

微分方程概论 23 期末回忆版

NUUUS

一.

Peano 存在定理 $+\varepsilon - \delta$ 语言叙述解对初值的连续依赖性

二.

计算

三.

三阶矩阵常系数微分方程组的初值问题

四.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

其中 l 为绳长, m 为质量, g 为重力加速度, μ 为阻力系数。

(1) $\mu = 0$ 时画出方程的相图

(2) $\mu \geq 0$ 时讨论方程零解的稳定性

解:

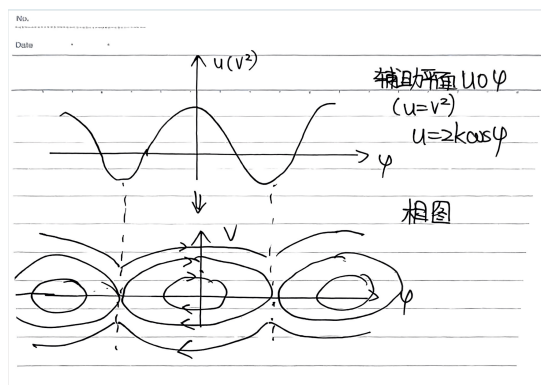
(1) 也就是求 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ 的相图, 不妨把 $\frac{g}{l}$ 记成 k 仿照书上 5.1 节做法做换元

$$v = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v dv = -k \sin \varphi d\varphi$$

最后得到 $v^2 = 2k \cos \varphi + C$

相图如下:



(2) 法一: (Lyapunov 函数)

取

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x)$$

满足 $V(0, 0) = 0$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \dot{y} = \frac{g}{l}y \sin x - \frac{y}{l}y \sin x - \frac{\mu}{m}y^2$$

当无阻力时 ($\mu = 0$): 有 $\frac{dV}{dt} \equiv 0$ 故零解是稳定的

当有阻力时 ($\mu > 0$): $\frac{dV}{dt}$ 为常负 (见书上定义)。由于满足 $\frac{dV}{dt} = 0$ 的集合是 $y = 0$, 而在原点邻域中 $y = 0$ 直线上除了零解 $x = 0, y = 0$ 之外不含有方程组的整条正半轨线, 又由补充定理可以知道是渐近稳定的

补充定理: (王高雄 P270 定理 5)

如果存在定正函数 $V(x)$, 其通过方程组的全导数 $\frac{dv}{dt}$ 为常负。但使 $\frac{dv(x)}{dt} = 0$ 的点 x 的集合中除了零解外不包括方程组的整条正半轨线, 则零解是渐近稳定的

法二: (线性近似)

将方程组写成

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{l}x - \frac{\mu}{m}y - \frac{g}{l}(\sin x - x) \end{cases}$$

考虑线性近似方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{l}x - \frac{\mu}{m}y \end{cases}$$

非线性项:

$$N(x, y) = -\frac{g}{l}(\sin x - x) = -\frac{g}{l}\left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right)$$

满足

$$N(t, 0) = 0; \lim_{|(x, y)| \rightarrow 0} \frac{|N(x, y)|}{|(x, y)|} = 0$$

考虑

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}$$

特征值即可

特征值为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 - 4\frac{g}{l}}$$

$\mu > 0$ 时: 特征值均有负实部, 则零解渐近稳定

$\mu = 0$ 时: 特征值为纯虚数, 无法判断非线性方程组是否稳定

五.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(2y - 1) \\ \frac{dy}{dt} = y(3 - 4x) \end{cases}$$

且 $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ 为方程周期为 ω 的解
求证:

$$\int_0^\omega \frac{\varphi(t)}{\omega} dt = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

证: 先证

$$\int_0^\omega \frac{x(t)}{\omega} dt = \frac{3}{4}$$

我们考虑将 $x(t)$ 降次为某个函数的导数

$\frac{dy}{dt} = y(3 - 4x)$ 移项得到

$$\frac{dy}{y} = (3 - 4x)dt$$

$$\Rightarrow d(\ln |y|) = (3 - 4x)dt$$

$$\Rightarrow xdt = \frac{3dt - d(\ln |y|)}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^\omega xdt = \int_0^\omega \frac{3}{4}dt - \frac{1}{4} \int_0^\omega d(\ln |y|)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\omega - \frac{1}{4} \ln |y| \Big|_w^0$$

注意条件给出 $y(t)$ 周期为 $\omega \Rightarrow y(\omega) = y(0)$ 则

$$\int_0^\omega xdt = \frac{3}{4}\omega$$

另一边同理

$$\int_0^\omega ydt = \frac{1}{2}\omega$$

六.

考虑非齐次线性方程组

$$x' = Ax + F(x)$$

F 连续且 $\int_{x_0}^{+\infty} \|F(x)\|dx$ 有界, 设其有基本解组 $\Phi(t)$

(1) 求证: 若 $\|\Phi(t)\|$ 有界, 则任意解在 $[0, +\infty]$ 有界

(2) 求证: 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi(t)\| = 0$ 则任意解趋于 0

证:

(1) 通解

$$x(t) = \Phi(t) \left(c + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds \right)$$

只需证 $\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds$ 有界

又 $\Phi(t)$ 有界 \Rightarrow 其元素有界 $\Rightarrow A_{ij}$ 有界且 $\det(\Phi)$ 有界且 $\det(\Phi) \neq 0$

又

$$\Phi(t)\Phi^*(t) = \det(\Phi)I$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \frac{\Phi^*(t)}{\det(\Phi)} \text{ 有界 } M$$

$\int_{x_0}^{+\infty} \|F(x)\|dx$ 有界 $\Rightarrow \int_{t_0}^t \|F(x)\|dx$ 有界

则

$$\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) F(s) ds \leq M \int_{t_0}^t F(s) ds \quad \text{有界}$$

(2) 仿照 1 证明 $\Phi^{-1}(t)$ 在 $t \rightarrow +\infty$ 有界即可