(1) 设线性变换$\mathcal{A}$在某组基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & c \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}$，在另一组基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$(a,b,c)=$ ____ $(1,0,0)$ ____.

(2) 实矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的正交相抵标准形为 ____ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ ____ $\sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

(3) 实方阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$的正交相似标准形为 ____ $\begin{pmatrix} -3 & & \\ & \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{11}}{2} \\ & -\frac{\sqrt{11}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ ____

(4) 设V是区间$[0,1]$上连续函数全体按内积$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$构成的欧氏空间. $W=\langle 1,x,x^2\rangle$是V的子空间. 则函数$f(x)=x^3$在W上的正交投影是 ____ $\frac{3}{2}x^2 + -\frac{3}{5}x+\frac{1}{20}$ ____

(5) 设V是由$\cos(x),\cos(2x),\ldots,\cos(nx)$ 生成的线性空间. 则V的一组基$\alpha_1=\cos(x),\alpha_2=\cos(2x),\ldots,\alpha_n=\cos(nx)$ 的对偶基为 ____ $f_i(p)=\frac{1}{\pi}\int^{2\pi} p(x)\cos(ix)\,dx$ ____.

得分	评卷人
15	

二（本题15分）给定矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) 求多项式矩阵$\lambda I-A$的行列式因子、不变因子、初等因子组及Smith标准形.

(2) 求A的Jordan标准形.

得分	评卷人
10	

三（本题10分）设$\mathcal{A}$是有限维线性空间V上的线性变换，且$\mathrm{rank}(\mathcal{A})=\mathrm{rank}(\mathcal{A}^2)$.
证明：$V=Im(\mathcal{A})\oplus Ker(\mathcal{A})$.

得分	评卷人
17	

四（本题20分）设$M:=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$为线性空间$V$的一组基，$\mathcal{A}$是$V$上的线性变换，$\mathcal{A}$ 在M 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(1) 求线性变换$\mathcal{A}$的特征多项式、最小多项式及Jordan标准形;

(2) 求$\mathcal{A}$的特征子空间;

(3) 证明：如果W是$\mathcal{A}$的3维不变子空间，则W包含$\mathcal{A}$的所有特征子空间.

得分	评卷人
[illegible]	

五（本题15分）证明：实方阵A为规范方阵的充要条件是，存在实系数多项式$f(x)$使得$A^T = f(A)$.

得分	评卷人
2	

六(本题10分) 设A为n阶可逆实对称阵.

(1) 若S为n阶实正定对称方阵，证明AS的所有特征值都是实数；

(2) 设α为n维实单位列向量，令$B = A + \alpha\alpha^T A^{-1}$，证明$B$的所有特征值都是实数.