25 实分析期中

1.

（1）简述函数 f 可测的定义

（2）求证：f 可测且集合 $\{f>0\}$ 可测 $\Rightarrow f$ 可测

2.

（1）课本中的不可测集 N 的可测子集一定为零测集

（2）$m(E)=0 \Leftrightarrow E$ 的任何可测子集都是零测集

3. 设 $B=\{\|x\|<1\}$ 为 R^d 中的开球且 f 非负可测，有 $\int_B f dx=1$

求证：

$$\int_B f(x)\|x\|\ dx<1$$

4. 求解

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x+\sin^k x}{1-e^{-kx}+x^k}dx$$

5. $f, f_1, \cdots, f_n$ 均在 $[0,\ 1]$ 上可测

（1）$f_n \xrightarrow{L_1} f$ 是否能推出 $f_n \xrightarrow{L_2} f$, 证明或者给出反例

（2）$f_n \xrightarrow{L_2} f$ 是否能推出 $f_n \xrightarrow{L_1} f$, 证明或者给出反例

（3）$f_n \xrightarrow{m} f$ 是否能推出 $\lim_{n\to\infty} m\left(\{|f_n-f|>0\}\right)=0$, 证明或者给出反例

6. 设 $E_k=\{|f|\geqslant k\}$ 且 f 可积，求证：

（1）$\lim_{k\to\infty} m(E_k)=0$

（2）$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)<+\infty$

7. g 为周期为 1 的光滑函数且 $\int_0^1 g(x)dx=0$ 。

（1）求证: 对任意闭区间 $[a,b]$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(nx)dx=0$$

（2）对任意可积函数 f, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_R f(x)g(nx)dx=0$$

成立