ফ্লুয়িড মেকানিক্স অ্যান্ড মেশিনারিজ

প্রমাণ সমূহের নোট

রচনায় ও তথ্য সংগ্রহে

মুজাহিদুল হাসান

ঢাকা পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট

মেকানিক্যাল টেকনোলজি (৫ম পর্ব)

অনুশীলনী-২

সংক্ষিপ্ত প্রমাণ

(১) হেলানো ভাবে ডুবন্ত তলের উপর মোট চাপ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ মনে করি, চিত্রে অঙ্কিত হেলানো তলটি তরল পদার্থে নিমজ্জিত আছে। ডুবন্ত তলকে কয়েকটি সমান্তরাল অংশে বিভক্ত করি।

ধরি, ω = তরলের আপেক্ষিক ওজন

A = তলের ক্ষেত্রফল

$\bar{X}$= তরল পৃষ্ঠ হতে ডুবন্ত তলের মধ্যবিন্দু পর্যন্ত গভীরতা

θ = ডুবন্ত তল এবং তরল পৃষ্ঠের মধ্যে উৎপন্ন কোণ

ধরি, চিত্রে অংকিত একটি ছোট ফালির পুরুত্ব dx, প্রস্থ b এবং O বিন্দু হতে দূরত্ব L.

Strip এর উপর চাপের তীব্রতা = ωh i

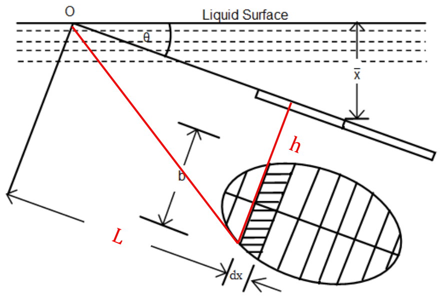


Fig 3 : Inclined immersed surface

এখন, h এর মান নির্ণয় করতে হবে

আমরা জানি,

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$$

বা, $\sin\theta = \frac{h}{L}$

বা, $h = L\sin\theta$ ii

i নং সমীকরণ এ h এর মান বসাই,

$= \omega L\sin\theta$

ফালিটির ক্ষেত্রফল $A = bdx$ iii

এখন, মোট চাপ = ωAh

= $\omega\, bdx\, L\sin\theta$ .... (ii, iii সমীকরণ থেকে পাই)

= $\omega\sin\theta\, L\, bdx$

ইন্টিগ্রেশন করে, = $\omega\sin\theta \int L\, bdx$ iv

কিন্তু $\int L\, bdx = 0$ বিন্দু হতে তলের ভ্রামক (মমেন্ট নেওয়া হয়েছে)

$$= \frac{A\bar{x}}{\sin\theta}$$

iv সমীকরণ মমেন্ট এর মান বসাই,

$P = \omega\sin\theta \dfrac{A\bar{x}}{\sin\theta}$

$= \boldsymbol{\omega A\bar{x}}$

রচনামূলক প্রমাণ

(১) প্রবাহীর প্যাসকেলের সূত্রের প্রমাণ কর।

উত্তর ঃ ধরি, ds প্রিজমের পুরুত্ব। মনে করি, P_1, P_2 এবং P_3 যথাক্রমে AB, BC এবং AC প্রান্তের চাপে তীব্রতা। ধরি, AB প্রান্ত অনুভূমিক, BC প্রাপ্ত উল্লম্ব এবং AC অনুভূমিকের সাথে কোণ উৎপন্ন করেছে ।

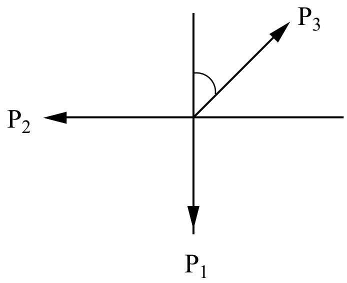
প্রান্তগুলোতে, চাপ নিম্নরূপ :

AB প্রান্তে চাপ = P_1 AB ds

BC প্রান্তে চাপ = P_2 BC ds

AC প্রান্তে চাপ = P_3 AC ds

উপরের বলগুলো AB, BC এবং AC প্রান্তে লম্ব ভাগে ক্রিয়া করছে। প্রিজমের ওজন অত্যন্ত কম এবং ওপরের বল তিনটি সাম্য অবস্থায় আছে।



প্রিজমটিকে অনুভূমিকভাবে বল বিভাজন করলে-

Horizontal,

$\sum H = 0$

$- P_2\ BC\ ds + P_3\ \sin\theta\ AC\ ds = 0$

বা, $P_3\ \sin\theta\ AC\ ds = P_2\ BC\ ds$ ....(ds কাটাকাটি করে চলে যায়)

বা, $P_3\ AC \sin\theta\ = P_2\ AC\sin\theta$ .... (প্রমাণের সুবিধার্থে ধরে নেওয়া অংশ)

$\therefore\ P_3 = P_2$

প্রিজমটিকে উল্লম্বভাবে বল বিভাজন করলে-

Vertical,

$\sum H = 0$

$- P_1\ AB\ ds + P_3\ \cos\theta\ AC\ ds = 0$

বা, $P_3\ \cos\theta\ AC\ ds = P_1\ AB\ ds$

বা, $P_3\ \cos\theta\ AC = P_1\ AB$

বা, $P_3\ \cos\theta\ AC = P_1 \cos\theta\ AC$

$\therefore\ P_3 = P_1$

সুতারং, $\mathbf{P_1 = P_2 = P_3}$

প্রমাণের সুবিধার্থে ধরে নেওয়া,

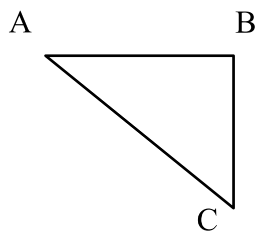
$$\sin\theta = \frac{BC}{AC}$$

বা, $BC = AC \sin\theta$

আবার,

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC}$$

বা, $AB = \cos\theta\ AC$



অনুশীলনী-৩

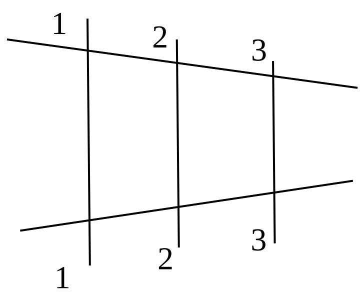
রচনামূলক প্রমাণ

(১) প্রবাহের ধারাবাহিক সমীকরণটি ব্যাখা কর।

অথবা, প্রমাণ কর যে, Q = av; যেখানে অক্ষরগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে।

উত্তর ঃ যদি কোনো ট্যাপারিং পাইপ বা চ্যানেলের মধ্যদিয়ে তরল পদার্থ অনবরত অবিচ্ছিন্নভাবে প্রবাহিত হয় তবে নির্দিষ্ট সময়ের বিরতিতে এর যে-কোনো সেকশন দিয়ে সমান পরিমাণ বা সমান ওজনের তরল প্রবাহিত হবে। একে ধারাবাহিকতার সমীকরণ বা অবিরাম প্রবাহের সমীকরণ বলা হয়। এটি প্রবাহের প্রথম এবং মৌলিক সমীকরণ।

প্রবাহের ধারাবাহিক সমীকরণঃ



মনে করি,

1-1 সেকশনে প্রবাহিত বলের ক্ষেত্রফল = a_1

1-1 সেকশনে প্রবাহিত তরলের আয়তন = v_1

1-1 সেকশনে প্রবাহিত মোট তরল $Q_1 = a_1 v_1$

একই ভাবে, 2-2 সেকশনে প্রবাহিত মোট তরল $Q_2 = a_2 v_2$

3-3 সেকশনে প্রবাহিত মোট তরল $Q_2 = a_3 v_3$

সুতারং, $Q_1 = Q_2 = Q_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = Q_n$

বা, $a_1 v_1 = a_2 v_2 = a_3 v_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = a_n v_n$

$\therefore\ \mathbf{Q = av = C}$ (C = constant)

এই প্রমাণটির ভিডিও দেখতে স্কেন করুন:

অথবা, ক্লিক করুন:
https://youtu.be/ta8SC26q8jE

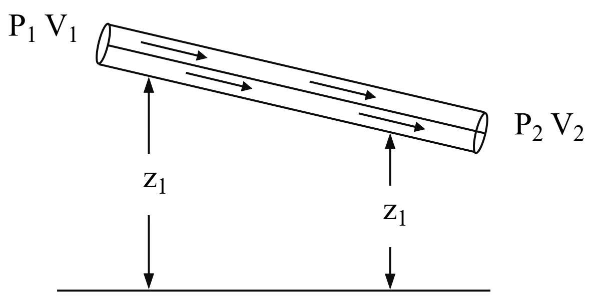
SCAN ME!

অনুশীলনী-৫

রচনামূলক প্রমাণ

(১) বার্ণোলীর সূত্রের প্রমাণ প্রতিপাদন করে দেখাও।

উত্তরঃ বার্ণোলীর সূত্র অনুযায়ীঃ



এখানে,
$P =$ চাপ
$v =$ আয়তন
$m =$ ভর

এখানে,

চাপ শক্তি $P = P_1\,\acute{v}$

গতি শক্তি $K_E = \frac{1}{2}\,mv^2$

স্থিতি শক্তি $P_E = mgh$

আমরা জানি,

চাপ শক্তি + গতি শক্তি + স্থিতি শক্তি = মোট শক্তি

এখানে,

১ নং সেকশনের মোট চাপ = ২ নং সেকশনের মোট চাপ

$P + K_E + P_E = P + K_E + P_E$

বা, $P_1\,\acute{v} + \frac{1}{2}\,mv^2 + mgh_1 = P_2\,\acute{v} + \frac{1}{2}\,mv_2{}^2 + mgh_2$

বা, $\frac{P_1\,\acute{v}}{m} + \frac{\frac{1}{2}mv^2}{m} + \frac{mgh_1}{m} = \frac{P_2\,\acute{v}}{m} + \frac{\frac{1}{2}mv_2{}^2}{m} + \frac{mgh_2}{m}$ ....(m দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ)

বা, $\frac{P_1\,\acute{v}}{m} + \frac{1}{2}\,v^2 + gh_1 = \frac{P_2\,\acute{v}}{m} + \frac{1}{2}\,v_2{}^2 + gh_2$

বা, $\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}\,v^2 + gh_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}\,v_2{}^2 + gh_2$ .... $\boxed{m = \rho v \quad \frac{1}{\rho} = \frac{m}{v}}$

বা, $\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2{}^2}{2g} + z_2$................................(g দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ)

$\therefore\ \mathbf{z + \frac{v^2}{2g} + \frac{P_1}{\omega} = z + \frac{v_2{}^2}{2g} + \frac{P_2}{\omega}}$ .... (যেহেতু $\rho g = \omega$)

(২) ভেনচুরি মিটারের সাহায্যে নির্গমনের পরিমাপের সূত্র প্রতিপাদন কর।

অথবা, দেখাও যে, ভেনচুরি মিটারের নির্গমনের পরিমাণ, $Q=KC\sqrt{H}$.

উত্তরঃ ভেনচুরি মিটারের সাহায্যে নির্গমনের পরিমাপের:

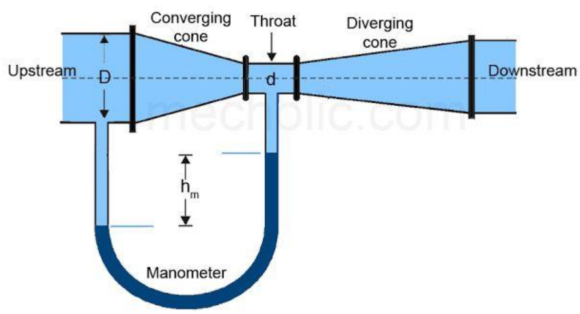
চিত্র হতে,

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{P_1}{\omega} = z + \frac{v_2{}^2}{2g} + \frac{P_2}{\omega}$$

যেহেতু ডেটাম লাইন শূণ্য, (ডেটাম লাইন সমান্তরাল)

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{P_1}{\omega} = \frac{v_2{}^2}{2g} + \frac{P_2}{\omega}$$

বা, $\frac{P_1}{\omega} - \frac{P_2}{\omega} = \frac{v_2{}^2}{2g} - \frac{v_1{}^2}{2g}$



চিত্রঃ ভেনচুরি মিটার

আমারা জানি,

$$a_1 v_1 = a_2 v_2$$

$$\text{বা, } v_1^2 = \frac{a_2^2 v_2^2}{a_1^2}$$

এবার, v_1^2 এর মান সমীকরণ এ বসাই

$$\text{বা, } \frac{P_1}{\omega} - \frac{P_2}{\omega} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{a_2^2 v_2^2}{a_1^2} \times \frac{1}{2g} \text{ ....}$$

$$\text{বা, } \frac{P_1}{\omega} - \frac{P_2}{\omega} = \frac{v_2^2}{2g}\left(1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right)$$

$$\text{বা, } h = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2}\right)$$

$$\text{বা, } v_2^2 = 2gh\left(\frac{a_1^2}{a_1^2 - a_2^2}\right)$$

$$\text{বা, } v_2 = \sqrt{2gh}\left(\frac{\sqrt{a_1^2}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}\right)$$

$$\therefore\ v_2 = \sqrt{2gh}\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}\right)$$

আবার,

$Q = a_2 v_2$ দুই নং সেকশনের জন্য,

$$\text{বা, } Q = a_2\sqrt{2gh}\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}\right)$$

$$\text{বা, } Q = \sqrt{2gh}\left(\frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{Q = \sqrt{2gh}\left(\frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}\right)}$$

এই প্রমাণটির ভিডিও দেখতে স্কেন করুন:

অথবা, ক্লিক করুন: https://youtu.be/KsapuUDIyNU

SCAN ME!

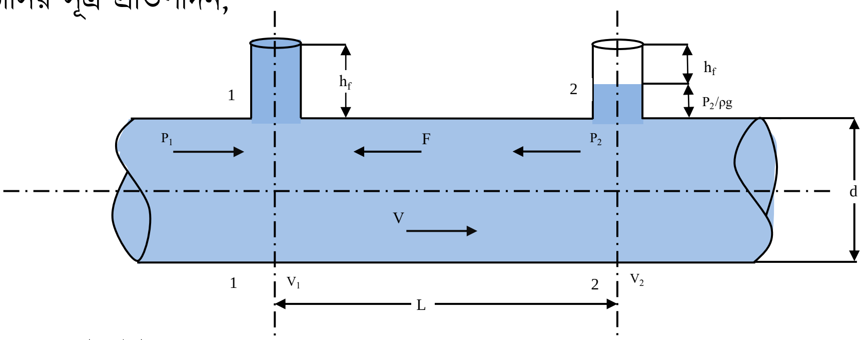
অনুশীলনী-৭

সংক্ষিপ্ত প্রমাণ

(৭) প্রমাণ কর যে, ঘর্ষণজনিত বাধা $h_f = \frac{4FLv^2}{2gd}$

অথবা, DERCY EQUATION প্রতিপাদন কর।

উত্তর ঃ ডার্সির সূত্র প্রতিপাদন,



এখানে,

P_1, P_2 = চাপের তীব্রতা সেকশন 1+2

V_1, V_2 = প্রবাহীর বেগ সেকশন 1+2

L = সেকশন 1+2 এর মধ্যে দৈর্ঘ

d = পাইপের ব্যাস

h_f = ঘর্ষণ জনিত হেডলস

বার্ণোলীর সূত্র প্রয়োগ করে,

$$Z_2 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + h_f$$

$$\text{বা, } \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + h_f \text{ ....}(\because V_1 = V_2 \text{ এবং } Z_1 = Z_2)$$

$$\text{বা, } \frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_f$$

$$\text{বা, } h_f = \frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g}$$

$$\text{বা, } h_f = \frac{P_1 - P_1}{\rho g}$$

$\therefore\ h_f = \frac{P_1 - P_1}{\rho g}$ .... *i*

আমরা জানি, বাধার পরিমাণ = গতিশক্তি

$R \propto \frac{1}{2} mv^2$

বা, $R \propto \frac{1}{2} \times \frac{w}{g} \times v^2$ .... $\left(m = \frac{w}{g}\right)$

$\therefore\ R = f \times \frac{1}{2} \times \frac{w}{g} \times v^2$....................................(f = ঘর্ষণ সহগ).......... *ii*

বা, $F = R \times A$ .... $\left(R = \frac{F}{L}\right)$

$\therefore\ F = f \times \frac{1}{2} \times \frac{w}{g} \times v^2 \times \pi d\, L$ ....($A = \pi d\, L$).......... *iii*

আনুভূমিক বল বিভাজন,

$P_1 \times A - F - P_2 \times A = 0$ ....

বা, $F = P_1 \times A - P_2 \times A$

$\therefore\ F = A\ (P_1 - P_2)$.. *iv*

এখানে,

$P_1 = \frac{F}{A}$

বা, $F = P_1 \times A$

সমীকরণ *iii* ও *iv* থেকে পাই,

$f \times \frac{1}{2} \times \frac{w}{g} \times v^2 \times \pi d\, L = \frac{\pi}{4} \times d^2\ (P_1 - P_2)$

বা, $4 \times f \times \frac{1}{2} \times \frac{w}{g} \times v^2 \times L = d\ (P_1 - P_2)$

বা, $(P_1 - P_2) = \frac{4fwv^2L}{2gd}$

বা, $\frac{P_1 - P_2}{w} = \frac{4FLv^2}{2gd}$

বা, $\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{4FLv^2}{2gd}$ ....($W = \rho g$)

$\therefore\ h_f = \frac{4FLv^2}{2gd}$ ....(*i* নং সমীকরণ থেকে h_f এর মান)

এই প্রমাণটির ভিডিও দেখতে স্কেন করুন:

অথবা, ক্লিক করুন: https://youtu.be/Jm6dlJp80ho

SCAN ME!

অনুশীলনী-১০

রচনামূলক প্রমাণ

(১) টারবাইনের ক্ষেত্রে দেখাও যে, আপেক্ষিক গতি $N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H^{\frac{5}{4}}}$ (যেখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে)।

উত্তর ঃ আমরা জানি,

$\upsilon \propto v$ (υ = Upsilon)

বা, $\frac{\pi DN}{60} \propto \sqrt{2gH}$

বা, $\frac{\pi DN}{60} \propto \sqrt{2g}\,\sqrt{H}$ ....(Constant মান গুলো সমানুপাতিক হিসাবে বসবে)

বা, $DN = \sqrt{H}$

$\therefore\ D \propto \frac{\sqrt{H}}{N}$.. *i*

আবার,

$Q = AV_F$

$= \pi DbV_f$

এখানে,

N_S = টারবাইনের আপেক্ষিক দ্রুতি

D = টারবাইন রানারের ব্যাস

N = রানারের গতি

υ = তীর্যক বেগ

v= পরম বেগ

$$= \pi D.D.V_f \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b = D)$$

$$= \pi D.D.\sqrt{2gH}$$

$$= \pi\, D.D.\sqrt{2g}\,\sqrt{H}$$

$$Q \propto D^2\sqrt{H}$$

বা, $Q \propto \left(\frac{\sqrt{H}}{N}\right)^2 \sqrt{H}$ ....(i সমীকরণ থেকে D এর মান)

বা, $Q \propto \frac{H^{\frac{1}{2}}}{N^2} \times \sqrt{H}$

বা, $Q \propto \frac{H^{\frac{3}{2}}}{N^2}$

এখন,

$$P = \omega QH$$

বা, $P \propto QH$ .... (ω)

বা, $P \propto \frac{H^{\frac{3}{2}}}{N^2} H$

বা, $P \propto \frac{H^{\frac{3}{2}+1}}{N^2}$

বা, $N^2 \propto \frac{H^{\frac{5}{2}}}{P}$

বা, $N \propto \sqrt{\frac{H^{\frac{5}{2}}}{P}}$

বা, $N = N_s \frac{H^{\frac{5}{4}}}{P}$

$$\therefore N = \frac{N\sqrt{P}}{H^{\frac{5}{4}}}$$

এই প্রমাণটির ভিডিও দেখতে স্কেন করুন:

অথবা, ক্লিক করুন:

https://youtu.be/WO0M7iactb8?si=nMTosp8aZz5UQ