15 实用随机过程期中考试

NULIOUS

1．设 $x_1,\ldots,x_n$ 为正常数，请用概率的方法证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{1/n}$$

证：设 X 为一个随机变量，满足 $\mathrm{P}(X=\log x_i)=1/n, i=1,\ldots,n$ ．对 $\phi(x)=e^x$ 应用 Jensen 不等式 $\mathbb{E}_\phi[X]\geq\phi(\mathbb{E}[X])$ ，立得所欲证不等式，

2．设 $X_1\sim\operatorname{Exp}(\lambda_1), X_2\sim\operatorname{Exp}(\lambda_2), X_3\sim\operatorname{Exp}(\lambda_3)$ 且三个随机变量相互独立，其中 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3>0$ ．求 $\mathrm{P}(X_3>X_2, X_1+X_2>X_3)$ ．

解：

$$\begin{aligned}P(X_3>X_2,X_1+X_2>X_3) &= \mathbb{E}\left[P(X_3>X_2,X_1+X_2>X_3 \mid X_1,X_2)\right]\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}\int_y^{x+y}\lambda_3 e^{-\lambda_3 z}dz\\ &= \frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3)}\end{aligned}$$

3．考虑一个 $M/G/\infty$ 随机服务系统，顾客到达系统的规律可以用齐次 Poisson 过程米描述，单位时间内平均到达的顾客数为 1 ，每个顾客需要服务员提供的服务时间是独立同分布的，其共同分布的概率密度函数为 $g(u)=2(1+u)^{-3}, u\geq 0$ ，系统有无穷多个服务员（即顾客到达系统后立即能得到服务），以 A_t 表示时刻 t 系统中处于工作状态的服务员个数.

（1）已知时间段 $(1,10]$ 到达了 2 位顾客，求时间段 $(15,20]$ 到达 2 位顾客的概率；

（2）求 A_5 的概率分布；

（3）求 $\operatorname{Cov}(A_4,A_5)$ ．

解：顾客到达过程 $\{N(t)\}$ 为 HPP(1) ，即强度参数 $\lambda=1$ ．

（1）利用 HPP 的独立增量性，得

$$\mathrm{P}(N(20)-N(15)=2 \mid N(10)-N(1)=2)=\mathrm{P}(N(20)-N(15)=2)=12.5e^{-5}$$

（2）+（3）记服务时间生存函数为 $\bar{G}(u)=(1+u)^{-2}$ ，把到达的顾客分为以下 3 类：

I 型：于 $(0,4]$ 到达，且于时刻 5 未被服务完毕；

II 型：于 $(0,4]$ 到达，且于 $(4,5]$ 内被服务完毕；

III 型：于 $(4,5]$ 到达，且于时刻 5 木被服务完毕.

具体分类如下：于任意时刻 s 到达的顾客，以概率 $p_i(s)$ 被划入第 i 型顾客，$i=1,2,3$ ，
其中

$$p_1(s)=\begin{cases}\bar{G}(5-s), & s\leq 4\\ 0, & s>4\end{cases}\qquad p_2(s)=\begin{cases}\bar{G}(4-s)-\bar{G}(5-s), & s\leq 4\\ 0, & s>4\end{cases}$$

$$p_3(s)=\begin{cases}\bar{G}(5-s), & 4<s\leq 5\\ 0, & s\leq 4\text{ 或} s>5\end{cases}$$

以 N_i 记 $(0,5]$ 时段第 i 型顾客的总数，则 $A_5=N_1+N_3, A_4=N_1+N_2$ ．由 Poisson 过程的抽样性质知：N_1,N_2,N_3 相耳独立，且皆服从 Poisson 分布，对应的 Poisson 参数分别为

$$\lambda_1=\lambda\int_0^5 p_1(s)ds=1/3$$
$$\lambda_2=\lambda\int_0^5 p_2(s)ds=7/15$$
$$\lambda_3=\lambda\int_0^5 p_3(s)ds=1/2$$

于是

$$A_5\sim \mathrm{Poisson}(5/6)\quad \mathrm{Cov}\left(A_i,A_5\right)=\mathrm{Var}\left(N_1\right)=1/3$$

4．假设顾客到达银行的规律可用强度参数 $\lambda=2$ 的齐次 Poisson 过程来描述，每位到达的顾客以概率 $1/2$ 为男性．已知在前 10 个单位时间里有 100 个顾客到达该银行，问在该时间段到达该银行的女性顾客平均有多少？
解：在该时间段到达该银行的女性顾客 $N\sim \mathrm{B}\left(100,\frac{1}{2}\right)$
则

$$\mathbb{E}[N]=50$$

5．设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列，共同分布为参数 λ 的指数分布，N 为几何分布随机变量，独立于 $\{X_n,n\geq 1\}$ ，其中

$$\mathrm{P}(N=n)=p(1-p)^{n-1},\quad n\geq 1$$

求 $S=\sum\limits_{k=1}^{N}X_k$ 的分布，并基于齐次 Poisson 过程的相关理论加以解释
解：考虑几何分布的意义：第一次投掷出正面的硬币所需的总投掷数
设 X_k 为每次投掷的时间间隔，则 $S=\sum\limits_{k=1}^{N}X_k$ 即为直到第一次投掷出正面所需的总时间
将 Poisson 过程分类，则投出正面的过程 $N_1(t)$ 速率为 λp, 投出反面的过程 $N_2(t)$ 速率为 $\lambda(1-p)$
那么 S 就是 $N_1(t)$ 中第一个时间间隔，即

$$S\sim \mathrm{Exp}(\lambda p)$$