir. (32)

ÖRN.: $\underbrace{\left(2xy^2 - y\cdot\sin x + 2x - 1\right)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{\left(2x^2y + \cos x + \frac{1}{y}\right)}_{Q(x,y)}dy = 0$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

y'ye göre türev

Çözüm: $P(x,y) = 2xy^2 - y\cdot\sin x + 2x - 1$

$Q(x,y) = 2x^2y + \cos x + \frac{1}{y}$

x'e göre türev

eşitse tam dif denk

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 4xy - \sin x \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 4xy - \sin y \end{aligned}\right\}$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ olduğundan denklem tam dif. denklemdir.

Bu dif. denklemin $u(x,y)$ gibi bir çözümü mevcuttur.

Ve bu çözüm $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ veya $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ şartını sağlar.

$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow$ denkleminde her iki tarafın x'e göre integralini aldım.

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + f(y)$$

$$u(x,y) = \int \left(2xy^2 - y\cdot\sin x + 2x - 1\right)dx + f(y)$$

$u(x,y) = x^2y^2 + y\cdot\cos x + x^2 - x + f(y) \Rightarrow$ Buradaki $f(y)$ bulmalıyız.

$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow$ bağıntısını kullanırsak $f(y)$ elde ederiz

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y + \cos x + f'(y) = Q(x,y) \quad \text{olmalı.}$$

$$\cancel{2x^2y} + \cancel{\cos x} + f'(y) = \cancel{2x^2y} + \cancel{\cos x} + \frac{1}{y}$$

$$f'(y) = \frac{1}{y}$$

$$f(y) = \int \frac{1}{y}\,dy$$

$$f(y) = \ln|y| + c$$

Sonuç olarak $u(x,y) = x^2y^2 + y.\cos x + x^2 - x + \ln|y| + c = 0$ olarak elde edilir. $\Rightarrow$

Ör: $(2x + e^y)\,dx + (x.e^y)\,dy = 0$ dif. denk. çözünüz.

Çözüm:
$$P(x,y) = 2x + e^y$$
$$Q(x,y) = x.e^y$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= e^y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= e^y \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

olduğundan denklem tam diferansiyel denklemdir.

Bu denklemin $u(x,y)$ gibi bir çözümü vardır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + f(y)$$

$$u(x,y) = \int (2x + e^y)\,dx + f(y)$$

$$u(x,y) = x^2 + x.e^y + f(y)$$

olur. $f(y)$'i bulmak için $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ şartını kullanalım

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot e^y + f'(y) = Q(x,y)$$

$$x \cancel{e^y} + f'(y) = x \cancel{e^y}$$

$$f'(y) = 0$$

$$f(y) = \int 0 \, dy$$

$$f(y) = c$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x \cdot e^y + c = c_1$$

$$x^2 + x \cdot e^y = \underbrace{c_1 - c}_{c_2} \Rightarrow x^2 + x \cdot e^y = c_2$$ olur.

Ör: $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$ dif. denk. çözünüz.

Çözüm: $P(x,y) = \frac{y}{x}$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x}$ ve $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x}$ old. dan

$Q(x,y) = y^3 + \ln x$ $\quad$ denk. tam dif. denk. dir.

$u(x,y)$ gibi bir çözümü vardır.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int Q(x,y) \, dy + g(x)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int (y^3 + \ln x) \, dy + g(x)$$

$$u(x,y) = \frac{y^4}{4} + y \cdot \ln x + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x} + g'(x) = \frac{y}{x} = P(x,y)$$

$$g'(x) = 0$$

$$g(x) = c \Rightarrow$$ Sonuç diğer sayfa

$$u(x,y) = \frac{y^4}{4} + y.\ln x + c = c_1$$

$$\boxed{\frac{y^4}{4} + y.\ln x = c_2} \quad (c_2 = c_1 - c)$$

olarak elde edilir.

Ör: $y.e^x\,dx + e^x\,dy = 0$ dif. denk. çözünüz.

1. yol: Denk. değişkenlerine ayrılabilirdir.

$$\frac{\cancel{y}.\cancel{e^x}}{y.\cancel{e^x}}dx + \frac{\cancel{e^x}}{y.\cancel{e^x}}dy = 0$$

$$dx + \frac{1}{y}dy = 0 \Rightarrow \int dx + \int \frac{1}{y}dy = \int d(c)$$

$$\Rightarrow x + \ln|y| = \ln c$$

$$x = \ln|c| - \ln|y| \Rightarrow x = \ln\left|\frac{c}{y}\right|$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{c}{y} \Rightarrow e^x.y = c$$

olur.

2. yol: $\left.\begin{array}{l} P(x,y) = y.e^x \\ Q(x,y) = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = e^x = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x$

old.dan denk. aynı zamanda tam dif. denk.dir

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + f(y)$$

$$u(x,y) = \int e^x.y\,dx + f(y)$$

$u(x,y) = e^x.y + f(y) \Rightarrow f(y)$'i bulmak için $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

bağıntısını kullanalım.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{e^x} + f'(y) = \cancel{e^x} = Q(x,y)$$

$$f'(y) = 0$$

$$f(y) = c_1$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = e^x y + c_1 = c_2$$

$$e^x y = c_2 - c_1 \quad \Rightarrow \quad e^x y = c$$ dur.

Ö2 ; $(\cos y + y \cdot \cos x)\,dx + (\sin x + a \cdot x \cdot \sin y)\,dy = 0$

denkleminin bir tam dif. denk. olabilmesi için a ne olmalıdır. a'yı bulduktan sonra genel çözümünü bulunuz.

Çözüm ; $P(x,y) = \cos y + y \cdot \cos x$

$Q(x,y) = \sin x + a \cdot x \cdot \sin y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ olmalıdır.

$$-\sin y + \cancel{\cos x} = \cancel{\cos x} + a \sin y$$

$$-\sin y = a \cdot \sin y$$

$a = -1$ olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &= \cos y + y \cdot \cos x \\ Q(x,y) &= \sin x - x \cdot \sin y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ denklemi sağlar. Şimdi çözüm olan u fonksiyonunu bulalım.

$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$ olduğundan, $U(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + g(x)$

dur. $U(x,y) = \int (\sin x - x \sin y)\,dy + g(x)$

$$U(x,y) = y \cdot \sin x + x \cdot \cos y + g(x)$$

$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$ bağıntısını kullanarak $g(x)$'i bulalım.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y \cdot \cancel{\cos x} + \cancel{\cos y} + g'(x) = \cancel{\cos y} + y \cdot \cancel{\cos x}$$

$$g'(x) = 0$$

$$g(x) = c$$

$\Rightarrow U(x,y) = y \cdot \sin x + x \cdot \cos y + c = c_1$

$$y \cdot \sin x + x \cdot \cos y = c_2 \qquad c_2 = c_1 - c$$

dur.

ödev

Ör: $(y+3x)\,dx + x\,dy = 0$ dif. denk. çözünüz.

Çözüm: $P(x,y) = y+3x$ $\quad Q(x,y) = x$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$ olduğundan denk. tam dif. denk.dir.

O halde $u(x,y)$ gibi bir çözümü mevcuttur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + f(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int (y+3x)\,dx + f(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = yx + \frac{3x^2}{2} + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{x} + f'(y) = \cancel{x}$$

$$f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = c$$

$$\Rightarrow u(x,y) = xy + \frac{3x^2}{2} = C_1$$ olur.

ÖDEVLER: 1) $(ye^x + y)\,dx + (e^x + ax)\,dy = 0$ denkleminin tam dif denklem olabilmesi için a ne olmalıdır? a'yı bulduktan sonra genel çözümü bulunuz

2) $(x^2+y^2+7)\,dy + (2xy + x^2 + 2)\,dx = 0$

3) $y^2(3x+2y)\,dx + 3y\cdot(x+y)^2\,dy = 0$

4) $(2x^2 + y\cdot\cos x)\,dx + (\sin x + y^3)\,dy = 0$

dif. denk. genel çözümlerini bulunuz.