▶命題 1.36（蛇の補題 (snake lemma)）　2つの行が完全であるような次の左 R 加群の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3.
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

このとき，次の完全列が存在する．

$$
\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3.
\tag{1.12}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker} h_1 \arrow[r, "\overline{f_1}"] & \operatorname{Ker} h_2 \arrow[r, "\overline{f_2}"] & \operatorname{Ker} h_3 \arrow[dddll, bend left, "\delta"] & \\
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 & \\
 & \operatorname{Coker} h_1 \arrow[r, "\overline{g_1}"] & \operatorname{Coker} h_2 \arrow[r, "\overline{g_2}"] & \operatorname{Coker} h_3 &
\end{tikzcd}
$$

「snake lemma イメージ図」

ただし $\overline{f}_i, \overline{g}_i\ (i=1,2)$ は命題 1.33(4) の方法で f_i, g_i から誘導される準同型写像である．また，f_1 が単射ならば $\overline{f}_1$ も単射，g_2 が全射ならば $\overline{g}_2$ も全射である．

命題1.33(4)

(4) 左 R 加群の可換図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "h"'] \\ M' \arrow[r, "f'"] & N' \end{tikzcd}$$

に対し，これを拡張した可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[r] \arrow[d, "\overline{h}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f' \arrow[r, "i'"] & M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "p'"] & \operatorname{Coker} f' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

で，2つの行が (3) の 3 つめの完全列となるようなものが自然に誘導される．

[証明] 命題 1.33(4) より $\overline{f}_i, \overline{g}_i\ (i=1,2)$ は $\overline{f}_i(x) := f_i(x)$, $\overline{g}_i(x + \operatorname{Im} h_i) = g_i(x) + \operatorname{Im} h_{i+1}$ により定義されていることに注意する．これより f_1 が単射ならば $\overline{f}_1$ も単射，g_2 が全射ならば $\overline{g}_2$ も全射であることが容易にわかる．

$\overline{f}_i(x) = f_i(x)$　f_1が単射なら$\overline{f}_1$も単射

$\overline{g}_i(x + \operatorname{Im} h_i) = g_i(x) + \operatorname{Im} h_{i+1}$ より g_2が全射なら $\overline{g}_2$も全射

Q 証明の流れ

$\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f_1}} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f_2}} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g_1}}$

$\operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g_2}} \operatorname{Coker} h_3$ の完全性を示す.

① —— $\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f_1}} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f_2}} \operatorname{Ker} h_3$ の完全性を示す

② —— $\operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g_1}} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g_2}} \operatorname{Coker} h_3$ の完全性を示す

③ —— $\operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1$ の δ の定義

(境界準同型射像)

④ —— $\operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f_2}} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1$

の完全性を示す

⑤ —— $\operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g_1}} \operatorname{Coker} h_2$

の完全性を示す。

Q 証明の流れ

$\ker h_1 \xrightarrow{\bar{f}_1} \ker h_2 \xrightarrow{\bar{f}_2} \ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\bar{g}_1}$

$\mathrm{Coker}\, h_2 \xrightarrow{\bar{g}_2} \mathrm{Coker}\, h_3$ の完全性を示す.

$\boxed{① \text{——} \ \ker h_1 \xrightarrow{\bar{f}_1} \ker h_2 \xrightarrow{\bar{f}_2} \ker h_3 \text{ の完全性を示す}}$

② —— $\mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\bar{g}_1} \mathrm{Coker}\, h_2 \xrightarrow{\bar{g}_2} \mathrm{Coker}\, h_3$ の完全性を示す

③ —— $\ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1$ の δ の定義

(境界準同型射像)

④ —— $\ker h_2 \xrightarrow{\bar{f}_2} \ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1$

の完全性を示す

⑤ —— $\ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\bar{g}_1} \mathrm{Coker}\, h_2$

の完全性を示す。

$\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3$ の完全性を示す．$\overline{f}_i$ の定義と $f_2 \circ f_1 = 0$ であることより $\overline{f}_2 \circ \overline{f}_1 = 0$ である．また，$x \in \operatorname{Ker} \overline{f}_2$ のとき $f_2(x) = \overline{f}_2(x) = 0$ なのである $y \in M_1$ に対して $x = f_1(y)$．このとき $x \in \operatorname{Ker} h_2$ より $0 = h_2(x) = h_2(f_1(y)) = g_1(h_1(y))$．$g_1$ は単射なので $h_1(y) = 0$，つまり $y \in \operatorname{Ker} h_1$ となる．したがって $\overline{f}_1(y)$ が定義され $\overline{f}_1(y) = f_1(y) = x$ となる．よって $\operatorname{Ker} \overline{f}_2 \subseteq \operatorname{Im} \overline{f}_1$ も言え，以上より $\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
& y \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_1"] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
& y \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "h_1"] & x \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & 0 \\
& h_1(y) = 0 \arrow[r, mapsto, "g_1"] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

▶命題 1.36 (蛇の補題 (snake lemma)) 2 つの行が完全であるような次の左 R 加群の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 . &
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

このとき，次の完全列が存在する．

$$
\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3 .
\tag{1.12}
$$

$\mathrm{Ker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathrm{Ker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\,h_3$ の完全性を示す．$\overline{f}_i$ の定義と $f_2 \circ f_1 = 0$ であることより $\overline{f}_2 \circ \overline{f}_1 = 0$ である．また，$x \in \mathrm{Ker}\,\overline{f}_2$ のとき $f_2(x) = \overline{f}_2(x) = 0$ なのである $y \in M_1$ に対して $x = f_1(y)$．このとき $x \in \mathrm{Ker}\,h_2$ より $0 = h_2(x) = h_2(f_1(y)) = g_1(h_1(y))$．$g_1$ は単射なので $h_1(y) = 0$，つまり $y \in \mathrm{Ker}\,h_1$ となる．したがって $\overline{f}_1(y)$ が定義され $\overline{f}_1(y) = f_1(y) = x$ となる．よって $\mathrm{Ker}\,\overline{f}_2 \subseteq \mathrm{Im}\,\overline{f}_1$ も言え，以上より $\mathrm{Ker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathrm{Ker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\,h_3$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_1"] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
y \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "h_1"] & x \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & 0 \\
h_1(y) = 0 \arrow[r, mapsto, "g_1"] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

$f_2 \circ f_1$ は完全列より分かる。
$\overline{f}$ の構成法より
$f_i(x) = \overline{f}_i(x)$
なので $\overline{f}_2 \circ \overline{f}_1 = 0$ である

▶**命題 1.36**（蛇の補題 (snake lemma)）　2つの行が完全であるような次の左 R 加群の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3. &
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

このとき，次の完全列が存在する．

$$
\mathrm{Ker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathrm{Ker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\,h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \mathrm{Coker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \mathrm{Coker}\,h_3.
\tag{1.12}
$$

$\mathrm{Ker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathrm{Ker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\,h_3$ の完全性を示す．$\overline{f}_i$ の定義と $f_2 \circ f_1 = 0$ であることより $\overline{f}_2 \circ \overline{f}_1 = 0$ である．また，$x \in \mathrm{Ker}\,\overline{f}_2$ のとき $f_2(x) = \overline{f}_2(x) = 0$ なのである $y \in M_1$ に対して $x = f_1(y)$．このとき $x \in \mathrm{Ker}\,h_2$ より $0 = h_2(x) = h_2(f_1(y)) = g_1(h_1(y))$．$g_1$ は単射なので $h_1(y) = 0$，つまり $y \in \mathrm{Ker}\,h_1$ となる．したがって $\overline{f}_1(y)$ が定義され $\overline{f}_1(y) = f_1(y) = x$ となる．よって $\mathrm{Ker}\,\overline{f}_2 \subseteq \mathrm{Im}\,\overline{f}_1$ も言え，以上より $\mathrm{Ker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathrm{Ker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\,h_3$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_1"] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
y \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "h_1"] & x \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & 0 \\
h_1(y) = 0 \arrow[r, mapsto, "g_1"] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

← ここの可換図式

▶**命題 1.36**（蛇の補題 (snake lemma)）　2つの行が完全であるような次の左 R 加群の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3. &
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

このとき，次の完全列が存在する．

$$
\mathrm{Ker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathrm{Ker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\,h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\,h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \mathrm{Coker}\,h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \mathrm{Coker}\,h_3. \tag{1.12}
$$

$\mathrm{Ker}\, h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathrm{Ker}\, h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\, h_3$ の完全性を示す．$\overline{f}_i$ の定義と $f_2 \circ f_1 = 0$ であることより $\overline{f}_2 \circ \overline{f}_1 = 0$ である．また，$x \in \mathrm{Ker}\, \overline{f}_2$ のとき $f_2(x) = \overline{f}_2(x) = 0$ なのである $y \in M_1$ に対して $x = f_1(y)$．このとき $x \in \mathrm{Ker}\, h_2$ より $0 = h_2(x) = h_2(f_1(y)) = g_1(h_1(y))$．$g_1$ は単射なので $h_1(y) = 0$，つまり $y \in \mathrm{Ker}\, h_1$ となる．したがって $\overline{f}_1(y)$ が定義され $\overline{f}_1(y) = f_1(y) = x$ となる．よって $\mathrm{Ker}\, \overline{f}_2 \subseteq \mathrm{Im}\, \overline{f}_1$ も言え，以上より $\mathrm{Ker}\, h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathrm{Ker}\, h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\, h_3$ の完全性が言えた．

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_1"] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
y \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "h_1"] & x \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & 0 \\
h_1(y) = 0 \arrow[r, mapsto, "g_1"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

$x \in \mathrm{ker}\, h_2$ はそのまま
$\mathrm{ker}\, h_2$ から取っているので
あたりまえ。

式は可換図式の追跡

g_1 は単射なので 0に移る
のは 0 のみ。

▶命題 1.36（蛇の補題 (snake lemma)） 2つの行が完全であるような次の左 R 加群の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3. &
\end{tikzcd} \tag{1.11}$$

このとき，次の完全列が存在する．

$$\mathrm{Ker}\, h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathrm{Ker}\, h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\, h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \mathrm{Coker}\, h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \mathrm{Coker}\, h_3. \tag{1.12}$$

$\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3$ の完全性を示す．$\overline{f}_i$ の定義と $f_2 \circ f_1 = 0$ であることより $\overline{f}_2 \circ \overline{f}_1 = 0$ である．また，$x \in \operatorname{Ker} \overline{f}_2$ のとき $f_2(x) = \overline{f}_2(x) = 0$ なのである $y \in M_1$ に対して $x = f_1(y)$．このとき $x \in \operatorname{Ker} h_2$ より $0 = h_2(x) = h_2(f_1(y)) = g_1(h_1(y))$．$g_1$ は単射なので $h_1(y) = 0$，つまり $y \in \operatorname{Ker} h_1$ となる．したがって $\overline{f}_1(y)$ が定義され $\overline{f}_1(y) = f_1(y) = x$ となる．よって $\operatorname{Ker} \overline{f}_2 \subseteq \operatorname{Im} \overline{f}_1$ も言え，以上より $\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3$ の完全性が言えた．

Kerh1の元 →

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_1"] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
y \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "h_1"] & x \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & 0 \\
h_1(y) = 0 \arrow[r, mapsto, "g_1"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

y ∈ Ker h1 より
Ker h1の元 y が取れる

$\overline{f}_1(y) = f_1(y) = x$
は カズ の追う

「x はそもそも Ker $\overline{f}_2$ の元!!」

▶**命題 1.36**（蛇の補題 (snake lemma)）　2 つの行が完全であるような次の左 R 加群の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3. &
\end{tikzcd} \tag{1.11}$$

このとき，次の完全列が存在する．

$$\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3. \tag{1.12}$$

$\overline{f}_1$ の元は x に
含まれる

で $\operatorname{Im} \overline{f}_1 \subseteq \operatorname{Ker} \overline{f}_2$ は？

$f_1(y) = x$ で，
f_1 は単射

○ 証明の流れ

$\ker h_1 \xrightarrow{\bar{f}_1} \ker h_2 \xrightarrow{\bar{f}_2} \ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\bar{g}_1}$

$\mathrm{Coker}\, h_2 \xrightarrow{\bar{g}_2} \mathrm{Coker}\, h_3$ の完全性を示す.

① —— $\ker h_1 \xrightarrow{\bar{f}_1} \ker h_2 \xrightarrow{\bar{f}_2} \ker h_3$ の完全性を示す

② —— $\mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\bar{g}_1} \mathrm{Coker}\, h_2 \xrightarrow{\bar{g}_2} \mathrm{Coker}\, h_3$ の完全性を示す

③ —— $\ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1$ の δ の定義
(境界準同型射像)

④ —— $\ker h_2 \xrightarrow{\bar{f}_2} \ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1$
の完全性を示す

⑤ —— $\ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\bar{g}_1} \mathrm{Coker}\, h_2$
の完全性を示す。

$g_2\circ g_1=0$ であることより $\overline{g}_2\circ\overline{g}_1=0$ が言える．また，$x+\operatorname{Im}h_2\in\operatorname{Ker}\overline{g}_2$ のとき $g_2(x)+\operatorname{Im}h_3=0+\operatorname{Im}h_3$．よってある $y\in M_3$ に対して $g_2(x)=h_3(y)$．また f_2 は全射なのである $z\in M_2$ に対して $y=f_2(z)$．すると $g_2(x-h_2(z))=g_2(x)-g_2(h_2(z))=g_2(x)-h_3(f_2(z))=g_2(x)-h_3(y)=0$ より $x-h_2(z)\in\operatorname{Ker}g_2=\operatorname{Im}g_1$．よってある $w\in N_1$ に対して $g_1(w)=x-h_2(z)$．したがって $\overline{g}_1(w+\operatorname{Im}h_1)=g_1(w)+\operatorname{Im}h_2=x+(-h_2(z)+\operatorname{Im}h_2)=x+\operatorname{Im}h_2$．よって $\operatorname{Ker}\overline{g}_2\subseteq\operatorname{Im}\overline{g}_1$ も言え，以上より $\operatorname{Coker}h_1\xrightarrow{\overline{g}_1}\operatorname{Coker}h_2\xrightarrow{\overline{g}_2}\operatorname{Coker}h_3$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, mapsto, "f_2"] & y \arrow[d, mapsto, "h_3"] \\
x \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & g_2(x) \arrow[d, mapsto] \\
x+\operatorname{Im}h_2 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_2"] & 0+\operatorname{Im}h_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & x-h_2(z) \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \\
w+\operatorname{Im}h_1 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_1"] & x+\operatorname{Im}h_2 &
\end{tikzcd}
$$

$g_2 \circ g_1 = 0$ であることより $\overline{g}_2 \circ \overline{g}_1 = 0$ が言える．また，$x + \operatorname{Im} h_2 \in \operatorname{Ker} \overline{g}_2$ のとき $g_2(x) + \operatorname{Im} h_3 = 0 + \operatorname{Im} h_3$．よってある $y \in M_3$ に対して $g_2(x) = h_3(y)$．また f_2 は全射なのである $z \in M_2$ に対して $y = f_2(z)$．すると $g_2(x - h_2(z)) = g_2(x) - g_2(h_2(z)) = g_2(x) - h_3(f_2(z)) = g_2(x) - h_3(y) = 0$ より $x - h_2(z) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$．よってある $w \in N_1$ に対して $g_1(w) = x - h_2(z)$．したがって $\overline{g}_1(w + \operatorname{Im} h_1) = g_1(w) + \operatorname{Im} h_2 = x + (-h_2(z) + \operatorname{Im} h_2) = x + \operatorname{Im} h_2$．よって $\operatorname{Ker} \overline{g}_2 \subseteq \operatorname{Im} \overline{g}_1$ も言え，以上より $\operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, mapsto, "f_2"] & y \arrow[d, mapsto, "h_3"] \\
x \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & g_2(x) \arrow[d, mapsto] \\
x + \operatorname{Im} h_2 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_2"] & 0 + \operatorname{Im} h_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & x - h_2(z) \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \\
w + \operatorname{Im} h_1 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_1"] & x + \operatorname{Im} h_2 &
\end{tikzcd}
$$

$g_2 \circ g_1 = 0$ より $\overline{g_2} \circ \overline{g_1} = 0$

ゆうどうされた準同型なので

$g_2 \circ g_1 = 0$ であることより $\overline{g}_2 \circ \overline{g}_1 = 0$ が言える．また，$x + \operatorname{Im} h_2 \in \operatorname{Ker} \overline{g}_2$ のとき $g_2(x) + \operatorname{Im} h_3 = 0 + \operatorname{Im} h_3$．よってある $y \in M_3$ に対して $g_2(x) = h_3(y)$．また f_2 は全射なのである $z \in M_2$ に対して $y = f_2(z)$．すると $g_2(x - h_2(z)) = g_2(x) - g_2(h_2(z)) = g_2(x) - h_3(f_2(z)) = g_2(x) - h_3(y) = 0$ より $x - h_2(z) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$．よってある $w \in N_1$ に対して $g_1(w) = x - h_2(z)$．したがって $\overline{g}_1(w + \operatorname{Im} h_1) = g_1(w) + \operatorname{Im} h_2 = x + (-h_2(z) + \operatorname{Im} h_2) = x + \operatorname{Im} h_2$．よって $\operatorname{Ker} \overline{g}_2 \subseteq \operatorname{Im} \overline{g}_1$ も言え，以上より $\operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, mapsto, "f_2"] & y \arrow[d, mapsto, "h_3"] \\
x \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & g_2(x) \arrow[d, mapsto] \\
x + \operatorname{Im} h_2 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_2"] & 0 + \operatorname{Im} h_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & x - h_2(z) \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \\
w + \operatorname{Im} h_1 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_1"] & x + \operatorname{Im} h_2 &
\end{tikzcd}
$$

$g_2(x) + \mathrm{Im}\, h_3 = 0 + \mathrm{Im}\, h_3$ は可換図式

$g_2 \circ g_1 = 0$ であることより $\overline{g}_2 \circ \overline{g}_1 = 0$ が言える．また，$x + \operatorname{Im} h_2 \in \operatorname{Ker} \overline{g}_2$ のとき $g_2(x) + \operatorname{Im} h_3 = 0 + \operatorname{Im} h_3$．よってある $y \in M_3$ に対して $g_2(x) = h_3(y)$．また f_2 は全射なのである $z \in M_2$ に対して $y = f_2(z)$．すると $g_2(x - h_2(z)) = g_2(x) - g_2(h_2(z)) = g_2(x) - h_3(f_2(z)) = g_2(x) - h_3(y) = 0$ より $x - h_2(z) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$．よってある $w \in N_1$ に対して $g_1(w) = x - h_2(z)$．したがって $\overline{g}_1(w + \operatorname{Im} h_1) = g_1(w) + \operatorname{Im} h_2 = x + (-h_2(z) + \operatorname{Im} h_2) = x + \operatorname{Im} h_2$．よって $\operatorname{Ker} \overline{g}_2 \subseteq \operatorname{Im} \overline{g}_1$ も言え，以上より $\operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3$ の完全性が言えた．

$$\begin{tikzcd}
 & z \arrow[r, mapsto, "f_2"] & y \arrow[d, mapsto, "h_3"] \\
 & x \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & g_2(x) \arrow[d, mapsto] \\
 & x + \operatorname{Im} h_2 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_2"] & 0 + \operatorname{Im} h_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & x - h_2(z) \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \\
w + \operatorname{Im} h_1 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_1"] & x + \operatorname{Im} h_2 &
\end{tikzcd}$$

全射なのであるzがとれる

$y = f_2(z)$ととれる

$g_2 \circ g_1 = 0$ であることより $\overline{g}_2 \circ \overline{g}_1 = 0$ が言える．また，$x + \operatorname{Im} h_2 \in \operatorname{Ker} \overline{g}_2$ のとき $g_2(x) + \operatorname{Im} h_3 = 0 + \operatorname{Im} h_3$．よってある $y \in M_3$ に対して $g_2(x) = h_3(y)$．また f_2 は全射なのである $z \in M_2$ に対して $y = f_2(z)$．すると $g_2(x - h_2(z)) = g_2(x) - g_2(h_2(z)) = g_2(x) - h_3(f_2(z)) = g_2(x) - h_3(y) = 0$ より $x - h_2(z) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$．よってある $w \in N_1$ に対して $g_1(w) = x - h_2(z)$．したがって $\overline{g}_1(w + \operatorname{Im} h_1) = g_1(w) + \operatorname{Im} h_2 = x + (-h_2(z) + \operatorname{Im} h_2) = x + \operatorname{Im} h_2$．よって $\operatorname{Ker} \overline{g}_2 \subseteq \operatorname{Im} \overline{g}_1$ も言え，以上より $\operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"'] & y \arrow[d, mapsto, "h_3"] \\
x \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & g_2(x) \arrow[d, mapsto] \\
x + \operatorname{Im} h_2 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_2"] & 0 + \operatorname{Im} h_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & x - h_2(z) \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \\
w + \operatorname{Im} h_1 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_1"] & x + \operatorname{Im} h_2 &
\end{tikzcd}
$$

—— 線の ①→② は準同型より

②→③ は可換性より

③→④ は定義より代入

④→0 は $g_2(x) = h_3(y)$ より 0となる

最後は $g_2(x - h_2(z)) = 0$ より導ける（+ N行の完全性）

$g_2\circ g_1=0$ であることより $\overline{g}_2\circ\overline{g}_1=0$ が言える．また，$x+\operatorname{Im}h_2\in\operatorname{Ker}\overline{g}_2$ のとき $g_2(x)+\operatorname{Im}h_3=0+\operatorname{Im}h_3$．よってある $y\in M_3$ に対して $g_2(x)=h_3(y)$．また f_2 は全射なのである $z\in M_2$ に対して $y=f_2(z)$．すると $g_2(x-h_2(z))=g_2(x)-g_2(h_2(z))=g_2(x)-h_3(f_2(z))=g_2(x)-h_3(y)=0$ より $x-h_2(z)\in\operatorname{Ker}g_2=\operatorname{Im}g_1$．よってある $w\in N_1$ に対して $g_1(w)=x-h_2(z)$．したがって $\overline{g}_1(w+\operatorname{Im}h_1)=g_1(w)+\operatorname{Im}h_2=x+(-h_2(z)+\operatorname{Im}h_2)=x+\operatorname{Im}h_2$．よって $\operatorname{Ker}\overline{g}_2\subseteq\operatorname{Im}\overline{g}_1$ も言え，以上より $\operatorname{Coker}h_1\xrightarrow{\overline{g}_1}\operatorname{Coker}h_2\xrightarrow{\overline{g}_2}\operatorname{Coker}h_3$ の完全性が言えた．

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, mapsto, "f_2"] & y \arrow[d, mapsto, "h_3"] & & & \\
x \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & g_2(x) \arrow[d, mapsto] & w \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto, "h_1"'] & x-h_2(z) \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"'] & 0 \\
x+\operatorname{Im}h_2 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_2"] & 0+\operatorname{Im}h_3 & w+\operatorname{Im}h_1 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_1"] & x+\operatorname{Im}h_2 &
\end{tikzcd}$$

$g_1(w) = x - h_2(z)$ 　（完全 $\Longleftrightarrow$ $\ker g \subseteq \operatorname{Im} f$ And $g\circ f = 0$）

$\Downarrow$ 自然!!

$\overline{g}_1(w+\operatorname{Im}h_1) = g_1(w) + \operatorname{Im}h_2$

$= x + (-h_2(z) + \operatorname{Im}h_2)$

$= x + \operatorname{Im}h_2$ 　Imでまとめる

$\operatorname{Ker}\overline{g}_2 \subseteq \operatorname{Im}\overline{g}_1$ がいえる。（$\because$ $x+\operatorname{Im}h_2\in\operatorname{Ker}\overline{g}_2$）

Q 証明の流れ

$\ker h_1 \xrightarrow{\bar{f_1}} \ker h_2 \xrightarrow{\bar{f_2}} \ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\bar{g_1}}$

$\mathrm{Coker}\, h_2 \xrightarrow{\bar{g_2}} \mathrm{Coker}\, h_3$ の完全性を示す.

① —— $\ker h_1 \xrightarrow{\bar{f_1}} \ker h_2 \xrightarrow{\bar{f_2}} \ker h_3$ の完全性を示す

② —— $\mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\bar{g_1}} \mathrm{Coker}\, h_2 \xrightarrow{\bar{g_2}} \mathrm{Coker}\, h_3$ の完全性を示す

③ —— $\ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1$ の δ の定義
(境界準同型射像)

④ —— $\ker h_2 \xrightarrow{\bar{f_2}} \ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1$
の完全性を示す

⑤ —— $\ker h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\bar{g_1}} \mathrm{Coker}\, h_2$
の完全性を示す。

次に $\delta : \operatorname{Ker} h_3 \longrightarrow \operatorname{Coker} h_1$ を定義する．$x \in \operatorname{Ker} h_3 \subseteq M_3$ とすると，f_2 の全射性よりある $y \in M_2$ に対して $f_2(y) = x$．すると $g_2(h_2(y)) = h_3(f_2(y)) = h_3(x) = 0$ なので $h_2(y) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$．よってある $z \in N_1$ に対して $h_2(y) = g_1(z)$．（g_1 は単射なのでこのような z は一意的である．）そこで $\delta(x) := z + \operatorname{Im} h_1$ と定めたい．これが well-defined であるためにはこの定義が途中で選んだ y のとり方によらないことを示す必要がある．$y' \in M_2$ を $f_2(y') = x$ を満たす他の元とし，$z' \in N_1$ を $h_2(y') = g_1(z')$ を満たす元とする．このとき $f_2(y' - y) = x - x = 0$ ゆえ $y' - y \in \operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Im} f_1$ なので，ある $w \in M_1$ に対して $y' - y = f_1(w)$．すると $g_1(z' - z) = h_2(y' - y) = h_2(f_1(w)) = g_1(h_1(w))$．$g_1$ は単射なので $z' - z = h_1(w)$，よって $(z' - z) + \operatorname{Im} h_1 = 0 + \operatorname{Im} h_1$，すなわち $z + \operatorname{Im} h_1 = z' + \operatorname{Im} h_1$ となる．以上より $\delta(x) = z + \operatorname{Im} h_1$ という定義は y のとり方によらないので well-defined となり，δ が定義された．

次に $\delta : \mathrm{Ker}\, h_3 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, h_1$ を定義する．$x \in \mathrm{Ker}\, h_3 \subseteq M_3$ とすると，f_2 の全射性よりある $y \in M_2$ に対して $f_2(y) = x$．すると $g_2(h_2(y)) = h_3(f_2(y)) = h_3(x) = 0$ なので $h_2(y) \in \mathrm{Ker}\, g_2 = \mathrm{Im}\, g_1$． よってある $z \in N_1$ に対して $h_2(y) = g_1(z)$．（g_1 は単射なのでこのような z は一意的である．）そこで $\delta(x) := z + \mathrm{Im}\, h_1$ と定めたい．これが well-defined であるためにはこの定義が途中で選んだ y のとり方によらないことを示す必要がある．$y' \in M_2$ を $f_2(y') = x$ を満たす他の元とし，$z' \in N_1$ を $h_2(y') = g_1(z')$ を満たす元とする．このとき $f_2(y' - y) = x - x = 0$ ゆえ $y' - y \in \mathrm{Ker}\, f_2 = \mathrm{Im}\, f_1$ なので，ある $w \in M_1$ に対して $y' - y = f_1(w)$． すると $g_1(z' - z) = h_2(y' - y) = h_2(f_1(w)) = g_1(h_1(w))$． g_1 は単射なので $z' - z = h_1(w)$，よって $(z' - z) + \mathrm{Im}\, h_1 = 0 + \mathrm{Im}\, h_1$，すなわち $z + \mathrm{Im}\, h_1 = z' + \mathrm{Im}\, h_1$ となる．以上より $\delta(x) = z + \mathrm{Im}\, h_1$ という定義は y のとり方によらないので well-defined となり，δ が定義された．

Ker g_2 = Im g_1 は完全性より

▶命題 1.36（蛇の補題 (snake lemma)）　2つの行が完全であるような次の左 R 加群の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & y \arrow[d, Rightarrow] & x \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & & & \\
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3.
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

よって $g_2(h_2(y)) = 0$

$h_2(y) \in \mathrm{Ker}\, g_2$

このとき，次の完全列が存在する．

$$
\mathrm{Ker}\, h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \mathrm{Ker}\, h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\, h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \mathrm{Coker}\, h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \mathrm{Coker}\, h_3.
\tag{1.12}
$$

$$
\underbrace{g_2(h_2(y)) = h_3(f_2(y))}_{\text{可換性}} \quad \underbrace{= h_3(x)}_{\text{代入}} \quad \underbrace{= 0}_{x \in \mathrm{Ker}\, h_3 \text{ なので } 0}
$$

次に $\delta : \operatorname{Ker} h_3 \longrightarrow \operatorname{Coker} h_1$ を定義する．$x \in \operatorname{Ker} h_3 \subseteq M_3$ とすると，f_2 の全射性よりある $y \in M_2$ に対して $f_2(y) = x$．すると $g_2(h_2(y)) = h_3(f_2(y)) = h_3(x) = 0$ なので $h_2(y) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$．よってある $z \in N_1$ に対して $h_2(y) = g_1(z)$．（g_1 は単射なのでこのような z は一意的である．）そこで $\delta(x) := z + \operatorname{Im} h_1$ と定めたい．これが well-defined であるためにはこの定義が途中で選んだ y のとり方によらないことを示す必要がある．$y' \in M_2$ を $f_2(y') = x$ を満たす他の元とし，$z' \in N_1$ を $h_2(y') = g_1(z')$ を満たす元とする．このとき $f_2(y' - y) = x - x = 0$ ゆえ $y' - y \in \operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Im} f_1$ なので，ある $w \in M_1$ に対して $y' - y = f_1(w)$．すると $g_1(z' - z) = h_2(y' - y) = h_2(f_1(w)) = g_1(h_1(w))$．$g_1$ は単射なので $z' - z = h_1(w)$，よって $(z' - z) + \operatorname{Im} h_1 = 0 + \operatorname{Im} h_1$，すなわち $z + \operatorname{Im} h_1 = z' + \operatorname{Im} h_1$ となる．以上より $\delta(x) = z + \operatorname{Im} h_1$ という定義は y のとり方によらないので well-defined となり，δ が定義された．

▶**命題 1.36**（蛇の補題 (snake lemma)） 2つの行が完全であるような次の左 R 加群の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & & y \arrow[d, Rightarrow] & x \arrow[d, Rightarrow] & \\
z \arrow[dr, Rightarrow] & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3. &
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

このとき，次の完全列が存在する．

$$
\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3.
\tag{1.12}
$$

$z \in N_1$ に対して $h_2(y) = g_1(z)$

（g_1 は単射なのでこのような z は一意的）

そこで　$\delta(x) = z + \operatorname{Im} h_1$ と定めたい

y と x は対応している

次に $\delta : \mathrm{Ker}\, h_3 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, h_1$ を定義する．$x \in \mathrm{Ker}\, h_3 \subseteq M_3$ とすると，f_2 の全射性よりある $y \in M_2$ に対して $f_2(y) = x$．すると $g_2(h_2(y)) = h_3(f_2(y)) = h_3(x) = 0$ なので $h_2(y) \in \mathrm{Ker}\, g_2 = \mathrm{Im}\, g_1$．よってある $z \in N_1$ に対して $h_2(y) = g_1(z)$．（g_1 は単射なのでこのような z は一意的である．）そこで $\delta(x) := z + \mathrm{Im}\, h_1$ と定めたい．これが well-defined であるためにはこの定義が途中で選んだ y のとり方によらないことを示す必要がある．$y' \in M_2$ を $f_2(y') = x$ を満たす他の元とし，$z' \in N_1$ を $h_2(y') = g_1(z')$ を満たす元とする．このとき $f_2(y' - y) = x - x = 0$ ゆえ $y' - y \in \mathrm{Ker}\, f_2 = \mathrm{Im}\, f_1$ なので，あるｗ $w \in M_1$ に対して $y' - y = f_1(w)$．すると $g_1(z' - z) = h_2(y' - y) = h_2(f_1(w)) = g_1(h_1(w))$．$g_1$ は単射なので $z' - z = h_1(w)$，よって $(z' - z) + \mathrm{Im}\, h_1 = 0 + \mathrm{Im}\, h_1$，すなわち $z + \mathrm{Im}\, h_1 = z' + \mathrm{Im}\, h_1$ となる．以上より $\delta(x) = z + \mathrm{Im}\, h_1$ という定義は y のとり方によらないので well-defined となり，δ が定義された．

$\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Im}(f_1)$ は完全より

ある w に対して $y' - y = f_1(w)$ に属す?

$$
\begin{tikzcd}
 & y \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & x \arrow[d, "h_3"] \\
z \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d] & h_2(y) \arrow[r, mapsto, "g_2"] & 0 \\
z + \mathrm{Im}\, h_1 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & y' - y \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & 0 \\
h_1(w) = z' - z \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & h_2(y' - y) & \\
0 + \mathrm{Im}\, h_1 & &
\end{tikzcd}
$$

$\xrightarrow{\overline{f}_2} \mathrm{Ker}\, h_3 \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, h_1$ の完全性を示す．$x \in \mathrm{Im}\, \overline{f}$ のと

あとは攻略… 長い..

(2) 左 R 加群の図式 $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ ($L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$) が完全列であることと，$f$ が同型写像 $L \longrightarrow \operatorname{Ker} g; x \mapsto f(x)$ を引き起こすこと（g が同型写像 $\operatorname{Coker} f \longrightarrow N; x + \operatorname{Im} f \mapsto g(x)$ を引き起こすこと）とは同値.

(3) 任意の左 R 加群の準同型写像 $f : M \longrightarrow N$ に対して

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

は完全列である．ただしここで i は標準的包含，p は標準的射影.

(4) 左 R 加群の可換図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "h"] \\ M' \arrow[r, "f'"] & N' \end{tikzcd}$$

に対し，これを拡張した可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[r] \arrow[d, "\overline{h}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f' \arrow[r, "i'"] & M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "p'"] & \operatorname{Coker} f' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

で，2 つの行が (3) の 3 つめの完全列となるようなものが自然に誘導される.

[証明] (1) 準同型写像 $0 \longrightarrow M$ の像は 0 なので図式 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ が完全 $\iff \operatorname{Ker} f = 0 \iff f$ は単射．同様にしてもう一つの主張も言える.

(2) 図式 $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ に対してこれが完全 $\iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ かつ f は単射 $\iff L \longrightarrow \operatorname{Ker} g; x \mapsto f(x)$ は well-defined な同型写像．また，図式 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ に対して，これが完全 $\iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ かつ g は全射 $\iff \operatorname{Coker} f \longrightarrow N; x + \operatorname{Im} f \mapsto g(x)$ は well-defined な同型写像.

(3) 準同型定理と i の単射性より 1 つめの図式の完全性が言える．$\operatorname{Coker} f$ の定義と i の単射性より 2 つめの図式の完全性が言える．また，i が単射で $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} f$, p が全射で $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} f$ であることより 3 つめの図式の完全性が言える.

▶命題 1.36 (蛇の補題 (snake lemma))　2つの行が完全であるような次の左 R 加群の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "h_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 .
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

このとき，次の完全列が存在する．

$$
\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3 .
\tag{1.12}
$$

ただし $\overline{f}_i, \overline{g}_i\ (i=1,2)$ は命題 1.33(4) の方法で f_i, g_i から誘導される準同型写像である．また，f_1 が単射ならば $\overline{f}_1$ も単射，g_2 が全射ならば $\overline{g}_2$ も全射である．

[証明]　命題 1.33(4) より $\overline{f}_i, \overline{g}_i\ (i=1,2)$ は $\overline{f}_i(x) := f_i(x)$, $\overline{g}_i(x + \operatorname{Im} h_i) = g_i(x) + \operatorname{Im} h_{i+1}$ により定義されていることに注意する．これより f_1 が単射ならば $\overline{f}_1$ も単射，g_2 が全射ならば $\overline{g}_2$ も全射であることが容易にわかる．

$\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3$ の完全性を示す．$\overline{f}_i$ の定義と $f_2 \circ f_1 = 0$ であることより $\overline{f}_2 \circ \overline{f}_1 = 0$ である．また，$x \in \operatorname{Ker} \overline{f}_2$ のとき $f_2(x) = \overline{f}_2(x) = 0$ なのである $y \in M_1$ に対して $x = f_1(y)$．このとき $x \in \operatorname{Ker} h_2$ より $0 = h_2(x) = h_2(f_1(y)) = g_1(h_1(y))$．$g_1$ は単射なので $h_1(y) = 0$，つまり $y \in \operatorname{Ker} h_1$ となる．したがって $\overline{f}_1(y)$ が定義され $\overline{f}_1(y) = f_1(y) = x$ となる．よって $\operatorname{Ker} \overline{f}_2 \subseteq \operatorname{Im} \overline{f}_1$ も言え，以上より $\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_1"] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[r, mapsto, "\overline{f}_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
y \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "h_1"] & x \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & 0 \\
h_1(y) = 0 \arrow[r, mapsto, "g_1"] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

次に $\operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3$ の完全性を示す．$\overline{g}_i$ の定義と

$g_2 \circ g_1 = 0$ であることより $\overline{g}_2 \circ \overline{g}_1 = 0$ が言える．また，$x + \operatorname{Im} h_2 \in \operatorname{Ker} \overline{g}_2$ のとき $g_2(x) + \operatorname{Im} h_3 = 0 + \operatorname{Im} h_3$．よってある $y \in M_3$ に対して $g_2(x) = h_3(y)$．また f_2 は全射なのである $z \in M_2$ に対して $y = f_2(z)$．すると $g_2(x - h_2(z)) = g_2(x) - g_2(h_2(z)) = g_2(x) - h_3(f_2(z)) = g_2(x) - h_3(y) = 0$ より $x - h_2(z) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$．よってある $w \in N_1$ に対して $g_1(w) = x - h_2(z)$．したがって $\overline{g}_1(w + \operatorname{Im} h_1) = g_1(w) + \operatorname{Im} h_2 = x + (-h_2(z) + \operatorname{Im} h_2) = x + \operatorname{Im} h_2$．よって $\operatorname{Ker} \overline{g}_2 \subseteq \operatorname{Im} \overline{g}_1$ も言え，以上より $\operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{\overline{g}_2} \operatorname{Coker} h_3$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, mapsto, "f_2"] & y \arrow[d, mapsto, "h_3"] \\
x \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & g_2(x) \arrow[d, mapsto] \\
x + \operatorname{Im} h_2 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_2"] & 0 + \operatorname{Im} h_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & x - h_2(z) \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \\
w + \operatorname{Im} h_1 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_1"] & x + \operatorname{Im} h_2 &
\end{tikzcd}
$$

次に $\delta : \operatorname{Ker} h_3 \longrightarrow \operatorname{Coker} h_1$ を定義する．$x \in \operatorname{Ker} h_3 \subseteq M_3$ とすると，f_2 の全射性よりある $y \in M_2$ に対して $f_2(y) = x$．すると $g_2(h_2(y)) = h_3(f_2(y)) = h_3(x) = 0$ なので $h_2(y) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$．よってある $z \in N_1$ に対して $h_2(y) = g_1(z)$．（g_1 は単射なのでこのような z は一意的である．）そこで $\delta(x) := z + \operatorname{Im} h_1$ と定めたい．これが well-defined であるためにはこの定義が途中で選んだ y のとり方によらないことを示す必要がある．$y' \in M_2$ を $f_2(y') = x$ を満たす他の元とし，$z' \in N_1$ を $h_2(y') = g_1(z')$ を満たす元とする．このとき $f_2(y' - y) = x - x = 0$ ゆえ $y' - y \in \operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Im} f_1$ なので，ある $w \in M_1$ に対して $y' - y = f_1(w)$．すると $g_1(z' - z) = h_2(y' - y) = h_2(f_1(w)) = g_1(h_1(w))$．$g_1$ は単射なので $z' - z = h_1(w)$，よって $(z' - z) + \operatorname{Im} h_1 = 0 + \operatorname{Im} h_1$，すなわち $z + \operatorname{Im} h_1 = z' + \operatorname{Im} h_1$ となる．以上より $\delta(x) = z + \operatorname{Im} h_1$ という定義は y のとり方によらないので well-defined となり，δ が定義された．

$$
\begin{tikzcd}
 & y \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & x \arrow[d, mapsto, "h_3"] \\
z \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & h_2(y) \arrow[r, mapsto, "g_2"] & 0 \\
z + \operatorname{Im} h_1 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "h_1"] & y' - y \arrow[r, mapsto, bend left, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & 0 \\
h_1(w) = z' - z \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & h_2(y' - y) & \\
0 + \operatorname{Im} h_1 & &
\end{tikzcd}
$$

次に $\operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1$ の完全性を示す．$x \in \operatorname{Im} \overline{f}_2$ のとき，前段落の $y \in M_2$ を $\operatorname{Ker} h_2$ の元からとることができる．すると $h_2(y) = 0$ ゆえ前段落の z は 0 に等しく，よって $\delta(x) = 0 + \operatorname{Im} h_1$ となる．よって $\operatorname{Im} \overline{f}_2 \subseteq \operatorname{Ker} \delta$ となる．また $x \in \operatorname{Ker} \delta$ とすると，前段落の記号で $z + \operatorname{Im} h_1 = 0 + \operatorname{Im} h_1$ すなわち $z \in \operatorname{Im} h_1$ となるので，ある $v \in M_1$ に対して $h_1(v) = z$．すると $h_2(y) = g_1(z) = g_1(h_1(v)) = h_2(f_1(v))$ より $y - f_1(v) \in \operatorname{Ker} h_2$．すると $\overline{f}_2(y - f_1(v))$ が定義され，これは $f_2(y - f_1(v)) = f_2(y) = x$ に等しい．よって $\operatorname{Ker} \delta \subseteq \operatorname{Im} \overline{f}_2$ も言えたので $\operatorname{Im} \overline{f}_2 = \operatorname{Ker} \delta$ となり，$\operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
 & y \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & x \arrow[d, mapsto, "h_3"] \\
0 \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto, "g_2"] & 0 \\
0 + \operatorname{Im} h_1 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "h_1"] & f_1(v) \arrow[d, mapsto, "h_2"] \\
z \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & h_2(y) \\
0 + \operatorname{Im} h_1 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y - f_1(v) \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & x \\
0 &
\end{tikzcd}
$$

最後に $\operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2$ の完全性を示す．$\operatorname{Im} \delta$ の元は前々段落の記号で $z + \operatorname{Im} h_1$ と表され，このとき $\overline{g}_1(z + \operatorname{Im} h_1) = g_1(z) + \operatorname{Im} h_2 = h_2(y) + \operatorname{Im} h_2 = 0 + \operatorname{Im} h_2$ となる．したがって $\operatorname{Im} \delta \subseteq \operatorname{Ker} \overline{g}_1$．また $x + \operatorname{Im} h_1 \in \operatorname{Ker} \overline{g}_1$ とすると $g_1(x) + \operatorname{Im} h_2 = 0 + \operatorname{Im} h_2$ よりある $v \in M_2$ に対して $g_1(x) = h_2(v)$ で，このとき $0 = g_2(g_1(x)) = g_2(h_2(v)) = h_3(f_2(v))$ なので $f_2(v) \in \operatorname{Ker} h_3$ となる．δ の定義に従って $\delta(f_2(v))$ を求めると，それは $x + \operatorname{Im} h_1$ となる．（y に対応する元として v がとれ，そのとき z に対応する元が x となるので $\delta(f_2(v)) = x + \operatorname{Im} h_1$.）よって $\operatorname{Ker} \overline{g}_1 \subseteq \operatorname{Im} \delta$ も言えたので $\operatorname{Im} \delta = \operatorname{Ker} \overline{g}_1$ となり，$\operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{\overline{g}_1} \operatorname{Coker} h_2$ の完全性が言えた．

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & h_2(y) \arrow[d, mapsto] \\
z + \mathrm{Im}\, h_1 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_1"] & 0 + \mathrm{Im}\, h_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & v \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "h_2"] & f_2(v) \arrow[d, mapsto, "h_3"] \\
x \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto] & g_1(x) \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto] & 0 \\
x + \mathrm{Im}\, h_1 \arrow[r, mapsto, "\overline{g}_1"] & 0 + \mathrm{Im}\, h_2 &
\end{tikzcd}
$$

以上より題意が証明された. □

蛇の補題における構成が自然であることを表わしているのが次の系である.