# 21 实用随机过程期中

*NULIOUS*

1.（14 分）设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 和 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 是两个独立同分布的随机变量序列，满足 $\mathbb{E}[X_1] = \mu_1, \mathbb{E}[Y_1] = \mu_2$ ，再设 $N \sim \text{Poission}(\lambda)$ 且独立于 $\{X_n, Y_n, n \geq 1\}$ ，求 $\text{Cov}\left(\sum\limits_{i=1}^{N} X_i, \sum\limits_{j=1}^{N} Y_j\right)$ 。

解：$N$ 与 $\{X_n, n \geq 1\}$ 和 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 独立，则 $N$ 为停时，由 $Wald$ 方程有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_i] = \lambda\mu_1$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i\right] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y_i] = \lambda\mu_2$$

再由独立同分布性和 $Wald$ 方程有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N^2} X_i Y_i\right] \\ &= \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X_i Y_i] \\ &= \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[Y_i] \\ &= (\lambda^2 + \lambda)\mu_1\mu_2\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i, \sum_{j=1}^{N} Y_j\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i\right] \\ &= \lambda\mu_1\mu_2\end{aligned}$$

2.（总 16 分，每小题 8 分）设 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，$X_k \sim \text{Exp}(\lambda_k), k = 1, \ldots, n$ .

（1）求 $\mathrm{P}\left(X_i = \min\limits_{1 \leq j \leq n} X_j\right)$ ；

（2）求 $\mathrm{P}\left(X_i = \min\limits_{1 \leq j \leq n} X_j \mid \min\limits_{1 \leq k \leq n} X_k > t\right)$ ，其中 $t > 0$ .

解：（1）

$$\mathrm{P}\left(X_i = \min_{1 \leq j \leq n} X_j\right) = \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j}$$

以 $X_1$ 为例证明这个结论，首先

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_1=\min_{1\le j\le n}X_j \mid X_1=t\right) &= \prod_{j=2}^{n}\mathrm{P}(X_j>t) \\
&= \prod_{j=2}^{n} e^{-\lambda_j t} \\
&= e^{-t\sum\limits_{i=2}^{n}\lambda_i}
\end{aligned}
$$

利用全概率公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_1=\min_{1\le j\le n}X_j\right) &= \int_0^{+\infty}\mathrm{P}\left(X_1=\min_{1\le j\le n}X_j \mid X_1=t\right) f_{X_1}(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t\sum\limits_{i=2}^{n}\lambda_i}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}dt \\
&= \lambda_1\int_0^{+\infty} e^{-t\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}dt
\end{aligned}
$$

注意到 $\mathrm{Exp}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$ 的密度的积分为 1

$$
\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)e^{-t\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}dt=1
$$

最后

$$
\mathrm{P}\left(X_i=\min_{1\le j\le n}X_j\right)=\frac{\lambda_1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j}
$$

上面过程中把 $X_1$ 换成 $X_i$，结论相似地成立

（2）由指数分布的无记忆性

$$
\mathrm{P}\left(X_i>s+t \mid X_i>t\right)=\mathrm{P}(X_i>s)
$$

令 $Y_i=X_i-t \mid X>t$ ，则 $Y_i\sim\mathrm{Exp}(\lambda_i)$

最后

$$
\mathrm{P}\left(X_i=\min_{1\le j\le n}X_j \mid \min_{1\le k\le n}X_k>t\right)=\mathrm{P}\left(Y_i=\min_{1\le j\le n}Y_j\right)=\frac{\lambda_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j}
$$

3.（16 分）设 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是强度 $\lambda=2$ 的齐次 Poisson 过程，第 $i$ 个事件发生时刻记为 $S_i,i\ge 1$ . 求

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}Z_i\max\{10-S_i,0\}\right],
$$

其中 $\{Z_n,n\ge 1\}$ iid $\sim N(5,10)$ ，该序列独立于过程 $\{N(t),t\ge 0\}$ .

解：注意到

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}Z_i\max\{10-S_i,0\}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(10)}Z_i(10-S_i)\right]
$$

所以只需要考虑 $S_i < 10$ 的事件即可

对 $N(10)=n$ 取条件，利用独立性，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(10)} Z_i(10-S_i)\mid N(10)=n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(10)} Z_i(10-U_{(i)})\right]\\ &= \mathbb{E}[Z_1]\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(10-U_{(i)})\right]\\ &= 5\cdot 5n\\ &= 25n\end{aligned}$$

则有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \max\{10-S_i,0\}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(10)} Z_i(10-S_i)\mid N(10)=n\right]\right] = 25\mathbb{E}[N(10)] = 500$$

4.（16 分，第一小题 10 分，第二小题 6 分）假设系统故障的发生规律可以用齐次 Poisson 过程来描述，单位时间平均发生 12 次故障，每次故障都要造成损失，分别以概率 1/2 ，1/3 和 1/6 损失 \$1, \$5 和 \$10 . 设 $X(t)$ 表示到时刻 $t$ 系统因故障累计造成的损失大小.

（1）求 $\mathrm{P}(X(t)=11)$ ；

（2）求 $\mathrm{Cov}(X(t), X(t+5))$ .

解：（1）$X(t)=11$ 有以下情况：

i.1 次 10+1 次 1

ii.2 次 5+1 次 1

iii.1 次 5+6 次 1

iv.11 次 1

则由全概率公式

$$\begin{aligned}P(X(t)=11) = P(N(t)=2)\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + P(N(t)=3)\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2\\ + P(N(t)=7)\binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right) + P(N(t)=11)\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\end{aligned}$$

最后代入 $N(t)\sim \mathrm{P}(\lambda t)$ 即可

（2）证明一个更一般的结论

对于复合 Poisson 过程 $X(t)=\sum\limits_{i=1}^{N(t)} X_i$，其中 $N(t)$ 为 Poisson 过程，其协方差为

$$\mathrm{Cov}\left(X(t), X(s)\right) = Var(X(\min\{t,s\})) = \lambda \min\{t,s\}\mathbb{E}[X_i^2]$$

下面设 $s\le t$，由协方差的双线性性

$$\mathrm{Cov}\left(X(t), X(s)\right) = \mathrm{Cov}(X(s), X(S)) + \mathrm{Cov}(X(t)-X(s), X(s))$$

又由独立增量性

$$\mathrm{Cov}(X(t)-X(s), X(s)) = 0$$

则

$$\text{Cov}\left(X(t), X(s)\right) = \text{Var}(X(s)) = \lambda s \mathbb{E}[X_i^2]$$

对于本题

$$\text{Cov}(X(t), X(t+5)) = 306t$$

5.（总 22 分，前三小题每题 5 分，最后一小题 7 分）假设一个元件于时刻 0 开始投入使用，该元件易于受到外界的冲击，在前 5 个小时内冲击以每小时 4 个的泊松速率到达，在随后的时间段中冲击是每小时 2 个的泊松速率到达。泊松速率到达是指不可能有两个或多个冲击同时到达。

（1）问冲击到达可以用什么样的过程来描述？

（2）求时间段 $(2,4]$ 有 1 个冲击发生的概率.

（3）求时间段 $(4,6]$ 有 1 个冲击发生的概率.

（4）求第三个冲击发生时刻 $S_3$ 的概率密度函数.

解：（1）这是一个非齐次的 Poisson 过程

有强度函数

$$\lambda(t) = \begin{cases} 4 & t \le 5 \\ 2 & t > 5 \end{cases}$$

（2）首先

$$N(4) - N(2) \sim \text{P}(8)$$

则

$$P(N(4) - N(2) = 1) = 8e^{-8}$$

（3）分成两段，记 $X_1 = N(5) - N(4)$ 和 $X_2 = N(6) - N(5)$，则

$$X_1 \sim \text{P}(4) \quad X_2 \sim \text{P}(2)$$

由全概率公式和独立增量性

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 1) &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) \\ &= 6e^{-6} \end{aligned}$$

（4）设 $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$，则 $N(t) \sim \text{P}(m(t))$

则

$$\begin{aligned} f_{S_3}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{P\left(S_3 \in (t, t+h)\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{P(N(t) = 2)P(N(t+h) - N(t) = 1)}{h} \\ &= \frac{\frac{m^2(t)}{2} e^{-m(t)} \lambda(t) h}{h} \\ &= \begin{cases} 32t^2 e^{-4t} & t \le 5 \\ (2t+10)^2 e^{-(2t+10)} & t > 5 \end{cases} \end{aligned}$$

6.（16 分）设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的非负随机变量序列，共同的分布具有概率密度函数 $f(x), M \sim \text{Poisson}(\lambda_0), \lambda_0 > 0$ ，且独立于 $\{X_n, n \geq 1\}$ ，定义

$$N(t) = \#\{k : X_k \leq t, k \leq M\}, \quad t \geq 0,$$

证明 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是非齐次 Poisson 过程，其强度函数为 $\lambda(t) = \lambda_0 f(t)$ .
解：先说明一下 $N(t)$ 是怎么构造的：随机变量 $M$ 取定一个值 $m$ 后，对 $\forall k \leq m$ 检验条件 $X_k \leq t$ 是否成立，$N(t)$ 就是满足上式条件的 $X_k$ 的数量
$N(t)$ 的独立增量性由 $X_n$ 独立同分布给出，下面证明强度函数为 $\lambda(t) = \lambda_0 f(t)$
首先

$$N(t+s) - N(s) = \#\{k : s < X_k \leq s+t, k \leq M\}$$

则在给定 $M = m$ 的条件下有

$$N(t+s) - N(s) \mid M = m \sim \mathrm{B}(m, p)$$

其中 $p = P(s < X \leq t+s) = \int_s^{t+s} f(x)dx$
由全概率公式

$$\begin{aligned}
P(N(t+s) - N(s) = k) &= \sum_{m=k}^{\infty} P(N(t+s) - N(s) = k \mid M = m) P(M = m) \\
&= \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \frac{\lambda_0^m e^{-\lambda_0}}{m!} \\
&= e^{-\lambda_0} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k}{k} p^k \frac{(1-p)^i \lambda_0^i}{(i+k)!} \cdot \lambda_0^k \\
&= e^{-\lambda_0} \frac{(\lambda_0 p)^k}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(\lambda_0(1-p))^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda_0} \frac{(\lambda_0 p)^k}{k!} \cdot e^{\lambda_0(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda_0 p)^k}{k!} e^{-\lambda_0 p}
\end{aligned}$$

即

$$N(t+s) - N(s) \sim \mathrm{P}(\lambda_0 p)$$

注意

$$p = \int_s^{t+s} f(x)dx$$

则

$$N(t+s) - N(s) \sim \mathrm{P}\left(\int_s^{t+s} \lambda_0 f(x)dx\right)$$

这就说明了强度函数为 $\lambda(t) = \lambda_0 f(t)$