参考答案与评分要点

(期末考试, 2025 年 6 月 24 日)

一. (15 分) 判断/填空题.

题号	1	2	3	4	5
答案	$b_n = \dfrac{n+1}{n(n-1)}$ $c_n = \dfrac{n+1}{n-1}$	$n \geq 31$	✗	✗	✗
题号	6	7			
答案	(1) ✓; (2) ✓; (3) ✗	样本量小导致有些格子计数小于 5			

二. (15 分) 均匀总体下的充分完全统计量.

- **通过因子分解定理说明充分统计量:** 根据题意有

$$f(\boldsymbol{x};\theta) = \frac{I\{\theta < x_i < 2\theta,\ i = 1, 2, \ldots, n\}}{\theta^n} = \theta^{-n} I\{x_{(n)}/2 < \theta < x_{(1)}\}.$$

因此由因子分解定理知 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 是 θ 的充分统计量.

- **通过定理 2.6.2 说明极小充分统计量:** 对任意 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$,

$$\frac{f(\boldsymbol{x};\theta)}{f(\boldsymbol{y};\theta)} = \frac{I\{x_{(n)}/2 < \theta < x_{(1)}\}}{I\{y_{(n)}/2 < \theta < y_{(1)}\}}.$$

要使得上式与 θ 无关, 当且仅当 $(x_{(1)}, x_{(n)}) = (y_{(1)}, y_{(n)})$. 因此由定理 2.6.2 知 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 是 θ 的极小充分统计量.

- **构造函数或利用辅助统计量说明不完全性:** (法一) 注意到

$$\mathsf{E}_\theta(X_{(1)}) = \theta + \frac{1}{n+1}\theta = \frac{n+2}{n+1}\theta, \quad \mathsf{E}_\theta(X_{(1)}) = \theta + \frac{n}{n+1}\theta = \frac{2n+1}{n+1}\theta,$$

取 $g(x_{(1)}, x_{(n)}) = (2n+1)x_{(1)} - (n+2)x_{(n)}$, 则

$$\mathsf{E}_\theta[g(X_{(1)}, X_{(n)})] = 0, \quad \forall \theta > 0,$$

但函数 g 并不几乎处处为零. 因此 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 不是 θ 的完全统计量.
(法二) 注意到 $X_i/\theta \sim U(1, 2)$, 构造辅助统计量

$$T = \frac{X_{(n)}}{X_{(1)}} = \frac{X_{(n)}/\theta}{X_{(1)}/\theta},$$

于是 T 的分布与 θ 无关, 是一个辅助统计量. 因此 $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 不是 θ 的完全统计量.

三. (15 分) 多项总体下的点估计问题.

- **矩估计:** 根据题意有

$$\mathsf{E}(X) = 1 \times 2\theta + 2 \times 3\theta + 3 \times (1 - 5\theta) = 3 - 7\theta.$$

因此反解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_M(\boldsymbol{X}) = \dfrac{3 - \overline{X}}{7}$. 由 $\overline{x} = \dfrac{1 \times 6 + 2 \times 8 + 3 \times 6}{20} = 2$ 知 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}_M(\boldsymbol{x}) = 1/7$. 而

$$\mathsf{E}_\theta\left[\hat{\theta}_M(\boldsymbol{X})\right] = \mathsf{E}_\theta\left(\frac{3 - \overline{X}}{7}\right) = \frac{3 - \mathsf{E}(\overline{X})}{7} = \theta.$$

所以矩估计 $\hat{\theta}_M(\boldsymbol{X})$ 是 θ 的无偏估计.

- **最大似然估计:** 记 $n_j = \sum\limits_{i=1}^{n} I(X_i = j)$, $j = 1, 2, 3$. 由分布列知 θ 的似然函数为

$$L(\theta) = (2\theta)^{n_1}(3\theta)^{n_2}(1 - 5\theta)^{n_3} = 2^{n_1}3^{n_2}\theta^{n-n_3}(1 - 5\theta)^{n_3}.$$

由对数似然方程

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n - n_3}{\theta} - \frac{5n_3}{1 - 5\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{n - n_3}{5n}.$$

经微分检验其确为似然函数的最大值点, 因此 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) = \dfrac{1}{5n}\sum\limits_{i=1}^{n} I(X_i \neq 3)$. 由样本观测值知其估计值为 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{x}) = 0.14$. 而

$$\mathsf{E}_\theta\left[\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})\right] = \mathsf{E}_\theta\left(\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \neq 3)\right) = \frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}(5\theta) = \theta.$$

所以最大似然估计 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$ 也是 θ 的无偏估计.

- **一致最小方差无偏估计:** 样本联合密度函数为

$$f(\boldsymbol{x}; \theta) = (2\theta)^{n_1}(3\theta)^{n_2}(1 - 5\theta)^{n_3} = 2^{n_1}3^{n_2}\theta^{n}\exp\left\{n_3 \log\frac{1 - 5\theta}{\theta}\right\}.$$

自然参数空间 $\Theta^* = \{\eta : -\infty < \eta < \infty\}$ 有内点, 于是 $T(\boldsymbol{X}) = n_3$ 是 θ 的充分完全统计量. 从而由 Lehmann–Scheffé 定理知, $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$ 作为基于 n_3 的无偏估计是 θ 的 UMVUE, 其方差

$$\mathsf{Var}_\theta\left[\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})\right] = \frac{\mathsf{Var}_\theta(I(X_1 \neq 3))}{25n} = \frac{5\theta(1 - 5\theta)}{25n} = \frac{\theta(1 - 5\theta)}{5n}.$$

而 Fisher 信息量

$$I(\theta) = -\mathsf{E}_\theta\left[\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta^2}\right] = \mathsf{E}_\theta\left[\frac{n - n_3}{\theta^2} - \frac{25n_3}{(1 - 5\theta)^2}\right] = \frac{5n\theta}{\theta^2} - \frac{25n(1 - 5\theta)}{(1 - 5\theta)^2} = \frac{5n}{\theta(1 - 5\theta)}.$$

因而 Cramér-Rao 下界为 $1/I(\theta) = \mathsf{Var}_\theta\left[\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})\right]$. 即一致最小方差无偏估计 $\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$ 的方差达到 θ 的无偏估计方差的下界.

四. (12 分) 正态总体与一般总体下的区间估计问题.

- **两正态总体方差齐性检验:** 假设检验问题为

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

取检验统计量为

$$F(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{S_2^2}{S_1^2} \overset{H_0}{\sim} F_{n-1,m-1}.$$

由 F 检验知水平 $\alpha = 0.2$ 的检验拒绝域为

$$D = \left\{ (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) : F(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) > F_{25,25}(0.1) \text{ 或 } F(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) < F_{25,25}(0.9) = \frac{1}{F_{25,25}(0.1)} \right\}.$$

现有 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = s_2^2/s_1^2 = 1.2 \in (1/1.68, 1.68)$, 所以不能拒绝原假设, 可认为方差齐性.

- **两正态总体均值差的检验:** 假设检验问题为

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \longleftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2.$$

由于我们认为方差齐性, 所以可取检验统计量为

$$T(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{S_w\sqrt{1/m + 1/n}} \overset{H_0}{\sim} t_{m+n-2}.$$

其中 $(m+n-2)S_w^2 = (m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2$. 由 t 检验知水平 $\alpha = 0.05$ 的检验拒绝域为

$$D = \{ (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) : |T(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})| > t_{50}(0.025) \}.$$

现有 $T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \dfrac{80 - 70}{\sqrt{11} \times \sqrt{1/13}} = 10.9 > 2.01$, 所以拒绝原假设, 认为两班学生成绩有显著差异.

- **两一般总体均值差的检验:** 假设检验问题仍为

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \longleftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2.$$

此时可用大样本检验, 取检验统计量为

$$Z(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} \xrightarrow{H_0} N(0,1), \quad \text{as } m, n \to \infty.$$

由 z 检验知水平 $\alpha = 0.05$ 的检验拒绝域为

$$D = \{ (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) : |Z(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})| > u_{0.025} \}.$$

现有 $Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \dfrac{80 - 70}{\sqrt{10/26 + 12/26}} = 10.9 > 1.96$, 所以拒绝原假设, 认为两班学生成绩有显著差异.

五. (15 分) 伽马总体下的三大检验.

- **似然比检验:** 由题意知似然函数

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n \beta^2 x \exp\{-\beta x\} = \beta^{2n} \exp\left\{-\beta \sum_{i=1}^n x_i\right\} \prod_{i=1}^n x_i, \quad \beta > 0.$$

由对数似然方程

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta} = \frac{2n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \ \Rightarrow \ \beta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

经微分检验其确为似然函数的最大值点, 因此 β 的最大似然估计为 $\hat{\beta} = 2/\overline{X}$. 于是似然比检验统计量

$$\Lambda(\boldsymbol{X}) = \frac{\sup_{\beta>0} L(\beta)}{\sup_{\beta=1} L(\beta)} = \frac{L(\hat{\beta})}{L(1)} = \frac{(2/\overline{X})^{2n} \exp\{-2n\}}{\exp\{-\overline{X}\}} = (2/\overline{X})^{2n} \exp\{\overline{X} - 2n\}.$$

由似然比检验统计量的极限分布知

$$2\log\Lambda(\boldsymbol{X}) = 4n\log\frac{2}{\overline{X}} + 2\overline{X} - 4n \xrightarrow{H_0} \chi_1^2, \quad \text{as } n \to \infty.$$

因此水平为 α 的似然比检验的拒绝域为

$$D = \left\{\boldsymbol{X} : 4n\log\frac{2}{\overline{X}} + 2\overline{X} - 4n > \chi_1^2(\alpha)\right\}.$$

- **Wald 检验:** 由似然函数计算样本的 Fisher 信息量为

$$I_n(\beta) = -\mathsf{E}_\beta\left[\frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta^2}\right] = \frac{2n}{\beta^2}.$$

所以 Wald 检验统计量为

$$W(\boldsymbol{X}) = (\hat{\beta} - 1)^2 I_n(\hat{\beta}) = 2n(1 - 1/\hat{\beta})^2 = 2n(1 - \overline{X}/2)^2 \xrightarrow{H_0} \chi_1^2, \quad \text{as } n \to \infty.$$

因此水平为 α 的 Wald 检验的拒绝域为 $D = \left\{\boldsymbol{X} : 2n(1 - \overline{X}/2)^2 > \chi_1^2(\alpha)\right\}$.

- **得分检验:** 得分函数为

$$U_n(\beta) = \frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta} = \frac{2n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i.$$

所以得分检验统计量为

$$S(\boldsymbol{X}) = [U_n(1)]^2 I_n^{-1}(1) = \left(2n - \sum_{i=1}^n X_i\right)^2 /(2n) = n(2 - \overline{X})^2/2 \xrightarrow{H_0} \chi_1^2, \quad \text{as } n \to \infty.$$

因此水平为 α 的得分检验的拒绝域为 $D = \left\{\boldsymbol{X} : n(2 - \overline{X})^2/2 > \chi_1^2(\alpha)\right\}$. 该形式与 Wald 检验的形式是一致的.

六. (10 分) 列联表的齐一性检验.

- **未合并列的齐一性检验 (酌情扣分):** 首先根据题目描述写出列联表如下:

舒张压	< 60	$60 \sim 90$	> 90	合计
男性人数	4	10	2	16
女性人数	5	14	2	21
合计	9	24	4	37

要检验的假设为 H_0: 男女性舒张压分布没有显著差异. 取检验统计量为

$$K(\boldsymbol{X}) = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n)^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}} \xrightarrow{H_0} \chi^2_{(r-1)(s-1)}, \quad \text{as } n\to\infty.$$

因此水平 α 的检验拒绝域为 $D=\{\boldsymbol{X}: K(\boldsymbol{X}) > \chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha)\}$. 由样本观测值计算检验统计量值时, 可以考虑等价形式

$$K(\boldsymbol{x}) = n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}-1\right) = 0.1040 < \chi^2_2(0.2) = 3.22.$$

因此不拒绝原假设, 认为男女性舒张压没有显著差异.

- **合并列的齐一性检验:** 由于有格子点计数过小, 需要合并首尾两列得列联表如下:

舒张压	正常	过低或过高	合计
男性人数	10	6	16
女性人数	14	7	21
合计	24	13	37

要检验的假设为 H_0: 男女性舒张压分布没有显著差异. 取检验统计量为

$$K(\boldsymbol{X}) = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij}-n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n)^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}} \xrightarrow{H_0} \chi^2_{(r-1)(s-1)}, \quad \text{as } n\to\infty.$$

因此水平 α 的检验拒绝域为 $D=\{\boldsymbol{X}: K(\boldsymbol{X}) > \chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha)\}$. 由样本观测值计算检验统计量值时, 可以考虑 2×2 列联表的等价形式

$$K(\boldsymbol{x}) = \frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1\cdot}n_{\cdot 1}n_{2\cdot}n_{\cdot 2}} = 0.0692 < \chi^2_1(0.2) = 1.64.$$

因此不拒绝原假设, 认为男女性舒张压没有显著差异.

七. (18 分) 统计决策理论中的若干问题.

- **后验分布的计算:** 样本 $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 的联合概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{x} \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{x_i}{\theta}\right\} = \frac{\theta^{-n\alpha}}{[\Gamma(\alpha)]^n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}.$$

因此在无信息先验 $\pi(\theta) = (1/\theta)I_{(0,\infty)}(\theta)$ 下, θ 的后验密度为

$$\pi(\theta \mid \boldsymbol{x}) \propto f(\boldsymbol{x} \mid \theta)\pi(\theta) \propto \theta^{-n\alpha-1} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}, \quad \theta > 0.$$

添加归一化常数后可知 θ 的后验分布为

$$\theta \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} \sim \Gamma^{-1}\left(n\alpha, \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

- **加权平方损失下的 Bayes 估计:** 在加权平方损失下, θ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}_B(\boldsymbol{X}) = \frac{\mathsf{E}(\theta^{-1} \mid \boldsymbol{X})}{\mathsf{E}(\theta^{-2} \mid \boldsymbol{X})} = \frac{\dfrac{n\alpha}{n\overline{X}}}{\dfrac{n\alpha(n\alpha+1)}{(n\overline{X})^2}} = \frac{n\overline{X}}{n\alpha+1}.$$

- **验证该 Bayes 估计为 Minimax 估计:** Bayes 估计 $\hat{\theta}_B(\boldsymbol{X})$ 的风险函数

$$\begin{aligned} R(\hat{\theta}_B(\boldsymbol{X}), \theta) &= \mathsf{E}\left[\frac{(n\overline{X}/(n\alpha+1) - \theta)^2}{\theta^2}\right] \\ &= \frac{1}{\theta^2}\mathsf{E}\left(\frac{n\overline{X}+\theta}{n\alpha+1} - \theta - \frac{\theta}{n\alpha+1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\theta^2}\left[\mathsf{Var}\left(\frac{n\overline{X}+\theta}{n\alpha+1}\right) + \frac{\theta^2}{(n\alpha+1)^2}\right] = \frac{1}{n\alpha+1} \end{aligned}$$

为常数, 所以 θ 的 Bayes 估计 $\hat{\theta}_B(\boldsymbol{X}) = n\overline{X}/(n\alpha+1)$ 是 θ 的 Minimax 估计.

八. (20 分, 附加题) Hardy-Weinberg 定律中的 UMP 检验.

- **说明样本分布族是单参数指数族:** 样本联合概率质量函数为

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x};p) &= (p^2)^{n_0}[2p(1-p)]^{n_1}[(1-p)^2]^{n_2} \\
&= 2^{n_1}p^{2n_0+n_1}(1-p)^{n_1+2n_2} = 2^{n_1}(1-p)^{2n}\exp\left\{(2n_0+n_1)\log\frac{p}{1-p}\right\}.
\end{aligned}
$$

  这是单参数指数族, 且 $Q(p)=\log\frac{p}{1-p}$ 为 p 的严格单调增函数, $T=T(\boldsymbol{X})=2n_0+n_1$.

- **根据推论 5.4.2 给出检验的 UMPT:** 注意到原检验问题等价于

$$
H_0:\theta\le\theta_0 \longleftrightarrow H_1:\theta>\theta_0,
$$

  其中 $\theta_0=\log\frac{p_0}{1-p_0}$. 由推论 5.4.2 知, 假设检验的 UMPT 可取为

$$
\phi(T)=\begin{cases} 1, & T>c, \\ r, & T=c, \\ 0, & T<c, \end{cases}
$$

  其中常数 c 和 r 满足条件

$$
c=\arg\min_{c'}\left\{\mathsf{P}_{p_0}(T>c)\le\alpha\right\}, \quad r=\frac{\alpha-\mathsf{P}_{p_0}(T>c)}{\mathsf{P}_{p_0}(T=c)}.
$$

- **确定检验函数中的常数 c 和 r:** 记

$$
p_t=\sum_{1\le i,j\le n,i+j\le n,2i+j=t}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}2^i p_0^{2i+j}(1-p_0)^{j+2(n-i-j)},
$$

  则

$$
\mathsf{P}_{p_0}(T=c)=p_c, \quad \mathsf{P}_{p_0}(T>c)=\sum_{t=c+1}^{n}p_t.
$$