24 线性代数 B2 期末

$\mathscr{NULIOUS}$

1．简述实对称正定矩阵 A 的 5 个等价条件

（1）正惯性指数等于其阶数

（2）$0 \neq x \in \mathbb{R}^n, x^T A x > 0$

（3）A 的特征值均为正

（4）存在实对称正定方阵 B ，使得 $A = B^2$

（5）存在可逆方阵 P ，使得 $A = P^T P$

（6）A 的所有主子式为正

（7）A 的所有顺序主子式为正

2. 证明酉空间的极化恒等式 (10 分)

$$(\beta, \alpha) = \frac{1}{4}\left(|\alpha+\beta|^2 - |\alpha-\beta|^2 + i|\alpha+i\beta|^2 - i|\alpha-i\beta|^2\right)$$

这里内积定义为 $(\alpha, \beta) = \alpha^* G \beta$，$G$ 为复正定阵。

证：等式右边一一展开即可，注意共轭线性性即可。

对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$ 及 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ 有

$$(\lambda\alpha + \mu\beta, \gamma) = \bar{\lambda}(\alpha, \gamma) + \bar{\mu}(\beta, \gamma), \quad (\gamma, \lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda(\gamma, \alpha) + \mu(\gamma, \beta)$$

有

$$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha, \alpha) + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) + (\beta, \beta)$$

$$|\alpha-\beta|^2 = (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) - (\alpha, \beta) - (\beta, \alpha)$$

$$|\alpha+i\beta|^2 = (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + i(\alpha, \beta) - i(\beta, \alpha)$$

$$|\alpha-i\beta|^2 = (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) - i(\alpha, \beta) + i(\beta, \alpha)$$

逐个代入即得结果。

3. 计算（10 分）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的奇异值分解的具体形式。

解：

先给出一般化方法：
对于一个秩为 r 的矩阵 $A_{m\times n}$，必存在 $m\times m$ 的正交矩阵 $U_{m\times m}$，$n\times n$ 的正交矩阵 $V_{n\times n}$，$m\times n$ 的矩阵 $\Sigma_{m\times n}$，使得

$$A_{m\times n}=U_{m\times m}\Sigma_{m\times n}V_{n\times n}^T=U_{m\times m}\begin{pmatrix}D_{r\times r} & O\\ O & O\end{pmatrix}_{m\times n}V_{n\times n}^T$$

其中，

$$D_{r\times r}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_r}\end{pmatrix}_{r\times r}$$

$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r>0$ 为 A^TA 的 r 个非零特征值（从大到小排列）
第一步：求出 $A_{m\times n}^TA_{m\times n}$（一般我们先求阶数小的）的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\lambda_{r+1}=0,\cdots,\lambda_n=0$（并按照从大到小排列）和对应的**标准正交**的特征向量 $v_1,v_2,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n$
第二步：取标准正交的特征向量构成正交矩阵

$$V_{n\times n}=(v_1,v_2,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n)_{n\times n}$$

取前 r 个奇异值，即非零特征值**开根号** $\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_r}$，构成对角矩阵

$$D_{r\times r}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_r}\end{pmatrix}_{r\times r}$$

添加额外的 0 组成 $m\times n$ 的矩阵

$$\Sigma_{m\times n}=\begin{pmatrix}D_{r\times r} & O\\ O & O\end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & & O\\ & \sqrt{\lambda_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sqrt{\lambda_r} & \\ O & & & & O\end{pmatrix}_{m\times n}$$

第三步：构成前 r 个标准正交向量 $u_1,u_2,\cdots,u_r$，其中 $\boldsymbol{u_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}Av_i}, i=1,2,\cdots,r$
第四步：按照标准正交基扩充的方法，将 $u_1,u_2,\cdots,u_r$ 扩充为 m 维向量空间 $\mathbb{R}^m$ 的标准正交基 $u_1,u_2,\cdots,u_r,b_1,\cdots,b_{m-r}$，组成正交矩阵

$$U_{m\times m}=(u_1,u_2,\cdots,u_r,b_1,\cdots,b_{m-r})_{m\times m}$$

最后注意转置 $V_{n\times n}^T$ 即可。
对本题我们有

$$A^TA=\begin{pmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{pmatrix}$$

有特征值 $15 \pm \sqrt{221}$，那么奇异值为 $\sqrt{15 \pm \sqrt{221}}$。

$$\lambda = 15 + \sqrt{221} \quad \text{有特征向量} \quad \begin{pmatrix} -10 + \sqrt{221} \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 15 - \sqrt{221} \quad \text{有特征向量} \quad \begin{pmatrix} -10 - \sqrt{221} \\ 11 \end{pmatrix}$$

注意到对称阵的不同特征值对应的特征向量正交，我们就得到了

$$V = \begin{pmatrix} \frac{-10+\sqrt{211}}{\sqrt{442}-20\sqrt{221}} & \frac{-10-\sqrt{211}}{\sqrt{442}+20\sqrt{221}} \\ \frac{11}{\sqrt{442}-20\sqrt{221}} & \frac{11}{\sqrt{442}+20\sqrt{221}} \end{pmatrix}$$

并有

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{15+\sqrt{221}} & 0 \\ 0 & \sqrt{15-\sqrt{221}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

进而

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{221}}{\sqrt{442-10\sqrt{221}}} & \frac{-5-\sqrt{221}}{\sqrt{442+10\sqrt{221}}} & 0 \\ \frac{14}{\sqrt{442-10\sqrt{221}}} & \frac{14}{\sqrt{442+10\sqrt{221}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.A 为一个 $n \times n$ 的矩阵，证明 $\dim F[A] = n$ 当且仅当最小多项式等于特征多项式。

证：书上定理 3.5.10：向量组 $\{I_n, A, \cdots, A^{d-1}\}$ 是线性空间 $F[A]$ 的一组基。

（证：只需证明 $\{I_n, A, \cdots, A^{k-1}\}$ 线性无关即可。否则，设 λ_i 不全为 0 使得 $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i A^i = 0$。令 $g(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x^i$，则 $g(x)$ 是次数 $\leq k-1$ 的多项式。对于任意 $f(x) \in F[x]$，根据多项式的带余除法，$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$，其中 $\deg(r) < \deg(g) \leq k-1$。故 $f(A) = q(A)g(A) + r(A) = r(A)$。这说明 $f(A)$ 都是 $\{I_n, \cdots, A^{k-2}\}$ 的线性组合，与 $\dim F[A] = k$ 矛盾。）

本题是这个定理的直接推论。有 $\dim F[A] = \deg d_A(x)$，再由 Cayley-Hamilton 定理 $d_A(x) | \varphi_A(x)$ 以及 $\deg \varphi_A(x) = n$，且 $d_A(x), \varphi_A(x)$ 均为首一，就得到本题结果。

5. 设矩阵 $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 K^{1958} 和 K^{2025}（需要化简）（10 分）

解一：注意到 $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ 为旋转变换对应方阵的常数倍

则

$$K^n = 2^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4} \\ -\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$$

进而

$$K^{1958} = 2^{979} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^{2025} = 2^{1012} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

解二：考虑 Jordan 标准型

$$\lambda = 1+i \quad \text{有特征向量} \quad \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1-i \quad \text{有特征向量} \quad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

那么 $P^{-1}KP = J$ 其中

$$J = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

处理 J 的 n 次幂我们有两种方法：

- 法一：$1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$，$1-i = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$，那么 $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{in\frac{\pi}{4}}$，$(1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{in\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$
- 法二：$(1+i)^2 = 2i$，$(1-i)^2 = -2i$，$i^4 = 1$

同样得到 $K^{1958} = 2^{979}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $K^{2025} = 2^{1012}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. 判断正误，错误的举出反例，正确的证明之（10 分）

（1）A^2 规范，A 规范。

（2）A 与 AA^T 交换，A 规范。

解：

（1）错误，反例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = 0$$

（2）正确

证一：设 $B = AA^T - A^TA$。

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(BB^T\right) &= \operatorname{tr}\left(\left(AA^T - A^TA\right)^2\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\underline{AA^TAA^T} - AA^TA^TA - \underline{A^TAAA^T} + A^TAA^TA\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(A^TAA^TA - AA^TA^TA\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(A^TA^TAA - AA^TA^TA\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因为 B 是实矩阵，所以 $B = O = AA^T - A^TA$，即 A 是规范阵。

证二：若 A 可逆，结论自然成立

当 A 不可逆时，存在正交阵 P 使得

$$P^{-1}A^TAP = D = \operatorname{diag}(D_1, 0)$$

其中 $D_1 = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ 可逆

令

$$B = P^{-1}AP = P^TAP$$

那么 $B^TB=D$ 且 B 与 B^TB 可交换

分块有

$$B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$$

则

$$BD=\begin{pmatrix}B_{11}D_1 & 0\\ B_{21}D_1 & 0\end{pmatrix}=DB=\begin{pmatrix}D_1B_{11} & D_1B_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

D_1 可逆 $\Rightarrow B_{12}=B_{21}=0$

又

$$B^TB=D=\mathrm{diag}(B_{11}^TB_{11},B_{22}^TB_{22})=\mathrm{diag}(D_1,0)$$

且 D_1 可逆，就有 $B_{22}=0$，B_{11} 可逆；B_1 与 $B_1^TB_1$ 可交换，再由可逆情况

$$B^TB=BB^T\Rightarrow A^TA=AA^T$$

7. 计算 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2)$ 的最小多项式，Jordan 标准型，实相似标准型。（20 分）

其中

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

解：先说明要用的定理：

（1）准对角阵的最小多项式是对角块的最小多项式的最小公倍式

（2）特征方阵的初等因子与 Jordan 块是一一对应的，初等因子 $(x-\lambda)^n$ 对应 Jordan 块 $J_n(\lambda)$

（3）准对角阵的初等因子是对角块的初等因子的并

我们只需要分别求出 A_1,A_2 的最小多项式与 Jordan 标准型即可。

先注意到 A_2 是友阵，那么

$$d_{A_2}(x)=x^4-1=(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

且 A_2 的 Jordan 标准型为

$$J_2=\mathrm{diag}(-1,1,i,-i)$$

注意到 A_1 的 Jordan 标准型比特征方阵的初等因子更好求，我们求其 Jordan 标准型

A_1 只有特征值 1，且

$$r(A_1-I)=2\quad r(A_1-I)^2=0$$

其 Jordan 标准型为

$$J_1=\mathrm{diag}(J_2(1),J_2(1))$$

那么就有

$$d_{A_1}(x)=(x-1)^2$$

最后得到结果：

- 最小多项式为

$$d_A(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2+1)$$

- Jordan 标准型为

$$J = \mathrm{diag}(J_2(1), J_2(1), -1, 1, -i, i)$$

- 实相似标准型只需要把虚数部分替换即可，为

$$\mathrm{diag}\left(J_2(1), J_2(1), -1, 1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

8. 在空间 $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ 的线性空间上的线性函数 $f(X)$，证明对于固定的 $f(X)$，有唯一的矩阵 B 满足 $f(X) = \mathrm{Tr}(XB^T)$。（10 分）
证：
存在性：$\mathbb{R}^{n\times n}$ 有一组基 $M = \{E_{ij} | 1 \le i, j \le n\}$。设 $X = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{n\times n}$

$$f(X) = f(a_{11}E_{11} + \cdots + a_{nn}E_{nn}) = a_{11}f(E_{11}) + \cdots + a_{nn}f(E_{nn})$$

设 $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}_{n\times n}$

$$\mathrm{Tr}(XB^T) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \cdots + a_{nn}b_{nn}$$

令 $b_{ij} = f(E_{ij})$ 即可
唯一性：若存在 B_1, B_2 使得 $f(X) = \mathrm{Tr}(XB_1^T) = \mathrm{Tr}(XB_2^T)$，则

$$\mathrm{Tr}(X(B_1 - B_2)^T) = 0$$

取 $X = B_1 - B_2 = (x_{ij})_{n\times n}$

$$\mathrm{Tr}((B_1 - B_2)(B_1 - B_2)^T) = \sum_{1\le i,j\le n} x_{ij}^2 = 0$$

则

$$B_1 - B_2 = 0 \quad B_1 = B_2$$

矛盾

9. 正交阵 $O = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，$A$ 为方阵，那么 D 也为方阵，证明 $\det(A)^2 = \det(D)^2$。
证：$OO^T = I$ 即

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

有 $AA^T + BB^T = I_n$，$D^TD + B^TB = I_m$
证一：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

取行列式

$$\det(O)\det(A) = \det(D)$$

又 $\det(O)^2 = 1$
两边平方即

$$\Rightarrow \det(A)^2 = \det(D)^2$$

证二：

$$\det(A)^2 = \det(AA^T) = \det(I_n - BB^T) = \det(I_m - B^T B) = \det(D^T D) = \det(D)^2$$

这里利用了结论 $|\lambda I_n - BA| = \lambda^{n-m}|\lambda I_m - AB|$