⇒ 1. MERTEBEDEN VE 1. DERECEDEN ~~[illegible]~~ ⇐ DIFERANSIYEL DENKLEMLER

Bu bölümde çözümleri elde edilebilen 1. mertebeden ve 1. dereceden bazı denklem tipleri ele alınacaktır. Ancak hemen belirtelim ki, bu sınıfa giren tüm denklem tipleri için geçerli genel bir çözüm yöntemi yoktur. Her tip denklem kendi yapısına bağlı bir çözüm yöntemine sahiptir. Klasik tipler; değişkenlerine ayrılabilir, tam ve lineer dif. denklemlerdir. Bunların dışında bazı denklemler, uygun değişken değiştirmeyle, klasik tiplerden birine dönüştürülebilir. Homojen, Bernoulli ve Riccati böyle denklemlerdir.

→ Denklemin Şekli ←

İlk bölümdeki mertebe ve derece tanımları dikkate alınırsa, 1. mertebeden ve 1. dereceden bir dif. denklem,

$$Q(x,y)\cdot y' + P(x,y) = 0 \quad \text{--- (5)}$$

biçiminde yazılabilir. Burada P ve Q, x ve y'nın verilmiş fonksiyonlarıdır. $Q(x,y) \neq 0$ olduğu bir bölgede, (5) denklemi

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \quad ; \quad \left(F = \frac{P}{-Q} \right) \quad \text{--- (6)}$$

olarak da yazılabilir. (6) denklemine birinci mertebeden ve birinci dereceden dif. denklemlerin <u>normal formu</u> denir. Normal formdaki denklemlerin önemi, bunlar için bir varlık-teklik teoremi'nin bilinmesinden ileri gelir.

Bazen (5) denklemini;

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad \text{--- (7)}$$

şeklinde diferansiyel formda yazmak daha faydalıdır. Bu yazılışta her iki değişken aynı derecede öneme sahiptir.

$\rightarrow X(x)\cdot dx + Y(y)\cdot dy = 0$

⇒ Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler ⇐

Eğer 1. mertebe ve 1. dereceden bir dif. denklem uygun bir çarpanla çarpıldıktan veya bölündükten sonra

$$X(x)\,dx + Y(y)\,dy = 0 \qquad \text{--- (8)}$$

x'in önü sadece x, y'nin

biçimini alıyorsa denkleme değişkenlerine ayrılabilir denklem denir. Burada X sadece x'in, Y ise sadece y'nin bir fonksiyonudur. Dikkat edecek olursak, $y' = \frac{dy}{dx}$

$X(x)\cdot dx + Y(y) - y = 0$

$x+2)\,dx + (y-1)\,dy = 0$

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

biçiminde verilen bir denklemin;

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &= A_1(x).\,B_1(y) \\ Q(x,y) &= A_2(x).\,B_2(y) \end{aligned}\right\}$$ olması durumunda değişkenlerine ayrılabilir olacağı kolayca görülür. Çünkü bu ifadeler denklemde

yerlerine yazılırsa;

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$\frac{A_1(x)\,\cancel{B_1(y)}\,dx}{\cancel{B_1(y)}.A_2(x)} + \frac{A_2\cancel{(x)}.\,B_2(y)\,dy}{B_1(y).\,A_2\cancel{(x)}} = 0$$

$$\frac{A_1(x)}{A_2(x)}\,dx + \frac{B_2(y)}{B_1(y)}\,dy = 0 \Rightarrow X(x) = \frac{A_1(x)}{A_2(x)},\quad Y(y) = \frac{B_2(y)}{B_1(y)}$$

dersek; $X(x)\,dx + Y(y)\,dy = 0$ halını alır.

Son elde edilen ifadenin ayrı ayrı her bir teriminin integrali alınarak genel çözüm bulunur. Yani;

$$\int X(x)\,dx + \int Y(y)\,dy = \int d(c) \quad --- \quad (9)$$

olmalıdır.

Ör: $x\,dx + y\,dy = 0$ dif. denk. çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklem değişkenlerine ayrılabilirdir.

$$\int x\,dx + \int y\,dy = \int d(c)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c}$$ olarak bulunur.

Uyarı !! Genel çözümü veren (9) bağıntısında iki keyfi sbt kullanmaya gerek yoktur. Çünkü; (8) denkleminden;

$$\int X(x)\,dx + c_1 + \int Y(y)\,dy + c_2 = 0$$

$$\int X(x)\,dx + \int Y(y)\,dy = \underbrace{c_2 - c_1}_{c}$$ denilebilir.

$$\int X(x)\,dx + \int Y(y)\,dy = c$$

yazılabilir. Burada c keyfi sbt olup $c = c_2 - c_1$ 'dir.

(27)

Öz: $\overbrace{\cancel{(1+y^2)}}^{c}dx + \overbrace{\cancel{(1+x^2)}}^{b}dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{\cancel{(1+y^2)}\,dx}{\cancel{(1+y^2)}(1+x^2)} + \frac{\cancel{(1+x^2)}\,dy}{(1+y^2)\cancel{(1+x^2)}} = 0 \quad \Rightarrow \int\frac{dx}{(1+x^2)} + \int\frac{dy}{(1+y^2)} = \int 0$$

$\Rightarrow$ arctan x + arctan y = c

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(1+x^2)}dx + \int\frac{1}{(1+y^2)}dy = \int d(c)$$

$$\boxed{\arctan x + \arctan y = c}$$

Öz: $\frac{(2x-2xe^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{(1+x^2)}dy = 0$ dif. denk. genel çöz. bulunuz

Çözüm:

$$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{(1+x^2)}dy = 0$$

$$\frac{\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{(1-e^y)}}\cdot\frac{2x\cancel{(1-e^y)}}{(1+x^2)^{\cancel{2}}}dx + \frac{\cancel{(1+x^2)}}{(1-e^y)}\frac{e^y}{\cancel{(1+x^2)}}dy = 0$$

$$\underbrace{\int\frac{2x}{(1+x^2)}dx}_{} + \underbrace{\int\frac{e^y}{(1-e^y)}dy}_{} = \int d(c)$$

$1+x^2=u \quad 2x\,dx = du$

$1-e^y = u \quad -e^y dy = du$

$e^y dy = -du$

$\int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|1+x^2|$

$-\int\frac{du}{u} = -\ln|u| = -\ln|1-e^y|$

$$\boxed{\ln|1+x^2| - \ln|1-e^y| = \ln c} \Rightarrow \ln\left|\frac{1+x^2}{1-e^y}\right| = \ln c \Rightarrow \boxed{\frac{1+x^2}{1-e^y} = c}$$

Ö2: $x \cos y \, dx - e^x \cdot \sin y \, dy = 0$ dif. denk. çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{x \cdot \cos y \, dx}{e^x \cdot \cos y} - \dfrac{e^x \sin y \, dy}{e^x \cdot \cos y} = 0$

$$\underbrace{\int \frac{x}{e^x} dx} - \underbrace{\int \frac{\sin y}{\cos y} dy} = \int d(c)$$

$\int x e^{-x} dx$ $\qquad\qquad$ $\int \frac{\sin y}{\cos y} dy \Rightarrow$ $\cos y = u$, $-\sin y \, dy = du$

$x = u$ $\quad e^{-x} dx = dv$ $\qquad\qquad = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u|$

$dx = du$ $\quad -e^{-x} = v$ $\qquad\qquad = \boxed{-\ln|\cos y|}$

$$= uv - \int v \cdot du = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= \boxed{-xe^{-x} - e^{-x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + \ln|\cos y| = c}$$ sonucu bulunur.

Ö2: $x^3 dy + xy \, dx = x^2 dy + 2y \, dx$, $y(2) = e$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: $x^3 dy + xy \, dx = x^2 dy + 2y \, dx$

$$(x^3 - x^2) dy + (xy - 2y) dx = 0$$

$$\frac{\cancel{(x^3 - x^2)} dy}{\cancel{(x^3 - x^2)} \cdot y} + \frac{\cancel{y}(x-2) dx}{\cancel{y}(x^3 - x^2)} = 0$$

$$\frac{1}{y} dy + \frac{(x-2)}{(x^3 - x^2)} dx = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{y}\,dy}_{\ln|y|} + \underbrace{\int \frac{x-2}{x^2(x-1)}\,dx}_{} = 0$$

$$\int \frac{x-2}{x^2(x-1)}\,dx = \frac{A}{x-1}_{/x^2} + \frac{Bx+C}{x^2}_{/x-1}$$

$$\frac{x-2}{\cancel{x^2(x-1)}} = \frac{Ax^2+(Bx+C)(x-1)}{\cancel{x^2(x-1)}}$$

$$x-2 = Ax^2+Bx^2-Bx+Cx-C$$

$A+B=0 \longrightarrow A+1=0 \Rightarrow A=-1$

$-B+C=1 \longrightarrow -B+2=1$

$\boxed{B=1}$

$-C=-2$

$C=2$

$$\int \frac{x-2}{x^2(x-1)}\,dx = \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{x+2}{x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x^2}\,dx$$

$$= -\ln|x-1| + \ln|x| - \frac{2}{x}$$

<u>sonuç</u>:

$$\ln|y| - \ln|x-1| + \ln|x| - \frac{2}{x} = \ln C$$

$$\ln\left|\frac{y\cdot x}{x-1}\right| - \frac{2}{x} = \ln C \Rightarrow \ln\left|\frac{yx}{C(x-1)}\right| = \frac{2}{x}$$

$$\boxed{e^{2/x} = \frac{x\cdot y}{C\cdot(x-1)}}$$

Simdi başlangıç şartını yerine yazalım; $y(2)=e$

$$e^{2/2} = \frac{2.e}{c.(2-1)} \Rightarrow e = \frac{2e}{c}$$

$$\Rightarrow \underline{c=2} \quad \text{olur.}$$

O halde başlangıç değer probleminin çözümü;

$$e^{2/x} = \frac{x.y}{2(x-1)} \Rightarrow x.y = e^{2/x}.2(x-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{2e^{2/x}}{x}.(x-1)}$$ gibi elde edilir.

ÖDEV;

1) $(3x+8).(y^2+4)\,dx - 4y\,(x^2+5x+6)\,dy = 0$

2) $(1+x^2).\frac{dy}{dx} + xy = x$

3) $y^2dx + (x+1)dy = 0 \quad , y(0)=1$

4) $(1+e^x)\,y.y' = e^x \quad , y(0)=1$