Greining Rása

Tengdar spólur

Ólafur Bjarki Bogason

1. mars 2021

Lögmál Faradays

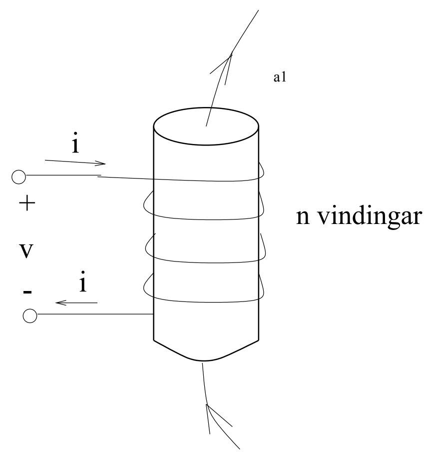
$v = L \frac{di}{dt}$ $\qquad i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v \, d\tau$

Lögmál Faradays (ein af Maxwells jöfnunum)

$$\boxed{v = n \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}$$

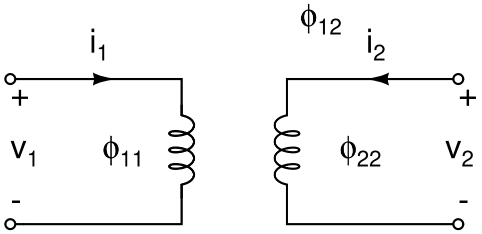
segir aðeins til um stærð en ekki formerki spennunnar.

Til að finna formerkið þurfum við mynd



Inngangur

Hugsum okkur tvær spólur sem eru nægilega nálægt hvor annarri til að hluti af segulflæði hvorrar spólu fari einnig í gegnum hina.



Köllum ϕ_{jk} flæði í vafi j vegna straums i_k í vafi k og skilgreinum

$$L_{jk} \stackrel{\triangle}{=} \frac{n_j \phi_{jk}}{i_k}$$

Margföldum í gegn með i_k og diffrum með tilliti til tíma

$$L_{jk} \frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} = n_j \frac{\mathrm{d}\phi_{jk}}{\mathrm{d}t}$$

Nú er

$$v(t) = n\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

svo að fyrir spólu (vaf) 1 fæst

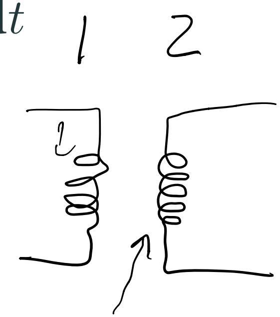
$$v_1(t) = n\frac{\mathrm{d}(\text{heildarsegulflæði í vafi 1})}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$v_1(t) = n\frac{\mathrm{d}(\phi_{11} \pm \phi_{12})}{\mathrm{d}t} = n_1\frac{\mathrm{d}\phi_{11}}{\mathrm{d}t} \pm n_2\frac{\mathrm{d}\phi_{12}}{\mathrm{d}t}$$

sem rita má

$$\boxed{v_1(t) = L_{11}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$$



Á sama hátt fæst fyrir spólu 2

$$\boxed{v_2(t) = \pm L_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{22}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$$

Gagnspan

- Það má sýna fram á að

  $$L_{12} = L_{21} \equiv M$$

  og að

  $$0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

- Stærðin M er nefnd **gagnspan** (e. mutual inductance)

Kúplingsstuðull

Nú má rita

$$v_1(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$v_2(t) = \pm M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

a M

og L_1 og L_2 eru alltaf jákvæðar stærðir.

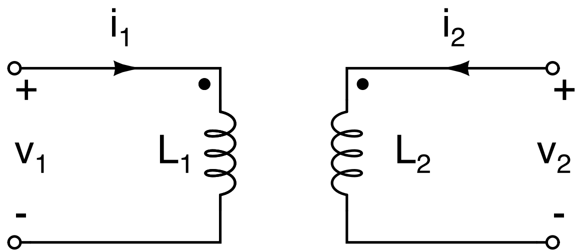
Kúplingsstuðullinn k er skilgreindur sem

$$k \equiv \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

Við sjáum að $k \leq 1$, og þegar $k = 1$ fer allt segulflæðið í gegnum báðar spólurnar og við segjum að þær séu fullkomlega kúplaðar.

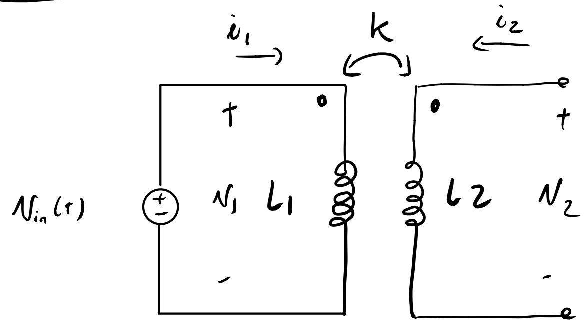
Lögmál Faradays



- Þegar viðmiðunarstefna straumsins stefnir inní merktan pól spólu þá er + viðmiðunarspennu sem spanast í hinni spólunni þar sem punkturinn er

Dæmi Finnum útslagið v_{pk} fyrir spennu sem spanast í spólu 2 ef $v_{in}(t) = 100\sin(1000t)$

$= 100\sin(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 160\,\text{Hz}$



$L_1 = 1\,H$, $L_2 = \frac{1}{4}\,H$, $k = \frac{2}{5}$

$$v_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = +M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

$i_2 = 0\,A$ svo $\frac{di_2}{dt} = 0$

þá er $v_1 = L_1\frac{di_1}{dt}$ og $v_2 = M\frac{di_1}{dt}$

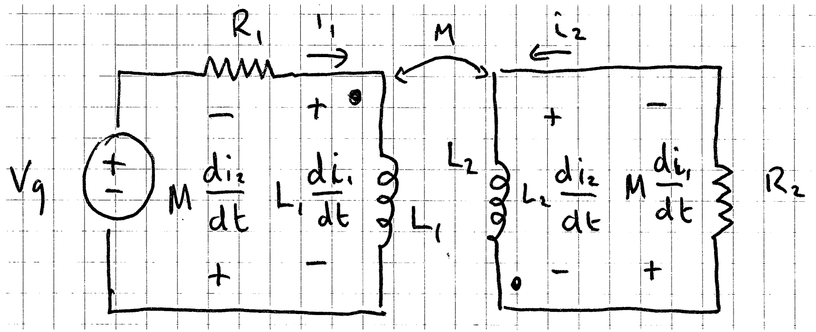
Við vitum að $M = k\sqrt{L_1 L_2} = \underline{\underline{0.2\ H}}$

Vitum að $\frac{di_1}{dt} = \frac{v_1}{L_1}$ og $\frac{di_1}{dt} = \frac{v_2}{M}$

svo $\frac{v_1}{L_1} = \frac{v_2}{M}$ svo $v_2 = \frac{M}{L_1}v_1 = \frac{0.2}{1}100\sin(1000t)$

eða $v_2 = 20\sin(1000t)\,V$ svo $\underline{\underline{v_{pk} = \max(v_2) = 20\,V}}$

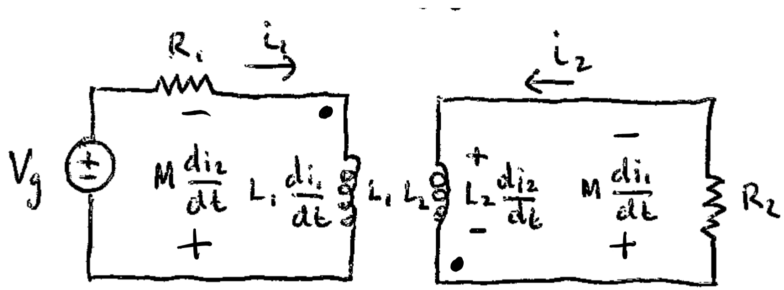
Viðmiðunarpunktar



- KVL gefur

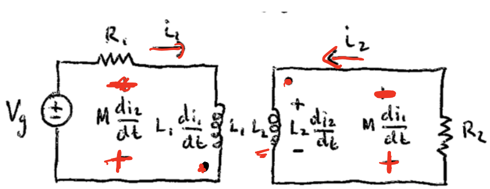
$$
\begin{aligned}
-v_g + i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= 0 \\
i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= 0
\end{aligned}
$$

Viðmiðunarpunktar

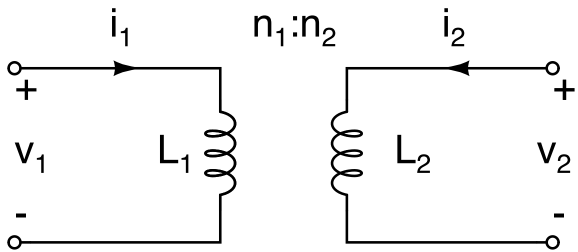


- KVL gefur

$$
\begin{aligned}
-v_g + i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} &= 0 \\
i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} &= 0
\end{aligned}
$$



Kjörspennir



Kjörspennir er líkan af raunverulegum spenni. Hann er fullkominn (og óraunverulegur) að tvennu leyti

1. Í honum tapast engin orka
2. Kúplingin er fullkomin, þ.e. $k = 1$

Kjörspennir

- Þá má rita

$$v_1 = n_1 \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t} \quad \text{og} \quad v_2 = n_2 \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t}$$

- Þar sem $k = 1$ þá er

$$\phi_1 = \phi_2$$

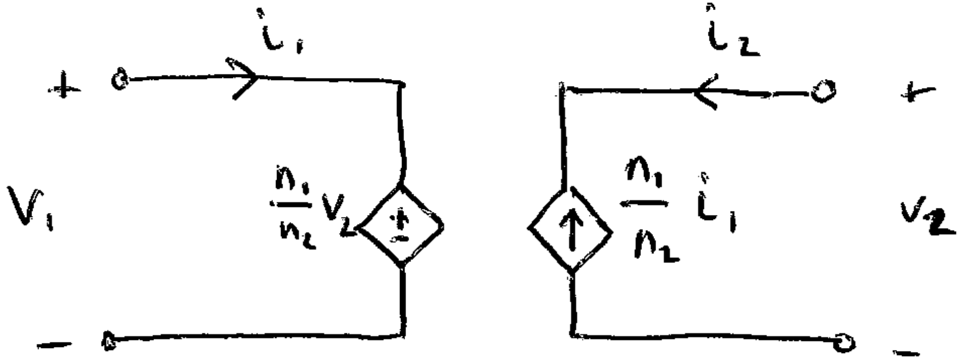
  og

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

- Fyrir kjörspenni þá gildir einnig

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}}$$

Nytsamlegt líkan fyrir kjörspenni



Kjörspennir

Ritum

$$v_1 n_2 = v_2 n_1 \qquad \text{og} \qquad \frac{i_1}{n_2} = -\frac{i_2}{n_1}$$

Margföldum jöfnurnar saman og fáum

$$v_1 n_2 \frac{i_1}{n_2} = v_2 n_1 \left(-\frac{i_2}{n_1}\right)$$

eða

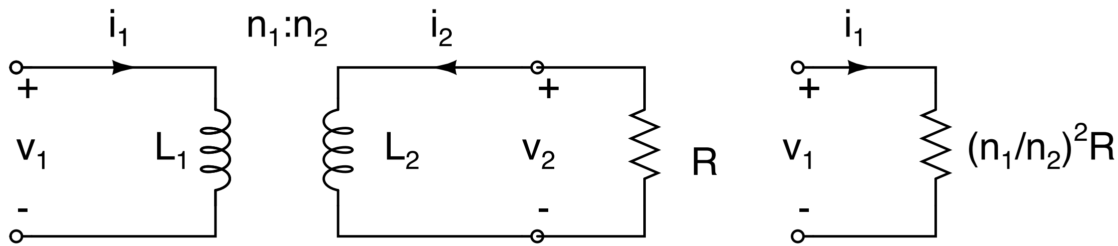
$$v_1 i_1 = -v_2 i_2$$

sem jafngildir

$$p_1 = -p_2$$

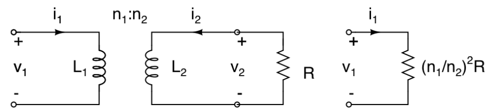
sem þýðir að allt afl sem fer inn á vaf 1 fer út úr vafi 2, þ.e. ekkert afl tapast

Kjörspennir



- Í kjörspenni má líta á annað vafið sem háspennuvaf með marga vindinga og lágan straum og hitt vafið sem lágspennuvaf með fáa vindinga en háan straum
- Gildi viðnáms sem tengt er yfir **bakvaf** spennis virðist séð frá **forvafinu** vera $(n_1/n_2)^2$ stærra en það er

Kjörspennir



- Hér gildir

$$-i_2 = \frac{v_2}{R}$$

en

$$i_1 = -\frac{n_2}{n_1} i_2 = \frac{n_2}{n_1}\frac{v_2}{R}$$

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}}$$

og

$$v_2 = v_1 \frac{n_2}{n_1}$$

eða

$$i_1 = \frac{n_2}{n_1}\frac{n_2}{n_1}\frac{v_1}{R} = \frac{v_1}{R}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

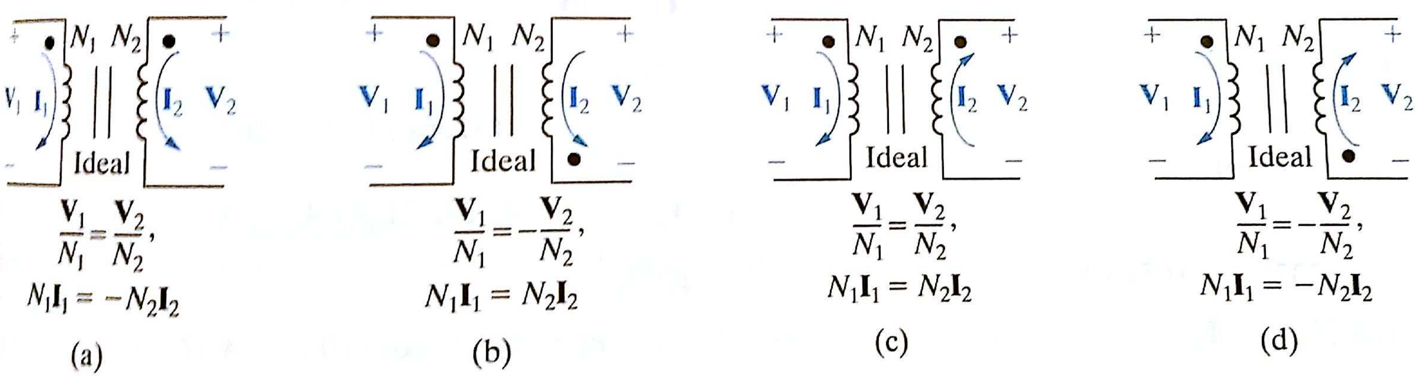
$$R_{eq} = \frac{v_1}{i_1}$$

- Viðnámið sem lind sem tengd er inn á forvafið sér er

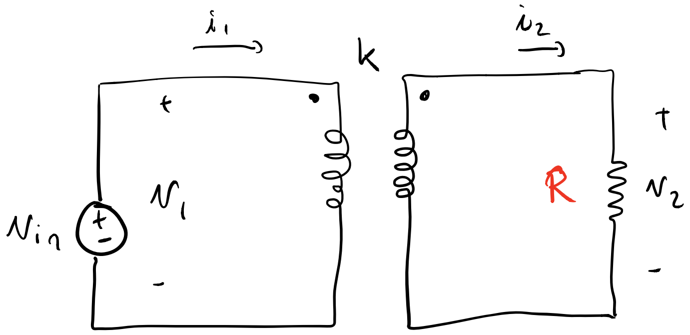
$$\frac{v_1}{i_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R$$

Kjörspennir

- Formerkin á formúlunum hér að framan er vegna þess hvernig spennan og straumur var skilgreindur.
- Í fyrirlestrinum höfum við gert ráð fyrir að punktarnir séu báðir uppi, en mismunandi hvernig straumurinn er skilgreindur (liður a og c):
  - Ef straumarnir i_1 og i_2 í spenninum eru báðir beindir inn eða út úr merkta punktinum, þá skal nota -, annars skal nota $+$.



Dæmi Gefinn er kjörspennir með $\frac{n_1}{n_2} = \frac{10}{1}$ & $v_{in}(t) = 10\sin(377t)$ V $R = 2\,\Omega$



Finnum v_2, i_2 & afl sem tapast í viðnámi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Fyrir kjörspenni

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}}$$

svo $v_2 = \frac{n_2}{n_1} v_1 = \frac{1}{10} \cdot 10\sin(377t)$

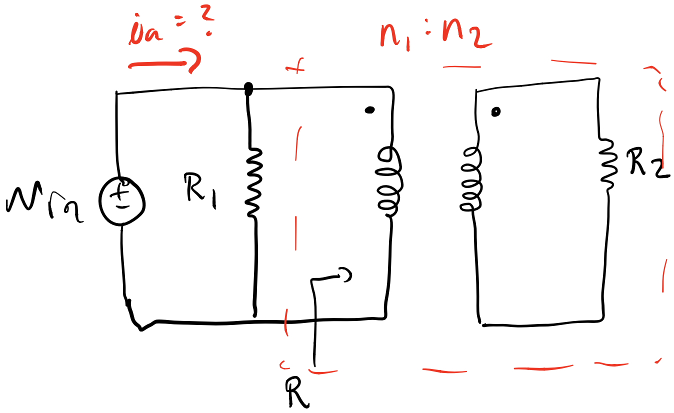
$$= \underline{\underline{\sin(377t)\ V}}$$

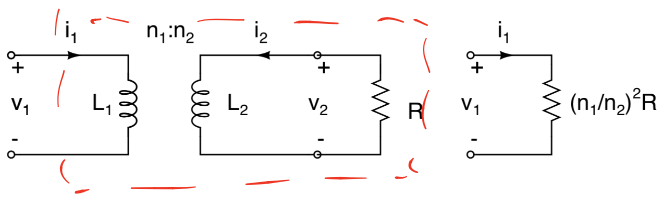
$$\underline{\underline{i_2 = \frac{v_2}{R} = \frac{1}{2}\sin(377t)\ A}}$$

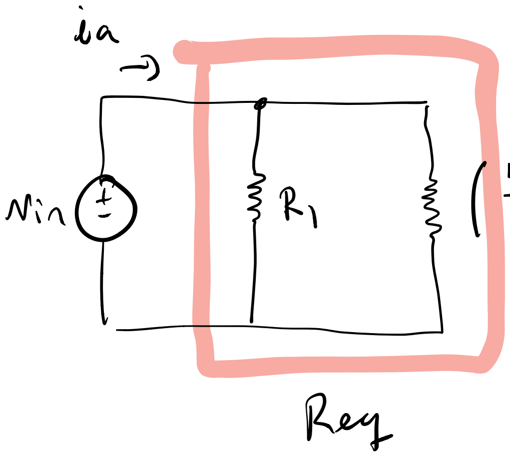
$$p_2(t) = i_2 v_2 \overset{v = i \cdot R}{=} i_2^2 R = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2(377t) \cdot 2\ W$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(1 - \cos(754t)\right)\ W}}$$

Demo: Find i_a at $v_{in}(t) = 10\sin(377t)$ & $R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$ $n_1 : n_2 = \frac{10}{1}$







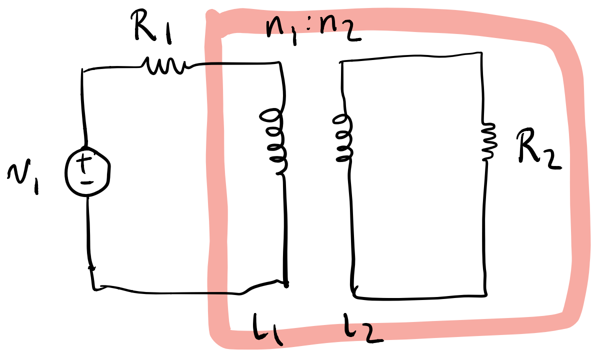
$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_2 = \left(\frac{10}{1}\right)^2 \cdot 1 = 100\,\Omega$$

$$i_a = \frac{v_{in}}{R_{eq}} = \frac{1}{33\frac{1}{3}} \cdot 10\sin(377t)$$

$$\approx 0.3\sin(377t)\ \text{A}$$

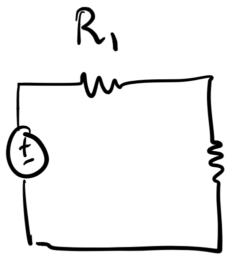
$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 = 33\tfrac{1}{3}\,\Omega$$

Dæmi: Með hvaða vindingahlutfalli $\frac{n_1}{n_2}$ fæst mest afl út í R_2?



Ef $R_1 = 36\Omega$ & $R_2 = 4\Omega$

Lausn: Til að fá hámarks afl þarf R_2 að líta út eins og R_1 séð frá „forvafinu" (L_1)



$$R_{eq} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot R_2 = R_1 \quad \text{svo} \quad \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$$