Diferansiyel Denklemler II

Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

Ders Notları

⇒ SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER :

Bu bölümde katsayıların sbt olması halinde lineer df. denklemlerin genel çözümlerinin elde edilmesi için bazı yöntemler verilecektir. Sabit katsayılı lineer denklemler, lineer denklemlerin bir alt sınıfını teşkil ederler ve uygulamada sık sık ortaya çıkarlar.

Sabit Katsayılı Homojen Lineer Denklemler :

Önce $a_0, a_1, \dots, a_n$ reel sabitler olmak üzere n. mertebeden,

$$\left.\begin{aligned} Ly &= a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \\ &= (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{---} \; (1)$$

homojen lineer df. denklemin genel çözümünü elde edelim. Bunun için denklemin lineer bağımsız n sayıda çözümünü bulmak yeterlidir.

$n=1$ için $(a_0 D + a_1) y = 0$ denklemini ele alalım. Bu denklemin çözümü aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$(a_0 D + a_1)\, y = 0 \quad \text{---} \; (2)$$

$$\Rightarrow \quad a_0 Dy + a_1 y = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_0 y' + a_1 y = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_0 \frac{dy}{dx} + a_1 y = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 \frac{dy}{y} + a_1 dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_0 \int \frac{dy}{y} + a_1 \int dx = \int d(c)$$

$$\Rightarrow \quad a_0 \ln|y| + a_1 x = \ln c$$

$$a_1 x = \ln c - a_0 \ln y$$

$$a_1 x = \ln c - \ln y^{a_0} \quad \Rightarrow \quad a_1 x = \ln\left|\frac{c}{y^{a_0}}\right|$$

$$\Rightarrow \quad e^{a_1 x} = \frac{c}{y^{a_0}} \quad \Rightarrow \quad y^{a_0} = c \cdot e^{-a_1 x}$$

$$\Rightarrow \quad \left(y^{a_0}\right)^{1/a_0} = c \cdot e^{-\frac{a_1}{a_0} x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = c \cdot e^{-\frac{a_1}{a_0} x}}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi birinci mertebeden olan bu homojen lineer denk., üstel tip bir $e^{-\frac{a_1}{a_0} x}$ çözümüne sahiptir. Denklemin genel çözümü ise c bir keyfi sbt olmak üz.,

$$\boxed{y = c \cdot e^{-\frac{a_1 x}{a_0}}}$$

şeklindedir.

Yüksek mertebeden sbt katsayılı homojen lineer dif. denklemlerin üstel tip çözümlere sahip olacağı beklenebilir. Bunun için önce $n=2$ halini daha sonra da genel hali ayrı ayrı ele alalım.

İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Lineer Dif. Denk:

$n=2$ için (1) denklemi $(a_0 D^2 + a_1 D + a_2)y = 0$ --- (3) şeklindedir. Bu durumda "r" bir reel veya kompleks sbt olmak üzere, $y=e^{rx}$ ifadesinin (3) denkleminin bir çözümü olduğunu kabul edelim.

$$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2)\, y = 0 \qquad y = e^{rx}$$

$$a_0 D^2 y + a_1 D y + a_2 y = 0 \qquad y' = r e^{rx}$$

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad y'' = r^2 e^{rx}$$

$$a_0 . r^2 e^{rx} + a_1 . r . e^{rx} + a_2 . e^{rx} = 0$$

$$(a_0 r^2 + a_1 r + a_2) . e^{rx} = 0 \quad --- (4)$$

elde edilir. (4) denkleminden açıktır ki $y=e^{rx}$ fonksiyonunun (3) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart r'nin $a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ --- (5) polinom denkleminin bir kökü olmasıdır. Burada, "$a_0 r^2 + a_1 r + a_2$" ifadesine <u>karakteristik polinom</u>, (5) denklemine ise (3) denkleminin <u>karakteristik denklemi</u> denir.

(5) denklemi ikinci dereceden bir polinom denk. olduğundan

iki kökü mevcuttur. Bu kökler birbirinden farklı ve reel olabilirler, kompleks olabilir yada çakışık reel olabilirler.

(i) (5) denkleminin kökleri reel ve farklı olsun.

Yani r_1 ve r_2 gibi iki kökü olsun. (3) denkleminin iki çözümü $y_1 = e^{r_1 x}$ ve $y_2 = e^{r_2 x}$ $x \in (-\infty, \infty)$ şeklindedir.

Bu durumda $\forall x \in (-\infty, \infty)$ için,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = r_2 . e^{(r_1 + r_2)x} - r_1 e^{(r_1 + r_2)x}$$

$$= (r_2 - r_1) . e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$$

oldu̇ğundan $y_1 = e^{r_1 x}$ ve $y_2 = e^{r_2 x}$ fonksiyonları $x \in (-\infty, \infty)$ aralığında lineer bağımsızdır. Bu durumda c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$\boxed{y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$$

fonksiyonu (3) denkleminin genel çözümüdür.

Ör: $y'' - y' - 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\Rightarrow y = e^{rx}$

$y' = r e^{rx}$

$y'' = r^2 e^{rx}$

$$r^2 e^{rx} - r e^{rx} - 2 e^{rx} = 0$$

$$\underbrace{(r^2 - r - 2)}_{0} e^{rx} = 0$$

$r^2 - r - 2 = 0$ $\Rightarrow$ karakteristik denklem

$(r-2)(r+1) = 0$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} y_1 = e^{r_1 x} = e^{2x} \\ y_2 = e^{r_2 x} = e^{-x} \end{array}\right\}$ olur.

$r_1 = 2$ $\quad r_2 = -1$

$$w(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{x} - 2e^{x} = -3e^{x} \neq 0$$

old. dan lineer bağımsızdırlar.

Bu durumda $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$ genel çözümü elde edilir.

Ör: $y'' + 4y' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\Rightarrow$ $y = e^{rx}$ $\quad r^2 e^{rx} + 4r e^{rx} = 0$

$y' = r e^{rx}$ $\quad \underbrace{(r^2 + 4r)}_{0} e^{rx} = 0$

$y'' = r^2 e^{rx}$

$r^2 + 4r = 0 \Rightarrow$ karakteristik denklem

$r(r+4) = 0$

$r_1 = 0 \quad r_2 = -4 \Rightarrow$ $y_1 = e^{r_1 x} = e^{0} = 1$

$y_2 = e^{r_2 x} = e^{-4x}$

$\Rightarrow$ $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$.

$\boxed{y = c_1 + c_2 e^{-4x}}$ genel çözümü elde edilir.

Ör: $4y'' - y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\Rightarrow$ $4r^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ karakteristik denk.

$4r^2 = 1$

$r^2 = 1/4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1 = 1/2 \\ r_2 = -1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $y_1 = e^{r_1 x} = e^{x/2}$, $y_2 = e^{r_2 x} = e^{-x/2}$ $\Rightarrow$ genel çözüm $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$\boxed{y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/2}}$

Ör: $y'' - 9y = 0$ dif. denk. genel çöz. bulunuz.

$\Rightarrow \quad r^2 - 9 = 0$

$(r-3)(r+3) = 0$

$r_1 = 3 \quad r_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} y_1 = e^{r_1 x} = e^{3x} \\ y_2 = e^{r_2 x} = e^{-3x} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}}$

denklemin genel çözümü.

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0$$

old. dan y_1 ve y_2 lineer bagımsızdır.