MLE

Mu Lifeng

2020/4/18

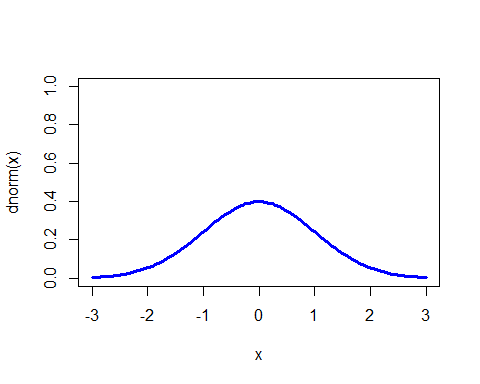
# 极大似然估计(MLE)

在初中阶段的基础统计分析章节中，我们学习了一些描述数据集中趋势和波动情况（离散趋势）的统计指标，如平均数、中位数、方差和标准差等等。教材中给出了这样一些计算公式：

若一组数据服从正态分布，上述公式则正好为正态分布参数的极大似然估计。这些公式看起来是理所当然的，实际上我们可以通过数学方法来证明它。

极大似然估计是在给定数据的情况下，推断最有可能的参数分布。也就是说，极大似然估计的工作就是找到一个概率分布（包括概率分布形式、分布参数），使其能够最好地描述所获得的数据。以正态分布为例，正态分布的概率密度函数为：

标准正态分布概率密度函数图



如果我们获得了一份包含n个值的样本，数据服从均值为μ，方差为的正态分布：

根据正态概率密度函数可以写出其似然函数为：

接下来就是求出使得取最大值的和。可通过求二阶偏导数求得该二元函数的最值。 在求导之前先两边同时取对数，以利于求导计算。即：

此时，可求的偏导数：

同样，可求得关于的偏导数：

根据：

可得：

所以：

令 = 0，得：

### surprise!

的极大似然估计值即为所有观察值的均数

同理：

令 = 0，即得：

$$
-\frac{n}{\sigma} + \frac{(x\_1-\mu)^2+(x\_2-\mu)^2+(x\_3-\mu)^2+\cdots+(x\_n-\mu)^2}{\sigma^3} = 0 \\
\frac{(x\_1-\mu)^2+(x\_2-\mu)^2+(x\_3-\mu)^2+\cdots+(x\_n-\mu)^2}{\sigma^2} = n \\
\sigma^2 = \frac{(x\_1-\mu)^2+(x\_2-\mu)^2+(x\_3-\mu)^2+\cdots+(x\_n-\mu)^2}{n}
$$

### surprise!

显然，上述数据也可能不服从正态分布，那么同样的思路可以用于求解其它概率分布参数的极大似然估计值：写出似然函数、求导（先取对数）、令导数值为0求解。

如果数据服从指数分布，利用上述方法可求得参数的极大似然估计值为：

又如，当数据服从二项分布时，其参数的极大似然估计为：

## References

本文是对[StatQuest](https://www.youtube.com/watch?v=XepXtl9YKwc)中有关内容的整理和复现