20 实用随机过程期中

NULIOUS

1.（20 分）现有 m 个偶数和 n 个奇数，$m \geq 1, n \geq 1$。现随机地将这 $m+n$ 个数从左到右排成一行（位置编号分别为 $1, 2, \ldots, m+n$），记 W 为该序列中从左到右首次出现偶数的位置编号，求 $\mathbb{E}[W]$（若给出两种解法，可以另加 5 分）。

解一：用条件期望递推

记 m 个偶数和 n 个奇数的序列首次出现偶数的位置编号为 $W(m,n)$，对第一个数的奇偶性取条件

$$\mathbb{E}[W(m,n)] = \frac{m}{m+n} \cdot 1 + \frac{n}{m+n} \left(\mathbb{E}[W(m,n-1)] + 1 \right) = 1 + \frac{n}{m+n} \mathbb{E}[W(m,n-1)]$$

再由边界条件 $\mathbb{E}[W(m,0)] = 1$ 递推有

$$\mathbb{E}[W(m,n)] = \frac{m+n+1}{m+1}$$

解二：给 n 个奇数编号 $1, ..., n$，记

$$\mathbb{I}_k = \begin{cases} 1 & \text{第 k 个奇数在所有偶数前} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则 $\mathbb{I}_k$ 同分布，且一个奇数可以插空地放在每个偶数的两边，也就是有 $m+1$ 个位置可以选择，则

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_k] = P(\mathbb{I}_k = 1) = \frac{1}{m+1}$$

那么

$$\mathbb{E}[W(n,m)] = 1 + \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_k \right] = 1 + \frac{n}{m+1} = \frac{m+n+1}{m+1}$$

2. （20 分）假设一个系统有两个服务台，服务台 i 给顾客提供的服务时间服从参数 λ_i 的指数分布，$i = 1, 2$。采用先到先服务、后到排队的规则，当顾客 A 到达系统时，发现顾客 B 和 C 各自占据一个服务台，求顾客 A 在系统中滞留的期望时间。

解：利用指数分布的性质

$$X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1) \quad X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$$

则有

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

和

$$\min\{X_1, X_2\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

设顾客 B 与 C 的服务时长分别为 X_1 与 X_2，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\text{顾客 A 在系统中滞留的时间}\right] &= \mathbb{E}\left[\text{顾客 A 在系统中滞留的时间} \mid \text{B 比 C 先走}\right] P(\text{B 比 C 先走}) \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\text{顾客 A 在系统中滞留的时间} \mid \text{C 比 B 先走}\right] P(\text{C 比 B 先走}) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_1}\right)\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+\left(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\ &= \frac{3}{\lambda_1+\lambda_2}\end{aligned}$$

3. （24 分）一个元件易于受到外界的冲击的影响，冲击有两种类型。一型冲击按平均单位时间 2 次的强度发生，每个冲击将概率 1 地使得元件失效；二型冲击按平均单位时间 8 次的强度发生，每个冲击将概率 1/2 地使得元件失效。元件一旦失效，瞬间用同型元件更换，更换时间不计，两种冲击产生过程独立。记 $N(t)$ 为 $(0,t]$ 时间段元件失效的次数。

（1）所有的冲击发生规律可以用什么样的概率模型来描述？（要求详细描述）

（2）$\{N(t), t \geq 0\}$ 是什么样的概率模型？（要求详细描述）

（3）已知元件在 $(10,20]$ 时段失效 6 次，求时段 $(30,40]$ 一型冲击发生 2 次的概率。

（4）给定元件在 $(10,20]$ 时段失效 6 次，求该时段内一型和二型冲击期望发生的次数。

解：（1）I 型冲击到达的过程是速率为 2 的 Poisson 过程 $N_1'(t)$；II 型冲击到达的过程是速率为 8 的 Poisson 过程 $N_2'(t)$，且它们独立；由于 Poisson 过程的独立可加性，所有冲击到达的过程是速率为 10 的 Poisson 过程 $N'(t)$

（2）由分类 Poisson 过程，I 型冲击导致元件失效的过程是速率为 2 的 Poisson 过程 $N_1(t)$；II 型冲击导致元件失效的过程是速率为 4 的 Poisson 过程 $N_2(t)$，且它们独立；总失效数 $N(t)$ 是速率为 6 的 Poisson 过程

（3）由于独立增量性

$$N_1'(40)-N_1'(30) \mid N(20)-N(10)=6 \sim N_1'(40)-N_1'(30) \sim \mathrm{P}(20)$$

则

$$P(N_1'(40)-N_1'(30) \mid N(20)-N(10)=6) = P(N_1'(40)-N_1'(30)) = 200e^{-20}$$

（4）先证明一个结论

设 $X \sim \mathrm{P}(\lambda)\quad Y \sim \mathrm{P}(\mu)$ 且它们相互独立，则对 $Z = X+Y$ 有

$$X \mid Z=n \sim \mathrm{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \quad Y \mid Z=n \sim \mathrm{B}\left(n, \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$$

注意到

$$\begin{aligned}P(X=k \mid X=n) &= \frac{P(X=k, X=n)}{P(X=n)} \\ &= \frac{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\cdot\frac{\mu^{n-k}e^{-\mu}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda+\mu)^n e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

即可

对于本题，记 N 为 $(10,20]$ 时段总失效次数，N_1 为 $(10,20]$ 时段 I 型冲击导致的失效次数，N_2 为 $(10,20]$ 时段 II 型冲击导致的失效次数，则

$$N = N_1 + N_2 \quad N_1 \sim \mathrm{P}(20) \quad N_2 \sim \mathrm{P}(40)$$

最后有

$$\mathbb{E}[N_1 \mid N = 6] = 2 \quad \mathbb{E}[N_2 \mid N = 6] = 4$$

4.（16 分，每小题 8 分）某出租车公司的驾驶员可分为三类，第 i 类驾驶员每年发生的交通事故平均为 i 次，$i = 1,2,3$，这三类驾驶员在公司的人数占比分别为 1/2、1/3 和 1/6。现随机从该公司选择一名驾驶员，记 $N(t)$ 为该驾驶员在时段 $(0,t]$ 发生的交通事故。

（1）问 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是什么样的概率模型？（要求详细描述）

（2）给定 $N(10) = 4$，求该驾驶员属于第 1 类人员的概率。

解：（1）$\{N(t), t \geq 0\}$ 是条件 Poisson 过程，设 $N = 1,2,3$ 为驾驶员的类型，则 $N(t) \mid N = i$ 是速率为 i 的 Poisson 过程

（2）利用

$$P(N = i \mid N(t) = n) = \frac{P(N = i)P(N(t) = n \mid N = i)}{\sum\limits_j P(N = j)P(N(t) = n \mid N = j)}$$

有

$$\begin{aligned} P(N = 1 \mid N(10) = 4) &= \frac{\frac{1}{2}P(N(10) = 4 \mid N = 1)}{\frac{1}{2}P(N(10) = 4 \mid N = 1) + \frac{1}{3}P(N(10) = 4 \mid N = 2) + \frac{1}{6}P(N(10) = 4 \mid N = 3)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}e^{-10}10^4}{\frac{1}{2}e^{-10}10^4 + \frac{1}{3}e^{-20}20^4 + \frac{1}{6}e^{-30}30^4} \end{aligned}$$

5.（20 分，每小题 10 分）设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 1 的齐次 Poisson 过程，事件发生时刻序列记为 $\{S_n, n \geq 1\}$，求 $\mathbb{E}\left[\sum\limits_{k=1}^{N(t)} \log S_k\right]$。

解：设 $U_1, ..., U_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{U}(0,t)$，$(U_{(1)}, U_{(n)})$ 为其次序统计量，则对 $N(t) = n$ 取条件有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} \log S_k \mid N(t) = n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \log U_{(k)}\right]$$

注意有限求和号内可以任意换序，就有

$$\sum_{k=1}^{n} \log U_{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \log U_k$$

则

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \log U_{(k)}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \log U_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\log U_k\right]$$

另一方面

$$\mathbb{E}\left[\log U_k\right] = \int_0^t \frac{1}{t} \log x dx = \log t - 1$$

则有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} \log S_k \mid N(t) = n\right] = n(\log t - 1)$$

最后

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} \log S_k\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} \log S_k \mid N(t) = n\right]\right] = \mathbb{E}[N(t)](\log t - 1) = t(\log t - 1)$$