2025 春《实用随机过程》期末考试卷

一、(12 分) 设离散时间 Markov 链 $\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$ 的状态空间为 $\{1,2,3,4\}$，且转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（1）指出该 Markov 链有几个类，并写出每个类所包含的状态。

（2）记 $T=\min\{n\geq 0: X_n=1 \text{ 或 } 4\}$，试求 $\mathbb{E}[T|X_0=2]$。

解：（1）一共有三个类，分别为 $\{1\};\{2,3\};\{4\}$（状态 1 和 4 都是吸收态）

（2）注意从状态 2 开始不可能到达状态 4，$T=\min\{n\geq 0: X_n=1\}$，记

$$\mathbb{E}[T|X_0=2]=T_2 \quad \mathbb{E}[T|X_0=1]=T_1 \quad \mathbb{E}[T|X_0=0]=T_0=0$$

对从初始状态 2 的第一次转移取条件（注意至少要转移一次才能到达状态 1)：

$$T_2=1+0.3T_2+0.5T_3$$
$$T_3=1+0.6T_2+0.4T_3$$

有

$$T_2=\frac{55}{6} \quad T_3=\frac{65}{6}$$

即 $\mathbb{E}[T|X_0=2]=\frac{55}{6}$

二、(30 分) 设有一个质点在如原所示的二叉树上 (共 $m=3$ 层) 作随机游走。它从顶点 0 出发，每隔单位时间等概率沿边转移到某个邻点上。以 X_n 表示该质点所在顶点的编号，则 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为一 Markov 链。

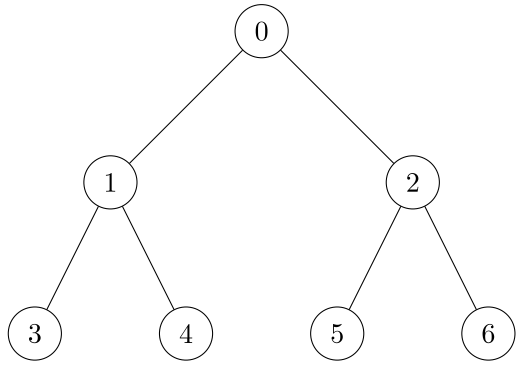
（1）试写出该 Markov 链的一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}_3$。

（2）对任意顶点 i $(0\leq i\leq 6)$，讨论其周期性和常返性。

（3）对任意顶点 i $(0\leq i\leq 6)$，求质点从 i 出发后首次返回 i 所需平均步数 μ_i。

（4）在稳态条件下，该 Markov 链是否时间可逆？需说明理由。

（5）对一般的 m $(m\geq 1)$，试求该 Markov 链的平稳分布（可不写计算过程)。



解：（1）一步转移概率矩阵为

$$
\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

（2）所有状态互通，对于每个状态至少需要两步回到自身，则所有的状态的周期为 2

又 Markov 链是不可约有限状态的，则所有状态都是正常返的

（3）利用有限加权边图上的随机游走的结论，对存在的每条边赋权重 $w_{ij}=1$，就满足上述转移概率矩阵，且有

$$
\sum_{i,j} w_{ij}=12
$$

上式是因为每条边（共 6 条）要计数两遍（这样比单独计数每个状态的边之后再相加来的方便）

$$
\pi_i=\frac{\sum\limits_{j} w_{ij}}{\sum\limits_{i,j} w_{ij}}
$$

$$
\pi_i=\begin{cases}
\frac{1}{6} & i=0\\
\frac{1}{4} & i=1,2\\
\frac{1}{12} & i=3,4,5,6
\end{cases}
$$

$$
\mu_i=\frac{1}{\pi_i}=\begin{cases}
6 & i=0\\
4 & i=1,2\\
12 & i=3,4,5,6
\end{cases}
$$

（4）当然可逆，这是有限加权边图上的随机游走的结论之一

可以代入平稳方程一一验证：

$$\pi_i = \sum_j \pi_j P_{ji}$$

（5）类似（3），仍然对存在的边赋权重 $w_{ij} = 1$

$$\sum_{i,j} w_{ij} = 2(2 + \cdots + 2^{m-1}) = 2^{m+1} - 4$$

第一层的点连接 2 个边，最后一层的点连接 1 个边，其余的点连接 3 个边，则

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1}{2^m - 2} & i = 0 \\ \frac{1}{2^{m+1} - 4} & \text{i 在第 m 层} \\ \frac{3}{2^{m+1} - 4} & \text{其他} \end{cases}$$

三、(16 分) 设连续时间 Markov 链 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的状态空间为 $\{1, 2, 3\}$，且其 Q 矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

（1）求对应嵌入链的转移概率矩阵。

（2）当 $t \to \infty$ 时，求 $X(t)$ 的极限分布。

解：（1）Q 矩阵指的是对角元为 $-v_i$，非对角元为 q_{ij} 的矩阵

嵌入链的转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（2）设连续链的极限概率 P_i，有方程（总离开速率等于总进入速率）：

$$\begin{aligned} 2P_1 &= 2P_3 \\ 3P_2 &= P_1 \\ 2P_3 &= P_1 + 3P_2 \\ P_1 + P_2 + P_3 &= 1 \end{aligned}$$

有

$$P_1 = P_3 = \frac{3}{7} \quad P_2 = \frac{1}{7}$$

也就是

$$P(\lim_{t\to\infty} X(t) = 1) = P(\lim_{t\to\infty} X(t) = 3) = \frac{3}{7} \quad P(\lim_{t\to\infty} X(t) = 2) = \frac{1}{7}$$

四、(10 分) 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一个线性生灭过程，且生长率和死亡率分别为 $\lambda_n = n\lambda$ 和 $\mu_n = n\mu, n \geq 0$，其中 $\lambda, \mu > 0$ 为给定常数。如果初始状态 $X(0) = 1$，试求灭绝概率 $q = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = 0|X(0) = 1)$。
解：
考虑分支过程，但要注意分支过程是 Markov 链而非连续链，设此连续链的嵌入链为 $\{Y(t), t \geq 0\}$，有转移概率：

$$P_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad P_{i,i-1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

同时

$$\text{从一个个体开始的连续链最终灭绝} \iff \text{从一个个体开始的嵌入链最终灭绝}$$

因此只需要求嵌入链的灭绝概率即可；注意分支过程的定义为第 $t-1$ 代的每个父代独立产生的第 t 代子代的总数量（相当于父代产生子代之后死亡），而本题父代在产生子代之后还存活，把本题存活的父代看成他自己产生的子代，同时认为父代产生子代之后死亡，记一个父代产生 i 个子代的概率为 P_i，同时定义：

$$\{\tilde{Y}(t) : \tilde{Y}(0) = 1 \quad \tilde{Y}(t) = Y\left(\sum_{i=0}^{t-1} \tilde{Y}(i)\right) \quad t \geq 0\}$$

则 $\{\tilde{Y}(t)\}$ 为分支过程 (相当于分支过程的父代为 $Y(t) = n$ 时，我们认为下一代为 $Y(t+n)$)
且有：

$$q = \lim_{t\to\infty} P(Y(t) = 0|Y(0) = 1) = \lim_{t\to\infty} P(\tilde{Y}(t) = 0|\tilde{Y}(0) = 1)$$

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad P_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

利用分支过程定理有：

$$q = P_0 + P_2 q^2$$

注意 q 是满足上面方程的最小解：

$$q = \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda} & \frac{\mu}{\lambda} < 1 \\ 1 & \frac{\mu}{\lambda} \geq 1 \end{cases}$$

另解：
记 $q_2 = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = 0|X(0) = 2)$，对第一次转移取条件

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} q_2$$

而从状态 2 开始的嵌入链如果想灭绝的话，必须先到达 1，再从 1 到达 0；在到达 1 之前可以视 1 为一个“暂时的”吸收壁，那么可以看到这时从 2 开始的嵌入链（带有吸收壁 1）和从 1 开始的嵌入链具有相同的性质（它们的转移概率矩阵一样），所以从 2“灭绝到”1 的概率也是 q，当到达状态 1 之后我们认为这个吸收壁被取消了，此时从状态 1 到达状态 0 的概率就是 q，即 $q_2 = q^2$，得到相同的方程（写到这里也不难发现这其实就是分支过程的方程了）

五、(14 分) 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动。
（1）试求随机变量 $X = B(1) + B(2) + B(3)$ 的分布。

（2）在给定 $B(2)=1$ 的条件下，试求 $B(1)$ 和 $B(3)+B(4)$ 的联合分布。

解：（1）利用独立增量性和平稳增量性：

$$X = 3B(1) + 2(B(2)-B(1)) + (B(3)-B(2))$$

$$B(1), B(2)-B(1), B(3)-B(2) \sim N(0,1) \quad \text{且相互独立}$$

则

$$X \sim N(0,14)$$

（2）

$$B(1)|B(2)=1 \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

另一方面 $B(3)+B(4) = 2B(3) + (B(4)-B(3))$，又

$$B(3)|B(2)=1 \sim B(2) + (B(3)-B(2))|B(2)=1 \sim 1 + N(0,1) \sim N(1,1)$$

$$B(4)-B(3)|B(2)=1 \sim B(4)-B(3) \sim N(0,1)$$

则

$$B(3)+B(4)|B(2)=1 \sim N(2,5)$$

注意 Brown 运动是 Guass 过程以及独立增量性（$B(1)|B(2)=1$ 与 $B(3)+B(4)|B(2)=1$ 独立），$(B(1), B(3)+B(4))|B(2)=1$ 是二元正态分布

$$(B(1), B(3)+B(4))|B(2)=1 \sim N\left(\left(\frac{1}{2}, 2\right), \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

RK：

给定 $B(t_1)=A, B(t_2)=B$ 的条件下,对 $t_1<s<t_2$,$B(s)$ 的条件分布为 $N\left(A+\frac{(B-A)(s-t_1)}{t_2-t_1}, \frac{(s-t_1)(t_2-s)}{t_2-t_1}\right)$

六、(18 分) 考虑一质点在直线上从正整数 a 出发的简单对称随机游走，其中 0 和 $K(K>a)$ 为两个吸收态。设 S_n 表示时刻 n 该质点的位置，$S_0=a$，而 $T=\min\{n: S_n=0 \text{ 或} K\}$，记

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} S_k - \frac{1}{3} S_n^3$$

（1）证明 $\{M_n, n\geq 0\}$ 为鞅。

（2）试利用停时定理来求解 $\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{T} S_k]$。

解：（1）利用 $\mathbb{E}[X|U] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|U,V]|U]$，并注意 $S_1,\ldots,S_n$ 实际上包含了 $M_1,\ldots,M_n$ 的所有信息

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_1,...,M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|S_1,...,S_n]|M_1,...,M_n]$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|S_1,...,S_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} S_k + S_{n+1} - \frac{1}{3}\left(S_n + X_{n+1}\right)|S_1,...,S_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} S_k + S_n + X_{n+1} - \frac{1}{3}\left(S_n + X_{n+1}\right)|S_1,...,S_n\right] \\
&\overset{X_{n+1}\text{与}S_1,...,S_n\text{独立}}{=} \sum_{k=0}^{n} S_k + S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] - \frac{1}{3}S_n^3 - \frac{1}{3}\mathbb{E}[X_{n+1}^3] - S_n^2\mathbb{E}[X_{n+1}] - \mathbb{E}[X_{n+1}^2]S_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} S_k - \frac{1}{3}S_n^3 \\
&= M_n
\end{aligned}
$$

这就说明了

$$
\mathbb{E}[M_{n+1}|M_1,...,M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|S_1,...,S_n]|M_1,...,M_n] = \mathbb{E}[M_n|M_1,...,M_n] = M_n
$$

另外

$$
\mathbb{E}[|M_n|] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} S_k\right] + \frac{1}{3}\mathbb{E}[S_n^3] < \infty
$$

即 $\{M_n, n \geq 0\}$ 为鞅

（2）先验证一下鞅停止定理的条件

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n| \mid M_1,...,M_n] &= \mathbb{E}\left[|S_{n+1} - \frac{1}{3}(S_{n+1}^3 - S_n^3)| \mid M_1,...,M_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|S_{n+1} - \frac{1}{3}(X_{n+1}^3 + 3S_n^2X_{n+1} + 3S_nX_{n+1}^2)| \mid M_1,...,M_n\right] \\
&\overset{\text{三角不等式}}{<} M
\end{aligned}
$$

则

$$
\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T} S_k - \frac{1}{3}S_T^3\right] = \mathbb{E}[M_0] = a - \frac{1}{3}a^3
$$

由赌徒破产模型（开始财富为 a，公平赌模型下，财富先到达 K 而不是 0 的概率）：

$$
P(S_T = K) = \frac{a}{K}
$$

$$
\mathbb{E}\left[S_T^3\right] = P(S_T = K)K^3 = aK^2
$$

最后

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T} S_k\right] = \frac{1}{3}aK^2 + a - \frac{1}{3}a^3
$$

七、(附加题, 10 分) 证明标准 Brown 运动 $\{B(t), t \geq 0\}$ 在任一区间 $[0,t]$ 上的二次变差为 t，即对区间 $[0,t]$ 上的任意分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = t$，当 $n \to \infty$ 时，若最大间隔

$\max_{0\le i\le n}(t_{i+1}-t_i)\to 0$，则有 $Q_n=\sum_{k=0}^n [B(t_{k+1})-B(t_k)]^2$ 依概率收敛到 t。
解：证明依概率收敛 $P(|Q_n-t|\ge\epsilon)\to 0$ 考虑 Markov 不等式或者 Chebyshev 不等式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q_n]&=\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^n [B(t_{k+1})-B(t_k)]^2\right]\\&=\sum_{k=0}^n \mathbb{E}\left[[B(t_{k+1})-B(t_k)]^2\right]\end{aligned}$$

另外

$$B(t_{k+1})-B(t_k)\sim N(0,t_{k+1}-t_k)\quad \mathbb{E}\left[[B(t_{k+1})-B(t_k)]^2\right]=t_{k+1}-t_k$$

则

$$\mathbb{E}[Q_n]=\sum_{k=0}^n \mathbb{E}\left[[B(t_{k+1})-B(t_k)]^2\right]=t$$

由独立增量性：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Q_n)&=\mathrm{Var}\left(\sum_{k=0}^n [B(t_{k+1})-B(t_k)]^2\right)\\&=\sum_{k=0}^n \mathrm{Var}\left([B(t_{k+1})-B(t_k)]^2\right)\end{aligned}$$

记 $N_k=B(t_{k+1})-B(t_k)\sim N(0,t_{k+1}-t_k)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(N_k)&=\mathbb{E}[N_k^4]-\left(\mathbb{E}[N_k^2]\right)^2\\&=3(t_{k+1}-t_k)^2-(t_{k+1}-t_k)^2\\&=2(t_{k+1}-t_k)^2\end{aligned}$$

利用 Chebyshev 不等式

$$\begin{aligned}P(|Q_n-t|\ge\epsilon)&\le\frac{\mathrm{Var}(Q_n)}{\epsilon^2}\\&\le\frac{2\sum_{k=0}^n(t_{k+1}-t_k)^2}{\epsilon^2}\\&\le\frac{2\left(\sum_{k=0}^n(t_{k+1}-t_k)\right)\max\{t_{k+1}-t_k\}}{\epsilon^2}\\&\le\frac{2t\max\{t_{k+1}-t_k\}}{\epsilon^2}\\&\to 0\end{aligned}$$

这就说明了依概率收敛
RK：
对正态分布的高阶矩有

$$X\sim N(0,1)$$
$$\forall k=2m>0\quad \mathbb{E}[X^k]=(2m-1)!!$$

也可以通过 $N(\mu,\sigma^2)$ 的矩母函数

$$M(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

或者特征函数

$$\phi(t) = e^{i\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

来获得高阶矩的信息