11 实用随机过程期中考试

$\mathscr{NULIOUS}$

1.（20 分）设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的 Poisson 过程，以 S_n 记第 n 个事件发生的时刻，$s, t > 0$.

（1）求 $\mathbb{E}\left[S_4 \mid N(1) = 2\right]$.

（2）求 $\mathbb{E}[N(4) - N(2) \mid N(1) = 3]$.

（3）在条件 $N(s+t) = n$ 下，求 $N(s)$ 的分布律.

（4）求 $\mathrm{Cov}(N(s), N(s+t))$.

解：（1）记 X_i 为事件发生的时间间隔，则 $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda) \quad \forall i$，有

$$\mathbb{E}\left[S_4 \mid N(1) = 2\right] = \mathbb{E}[1 + X_3 + X_4] = 1 + \frac{2}{\lambda}$$

（2）由独立增量性

$$\mathbb{E}[N(4) - N(2) \mid N(1) = 3] = \mathbb{E}[N(4) - N(2)] = 2\lambda$$

（3）设 $U_1, ..., U_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{U}(0, s+t)$，$(U_{(1)}, ..., U_{(n)})$ 为其次序统计量，则

$$S_1, ..., S_n \mid N(s+t) = n \sim (U_{(1)}, ..., U_{(n)})$$

进而

$$N(s) \mid N(s+t) = n \sim \mathrm{B}\left(n, \frac{s}{s+t}\right)$$

（4）只需证明

$$\mathrm{Cov}\left(N(t), N(s)\right) = \lambda \min\{s, t\}$$

下面设 $s \leq t$

证一：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(N(t), N(s)\right) &= \mathrm{Cov}\left(N(t) - N(s), N(s)\right) + Cov\left(N(s), N(s)\right) \\
&\overset{\text{独立增量性}}{=} 0 + \mathrm{Var}\left(N(s)\right) \\
&= \lambda s
\end{aligned}$$

证二：

$$\mathrm{Cov}\left(N(t), N(s)\right) = \mathbb{E}\left[N(t)N(s)\right] - \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[N(s)]$$

且有

$$\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t \quad \mathbb{E}[N(s)] = \lambda s$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N(t)N(s)\right] &= \mathbb{E}\left[N(s)\left(N(s)+\left(N(t)-N(s)\right)\right)\right] \\
&\overset{\text{独立增量性}}{=} \mathbb{E}\left[N^2(s)\right]+\mathbb{E}[N(s)]\mathbb{E}[N(t)-N(s)] \\
&= \lambda^2 s^2+\lambda s+\lambda s\cdot\lambda(t-s) \\
&= \lambda s+\lambda^2 st
\end{aligned}$$

因此

$$\operatorname{Cov}\left(N(t),N(s)\right)=\lambda s$$

对于本题有

$$\operatorname{Cov}(N(s),N(s+t))=\lambda s$$

2.（15 分）设随机变量 X 和 Y 独立同分布于参数为 λ 的指数分布.
（1）问 $\max(X,Y)-\min(X,Y)$ 服从什么分布？
（2）问 $\max(X,Y)-\min(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$ 是否独立？请证明你的结论.
（3）试用 Poisson 过程的背景解释上面的结果.
（注：允许直接利用 Poisson 过程去求解（1）和（2））
解：（1）由指数分布无记忆性，超出量还是原指数分布，即

$$\max(X,Y)-\min(X,Y)\sim\operatorname{Exp}(\lambda)$$

（2）由于无记忆性

$$\max(X,Y)-\min(X,Y)\mid\min(X,Y)=t\sim\operatorname{Exp}(\lambda)$$

说明二者独立
（3）$\max(X,Y)$，$\min(X,Y)$ 可以视为 Poisson 过程的首次和第二次的事件发生时间，则（1）来自 Poisson 过程的时间间隔为指数分布，（2）来自 Poisson 过程的独立增量性

3.（16 分）以 S_n 记速率为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t),t\geq 0\}$ 的第 n 个事件发生的时刻。对在意一元函数 g_i 对任意 $t>0$ ，试求

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} g\left(S_i\right)$$

的期望和方差
解：解：设 $U_1,...,U_n\overset{i.i.d.}{\sim}\mathrm{U}(0,t)$，$(U_{(1)},U_{(n)})$ 为其次序统计量，则对 $N(t)=n$ 取条件有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} g(S_k)\mid N(t)=n\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} g(U_{(k)})\right]$$

注意有限求和号内可以任意换序，就有

$$\sum_{k=1}^{n} g(U_{(k)})=\sum_{k=1}^{n} g(U_k)$$

则

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} g(U_{(k)})\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} g(U_k)\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[g(U_k)\right]$$

则有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} g(S_k) \mid N(t)=n\right] = n\mathbb{E}[g(U_k)]$$

进而

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} g(S_k)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} g(S_k) \mid N(t)=n\right]\right] = \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[g(U_k)] = \lambda t\mathbb{E}[g(U_k)]$$

另外

$$\mathbb{E}[g(U_k)] = \int_0^t \frac{1}{t} g(u)du$$

化简后

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} g(S_k)\right] = \lambda \int_0^t g(u)du$$

对于方差，由条件方差公式

$$\operatorname{Var}(Y(t)) = \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}(Y(t) \mid N(t))\right] + \operatorname{Var}\left(\mathbb{E}[Y(t) \mid N(t)]\right)$$

其中

$$\operatorname{Var}\left(\mathbb{E}[Y(t) \mid N(t)]\right) = \operatorname{Var}(N(t))\left(\mathbb{E}[g(U_i)]\right)^2 = \lambda t\left(\frac{1}{t}\int_0^t g(u)du\right)^2$$

另外由独立性

$$\operatorname{Var}(Y(t) \mid N(t)=n) = n\operatorname{Var}(g(U_i))$$

其中

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(g(U_i)) &= \mathbb{E}[g^2(U_i)] - \left(\mathbb{E}[g(U_i)]\right)^2 \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t g^2(u)du - \left(\frac{1}{t}\int_0^t g(u)du\right)^2\end{aligned}$$

就有

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{Var}(Y(t) \mid N(t))\right] = \lambda t\operatorname{Var}(g(U_i))$$

最后

$$\operatorname{Var}(Y(t)) = \lambda\int_0^t g^2(u)du$$

4.（15 分）设更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的更新区间长度为一列独立同分布于 $\mathrm{U}(0,1)$ 的随机变量.

（1）对任意 $0 < t \leq 1$ ，证明更新函数 $m(t)$ 满足函数方程

$$m(t) = t + \int_0^t m(y)dy$$

（2）利用（1）中的结论证明对任意 $0 < t \le 1, m(t) = e^t - 1$.

解：（1）即证明更新方程，用 $*$ 表示卷积，F_n 表示分布函数的 n 次卷积

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \\ &= F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t) \\ &= F(t) + F(t) * \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \\ &= F(t) + F(t) * m(t) \\ &= F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x) \end{aligned}$$

（2）对 U(0,1) 有 $F(t) = t$ 和 $dF(x) = 1$，对更新方程求导，有

$$m'(t) = 1 + m(t)$$

解微分方程就有

$$m(t) = e^t - 1$$

5.（16 分）考虑连续地投掷一枚均匀硬币，以 H 和 T 分别记正面和反面，对花样 TTHTT 和 HTHTHT，利用更新过程的知识分别求它们各自

（1）相继出现的平均间隔时间；

（2）首次出现的平均时间。

解：（1）出现过 TTHTT 相当于给后一个 TTHTT 提供了 TT；出现过 HTHTHT 相当于后一个 HTHTHT 提供了 HTHT，则

$$\mathbb{E}[T_{TTHTT|TT}] = \mathbb{E}[T_{TTHTT}] - \mathbb{E}[T_{TT}] = \big(P(X=H)P^4(X=T)\big)^{-1} = 2^5$$

$$\mathbb{E}[T_{HTHTHT|HTHT}] = \mathbb{E}[T_{THTHTH}] - \mathbb{E}[T_{THTH}] = \big(P^3(X=H)P^3(X=T)\big)^{-1} = 2^6$$

（2）TTHTT 有重叠 TT，TT 又有重叠 T，T 没有重叠；HTHTHT 有重叠 HTHT，HTHT 又有重叠 HT，HT 没有重叠，则

$$\mathbb{E}[T_{TTHTT}] = \big(P(X=H)P^4(X=T)\big)^{-1} + \big(P^2(X=T)\big)^{-1} + (P(X=T))^{-1} = 38$$

$$\mathbb{E}[T_{HTHTHT}] = \big(P^3(X=H)P^3(X=T)\big)^{-1} + \big(P^2(X=H)P^2(X=T)\big)^{-1} + (P(X=H)P(X=T))^{-1} = 84$$

6.（18 分）从数 $1, 2, \cdots, N (N \ge 2)$ 中随机取一个数作为 X_1 ，然后依次对每个 $n \ge 2$ ，从数 $1, 2, \cdots, X_{n-1}$ 中随机取一个数作为 X_n 。则 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为一个 Markov 链。

（1）试写出该 Markov 链的转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ ，

（2）对该 Markov 链进行状态分类（讨论分几个等价类，周期性，是否常返，是否正常返），

（3）极限 $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^{(n)}$ 是否存在？为什么？

解：（1）

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N}\end{pmatrix}$$

（2）每个状态都不互通，因此每个状态都是一个等价类，即 N 个等价类；每个状态都是非周期的；只有状态 1 是正常返的，其他状态都是非常返

（3）状态 1 是吸收壁，其他状态在足够长的时间内都会转移到状态 1

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^{(n)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

7.（附加题，10 分）某个保险公司对参保人的收费率在 r_1 和 r_0 之中交替 $(r_0<r_1)$ 。一个新的参保人开始时收费率为每个单位时间 r_1 ，当一个收费率为 r_1 的参保人在最近的 s 个单位时间内没有理赔，那么他的收费率变成单位时间 r_0 ，收费率保持在 r_0 直到作了一次理赔，这时收费率回转到 r_1 ，假定给定的一个参保人永远活着，而且按速率为 λ 的 Poisson 过程要求理赔。在很长一段时间内，求该参保人

（1）以收费率 r_i 付费的时间的比例 $P_i, i=0,1$

（2）在单位时间所付的平均金额。

解：（1）设当参保人按 r_1 付费时系统为开，每一次理赔作为一次更新，设 X 为两次理赔之间的时间

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{开}]&=\mathbb{E}[\min\{X,s\}]\\&=\int_0^s x\lambda e^{-\lambda x}dx+se^{-\lambda s}\\&=\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda s}\right)\end{aligned}$$

又

$$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{\lambda}$$

则

$$P_1=\frac{\mathbb{E}[\text{开}]}{\mathbb{E}[X]}=1-e^{-\lambda s}$$

$$P_0=1-P_1=e^{-\lambda s}$$

（2）单位时间所付长程平均金额为

$$r_0p_0+r_1p_1=r_1-\left(r_1-r_0\right)e^{-\lambda s}$$