Greining Rása

Kerfi með sinuslaga innmerki

Ólafur Bjarki Bogason

8. apríl 2021

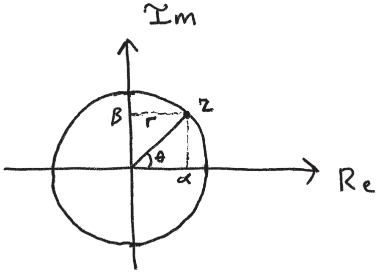
Inngangur

- Við viljum finna æstæða svörun línulegrar rásar við sínuslaga innmerki

$$v(t) = V_m cos(\omega t)$$

- Þessi svörun er einfaldlega sérlausnin á diffurjöfnu rásarinnar
- Við einblínum á sínuslaga innmerki vegna þess að
    1. Sínuslaga merki eru notuð í aflflutningsrásum (220 V (RMS) á 50Hz)
    2. Sínuslaga merki eru byggingareiningar lotubundinna merkja (Fourier greining)

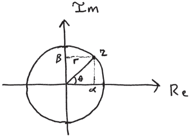
Tvinntölur



- Framsetning tvinntölu z

$$
\begin{aligned}
z &= \alpha + j\beta \quad \text{Rétthyrnt form} \\
&= r\angle\theta \quad \text{Pólform} \\
&= re^{j\theta} \quad \text{Veldisvísisform}
\end{aligned}
$$

Tvinntölur



- Sambandið á milli rétthyrnds forms og pólforms er eftirfarandi

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\
\theta &= \arctan(\frac{\beta}{\alpha}) \\
\alpha &= r\cos(\theta) \\
\beta &= r\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

Tvinntölur á pólformi

- Þegar breyta á gildi úr rétthyrndu formi yfir í pólform þá þarf að hafa í huga:

Fjórðungur	arctan gildi
I	gildið úr reiknivélinni
II	gildið úr reiknivélinni $+180°$
III	gildið úr reiknivélinni $+180°$
IV	gildið úr reiknivélinni

- Eingöngu þegar fært er yfir í pólform, það þarf ekkert að gera þegar breyta á gildi úr pólformi yfir í rétthyrnt form
- Það má alltaf leggja við eða draga frá $360°$

Tvinntölur á pólformi frh.

- $\alpha + j\beta$
  - Fjórðungur I: α og β bæði jákvæðar tölur
  - Fjórðungur II: α neikvæð og β jákvæð tala
  - Fjórðungur III: α og β bæði neikvæðar tölur
  - Fjórðungur IV: α jákvæð og β neikvæð tala
- Dæmi:

$$x_1 = 1 + j2 = \sqrt{5}\angle \arctan(\tfrac{2}{1}) = 2,236\angle 63,435^\circ$$
$$x_2 = -1 + j2 = \sqrt{5}\angle \arctan(\tfrac{2}{-1}) + 180^\circ = 2,236\angle 116,565^\circ$$
$$x_3 = -1 - j2 = \sqrt{5}\angle \arctan(\tfrac{-2}{-1}) + 180^\circ = 2,236\angle 243,435^\circ$$
$$x_4 = 1 - j2 = \sqrt{5}\angle \arctan(\tfrac{-2}{1}) = 2,236\angle - 63,435^\circ$$

  - Prófið að teikna vísamyndina, þá ætti að skýrast afhverju þetta er nauðsynlegt

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\beta/\alpha) & \text{ef } \alpha > 0 \\ \arctan(\beta/\alpha) + \pi & \text{ef } \alpha < 0 \end{cases}$$

Vísar (e. phasors)

- Hugsum okkur tvinntöluspennu

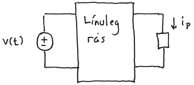
$$\boxed{v(t) = V_m e^{j(\omega t+\theta)} = \cos(\omega t+\theta) + j\sin(\omega t+\theta)}$$

- Við getum skrifað

$$\begin{aligned} v(t) &= \left(V_m e^{j\theta}\right) e^{j\omega t} \\ &= \left(V_m \angle\theta\right) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

- **Við köllum $V_m\angle\theta$ vísirinn fyrir $v(t)$**

Línuleg kerfi með sínuslaga innmerki



- G.r.f að línulegt kerfi hafi innspennu sem er sínuslaga

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

- Hún veldur sínuslaga straumsvörun

$$i_p(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

- **Svörunin er á sömu horntíðni og innspennan ef rásin er línuleg**

Línulegt kerfi með sínuslaga innmerki

- Ef innmerkið er tvinntölufall

$$v(t) = V_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

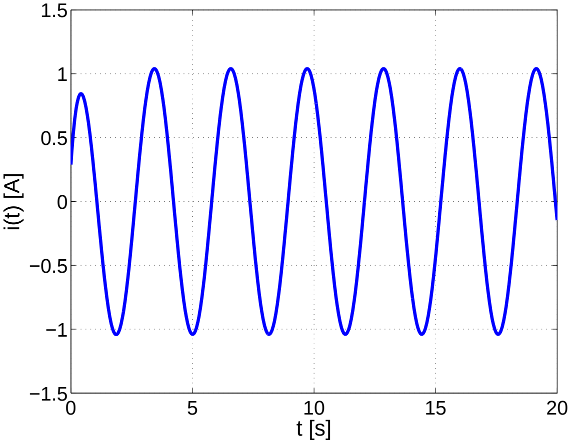
- Þá er útmerkið einnig tvinntölufall

$$i_p(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

Línulegt kerfi með sínuslaga innmerki

- Ef finna á æstæða svörun við sínuslaga innmerki þá reynist eftirfarandi aðferð auðveldust!
    1. Breytum sínuslaga innmerki í tilsvarandi tvinntöluveldisvísisfall
    2. Greinum rás á hefðbundinn hátt
    3. Finnið útmerkið á tvinntöluformi
    4. Takið raunhluta útmerkisins til að fá lokaniðurstöðu

Dæmi 12.4



Samviðnám og samleiðni fyrir sínuslaga innmerki

- Hugsum okkur að tvinntölustraumur

$$\hat{i}(t) = \boldsymbol{I} e^{j\omega t}$$

fari um spólu og spennan yfir spóluna sé

$$\hat{v}(t) = \boldsymbol{V} e^{j\omega t}$$

- Sambandið milli straums og spennu spólunnar er $\hat{v}(t) = L\frac{d\hat{i}}{dt}$ eða

$$\boldsymbol{V} e^{j\omega t} = j\omega L \boldsymbol{I} e^{j\omega t}$$

- Þannig að hlutfall spennuvísisins $\boldsymbol{V}$ og straumvísisins $\boldsymbol{I}$ sem við köllum **samviðnám** $Z(j\omega)$ er

$$\boxed{Z_L(j\omega) = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = j\omega L}$$

Samviðnám og samleiðni fyrir sínuslaga innmerki

- Með sömu röksemdafærslu má leiða út að samviðnám fyrir þétti er

$$\boxed{Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}}$$

- **Almennt gildir að samviðnám (e. impedance) fyrir sínuslaga innmerki $Z(j\omega)$ er skilgreint sem spennuvísir deilt með straumvísi**

$$\boxed{Z(j\omega) = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}}}$$

Samviðnám

- Samviðnám er almennt tvinntala

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

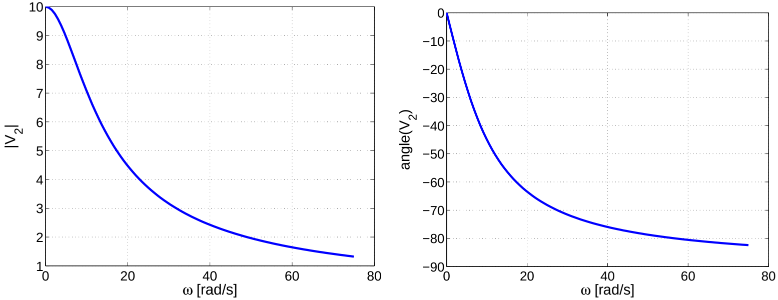
þar sem raunhlutinn kallast raunviðnám (e. resistance) og þverhlutinn kallast launviðnám (e. reactance)

- Samleiðnin $Y = 1/Z$ er einnig tvinntala sem við getum ritað

$$Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

þar sem raunhlutinn er kallaður leiðni (e. conductance) og þverhlutinn launleiðni (e. susceptance)

Dæmi 12.7



10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
|V2|
0
20
40
60
80
ω [rad/s]
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
−80
−90
angle(V2)
0
20
40
60
80
ω [rad/s]