21 实用随机过程期末

NULIOUS

1.（总 8 分）试列表判断如下即几类过程是否具有独立增量性、平稳增量性、Markov 性质：（1）齐次 Poisson 过程；（2）非齐次 Poisson 过程；（3）标准更新过程；（4）布朗运动.

解：（1）

有独立增量性、平稳增量性；并且齐次 Poisson 过程也是一种连续 Markov 链，当然有 Markov 性

（2）

非齐次 Poisson 过程失去了平稳增量性，但还有独立增量性和 Markov 性

（3）

三个性质都没有

（4）

三个性质都有

2.（总 12 分，每小题 4 分）设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是以独立同分布的随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为间隔的更新过程，其中 $\mathrm{P}(X_1 = 1) = p, \mathrm{P}(X_1 = 0) = 1 - p$ ，其中 $o < p < 1$.

（1）求于时刻 0 点发生的更新个数随机变量 $N(0)$ 的概率分布；

（2）求于时刻 2 点发生的更新个数随机变量的概率分布；

（3）求 $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[N(t)]/t$.

解：（1）

必须成功发生一次 $X_i = 1$ 过程才能到达时刻 1，即为几何分布：

$$N(0) \sim \mathrm{Ge}(p)$$

（2）

必须成功发生三次 $X_i = 1$ 过程才能到达时刻 3，即为负二项分布：

$$N(3) \sim \mathrm{NB}(3, p)$$

（3）

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} = \frac{1}{p}$$

3.（总 20 分，每小题 10 分）连续抛掷一枚非均匀硬币，每次抛出正面的概率为 $p \in (0, 1)$ ，抛出反面的概率为 $q = 1 - p$.

（1）求直到出现花样 " 正、反、正、反、正、反、正 " 时抛掷次数的期望.

（2）求直到抛出上述花样时抛出正面的期望次数．

解：（1）

法一：花样问题

$HTHTHTH$ 有重叠 $HTHTH$，$HTHTH$ 有重叠 HTH，HTH 有重叠 H，H 没有重叠，则

$$\mathbb{E}\left[T_{THTHTHT}\right]=\frac{1}{p^4q^3}+\frac{1}{p^3q^2}+\frac{1}{p^2q}+\frac{1}{p}$$

法二：鞅

设每天都有一个新赌徒开始赌博，他或者输光所有财富或者连赌 7 天赢下赌局，每个人的开始财富都是 1，为了保证赌局公平，如果赌徒赢了，那么他的财富变为原来的 $\frac{1}{p}$ 倍（猜对硬币为正面）或者变为原来的 $\frac{1}{q}$ 倍（猜对硬币为反面），则这个赌局构成一个鞅，记第 N 天第一个赌徒七局都赢，赌徒的盈亏情况如下

第 i 个赌徒	赌徒的盈亏
前 $N-7$ 个	$-(N-7)$（全输）
第 $N-6$ 个	$+(\frac{1}{p^4q^3}-1)$（赢 7 局）
第 $N-5$ 个	-1 （输）
第 $N-4$ 个	$+(\frac{1}{p^3q^2}-1)$ （赢 5 局）
第 $N-3$ 个	-1（输）
第 $N-2$ 个	$+(\frac{1}{p^2q}-1)$（赢 3 局）
第 $N-1$ 个	-1 （输）
第 N 个	$+(\frac{1}{p}-1)$（赢 1 局）

总盈亏的期望应为 0

$$\mathbb{E}\left[(\frac{1}{p^4q^3}-1)+(\frac{1}{p^3q^2}-1)+(\frac{1}{p^2q}-1)+(\frac{1}{p}-1)-(N-7+1+1+1)\right]=0$$

即

$$\mathbb{E}[N]=\frac{1}{p^4q^3}+\frac{1}{p^3q^2}+\frac{1}{p^2q}+\frac{1}{p}$$

（2）

记 X_i 满足 $P(X_i=1)=p=1-P(X_i=0)$，即 X_i 在抛出正面的时候为 1，否则为 0；注意到 N 是一个停时，则：

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]=p\mathbb{E}[N]$$

则抛出正面的次数的期望为

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}X_i\right]=\frac{1}{p^3q^3}+\frac{1}{p^2q^2}+\frac{1}{pq}+1$$

4．（总 24 分，每小题 6 分）设 A B 两盒中共装有 N 个编号分别为 1 2 $\cdots$ N 的小球。考虑如下试验：先从 N 个小球中随机地取出一个小球（每球被取出的概率等可能），再任意指定一个盒子（A 盒被指定的概率为 p, B 盒被指定的概率为 $q=1-p$ ），然后把所取出的小球放入指定的盒子中．如此不停地重复试验．记 X_n 为 n 次试验后 A 盒中小球的个数，X_0 表示试验之前 A 盒中小球的个数，则

$\{X_n, n \geq 0\}$ 构成一个 Markov 链。

（1）求该 Markov 链转移概率矩阵 $\mathbf{P}$；

（2）试判断此链是否可约？每个状态是否具有常返性？每个状态是否有周期？（其中假定 $0 < p < 1$ ）

（3）当 $N = 3, p = 1/2$ 时，试求该 Markov 链的平稳分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ ；

（4）记 $\mathbf{P}^{(n)}$ 为该 Markov 链的 n 步转移概率矩阵。当 $N = 3, p = 1/2$ 时，求 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{(n)}$ ，并对结果做出解释。

解：（1）

因为等可能的指定编号，所以编号实际上相当于不存在，只是按照盒子中的小球个数为权重取小球，有转移概率

$$P_{k,k+1} = \frac{N-k}{N}p$$
$$P_{k,k-1} = \frac{k}{N}q$$
$$P_{k,k} = \frac{k}{N}p + \frac{N-k}{N}q$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{N}q & \frac{1}{N}p + \frac{N-1}{N}q & \frac{N-1}{N}p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & p \end{pmatrix}$$

（2）

所有状态都互通，因此不可约；有限状态不可约，则所有状态都正常返；所有状态都非周期 $(P_{k,k} > 0)$

（3）

此时转移矩阵为

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

平稳方程为：

$$\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{6}\pi_1$$
$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2$$
$$\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3$$
$$\pi_3 = \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3$$
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2\pi_3 = 1$$

解得

$$\pi_0 = \frac{1}{8} \quad \pi_1 = \frac{3}{8} \quad \pi_2 = \frac{3}{8} \quad \pi_3 = \frac{1}{8}$$

（4）

不可约正常返非周期，则极限概率存在，且极限概率等于平稳概率

$$\forall i \quad \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{\mu_{jj}} = \pi_j$$

那么就有：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

5.（总 24 分，前两小题各 10 分，第 3 小题 4 分）一个修理工照看机器 1 和机器 2．每次修复后，机器 i 保持正常运行，运行时间服从参数（失效率）λ_i 的指数分布，$i = 1, 2$ ．当机器 i 失效时，需要进行修理，修理时间服从参数 μ_i 的指数分布．机器 1 的修理具有优先权，在机器 1 失效时总是先修理它。例如，若正在修理机器 2 时机器 1 突然失效，则修理工将立刻停止修理机器 2 ，而开始修理机器 1 。

（1）为该题建立有限状态的连续时间 Markov 链，写成相应的转移强调 Q 矩阵；

（2）设 $\lambda_i = \mu_i = 1 + i, i = 1, 2$ ．若系统长时间运行下去，求机器 2 失效的时间占比；

（3）每当两台机器同时处于失效状态时，求同时处于失效状态持续的时长分布．

解：（1）

考虑状态 (x, y),$x, y \in \{0, 1\}$,0 表示失效状态,1 表示工作状态,这样一共有如下四个状态:$(1,1), (0,1), (1,0)$ 和 $(0,0)$ ，为简化分别记为状态 $0,1,2,3$ ．构造 4 状态的连续时间 Markov 链 $\{X(t), t \geq 0\}$ ，其中 $X(t)$ 表示时刻 t 系统两个机器所处的状态，相应的 $\mathbf{Q}$ 矩阵（对角元为 v_i，非对角元为 q_{ij}）为

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_2 - \mu_1 & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda_1 - \mu_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \mu_1 & -\mu_1 \end{pmatrix}$$

（2）

极限概率 (P_0, P_1, P_2, P_3) 满足极限概率方程 $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (P_0, P_1, P_2, P_3) \cdot \mathbf{Q}$，即

$$\begin{aligned} P_0(\lambda_1 + \lambda_2) &= P_1\mu_1 + P_2\mu_2 \\ P_1(\lambda_2 + \mu_1) &= P_0\lambda_1 \\ P_2(\lambda_1 + \mu_2) &= P_0\lambda_2 + P_3\mu_1 \\ P_3\mu_1 &= P_1\lambda_2 + P_2\lambda_1 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 &= 1 \end{aligned}$$

解得

$$P_0 = \frac{5}{24} \quad P_1 = \frac{1}{12} \quad P_2 = \frac{7}{24} \quad P_3 = \frac{5}{12}$$

则

$$\text{机器 2 失效的时间占比} = \lim_{t\to\infty} P(\text{机器 2 失效}) = P_2 + P_3 = \frac{17}{24}$$

（3）

状态 3 只能转移到状态 2，则

$$T \sim \mathrm{Exp}(\mu_1)$$

6.（总 12 分，每小题 6 分）设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 是一个标准布朗运动，定义随机变量序列 $X_n = B^2(n) - n, n \geq 1$.

（1）证明 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一个鞅；

（2）求如下的概率

$$P\left(\max_{0 \leq s \leq n} B(s) \geq u_{0.05}\sqrt{n}\right)$$

解：（1）

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_{n+1}|X_1, ..., X_n\right] &= \mathbb{E}\left[B^2(n+1) - (n+1)|X_1, ..., X_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[B^2(n+1)|X_1, ..., X_n\right] - (n+1)\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}B^2(n+1) &= \left(B(n+1) - B(n) + B(n)\right)^2 \\ &= \left(B(n+1) - B(n)\right)^2 + B^2(n) + 2\left(B(n+1) - B(n)\right)B(n)\end{aligned}$$

由独立增量性和平稳增量性

$$B(n+1) - B(n) \sim N(0,1) \quad B(n) \sim N(0,n) \quad \text{且它们相互独立}$$

注意给定 X_n 相当于给出了 $B^2(n)$ 的信息

$$\mathbb{E}\left[B^2(n+1)|X_1, ..., X_n\right] = 1 + B^2(n)$$

则

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1}|X_1, ..., X_n\right] = X_n$$

另外 $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$

这就说明了 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一个鞅

（2）

$$\begin{aligned}P\left(\max_{0 \leq s \leq n} B(s) \geq u_{0.05}\sqrt{n}\right) &= 2P\left(B(n) \geq u_{0.05}\sqrt{n}\right) \\ &= 2P\left(\frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geq u_{0.05}\right) \\ &= 2P\left(\frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geq u_{0.05}\right) \\ &= 2P\left(N(0,1) \geq u_{0.05}\right) \\ &= 0.1\end{aligned}$$