# 21 线性代数 B2 期末

*NULIOUS*

一．填空

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$．则 $A$ 的 Jordan 标准形是 ______，$A$ 的最小多项式是 ______，$A$ 的奇异值是 ______．$\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}:x\to Ax$ 的二维不变子空间为 ______

解：$\operatorname{diag}(J_2(1),1)\,;(x-1)^2;1,\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$；$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ 或 $\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

显然特征值为 $\lambda=1$（三重）

又

$$r(A-I)=1\quad r(A-I)^2=0$$

则

$$J=\operatorname{diag}(J_2(1),1)$$

由有理标准型知识知道最小多项式为

$$d_A(x)=(x-1)^2$$

另一方面

$$AA^T=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

其特征值为 $1,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

则 $A$ 的奇异值为 $1,\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

$\mathcal{A}$ 的二维不变子空间必然包含其特征子空间，具体证明请仿照 23 年期末第四题（3）

逐个检验二维线性空间就有 $\mathcal{A}$ 的二维不变子空间

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \text{或} \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

2．在四维欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中，$W$ 是由 $\alpha_1=(1,0,1,0)$ 与 $\alpha_2=(0,1,0,1)$ 生成的子空间。向量 $\alpha=(1,1,-1,-1)$ 在 $W$ 中的正交投影向量 $\beta$（即满足 $\alpha-\beta\in W^{\perp}$ 且在 $W$ 中的向量 $\beta$ ）是 ______

解：$(0,0,0,0)$

先标准正交化 $\alpha_1, \alpha_2$ ，注意其已经正交，只需单位化
又注意到 $\alpha$ 实际上已经正交于 $\alpha_1, \alpha_2$
则

$$\beta = (0,0,0,0)$$

**RK**：补充不同内积定义下的酉空间上求正交投影的方法：
（1）$(u,v) = u^*Gv$ 时，这里 $G$ 为复正定阵，给定 $W$ 一组标准正交基 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 对任意 $\alpha \in V, \alpha$ 在 $W$ 上的正交投影存在唯一且

$$P\alpha = (\alpha_1,\alpha)\,\alpha_1 + (\alpha_2,\alpha)\,\alpha_2 + \ldots + (\alpha_n,\alpha)\,\alpha_n$$

（2）$(u,v) = uGv^*$ 时，这里 $G$ 为复正定阵，给定 $W$ 一组标准正交基 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 对任意 $\alpha \in V, \alpha$ 在 $W$ 上的正交投影存在唯一且

$$P\alpha = (\alpha,\alpha_1)\,\alpha_1 + (\alpha,\alpha_2)\,\alpha_2 + \ldots + (\alpha,\alpha_n)\,\alpha_n$$

3．复方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$ 的酉相似标准形为 ______
解：$\mathrm{diag}(1,1,-2)$
$A$ 有特征值 $\lambda_1 = 1$（二重）$\lambda_2 = -2$
又

$$\mathrm{r}(A-I) = 1$$

则

$$J = \mathrm{diag}(1,1,-2)$$

二．给定数域 $\mathbb{F}$ 的 $n$ 阶方阵 $A$ ，定义 $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}: X \to AX - XA$. 如果 $A$ 可以对角化，$\mathcal{A}$ 是否也可以对角化？请说明理由。
证：可以对角化
$A$ 可以对角化，则存在可逆阵 $P$ 使得

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right)$$

我们考虑构造一组基使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下为对角阵，注意一组基经过可逆线性变换之后还是一组基
先取 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 自然基

$$E = \{E_{ij} \mid 1 \le i,j \le n\}$$

构造

$$M = \{X_{ij} \mid 1 \le i,j \le n\}$$

其中 $X_{ij}=PE_{ij}P^{-1}$
则

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(X_{ij}) &= AX_{ij}-X_{ij}A\\ &= PDP^{-1}PE_{ij}P^{-1}-PE_{ij}P^{-1}PDP^{-1}\\ &= P(DE_{ij}-E_{ij}D)P^{-1}\\ &= P(\lambda_i E_{ij}-E_{ij}\lambda_j)P^{-1}\\ &= (\lambda_i-\lambda_j)X_{ij}\end{aligned}$$

这就说明了 $\mathcal{A}$ 在 $M=\{X_{ij}\mid 1\leq i,j\leq n\}$ 下的矩阵为对角阵

三．设 $A$ 为 $n$ 阶复方阵，$k$ 为正整数。用 Jordan 标准形证明：

$$\operatorname{rank}A^k-\operatorname{rank}A^{k+1}\geq\operatorname{rank}A^{k+1}-\operatorname{rank}A^{k+2}$$

证：相似的矩阵秩相同，不妨考虑 Jordan 标准型
首先可逆阵自然满足等号成立（特征值均非零）
或考虑 $\lambda\neq 0$ 时有

$$r(J(\lambda))=r\left(J^k(\lambda)\right)$$

再考虑特征值为 0 的 Jordan 块：
一阶 Jordan 块有

$$J_1^k(0)=J_1(0)$$

秩不变
$J_n(0)=N_n$ 有性质

$$r\left(N_n^k\right)=\begin{cases}n-k,k<n\\0,k\geq n\end{cases}$$

即

$$r\left(N_n^k\right)-r\left(N_n^{k+1}\right)=\begin{cases}1, & k<n\\ 0, & k\geq n\end{cases}$$

综合以上结果就有 $\operatorname{rank}A^k-\operatorname{rank}A^{k+1}\geq\operatorname{rank}A^{k+1}-\operatorname{rank}A^{k+2}$

四．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$
1．求矩阵 $A$ 的正交相似标准形.
2．设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}:x\to Ax\in\mathbb{R}^3$ ．证明：$\mathcal{A}$ 是绕过原点的直线 $l$ 的旋转变换，并求变换的轴 $l$ 及旋转角度 $\theta$
解：1．$\det(A)=1$
有特征值

$$\lambda_1=1\quad\lambda_2=-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i\quad\lambda_3=-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}i$$

那么其正交相似标准型为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2．先给出一般性方法

对三阶正交阵 $A$ 且 $\det(A)=1$ ，存在正交阵 $T$ 使得

$$T^TAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

即其正交相似标准型为旋转变换

旋转轴为特征值 1 对应特征向量的所在直线

旋转角有

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(A)-1}{2}$$

由 $A$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 相似立得

对本题来说

$\lambda_1 = 1$ 对应特征向量为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

旋转轴为直线

$$l : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

这里 $t \in \mathbb{R}$

旋转角为

$$\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$$

五．设 $\mathcal{A}$ 是有限维欧式空间 $V$ 上的线性变换。证明：

$$V = \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$$

证：本题题目有误，反例可以由 23 年期末第三题给出

如：

$$\mathcal{A} : x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x . x \in \mathbb{R}^2$$

则

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker\mathcal{A}$$

因为

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

则 $\operatorname{Im}\mathcal{A}+\ker\mathcal{A}$ 不是直和

六．设 $A,B$ 为同阶实对称方阵，且 $A\geq B\geq 0$（即 $A\geq 0,B\geq 0$ 且 $B-A\geq 0$ ），证明：$\sqrt{A}\geq\sqrt{B}$

证：

证法 1：$\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 仍然是对称阵，有正交相似标准型，即存在正交矩阵 $P$ ，使得

$$P^T(\sqrt{A}-\sqrt{B})P=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

设 $P^T\sqrt{A}P=(a_{ij}),P^T\sqrt{B}P=(b_{ij})$ ．于是

$$a_{ij}=b_{ij},i\neq j;a_{ii}-b_{ii}=\lambda_i,1\leq i\leq n$$

设

$$C=(c_{ij})=P^T(A-B)P=(a_{ij})^2-(b_{ij})^2$$

则

$$c_{ii}=\sum_{j=1}^n a_{ij}^2-\sum_{j=1}^n b_{ij}^2=\lambda_i\left(a_{ii}+b_{ii}\right)$$

因为

$$P^T\sqrt{A}P,P^T\sqrt{B}P\geq 0,C\geq 0$$

所以

$$a_{ii},b_{ii}\geq 0,\lambda_i\left(a_{ii}+b_{ii}\right)\geq 0,1\leq i\leq n$$

如果 $a_{ii}>0$ ，则有 $\lambda_i\geq 0$ ，否则 $a_{ii}=b_{ii}=\lambda_i=0.$

证法 2：设 $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 特征值 $\lambda$ 的特征向量为 $\alpha$ ，则

$$(\sqrt{A}-\sqrt{B})\alpha=\lambda\alpha$$

即

$$\sqrt{A}\alpha=(\sqrt{B}+\lambda I)\alpha,(\sqrt{A}-\lambda I)\alpha=\sqrt{B}\alpha$$

左乘转置就可以得到

$$\alpha^T(A-B)\alpha=2\lambda\alpha^T\sqrt{B}\alpha+\lambda^2\alpha^T\alpha$$
$$\alpha^T(A-B)\alpha=2\lambda\alpha^T\sqrt{A}\alpha-\lambda^2\alpha^T\alpha$$

因此有

$$\alpha^T(A-B)\alpha=\lambda\alpha^T(\sqrt{A}+\sqrt{B})\alpha$$

如果 $\alpha^T(\sqrt{A}+\sqrt{B})\alpha>0$ ，则有 $\lambda\geq 0$ ．否则 $\alpha^T\sqrt{A}\alpha=0,\alpha^T\sqrt{B}\alpha=0$ ．根据定义也有 $\alpha^TA\alpha=0,\alpha^TB\alpha=0$ ．由上式可以得到 $\lambda=0$ ．综上所述 $\lambda\geq 0$ ．

证法 3：设有相合规范型

$$P^T(\sqrt{A}+\sqrt{B})P=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

并设

$$P^T\sqrt{A}P=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, P^T\sqrt{B}P=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

则

$$A_1+B_1=I, A_2+B_2=A_3+B_3=O=A_4+B_4$$

因为 $A_4, B_4$ 半正定，所以 $A_4=B_4=O$ 。再根据 22 期末第五题可以得到，$A_2=A_3=B_2=B_3=O$ 。存在 $r$ 阶正交矩阵 $P_1$ ，使得 $P_1^T A_1 P_2=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ ，取 $P_2=P\operatorname{diag}(P_1, I_{n-r})$ ，有

$$P_2^T\sqrt{A}P_2=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r,O), P_2^T\sqrt{B}P_2=\operatorname{diag}(1-\lambda_1,\ldots,1-\lambda_r,O)$$

所以

$$P_2^T(\sqrt{A}-\sqrt{B})P_2=\operatorname{diag}(2\lambda_1-1,\ldots,2\lambda_r-1,0)$$

设 $C=\sqrt{A}+\sqrt{B}$

$$\begin{aligned} P_2^T(A-B)P_2 =& P_2^T(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})P_2+P_2^T(\sqrt{B}\sqrt{A}-\sqrt{A}\sqrt{B})P_2 \\ =& \operatorname{diag}(2\lambda_1-1,\ldots,2\lambda_r-1,O)\, P_2^{-1}P_2^{-T}\operatorname{diag}(I_r,O)+P_2^T(\sqrt{B}\sqrt{A}-\sqrt{A}\sqrt{B})P_2 \end{aligned}$$

第二个式子是反对称矩阵，所以对角元素为 $0.P_2^{-1}P_2^{-T}$ 是正定矩阵，所以对角元素大于 0 ，根据 $A-B$ 是半正定的，所以上式对角元素

$$2\lambda_i-1\geq 0$$

因此 $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 是半正定矩阵。