Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Física
Física General II FIS120
2^{do} semestre 2024

Pauta Certamen 3

Problema 1:

En una habitación de altura h, se encuentra un alambre por el cual pasa una corriente I. Este alambre metálico conductor atraviesa el lugar cruzando de forma continua desde el piso hasta el techo de la habitación, tal como se puede ver en la parte (A) de la Figura 1. Este cable, si bien es continuo, no es completamente recto, puesto que cercano a la mitad de su trayectoria, el cable se enrolla de forma rectangular completando una vuelta, y siguiendo su camino recto hasta el techo. Tenga en cuenta que el largo y ancho del rectángulo descrito son a y b, respectivamente. Considere que en la habitación descrita en la Figura 1 (A), existe un campo magnético constante y uniforme que cubre toda la sala, y apunta en la dirección positiva del eje x, es decir $\vec{B} = B\,\hat{\imath}$.

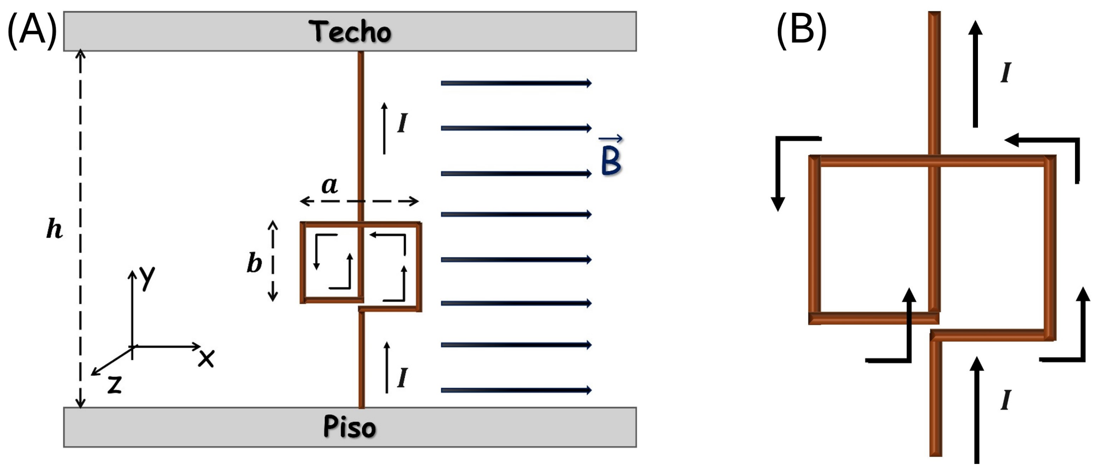

Figura 1: Esquema Problema 1. La imagen de la izquierda (A) corresponde a la situación descrita en el texto, mientras que la imagen de la derecha (B) es una amplificación del sector en donde la espira se encuentra doblada.

(A) **(17 puntos)** Calcule el vector de fuerza magnética sobre el alambre. ¿Hacia dónde apunta dicha fuerza respecto al plano de la Figura 1? Explique con palabras.

(B) **(17 puntos)** Encuentre el vector de torque magnético sobre el alambre. ¿En qué sentido quiere rotar el circuito? Explique usando el sistema de referencia dibujado en la Figura 1.

Solución Problema 1:

(A) Primero notamos que podemos descomponer el sistema es dos alambres con corriente: un alambre recto y un circuito cerrado. Este ultimo al ser un cerrado en un campo homogéneo, la fuerza neta sobre él es nula. Y, por otro lado, la fuerza sobre el alambre recto puede ser calculado como:

$$\begin{aligned} \vec{F}_M &= I\vec{L} \times \vec{B} \ , && (1) \\ &= I\,(h\,\hat{\jmath}) \times (B\,\hat{\imath}) \ , && (2) \\ &= -IhB\,\hat{k} \ . && (3) \end{aligned}$$

Lo anterior nos indica que la fuerza magnética sobre el alambre apunta hacia dentro del plano de la Figura.

(B) En este caso, notamos que toda la sección recta de cable no contribuye en torque, por estar situado en el eje de rotación. En cambio, el circuito cerrado, dado que posee un momento dipolar magnético:

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= I\vec{A} \ , && (4) \\ &= Iab\,\hat{k} \ , && (5) \end{aligned}$$

es que podemos calcular el torque realizado por la fuerza magnética:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_M &= \vec{\mu} \times \vec{B} \ , && (6) \\ &= Iab\,\hat{k} \times B\,\hat{\imath} \ , && (7) \\ &= IabB\,\hat{\jmath} \ . && (8) \end{aligned}$$

El torque magnético anterior, también se puede calcular tomando como origen el centro de la espira. Considerando que el segmento superior e inferior no realizan torque debido a que la corrientes son antiparalela y paralela al campo magnético respectivamente, la sumatoria de torques es:

$$\vec{\tau}_M = \vec{\tau}_{\text{segento izquierdo}} + \vec{\tau}_{\text{segento derecho}} = \frac{a}{2}(-\hat{\imath}) \times (bIB\hat{k}) + \frac{a}{2}(\hat{\imath}) \times bIB(-\hat{k})$$

$$\vec{\tau}_M = \frac{a}{2}bIB\hat{\jmath} + \frac{a}{2}bIB\hat{\jmath} = IabB\,\hat{\jmath}$$

El resultado anterior nos dice que el torque apunta en la dirección positiva del eje y. Por lo que desde el techo se observaría que el circuito cerrado rota en sentido antihorario.

Problema 2:

El sistema mostrado en la Figura 2 adjunta consiste de dos cables de longitud infinita, uno de los cuales es recto (cable 1) y el otro presenta una zona curvada, de arco igual al radio, con centro en el punto P (cable 2). Ambos cables transportan corrientes de magnitudes I_1 e I_2 respectivamente, las cuales se propagan en las direcciones indicadas en la Figura 2.

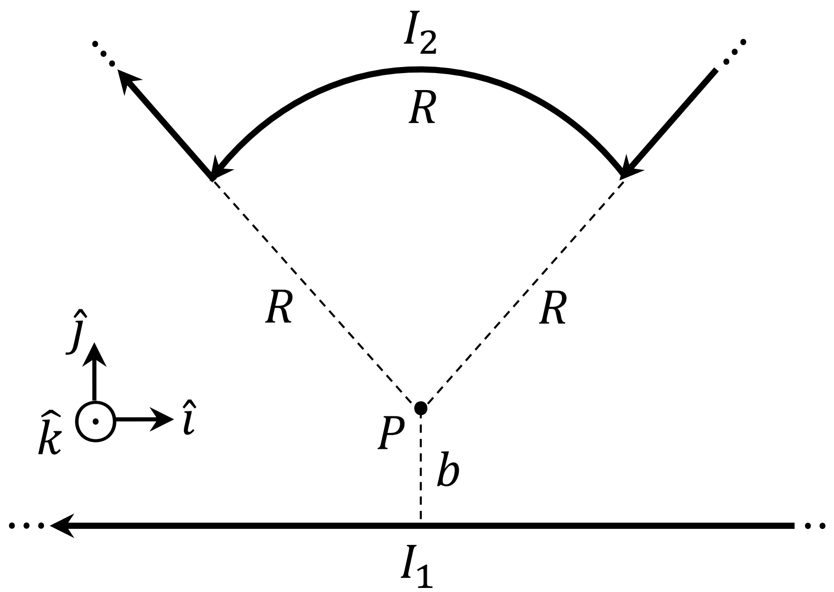

Figura 2: Esquema Problema 2.

(A) **(14 puntos)** Calcule el campo magnético generado por el cable 1 en el punto P.

(B) **(14 puntos)** Calcule el campo magnético generado por el cable 2 en el punto P.

(C) **(5 puntos)** Si $R = 3b$, determine la razón I_1/I_2 tal que el campo magnético total en el punto P sea nulo.

Solución Problema 2:

(A) Aplicando la ley de Ampere en el cable 1:

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1$$

Evaluando el campo en el punto P:

$$B_1\left(P\right) \oint dl = B_1\left(P\right)\left(2\pi b\right) = \mu_0 I_1$$

Despejando el campo:

$$\vec{B}_1\left(P\right) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}\hat{k}$$

(B) Aplicando la ley de Biot-Savart en la sección curva del cable 2:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \left(\vec{r} - \vec{r}'\right)}{\left\|\vec{r} - \vec{r}'\right\|^3}$$

Las secciones rectas del cable 2 no generan campo magnético en el punto P, ya que cada ambas son paralelas a la distancia que las separa de dicho punto, por lo tanto, solo habrá campo generado por la sección curva. Colocando el origen del sistema de coordenadas en P:

$$d\vec{l} = R d\varphi \hat{\varphi},$$
$$\vec{r} = 0,$$
$$\vec{r}' = R\hat{r}.$$

Reemplazando:

$$\vec{B}_2\left(P\right) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_0^1 \frac{R d\varphi \hat{\varphi} \times \left(-R\hat{r}\right)}{R^3} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R} \int_0^1 d\varphi \ \left(\hat{r} \times \hat{\varphi}\right)$$

Finalmente:

$$\vec{B}_2\left(P\right) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R}\hat{k}$$

(C) Por principio de superposición

$$\vec{B}\left(P\right) = \vec{B}_1\left(P\right) + \vec{B}_2\left(P\right)$$

Reemplazando e igualando a cero:

$$\frac{\mu_0 I_2}{4\pi R}\hat{k} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}\hat{k} = 0$$

Sustituyendo R:

$$\frac{\mu_0 I_2}{12\pi b} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}$$

Simplificando:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{6}$$

Problema 3:

Una espira cuadrada de lado L y resistencia R se encuentra fija en una región del espacio, tal que es atravesada por un campo magnético que varía en el tiempo de la forma $\vec{B}(t) = \alpha t(-\hat{k})$, donde α es una constante positiva y t es el tiempo, en la Figura 3a se presenta un esquema para $t > 0$. Una vez que el campo magnético llega a su valor final $\vec{B}_f = B_f(-\hat{k})$, este se mantiene constante, y la espira se empieza a mover con una velocidad $\vec{v} = v_0\hat{\imath}$ constante hacia la derecha, hasta que logra salir de la región en donde se encuentra el campo magnético, como se muestra en la Figura 3b.

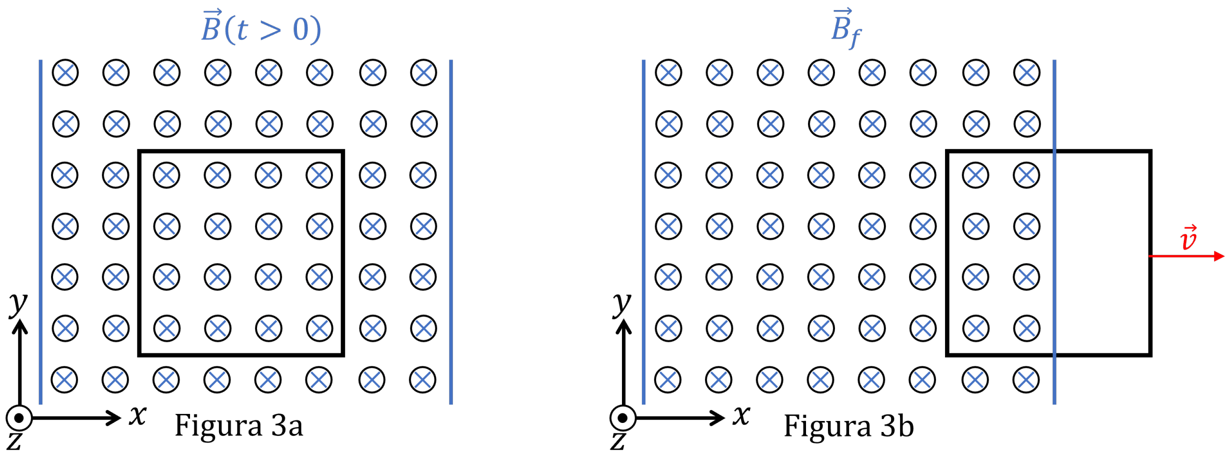

Figura 3: Esquema Problema 3.

(A) **(6 pts)** Explique cual es el sentido de la circulación de la corriente inducida (horario o antihorario) para $t < 0$ y para $t > 0$, cuando la espira estaba fija y el módulo del campo magnético cambia en el tiempo (Figura 3a).

(B) **(10 pts)** Encuentre el módulo de la corriente inducida para $t > 0$ cuando la espira está fija y el módulo del campo magnético cambia en el tiempo (Figura 3a).

(C) **(17 pts)** Encuentre la corriente inducida (módulo y dirección) cuando la espira se empieza a mover hacia la derecha para los casos: i) antes de que salga de la región en donde se encuentra el campo magnético, ii) cuando empieza a salir de la región y iii) cuando está totalmente afuera de la región donde se encontraba el campo magnético (Figura 3b).

Solución Problema 3:

(A) Para $t < 0$ el campo magnético apunta en la dirección $\hat{k}$. Debido a que la magnitud del campo magnético va disminuyendo a medida que avanza el tiempo (antes de llegar a $t = 0$), la corriente inducida debe girar en sentido antihorario, para que el campo inducido tenga dirección en $\hat{k}$ y se oponga a esta disminución.

Para $t > 0$ el campo magnético apunta en la dirección $-\hat{k}$. Debido a que la magnitud del campo magnético va aumentando a medida que avanza el tiempo, la corriente inducida debe girar en sentido antihorario, para que el campo inducido tenga dirección en $\hat{k}$ y se oponga a este crecimiento.

(B) El flujo magnético viene dado por:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Considerando que $\vec{B}(t) = \alpha t(-\hat{k})$ y $dA = dA\hat{k}$

$$\Phi_B = -\int \alpha t dA = -\alpha t \int dA = -\alpha t L^2$$

La fem inducida viene dada por:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \alpha L^2$$

La corriente inducida viene dada por:

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{\alpha L^2}{R}$$

(C) Para los casos i) y iii) la corriente inducida es 0, debido a que no hay cambio en el flujo magnético.

Para el caso ii): Cuando la espira comienza a salir el flujo magnético disminuye, y la corriente inducida debe girar en sentido horario, para que el campo inducido compense esa disminución.

Para este caso el flujo magnético viene dado por:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\int B_f dA = -B_f L x$$

Con x la distancia horizontal de la espira que sale del sector con campo magnético.

La fem inducida viene dada por:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B_f L \frac{dx}{dt} = B_f L v_0$$

Y la corriente inducida es:

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{B_f L v_0}{R}$$

Asignación de puntajes:

1(A)	**[6pts]**	Calcula o menciona que la sumatoria de fuerzas sobre la espira es 0.
	[7pts]	Calcula correctamente el módulo de la fuerza magnética sobre el cable de altura h.
	[4pts]	Calcula, argumenta o dice correctamente la dirección de la fuerza magnética.
1(B)	**[3pts]**	Calcula correctamente el módulo del momento dipolar.
	[2pts]	Calcula correctamente la dirección del momento dipolar.
	[4pts]	Calcula correctamente el módulo del torque.
	[3pts]	Calcula correctamente la dirección del torque.
	[12pts]	**Opción 2** Calcula correctamente el módulo y la dirección del torque usando $\tau_{neto} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.
	[5pts]	Explica e interpreta correctamente que la espira rotará entorno al eje Y. Se puede explicar o interpretar estudiando la dirección de las fuerzas, el torques o el momento dipolar.
2(A)	**[7pts]**	Explica o calcula correctamente la dirección del campo generado por I_1.
	[7pts]	Aplica correctamente la ley de Ampère (o Biot-Savart) para calcular $\vec{B}_1$.
2(B)	**[3pts]**	Analiza o calcula que los sectores rectos no aportan al campo magnético en el punto P.
	[3pts]	Describe correctamente los vectores a implementar en Biot-Savart ya sea en coordenadas cartesianas o polares.
	[3pts]	Obtiene directamente del producto cruz o mediante la regla de la mano derecha la dirección del campo en el origen.
	[5pts]	Integra y obtiene correctamente la magnitud del campo generado por I_2 en el punto P.
2(C)	**[3pts]**	Usa el principio de superposición para encontrar lo solicitado.
	[2pts]	Encuentra correctamente la razón I_1/I_2.
3(A)	**[3pts]**	Explica correctamente el sentido de rotación de la corriente inducida para el caso $t < 0$.
	[3pts]	Explica correctamente el sentido de rotación de la corriente inducida para el caso $t > 0$.
3 (B)	**[2pts]**	Obtiene correctamente el flujo magnético.
	[2pts]	Obtiene correctamente la fem inducida.
	[2pts]	Relaciona correctamente la corriente con la resistencia de la espira.
	[4pts]	Obtiene correctamente la corriente inducida.
3(C)	**[4pts]**	Explica correctamente que en el caso i) y iii) no hay corriente inducida.
	[3pts]	Explica correctamente el sentido de rotación de la corriente inducida para el caso ii).
	[2pts]	Obtiene correctamente el flujo magnético en el caso ii).
	[2pts]	Obtiene correctamente la fem inducida en el caso ii).
	[2pts]	Relaciona correctamente la corriente con la resistencia de la espira.
	[4pts]	Obtiene correctamente la corriente inducida en el caso ii).