23 线性代数 B2 期末

$\mathscr{NULIOUS}$

一．填空

1．设线性变换 $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & c \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}$，在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $(a,b,c) =$ ______

解：（1，0，0）

线性变换在两组基下的矩阵相似，所以他们的迹相等，则 a = 1

另外他们的秩也相等，则 b = c = 0

2．$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的正交相抵标准型为 ______

解：$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{19+\sqrt{145}}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{19-\sqrt{145}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

注意审题，正交相抵标准型就是要求其奇异值

我们有

$$AA^T = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -4 & 5 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

计算其特征值有

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{19+\sqrt{145}}{2} \quad \lambda_3 = \frac{19-\sqrt{145}}{2}$$

最后别忘记开根号

3．$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 的正交相抵标准型为 ______

解：$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{11}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{11}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

这是一道填空题，按理来说这应该是规范阵

验证有

$$A^TA = AA^T = 9I$$

那我们只用计算 A 的特征值即可

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i, \lambda_3 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$$

结果为：

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{11}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{11}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

4. 设 V 为区间 $[0,1]$ 上连续函数全体按照内积 $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ 构成的欧氏空间，$W = \langle 1, x, x^2 \rangle$ 是 V 的子空间，则函数 $f(x) = x^3$ 在 W 上的正交投影为 ______
解：$\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{20}$
注意要求正交投影要构造 $W = \langle 1, x, x^2 \rangle$ 的一组标准正交基，过程略

5. 设 $V = \langle \cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(nx) \rangle$，求 V 的一组基 $\{\alpha_1 = \cos(x), \alpha_2 = \cos(2x), \ldots, \alpha_n = \cos(nx)\}$ 的对偶基 ______
解：设 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ 为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ 的对偶基. 由 $f_i(\cos(jx)) = \delta_{ij}$ 对 $p(x) = \sum_{j=1}^n p_j \sin(jx) \in V$，有

$$f_i(p) = \sum_{i=1}^{\pi} p_j f_i(\alpha_j) = p_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(x)\cos(ix)dx$$

二。

给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

（1）求多项式矩阵 $\lambda I - A$ 的行列式因子，不变因子，初等因子组及 Smith 标准型

（2）求 A 的 Jordan 标准型

解：Smith 标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$$

Jordan 标准型为

$$J = (J_2(2), 2)$$

三. $\mathcal{A}$ 为有限维线性空间 V 上的线性变换，且 $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}^2)$，求证：$V = \operatorname{Im}(\mathcal{A}) \oplus \ker(\mathcal{A})$
证：先证明 $r(\mathcal{A}) - r(\mathcal{A}^2) = \dim(\ker \mathcal{A} \cap \operatorname{Im}(\mathcal{A}))$

考虑 $\mathcal{A}$ 在 $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ 上的限制：

$$\mathcal{A} \mid \mathrm{Im}\,\mathcal{A} : \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \to V$$

有维数公式：

$$\mathrm{dimker}\,\mathcal{A}|\,\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A} - \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A}|\,\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$$

其中

$$\ker \mathcal{A} \mid \mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \ker \mathcal{A} \cap \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \quad \mathrm{dimIm}\,\mathcal{A} = r(\mathcal{A})$$

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \mid \mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \mathcal{A}^2(V)$$

则 $\mathrm{dimIm}\left(\mathcal{A}^2\right) = r\left(\mathcal{A}^2\right)$ 代入得到

$$r(\mathcal{A}) - r\left(\mathcal{A}^2\right) = \dim(\ker \mathcal{A} \cap \mathrm{Im}\,\mathcal{A})$$

这样我们就证明了直和

又由维数公式

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A}) \oplus \ker(\mathcal{A}))$$

这就说明了两边相等，证毕

四. 设 $M := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 为线性空间 V 的一组基，$\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换，$\mathcal{A}$ 在 M 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（1）求 $\mathcal{A}$ 的特征多项式，最小多项式及 Jordan 标准型

（2）求 $\mathcal{A}$ 的特征子空间

（3）求证：如果 W 是 $\mathcal{A}$ 的三维不变子空间，则 W 包含 $\mathcal{A}$ 的所有特征子空间

解：

（1）显然按照行列式展开有特征值 1 和 2（均为两重）

$$\varphi_{\mathcal{A}}(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

简单验证得到

$$d_{\mathcal{A}}(x) = (x-1)^2(x-2)^2 \quad J = \mathrm{diag}\left(J_2(1), J_2(2)\right)$$

（2）

$\lambda = 1$ 有特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ 有特征向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}$ 的特征子空间就是由这两个向量分别生成的子空间
（3）
我们先证明一个引理：
如果 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，那么 W 是 $f(\mathcal{A})$ 的不变子空间，这里 f 是任意多项式
证：这是因为 $\operatorname{Im}\left(\mathcal{A}^{k}\right) \subseteq \operatorname{Im}(\mathcal{A})$ 且 V 的任意一个子空间都是数乘变换的不变子空间

我们再证明第三问，首先特征值 1 和 2 的根子空间都是二维的（代数重数都是 2）
由引理我们知道 W 是 $\mathcal{A}-\lambda I$ 的不变子空间
事实上，W 是 $\mathcal{A}-\lambda I$ 的不变子空间等价于 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，因为存在一个一次的多项式使得 $f(\mathcal{A}-\lambda I)=\mathcal{A}$ ，由此自然推出：
如果 W 不包含 $\mathcal{A}$ 的所有特征子空间，那么一定有某个特征值的特征子空间不在 W 中，这个特征子空间同时是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}-\lambda I$ 的不变子空间，进而这个特征值对应的根子空间不在 W 中（否则取根子空间任意一个向量，它经过 $\mathcal{A}-\lambda I$ 作用后一定是特征向量，不包含在 W 中，那么就与 W 是不变子空间矛盾了）
注意 $\operatorname{dim} V=4, \operatorname{dim} W=3, \operatorname{dim} W_{\lambda}=2$ 且 $\operatorname{dim}\left(W \cap W_{\lambda}\right)=0$
且 $W+W_{\lambda}$ 是 V 的子空间，但是

$$\operatorname{dim}\left(W+W_{\lambda}\right)=\operatorname{dim} W+\operatorname{dim} W_{\lambda}-\operatorname{dim}\left(W \cap W_{\lambda}\right)=5>\operatorname{dim} V$$

矛盾，可知结论成立

五。求证：实方阵 A 为规范方阵的充分必要条件是存在实系数多项式 $f(x)$ 使得 $A^{T}=f(A)$
证：$(\Leftarrow)$ 注意到 A 与自己的任意正整数次幂是可交换的且与 I 可交换，进而与 $f(A)$ 是可交换的
$(\Rightarrow)$ 新书上给出了复方阵类似结论，见例 5．4．4
我们证明实方阵情况：
A 规范则有正交相似标准型，存在正交阵 O 使得

$$B=OAO^{T}=\left(\begin{array}{cccccc}\left(\begin{array}{cc}a_{1} & b_{1} \\ -b_{1} & a_{1}\end{array}\right) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \left(\begin{array}{cc}a_{k} & b_{k} \\ -b_{k} & a_{k}\end{array}\right) & & & \\ & & & \lambda_{2k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_{n}\end{array}\right)$$

我们想要的是对角阵而不是准对角阵，因为我们想使用一个引理
引理：
若 O 为正交阵，A 为对角阵 $\operatorname{diag}\left(\lambda_{1}, \cdots, \lambda_{n}\right), B=OAO^{T}$ ，那么对任意多项式 $f(x)$ 有

$$f(B)=f\left(OAO^{T}\right)=Of(A)O^{T}=O \operatorname{diag}\left(f\left(\lambda_{1}\right), \cdots, f\left(\lambda_{n}\right)\right) O^{T}$$

证：注意正交阵性质及对角阵性质立得

又注意到

$$B+B^T=\operatorname{diag}\left(2a_1I_{n_1},\cdots,2a_kI_{n_k},2\lambda_{2k+1},\cdots,2\lambda_n\right)$$

为对角阵
这既符合了引理的形式，又因为加上的是 B（可以看作 B 自己的一个多项式），不会干扰最终的结论
另外，我们不妨设 $a_1,\ldots\ldots,a_k,\lambda_{2k+1},\cdots\cdots,\lambda_n$ 都两两不同（如果相同我们把他们合成一个大对角块即可）
并记为 $B+B^T=\operatorname{diag}\left(A_1,\cdots,A_{\mathrm{m}}\right)$（这里角标不同是因为有二阶及以上的块）
又 $A_1,\cdots,A_{\mathrm{m}}$ 特征值两两不同，那么他们的特征多项式两两互素，考虑中国剩余定理
我们有同余方程

$$\begin{cases}f(x)\equiv 2a_1 \bmod \varphi_{A_1}(x)\\ \cdots\\ f(x)\equiv 2a_k \bmod \varphi_{A_k}(x)\\ f(x)\equiv 2\lambda_{2k+1} \bmod \varphi_{A_{k+1}}(x)\\ \cdots\\ f(x)\equiv 2\lambda_n \bmod \varphi_{A_m}(x)\end{cases}$$

此方程必有解 $f(x)$ ，并注意到 $\varphi_{Ak}(x)$ 零化 A_{k} ，那么 $f\left(A_{\mathrm{k}}\right)=2a_kI_{nk}$（或者 $2\lambda_{\mathrm{k}}$ ）
也就是存在 $f(x)$ 使得 $f(B)=B+B^T$
则 $B^T=f(B)-B\triangleq g(B)$
$g(x)$ 就满足要求

六。设 A 为 n 阶可逆实对称阵
（1）若 S 为 n 阶实正定对称阵，求证：AS 的所有特征值都是实数
（2）设 a 为 n 维实单位列向量，$B=A+aa^TA^{-1}$ ，求证：B 的所有特征值都是实数
证（1）证一：（古法硬倒）
设 AS 有特征值 λ
则

$$ASx=\lambda x \tag{1}$$

注意 A,S 对称且实，取共轭转置

$$x^*SA=\bar{\lambda}x^* \tag{2}$$

式 (1) 左乘 x^*S ，有

$$x^*SASx=\lambda x^*Sx$$

式 (2) 右乘 Sx ，有

$$x^*SASx=\bar{\lambda}x^*Sx$$

两式相减：

$$(\lambda-\bar{\lambda})x^*Sx=0$$

注意到 S 可以视为复正定 Hermite 阵

$$\forall x\neq 0 \quad 有 \quad x^*Sx>0\Rightarrow \lambda=\bar{\lambda}$$

即特征值为实数
证二：
先证明引理：
AB 与 BA 的非零特征值相同
证：$|\lambda I_n-BA|=\lambda^{n-m}|\lambda I_m-AB|$ 利用这个经典行列式结论立得，在此不详细证明了
注意到 S 有唯一的平方根，记为 B ，那么 B 为正定对称阵
则 $AS=AB^2$ ，而 AB^2 与 BAB 有相同的非零特征值，另一方面 BAB 为对称阵，特征值都是实数
这就说明了 AS 的所有特征值都是实数
（2）

$$B=A\left(I+A^{-1}aa^TA^{-1}\right)$$

注意到我们在（1）中证明完毕的结论，只需要证 $I+A^{-1}aa^TA^{-1}$ 正定即可
$\left(A^{-1}\right)^Taa^T\left(A^{-1}\right)=A^{-1}aa^TA^{-1}$ 与 aa^T 相合，又 aa^T 为半正定对称阵，那么 $A^{-1}aa^TA^{-1}$ 也为半正定阵，特征值大于等于 0
所以 $I+A^{-1}aa^TA^{-1}$ 特征值大于等于 1 ，为正定阵
证毕