# 数理统计 24 期末

一．（20 分）单项选择填空题（每题 2 分）

1．设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自均匀分布 $\mathrm{U}(-\theta,\theta)$ 的一组样本,$\theta$ 为未知参数,则下述量为统计量的是__________

（A）$\overline{X}-\theta$

（B）$\max_{1\leq i\leq n}(X_i-\theta)-\min_{1\leq i\leq n}(X_i-\theta)$

（C）$\max_{1\leq i\leq n}(X_i-\theta)$

（D）$\min_{1\leq i\leq n}(X_i-\theta)$

答案：B

统计量要与未知参数无关

2．设 $\hat{\theta}_n$ 为末知参数 $\theta$ 的一个估计量，如果 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n-\theta\right]=0$ ，则 $\hat{\theta}_n$ 为 $\theta$ 的__________

（A）无偏估计

（B）有效估计

（C）相合估计

（D）渐近正态估计

答案：C

3．假设样本 $X$ 的密度为 $f_\theta(x)$ ，其中 $\theta$ 为参数，则下列表述不正确的是__________

（A）固定 $x$ 时 $f_\theta(x)$ 为似然函数

（B）固定 $\theta$ 时 $f_\theta(x)$ 为似然函数

（C）固定 $\theta$ 时 $f_\theta(x)$ 为密度函数

（D）$f_\theta(x)$ 衡量了不同 $\theta$ 下观测到值 $x$ 的可能性大小

答案：B

4．一个参数 $\theta$ 的 95% 区间估计为 $[0.1,0.3]$ ，则下列表述正确的是__________

（A）若该区间为置信区间，则表明 $\theta$ 位于该区间的概率是 0.95

（B）该区间的边际误为 0.2

（C）对假设 $H_0:\theta=0.2\leftrightarrow H_1:\theta\neq0.2$ ，会在 0.05 水平下拒绝原假设

（D）若该区间为贝叶斯可信区间，则表明 $\theta$ 位于该区间的概率是 0.95

答案：D

5．下列表述错误的是__________

（A）矩估计量一般不唯一

（B）无偏估计总是优于有偏估计

（C）相合性是一个估计量的基本性质

（D）最大似然估计可以不存在

答案：B

6．若 $\delta(X)$ 是一个损失下的 Bayes 法则，则下列表述正确的是__________

（A）$\delta(X)$ 的贝叶斯风险不超过 Minimax 风险

（B）$\delta(X)$ 不可能是一个 Minimax 法则

（C）$\delta(X)$ 是可容许的

（D）$\delta(X)$ 的风险为常数

答案：A

7．下述对一个显著性检验方法的描述错误的是__________

（A）原假设与对立假设地位不均等，原假设被保护起来

（B）$p$ 值越显著表明原假设成立的依据越强烈

（C）在一个检验结果是不能拒绝零假设时，检验只可能会犯第二类错误

（D）双边假设的接受域等价于参数的置信区间

答案：B

8．设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的简单样本，考虑假设检验问题 $H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1$ ：$\mu=0.5$ 。如果要求检验的第一类和第二类错误均不超过 $\alpha(0<\alpha<1)$ ，则样本量 $n$ 应满足 $\underline{n\geq\lceil 16u_\alpha^2\rceil}$ （结果用分位数表示）.

解：两点假设的拒绝域形如 $R=\{\boldsymbol{X}:\overline{X}>c\}$ . 按要求

$$
\begin{aligned}
\alpha &\geq \mathrm{P}\left(\boldsymbol{X}\in R\mid H_0\right)=\mathrm{P}_{\mu=0}(\overline{X}>c)=1-\Phi(\sqrt{n}c),\\
\alpha &\geq \mathrm{P}\left(\boldsymbol{X}\notin R\mid H_1\right)=\mathrm{P}_{\mu=0.5}(\overline{X}\leq c)=\Phi(\sqrt{n}(c-0.5)).
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$
\begin{cases}\sqrt{n}c\geq u_\alpha,\\ \sqrt{n}(c-0.5)\leq -u_\alpha,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad 0.5\sqrt{n}\geq 2u_\alpha,\quad\Longrightarrow\quad n\geq\lceil 16u_\alpha^2\rceil.
$$

9．设某种产品的质量等级可以划分为 " 优 " 、 " 合格 " 和 " 不合格 " ，为了判断生产此产品的三家工厂的产品是否有差异，使用拟合优度检验方法时的原假设为 <u>三家工厂生产的产品质量无差异</u>，渐近卡方分布的自由度为 <u>4</u>.

10. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自均匀分布 $\mathrm{U}(0,\theta),\theta>0$ 的一组简单样本，$\theta$ 的先验密度为 $\pi(\theta)=1/\left(2\theta^2\right),\theta\geq 1/2$ 。考虑假设检验问题 $H_0:\theta\leq 1\leftrightarrow H_1:\theta>1$ ，则其 Bayes 因子 $\mathrm{BF}_{01}$ 为 $\underline{\left[\left(x_{(n)}\vee 0.5\right)^{-n-1}-1\right]\vee 0}$

解：样本联合密度与先验分别为

$$
f(\boldsymbol{x}\mid\theta)=\theta^{-n}\cdot\mathbb{I}_{\left\{0<x_{(n)}<\theta\right\}},\quad \pi(\theta)=0.5\theta^{-2}\cdot\mathbb{I}_{\{\theta\geq 0.5\}}
$$

因此 $\theta$ 的后验密度为

$$
\pi(\theta\mid\boldsymbol{x})\propto\theta^{-n-2}\cdot\mathbb{I}_{\left\{\theta>x_{(n)}\vee 0.5\right\}}
$$

归一化后可得后验密度，进而求得后验分布函数为

$$
\Pi(\theta\mid\boldsymbol{x})=\begin{cases}1-\left(\frac{\theta_*}{\theta}\right)^{n+1}, & \theta\geq\theta_*\\ 0, & \theta<\theta_*\end{cases}
$$

其中 $\theta_*=x_{(n)}\vee 0.5$ . 于是当 $\theta_*<1$ ，即 $x_{(n)}<1$ 时，

$$
\alpha_0=\mathrm{P}(\theta\leq 1\mid\boldsymbol{x})=\Pi(1\mid\boldsymbol{x})=1-\theta_*^{n+1},\quad \alpha_1=1-\alpha_0=\theta_*^{n+1}
$$

当 $\theta_* \geq 1$ ，即 $x_{(n)} \geq 1$ 时，$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$ ．又因为 $\pi_0 = \mathrm{P}(\theta \leq 1) = 0.5, \pi_1 = \mathrm{P}(\theta > 1) = 0.5$ ，所以贝叶斯因子为

$$\mathrm{BF}_{01} = \frac{\alpha_0/\alpha_1}{\pi_0/\pi_1} = \begin{cases} \theta_*^{-n-1} - 1, & \theta_* < 1, \\ 0, & \theta_* \geq 1 \end{cases} = \left[\left(x_{(n)} \vee 0.5\right)^{-n-1} - 1\right] \vee 0$$

二.（20 分）设从总体

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |

（其中 $0 < p_1, p_2, p_3 < 1, p_1 + p_2 + p_3 = 1$ 为末知参数）中抽取的一个简单样本 $X_1, \ldots, X_n$ ，试
（1）求 $p_1 - p_2$ 的最大似然估计，并证明其为最小方差无偏估计。
（2）求检验问题 $H_0 : p_1 = p_2 \leftrightarrow H_1 : p_1 \neq p_2$ 的一个（渐近）水平 $\alpha$ 检验。
解：（1）似然函数为

$$L\left(p_1, p_2; \boldsymbol{x}\right) = p_1^{n_0} p_2^{n_1} \left(1 - p_1 - p_2\right)^{n - n_0 - n_1}$$

其中 $n_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\{X_j = i\}}, i = 0, 1$ ．由对数似然方程

$$\begin{cases} \frac{\partial l(p_1, p_2; \boldsymbol{x})}{\partial p_1} = \frac{n_0}{p_1} - \frac{n - n_0 - n_1}{1 - p_1 - p_2} = 0 \\ \frac{\partial l(p_1, p_2; \boldsymbol{x})}{\partial p_2} = \frac{n_1}{p_2} - \frac{n - n_0 - n_1}{1 - p_1 - p_2} = 0 \end{cases}$$

解得 $p_1, p_2$ 的最大似然估计分别为

$$\hat{p}_1 = \frac{n_0}{n}, \quad \hat{p}_2 = \frac{n_1}{n}$$

进一步由最大似然估计的不变性可知 $p_1 - p_2$ 的最大似然估计为 $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \left(n_0 - n_1\right)/n$ ．
最小方差无偏估计：将样本联合密度函数写成指数族形式如下

$$f\left(\boldsymbol{x}; p_1, p_2\right) = \exp\left\{n_0 \log \frac{p_1}{1 - p_1 - p_2} + n_1 \log \frac{p_2}{1 - p_1 - p_2}\right\} \cdot \left(1 - p_1 - p_2\right)^n$$

令

$$\eta_1 = \log \frac{p_1}{1 - p_1 - p_2}, \eta_2 = \log \frac{p_2}{1 - p_1 - p_2}$$

于是自然参数空间

$$\Theta^* = \{(\eta_1, \eta_2) : -\infty < \eta_1 < \infty, -\infty < \eta_2 < \infty\}$$

有内点，因此 $T = (n_0, n_1)$ 是 $(p_1, p_2)$ 的充分完全统计量．又注意到 $\hat{p}_1$ 和 $\hat{p}_2$ 分别是 $p_1$ 和 $p_2$ 的无偏估计，因此由 Lehmann-Scheffé 定理知 $p_1 - p_2$ 的最大似然估计是最小方差无偏估计．
（2）法一：拟合优度检验，取检验统计量为

$$K(\boldsymbol{X}) = \sum_{r=1}^{3} \frac{\left(n_{r-1} - n\hat{p}_r\right)^2}{n\hat{p}_r} \xrightarrow{H_0} \chi^2_{3-1-1},$$

其中 $\hat{p}_r$ 为 $H_0$ 下的极大似然估计．注意到当 $p_1 = p_2 = p$ 时，样本的似然函数为

$$L(p; \boldsymbol{x}) = p^{n_0 + n_1} (1 - 2p)^{n_2}.$$

由对数似然方程可得 $\hat{p}=\left(n_0+n_1\right)/(2n)$ . 代入检验统计量表达式得

$$K(\boldsymbol{X})=\frac{\left(n_0-n_1\right)^2}{n_0+n_1}.$$

因此检验问题渐近水平 $\alpha$ 检验为

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \text{当}\left(n_0-n_1\right)^2>\left(n_0+n_1\right)\chi_1^2(\alpha),\\ 0, & \text{当}\left(n_0-n_1\right)^2\leq\left(n_0+n_1\right)\chi_1^2(\alpha).\end{cases}$$

法二：似然比检验，注意到似然比

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\frac{\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_0}L(\theta)}=\frac{\hat{p}_1^{n_0}\hat{p}_2^{n_1}\left(1-\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)^{n_2}}{\hat{p}^{(n_0+n_1)}(1-2\hat{p})^{n_2}}$$

在大样本下，我们有 $2\log\lambda(\boldsymbol{X})\xrightarrow{H_0}\chi_1^2$ . 代入检验统计量表达式得

$$2\log\lambda(\boldsymbol{X})=2\log\frac{\left(n_0/n\right)^{n_0}\cdot\left(n_1/n\right)^{n_1}}{\left(n_0+n_1\right)^{n_0+n_1}/(2n)^{n_0+n_1}}=2n_0\log\frac{2n_0}{n_0+n_1}+2n_1\log\frac{2n_1}{n_0+n_1}$$

因此检验问题渐近水平 $\alpha$ 检验为

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \text{当}2n_0\log\frac{2n_0}{n_0+n_1}+2n_1\log\frac{2n_1}{n_0+n_1}>\chi_1^2(\alpha),\\ 0, & \text{当}2n_0\log\frac{2n_0}{n_0+n_1}+2n_1\log\frac{2n_1}{n_0+n_1}\leq\chi_1^2(\alpha).\end{cases}$$

法三：利用渐近正态检验，注意到

$$\hat{p}_1-\hat{p}_2=\frac{n_0-n_1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\left[\mathbb{I}_{\{X_j=0\}}-\mathbb{I}_{\{X_j=1\}}\right]$$

是独立随机变量之平均，于是由中心极限定理知

$$\frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2-\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{X_j=0\}}-\mathbb{I}_{\{X_j=1\}}\right]\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}\left[\mathbb{I}_{\{X_j=0\}}-\mathbb{I}_{\{X_j=1\}}\right]}}\xrightarrow{D}N(0,1)$$

其中

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{X_1=0\}}-\mathbb{I}_{\{X_1=1\}}\right]=p_1-p_2\quad\operatorname{Var}\left[\mathbb{I}_{\{X_1=0\}}-\mathbb{I}_{\{X_1=1\}}\right]=p_1+p_2-\left(p_1-p_2\right)^2$$

结合 Slutsky 定理，因此考虑取检验统计量为

$$U(\boldsymbol{X})=\frac{\sqrt{n}\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)}{\sqrt{\hat{p}_1+\hat{p}_2-\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)^2}}$$

在 $H_0$ 下，我们有 $U(\boldsymbol{X})\xrightarrow{D}N(0,1)$ . 于是检验问题渐近水平 $\alpha$ 检验为

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \text{当}|U(\boldsymbol{X})|>u_{\alpha/2},\\ 0, & \text{当}|U(\boldsymbol{X})|\leq u_{\alpha/2}.\end{cases}$$

法四：利用 Wald 检验，记 $\boldsymbol{\theta}=\left(p_1,p_2\right)^T,\hat{\boldsymbol{\theta}}=\left(\hat{p}_1,\hat{p}_2\right)^T$ ，于是由中心极限定理有

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})\xrightarrow{D}N\left(0,\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right),$$

其中总体（单个样本）的 Fisher 信息阵为

$$\boldsymbol{I}(\theta)=\begin{pmatrix} p_1^{-1}+p_3^{-1} & p_3^{-1} \\ p_3^{-1} & p_2^{-1}+p_3^{-1} \end{pmatrix}$$

注意 $h(\boldsymbol{\theta})=p_1-p_2, \boldsymbol{B}=\partial h/\partial\boldsymbol{\theta}=(1,-1)$ ，因此取检验统计量为

$$W_n=nh(\hat{\boldsymbol{\theta}})\left[\boldsymbol{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{B}^T(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1}h(\hat{\boldsymbol{\theta}})=\frac{n\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)^2}{\hat{p}_1+\hat{p}_2-\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)^2}$$

在 $H_0$ 下，我们有 $W_n\xrightarrow{D}\chi_1^2$ . 于是检验问题渐近水平 $\alpha$ 检验为

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & 当 W_n>\chi_1^2(\alpha), \\ 0, & 当 W_n\le\chi_1^2(\alpha).\end{cases}$$

三.（30 分）设 $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d.$\sim N(\mu,1)$ ，其中 $\mu$ 为参数．对水平 $\alpha$ ，试

（1）求 $\mathrm{P}\left(X_1>0\right)$ 的最大似然估计，并求其渐近方差。

（2）证明检验问题 $H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0$ 不存在 UMPT，其中 $\mu_0$ 为一已知数.

（3）若参数 $\mu$ 在 $\mu=\mu_0$ 上的先验概率为 0.6 ，在 $\mu\neq\mu_0$ 上的先验分布为 $N\left(\mu_0,4\right)$ ，损失函数取为 0-1 损失，求（2）中的假设检验问题的 Bayes 决策。

解：（1）似然函数

$$L(\mu;\boldsymbol{x})=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu\right)^2\right\}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\overline{x}\right)^2-\frac{n(\mu-\overline{x})^2}{2}\right\}$$

因此 $\mu$ 的最大似然估计为 $\hat{\mu}=\overline{X}$ 。

由最大似然估计的不变性可知，$p=\mathrm{P}\left(X_1>0\right)=\Phi(\mu)$ 的最大似然估计为 $\hat{p}=\Phi(\hat{\mu})=\Phi(\overline{X})$ 。

注意到 $\overline{X}\sim N(\mu,1/n)$ ，由 Delta 方法可知 $\hat{p}$ 的渐近方差为

$$[\phi(\mu)]^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{\exp\left\{-\mu^2\right\}}{2n\pi}$$

（2）首先注意到正态分布族（方差已知，均值为未知参数）关于 $T=\overline{X}$ 是单调似然比族。因而对检验问题 $H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1':\mu>\mu_0$ ，存在 UMPT 形如

$$\phi_1(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & 当 \overline{x}>\mu_0+u_\alpha/\sqrt{n}, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

对检验问题 $H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1'':\mu<\mu_0$ ，存在 UMPT 形如

$$\phi_2(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & 当 \overline{x}<\mu_0-u_\alpha/\sqrt{n}, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

显然 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 都是检验问题 $H_0\leftrightarrow H_1$ 的水平 $\alpha$ 检验。

假设检验问题 $H_0\leftrightarrow H_1$ 的 UMPT 存在，令其为 $\phi_0$ 。对固定 $\mu_1>\mu_0$ 和 $\mu_2<\mu_0$ ，检验 $\phi_0$ 也是简单

假设 $H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow K_1:\mu=\mu_1$ 和 $H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow K_2:\mu=\mu_2$ 的 UMPT．因此由 Neyman-Pearson 引理可知 $\phi_0$ 有形式

$$\phi_0(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \text{当} f(\boldsymbol{x};\mu_1)>k_1 f(\boldsymbol{x};\mu_0),\\ 0, & \text{当} f(\boldsymbol{x};\mu_1)\le k_1 f(\boldsymbol{x};\mu_0),\end{cases}$$

$$\phi_0(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \text{当} f(\boldsymbol{x};\mu_2)>k_2 f(\boldsymbol{x};\mu_0),\\ 0, & \text{当} f(\boldsymbol{x};\mu_2)\le k_2 f(\boldsymbol{x};\mu_0).\end{cases}$$

法一：考虑 $\boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}:\phi_0(\boldsymbol{x})=1\}$ ，由单调似然比的性质可知

- 如果 $T(\boldsymbol{y})>T(\boldsymbol{x})$，则由第一个检验形式知 $\phi_0(\boldsymbol{y})=1$。
- 如果 $T(\boldsymbol{y})<T(\boldsymbol{x})$，则由第二个检验形式知 $\phi_0(\boldsymbol{y})=1$。

于是要么 $\phi_0(\boldsymbol{y})=1$ 对所有 $\boldsymbol{y}$ 成立，要么 $\phi_0(\boldsymbol{x})\neq 1$ 对所有 $\boldsymbol{x}$ 成立．这时 $\phi_0$ 的功效比 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 在各自的检验问题 $H_0\leftrightarrow K_1$ 和 $H_0\leftrightarrow K_2$ 都要小，导出矛盾。

法二：由唯一性可知，在 $\mu_1>\mu_0$ 上，$\phi_0=\phi_1$ ，a.e.；在 $\mu_2<\mu_0$ 上，$\phi_0=\phi_2$ ，a.e. 由 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 的形式知这不可能成立。

（3）由题意知两个假设的后验概率分别为

$$\alpha_0=\mathrm{P}(\mu=\mu_0\mid\boldsymbol{x})=\frac{\pi_0 f(\boldsymbol{x}\mid\mu_0)}{m(\boldsymbol{x})},\quad \alpha_1=\mathrm{P}(\mu\neq\mu_0\mid\boldsymbol{x})=\frac{\pi_1 m_1(\boldsymbol{x})}{m(\boldsymbol{x})},$$

或者直接注意到简单假设对复杂假设的贝叶斯因子有形式

$$\mathrm{BF}_{01}(\boldsymbol{x})=\frac{f(\boldsymbol{x}\mid\mu_0)}{m_1(\boldsymbol{x})},\Longrightarrow\frac{\alpha_0}{\alpha_1}=\frac{\pi_0 f(\boldsymbol{x}\mid\mu_0)}{\pi_1 m_1(\boldsymbol{x})},$$

其中

$$m(\boldsymbol{x})=\pi_0 f(\boldsymbol{x}\mid\mu_0)+\pi_1 m_1(\boldsymbol{x}), m_1(\boldsymbol{x})=\int_{\mu\neq\mu_0} f(\boldsymbol{x}\mid\mu)\pi(\mu)\mathrm{d}\mu$$

下面计算 $m_1(\boldsymbol{x})$ 如下

$$\begin{aligned}m_1(\boldsymbol{x})&=\int_{\mu\neq\mu_0} f(\boldsymbol{x}\mid\mu)\pi(\mu)\mathrm{d}\mu\\&=\int_{\mu\neq\mu_0}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2-\frac{n(\mu-\overline{x})^2}{2}\right\}\cdot(8\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{8}\right\}\mathrm{d}\mu\\&=\frac{(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}}{2}\exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2}\right\}\int_{\mu\neq\mu_0}\exp\left\{-\frac{A\mu^2-2B\mu+C}{2}\right\}\mathrm{d}\mu\\&=\frac{(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}}{2}\exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2}\right\}\cdot(2\pi/A)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\right\}\\&=\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{4n+1}}\exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2}-\frac{n(\overline{x}-\mu_0)^2}{2(4n+1)}\right\}\end{aligned}$$

其中

$$A=n+\frac{1}{4}, B=n\overline{x}+\frac{\mu_0}{4}, C=n\overline{x}^2+\frac{\mu_0^2}{4}$$

因此

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1}=\frac{0.6(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2}-\frac{n(\overline{x}-\mu_0)^2}{2}\right\}}{0.4\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{4n+1}}\exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2}-\frac{n(\overline{x}-\mu_0)^2}{2(4n+1)}\right\}}=\frac{3\sqrt{4n+1}}{2}\exp\left\{-\frac{2n^2\left(\overline{x}-\mu_0\right)^2}{4n+1}\right\}$$

在 0-1 损失下，该检验问题的贝叶斯决策为

$$\delta(\boldsymbol{x})=\begin{cases}a_0, & \text{当}\left(\overline{x}-\mu_0\right)^2\le\frac{4n+1}{2n^2}\log\frac{3\sqrt{4n+1}}{2},\\ a_1, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $a_0$ 表示接受假设 $H_0, a_1$ 表示接受假设 $H_1$ .

四.（30 分）设 $X_1,\ldots,X_m$ i. i. d. $\sim\operatorname{Exp}(\lambda_1)$（期望是 $1/\lambda_1$ 的指数分布），$Y_1,\ldots,Y_n$ i. i. d. $\sim\operatorname{Exp}(\lambda_2)$ ，且样本 $X_1,\ldots,X_m$ 和 $Y_1,\ldots,Y_n$ 独立，其中 $\lambda_1,\lambda_2$ 为正参数。记 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别为两组样本的样本均值．试

（1）求 $\mathbb{E}\left[\left(X_1-Y_1\right)^2\mid\overline{X},\overline{Y}\right]$ 。

（2）求 $\lambda_1/\lambda_2$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间.

（3）求检验问题 $H_0:\lambda_1=c\lambda_2\leftrightarrow H_1:\lambda_1\neq c\lambda_2$ 的水平 $\alpha$ 似然比检验。

解：（1）法一：由指数分布的性质知

$$\mathbb{E}\left[\left(X_1-Y_1\right)^2\right]=\mathbb{E}\left(X_1^2\right)-2\mathbb{E}\left(X_1Y_1\right)+\mathbb{E}\left(Y_1^2\right)=\frac{2}{\lambda_1^2}-\frac{2}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{2}{\lambda_2^2}.$$

注意到 $(\overline{X},\overline{Y})$ 是 $(\lambda_1,\lambda_2)$ 的充分完全统计量，由 UMVUE 的唯一性可知

$$\mathbb{E}\left[\left(X_1-Y_1\right)^2\mid\overline{X},\overline{Y}\right]=\left(\frac{2}{\lambda_1^2}-\frac{2}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{2}{\lambda_2^2}\right)_{\text{UMVUE}}$$

显然地，我们有

$$\mathbb{E}\left(\overline{X}^2\right)=\operatorname{Var}(\overline{X})+[\mathbb{E}(\overline{X})]^2=\frac{m+1}{m\lambda_1^2},\quad\mathbb{E}\left(\overline{Y}^2\right)=\operatorname{Var}(\overline{Y})+[\mathbb{E}(\overline{Y})]^2=\frac{n+1}{n\lambda_2^2}.$$

因此

$$\mathbb{E}\left[\left(X_1-Y_1\right)^2\mid\overline{X},\overline{Y}\right]=\frac{2m\overline{X}^2}{m+1}-2\overline{XY}+\frac{2n\overline{Y}^2}{n+1}.$$

法二：由条件期望的线性性及独立性可知

$$\mathbb{E}\left[\left(X_1-Y_1\right)^2\mid\overline{X},\overline{Y}\right]=\mathbb{E}\left(X_1^2\mid\overline{X}\right)-2\mathbb{E}\left(X_1Y_1\mid\overline{X},\overline{Y}\right)+\mathbb{E}\left(Y_1^2\mid\overline{Y}\right).$$

注意到

$$X_1/(m\overline{X})\sim\operatorname{Be}(1,m-1),Y_1/(n\overline{Y})\sim\operatorname{Be}(1,n-1)$$

且 $(\overline{X},\overline{Y})$ 是 $(\lambda_1,\lambda_2)$ 的充分完全统计量，由 Basu 定理可知

$$\mathbb{E}\left(X_1^2\mid\overline{X}\right)=\overline{X}^2\cdot\mathbb{E}\left(\left.\frac{X_1^2}{\overline{X}^2}\right|\overline{X}\right)=\overline{X}^2\cdot\mathbb{E}\left(\frac{X_1^2}{\overline{X}^2}\right),\quad\mathbb{E}\left(Y_1^2\mid\overline{Y}\right)=\overline{Y}^2\cdot\mathbb{E}\left(\frac{Y_1^2}{\overline{Y}^2}\right),$$

$$\mathbb{E}\left(X_1Y_1\mid\overline{X},\overline{Y}\right)=\overline{XY}\mathbb{E}\left(\left.\frac{X_1}{\overline{X}}\cdot\frac{Y_1}{\overline{Y}}\right|\overline{X},\overline{Y}\right)=\overline{XY}\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{\overline{X}}\right)\cdot\mathbb{E}\left(\frac{Y_1}{\overline{Y}}\right).$$

由贝塔分布性质知

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{m\overline{X}}\right)=\frac{1}{m},\quad \mathbb{E}\left(\frac{X_1^2}{m^2\overline{X}^2}\right)=\frac{2}{m(m+1)},\quad \mathbb{E}\left(\frac{Y_1}{n\overline{Y}}\right)=\frac{1}{n},\quad \mathbb{E}\left(\frac{Y_1^2}{n^2\overline{Y}^2}\right)=\frac{2}{n(n+1)}.$$

于是代入可得

$$\mathbb{E}\left[(X_1-Y_1)^2 \mid \overline{X},\overline{Y}\right]=\frac{2m\overline{X}^2}{m+1}-2\overline{X}\overline{Y}+\frac{2n\overline{Y}^2}{n+1}$$

（2）注意 $2m\lambda_1\overline{X}\sim\chi^2_{2m}, 2n\lambda_2\overline{Y}\sim\chi^2_{2n}$ ，取枢轴变量为

$$\frac{\lambda_1\overline{X}}{\lambda_2\overline{Y}}\sim F_{2m,2n}$$

由 $\mathrm{P}\left(F_{2m,2n}(1-\alpha/2)\leq\frac{\lambda_1\overline{X}}{\lambda_2\overline{Y}}\leq F_{2m,2n}(\alpha/2)\right)=1-\alpha$ ，反解得到 $\lambda_1/\lambda_2$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[F_{2m,2n}(1-\alpha/2)\cdot\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}, F_{2m,2n}(\alpha/2)\cdot\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}\right].$$

（3）似然函数

$$L\left(\lambda_1,\lambda_2;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\lambda_1^m\exp\left\{-\lambda_1\sum_{i=1}^m x_i\right\}\cdot\lambda_2^n\exp\left\{-\lambda_2\sum_{j=1}^n y_j\right\}.$$

由似然比检验的思想，取检验统计量为

$$\Lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{\sup_{\lambda_1>0,\lambda_2>0}L\left(\lambda_1,\lambda_2;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)}{\sup_{\lambda_1/\lambda_2=c}L\left(\lambda_1,\lambda_2;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)}.$$

注意到全空间下 $\hat{\lambda}_1=1/\overline{X},\hat{\lambda}_2=1/\overline{Y}$ ．在原假设空间下，记 $\lambda_1=c\lambda,\lambda_2=\lambda$ ，考虑 $\lambda$ 的似然函数为

$$L(\lambda;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=c^m\lambda^{m+n}\exp\{-\lambda(cm\overline{x}+n\overline{y})\}$$

此时最大似然估计 $\hat{\lambda}=(m+n)/(cm\overline{x}+n\overline{y})$ ．于是似然比可化简为

$$\begin{aligned}\Lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{L\left(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)}{L(c\hat{\lambda},\hat{\lambda};\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}&=\frac{(cm\overline{x}+n\overline{y})^{m+n}}{c^m(m+n)^{m+n}\overline{x}^m\cdot\overline{y}^n}\\&=\frac{1}{(m+n)^{m+n}}\left(m+n\frac{\overline{y}}{c\overline{x}}\right)^m\left(n+m\frac{c\overline{x}}{\overline{y}}\right)^n\\&\triangleq\frac{1}{(m+n)^{m+n}}\left(m+nF^{-1}\right)^m(n+mF)^n\end{aligned}$$

其中 $F:=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=c\overline{x}/\overline{y}$ ．注意到 $\Lambda$ 关于 $F$ 先递减后递增，因此检验的拒绝域的形式为

$$R=\left\{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}):F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})<c_1\text{ 或}F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})>c_2\right\}.$$

注意到 $2m\lambda_1\overline{X}\sim\chi^2_{2m}, 2n\lambda_2\overline{Y}\sim\chi^2_{2n}$ ，所以在 $H_0$ 下，

$$F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\frac{c\overline{X}}{\overline{Y}}\sim F_{2m,2n}$$

由显著性水平 $\alpha$ 要求知 $c_1=F_{2m,2n}(1-\alpha/2), c_2=F_{2m,2n}(\alpha/2)$ ．