23 实用随机过程期中

1．（总 18 分，每小题 6 分）设顾客到达某个商店的规律可以用参数 $\lambda = 1$ 的齐次 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 来描述，时间单位为小时．已知前 1 个小时内仅有 2 位顾客到达．

（1）求第 2 个小时内有 3 位顾客到达的概率；

（2）求这 2 位顾客都是在前 20 分钟到达的概率；

（3）求至少有一位顾客是在前 20 分钟到达的概率．

解：（1）利用独立增量性质得

$$P(N(2)-N(1)=3 \mid N(1)=2) = P(N(2)-N(1)=3) = \frac{1}{6}\lambda^3 e^{-\lambda} = \frac{1}{6e}$$

（2）+（3）利用 $[(S_1, S_2) \mid N(1)=2] \overset{d}{=} \left(U_{(1)}, U_{(2)}\right)$，其中 U_1, U_2 iid $\sim \mathrm{U}(0,1)$，$\left(U_{(1)}, U_{(2)}\right)$ 为其次序统计量，于是，

$$P\left(S_1 \leq \frac{1}{3}, S_2 \leq \frac{1}{3} \middle| N(1)=2\right) = P\left(U_1 \leq \frac{1}{3}, U_2 \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$
$$P\left(S_1 \leq \frac{1}{3} \middle| N(1)=2\right) = 1 - P\left(U_1 > \frac{1}{3}, U_2 > \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$$

2.（15 分）设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda = 1$ 的齐次 Poisson 过程，事件发生时刻序列记为 $\{S_n, n \geq 1\}$．求

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(S_k)\right], \quad \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(S_k)\right)$$

解：设 $\{U_k, k \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{U}(0, \pi/2)$，则

$$\sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(S_k) \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(U_k)$$

上式来自有限求和可以交换次序；并注意到右端为复合 Poisson 过程。于是

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(\pi/2)} \sin(S_k)\right] = \frac{\lambda\pi}{2}\mathbb{E}\left[\sin(U_1)\right] = \lambda = 1$$
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{N(\pi/2)} g(S_k)\right) = \frac{\lambda\pi}{2}\mathbb{E}\left[g^2(U_1)\right] = \lambda\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\lambda\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

3.（总 38 分，前 3 题每小题 6 分，后 2 小题每题 10 分）假设冲击按参数为 $\lambda=1$ 的 Poisson 过程发生，且假设每次冲击独立地以概率 p 引起系统失效。以 M_r 记使得系统第 r 次失效的冲击数，T_r 表示系统第 r 次失效的时刻，其中 $r \geq 1$ 为整数。

（1）求 M_2 的概率分布；

（2）给定 $M_2=n \geq 2$ ，求 T_2 的条件分布；

（3）求 $\mathrm{P}\left(M_2=n \mid T_2=t\right)$ ，其中 $n \geq 2$ ；

（4）求 $\mathrm{P}\left(M_r=n \mid T_r=t\right)$ ，其中 $n \geq r \geq 3$ ；

（5）假设每次冲击造成系统的损失为 c_1 元，若造成系统失效，则还需要额外的 c_2 元维修损失费．记 $R(t)$ 为 $(0,t]$ 时间段冲击造成系统总的损失费，求 $\lim_{t\to\infty} R(t)/t$.

解：（1）首先，$M_2 \sim \mathrm{NB}(2,p)$ 服从参数为 $(2.p)$ 的负二项分布，取值于 $\{2,3,\ldots\}$ ，即

$$P\left(M_2=n\right)=\binom{n-1}{1} p^2(1-p)^{n-2}=(n-1) p^2(1-p)^{n-2}, \quad n \geq 2$$

（2）利用 $\left[T_2 \mid M_2=n\right]=\left[S_n \mid M_2=n\right]=S_n \sim \Gamma(n,1)$.

RK：n 个独立的指数分布 $X_i \sim \operatorname{Exp}(\lambda), i=1,\ldots,n$，则其独立和 $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n,\lambda)$

（3）可以参考（4）中的一般解法

记 $g_{T_2 \mid M_2}(t \mid n)$ 为 $\left[T_2 \mid M_2=n\right]$ 的条件概率密度函数，则由（2）得

$$g_{T_2 \mid M_2}(t \mid n)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

对 M_2 取条件，由（2）可以得到 T 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} g_{T_2}(t) & =\sum_{k=2}^{\infty} g_{T_2 \mid M_2}(t \mid k) \cdot P\left(M_2=k\right) \\ & =\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \cdot(k-1) p^2(1-p)^{k-2}=p^2 \lambda^2 t e^{-\lambda t p}\end{aligned}$$

于是，当 $n \geq 2$ 时，

$$P\left(M_2=n \mid T_2=t\right)=\frac{g_{T_2 \mid M_2}(t \mid n) \cdot \mathrm{P}\left(M_2=n\right)}{g_{T_2}(t)}=\frac{[\lambda t(1-p)]^{n-2}}{(n-2)!} \exp \{-\lambda t(1-p)\}$$

（4）考虑 Poisson 过程事件分类，任意时刻 s 发生的冲击事件以概率 p 划为 I 型事件（造成系统失效），以概率 $1-p$ 划为 II 型事件（未造成系统失效），分别以 $N_i(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间段 i 型事件发生的个数，则 $N_1(t), N_2(t)$ 相互独立。给定 $T_r=t$ 表示系统于时刻 t 第 r 次失效，且第 r 个 I 型事件一定发生于时刻 t ，截止到 t 时刻的所有冲击个数应该为 $M_r=N_2(t)+r$ ，即

$$\left[M_r-r \mid T_r=t\right]=N_2(t) \sim \operatorname{Poi}(\lambda t(1-p))$$

于是，

$$P\left(M_r=n \mid T_r=t\right)=\mathrm{P}\left(N_2(t)=n-r\right)=\frac{[\lambda(1-p) t]^{n-r}}{(n-r)!} \exp \{-\lambda(1-p) t\}$$

（5）引进一个更新酬劳过程，每当冲击造成系统失效，则称一个更新发生，该时刻称为更新点。此时，一个更新间隔长度 T 与 T_1 同分布，一个更新间隔里总的酬劳 R 与 $c_1 M_1+c_2$ ．注意到 $M_1 \sim \operatorname{Ge}(p)$，则

$$\mathbb{E}\left[T_1\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{M_1} X_i\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{M_1} X_i \mid M_1\right]\right]=\frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[M_1]=\frac{1}{\lambda p}$$

$$\mathbb{E}[R]=c_1\mathbb{E}\left[M_1\right]+c_2=\frac{c_1}{p}+c_2$$

其中 $\{X_k\}$ 为冲击到达间隔．于是，利用更新酬劳过程理论得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}=\frac{\mathbb{E}\left[T_1\right]}{\mathbb{E}[R]}=c_1\lambda+c_2\lambda p=c_1+c_2p$$

4．（14 分）设一个元件的工作过程可以用更新过程 $\{N(t),t\geq 0\}$ 来描述，更新间隔序列 $\{X_n,n\geq 1\}$ 独立同分布，共同分布 F 具有非格子点性质，且满足 $\mathbb{E}\left[X_1\right]=1$ ，$\mathbb{E}\left[X_1^3\right]=3$ ，记 $Y(t)$ 为元件于时刻 t 的剩余寿命，求 $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[Y^2(t)\right]$ ．

证法一：记 $h(t)=\mathbb{E}\left[(X-t)^2\mid X>t\right]\bar{F}(t)$ ，其中 $X\sim F$ ．对 t 之前最后一次更新发生时刻 $S_{N(t)}$ 取条件得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y^2(t)\right]=&\mathbb{E}\left[Y^2(t)\mid S_{N(t)}=0\right]\cdot\bar{F}(t)\\&+\int_0^t\mathbb{E}\left[Y^2(t)\mid S_{N(t)}=y\right]\bar{F}(t-y)\mathrm{d}m(y)\\=&\mathbb{E}\left[(X-t)^2\mid X>t\right]\bar{F}(t)\\&+\int_0^t\mathbb{E}\left[(X-(t-y))^2\mid X>t-y\right]\bar{F}(t-y)\mathrm{d}m(y)\\=&h(t)+\int_0^t h(t-y)\mathrm{d}m(y)\end{aligned}$$

由关键更新定理，并注意到 $\bar{F}(t)\to 0(t\to\infty)$，则有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[Y^2(t)\right]&=0+\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(t)dt\\&=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\mathbb{E}\left[(X-t)^2\mid X>t\right]\bar{F}(t)dt\end{aligned}$$

由期望的定义 (这里将密度 $f_{X|X>t}(s)$ 改写为 $P(X=s|X>t)$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X-t)^2\mid X>t\right]\bar{F}(t)&=\int_t^\infty(s-t)^2f_{X|X>t}(s)P(X>t)ds\\&=\int_t^\infty(s-t)^2P(X=s|X>t)P(X>t)ds\\&=\int_t^\infty(s-t)^2P(X=s,X>t)ds\\&=\int_t^\infty(s-t)^2dF(s)\\&\left(=\mathbb{E}\left[(X-t)^2\mathbb{I}_{\{X>t\}}\right]\right)\end{aligned}$$

上式也可以由全概率公式（对 X 的取值取条件）得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-t)^2 \mid X>t\right] \bar{F}(t) &= \int_t^{\infty} \mathbb{E}\left[(X-t)^2 \mid X=s, X>t\right] P(X>t \mid X=s) P(X=s) ds \\
&= \int_t^{\infty} (s-t)^2 P(X=s, X>t) ds \\
&= \int_t^{\infty} (s-t)^2 dF(s) \\
&\left(= \mathbb{E}\left[(X-t)^2 \mathbb{I}_{\{X>t\}}\right]\right)
\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[Y^2(t)\right] &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} (s-t)^2 dF(s) dt \\
&\overset{Fubini\text{换序}}{=} \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \int_0^{s} (s-t)^2 dt dF(s) \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{s^3}{3} dF(s) \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[X_1^3\right]}{3\mu} \\
&= 1
\end{aligned}$$

RK：把过程中的 2 换成 $r \in \mathbb{Z}^+$，结论类似地成立, 即

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[Y^r(t)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[X_1^{r+1}\right]}{(r+1)\mu}$$

证法二：对首次更新发生时刻 X_1 取条件，得

$$\mathbb{E}\left[Y^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[Y^2(t) \mid X_1>t\right] \cdot \bar{F}(t) + \int_0^t \mathbb{E}\left[Y^2(t) \mid X_1=y\right] dF(y)$$

记 $h(t)=\mathbb{E}\left[(X-t)_+^2\right], g(t)=\mathbb{E}\left[Y^2(t)\right]$ ，则

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-y) \mathrm{d}F(y)$$

因此，

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-y) \mathrm{d}m(y)$$

余下同证法一.

5.（15 分）观察一列独立同分布的离散随机变量 $W_1, W_2, \ldots$ ，等待花样＂ 22322 ＂的发生．设

$$\mathrm{P}\left(W_1=0\right)=\mathrm{P}\left(W_1=1\right)=\frac{1}{8}, \quad \mathrm{P}\left(W_1=2\right)=\frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}\left(W_1=3\right)=\frac{1}{4}$$

求等待花样＂ 22322 ＂首次发生所需要的期望时间.

解法一：构造标准更新酬劳过程 $\{X_n, n \geq 1\}$ 如下：首次出现的花样＂ 22322 ＂时刻称为首次更新时刻：从该时刻以后开始（不考虑该时刻及其以前的历史）再次出现该花样的时刻称为第二次更新时刻；

如此下去。每个更新区间里的酬劳并不是于更新点给付的，如果在任何时刻 i 出现上述花样（此时考虑该时刻所有的历史），则给付酬劳 $R_i=1$ 个单位。在利用更新酬劳过程理论得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[R_1+R_2+\cdots+R_n\right]}{n}=\frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[T]} \tag{$\star$.1}$$

其中 $\mathbb{E}[T]$ 和 $\mathbb{E}[R]$ 分别表示期望更新间隔时和在一个更新间隔时里的期望酬劳。另一方面，$R_j=0,\forall j=1,\ldots,4;\mathbb{E}[R_i]=1/64,\forall i\geq 5$ ，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R]&=1+\sum_{j=1}^{4}\mathbb{E}[\text{ 在一个更新之后的第}j\text{ 时刻的酬劳}]\\&=1+\left[0+0+0+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right]\end{aligned}$$

于是利用 ($\star$.1) 可求出 $\mathbb{E}[T]=64[1+1/16+1/32]=70$.
解法二：设 T_2 为首次出现花样 ”2” 的时刻，设 $T_{22|2}$ 为在出现 ”2” 条件下等待花样 ”22” 出现所需要的额外时间，$T_{22322|22}$ 为在出现 ”22” 条件下花样 ”22322” 出现所需要的额外投掷次数，则首次出现花样 ”22322” 所需要的时间

$$T_{22322}=T_2+T_{22|2}+T_{22322|22}$$

其中 $T_2,T_{2|2}$ 和 $T_{22322|22}$ 相互独立．于是利用（延迟）更新过程的理论可求出

$$\mathbb{E}[T_2]=2,\quad \mathbb{E}[T_{22|2}]=4,\quad \mathbb{E}[T_{22322|22}]=64$$

所以 $\mathbb{E}[T_{22322}]=2+4+64=70$