24 实用随机过程期中

NULIOUS

1.（20 分）系统有两个编号为 1,2 的服务台，第 i 号服务台给顾客提供的服务时间服从失效率为常数 λ_i 的指数分布，其中 $i=1,2$ ，不同顾客的服务时间相互独立．采用先到先服务、后到排队的原则。当 A 到达系统时，发现 B 和 C 占据了两个服务台，求 A 在系统中滞留时间 T 的期望．

解：利用指数分布的性质

$$X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1) \quad X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$$

则有

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

和

$$\min\{X_1, X_2\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1+\lambda_2)$$

设顾客 B 与 C 的服务时长分别为 X_1 与 X_2，则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\text{顾客 A 在系统中滞留的时间}\right] &= \mathbb{E}\left[\text{顾客 A 在系统中滞留的时间} \mid \text{B 比 C 先走}\right] P(\text{B 比 C 先走}) \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\text{顾客 A 在系统中滞留的时间} \mid \text{C 比 B 先走}\right] P(\text{C 比 B 先走}) \\
&= \left(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_1}\right)\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \left(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\
&= \frac{3}{\lambda_1+\lambda_2}
\end{aligned}$$

2.（每小题 6 分，总 24 分）考虑一个 $M/G/\infty$ 系统，顾客到达系统的规律可以用齐次 Poisson 过程来描述，单位时间内平均到达的顾客数为 5 ，每个顾客需要服务员提供的服务时间相互独立，服从区间 $(1,3)$ 上的均匀分布，系统有无穷多个服务员（即顾客到达系统后立即能得到服务）

（1）求于 $(0,4]$ 到达，且于时刻 5 未被服务完毕的顾客人数 M_1 服从的分布；

（2）求于 $(0,4]$ 到达，且于 $(4,5]$ 内被服务完毕的顾客人数 M_2 服从的分布；

（3）求于 $(3,4]$ 到达，且于时刻 5 未被服务完毕的顾客人数 M_3 服从的分布；

（4）判断 M_1, M_2, M_3 两两之间的独立性．

解：（1）服务时间 G 的密度为

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其分布函数为

$$G(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & 1 \le x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

则服务时间的生存函数为

$$\bar{G}(x) = 1 - G(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{3-x}{2} & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

于 $(0, 4]$ 中 s 时刻到达，且于时刻 5 未被服务完毕的概率为

$$P_1(s) = \begin{cases} \bar{G}(5-s) & s \le 4 \\ 0 & s > 4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{s-2}{2} & 2 \le s \le 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则由分类 Poisson 过程有

$$M_1 \sim \mathrm{P}\left(\lambda \int_0^5 P_1(s)ds\right) = \mathrm{P}(5)$$

（2）于 $(0, 4]$ 中 s 时刻到达，且于 $(4, 5]$ 内被服务完毕的概率为

$$P_2(s) = \begin{cases} 1 & 0 < s \le 2 \\ G(5-s) & 2 < s \le 4 \\ 0 & s > 4 \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 < s \le 2 \\ \frac{4-s}{2} & 2 < s \le 4 \\ 0 & s > 4 \end{cases}$$

则由分类 Poisson 过程有

$$M_2 \sim \mathrm{P}\left(\lambda \int_0^5 P_2(s)ds\right) = \mathrm{P}(15)$$

（3）于 $(3, 4]$ 中 s 时刻到达，且于时刻 5 末被服务完毕的概率为

$$P_3(s) = \begin{cases} 0 & s \le 3 \\ \bar{G}(5-s) & 3 < s \le 4 \\ 0 & s > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & s \le 3 \\ \frac{s-2}{2} & 3 < s \le 4 \\ 0 & s > 4 \end{cases}$$

则由分类 Poisson 过程有

$$M_3 \sim \mathrm{P}\left(\lambda \int_0^5 P_3(s)ds\right) = \mathrm{P}\left(\frac{15}{4}\right)$$

（4）由分类 Poisson 过程，M_1 和 M_2 是独立的，M_2 和 M_3 也是独立的，而 M_1 和 M_3 不是独立的，因为原 Poisson 过程 $N(t)$ 中的 $N(4)$ 和 $N(4) - N(3)$ 不是独立的

3.（每小题 4 分，总 16 分）假设一个元件于时刻 0 开始投入使用，该元件易于受到外界的冲击，时间单位按小时计算．在时间段 $(0, 3]$ 内冲击以每小时 2 个的泊松速率到达，在时间段 $(3, 6]$ 内冲击以每小时 3 个的泊松速率到达，在其后的时间段 $(6, +\infty)$ 内冲击以每小时 1 个泊松速率到达．泊松速率到达是指不可能有两个或多个冲击同时到达．

（1）问冲击到达可以用什么样的过程来描述？
（2）求时间段 $(2,4]$ 有 1 个冲击发生的概率.
（3）求时间段 $(2,4]$ 和 $(4,6]$ 中各有 1 个冲击发生的概率.
（4）求前 10 个小时之内到达冲击期望个数
解：（1）这是一个非齐次 Poisson 过程 $N(t)$，有强度函数

$$\lambda(t)=\begin{cases}2 & 0<t\le 3\\ 3 & 3<t\le 6\\ 1 & t>6\end{cases}$$

（2）

$$N(4)-N(2)\sim \mathrm{P}\left(\int_2^4\lambda(s)ds\right)=\mathrm{P}(5)$$

则

$$P(N(4)-N(2)=1)=5e^{-5}$$

（3）由独立增量性，两个事件是独立的，且

$$N(6)-N(4)\sim \mathrm{P}\left(\int_4^6\lambda(s)ds\right)=\mathrm{P}(6)$$

则

$$\begin{aligned}P(N(4)-N(2)=1,N(6)-N(4)=1)&=P(N(4)-N(2)=1)P(N(6)-N(4)=1)\\&=30e^{-11}\end{aligned}$$

（4）

$$N(10)\sim \mathrm{P}\left(\int_0^{10}\lambda(s)ds\right)=\mathrm{P}(19)$$

则

$$\mathbb{E}[N(10)]=19$$

4.（16 分）以 $A(t)$ 和 $Y(t)$ 记一个更新过程在时刻 t 的年龄和剩余寿命，且假设更新间隔服从参数为 λ 的指数分布，求 $\mathrm{P}(Y(t)>x\mid A(t+x)>s)$ ，其中 $s<t+x$.
解：
i.$s<x$ 时
$A(t+x)>s$ 说明 $(t+x-s,t+x)$ 时间段内不可能发生更新，则利用指数分布的无记忆性和生存函数

$$\bar{F}(x)=e^{-\lambda x}$$

有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y(t)>x \mid A(t+x)>s) &= P\left((t,t+x)\text{时间段内不发生更新} \mid (t+x-s,t+x)\text{时间段内不发生更新}\right) \\
&= \frac{P\left((t,t+x)\text{时间段内不发生更新}, (t+x-s,t+x)\text{时间段内不发生更新}\right)}{P\left((t+x-s,t+x)\text{时间段内不发生更新}\right)} \\
&= \frac{P\left((t,t+x)\text{时间段内不发生更新}\right)}{P\left((t+x-s,t+x)\text{时间段内不发生更新}\right)} \\
&= \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(s)} \\
&= e^{-\lambda(x-s)}
\end{aligned}
$$

ii.$x \leq s < t+x$ 时

$A(t+x)>s$ 就说明在时刻 $t+s$ 距离上一次更新的时间间隔大于 s，也就大于 x，所以 $(t,t+x)$ 时间段内不可能发生更新，这就说明 t 时刻距离下一次更新的时间间隔大于 x，即 $Y(t)>x$ 必然发生

$$\mathrm{P}(Y(t)>x \mid A(t+x)>s)=1$$

RK：更新间隔服从参数为 λ 的指数分布的更新过程事实上就是参数为 λ 的 Poisson 过程

5.（每小题 6 分，总 24 分）观察一列独立同分布的离散随机变量序列 $\{W_n, n \geq 1\}$ ，已知

$$\mathrm{P}(W_1=0)=\frac{1}{6}, \quad \mathrm{P}(W_1=1)=\frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(W_1=2)=\frac{1}{2}$$

（1）分别求等待花样 "121" 和花样 "212" 首次发生所需要的期望时间.

（2）给定花样 "121" 已发生，求等待花样 "212" 首次发生所需要的额外期望时间.

（3）求等待花样 "121" 或花样 "212" 首次发生所需要的期望时间.

（4）求花样 "121" 于花样 "212" 之前发生的概率.

解：花样问题

（1）"121" 有重叠"1"，"1" 没有重叠；"212" 有重叠"2"，"2" 没有重叠，则

$$\mathbb{E}[N_{121}]=\left(P^2(W_1=1)P(W_1=2)\right)^{-1}+\left(P(W_1=1)\right)^{-1}=21$$

$$\mathbb{E}[N_{212}]=\left(P(W_1=1)P^2(W_1=2)\right)^{-1}+\left(P(W_1=2)\right)^{-1}=14$$

（2）花样 "121" 给花样 "212" 提供了花样 "21"，并注意到"21" 没有重叠，因此

$$\mathbb{E}[N_{212|121}]=\mathbb{E}[N_{212}]-\mathbb{E}[N_{21}]=21-6=15$$

类似的，花样 "212" 给花样 "121" 提供了花样 "12"，并注意到"12" 没有重叠，因此

$$\mathbb{E}[N_{121|212}]=\mathbb{E}[N_{121}]-\mathbb{E}[N_{12}]=14-6=8$$

（3）+（4）设 $P_A=P(\text{花样 "121" 于花样 "212" 之前发生})$，$M=\min(N_{121},N_{212})$

对花样 "121" 是否于花样 "212" 之前发生取条件，有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_{121}] &= \mathbb{E}[M]+\mathbb{E}[N_{121}-M] \\
&= \mathbb{E}[M]+\mathbb{E}[N_{121}-M \mid \text{花样 "121" 于花样 "212" 之前发生}](1-P_A) \\
&= \mathbb{E}[M]+\mathbb{E}[N_{121|212}](1-P_A)
\end{aligned}
$$

类似的

$$\mathbb{E}[N_{212}] = \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{212|121}]P_A$$

最后

$$P_A = \frac{\mathbb{E}[N_{212}] + \mathbb{E}[N_{121|212}] - \mathbb{E}[N_{121}]}{\mathbb{E}[N_{212|121}] + \mathbb{E}[N_{121|212}]} = \frac{1}{23}$$

$$\mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[N_{212}] - \mathbb{E}[N_{212|121}]P_A = \frac{307}{23}$$