1章 問28

問題

$f_1, ..., f_n$を$k[t_1, ..., t_n]$の元とする. これらは, $x \in k^n$のとき, $\phi(x)$の座標を$f_1(x), ..., f_n(x)$として多項式写像(polynomial mapping) $\phi : k^n \to k^m$を決定する.

X, Yをそれぞれk^n, k^mにおけるアフィン代数多様体とする. 写像$\phi : k^n|_X \to Y$は, ϕがk^nからk^mへの多項式写像をXへ制限したものである時, 正則(regular)であるという.

ηはY上の多項式函数とすると, $\eta \circ \phi$はX上の多項式函数である.

したがって, ϕは$\eta \to \eta \circ \phi$によって定義されるk-代数の準同型写像$P(Y) \to P(X)$を誘導する.

このようにして, 正則写像$X \to Y$の集合とk-代数の準同型写像$P(Y) \to P(X)$の集合の間に1対1対応が得られることを示せ.

アフィン代数多様体の定義

kを代数的閉体とし,

$$f_\alpha(t_1, ..., t_n) = 0$$

をkに係数を持つn変数の多項式による方程式の集合とする. これらの方程式を満たす全ての点$x = (x_1, ..., x_n) \in k^n$の集合$X$をアフィン代数多様体という.

*めっちゃ平たく考えると、連立方程式の解の集合

$X \to Y$ ←

$P(Y) \to P(X)$← h

解答

[a] k代数の準同型 $h : P(Y) \to P(X)$が与えられた時, $P(Y) = k[t_1, \ldots, t_m]/I(Y)$であるとし, ξ_iを$P(Y)$におけるt_iの像とする.

[c]

- $P(X)$は多様体Xのイデアルである. → p25
- $I(Y)$について

> すべての$x \in X$に対して$g(x) = 0$という性質を持つ全ての多項式$g \in k[t_1, \ldots, t_n]$の集合$I(X)$を考える.

- $P(Y)$の元は$y \in Y$に対しても0になることはないような多項式函数の集まり
- $P(X)$はξ_iによって生成されるのでXの座標環、またはアフィン代数という

[a] $x \in X$に対して$\psi(x) = ((h(\xi_i))(x), \ldots, (h(\xi_m))(x))$として$\psi : X \to k^m$を定義する. ψの像がYに含まれることを示す.

[c]

- $\psi(x)$は$P(Y)$に値を代入したものなのでk^mとなる
- $\psi(x)$は$X \in k^n$からk^mに次元数を落としている。
- Yもその写像の中に含まれることを示す

[a] Yはアフィン代数多様体より$T \subseteq k[t_1, \ldots, t_m]$が存在して$Y$は$T$の零点集合であり$T \subseteq I(Y)$であることから, すべての$x \in X$, $f \in I(Y)$について$f(\psi(x)) = 0$であることを示せばよい.

[c]

- $f \in I(Y)$はYの元を代入して零点になる全ての集合のもの
- $f \in I(Y)$なので$f(\psi(x)) = 0$であるならば$\psi(x) \in Y$であると言えることを示したい.

これはψの像がYに含まれていることを示すことと同値である.

[a] fは多項式であり, hはk代数の準同型であるので, $f \in I(Y)$より$f(\psi(x)) = f((h(\xi_1))(x), \ldots, (h(\xi_m))(x)) = (h(f(\xi_1, \ldots, \xi_m)))(x) = 0$が成り立つ．よって$\psi$は$X$から$Y$への写像を定める. ψは正則写像であることは定義より従う.

[c]

1式目から2式目はψの代入

$f \in I(Y)$

$h : P(Y) \to P(X)$

- hが$P(Y) \to P(X)$なのでxを代入することで零点になる
- ψの像がYに含まれている
- ▼ アーカイブ

  hの準同型の性質で言えそうだけど式変形は確認しておいた方がいい、fは多項式であるので代入してあげると$h \leftrightarrow f$の逆転の計算はできそう.

  制限は写像前(定義域)の$x \in X$よりψは正則写像だといえる.

  この式が成り立つのでψの像がYに含まれている.

[a]ψは$X \to Y$だと言うことがわかったので次にψは$\eta \to \eta \circ \psi$によって定義されるk代数の準同型写像$P(Y) \to P(X)$を誘導することを示す, $x \in X$に対して$(\eta \circ \psi)(x) = \eta((h(\xi_1))(x), \ldots, (h(\xi_m))(x))$ = $(h(\eta(\xi_1, \ldots, \xi_m)))(x) = (h(\eta))(x)$より$\eta \circ \psi = h(\eta)$なので$\psi$は与えられた$h$を引き起こす.

[c]

- ηはY上の多項式函数で$P(Y)$に移す
- hを定めてあげるとψが一つ定まり、ψはhを引き起こす

[a]逆に正則写像$\phi : X \to Y$が与えられた時, $\eta \to \eta \circ \phi$によって定義されたk代数の準同型写像$P(Y) \to P(X)$に対して, 上の方法で正則写像$\psi : X \to Y$を構成すると, $x \in X$に対して$\psi(x) = (\xi_1 \circ \phi(x), \ldots, \xi_m \circ \phi(x)) = \phi(x)$より$\psi = \phi$となる

[c]

- 構成したk代数の準同型写像がϕに対して、$\psi = \phi$よりただ一つに定まる