19 实用随机过程期中考试

$\mathscr{NULIOUS}$

1.（16 分）一个盒子中 $n+m$ 个小球，其中 n 个红球，m 个黑球．现依次不放回地从盒子中取球，以 X 记在首次取得黑球前取出的红球个数．求 $\mathbb{E}[X]$ ．

解一：用条件期望递推

记有 n 个红球和 m 个黑球的盒子首次取得黑球前取出的红球个数为 $X(n,m)$，对第一个球的颜色取条件

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(n,m)] &= \frac{n}{n+m}\left(\mathbb{E}[X(n-1,m)]+1\right)+\frac{m}{n+m}\cdot 0\\ &= \frac{n}{n+m}\left(\mathbb{E}[X(n-1,m)]+1\right)\end{aligned}$$

并且有边界条件

$$\mathbb{E}[X(0,m)]=0$$

递推可以得到

$$\mathbb{E}[X(n,m)]=\frac{n}{m+1}$$

解二：给 n 个红球编号 $1,...,n$，记

$$\mathbb{I}_k=\begin{cases}1 & \text{红球 k 在所有黑球前}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 $\mathbb{I}_k$ 同分布，且一个红球可以插空地放在每个黑球的两边，也就是有 $m+1$ 个位置可以选择，则

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_k]=P(\mathbb{I}_k=1)=\frac{1}{m+1}$$

那么

$$\mathbb{E}[X(n,m)]=\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathbb{I}_k\right]=\frac{n}{m+1}$$

2.（36 分）一个商店在上午 8：00 开门，下午 5：00 关门．从 8：00 到 10：00 顾客以每小时 4 人速率到达，从 10：00 到 12：00 顾客以每小时 8 人速率到达，从 12：00 到下午 2：00 顾客到达率稳定地从 12：00 的每小时 8 人增加到下午 2：00 的每小时 10 人，而在下午 2：00 到 5：00 顾客到达率稳定地从下午 2：00 的每小时 10 人下降到下午 5：00 的每小时 4 人。

（1）问顾客的到达规律可以用什么样的概率模型来描述？（要求详细描述该模型）

（2）求上午 8：30 到 9：00 之间没有顾客到达的概率．

（3）求上午 8：30 到 9：30 之间有 3 位顾客到达，而下午 1：30 至 2：30 之间有 6 位顾客到达的概率．
（4）求这家商店平均每天到达的顺客数．
（5）已知某天上午 8：00 到 12：00 之间有 20 位顾客到达，求该天下午 1：00 至 2：00 之间有 10 位顾客到达的概率．
（6）假定每位到达的顾客以概率 0.6 为男性，以概率 0.4 为女性．求某天上午 8：00 到 10：00 之间有 5 位男顾客到达，且上午 10：00 至 12：00 之间有 10 位女顾客到达的概率．
解：（1）这是一个非齐次 Poisson 过程 $N(t)$，记上午 8 点为 $t=0$，则强度函数为

$$\lambda(t)=\begin{cases}4 & 0\le t\le 2\\ 8 & 8<t\le 4\\ t+4 & 4<t\le 6\\ -2t+22 & 6<t\le 9\end{cases}$$

（2）$N(1)-N(0.5)\sim \mathrm{P}(2)$，则

$$P(N(1)-N(0.5)=0)=e^{-2}$$

（3）由独立增量性，这两个事件是独立的，又

$$\begin{aligned}N(6.5)-N(5.5)&\sim \mathrm{P}\left(\int_{5.5}^{6.5}\lambda(t)dt\right)\\ &=\mathrm{P}(9.625)\\ N(1.5)-N(0.5)&\sim \mathrm{P}(4)\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}P(N(1.5)-N(0.5)=3,N(6.5)-N(5.5)=6)&=P(N(1.5)-N(0.5)=3)P(N(6.5)-N(5.5)=6)\\ &=\frac{4^3e^{-4}}{3!}\cdot\frac{9.625^6e^{-9.625}}{6!}\\ &=e^{-13.625}\frac{2(9.625)^6}{135}\end{aligned}$$

（4）$N(9)\sim \mathrm{P}\left(\int_0^9\lambda(t)dt\right)=\mathrm{P}(63)$，则

$$\mathbb{E}[N(9)]=63$$

（5）由独立增量性，两个事件独立，又

$$N(6)-N(5)\sim \mathrm{P}\left(\int_5^6\lambda(t)dt\right)=\mathrm{P}(9.5)$$

最后

$$\text{所求}=P(N(6)-N(5)=10)=\frac{e^{-9.5}(9.5)^{10}}{10!}$$

（6）由分类 Poisson 过程，两事件独立，并记 X_1 为前一事件，X_2 为后一事件，则

$$N(2)\sim \mathrm{P}(8)\quad X_1\sim \mathrm{P}(4.8)$$

$$N(4)-N(2)\sim \mathrm{P}(16)\quad X_2\sim \mathrm{P}(6.4)$$

最后

$$
\begin{aligned}
P(X_1=5,X_2=10) &= P(X_1=5)P(X_2=10)\\
&= \frac{(4.8)^5(6.4)^10}{5!10!}e^{-11.2}
\end{aligned}
$$

3.（14 分）设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列，共同分布为参数 λ 的指数分布，N 为几何分布随机变量，独立于 $\{X_n, n\geq 1\}$ ，其中 $\mathrm{P}(N=n)=p(1-p)^{n-1}$ ，$n\geq 1$ ．试基于 Poisson 过程的相关理论求 $S=\sum\limits_{k=1}^{N}X_k$ 的分布．

解：考虑几何分布的意义：第一次投掷出正面的硬币所需的总投掷数

设 X_k 为每次投掷的时间间隔，则 $S=\sum\limits_{k=1}^{N}X_k$ 即为直到第一次投掷出正面所需的总时间

将 Poisson 过程分类，则投出正面的过程 $N_1(t)$ 速率为 λp, 投出反面的过程 $N_2(t)$ 速率为 $\lambda(1-p)$

那么 S 就是 $N_1(t)$ 中第一个时间间隔，即

$$
S\sim \mathrm{Exp}(\lambda p)
$$

4.（14 分）设 $\{N(t), t\geq 0\}$ 是强度 $\lambda=10$ 的齐次 Poisson 过程，以 S_i 记该过程的第 i 个事件发生时刻，求 $\mathbb{E}\left[S_i \mid N(t)=n\right]$ ．

解：i.$i\leq n$ 时

$$
\mathbb{E}[S_i \mid N(t)=n]=\mathbb{E}[U_{(i)}]
$$

这里 $U_{(i)}$ 为 $U_1,...,U_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{U}(0,t)$ 的次序统计量

则

$$
\mathbb{E}[S_i \mid N(t)=n]=\mathbb{E}[U_{(i)}]=\frac{i}{n+1}t
$$

RK：

$$
\mathbb{E}[U_{(i)}]=\int_0^t \binom{n}{1}\binom{n-1}{i-1}x\left(\frac{x}{t}\right)^{i-1}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-i}\frac{1}{t}dx=\frac{i}{n+1}t
$$

ii.$i<n$ 时

$$
\mathbb{E}[S_i \mid N(t)=n]=\mathbb{E}[t+X_{n+1}+\cdots+X_i]
$$

其中 X_i 表示时间间隔，且

$$
X_{n+1},...,X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)\sim \mathrm{Exp}(10)
$$

则

$$
\mathbb{E}[S_i \mid N(t)=n]=t+\frac{i-n}{10}
$$

5.（20 分）观察一列独立同分布的离散随机变量 $W_1, W_2, \ldots$，等待花样 ”010101” 的发生．设

$$\mathrm{P}\left(W_1=0\right)=\frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}\left(W_1=1\right)=\frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}\left(W_1=2\right)=\mathrm{P}\left(W_1=3\right)=\frac{1}{8}$$

求等待花样 ”010101” 首次发生所需要的期望时间．

解：花样问题

010101 有重叠 0101，0101 有重叠 01，01 没有重叠，则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{010101}] &= P(010101)^{-1} + P(0101)^{-1} + P(01)^{-1} \\
&= 4^3 2^3 + 4^2 2^2 + 4 \cdot 2 \\
&= 584
\end{aligned}$$