微分方程概论 2024 期末回忆版

NULIOUS

一．求解下列微分方程

1．

$$x\frac{dy}{dx}=y-x\tan\frac{y}{x}$$

解：看到 $\tan\frac{y}{x}$ 自然想到作换元 $z=\frac{y}{x}$

并注意到 $\frac{dy}{dx}$, 则 $x=0$ 不是解

两边除 x ，并注意

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(xz)}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z$$

有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\tan\frac{y}{x}$$

$$x\frac{dz}{dx}=-\tan z$$

$$\ln|\sin z|+\ln|x|+c=0$$

并取 e 指数有通解

$$x\sin\frac{y}{x}=C'$$

2．

$$y''+2y'+y=e^{-x}$$

解：这是高阶常系数线性方程，先求齐次通解

特征方程：$\lambda^2+2\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=-1$（二重）

齐次通解：

$$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

对非齐次特解作待定系数 $\varphi(x)=ax^2e^{-x}$（注意 -1 是特征方程的二重根）代入方程有 $a=\frac{1}{2}$ 。

通解：

$$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+\frac{x^2e^{-x}}{2}$$

3．

$$\sqrt{x}\frac{dz}{dx}+\sqrt{y}\frac{dz}{dy}=z$$

初值条件：$y=1$ 时，$z=\sin\pi x$
解：本题为 11.2 例 1 变式

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z}$$

有独立首次积分：（需要用行列式检验独立性，在此不赘述）

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=c_1 \\ 2\sqrt{y}-\ln|z|=c_2 \end{cases}$$

隐式通解：

$$\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},2\sqrt{y}-\ln|z|)=0$$

则

$$z=\exp(2\sqrt{y})\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

其中 Φ,φ 为任意 C^1 函数
代入初值

$$\sin\pi x=e^2\cdot\varphi(\sqrt{x}-1)$$

令 $\mathrm{k}=\sqrt{x}-1$ ，那么 $x=(1+\mathrm{k})^2$

$$\varphi(\mathrm{k})=e^{-2}\sin\left(\pi(1+\mathrm{k})^2\right)$$

最后

$$z=e^{2\sqrt{y}-2}\sin\left(\pi(1+\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\right)$$

4．求解

$$y^3dx+2\left(x^2-xy^2\right)dy=0$$

解：分组为

$$\left(y^3dx-2xy^2\right)dy+2x^2dy=0$$

第一组积分因子为 y^{-5} ，通积分为 $\frac{x}{y^2}=c$
第二组积分因子为 x^{-2} ，通积分为 $2y=c$
取

$$g_1(t)=t^{-2}\quad g_2(t)=2t^{-1}$$

有

$$y^{-5}g_1\left(\frac{x}{y^2}\right)=x^{-2}g_2(2y)$$

从而

$$\mu=x^{-2}y^{-1}$$

同乘 μ 化简有

$$\ln y^2 - \frac{y^2}{x} = c$$

且 $y=0, x=0$ 为特解.

二．求

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2} \quad p = \frac{dy}{dx}$$

的通解和特解并画出其图像解：两边对 x 求导即可，可以写成因式分解的形式

三．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求其基解矩阵

四．

1．画出 $\ddot{\theta} = 5\sin\pi\theta$ 的相图

解：这是二阶自治方程，作图请参考 5．1 节做法

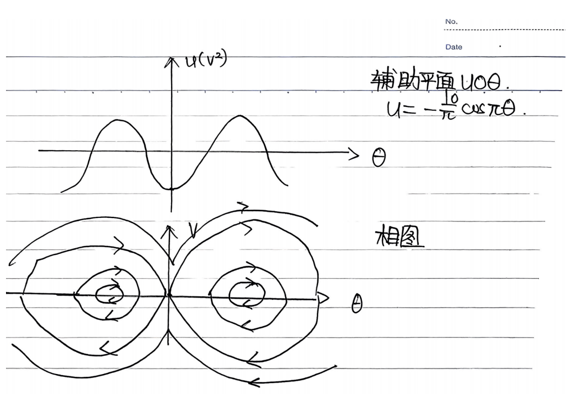
令

$$v = \frac{d\theta}{dt} \quad \ddot{\theta} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = v \cdot \frac{dv}{d\theta}$$

则

$$v \cdot \frac{dv}{d\theta} = 5\sin\pi\theta$$

$$\Rightarrow v^2 = -\frac{10}{\pi}\cos(\pi\theta) + C_1$$



2．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(2y-1) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(3-4x) \end{cases}$$

求此方程的一个在第一象限内的首次积分，并画出方程的相图

解：23 年也考了这个方程

首次积分只需要将两式相除即可获得分离变量方程，注意题目要求在第一象限内
首次积分为

$$2y-\ln y-3\ln x+4x=c$$

另外注意题目实际上已经给出了 $\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{dt}=f(x,y)$ 的显式表达了，可以做出相图 RK：此题是洛特卡－沃尔泰拉的捕食者－猎物模型的一种情况

五．判断下列方程解的稳定性
1．

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt}=2x-y+x^2y+3y^2-5y^4\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+x^2+2y^3\end{array}\right.$$

解：注意到两个方程所含的项的个数并不相同，常规的李雅普诺夫函数无法用待定系数法凑出来，我们考虑线性近似，注意验证书上 8．2．2 给出的前提条件，发现满足要求，求一个二阶方阵的特征值即可

2．

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt}=-2\left(y^3+x^5\right)\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y^3\end{array}\right.$$

解：上下两个方程项数相等，仔细观察具体次方的不同，发现需要用 $V=ax^2+by^4$ 来待定系数，求出 a,b 即可

RK：一般情况下我们取 V 的时候各取 x 的一个偶数次方和 y 的一个偶数次方待定系数

六．
对下列方程的任意一个解，给出他的最大存在区间

$$\frac{dy}{dx}=\left(2-y^2\right)e^{2\left(x^2+y^2\right)}$$

解：仿照 23 年第三次习题课讲义的这道题即可
求证：初值问题

$$\frac{dy}{dx}=(y-2y-3)e^{(x+\mathrm{y})^2},y\left(x_0\right)=y_0$$

的解的存在区间为 (a,b) ，则 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$ 至少存在一个.
Proof．注意到

$$\left(y^2-2y-3\right)e^{(x+y)^2}=(y-3)(y+1)e^{(x+y)^2}$$

满足解的唯一性条件，且
（1）$y\equiv 3$ 与 $y\equiv -1$ 是两解
（2）$-1<y_0<3$ 时，解永远在 $-1<y<3$ 之间
（3）$y_0>3$ 时，此时解必满足 $y>3$ 成立（$y\equiv 3$ 为一解且过一点的解唯一），此时 $f(x,y)>0$ 恒成立，解向左延伸能延伸至负无穷。
（4）$y_0<-1$ 时，同理，$f(x,y)>0$ 会恒成立，向右延伸又不能越过 $y=-1$ ．此时 $b=+\infty$ 。
对本题来说，虽然没有给出初值条件，但我们可以把通解中的常数 C 看作＂初值＂来用相同的方法分析

七.（本题 6 分）

方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

满足

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

并且有解 $y = \varphi(x)$ 使得

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x))$$

求证：初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); y(0) = 0$$

无解