

参考答案

(期末考试, 2024 年 6 月 28 日)

一. (20 分) 单项选择填空题 (每题 2 分)

1. 设 X_1, \dots, X_n 为来自均匀分布 $U(-\theta, \theta)$ 的一组样本, θ 为未知参数, 则下述量为统计量的是
 (A) $\bar{X} - \theta$ (B) $\max_{1 \leq i \leq n} (X_i - \theta) - \min_{1 \leq i \leq n} (X_i - \theta)$
 (C) $\max_{1 \leq i \leq n} (X_i - \theta)$ (D) $\min_{1 \leq i \leq n} (X_i - \theta)$
2. 设 $\hat{\theta}_n$ 为未知参数 θ 的一个估计量, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} E|\hat{\theta}_n - \theta| = 0$, 则 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的
 (A) 无偏估计 (B) 有效估计 (C) 相合估计 (D) 渐近正态估计
3. 假设样本 X 的密度为 $f_\theta(x)$, 其中 θ 为参数, 则下列表述不正确的是
 (A) 固定 x 时 $f_\theta(x)$ 为似然函数 (B) 固定 θ 时 $f_\theta(x)$ 为似然函数
 (C) 固定 θ 时 $f_\theta(x)$ 为密度函数 (D) $f_\theta(x)$ 衡量了不同 θ 下观测到值 x 的可能性大小
4. 一个参数 θ 的 95% 区间估计为 $[0.1, 0.3]$, 则下列表述正确的是
 (A) 若该区间为置信区间, 则表明 θ 位于该区间的概率是 0.95
 (B) 该区间的边际误为 0.2
 (C) 对假设 $H_0: \theta = 0.2 \leftrightarrow H_1: \theta \neq 0.2$, 会在 0.05 水平下拒绝原假设
 (D) 若该区间为贝叶斯可信区间, 则表明 θ 位于该区间的概率是 0.95
5. 下列表述错误的是
 (A) 矩估计量一般不唯一 (B) 无偏估计总是优于有偏估计
 (C) 相合性是一个估计量的基本性质 (D) 最大似然估计可以不存在
6. 若 $\delta(X)$ 是一个损失下的 Bayes 法则, 则下列表述正确的是
 (A) $\delta(X)$ 的贝叶斯风险不超过 Minimax 风险
 (B) $\delta(X)$ 不可能是一个 Minimax 法则
 (C) $\delta(X)$ 是可容许的
 (D) $\delta(X)$ 的风险为常数
7. 下述对一个显著性检验方法的描述错误的是
 (A) 原假设与对立假设地位不均等, 原假设被保护起来
 (B) p 值越显著表明原假设成立的依据越强烈
 (C) 在一个检验结果是不能拒绝零假设时, 检验只可能会犯第二类错误
 (D) 双边假设的接受域等价于参数的置信区间
8. 设 X_1, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的简单样本, 考虑假设检验问题 $H_0: \mu = 0 \leftrightarrow H_1: \mu = 0.5$. 如果要求检验的第一类和第二类错误均不超过 α ($0 < \alpha < 1$), 则样本量 n 应满足 $n \geq \lceil 16u_\alpha^2 \rceil$ (结果用分位数表示).

解析: 两点假设的拒绝域形如 $R = \{X: \bar{X} > c\}$. 按要求

$$\alpha \geq P(X \in R | H_0) = P_{\mu=0}(\bar{X} > c) = 1 - \Phi(\sqrt{nc}),$$

$$\alpha \geq P(X \notin R | H_1) = P_{\mu=0.5}(\bar{X} \leq c) = \Phi(\sqrt{n}(c - 0.5)).$$



于是我们有

$$\begin{cases} \sqrt{nc} \geq u_\alpha, \\ \sqrt{n}(c-0.5) \leq -u_\alpha, \end{cases} \implies 0.5\sqrt{n} \geq 2u_\alpha, \implies n \geq \lceil 16u_\alpha^2 \rceil.$$

9. 设某种产品的质量等级可以划分为“优”、“合格”和“不合格”，为了判断生产此产品的三家工厂的产品是否有差异，使用拟合优度检验方法时的原假设为 三家工厂生产的产品质量无差异，渐近卡方分布的自由度为 4。

10. 设 X_1, \dots, X_n 为来自均匀分布 $U(0, \theta)$, $\theta > 0$ 的一组简单样本, θ 的先验密度为 $\pi(\theta) = 1/(2\theta^2)$, $\theta \geq 1/2$. 考虑假设检验问题 $H_0: \theta \leq 1 \leftrightarrow H_1: \theta > 1$, 则其 Bayes 因子 BF_{01} 为 $[(x_{(n)} \vee 0.5)^{-n-1} - 1] \vee 0$ 。

解析: 样本联合密度与先验分别为

$$f(\mathbf{x} | \theta) = \theta^{-n} \cdot I(0 < x_{(n)} < \theta), \quad \pi(\theta) = 0.5\theta^{-2} \cdot I(\theta \geq 0.5).$$

因此 θ 的后验密度为

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto \theta^{-n-2} \cdot I(\theta > x_{(n)} \vee 0.5).$$

归一化后可得后验密度, 进而求得后验分布函数为

$$\Pi(\theta | \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\theta_*}{\theta}\right)^{n+1}, & \theta \geq \theta_*, \\ 0, & \theta < \theta_*, \end{cases}$$

其中 $\theta_* = x_{(n)} \vee 0.5$. 于是当 $\theta_* < 1$, 即 $x_{(n)} < 1$ 时,

$$\alpha_0 = P(\theta \leq 1 | \mathbf{x}) = \Pi(1 | \mathbf{x}) = 1 - \theta_*^{n+1}, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_0 = \theta_*^{n+1}.$$

当 $\theta_* \geq 1$, 即 $x_{(n)} \geq 1$ 时, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$. 又因为 $\pi_0 = P(\theta \leq 1) = 0.5$, $\pi_1 = P(\theta > 1) = 0.5$, 所以贝叶斯因子为

$$BF_{01} = \frac{\alpha_0/\alpha_1}{\pi_0/\pi_1} = \begin{cases} \theta_*^{-n-1} - 1, & \theta_* < 1, \\ 0, & \theta_* \geq 1 \end{cases} = [(x_{(n)} \vee 0.5)^{-n-1} - 1] \vee 0.$$

二. (20 分) 设从总体

X	0	1	2
P	p_1	p_2	p_3

(其中 $0 < p_1, p_2, p_3 < 1$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ 为未知参数) 中抽取的一个简单样本 X_1, \dots, X_n , 试

(1) 求 $p_1 - p_2$ 的最大似然估计, 并证明其为最小方差无偏估计.

(2) 求检验问题 $H_0: p_1 = p_2 \leftrightarrow H_1: p_1 \neq p_2$ 的一个 (渐近) 水平 α 检验.

最大似然估计: 似然函数

$$L(p_1, p_2; \mathbf{x}) = p_1^{n_0} p_2^{n_1} (1 - p_1 - p_2)^{n - n_0 - n_1},$$

其中 $n_i = \sum_{j=1}^n I(X_j = i)$, $i = 0, 1$. 由对数似然方程

$$\begin{cases} \frac{\partial l(p_1, p_2; \mathbf{x})}{\partial p_1} = \frac{n_0}{p_1} - \frac{n - n_0 - n_1}{1 - p_1 - p_2} = 0, \\ \frac{\partial l(p_1, p_2; \mathbf{x})}{\partial p_2} = \frac{n_1}{p_2} - \frac{n - n_0 - n_1}{1 - p_1 - p_2} = 0, \end{cases}$$

解得 p_1, p_2 的最大似然估计分别为

$$\hat{p}_1 = \frac{n_0}{n}, \quad \hat{p}_2 = \frac{n_1}{n}.$$

进一步由最大似然估计的不变性可知 $p_1 - p_2$ 的最大似然估计为 $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = (n_0 - n_1)/n$.

最小方差无偏估计: 将样本联合密度函数写成指数族形式如下

$$f(\mathbf{x}; p_1, p_2) = \exp \left\{ n_0 \log \frac{p_1}{1 - p_1 - p_2} + n_1 \log \frac{p_2}{1 - p_1 - p_2} \right\} \cdot (1 - p_1 - p_2)^n.$$

令 $\eta_1 = \log \frac{p_1}{1 - p_1 - p_2}$, $\eta_2 = \log \frac{p_2}{1 - p_1 - p_2}$, 于是自然参数空间 $\Theta^* = \{(\eta_1, \eta_2) : -\infty < \eta_1 < \infty, -\infty < \eta_2 < \infty\}$ 有内点, 因此 (n_0, n_1) 是 (p_1, p_2) 的充分完全统计量. 又注意到 \hat{p}_1 和 \hat{p}_2 分别是 p_1 和 p_2 的无偏估计, 因此由 Lehmann-Scheffé 定理知 $p_1 - p_2$ 的最大似然估计是最小方差无偏估计.

检验问题的 (渐近) 水平 α 检验: (法一: 拟合优度检验) 取检验统计量为

$$K(\mathbf{X}) = \sum_{r=1}^3 \frac{(n_{r-1} - n\hat{p}_r)^2}{n\hat{p}_r} \xrightarrow{H_0} \chi_{3-1-1}^2,$$

其中 \hat{p}_r 为 H_0 下的极大似然估计. 注意到当 $p_1 = p_2 = p$ 时, 样本的似然函数为

$$L(p; \mathbf{x}) = p^{n_0+n_1} (1 - 2p)^{n_2}.$$

由对数似然方程可得 $\hat{p} = (n_0 + n_1)/(2n)$. 代入检验统计量表达式得

$$K(\mathbf{X}) = \frac{(n_0 - n_1)^2}{n_0 + n_1}.$$

因此检验问题渐近水平 α 检验为

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } (n_0 - n_1)^2 > (n_0 + n_1)\chi_1^2(\alpha), \\ 0, & \text{当 } (n_0 - n_1)^2 \leq (n_0 + n_1)\chi_1^2(\alpha). \end{cases}$$

(法二: 似然比检验) 注意到似然比

$$\lambda(\mathbf{X}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta)} = \frac{\hat{p}_1^{n_0} \hat{p}_2^{n_1} (1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2)^{n_2}}{\hat{p}^{(n_0+n_1)} (1 - 2\hat{p})^{n_2}}.$$

在大样本下, 我们有 $2 \log \lambda(\mathbf{X}) \xrightarrow{H_0} \chi_1^2$. 代入检验统计量表达式得

$$2 \log \lambda(\mathbf{X}) = 2 \log \frac{(n_0/n)^{n_0} \cdot (n_1/n)^{n_1}}{(n_0 + n_1)^{n_0+n_1} / (2n)^{n_0+n_1}} = 2n_0 \log \frac{2n_0}{n_0 + n_1} + 2n_1 \log \frac{2n_1}{n_0 + n_1}.$$

因此检验问题渐近水平 α 检验为

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 2n_0 \log \frac{2n_0}{n_0 + n_1} + 2n_1 \log \frac{2n_1}{n_0 + n_1} > \chi_1^2(\alpha), \\ 0, & \text{当 } 2n_0 \log \frac{2n_0}{n_0 + n_1} + 2n_1 \log \frac{2n_1}{n_0 + n_1} \leq \chi_1^2(\alpha). \end{cases}$$

(法三: 利用渐近正态检验) 注意到

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \frac{n_0 - n_1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [I(X_j = 0) - I(X_j = 1)]$$

是独立随机变量之平均, 于是由中心极限定理知

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - E[I(X_1 = 0) - I(X_1 = 1)])}{\sqrt{\text{Var}[I(X_1 = 0) - I(X_1 = 1)]}} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

其中 $E[I(X_1 = 0) - I(X_1 = 1)] = p_1 - p_2$, $\text{Var}[I(X_1 = 0) - I(X_1 = 1)] = p_1 + p_2 - (p_1 - p_2)^2$. 结合 Slutsky 定理, 因此考虑取检验统计量为

$$U(\mathbf{X}) = \frac{\sqrt{n}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}_1 + \hat{p}_2 - (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)^2}}.$$

在 H_0 下, 我们有 $U(\mathbf{X}) \xrightarrow{d} N(0, 1)$. 于是检验问题渐近水平 α 检验为

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |U(\mathbf{X})| > u_{\alpha/2}, \\ 0, & \text{当 } |U(\mathbf{X})| \leq u_{\alpha/2}. \end{cases}$$

(法四: 利用 Wald 检验) 记 $\boldsymbol{\theta} = (p_1, p_2)^\top$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2)^\top$, 于是由中心极限定理有

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} N(0, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})),$$

其中 Fisher 信息阵为

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} p_1^{-1} + p_3^{-1} & p_3^{-1} \\ p_3^{-1} & p_2^{-1} + p_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

注意 $h(\boldsymbol{\theta}) = p_1 - p_2$, $\mathbf{B} = \partial h / \partial \boldsymbol{\theta} = (1, -1)$, 因此取检验统计量为

$$W_n = nh(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \left[\mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{B}^\top(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right]^{-1} h(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{n(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)^2}{\hat{p}_1 + \hat{p}_2 - (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)^2}.$$

在 H_0 下, 我们有 $W_n \xrightarrow{d} \chi_1^2$. 于是检验问题渐近水平 α 检验为

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } W_n > \chi_1^2(\alpha), \\ 0, & \text{当 } W_n \leq \chi_1^2(\alpha). \end{cases}$$

三. (30 分) 设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(\mu, 1)$, 其中 μ 为参数. 对水平 α , 试

- (1) 求 $P(X_1 > 0)$ 的最大似然估计, 并求其渐近方差.
- (2) 证明检验问题 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$ 不存在 UMPT, 其中 μ_0 为一已知数.
- (3) 若参数 μ 在 $\mu = \mu_0$ 上的先验概率为 0.6, 在 $\mu \neq \mu_0$ 上的先验分布为 $N(\mu_0, 4)$, 损失函数取为 0-1 损失, 求 (2) 中的假设检验问题的 Bayes 决策.

最大似然估计及其渐近方差: 似然函数

$$L(\mu; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - \frac{n(\mu - \bar{x})^2}{2} \right\}.$$

因此 μ 的最大似然估计为 $\hat{\mu} = \bar{X}$. 由最大似然估计的不变性可知, $p = P(X_1 > 0) = \Phi(\mu)$ 的最大似然估计为 $\hat{p} = \Phi(\hat{\mu}) = \Phi(\bar{X})$. 注意到 $\bar{X} \sim N(\mu, 1/n)$, 由 Delta 方法可知 \hat{p} 的渐近方差为

$$[\phi(\mu)]^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{\exp\{-\mu^2\}}{2n\pi}.$$

双边假设不存在 UMPT: 首先注意到正态分布族 (方差已知, 均值为未知参数) 关于 $T = \bar{X}$ 是单调似然比族. 因而对检验问题 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H'_1: \mu > \mu_0$, 存在 UMPT 形如

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \bar{x} > \mu_0 + u_\alpha/\sqrt{n}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对检验问题 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H''_1: \mu < \mu_0$, 存在 UMPT 形如

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \bar{x} < \mu_0 - u_\alpha/\sqrt{n}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

显然 ϕ_1 和 ϕ_2 都是检验问题 $H_0 \leftrightarrow H_1$ 的水平 α 检验. 假设检验问题 $H_0 \leftrightarrow H_1$ 的 UMPT 存在, 令其为 ϕ_0 . 对固定 $\mu_1 > \mu_0$ 和 $\mu_2 < \mu_0$, 检验 ϕ_0 也是简单假设 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow K_1: \mu = \mu_1$ 和 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow K_2: \mu = \mu_2$ 的 UMPT. 因此由 Neyman-Pearson 引理可知 ϕ_0 有形式

$$\begin{aligned} \phi_0(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 1, & \text{当 } f(\mathbf{x}; \mu_1) > k_1 f(\mathbf{x}; \mu_0), \\ 0, & \text{当 } f(\mathbf{x}; \mu_1) \leq k_1 f(\mathbf{x}; \mu_0), \end{cases} \\ \phi_0(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 1, & \text{当 } f(\mathbf{x}; \mu_2) > k_2 f(\mathbf{x}; \mu_0), \\ 0, & \text{当 } f(\mathbf{x}; \mu_2) \leq k_2 f(\mathbf{x}; \mu_0). \end{cases} \end{aligned}$$

(法一) 考虑 $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} : \phi_0(\mathbf{x}) = 1\}$, 由单调似然比的性质可知

- 如果 $T(\mathbf{y}) > T(\mathbf{x})$, 则由第一个检验形式知 $\phi_0(\mathbf{y}) = 1$.
- 如果 $T(\mathbf{y}) < T(\mathbf{x})$, 则由第二个检验形式知 $\phi_0(\mathbf{y}) = 1$.

于是要么 $\phi_0(\mathbf{y}) = 1$ 对所有 \mathbf{y} 成立, 要么 $\phi_0(\mathbf{x}) \neq 1$ 对所有 \mathbf{x} 成立. 这时 ϕ_0 的功效比 ϕ_1 和 ϕ_2 在各自的检验问题 $H_0 \leftrightarrow K_1$ 和 $H_0 \leftrightarrow K_2$ 都要小, 导出矛盾. (法二) 由唯一性可知, 在 $\mu_1 > \mu_0$ 上, $\phi_0 = \phi_1$, a.e.; 在 $\mu_2 < \mu_0$ 上, $\phi_0 = \phi_2$, a.e. 由 ϕ_1 和 ϕ_2 的形式知这不可能成立.

假设检验问题中的 Bayes 决策: 由题意知两个假设的后验概率分别为

$$\alpha_0 = P(\mu = \mu_0 | \mathbf{x}) = \frac{\pi_0 f(\mathbf{x} | \mu_0)}{m(\mathbf{x})}, \quad \alpha_1 = P(\mu \neq \mu_0 | \mathbf{x}) = \frac{\pi_1 m_1(\mathbf{x})}{m(\mathbf{x})},$$

或者直接注意到简单假设对复杂假设的贝叶斯因子有形式

$$\text{BF}_{01}(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} | \mu_0)}{m_1(\mathbf{x})}, \implies \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\pi_0 f(\mathbf{x} | \mu_0)}{\pi_1 m_1(\mathbf{x})},$$

其中 $m(\mathbf{x}) = \pi_0 f(\mathbf{x} | \mu_0) + \pi_1 m_1(\mathbf{x})$, $m_1(\mathbf{x}) = \int_{\mu \neq \mu_0} f(\mathbf{x} | \mu) \pi(\mu) d\mu$. 下面计算 $m_1(\mathbf{x})$ 如下

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{x}) &= \int_{\mu \neq \mu_0} f(\mathbf{x} | \mu) \pi(\mu) d\mu \\ &= \int_{\mu \neq \mu_0} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - \frac{n(\mu - \bar{x})^2}{2} \right\} \cdot (8\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{(\mu - \mu_0)^2}{8} \right\} d\mu \\ &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}}{2} \exp \left\{ -\frac{(n-1)s^2}{2} \right\} \int_{\mu \neq \mu_0} \exp \left\{ -\frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{2} \right\} d\mu \\ &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}}{2} \exp \left\{ -\frac{(n-1)s^2}{2} \right\} \cdot (2\pi/A)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(C - \frac{B^2}{A} \right) \right\} \\ &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{4n+1}} \exp \left\{ -\frac{(n-1)s^2}{2} - \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{2(4n+1)} \right\}, \end{aligned}$$

其中 $A = n + \frac{1}{4}$, $B = n\bar{x} + \frac{\mu_0}{4}$, $C = n\bar{x}^2 + \frac{\mu_0^2}{4}$. 因此

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{0.6(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{(n-1)s^2}{2} - \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{2} \right\}}{0.4 \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{4n+1}} \exp \left\{ -\frac{(n-1)s^2}{2} - \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{2(4n+1)} \right\}} = \frac{3\sqrt{4n+1}}{2} \exp \left\{ -\frac{2n^2(\bar{x} - \mu_0)^2}{4n+1} \right\}.$$

在 0-1 损失下, 该检验问题的贝叶斯决策为

$$\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} a_0, & \text{当 } (\bar{x} - \mu_0)^2 \leq \frac{4n+1}{2n^2} \log \frac{3\sqrt{4n+1}}{2}, \\ a_1, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 a_0 表示接受假设 H_0 , a_1 表示接受假设 H_1 .

四. (30 分) 设 X_1, \dots, X_m i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda_1)$ (期望是 $1/\lambda_1$ 的指数分布), Y_1, \dots, Y_n i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda_2)$, 且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立, 其中 λ_1, λ_2 为正参数. 记 \bar{X} 和 \bar{Y} 分别为两组样本的样本均值. 试

(1) 求 $E[(X_1 - Y_1)^2 | \bar{X}, \bar{Y}]$.

(2) 求 λ_1/λ_2 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

(3) 求检验问题 $H_0: \lambda_1 = c\lambda_2 \leftrightarrow H_1: \lambda_1 \neq c\lambda_2$ 的水平 α 似然比检验.

条件期望: (法一) 由指数分布的性质知

$$E[(X_1 - Y_1)^2] = E(X_1^2) - 2E(X_1 Y_1) + E(Y_1^2) = \frac{2}{\lambda_1^2} - \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{2}{\lambda_2^2}.$$

注意到 (\bar{X}, \bar{Y}) 是 (λ_1, λ_2) 的充分完全统计量, 由 UMVUE 的唯一性可知

$$E[(X_1 - Y_1)^2 | \bar{X}, \bar{Y}] = \left(\frac{2}{\lambda_1^2} - \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{2}{\lambda_2^2} \right)_{\text{UMVUE}}.$$

显然地, 我们有

$$E(\bar{X}^2) = \text{Var}(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{m+1}{m\lambda_1^2}, \quad E(\bar{Y}^2) = \text{Var}(\bar{Y}) + [E(\bar{Y})]^2 = \frac{n+1}{n\lambda_2^2}.$$

因此

$$E[(X_1 - Y_1)^2 | \bar{X}, \bar{Y}] = \frac{2m\bar{X}^2}{m+1} - 2\bar{X}\bar{Y} + \frac{2n\bar{Y}^2}{n+1}.$$

(法二) 由条件期望的线性性及独立性可知

$$E[(X_1 - Y_1)^2 | \bar{X}, \bar{Y}] = E(X_1^2 | \bar{X}) - 2E(X_1 Y_1 | \bar{X}, \bar{Y}) + E(Y_1^2 | \bar{Y}).$$

注意到 $X_1/(m\bar{X}) \sim \text{Be}(1, m-1)$, $Y_1/(n\bar{Y}) \sim \text{Be}(1, n-1)$, 且 (\bar{X}, \bar{Y}) 是 (λ_1, λ_2) 的充分完全统计量, 由 Basu 定理可知

$$\begin{aligned} E(X_1^2 | \bar{X}) &= \bar{X}^2 \cdot E\left(\frac{X_1^2}{\bar{X}^2} | \bar{X}\right) = \bar{X}^2 \cdot E\left(\frac{X_1^2}{\bar{X}^2}\right), \quad E(Y_1^2 | \bar{Y}) = \bar{Y}^2 \cdot E\left(\frac{Y_1^2}{\bar{Y}^2}\right), \\ E(X_1 Y_1 | \bar{X}, \bar{Y}) &= \bar{X}\bar{Y} E\left(\frac{X_1}{\bar{X}} \cdot \frac{Y_1}{\bar{Y}} | \bar{X}, \bar{Y}\right) = \bar{X}\bar{Y} E\left(\frac{X_1}{\bar{X}}\right) \cdot E\left(\frac{Y_1}{\bar{Y}}\right). \end{aligned}$$

由贝塔分布性质知

$$E\left(\frac{X_1}{m\bar{X}}\right) = \frac{1}{m}, \quad E\left(\frac{X_1^2}{m^2\bar{X}^2}\right) = \frac{2}{m(m+1)}, \quad E\left(\frac{Y_1}{n\bar{Y}}\right) = \frac{1}{n}, \quad E\left(\frac{Y_1^2}{n^2\bar{Y}^2}\right) = \frac{2}{n(n+1)}.$$

于是代入可得

$$E[(X_1 - Y_1)^2 | \bar{X}, \bar{Y}] = \frac{2m\bar{X}^2}{m+1} - 2\bar{X}\bar{Y} + \frac{2n\bar{Y}^2}{n+1}.$$

置信区间: 注意 $2m\lambda_1\bar{X} \sim \chi_{2m}^2$, $2n\lambda_2\bar{Y} \sim \chi_{2n}^2$, 取枢轴变量为

$$\frac{\lambda_1\bar{X}}{\lambda_2\bar{Y}} \sim F_{2m, 2n}.$$

由 $P(F_{2m,2n}(1 - \alpha/2) \leq \frac{\lambda_1 \bar{X}}{\lambda_2 \bar{Y}} \leq F_{2m,2n}(\alpha/2)) = 1 - \alpha$, 反解得到 λ_1/λ_2 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[F_{2m,2n}(1 - \alpha/2) \cdot \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}, F_{2m,2n}(\alpha/2) \cdot \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right].$$

似然比检验: 似然函数

$$L(\lambda_1, \lambda_2; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_1^m \exp \left\{ -\lambda_1 \sum_{i=1}^m x_i \right\} \cdot \lambda_2^n \exp \left\{ -\lambda_2 \sum_{j=1}^n y_j \right\}.$$

由似然比检验的思想, 取检验统计量为

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sup_{\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0} L(\lambda_1, \lambda_2; \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sup_{\lambda_1/\lambda_2 = c} L(\lambda_1, \lambda_2; \mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

注意到全空间下 $\hat{\lambda}_1 = 1/\bar{X}$, $\hat{\lambda}_2 = 1/\bar{Y}$. 在原假设空间下, 记 $\lambda_1 = c\lambda$, $\lambda_2 = \lambda$, 考虑 λ 的似然函数为

$$L(\lambda; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = c^m \lambda^{m+n} \exp \{ -\lambda(cm\bar{x} + n\bar{y}) \}.$$

此时最大似然估计 $\hat{\lambda} = (m+n)/(cm\bar{x} + n\bar{y})$. 于是似然比可化简为

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2; \mathbf{x}, \mathbf{y})}{L(c\hat{\lambda}, \hat{\lambda}; \mathbf{x}, \mathbf{y})} = \frac{(cm\bar{x} + n\bar{y})^{m+n}}{c^m(m+n)^{m+n}\bar{x}^m \cdot \bar{y}^n} \\ &= \frac{1}{(m+n)^{m+n}} \left(m + n \frac{\bar{y}}{c\bar{x}} \right)^m \left(n + m \frac{c\bar{x}}{\bar{y}} \right)^n \\ &\triangleq \frac{1}{(m+n)^{m+n}} (m + nF^{-1})^m (n + mF)^n, \end{aligned}$$

其中 $F := F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c\bar{x}/\bar{y}$. 注意到 Λ 关于 F 先递减后递增, 因此检验的拒绝域的形式为

$$R = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) < c_1 \text{ 或 } F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) > c_2\}.$$

注意到 $2m\lambda_1\bar{X} \sim \chi_{2m}^2$, $2n\lambda_2\bar{Y} \sim \chi_{2n}^2$, 所以在 H_0 下,

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{c\bar{X}}{\bar{Y}} \sim F_{2m,2n}.$$

由显著性水平 α 要求知 $c_1 = F_{2m,2n}(1 - \alpha/2)$, $c_2 = F_{2m,2n}(\alpha/2)$.