Pemrograman Linier

Indra Bayu Muktyas

November 10, 2016

Contents

1 Apa itu Program Linier?

1.1 Perkenalan

Kita ingin memakai pakaian yang lengkap dengan waktu yang paling cepat (meminimumkan waktu). Ada 6 pakaian yang ada, yaitu: dasi, baju, jas, celana, kaos kaki, dan sepatu. Sebenarnya ada beberapa pilihan urutan memakainya, tepatnya $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ cara. Tapi kan banyak di antara cara-cara itu yang tidak *feasible* (layak). Misalkan saja program yang tidak cocok dengan kendala ketidaklaziman (memakai sepatu dulu baru kaos kaki). Contoh lain juga kendala ketidakmungkinan (memakai dasi dulu baru baju). Cara-cara ini bisa kita ibaratkan program. Program-program yang tidak feasible, kita eliminasi. Dari beberapa program yang layak, kita pilih yang paling optimal. Dalam masalah ini yang paling minimum waktunya —menurut saya— adalah program dengan urutan: kaos kaki, baju, celana, dasi, sepatu, dan terakhir jas [1].

Masalah pemrograman linier adalah mengefisienkan penggunaan barang dari sumber yang terbatas untuk mencapai tujuan yang diharapkan.

1.2 Memahami solusi

1.2.1 Satu variabel

Kita mulai dari masalah optimisasi yang paling sederhana, yaitu mencari nilai maksimum (maks.) dari sebuah variabel x_1 dengan tanpa ada batasan sama sekali. Maka x_1 bisa sebesar mungkin. Kita katakan kalau nilai maksimumnya tak terbatas. Dalam pemrograman linier, ada kendala yang paling dasar yang sering digunakan, yaitu nonnegativitas, $x_1 \geq 0$.

Selanjutnya, kita coba dengan memaksimalkan x_1 pada kendala $x_1 \leq 50$. Ini artinya kita boleh bergerak pada sumbu x_1 dari titik $x_1 = 0$ sampai berhenti pada titik $x_1 = 50$. Sembarang titik pada segmen garis yang menghubungkan $x_1 = 0$ dan $x_1 = 50$ bisa menjadi solusi dari masalahnya. Himpunan titik-titik tersebut disebut himpunan solusi atau ruang solusi. Karena yang kita inginkan adalah memaksimalkan, maka solusinya adalah $x_1 = 20$. Masalah memaksimalkan tersebut bisa ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maks.} & x_1 \\
\text{Kendala} & x_1 \leq 50 \\
 & x_1 \geq 0
\end{array}
$$

Ketika kita mengubah kendalanya, misalkan seperti ini.

$$\begin{aligned} \text{Maks.} \quad & x_1 \\ \text{Kendala} \quad & 2x_1 \leq 50 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Kita hanya boleh berjalan dari $x_1 = 0$ sampai $x_1 = 25$. Maka solusi optimalnya (dalam hal ini maksimalnya) adalah $x_1 = 25$.

Selanjutnya kita beralih ke masalah yang lebih rumit. Kita maksimalkan masalah satu variabel dengan banyak kendala.

$$\begin{aligned} \text{Maks.} \quad & x_1 \\ \text{Kendala} \quad & 3x_1 \leq 45 \\ & 2x_1 \leq 40 \\ & x_1 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Kita tau kalau $3x_1 \leq 45$ sama saja dengan $x_1 \leq 15$. Ruang solusinya adalah antara nol sampai 15. Untuk $2x_1 \leq 40$, himpunan solusinya adalah antara nol sampai 20. Sedangkan $x_1 \leq 10$ ruang solusinya adalah dari nol sampai 10. Selanjutnya kita satukan. Kendala-kendala di atas bisa juga ditulis ke dalam bentuk matematika dengan penghubung dan ($\wedge$).

$$\begin{aligned} & (3x_1 \leq 45) \wedge (2x_1 \leq 40) \wedge (x_1 \leq 10) \\ \Leftrightarrow \quad & (x_1 \leq 15) \wedge (x_1 \leq 20) \wedge (x_1 \leq 10) \end{aligned}$$

Yang memenuhi ketiga kendala itu adalah $x \leq 10$. Jadi ruang solusi gabungannya adalah antara 0 sampai 10. Sehingga nilai maksimalnya adalah 10.

1.2.2 Dua variabel

Dari satu dimensi, kita sekarang beralih ke dimensi lebih tinggi. Di sini, masalah yang ada pun semakin menantang. Dimensi atau variabel yang kita gunakan adalah x_1 dan x_2. Kita bisa bergerak menelusuri sumbu x_1 ke kanan sejauh mungkin. Tidak hanya itu, kita juga sekarang bisa bergerak dari 0 ke atas setinggi mungkin menelusuri sumbu x_2. Di dua dimensi ini juga ada kendala nonnegativitas, yaitu $x_1 \geq 0$ dan $x_2 \geq 0$ sehingga solusinya hanya pada kuadran 1 (nonnegatif). Berikut ini adalah contoh sederhana dari masalah dua dimensi.

Akan kita maksimalkan nilai x_1 dengan kendala $x_1 \leq 15$ dan $2x_2 \leq 40$, tentunya dengan tambahan nonnegativitas $x_1 \geq 0$ dan $x_2 \geq 0$. Secara matematika bisa ditulis sebagai berikut.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maks.} & x_1 \\
\text{Kendala} & x_1 \leq 15 \\
 & 2x_2 \leq 40 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Pada daerah solusi, nilai terbesar dari x_1 adalah 15. Ada banyak sekali titik yang x_1 nya bernilai 15. Contohnya $(15, 0)$,

$(15, 20)$, dan diantara dua titik itu juga masih ada $(15, 10)$. Nah, solusi optimalnya tidak unik. Solusinya ada tak hingga banyaknya, yaitu titik-titik pada segmen garis yang menghubungkan $(15, 20)$ dan $(15, 0)$.

Jika yang ditanyakan adalah untuk memaksimalkan nilai x_2, maka solusinya adalah titik-titik pada ruas garis yang menghubungkan $(0, 20)$ dan $(15, 20)$. Jika kita ingin meminimalkan x_1, solusinya ada pada ruas garis yang menghubungkan $(0, 0)$ dan $(0, 20)$.

Bagaimana jika kita ingin meminimumkan nilai $x_1 + x_2$? Tentunya nilai minimumnya ada di $(0, 0)$, yaitu $x_1 + x_2 = 0$. Solusi ini unik. Kalau kita ingin memaksimalkan $x_1 + x_2$, maka solusinya adalah titik $(15, 20)$ saja yang menghasilkan nilai $x_1 + x_2 = 35$.

Dari beberapa masalah di atas, solusinya pasti memuat titik pojok dari daerah layak. Bisa satu titik pojok atau dua titik pojok. Selanjutnya kita sebut titik pojok dari daerah solusi ini sebagai CPF (*Corner Point Feasible*).

1.3 Belajar dari contoh

1.4 Notasi matriks

1.5 Geometri dari program linier

1.6 Solusi basic

2 Metode Simpleks

Contoh:

1. $$\begin{aligned} \text{Maks.}\quad z = 3x_1 &+ 2x_2 \\ \text{kendala}\qquad 2x_1 &+ x_2 \le 100 \\ x_1 &+ x_2 \le 80 \\ x_1 & \qquad \le 40 \\ x_1 \ge 0, & \quad x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

   Ilustrasinya adalah ...

2. $$\begin{aligned} \text{Maks.}\quad z = 2x_1 &+ 3x_2 \\ \text{kendala}\qquad -x_1 &+ 4x_2 \le 32 \\ x_1 &+ 2x_2 \le 22 \\ x_1 & \qquad \le 10 \\ x_1 \ge 0, & \quad x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

   Ilustrasinya adalah ...

3. $$\begin{array}{llrcl} \text{Maks.} & z = 2x_1 + 3x_2 & & & \\ \text{kendala} & x_1 & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 + 2x_2 & & \leq & 10 \\ & x_1 + x_2 & & \leq & 7 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   Ilustrasinya adalah ...

4. Kendala seperti pada soal no. 3 dengan fungsi tujuan Maks. $z = x_1 + 3x_2$.

5. Kendala seperti pada soal no. 3 dengan fungsi tujuan Maks. $z = 4x_1 + 3x_2$.

2.1 Bentuk standar

2.1.1 Solusi basic feasible awal

2.1.2 Sudah optimalkah?

2.1.3 Memilih variabel yang masuk

2.1.4 Memilih variabel yang keluar

2.1.5 Buat tabel baru

3 Primal dan Dual di Pemrograman Linier

4 Masalah Transportasi

4.1 Mengubah masalah menjadi model transportasi

4.2 Menentukan solusi *basic feasible* awal

4.2.1 *Northwest Corner* (NWC)

4.2.2 Minimum cost

4.2.3 Vogel

4.3 Pivoting

Bibliography

[1] Gass, S.I. 1990. *An Illustrated Guide to Linear Programming*. New York: Dover Publications, Inc.