Certamen 1 – Pauta

Nombre: ____ Rol: ________________ Paralelo:_____

Formulario:

$$\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\| \qquad c = \lambda f = \cancel{\frac{k}{\omega}} = \frac{\omega}{k} \simeq 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \qquad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{v}$$

$$n = \frac{c}{v} \qquad n_1 \text{sen}(\theta_i) = n_2 \text{sen}(\theta_t) \qquad \theta_i = \theta_r$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \qquad I_d = I_0 \left(\frac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right)^2 \qquad \beta = ka \,\text{sen}\,\theta \simeq \frac{2\pi a y}{\lambda D}$$

$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c \vec{E}_0^{\,2} \qquad I_i = 4I_0 \cos^2(\phi/2) \qquad \phi = kd \,\text{sen}\,\theta \simeq \frac{2\pi d y}{\lambda D}$$

1. Ondas electromagnéticas (34 puntos)

Dada una onda electromagnética plana, el campo eléctrico se puede escribir como,

$$\vec{E} = E_0 \cdot \hat{n} \cdot \exp\left[i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right] \equiv E_0 \cdot \hat{n} \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Donde $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, $\vec{k} = k\hat{k}$ indica la dirección de propagación de la onda y $\hat{n}$, la dirección de polarización del campo eléctrico.

Considere que el campo eléctrico, está contenido en el plano xy y se propaga desde el origen hasta el punto $(0,3,3)$. Además, la frecuencia angular de la onda es $\omega = 100\pi$ rad/s y la velocidad de la luz es c. La magnitud de la amplitud del campo eléctrico es E_0.

a. Escriba una expresión para la dirección de propagación de la onda.
b. Identifique el tipo de polarización de esta onda y determine la polarización del campo eléctrico.
c. Escriba una expresión para el campo eléctrico, $\vec{E}$, y para el campo magnético, $\vec{B}$, incluyendo la información entregada. Puede usar funciones trigonométricas o notación de Euler.
d. Exprese el vector de Poynting y verifique que apunta en la dirección de propagación.

a. En este caso la dirección de propagación de la onda es $\hat{k}$ (unitario) y está determinado por,

$$\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 3^2}}(0,3,3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

$$\Rightarrow \hat{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{y} + \hat{z})$$

b. La expresión del campo eléctrico tiene una amplitud vectorial constante dada por $E_0\hat{n}$, donde el vector $\hat{n}$ define la dirección de polarización. Al ser independiente de la posición y del tiempo, esto significa que el campo eléctrico oscila siempre en el mismo eje, se trata de una onda polarizada linealmente.

Por otro lado, se sabe que el campo eléctrico está polarizado en el plano xy por lo que el vector unitario $\hat{n}$ dado en la función de onda toma la siguiente forma,

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(\alpha, \beta, 0)$$

Ahora usando el hecho que la dirección de propagación, $\hat{k}$, es siempre perpendicular a la polarización de la onda, $\hat{n}$, se debe cumplir que:

$$\hat{k} \cdot \hat{n} = 0 \;\Rightarrow\; (0,1,1) \cdot (\alpha, \beta, 0) = 0 \;\Rightarrow\; \beta = 0$$

Por lo tanto,

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2}}(\alpha, 0,0) = (1,0,0)$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \hat{x}$$

Luego, el vector de polarización del campo eléctrico apunta en la dirección $+x$.

c. A partir de lo obtenido en los incisos anteriores notamos que el campo eléctrico está dado por,

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} \exp\left[i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t\right)\right]$$

donde $\vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{k}{\sqrt{2}}(y+z)$. El campo magnético $\vec{B}$ puede ser determinado como,

$$\vec{B} = \frac{\hat{k} \times \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}}[(\hat{y}+\hat{z}) \times \hat{x}] \exp\left[i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t\right)\right] = \frac{E_0}{c\sqrt{2}}(\hat{y}-\hat{z}) \exp\left[i\left(\frac{k}{\sqrt{2}}(y+z) - \omega t\right)\right]$$

donde se ha usado el hecho que $\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$ y $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$.

Finalmente, como $\omega = 100\,\pi$ rad/s y $k = \omega/c$, se obtiene que el campo eléctrico está dado por,

$$\vec{E} = E_0 \hat{x} \exp\left[i100\pi\left(\frac{1}{c\sqrt{2}}(y+z) - t\right)\right] \equiv E_0 \hat{x} \cos\left[100\pi\left(\frac{1}{c\sqrt{2}}(y+z) - t\right)\right]$$

y el campo magnético está dado por,

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}}(\hat{y}-\hat{z}) \exp\left[i100\pi\left(\frac{1}{c\sqrt{2}}(y+z) - t\right)\right] \equiv \frac{E_0}{c\sqrt{2}}(\hat{y}-\hat{z}) \cos\left[100\pi\left(\frac{1}{c\sqrt{2}}(y+z) - t\right)\right]$$

d. El vector de Poynting está dado por,

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} E_0 \hat{x} \exp\left[i100\pi\left(\frac{1}{c\sqrt{2}}(y+z) - t\right)\right] \times \frac{E_0}{c\sqrt{2}}(\hat{y}-\hat{z}) \exp\left[i100\pi\left(\frac{1}{c\sqrt{2}}(y+z) - t\right)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c\sqrt{2}}(\hat{y}+\hat{z}) \exp\left[i200\pi\left(\frac{1}{c\sqrt{2}}(y+z) - t\right)\right]$$

$$\equiv \frac{E_0^2}{\mu_0 c\sqrt{2}}(\hat{y}+\hat{z}) \cos^2\left[100\pi\left(\frac{1}{c\sqrt{2}}(y+z) - t\right)\right]$$

donde se ha usado el hecho que $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ y $\hat{x} \times (-\hat{z}) = \hat{y}$.

2. Ondas electromagnéticas en medios materiales (30 puntos)

Un rayo de luz pasa de un medio a otro, observándose que, al entrar al segundo medio, el rayo se desvía acercándose a la normal a la superficie de separación de ambos medios.

a. ¿En qué medio el rayo se propaga con mayor velocidad y en qué medio tiene menor longitud de onda? Justifique.

Estamos ante el fenómeno de refracción, donde se produce el cambio de dirección de la onda al pasar de un medio a otro.

Los ángulos incidente y refractado están relacionados por la ley de Snell:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha_i = n_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha_{ref}$$

Si el rayo refractado se acerca a la normal a la superficie de separación (frontera), el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia. Por lo tanto, $n_2 > n_1$. Luego, el índice de refracción del medio

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow \ v = \frac{c}{n}$$

Como

$$n_2 > n_1 \ \Rightarrow v_2 < v_1$$

Por otro lado, las longitudes de onda en ambos medios están relacionadas con los índices de refracción,

$$\lambda_1 \cdot n_1 = \lambda_2 \cdot n_2 \ \Rightarrow \ \lambda_2 = \frac{n_1}{n_2}\lambda_1$$

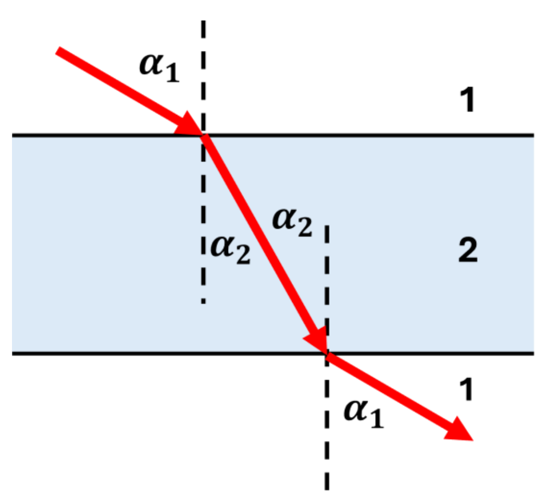
Como

$$n_2 > n_1 \ \Rightarrow \lambda_2 < \lambda_1$$

Alternativamente, sabemos que $\lambda = v/f$. Como la frecuencia no cambia, ya que no depende del medio, se tiene que

$$v_2 < v_1 \ \Rightarrow \ \lambda_2 < \lambda_1$$

Ahora, considere un rayo de luz, que se propaga por el vacío (medio 1) con una longitud de onda de $\lambda_0 = 5{,}46 \cdot 10^{-7}$ m, que incide sobre una lámina de cuarzo (medio 2), cuyo índice de refracción es $n_c = 1{,}5$.



b. Determine la longitud de onda del rayo en la fibra de cuarzo.
c. Si el ángulo de refracción en el cuarzo es de 30°, determine el ángulo de incidencia.
d. ¿Qué ángulo debería tener un rayo incidente desde el cuarzo para que no salga al vacío?

b. Estamos ante la refracción de la luz al pasar del vacío al cuarzo. Como vimos en el inciso anterior, la longitud de onda cambia al pasar de un medio a otro, ya que cambia la velocidad de propagación,

$$\lambda_1 \cdot n_1 = \lambda_2 \cdot n_2$$

$$\lambda_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \lambda_1$$

El medio 1 es el vacío, por lo que $n_1 = \frac{c}{c} = 1$. Así,

$$\lambda_2 = \frac{1}{1{,}5} \cdot 5{,}46 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

$$\lambda_2 = 3{,}64 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 364\ \mathrm{nm}$$

c. Los ángulos incidente y refractado están relacionados por la ley de Snell,

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha_i = n_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha_{ref}$$

$$1 \cdot \operatorname{sen} \alpha_i = 1{,}5 \cdot \operatorname{sen} 30°$$

$$\operatorname{sen} \alpha_i = 1{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}75$$

$$\alpha_i = \operatorname{sen}^{-1}(0{,}75) = 49°$$

d. Se pregunta por el ángulo límite al pasar del cuarzo (medio 2) al vacío (medio 1). Por la ley de Snell,

$$n_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha_2 = n_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha_1$$

Si el rayo no sale al vacío, esto significa que α_1 no tiene solución, o, equivalentemente, se obtiene $\operatorname{sen} \alpha_1 > 1$ y por lo tanto se da una reflexión interna total. Entonces, el ángulo límite $\alpha_{2,lim}$ desde el cuarzo hacia el vacío equivale a la situación en que $\operatorname{sen} \alpha_1 = 1$, es decir:

$$1{,}5 \cdot \operatorname{sen} \alpha_{2,lim} = 1$$

$$\operatorname{sen} \alpha_{2,lim} = \frac{1}{1{,}5}$$

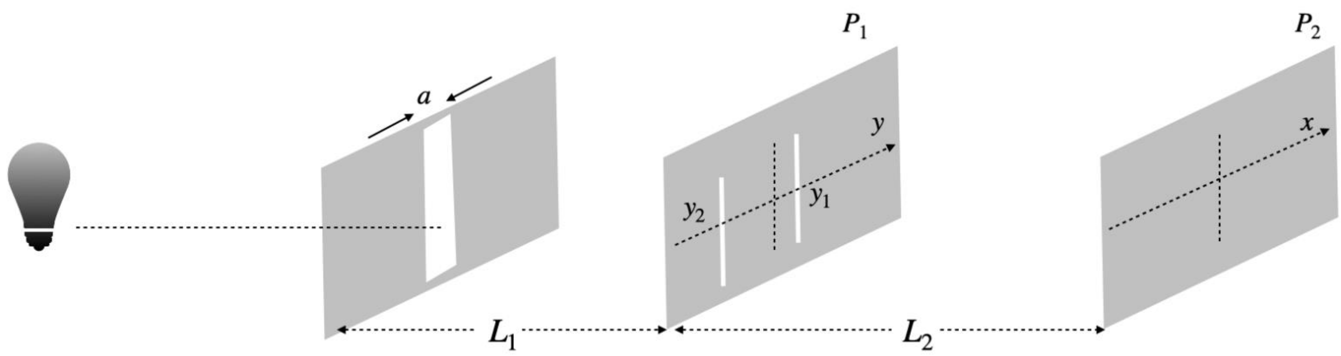
$$\alpha_{2,lim} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{1{,}5}\right) = 42°$$

Finalmente, los ángulos que cumplen con la condición de reflexión total interna (RTI) en el cuarzo están dados por

$$\alpha_{RTI} > 42°$$

3. Interferencia y difracción (36 puntos)

La figura muestra una fuente puntual que emite luz de longitud de onda λ, la cual pasa por una pequeña abertura de ancho a, difractándose y proyectándose sobre una pantalla P_1, situada a una distancia L_1, que contiene dos rendijas móviles independientes. Luego de pasar por P_1, la luz se combina sobre una segunda pantalla P_2, situada a una distancia L_2 de P_1.



a. Asuma que las rendijas móviles se localizan en las posiciones $y_{1,2} = \pm\frac{5\lambda L_1}{2a}$, correspondientes a los segundos máximos de difracción. Explique qué significa y por qué es importante que las ondas que emanan desde P_1 sean coherentes, para fines de lo que pueda observarse en la pantalla P_2.
b. Calcule la intensidad luminosa que emana desde cada rendija móvil, en P_1. Exprésela en términos de I_0, la intensidad de la fuente original, anterior a la abertura.
c. Sea $L_1 = 1{,}3\ \mathrm{m}$, $\lambda = 670\ \mathrm{nm}$ (correspondiente a un color rojo) y $a = 0{,}50\ \mathrm{mm}$. Obtenga la distancia d entre las rendijas de la pantalla P_1, desde la cual emanará la luz que interferirá en la pantalla P_2.
d. Use el valor de d obtenido en el ítem anterior y calcule la distancia L_2 entre las pantallas de modo que los mínimos de interferencia sobre P_2 sean distinguibles a simple vista, es decir, tal que la distancia entre ellos sea de $1\ \mathrm{mm}$. Comente, considerando los valores para L_1 y L_2, qué tan factible es lograr esta configuración experimental.

a. Para lograr un patrón de interferencia sobre P_2 en base a dos fuentes dadas por dos rendijas, requerimos que las ondas que emanan desde P_1 sean coherentes, es decir, que estén en fase y tengan la misma amplitud.
Esto ocurre porque las ondas que salen de $y_{1,2}$ han viajado la misma distancia desde la ranura a. Cualquier cancelación respecto de la fuente original es simétrica para ambas rendijas; es por esto que, desde $y_{1,2}$, emanan ondas con la misma amplitud.
Sólo bajo la condición de coherencia tendremos el caso matemáticamente más simple de suma de ondas sobre P_2.

b. Lo que ocurre entre la ranura a y la pantalla P_1 es un fenómeno de difracción, donde la intensidad resultante viene dada por

$$I_{dif} = I_0\left(\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right)^2$$

Donde

$$\frac{\beta}{2} = \frac{ka\operatorname{sen}\theta}{2} \simeq \frac{\pi a y}{\lambda L_1}$$

mientras que y es la coordenada de las rendijas sobre P_1. En las posiciones

$$y_{1,2} = \pm\frac{5\lambda L_1}{2a}$$

de las rendijas ocurren máximos de difracción, con una intensidad que debemos evaluar en

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi a}{\lambda L_1}y_{1,2} = \frac{\pi a}{\lambda L_1}\cdot\frac{5\lambda L_1}{2a} = \frac{5\pi}{2}$$

Así, la intensidad sobre las rendijas en la pantalla P_1 es

$$I(y_{1,2}) = I_0 \left(\frac{1}{\frac{5\pi}{2}} \right)^2 \simeq 0{,}0162\, I_0$$

donde I_0 es la intensidad de la luz anterior a la ranura a.

c. Esta vez d es la distancia entre las rendijas de la pantalla P_1. Como $y_{1,2} = \pm 5\lambda L_1/2a$, entonces

$$y_1 - y_2 = \frac{5\lambda L_1}{a} = d$$

Obtenemos

$$d = \frac{5 \cdot 670 \cdot 10^{-9} \cdot 1.3}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} \simeq 0{,}87 \text{ cm}$$

d. Entre las pantallas P_1 y P_2 ocurre un fenómeno de interferencia, en que la distancia entre las rendijas es $d = 0.87$ cm y L_2 debe ser tal que mínimos de intensidad consecutivos estén separados por $\Delta = 1$ mm. Recordamos que el patrón de interferencia viene dado por

$$I_{int} = 4I_0 \cos^2(kd \operatorname{sen} \theta) \simeq 4I_0 \cos\left(\frac{\pi d y}{\lambda L_2}\right)$$

tal que los mínimos de intensidad ($I_{int} = 0$) ocurren cada vez que

$$\frac{\pi d}{\lambda L_2} y_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

con $n = \{0,1,2, \dots\}$. De este modo obtenemos que la distancia entre mínimos es

$$\Delta = \mathrm{y_{n+1}} - \mathrm{y_n} = \frac{\lambda \mathrm{L_2}}{\mathrm{d}}$$

La condición pedida se reduce a

$$L_2 = \frac{d \cdot \Delta}{\lambda} = \frac{0{,}87 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{670 \cdot 10^{-9}} \simeq 13 \text{ m}$$

Es decir, necesitamos un laboratorio con unos 15 m de largo disponibles, más que lo requerido para el fenómeno de difracción, en que $L_1 \simeq 1$ m. No podríamos realizar este experimento en los laboratorios de la UTFSM.