22 线性代数 B2 期末

NULIOUS

一．填空

1．$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型为 _____ ，最小多项式为 _____ ，奇异值为 _____

解：$\mathrm{diag}\left(J_2(1),J_2(1)\right);(x-1)^2$ ；略

特征值显然均为 1

且

$$\mathrm{rank}(A-I)=2\quad \mathrm{rank}(A-I)^2=0$$

那么

$$J=\mathrm{diag}\left(J_2(1),J_2(1)\right)$$

最小多项式显然为

$$d_A(x)=(x-1)^2$$

又

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&2&0\\0&-1&0&2\end{pmatrix}$$

$$\varphi_{A^TA}(\lambda)=\lambda^4-6\lambda^3+11\lambda^2-6\lambda+1$$

给出近似解：

$$\lambda_1=0.382\ （二重）\quad \lambda_2=2.62\quad \lambda_3=\frac{2184}{987}$$

最后别忘记开根号

2．$A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$ 的正交相似标准型为 _____

解：$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-2&\sqrt{5}\\0&-\sqrt{5}&-2\end{pmatrix}$

注意 A 不是反对称阵，但是经检验他是规范阵

$$A^TA=AA^T=9I$$

那么只需要求其特征值即可

有 $\lambda=3$ 或 $-2\pm\sqrt{5}i$

则正交相似标准型为

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}$$

3．酉空间 $\mathbb{C}^3$ 中内积为标准内积，即 $(x,y)=x^*y$ ，对向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 做正交化得到的一组标准正交基为 ______

解：$\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}\quad \frac{\sqrt{6}}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$

在酉空间中我们一定要注意内积定义，酉空间内积有两种定义方式

（1）$(u,v)=u^*Gv$ 时，这里 G 为复正定阵，对一组基 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 做 Schmidt 正交化

先有

$$\beta_i=\alpha_i-\frac{(\beta_1,\alpha_i)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\frac{(\beta_{i-1},\alpha_i)}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}$$

再对 β_n 做标准化即可

（2）$(u,v)=uGv^*$ 时，这里 G 为复正定阵，对一组基 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 做 Schmidt 正交化

先有

$$\beta_i=\alpha_i-\frac{(\alpha_i,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\frac{(\alpha_i,\beta_{i-1})}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}$$

RK：这是我们在欧氏空间常常写作的样子，但是在欧氏空间内积是对称的

再对 β_n 做标准化即可

RK：或者我们可以边做正交化边标准化，这里我们拿欧氏空间举例（酉空间形式是相似的，不过要注意内积定义），对一组基 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 做 Schmidt 正交化

$\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-1}\}$ 是 $\{\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}\}$ 标准化得到的

则

$$\beta_n=\alpha_n-\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_n,\gamma_i)\gamma_i$$

再对 β_n 标准化即可

二．设 α 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单位向量，记矩阵 $H=I_n-2\alpha\alpha^T$ 定义映射 $\mathcal{H}:x\in\mathbb{R}^n\to Hx\in\mathbb{R}^n$ ，求证：$\mathcal{H}$ 是（关于某个 $\mathrm{n}-1$ 维超平面的）反射变换

证：首先求其特征值

由

$$|I_m-AB|=\lambda^{m-n}|I_n-BA|$$

$\mathcal{H}$ 的特征多项式为

$$\det\left((\lambda-1)I_n+2\alpha\alpha^T\right)=(\lambda-1)^{n-1}(\lambda-1+2)=(\lambda-1)^{n-1}(\lambda+1)$$

则其特征值为 1（$n-1$ 重）和− 1（一重）
下面再证明 $\mathcal{H}$ 是正交变换

$$\begin{aligned} HH^T &= \left(I_n - 2\alpha\alpha^T\right)\left(I_n - 2\alpha\alpha^T\right) \\ &= I_n - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)\alpha^T \\ &= I_n \end{aligned}$$

又正交阵 H 有正交相似标准型，且其特征值无虚数，那么它可以相似对角化，也就是说 $\mathbb{R}^n$ 可以分解成 H 的特征子空间的直和
注意 H 为正交阵，不同特征值对应的特征向量正交，我们可以取特征值为 1 的特征子空间一组标准正交基（不然可以标准正交化），再取特征值为 -1 的特征子空间的一个单位向量，把这两个向量组合并，这样我们就取得了 $\mathbb{R}^n$ 一组标准正交基，也就是说映射 $\mathcal{H}$ 把 $\mathbb{R}^n$ 中一个方向上的向量变为反向，其他方向的向量不变，特征值为 -1 的特征向量就是题目中 $n-1$ 维超平面的法向量

三. 给定矩阵 $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$ 。定义线性映射 $\mathcal{A} : x \in F^n \to Ax \in F^m$ 与 $\mathcal{B}$: $y \in F^p \to By \in F^n$ 。记 $U = \ker(\mathcal{AB})$ ，求证：$\operatorname{Im}(\mathcal{B} \mid u) \subset \ker(\mathcal{A})$ 并由此证明 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$
证：考虑限制

$$\mathcal{B} : \ker(\mathcal{AB}) \to F^n$$

设 $\alpha \in \ker(\mathcal{AB})$ ．则

$$\mathcal{AB}\alpha = 0$$

那么 $\alpha \in \ker(\mathcal{A})$
即

$$\operatorname{Im}(\mathcal{B} \mid u) \subset \ker(\mathcal{A})$$

有

$$\dim\ker(\mathcal{A}) \geq \dim\operatorname{Im}(\mathcal{B} \mid u)$$

分别考虑以下的维数公式：
对 $\mathcal{A}$ 有

$$\dim\ker\mathcal{A} + \dim\operatorname{lm}\mathcal{A} = n$$

对限制 $\mathcal{B} : \ker(\mathcal{AB}) \to F^n$ 有

$$\dim\operatorname{Im}(\mathcal{B})|\ker(\mathcal{AB}) = \operatorname{dimker}(\mathcal{AB}) - \dim\ker(\mathcal{B})|\ker(\mathcal{AB})$$

对 $\mathcal{AB}$ 有

$$\dim\ker(\mathcal{AB}) = p - r(AB)$$

又

$$\ker(\mathcal{B}) \subset \ker(\mathcal{AB}) \quad \ker(\mathcal{B}) \mid \ker(\mathcal{AB}) = \ker(\mathcal{B})$$

对 $\mathcal{B}$ 有

$$\dim\ker(\mathcal{B}) = p - r(B)$$

逐个代入就有结果

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$$

四．设 $\mathcal{A}$ 是欧氏空间 V 上的规范变换，$W \subset V$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，求证 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间
证：设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是 W 的一组标准正交基，将其扩充为 V 的一组标准正交基 $M := \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ 。由于 W 为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，所以

$$\mathcal{A}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}, A_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 。由于 $\mathcal{A}$ 为规范变换，故 $\mathcal{A}$ 在 M 下的矩阵为规范矩阵，从而 $A_{12} = 0$ 。于是

$$\mathcal{A}\left(\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n\right) = \left(\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n\right) A_{22}$$

因此，$W^{\perp} = \langle \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n \rangle$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.
RK：这里我们用到了一个引理：
设实分块方阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ 或 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. 则 A 为规范方阵当且仅当 $A_{12} = 0$（或 $A_{21} = 0$ ），且 A_{11}, A_{22} 为规范方阵
证：比较 $A^T A$ 与 AA^T 两边元素易得

五．设 A 为 n 阶实对称半正定方阵，且 A 的对角元全为 0 ，求证：$A = 0$
证：半正定 $\Rightarrow$ 各阶主子式非负
先考虑一个对角元 a_{ii}
取二阶主子式，并考虑对称性

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = 0 - a_{ij}^2 \geq 0$$

则

$$a_{ij} = a_{ji} = 0 \quad \forall j \quad \text{成立}$$

又每个对角元均为 0
则

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad \text{成立}$$

就有 $A = 0$

六．A 为 n 阶复方阵，记 $Z(A) = \{B \mid AB = BA\}$ ，求证：$Z(A)$ 是复线性空间，且下列条件等价
（1）$\dim Z(A) = n$
（2）A 的最小多项式 $d_A(x)$ 等于其特征多项式 $\varphi_A(x)$
（3）$Z(A)$ 中任意矩阵 B 都可以写成 A 的多项式的形式
证：先证明复线性空间
首先 $0, I \in Z(A)$
又对 $\forall X, Y \in Z(A) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ 有

$$A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda XA + \mu YA = (\lambda X + \mu Y)A$$

即 $Z(A)$ 是复线性空间

这三条等价关系的核心是第二条

先给出要使用的书上有理标准型的定理，证明过程略

定理 4．4．4：设线性变换 $\mathcal{A}: V \to V$ 在基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵是 A ，并设

$$P(x)\left(xI_n - A\right)Q(x) = D(x) := \operatorname{diag}\left(1, \cdots, 1, f_{t+1}, \cdots, f_n\right)$$

其中 $P(x), Q(x)$ 是可逆多项式矩阵，$f_i(x)$ 是首一多项式。令

$$\left(\beta_1, \cdots, \beta_n\right) = \left(\alpha_1, \cdots, \alpha_n\right) P(x)^{-1}$$

则下列结果成立：

（1）$\beta_1 = \cdots = \beta_t = \mathbf{0}$ ；

（2）对于 $i > t, \beta_i$ 的最小多项式是 $f_i(x)$ ；

（3）V 是循环子空间 $F[x]\beta_i(t+1 \leq i \leq n)$ 的直和.

定理 4．4．5（有理标准形）：设 A 是域 F 上的 n 阶方阵，设多项式方阵 $xI_n - A$ 的 Smith 标准形为：

$$S(x) = \operatorname{diag}\left(1, \cdots, 1, d_{t+1}(x), \cdots, d_n(x)\right)$$

则：

（1）A 的特征多项式 $\varphi_A(x) = d_{t+1}(x) \cdots d_n(x)$ ，最小多项式 $d_A(x) = d_n(x)$

（2）设 $B_i(i = t+1, \cdots, n)$ 是不变因子 $d_i(x)$ 的友阵，则 A 相似于准对角阵 $\operatorname{diag}\left(B_{t+1}, \cdots, B_n\right)$

推论 4．4．6：设 $d_i(x)(i = t+1, \cdots, n)$ 的初等因子组是 $\left\{p_{ij}^{e_{ij}}(x) \mid 1 \leq j \leq j_i\right\}$ ，并设 B_{ij} 是 $p_{ij}^{e_{ij}}(x)$ 的友阵，则 A 相似于以 $B_{ij}(t+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq j_i)$ 为准对角阵块的准对角阵。

此条推论同时说明了特征方阵的初等因子与 Jordan 标准型的 Jordan 块是一一对应的

先证明 $(2) \Rightarrow (3)$

由定理 4．4．4 我们得到（2）的一个等价条件：存在一个向量 β s.t.

$$V = \mathbb{C}^{n \times 1} = \mathbb{C}[\mathcal{A}]\beta$$

证：设 $V = \mathbb{C}^{n \times 1}$ 和 $\mathcal{A}: X \to AX, V \to V$

A 的特征方阵 $\lambda I - A$ 相抵于 Smith 标准型

$$S(\lambda) = \left(I(s), d_{s+1}(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\right)$$

又 $\varphi_A(x) = d_A(x)$ 等价于 $d_{s+1}(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = 1$ 即得（定理 4．4．4）

设 A 与 B 可交换，那么 V 上线性变换 $\mathcal{B}: y \to By$ 与 $\mathcal{A}: X \to AX$ 可交换

$$\mathcal{B}\beta \in V = \mathbb{C}[A]\beta$$

即存在 $g(x)$ s.t.

$$\mathcal{B}\beta = g(\mathcal{A})\beta$$

又 $\forall v \in V$ 可以写成 $v = h(\mathcal{A})\beta$ ，其中 h 为多项式
就有

$$\mathcal{B}v = \mathcal{B}h(\mathcal{A})\beta = h(\mathcal{A})\mathcal{B}\beta = h(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\beta = g(\mathcal{A})h(\mathcal{A})\beta = g(\mathcal{A})v$$

也就是

$$\mathcal{B} = g(\mathcal{A})$$

即 $B = g(A)$
（1）与（2）等价的证明
我们不妨直接考虑 Jordan 标准型
引理 1：与单个 Jordan 块可交换的矩阵 B 构成的线性空间维数等于此 Jordan 块的阶数
证：$N_n = J_n(\lambda) - \lambda I_n$ 也与 B 可交换，比较两边元素即可，B 形如 $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & b_{12} \\ & & & b_{11} \end{pmatrix}$
引理 2：与两个及以上相同特征值 Jordan 块构成的 Jordan 标准型 J 可交换的矩阵构成的线性空间维数比 J 的阶数大
证：考虑两个相同特征值 Jordan 块构成的 Jordan 标准型 J 即可，$J - \lambda I_n$ 也与 B 可交换，比较两边元素立得
再给出一个（2）的等价条件：A 的 Jordan 标准型的每个特征值对应的 Jordan 块都只有一个（这是推论 4．4．6 的直接结果）
结合上面的引理和等价条件就说明（1）与（2）等价
RK：事实上，利用此方法配合中国剩余定理可以得到（2）$\Rightarrow$（3）的另外一种证法
$(3) \Rightarrow (1)$
先由引理二我们知道

$$\dim Z(A) \geq n$$

又特征多项式零化 A ，那么

$$\dim Z(A) \leq n$$

则

$$\dim Z(A) = n$$

至此我们证明了这三个命题是等价的

RK：给出扩充版的等价条件：
A 为 n 阶复方阵，记 $Z(A) = \{B \mid AB = BA\}$ ，则 $Z(A)$ 是复线性空间，且下列条件等价
（1）$\dim Z(A) = n$
（2）A 的最小多项式 $d_A(x)$ 等于其特征多项式 $\varphi_A(x)$
（3）$Z(A)$ 中任意矩阵 B 都可以写成 A 的多项式的形式
（4）存在一个向量 β s.t.$V = \mathbb{C}^{n\times 1} = \mathbb{C}[\mathcal{A}]\beta$

（5）$\mathcal{A}$ 是循环变换

（6）A 的特征方阵的行列式因子为 $1,\cdots,1,f(x)$

（7）A 的特征方阵的不变因子为 $1,\cdots,1,f(x)$

（8）A 任意一个特征值的特征子空间维数为 $1\,(r\,(A-\lambda_i I)=n-1)$

（9）A 的特征方阵的初等因子组为 $p_1(x)^{r_1},\cdots,p_k(x)^{r_k}$ ，其中 $p_1(x),\cdots,p_k(x)$ 为数域 F 上互异的首一多项式

（10）A 的 Jordan 标准型的每个特征值对应的 Jordan 块都只有一个

（11）$\mathcal{A}$ 在一组基下的矩阵为友阵

其余等价条件均是书上定理的简单推论，在这里不再证明了