⇒ Tam hale getirilebilen diferansiyel denklemler ⇐

Eğer $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denklemi tam dif. denklem değilse, bazen uygun bir $\lambda(x,y)$ fonksiyonu (çarpanı) ile çarpılması sonucu elde edilen,

$$\lambda(x,y) \cdot P(x,y)\,dx + \lambda(x,y) \cdot Q(x,y)\,dy = 0 \qquad \text{---}(12)$$

denklemi tam dif. denk haline gelir. Denklemi tam dif. yapan bu $\lambda(x,y)$ fonksiyonuna integral çarpanı adı verilir.

Ör: $\lambda(x,y) = xy^2$ fonksiyonunun $(2y-6x)dx + (3x-4x^2y^{-1})dy = 0$ denkleminin bir integral çarpanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $P(x,y) = 2y-6x \qquad Q(x,y) = 3x - 4x^2y^{-1}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 3 - 8xy^{-1}$$

olduğundan denklem bu hali ile tam dif. denk olmadı. $\lambda(x,y)$ ile eşitliğin her tarafını çarpalım.

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0$$

$P(x,y) = 2xy^3 - 6x^2y^2 \qquad Q(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 12x^2y = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2 - 12x^2y$$

olur. Ve denk tam dif. hale getirilmiş olur.

İntegral Çarpanının Bulunması

$\lambda = \lambda(x,y)$, (12) denkleminin bir integral çarpanı olsun.

Bu taktirde ;

$$\lambda . P(x,y)\,dx + \lambda . Q(x,y)\,dy = 0$$

denklemi artık tam dif. denklemdir. O halde;

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}$$ dır. Veya daha açık olarak;

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} . P + \lambda . \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} . Q + \lambda . \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\lambda \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q . \frac{\partial \lambda}{\partial x} - P . \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad ---(13)$$

elde edilir. Burada elde edilen (13) denklemi λ bilinmeyenine göre bir kısmi dif. denklemdir. (13) denklemini çözmek genellikle (12) denklemini çözmekten daha zordur. Ancak bazı hallerde (13) kısmi dif. denklemi bir adi dif. denkleme indirgenebilir. ve λ kolayca bulunabilir.

* integral çarpanının sadece x'in bir fonksiyonu olması hali

λ, yalnızca x'in bir fonksiyonu ise O halde;

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dx} \quad , \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$$ olup ;

(13) kısmi dif. denklemi;

$$\lambda \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{d\lambda}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d\lambda}{dx} = \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \right) . \lambda$$ biçiminde yazılabilir.

λ yalnız x'in fonksiyonu olduğundan;

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \quad --- \quad (14)$$

ifadesi de yalnızca x'in bir fonksiyonudur. O halde (13) denk. artık değişkenlerine ayrılabilir bir (14) denklemine indirgenmiş demektir. Böylece (14)'den de görülür ki, $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ ifadesi yalnız x'in bir fonksiyonu ise (12) denkleminin yalnız x'in bir fonksiyonu olan bir integral çarpanı vardır.

(13) ifadesinde $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$ alınırsa;

$$\lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\,\frac{d\lambda}{dx}$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx \quad \text{elde edilir.}$$

Bu ifadede $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$ seçilirse;

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = f(x)\,dx$$ yazılır. Her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\ln|\lambda| = \int f(x)\,dx$$ elde edilir. Buda;

$$\boxed{\lambda(x) = e^{\int f(x)dx}}$$ olduğunu verir.

Ör: $(x-y)\,dx - dy = 0$ dif. denk. çözünüz.

Çözüm: $P(x,y) = x-y$ $\quad Q(x,y) = -1$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$ old. dan denk tam dif değildir.

Eğer $\lambda(x) = \lambda$ sadece x'in bir fonk. ise;

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{-1}\left(-1-0\right) dx$$

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int dx \Rightarrow \ln|\lambda| = x \Rightarrow \boxed{\lambda = e^x}$$ olur.

Denklemin her tarafını e^x ile çarpalım.

$$(xe^x - ye^x)\,dx - e^x\,dy = 0$$

$P(x,y) = xe^x - ye^x$ $\quad Q(x,y) = -e^x$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x = \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x$$ old. denk tam hale geldi. O halde;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q \Rightarrow u(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + g(x)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int -e^x\,dy + g(x)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = -y\cdot e^x + g(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \cancel{-ye^x} + g'(x) = xe^x \cancel{-ye^x} \Rightarrow g'(x) = x\cdot e^x$$

$$\int g'(x) = \int xe^x\,dx$$

$$g(x) = \int x e^x \, dx \qquad \begin{matrix} x = u \\ dx = du \end{matrix} \qquad \begin{matrix} e^x dx = dv \\ e^x = v \end{matrix}$$

$$= \left(x e^x - \int e^x dx \right)$$

$$g(x) = x e^x - e^x$$

$$u(x,y) = \boxed{-y e^x + x e^x - e^x = C}$$ olarak bulunur.

Ör: $(x - x^2 - y^2)\,dx + y\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $P(x,y) = x - x^2 - y^2 \qquad Q(x,y) = y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$ old.dan denk. tam dif. değildir.

Eğer $\lambda(x) = \lambda$ sadece x'in bir fonk. ise;

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{y}\left(-2y - 0 \right) dx$$

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int -2\,dx \Rightarrow \ln|\lambda| = -2x \Rightarrow \lambda(x) = e^{-2x}$$

olarak bulunur. İntegral çarpanı ile denk. her tarafını çarpalım.

$$\left(x e^{-2x} - x^2 e^{-2x} - y^2 e^{-2x} \right) dx + y e^{-2x} dy = 0$$

$$P(x,y) = x e^{-2x} - x^2 e^{-2x} - y^2 e^{-2x} \qquad Q(x,y) = y e^{-2x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y e^{-2x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y e^{-2x}$$

old.dan denk. tam dif. denk. hale geldi.

O halde $u(x,y)$ çözümü arayalım.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + g(x)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int y \cdot e^{-2x}\,dy + g(x)$$

$$u(x,y) = \frac{y^2 e^{-2x}}{2} + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow \cancel{\frac{-2y^2e^{-2x}}{2}} + g'(x) = P(x,y) = xe^{-2x} - x^2e^{-2x} - \cancel{y^2e^{-2x}}$$

$$\Rightarrow \int g'(x) = \int (xe^{-2x} - x^2e^{-2x})\,dx$$

$$\Rightarrow g(x) = \underbrace{\int x \cdot e^{-2x}\,dx}_{\substack{x=u \quad e^{-2x}dx = dv \\ dx=du \quad -\frac{1}{2}e^{-2x}=v}} - \underbrace{\int x^2 e^{-2x}\,dx}_{\substack{x^2=u \quad e^{-2x}dx=dv \\ 2xdx=du \quad -\frac{1}{2}e^{-2x}=v}}$$

$$\Rightarrow g(x) = \left(-\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx\right) - \left(-\frac{x^2e^{-2x}}{2} + \frac{2}{2}\int xe^{-2x}\,dx\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \left(-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) - \left(-\frac{x^2e^{-2x}}{2} + \left(-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \cancel{-\frac{xe^{-2x}}{2}} - \cancel{\frac{e^{-2x}}{4}} + \frac{x^2e^{-2x}}{2} + \cancel{\frac{xe^{-2x}}{2}} + \cancel{\frac{e^{-2x}}{4}}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2e^{-2x}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \frac{y^2e^{-2x}}{2} + \frac{x^2e^{-2x}}{2} = C}$$ olarak bulunur.

* İntegral çarpanının sadece y'nin bir fonksiyonu olması hali

λ, yalnızca y'nin bir fonksiyonu ise o halde,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d \lambda}{d y}$$ olup,

(13) kısmi dif. denklemi,

$$\lambda \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -P \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} \cdot \lambda$$ biçiminde yazılabilir.

λ, yalnızca y'nin bir fonksiyonu olduğundan;

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} \quad --- \quad (15)$$

ifadesi de yalnızca y'nin bir fonksiyonudur. O halde, (12) denkleminin yalnız y'nin bir fonksiyonu olan bir integral çarpanı vardır.

(13) ifadesinde $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$ alınırsa;

$$\lambda \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -P \frac{d \lambda}{d y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d \lambda}{\lambda} = -\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) . dy$$ elde edilir.

Bu ifadede $-\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = g(y)$ seçilirse;

$$\frac{d \lambda}{\lambda} = g(y)\, dy$$ yazılır. Her iki tarafın integrali alınırsa;

$\ln\lambda = \int g(y)dy$ elde edilir. Bu da;

$$\boxed{\lambda(y) = e^{\int g(y)\,dy}}$$

olduğunu verir.

Ör: $ydx + (3+3x-y)\,dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = 3+3x-y$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 3$ olduğundan denk. tam dif. değildir.

O halde bir integral çarpanı var mıdır?

Acaba $\lambda = \lambda(x)$ mıdır?

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{3+3x-y}(1-3)\,dx = \underbrace{\frac{-2}{3+3x-y}}\,dx$$

olmadı. Burada sadece x'e bağlı bir ifade kalmalı idi.

Acaba $\lambda = \lambda(y)$ mıdır?

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy$$

$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{1}{y}(1-3)\,dy = \frac{2}{y}\,dy$ oldu. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$\ln|\lambda| = \int \frac{2}{y}\,dy = 2\ln y = \ln y^2 \Rightarrow \lambda = y^2$ elde edilir.

Denklemin integral çarpanı olan $\lambda = y^2$ ile her tarafı çarpalım.

$y\, y^2\, dx + y^2 (3+3x-y)\, dy = 0$

$y^3 dx + (3y^2 + 3xy^2 - y^3)\, dy = 0$

$P(x,y) = y^3 \qquad Q(x,y) = 3y^2 + 3xy^2 - y^3$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 \Rightarrow$ old.dan dert tam dif. hale geldi. Şimdi $u(x,y)$ çözümünü bulalım

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\, dx + f(y)$

$\Rightarrow u(x,y) = \int y^3 dx + f(y)$

$\Rightarrow u(x,y) = xy^3 + f(y)$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{3xy^2} + f'(y) = 3y^2 + \cancel{3xy^2} - y^3$

$\Rightarrow \int f'(y) = \int (3y^2 - y^3)\, dy$

$\Rightarrow f(y) = y^3 - \frac{y^4}{4}$ olur.

$\boxed{u(x,y) = xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} = C}$ elde edilir.

Ör: $6xy\, dx + (4y + 9x^2)\, dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $P(x,y) = 6xy \qquad Q(x,y) = 4y + 9x^2$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 18x$ old.dan dert tam dif. değildir.

Acaba $\lambda = \lambda(x)$?

$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx = \frac{1}{4y+9x^2}(6x - 18x)\, dx$

$= \frac{-12x}{4y+9x^2}\, dx \Rightarrow$ olmadı.

$\lambda = \lambda(y)$?

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dy$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{1}{6xy}\left(6x - 18x\right) dy = \frac{2}{y} dy \quad \text{oldu.}$$

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{2}{y} dy \Rightarrow \ln\lambda = 2\ln y$$
$$\ln\lambda = \ln y^2 \Rightarrow \lambda = y^2 \text{ dur.}$$

Denk. her tarafını $\lambda(y) = y^2$ ile çarpalım.

$$6xy^3\,dx + (4y^3 + 9x^2y^2)\,dy = 0$$

$P(x,y) = 6xy^3$ $\quad Q(x,y) = 4y^3 + 9x^2y^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 18xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 18xy^2 \Rightarrow$$ denk tam hale geldi.

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + f(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int 6xy^3\,dx + f(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = 3x^2y^3 + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \cancel{9x^2y^2} + f'(y) = 4y^3 + \cancel{9x^2y^2}$$

$$f'(y) = 4y^3$$

$$\boxed{f(y) = y^4}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = 3x^2y^3 + y^4 = C}$$ olarak bulunur.

* integral çarpanının "x.y" nin fonksiyonu olması hali (49)

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$ denkleminde $P(x,y) = y \cdot f(xy)$

$Q(x,y) = x \cdot g(xy)$

olarak yazılabiliyorsa ve $f(xy) \neq g(xy)$ ise denklemin integral çarpanı;

(15) --- $$\lambda = \lambda(xy) = \frac{1}{xP - yQ}$$ şeklinde aranır.

Ör: $(2xy^2+y)\,dx + (x+2x^2y - x^4y^3)\,dy = 0$ dif. denk. çözünüz.

Çözüm: $y(2xy+1)\,dx + x(1+2xy - x^3y^3)\,dy = 0$

$P(x,y) = y\cdot(2xy+1) = y\cdot f(xy) \Rightarrow f(xy) = 2xy+1$

$Q(x,y) = x\cdot(1+2xy - x^3y^3) = x\cdot g(xy) \Rightarrow g(xy) = 1+2xy - x^3y^3$

$f(xy) \neq g(xy)$ olduğundan denklemin integral çarpanı,

$$\lambda(xy) = \frac{1}{xP - yQ} = \frac{1}{x(2xy^2+y) - y(x+2x^2y - x^4y^3)}$$

$$= \frac{1}{2x^2y^2 + xy - xy - 2x^2y^2 + x^4y^4} = \frac{1}{(xy)^4}$$ olur.

Bu int. çarpanı ile denklemin her tarafını çarpalım.

$$(2x^{-3}y^{-2} + x^{-4}y^{-3})\,dx + (x^{-3}y^{-4} + 2x^{-2}y^{-3} - y^{-1})\,dy = 0$$

$P(x,y) = 2x^{-3}y^{-2} + x^{-4}y^{-3}$ $\qquad Q(x,y) = x^{-3}y^{-4} + 2x^{-2}y^{-3} - y^{-1}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -4x^{-3}y^{-3} - 3x^{-4}y^{-4} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -3x^{-4}y^{-4} - 4x^{-3}y^{-3}$$

old. dan denk. tam dif.

$u(x,y)$ gibi bir çözüm aramalıyız.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + f(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int (2x^{-3}y^{-2} + x^{-4}y^{-3})\,dx + f(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = -x^{-2}y^{-2} - \frac{x^{-3}y^{-3}}{3} + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = Q \Rightarrow \cancel{2x^{-2}y^{-3}} + \cancel{x^{-3}y^{-4}} + f'(y) = \cancel{x^{-3}y^{-4}} + \cancel{2x^{-2}y^{-3}} - y^{-1}$$

$$\Rightarrow f'(y) = -\frac{1}{y} \Rightarrow \int f'(y) = -\int \frac{1}{y}\,dy$$

$$\Rightarrow f(y) = -\ln y$$ olur.

$$u(x,y) = -\frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{3x^3y^3} - \ln y = C$$ olarak elde edilir.

Ör: $(2-xy)\cdot y\,dx + (2+xy)\,x\,dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklem tam hale getirilebilirdir.

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &= y\cdot f(xy) = y\cdot(2-xy) \\ Q(x,y) &= x\cdot g(xy) = x\,(2+xy) \end{aligned}\right\}$$ $f(xy) \neq g(xy)$ olduğundan denklemin integral çarpanı $\lambda(xy)$ biçiminde olmalıdır.

$$\lambda(xy) = \frac{1}{xP - yQ} = \frac{1}{xy(2-xy) - yx(2+xy)}$$

$$\lambda(xy) = \frac{1}{\cancel{2xy} - x^2y^2 - \cancel{2xy} - x^2y^2} = \frac{1}{-2(xy)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(xy)^2}$$

olarak bulunur. Bu int. çarpanı ile denklemin her tarafını çarparsak,

$$y\left(-\frac{1}{(xy)^2}+\frac{1}{2(xy)}\right)dx + x\left(-\frac{1}{(xy)^2}-\frac{1}{2(xy)}\right)dy = 0$$

$$\left(-x^{-2}y^{-1}+\frac{1}{2}\cdot x^{-1}\right)dx + \left(-x^{-1}y^{-2}-\frac{1}{2}y^{-1}\right)dy = 0$$

$$Q(x,y) = -x^{-1}y^{-2} - \frac{y^{-1}}{2}$$

$$P(x,y) = -x^{-2}y^{-1} + \frac{x^{-1}}{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^{-2}y^{-2} \quad = \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = x^{-2}y^{-2}$$

old. dan denk tam dif. denk haline geldi.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + f(y)$$

$$\Rightarrow \quad = \int\left(-x^{-2}y^{-1} + \frac{x^{-1}}{2}\right)dx + f(y)$$

$$u(x,y) = x^{-1}y^{-1} - \frac{1}{2}\ln|x| + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\cancel{x^{-1}y^{-2}} + f'(y) = -\cancel{x^{-1}y^{-2}} - \frac{y^{-1}}{2}$$

$$\int f'(y) = -\int \frac{1}{2y}\,dy$$

$$f(y) = -\frac{1}{2}\ln|y| \quad \text{olur.}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{xy} - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln y = C$$

$$\frac{1}{xy} - \frac{1}{2}\left(\ln(x\cdot y)\right) = C$$ olarak yazılır.

ÖDEV SORULAR

1) $\cos x \cdot dy - (2y \cdot \sin x - 3)\, dx = 0$ dif. denk. çözünüz.

2) $\left(\frac{3-y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{y^2-2x}{xy^2}\right) dy = 0$ " "

3) $(y \cdot \cos x + 2x \cdot e^y)\, dx + (\sin x + x^2 e^y + 2)\, dy = 0$ " ".

4) $(x^2 - 4y)\, dx - x\, dy = 0$ " ".

5) $(x - x^2 y)\, dy + (y + xy^2)\, dx = 0$ " ".

⇒ Homojen Diferansiyel Denklemler ⇐

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ denklemi $y' = f(x,y)$ şeklinde düzenlensin. $f(x,y)$ fonksiyonu 0. dereceden homojen olduğunda $y' = f(x,y)$ dif. denk. <u>homojen dif. denk.</u> denir.

Bir dif. denklemin homojen olduğunu gösterebilmek için iki farklı yol mevcuttur. Bunlardan ilki $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ polinomlarının aynı dereceden homojen olmalarıdır.

Yani,

$$P(tx, ty) = t^m \cdot P(x,y)$$

$$Q(tx, ty) = t^m \cdot Q(x,y)$$

olmalıdır.

2. yöntem ise $y' = f(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$ olacak şekilde düzenlenebilmelidir. Bütün bu işlemlerin ardından denklemin homojen olduğu gösterilmiş olur.