2020年4月26日 20:01

21.（本题 12 分）

已知函数 $f(x)=(e-x)\ln x$（e 为自然对数的底数）.

（1）求函数 $f(x)$ 的零点，以及曲线 $y=f(x)$ 在其零点处的切线方程；

（2）若方程 $f(x)=m\ (m\neq 0)$ 有两个实数根 x_1，x_2，求证：$\boxed{|x_1-x_2|}<\boxed{e-1-\frac{em}{e-1}}$

距离

D: $x>0$

(1) $f(x)=0$,

① $\ln x=0$, $x=1$

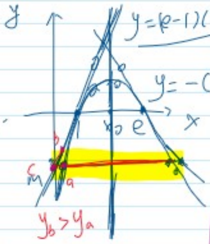
② $e-x=0$, $x=e$.

$\boxed{f'(x)=-\ln x+\frac{e-x}{x}}$ $x\in(1,e)$ ↓.

$f'(1)=e-1>0$ $y=(e-1)(x-1)$

$f'(e)=-1<0$ $y=-(x-e)$

∃唯一 x_0 s.t. $f'(x_0)=0$, $x_0\in(1,e)$



$x_b=x_a$

$y_c=y_a \Rightarrow y_c<y_b$

$\Rightarrow x_c<x_b$

$\Rightarrow x_c<x_a$

$x<x_0$时

$\boxed{g(x)=(e-x)\ln x-(e-1)(x-1)\le 0}$

其中当且仅当 $x=1$ 时取等

$\forall x,\ l(x)>f(x) \Leftrightarrow \forall y,\ l^{-1}(y)<f^{-1}(y)$.

(2) 令 $y=m$, $x_1=1+\frac{m}{e-1}$ $x_2=-m+e$.

$|x_1-x_2|\le e\boxed{-m}-1-\frac{m}{e-1}=e-1-\frac{m}{e-1}-\frac{em-m}{e-1}=e-1-\frac{em}{e-1}$

20.（本小题满分 12 分）

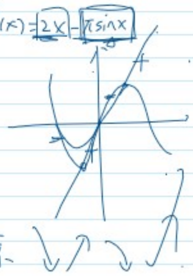
已知函数 $f(x)=x^2+\pi\cos x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2) 若函数 $g(x)=f(x)-a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点 x_1,x_2，且 $\boxed{x_1<x_2}$，求证：$x_1+x_2<\pi$.

$f(x)=x^2+\pi\cos x$, $D\in R$

$f'(x)=\boxed{2x}-\boxed{\pi\sin x}$

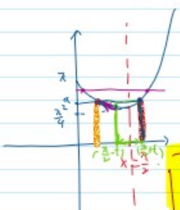


原 ↘↗↘↗

$\boxed{\frac{x_1+x_2}{2}}$ 中点.

$x_1+x_2<\pi$

$\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$



$\boxed{\frac{x_1+x_2}{2}}<\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\frac{\pi}{2}}$.

$\boxed{\frac{x_1+x_2}{2}}$. 中点.

设 $x_2=\frac{\pi}{2}+t$ 时 $f(x_2)=a$

则 $f(\frac{\pi}{2}-t)=$ ______ $<f(\frac{\pi}{2}+t)=$ ______.

$\therefore f(x_1)=a=f(\frac{\pi}{2}+t)>f(\frac{\pi}{2}-t)$

$\because x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时 $f(x)$ ↓.

$\therefore x_1<\frac{\pi}{2}-t$,

$\therefore x_1+x_2<\frac{\pi}{2}-t+\frac{\pi}{2}+t=\pi$.

$A=f(\frac{\pi}{2}-t)=(\frac{\pi}{2}-t)^2+\pi\sin t=\frac{\pi^2}{4}+t^2+\pi\sin t-\pi t$.

$B=f(\frac{\pi}{2}+t)=(\frac{\pi}{2}+t)^2-\pi\sin t=\frac{\pi^2}{4}+t^2-\pi\sin t+\pi t$.

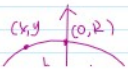
$A-B=2\pi\sin t-2\pi t=2\pi\boxed{\sin t-t}<0$.

$A<B$.

$\sin x<x$, $\forall x>0$.

解几

一. 伸缩



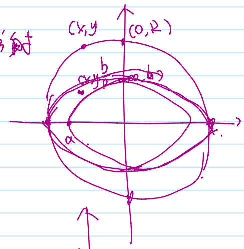
① x不动, $y\to\frac{b}{R}\cdot y$

$x^2+y^2=R^2\Rightarrow\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$

x^2. $(\frac{R}{b})^2y^2$ $\longrightarrow$ x^2 y^2.

解几

一、仿射



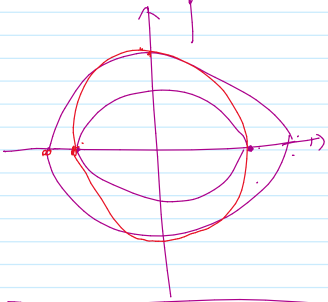
① x不动, $y \to \frac{b}{R} \cdot y$

② y不动, $x \to \frac{a}{R} x$

$x^2+y^2=R^2 \Rightarrow \frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$

$\frac{x^2}{R^2}+\frac{(\frac{R}{b})^2 y^2}{R^2}=1 \quad \frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

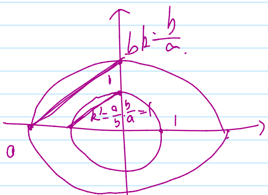


平行、相交、共线、相切 ✓ 不变

斜率× 面积× 夹角×

构造椭圆

解决问题

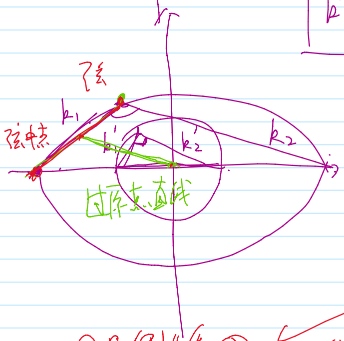


$k \to a \cdot k$

$\boxed{x \to \frac{1}{a}}$ $\boxed{y \to \frac{1}{b}}$ $k \to \frac{1}{b} k$

$\frac{(ax)^2}{a^2}+\frac{(by)^2}{b^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$

$\boxed{k' = \frac{a}{b} \cdot k}$ $\boxed{S' = \frac{1}{ab} S}$



$k_1' \cdot k_2' = -1$

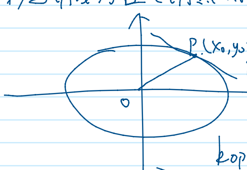
$k_1 = \frac{b}{a} \cdot k_1'$

$k_2 = \frac{b}{a} \cdot k_2'$

$\boxed{k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2} k_1' k_2' = -\frac{b^2}{a^2}}$

①几何性质 ② 推代数性 元素 $\Rightarrow \perp$

秒写切线方程(切点切线)



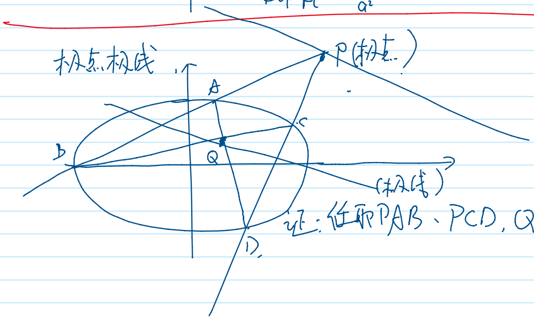
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$l: \frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$ 对双曲线也成立

$y^2=2px$
$\Downarrow$
$y_0 y = p(x+x_0)$
(验证)

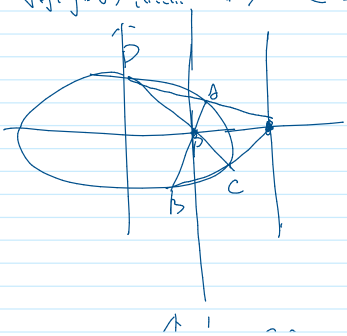
$k_{op} \cdot k_l = -\frac{b^2}{a^2}$

极点极线

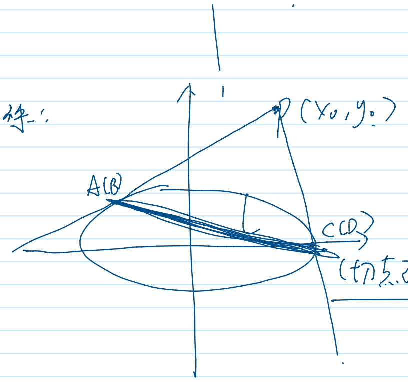


证:任取PAB、PCD, Q在一直线上.

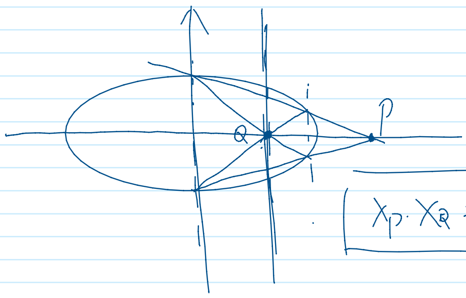
特别的,焦点—准线也是一组极点极线.



特殊:

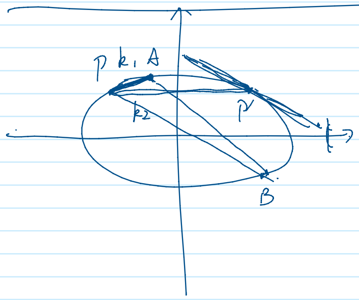


(切点弦): $\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$ (证?)



(2015 北京卷)

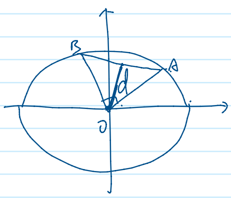
$\boxed{x_P \cdot x_Q = a^2}$



证明:

$k_1+k_2=0 \Rightarrow k_{AB}=const=k_C$.

(2009 辽宁)

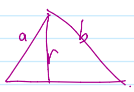


Rt△OAB, OA⊥OB, AB在椭圆上.

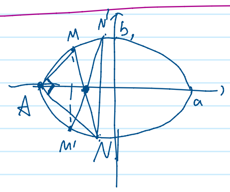
求d.

[答: $d=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$]

引理:



$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ (证明:)



AB轴顶点, 求证: MN过定点,

求定点坐标.