Page 1

2020年4月5日 18:47

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-\frac{1}{2}ax^2-x(a\in R)$.

（Ⅰ）设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，求函数 $f'(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最大值，求实数 a 的取值范围.

① D: $x>-1$

② 求导

(1) $f'(x)=\ln(x+1)+1-ax-1=\ln(x+1)-ax$ D: $x>-1$

$f''(x)=\frac{1}{x+1}-a$

令 $\frac{1}{x+1}-a>0$ $\frac{1}{x+1}>a$. $a(x+1)<1$

①若 $a>0$, $x+1<\frac{1}{a}$, $x<\frac{1}{a}-1$

②若 $a=0$, $\frac{1}{x+1}>0$ 恒成立, $x>-1$ ↗

③若 $a<0$, $\frac{1}{x+1}>0>a$, $x>-1$ ↗

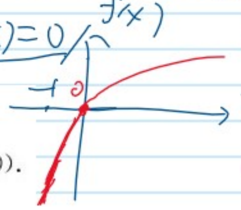
若 $a\le 0$, $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ ↗

若 $a>0$, $f'(x)$ 在 $(-1,\frac{1}{a}-1)$ 上 ↗,

在 $[\frac{1}{a}-1,+\infty)$ 上 ↘.

(2) 注意到开区间 ⇒ 最大值是极值点.

⇒ $f'(x)=0$



① 若 $a\le 0$, 在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$.

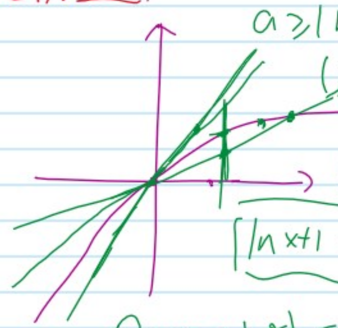
无零点 ⇒ $f(x)$ 无极值

② 若 $a>0$ $f'(x)=0$

$\ln(x+1)-ax=0$

$\ln x+1=ax$

$0<a<1$



$a\ge 1$ 时

$x=0$ 时

$(\ln(x+1)-ax)'=0$ ⇒ $x>0$ <0

$\frac{1}{x+1}-a<0$

$x>0$, $\frac{1}{x+1}<1\le a$

$\ln x+1\le x$

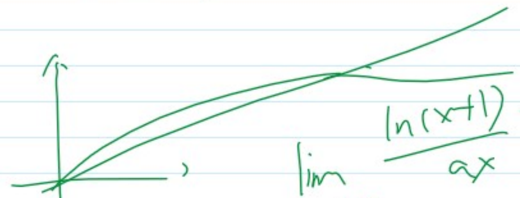
② $0<a<1$ 时 一定有零点

零点存在定理

$\ln(x+1)-ax>0$

$\ln(x+1)<ax$ $(a<0)$

$x+1<e^{ax}$



$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{ax}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{a}=0$

$f'(x)=\frac{1}{\ }-a<0$

21. 已知函数 $f(x)=x^2+ax-\frac{a}{x}(a\in R)$.

（1）当 $a=1$ 且 $x>-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a\ge\frac{e}{e^2+1}$ 时，若函数 $g(x)=f(x)-x^2-\ln x$ 的两个极值点分别为 x_1、x_2，证明 $0<|g(x_1)-g(x_2)|<\frac{4}{e^2+1}$.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=2\ln(x+1)+\sin x+1$，函数 $g(x)=ax-1-b\ln x(a,b\in\mathbf{R},ab\neq 0)$.

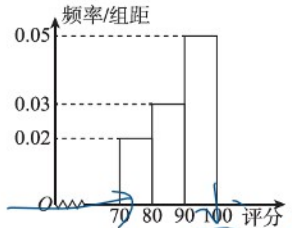
(1)讨论 $g(x)$ 的单调性；

(2)证明：当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\le 3x+1$.

(3)证明：当 $x>-1$ 时，$f(x)<(x^2+2x+2)e^{\sin x}$.

4. 某歌手大赛进行电视直播，比赛现场有 6 名特约嘉宾给每位参赛选手评分，场内外的观众可以通过网络平台给每位参赛选手评分. 某选手参加比赛后，现场嘉宾的评分情况如下表，场内外共有数万名观众参与了评分，组织方将观众评分按照[70,80)，[80,90)，[90,100]分组，绘成频率分布直方图如下：

嘉宾	A	B	C	D	E	F
评分	96	95	96	89	97	98



统计

嘉宾评分的平均数为 $\overline{x_1}$，场内外的观众评分的平均数为 $\overline{x_2}$，所有嘉宾与场内外的观众评分的平均数为 $\overline{x}$，则下列选项正确的是

太

A. $\overline{x}=\frac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$

B. $\overline{x}>\frac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$

C. $\overline{x}<\frac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$

D. $\overline{x_1}>\overline{x_2}>\overline{x}>\frac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$

$\frac{6}{总}\overline{x_1}+\frac{观}{总}\overline{x_2}$

"加权平均"?

0.5 0.5

$\frac{1}{2}\overline{x_1}+\frac{1}{2}\overline{x_2}$

D

9. 已知 $a=\log_{0.3}0.5$, $b=\log_3 0.5$, $c=\log_{0.5}0.9$, 则

对数指

A. $ab<ac<a+b$

B. $a+b<ab<ac$

9. 已知 $a=\log_{0.3}0.5, b=\log_3 0.5, c=\log_{0.5}0.9$，则

A. $ab<ac<a+b$　　B. $a+b<ab<ac$

C. $ac<ab<a+b$　　D. $ab<a+b<ac$

对帮指

处理对数：换底

$\log_{a^x} b^y = \frac{y}{x}\log_a b$

$a=\frac{\lg 0.5}{\lg 0.3}$　$b=\frac{\lg 0.5}{\lg 3}$

$a\cdot b=\frac{\lg 0.5}{\lg 3 \cdot \lg 0.3}<0$

$\boxed{ac=\frac{\lg 0.5}{\lg 0.3}\cdot\frac{\lg 0.9}{\lg 0.5}>0}$ 大

$a+b=\frac{\lg 0.5}{\lg 0.3}+\frac{\lg 0.5}{\lg 3}=\frac{\lg 0.3+\lg 3}{\lg 0.3\cdot\lg 3}\lg 0.5=\frac{\lg 0.9}{\lg 0.3\,\lg 3}\lg 0.5<0$

$a+b \ ? \ a\cdot b$

$\lg 0.9 > \lg 0.5$

指对：

① 同底

② 同指/同幂

③ 特殊值 $(0,1)$

两边同时取对数

$x_1\cdot x_2\cdot x_3 \sim y_1 y_2 y_3$

$\ln x_1+\ln x_2+\ln x_3 \sim \ln y_1+\ln y_2+\ln y_3$

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-a<0$

$\frac{\ln(x+1)}{ax}$

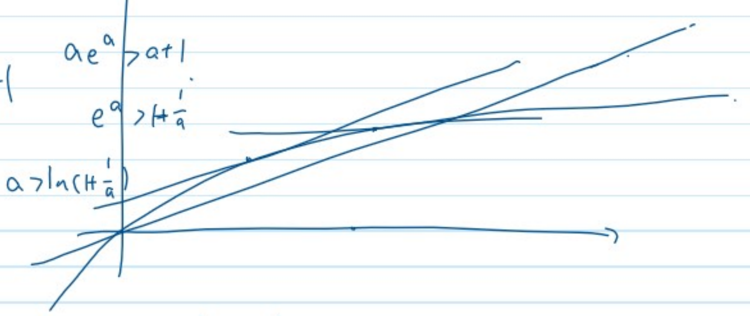
$a<e^a+1$

e^a-1

$ae^a>a+1$

$e^a>1+\frac{1}{a}$

$a>\ln(1+\frac{1}{a})$



$f'(x)=\ln(x+1)'=\frac{1}{x+1}$

$f'(\frac{1}{a})=\frac{1}{\frac{1}{a}+1}=\frac{a}{a+1}$

$f(\frac{1}{a})=\ln(\frac{1}{a}+1)$

$l: \frac{y-\ln(\frac{1}{a}+1)}{x-\frac{1}{a}}=\frac{a}{a+1}$

取 $l: y=(x-\frac{1}{a})\frac{a}{a+1}+\ln(\frac{1}{a}+1)$

$\ln x+1 = \sqrt{x+1} \quad - ax$

$\ln x+1<\sqrt{x+1}$

① 考查 $g(x)=\sqrt{x}-\ln(x+1)$.

$g'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)}\geq 0$.

$g(x)$ 单调递增.

令 $x=16$, $g(16)=4-\ln 17>0$.

$\therefore \forall x>16, \sqrt{x}>\ln(x+1)$.

② 考查 $h(x)=ax-\sqrt{x}$.

若 $h(x)>0$, $ax-\sqrt{x}>0$,

$x>\frac{1}{a^2}$.

综合①②，$x>\max(16,\frac{1}{a^2})$ 时有

综合①②，$x > \max(16, \frac{1}{a^2})$ 时有

$$\begin{cases} \sqrt{x} > \ln(x+1) \\ ax > \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \ln(x+1) - ax < 0.$$