Diferansiyel Denklemler 1

2. HAFTA

Ders Notları

Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

⇒ Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri ⇐

Bilindiği gibi cebirde, bir cebirsel denklemi sağlayan sayıların bulunması istenir. Eğer varsa cebirsel denklemi sağlayan sayılara denklemin çözümleri veya kökleri denir. Örneğin, $x=1$ sayısı $x^3+2x^2-5x+2=0$ denklemini sağladığından denklemin bir çözümüdür. Şüphesiz denklemin başka çözümleri de mevcut olabilir. Diferansiyel denklemlerde ise, bir dif. denk. sağlayan fonksiyonların bulunması istenir. Böyle bir fonksiyona dif. denklemin çözümü denir. Şimdi daha kesin bir tanım verelim.

Tanım: n. mertebeden

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad \dots \quad (1)$$

dif. denklemi ve reel eksenin bir I aralığında tanımlı ve bu aralıkta n. mertebeye kadar türetilebilir bir $\phi(x)$ fonk. verilmiş olsun. Eğer (1) denkleminde y yerine $\phi(x)$ yazıldığında denklem özdeş olarak sağlanıyorsa, yani her $x \in I$ için,

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

oluyorsa, $\phi(x)$ fonksiyonuna I'da (1) denkleminin bir <u>çözümü</u> denir.

Yerine yazdığında sağlamalı

(11)

Örn: $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ $(x \neq 0)$ fonksiyonu $y'' - \left(\frac{2}{x^2}\right) y = 0$

denkleminin bir çözümüdür. Gerçekten de;

$\phi'(x) = 2x + x^{-2}$ } türevleri denklemde y'' ve y yerine

$\phi''(x) = 2 - 2x^{-3}$ } yazılırsa;

$$(2 - 2x^{-3}) - (2x^{-2}).(x^2 - x^{-1}) \stackrel{?}{=} 0$$

$$= \cancel{2} - \cancel{2x^{-3}} - \cancel{2} + \cancel{2x^{-3}} = 0 \quad \text{oldu.}$$

Uyarı!! Bir dif. denklemin yazılabilmesi, bu denklemin mutlaka bir çözüme sahip olması anlamına gelmemelidir. Örneğin,

$$(y')^2 + y^2 = -1 \rightarrow \text{çözüm yok}$$

dif. denkleminin bir reel çözümü mevcut değildir. Çünkü negatif olmayan sayıların toplamı negatif olamaz. Benzer şekilde,

$$(y')^2 + y^2 = 0 \rightarrow 1 \text{ çözümü var}$$

dif. denk. tek bir çözüme sahiptir ve bu çözüm $y = 0$ dır.

Bu hallerin dışında bir dif. denklem "sonsuz adelukta" çözüme sahip olabilir. Diferansiyel denklemde önemli bir problem, bir dif. denklemin, belki bazı çözümleri hariç tüm çözümlerini veren bir çözüm elde etmektir. Böyle bir çözüme denklemin "genel çözümü" denir. Genel çözüm, keyfi sabitleri içerir.

(Genel çözümdeki bağımsız keyfi sbt sayısı denklemin mertebesi kadardır.)

Bir dif. denklemin genel çözümündeki keyfi sabitlerin özel seçimiyle genel çözümden elde edilen herbir çözüme denklemin "özel çözümü" denir. Özel çözümler keyfi sabitlere bağlı değildir.

↳ keyfi sabit içermeyen çözüm
↳ c'ye değer verince bulunur

Bazen bir dif. denk. genel çözümdeki keyfi sabitlere bir değer verilerek elde edilemeyen çözümlere de sahip olabilir. Böyle çözümlere de "aykırı (singüler) çözüm" denir.

c'ye değer verince bulunmaz

Ör: C'nin herbir seçimi için $y = ((x^2/4)+c)^2$ fonksiyonu $y' = xy^{1/2}$ denkleminin bir çözümüdür. Bu y fonk. bir keyfi sbt içerdiğinden denklemin genel çözümüdür. Keyfi olarak,

$c=0$ için $y = \left(\frac{x^2}{4}\right)$ $\quad$ $c=100$ için $y = \left(\frac{x^2}{4}+100\right)^2$

$c=1$ için $y = \left(\frac{x^2}{4}+1\right)^2$

çözümleri birer özel çözümdür.

$y=0$'da bu denklemin bir çözümüdür. fakat genel çözümde "c" ye değer verilerek elde edilemediği için bu çözüme aykırı çözüm denir.

$\Longrightarrow$ $y' = F(x)$ Denklemi $\Leftarrow$

Bir dif. denklemi çözmek, onun genel çözümünü bulmak demektir. Gerçekte, genel çözümün elde edilebildiği denklemler sınıfı oldukça dardır. Bu derste, genel çözümleri elde edilebilen denklemler ele alınacaktır. Böyle denklemlerin en basiti, birinci mertebeden ve birinci dereceden

$$y' = F(x) \quad \ldots (2)$$

denklemidir. Burada $F(x)$, $a<x<b$ aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur. Açıktır ki, (2) denkleminin çözümleri, türevleri $F(x)$'e eşit olan fonksiyonlardan ibarettir. Türev ve belirsiz integral ilişkisi hatırlanırsa, (2)'nin çözümlerinin,

$$y = \int F(x)\,dx + C \quad --- (3)$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada C, integral sabitidir.

Demek ki, (2) denkleminin genel çözümü, denklemin doğrudan integrali alınarak elde edilebilir. Bu düşünceden hareket ile, yapılan işlemin ardışık uygulanması, n. mertebeden

$$y^{(n)} = F(x) \quad --- (4)$$

dif. denkleminin genel çözümünün de n defa ardışık integral almak suretiyle elde edilebileceğini gösterir.

Ör: a) $y' = x$ ⟹ SORMUŞ

b) $y'' = \sin x$ ⟹ türevin tersi integral

denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.

Çözüm: a) $y' = x \Rightarrow y = \int x\,dx + c \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{2} + c}$ olur.

b) $y'' = \sin x \Rightarrow y' = \int \sin x\,dx + c_1 \Rightarrow y' = -\cos x + c_1$

$\Rightarrow y = \int -\cos x\,dx + \int c_1 dx \Rightarrow \boxed{y = -\sin x + c_1 x + c_2}$ olur.

⇒ Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri ⇐

Dif. denklemler içeren uygulamalarda, denklemin genel çözümünden çok, önceden verilen yardımcı koşulları sağlayan çözümünün bulunması istenir. Yardımcı koşullar, bağımsız değişkenin bir veya daha çok değeri için bilinmeyen fonksiyonun ve onun türevlerinin önceden verilmesi şeklinde ortaya çıkar.

Eğer yardımcı koşullar, bağımsız değişkenin birtek değeri için veriliyorsa <u>başlangıç koşulları</u>, iki veya daha çok değeri için veriliyorsa <u>sınır koşulları</u> adını alır.

Bir dif denk; başlangıç koşulları ile birlikte bir <u>başlangıç değer problemi</u>, sınır koşulları ile birlikte ise bir <u>sınır-değer problemi</u> oluşturur.

<u>Ör:</u> $y' = y \quad , \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow$ <u>Başlangıç</u> değer problemi

1 x var başlangıç

$y'' + 2y' = e^x \quad , \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 2 \quad \Rightarrow$ <u>Başlangıç</u> değer prob.

$y'' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad \Rightarrow$ Sınır değer problemi

2 x var sınır

$y'' + 2y' = e^x \quad , \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3 \quad \Rightarrow$ Sınır değer problemi

<u>NOT:</u> Bir başlangıç değer veya sınır değer probleminin çözümü hem dif. denk. hem de yardımcı koşulları sağlayan bir $y = y(x)$ fonksiyonudur. Denklemin genel çözümünün bilinmesi halinde başlangıç ve sınır değer problemlerinin nasıl elde edilebileceğini örneklerle açıklayalım.

Ör: $y'' = \sin x$ → integral , $y(0) = a$, $y'(0) = b$ başlangıç değer problemının çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y'' = \sin x$

$$y' = \int \sin x\, dx + c_1 \Rightarrow y' = -\cos x + c_1$$

$$\Rightarrow y = \int -\cos x\, dx + \int c_1\, dx + c_2$$

$$\boxed{y = -\sin x + c_1 . x + c_2} \Rightarrow \text{genel çözüm.}$$

$$y(0) = a \Rightarrow a = -\sin 0 + c_1 . 0 + c_2$$

$$c_2 = a$$

$$y'(0) = b \Rightarrow y' = -\cos x + c_1 \rightarrow b = -\cos 0 + c_1$$

$$b = -1 + c_1$$

$$c_1 = b + 1$$

$$\Rightarrow y = -\sin x + c_1 . x + c_2$$

$$\boxed{y = -\sin x + (b+1) . x + a} \Rightarrow \text{özel çözüm}$$

Ör: $y'' = \sin x$, $y(0) = a$, $y(\pi) = b$ sınır değer probleminin özel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y = -\sin x + c_1 x + c_2$

$$y(0) = a \Rightarrow a = -\sin 0 + c_1 . 0 + c_2$$

$$c_2 = a$$

$$y(\pi) = b \Rightarrow b = -\cancel{\sin \pi} + c_1 \pi + c_2$$

$$b = c_1 . \pi + a$$

$$\boxed{c_1 = \frac{b-a}{\pi}} \Rightarrow$$

$$y = -\sin x + c_1 x + c_2$$

$$\boxed{y = -\sin x + \left(\frac{b-a}{\pi}\right)x + a} \Rightarrow \text{özel çözüm.}$$

Yukarıdaki iki örnek de de, başlangıç ve sınır değer problemlerinin tek çözümü olduğuna örnek verilmiştir. Genel olarak başlangıç ve sınır değer problemlerinin tek çözümü olabilir, sonsuz çözüm olabilir veya çözümleri mevcut olmayabilir.

Hem başlangıç hemde sınır değer problemleri için çözümlerin varlığını ve tekliğini garanti eden varlık – teklik teoremleri ispat edilmiştir. Sınır değer problemleri için çözümlerin varlığı ve tekliğini ispat eden teoremler çok karışık hipotezler içerir. O nedenle, bu derste yalnızca başlangıç değer problemleri için varlık – teklik teoremlerini ifade edeceğiz.

⇒ Başlangıç Değer Problemleri için Varlık ve Teklik Teoremleri

Bu bölümde hangi tip dif. denklemlerin varlığının ve tekliğinin teoremlerini inceleyeceğimizi aşağıdaki şema açıkça göstermektedir.

Varlık – Teklik Teoremleri

- 1. dereceden ve 1. mertebeden lineer dif. denk.
- 1. dereceden ve 1. mertebeden lineer olmayan dif. denk.
- 2. mertebeden ve 1. dereceden lineer dif. denk.