$r(t) = t \cdot u(t)$

$u(t)$

Merki $\delta(t) = \frac{du}{dt}$

$g(t) = Ae^{-at}$ $g'(t) = (-a)\, g(t)$

$g(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)$

útslag mesta „Amplitude“

$f_0 \in \mathbb{R}$ er tíðni

$\phi \in \mathbb{R}$ er fasahorn

Grunnhugtök

Hleðsla q [C]

Straumur $i = \frac{dq}{dt}$ [A]

Spenna $v = \frac{dw}{dq}$ [V]

Orka w [J]

Afl p [J/s] $p>0$ gefur, $p<0$ tekur upp

afl

afl

„Lögmál Ohms“

$Z: i \to$ $v = Ri$

v_a R v_b

$\boxed{v_a > v_b}$ $i_{ab} = -i_b$

$\boxed{\text{það eina sem skiptir máli er } v, i}$

Kirchoff

Kirchoff's Voltage Laws

$\sum v = 0V$ $\boxed{KVL}$

lokuð lykkja

Kirchoff Current Laws $\boxed{KCL}$

$\sum_{inn} i = \sum_{út} i$

Óháðar lindir: v, i óþekkt ; i, v óþekkt

Háðar lindir: v háð rás, i óþekkt ; i háð rás, v óþekkt

MNA

$N_{jöfnur} = N_{hp} + N_{vs/i\ óþekkt} - 1$ (hnútpunktajöfnur með upplýsingum um óþekkta strauma)

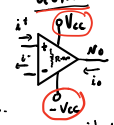
Möskva- & hnútpunktajöfnur

möskvi.

knippi.

Aðgerðarmagnarar

active rásaeining



$\boxed{\begin{array}{l}\text{Fullkominn op-amp} \\ i^+ = i^- = 0A \\ v^+ = v^- \quad v_o, i_o \text{ óþekkt}\end{array}}$

óþekktar breytur

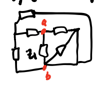
óháðar lindir inngangur

$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ \vdots \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ V_1 \end{bmatrix}$

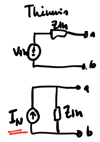
V_f

Jafngildisrásir

Viðnám eiginleikar tveimur að v, i eða Z/Y



Thévenin



$V_{th} = V_{oc}$

$I_N = I_{sc}$

$V_{th} = I_N \cdot Z_{eq}$

Z_{eq} 1A prufustr. & mæla spennu

v & i er óþekkt.

leysa rás þannig $v = \frac{v_1 + v_2}{v_m} - Z_{th}\, i$

Orkugeymandi rásaeiningar + spennar

$i(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$ $i(t) = C\frac{dv}{dt} = Cpv$ $w = \frac{1}{2}Cv^2$

$= \frac{i}{Cp}$

$v(t) = L\frac{di}{dt} = Lpi$ $i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt = \frac{v}{Lp}$ $w = \frac{1}{2}Li^2$

$Y_L = \frac{1}{Lp}$

$Y_R = \frac{1}{R}$

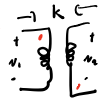
$Y_C = Cp$

óháðar lindir

óþekkt str.

$\begin{bmatrix} Y_{a1} & -Y_{ab} & \\ -Y_{ab} & Y_{ab}+Y_{bj} & \\ \cdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ \vdots \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ V_1 \end{bmatrix}$

$\to k \leftarrow$



Kerfisjöfnur

$p = \frac{d}{dt}$ $\frac{1}{p} = \int_{-\infty}^{t} d\tau$

Nota KCL & KVL til að finna tegur-diffjöfnur sem lýsa rásum með f & g.

$\to v_S(t) = 6\frac{d^2 v_C}{dt} + v_C(t)$

kúplun gagnspan

$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

$v_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt}$

$v_2(t) = \pm M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$

Fyrstu gráðu kerfi

Annarar gráðu kerfi

Sínuslaga inmerki

Aflreikningar

Einn $\dashv\vdash$ / $\S$

Tveir orkugeymandi

Náttúrulega lausn (engin innmerki)

Sérlausn (innmerki)

Núllástands lausn

Núllinnmerkis lausn

$N_{gráða} = N_{orkugeymandi}$

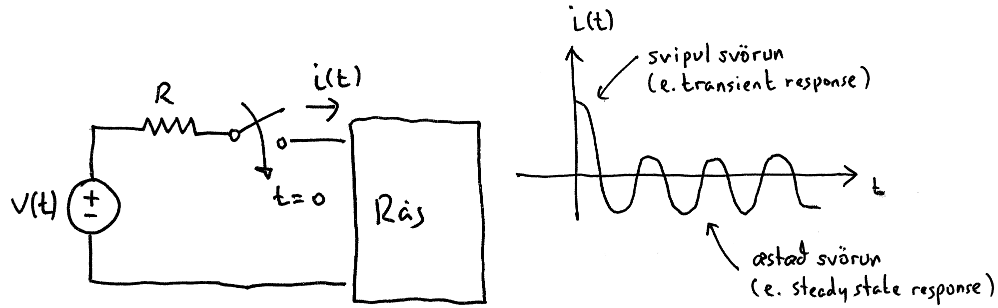
Greining Rása

Fyrstu gráðu kerfi

Ólafur Bjarki Bogason

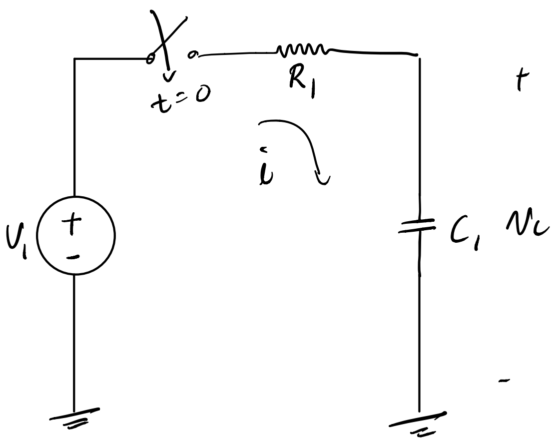
8. mars 2021

Inngangur



- Ef rás með rýmd og/eða spani er örvuð með lind sem breytir gildi sínu skyndilega, þá tekur tíma fyrir spennur og strauma í rásinni að komast í stöðugt ástand aftur (ná **æstæðri svörun**).
- Til að lýsa hegðun rásarinnar á þessum tíma (**svipulli svörun**) þurfum við að leysa diffurjöfnur sem tengja rásabreytur við lindina.

Dæmi: Finna heildarjöfnu v_c fyrir $t>0$ $\quad V_1 = 3V \quad R_1 = 2\Omega \quad C_1 = \frac{1}{10}F$



$$iR_1 + v_c = V_1 \qquad t>0$$

$$i = C_1 p v_c = C_1 \frac{dv_c}{dt}$$

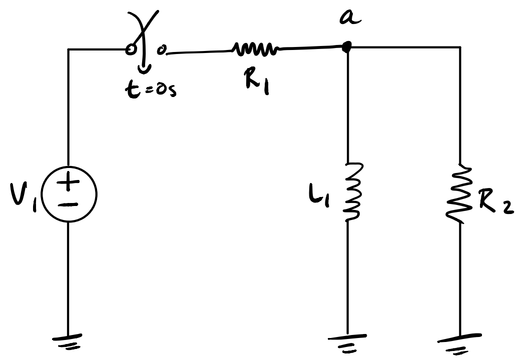
svo $$i_R = R_1 C_1 \frac{dv_c}{dt}$$

svo $$R_1 C_1 \frac{dv_c}{dt} + v_c = V_1$$

eða $$\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{R_1 C_1} v_c = \frac{V_1}{R_1 C_1}$$

svo $$\underline{\underline{\frac{dv_c}{dt} + 5 v_c = 15 \qquad t>0}}$$

Dæmi Skrifið diffurjöfnu fyrir $t>0$. $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $L_1 = 2H$ V_1 er þekkt.



KCL í a gefur

$$\frac{v_a - V_1}{R_1} + \frac{v_a - 0}{R_2} + i_L = 0$$

Vitum að $v_a = L_1 \frac{di_L}{dt}$

svo $$v_a \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} + i_L = \frac{V_1}{R_1}$$

eða $$L_1 \frac{di_L}{dt} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} + i_L = \frac{V_1}{R_1}$$

eða $$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{L_1} i_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{L_1} V_1$$

Setjum inn $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $L_1 = 2H$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{\cancel{2}\cdot 6}{(2+6)} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} i_L + \frac{\cancel{6}\cdot 3}{(2+6)} \frac{1}{\cancel{2}} V_1$$

eða $$\boxed{\frac{di_L}{dt} + \frac{3}{4} i_L = \frac{3}{8} V_1 \quad t > 0}$$

Nátturuleg svörun fyrstu gráðu kerfa:

óháðar

- Skoðum kerfi sem inniheldur engar lindir virkar eftir tímann $t = 0$. Viljum finna strauma og/eða spennur fyrir $t > 0$.
- Skoðum jöfnuna sem gildir um kerfið fyrir $t > 0$.
- Hún er á forminu

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha x = 0}$$

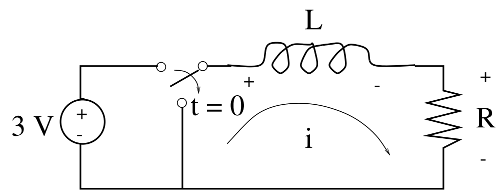
$x' + ax = 0$

fyrir fyrstu gráðu kerfi

$x' = -ax$

$f(t) = Ae^{-at}$ $\quad f'(t) = (-a)\,f(t)$

Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:



- Beitum KVL á rásina fyrir $t > 0$ og fáum

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$$

eða

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = 0, \qquad t > 0$$

- Hér ekkert innmerki til staðar.
- Diffurjafnan sem fæst fyrir slíka rás er <u>óhliðruð</u>

Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:

$$\frac{di}{dt} = -k\,i$$

- Setjum fastann $R/L = k$, þá er jafnan,

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ki = 0, \qquad t > 0$$

- Við sjáum að fallið $i(t)$ og diffurkvóti þess verða að hafa sama bylgjuformið, annars gæti summa þeirra ekki orðið núll
- Við vitum að diffurkvóti veldisfalls er einnig veldisfall, prófum því hvort veldisfallið er lausn
- Giskum á lausn

$$\boxed{i(t) = Ae^{st}}$$

  þar sem A og s eru fastar.

Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:

- Þá er

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st}$$

sem við setjum inn í diffurjöfnuna

$$s\cancel{Ae^{st}} + k\cancel{Ae^{st}} = 0$$

$$i(t) = Ae^{st}$$

$\downarrow$ náttúruleg lausn

$$i(t) = \underline{A}e^{-\frac{R}{L}t}$$

eða

$$\boxed{s + k = 0} \quad \text{Kennijafnan}$$

eða

$$\boxed{s = -k} = -\frac{R}{L}$$

svo að lausnin er

$$i(t) = Ae^{-kt}$$

háð rásaeiningum

hér $k = \frac{R}{L}$

- Við vitum að straumurinn er veldisfall og stuðullinn k ákvarðast af stærð rásaeininganna

Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:

- Jafnan

$$\boxed{s + k = 0}$$

  kallast **kennijafna** eða **eiginjafna** kerfisins

- Lausn hennar, $s = -k$ kallast **eigingildi** (**kennigildi**) kerfisins

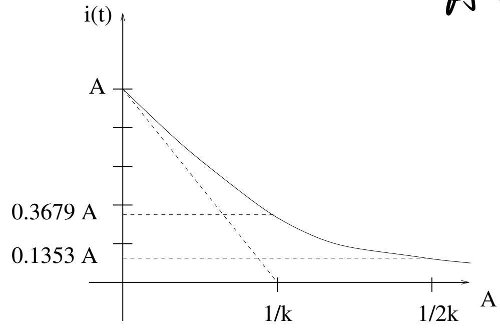
- Lausn óhliðruðu diffurjöfnunnar kallast **náttúruleg svörun** kerfisins, því hún er eingöngu háð einingum og uppbyggingu kerfisins sjálfs, ekki neinum lindum sem drífa kerfið

R_1, R_2, C_1
C_2, L_2
L_3
μ

óháðir (innmeli)

Tímastuðull

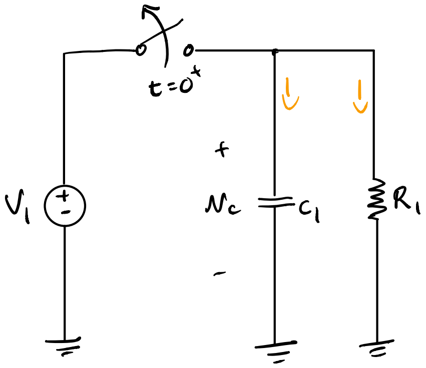
Ae^{-kt}



- Tímastuðull τ er tíminnn sem það tekur svörunina að falla niður í $1/e \approx 0.37$ af upphafsgildi sínu
- Frá náttúrulegu lausninni $i(t) = Ae^{-kt}$ sjáum við að tímastuðull fyrstu gráðu rásar er

$$\boxed{\tau = 1/k}$$

Dæmi: $V_1 = 6V$ $R_1 = 3\Omega$ $C_1 = \frac{1}{2}F$ Finna $v_c(t)$ fyrir $t>0$



$v_c + i_c R_1 = 0$ eða $v_c + R_1 C_1 p\, v_c = 0$

eða $v_c + R_1 C_1 \frac{dv_c}{dt} = 0$

eða $\boxed{\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{R_1 C_1} v_c = 0}$

(a)

Setjum inn gildi R_1 & C_1 $\frac{dv_c}{dt} + \frac{2}{3} v_c = 0$

Giskum á lausn $v_c(t) = Ae^{st}$

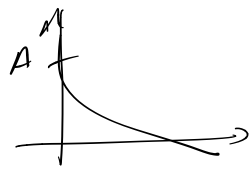
$v_c'(t) = sAe^{st}$

Setjum inn í (a) $s\cancel{Ae^{st}} + \frac{2}{3}\cancel{Ae^{st}} = 0$

eða $s + \frac{2}{3} = 0$ sem $s = -\frac{2}{3} = -\frac{1}{R_1 C_1}$

$k = -\frac{2}{3}$

Þá er $v_c(t) = Ae^{-\frac{2}{3}t}$



Náttúruleg svörun fyrstu gráðu kerfa:

Náttúrulega svörun rásar sem inniheldur eina spólu eða einn þétti og engar lindir má finna á eftirfarandi hátt:

1. Finna diffurjöfnu sem gildir fyrir tímabilið sem skoða á (venjulega $t > 0$). Þessi diffurjafna er óhliðruð (engar lindir)
2. Giska á lausn á forminu

   $v_C' + v_C = 0$

$$x(t) = Ae^{st}$$

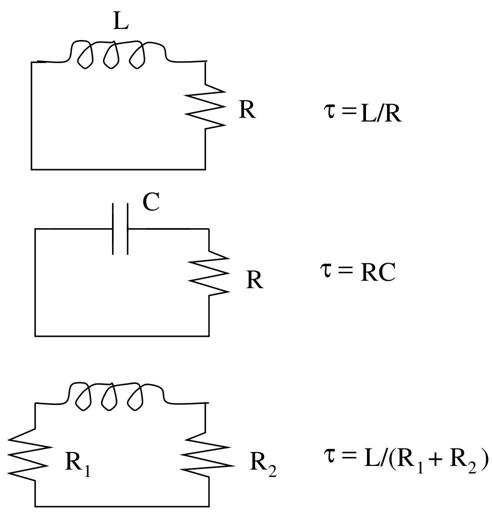
3. Setja þetta fall $x(t)$ og diffurkvóta þess $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ inn í diffurjöfnuna, deila í gegn með Ae^{st} og þá stendur kennijafnan eftir. $s + k = 0$
4. Finna eigingildið (rót kennijöfnunnar) og setja það inn í lausnina í skrefi 2 $s = -k \rightarrow$ inn í $x(t)$

Tímastuðull

- Tímastuðulinn má finna beint út frá gildum rásaeininganna í fyrstu gráðu rásum

$k = \frac{1}{R_1 C_1}$

- Sé rásin með þétti þá er tímastuðullinn $\tau = RC$; sé rásin með spólu þá er tímastuðullinn $\tau = L/R$, þar sem R er í báðum tilfellum Théveninjafngildisviðnám rásarinnar séð frá þéttinum eða spólunni



Byrjunarskilyrði

- Náttúruleg svöruna allra fyrstu gráðu kerfa er

$$x(t) = Ae^{st}$$

  þar sem $x(t)$ er straumurinn eða spennan sem finna á og s er eigingildið (rót kennijöfnunnar), sem er háð gildum rásaeininganna

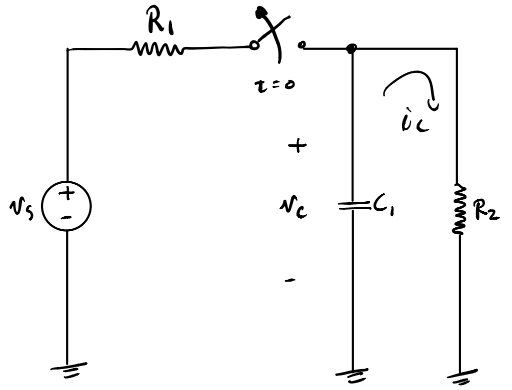
- Setjum inn $t = 0^+$ og fáum

$t > 0$

$$x(0^+) = Ae^{s0} = A$$

- Með því að skoða og greina rásina við tímann $t = 0^+$ má því finna stuðulinn A.

Døpur V_s, R_1, R_2, C_1 eru fastir. Finnum $v_C(t)\ \forall t$



Fyrir $t>0$ fyrst með KVL:

$$v_C + i_C R_2 = 0$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$

svo $$v_C + R_2 C_1 \frac{dv_C}{dt} = 0$$

eða $$\boxed{\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R_2C_1}v_C = 0}$$

Giskum á lausn $v_C(t) = Ae^{st}$

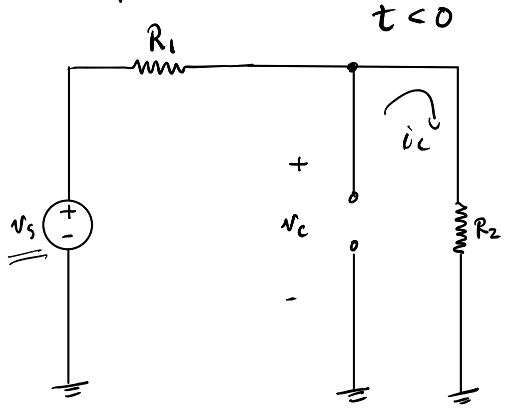
$$v_C'(t) = sAe^{st}$$

Þá fæst $s\cancel{Ae^{st}} + \frac{1}{R_2C_1}\cancel{Ae^{st}} = 0$ svo $s + \frac{1}{R_2C_1} = 0$ & $\underline{\underline{s = -\frac{1}{R_2C_1}}}$

Vitum að $v_C(t) = Ae^{-t/R_2C_1}$ er náttúrleg lausn.

Til að finna stuðulinn A þurfum við gildið á v_C við $t=0^+$

$t<0$



$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$\underline{\underline{v_C(0^-) = \frac{R_2}{R_1+R_2}V_s}}$$

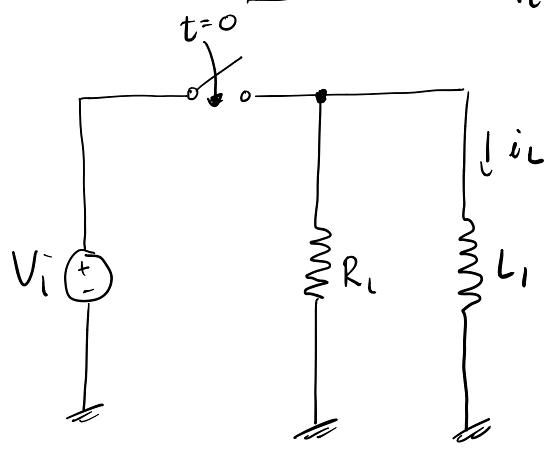
Vitum að engir impúlsstraumar eru í rásinni & spenna yfir þétti er samfelld

það þýðir að $\underline{v_C(0^-) = v_C(0^+)} = \frac{R_2}{R_1+R_2}v_s$

$$v_C(t) = Ae^{-t/R_2C_1} \qquad v_C(0^-) = A\cdot\cancel{e^0}^{\,1} = \frac{R_2}{R_1+R_2}V_s$$

$$v_C(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_s \, e^{-t/R_2 C_1} \text{ V} \qquad t > 0$$

Dæmi Finnum $i_L(0^+)$ & $\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+}$ ef $V_1 = 10V$ $R_1 = 3\Omega$ $L_1 = 5H$



Við gef að rofi hafi verið opinn legi

þá gildir $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0\,A$

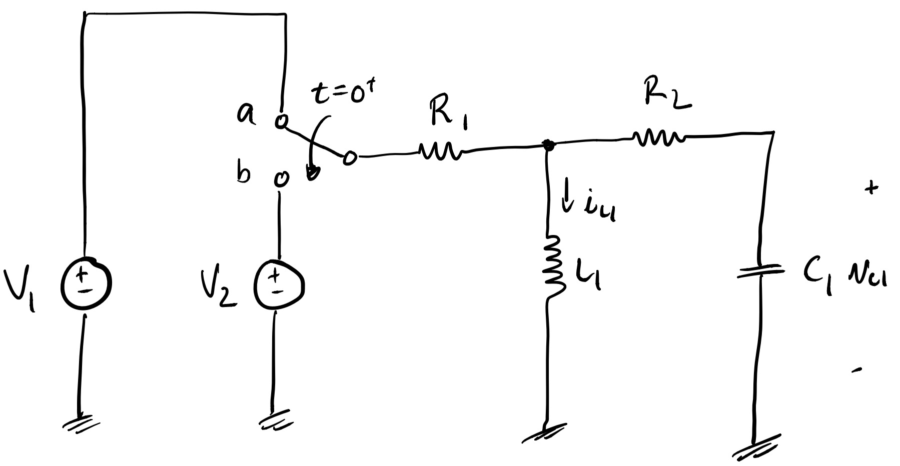
Við $t=0^+$ er spenna yfir viðnám & spólunni 10V

$$\boxed{10\,V = v_R(0^+) = v_L(0^+)} = L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+}$$

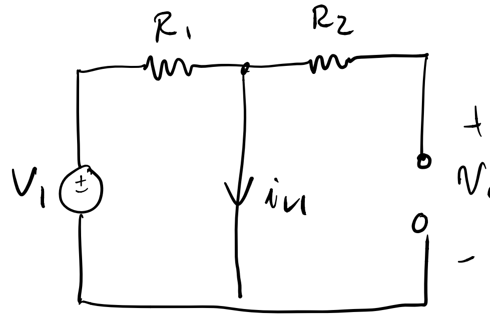
svo $$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{L} v_L(0^+) = \frac{10\,V}{L} = \frac{10}{5} = 2\,\frac{A}{s}$$

Dæmi Finnum i_{L1}, v_{C1}, $\frac{di_{L1}}{dt}$, $\frac{dv_{C1}}{dt}$ ef $V_1 = 12V$ $V_2 = 6V$ $R_1 = 4\Omega$ $R_2 = 2\Omega$ $L_1 = 5H$ $C_1 = \frac{1}{6}F$ við $t = 0^+$

fasti



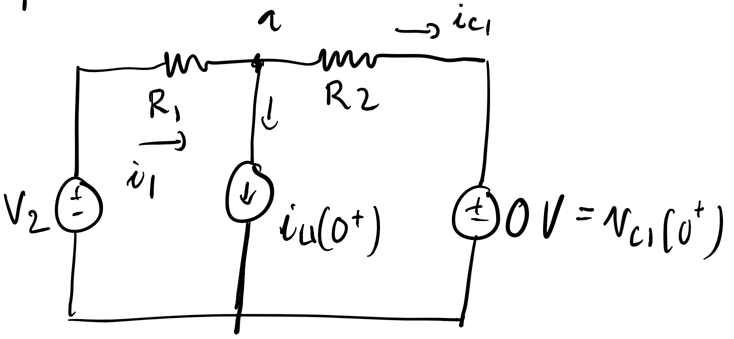
Fyrir $t<0$ er rásin svona



$v_{C1}(0^-) = 0V$ & $i_{L1}(0^-) = \frac{V_1}{R_1} = 3A$

Vegna samfelldni er $v_{C1}(0^-) = v_{C1}(0^+) = \underline{0V}$ & $i_{L1}(0^-) = i_{L}(0^+) = \underline{3A}$

Fyrir $\underline{t=0^+}$ er rásin svona



KCL í a gefur

$$\frac{V_2 - V_a}{R_1} = i_{L1}(0^+) + \frac{v_a - 0}{R_2}$$

$$\frac{6 - v_a}{4} = 3 + \frac{v_a - 0}{2}$$

svo $\underline{v_a(0^+) = -2V} = v_{L1}(0^+)$

Då er $i_1(0^+) = \dfrac{V_2 - v_a(0^+)}{R_1} = \dfrac{6-(-2)}{4} = \underline{2A}$

& $i_{c1}(0^+) = i_1 - i_{L1}(0^+) = 2 - 3 = \underline{\underline{-1A}}$

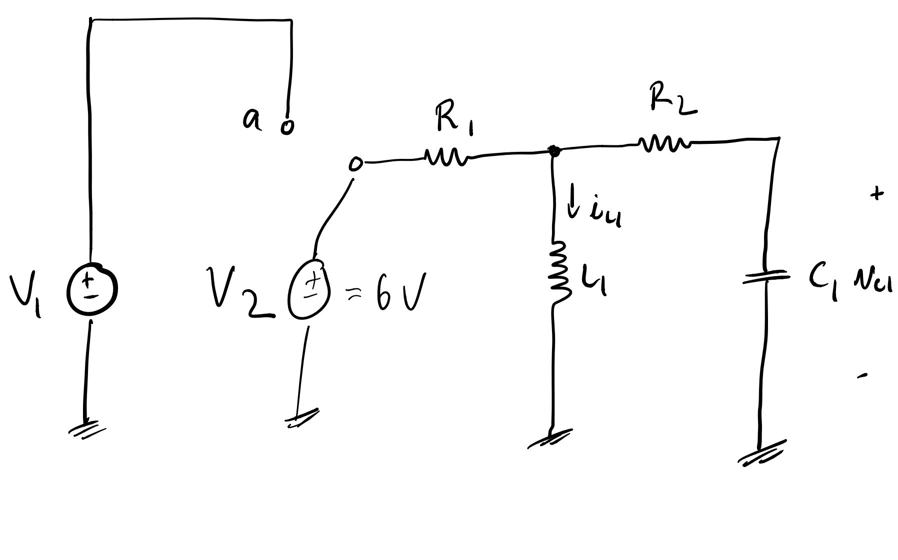
Nå er $i_{c1} = C_1 \dfrac{dv_{c1}}{dt}$ så $\left.\dfrac{dv_{c1}}{dt}\right|_{t=0^+} = \dfrac{i_{c1}(0^+)}{C_1} = \dfrac{-1}{1/6F} = \underline{\underline{-6\,\frac{V}{s}}}$

$v_{L1} = L_1 \dfrac{di_{L1}}{dt}$ så $\left.\dfrac{di_{L1}}{dt}\right|_{t=0^+} = \dfrac{v_{L1}(0^+)}{L_1} = \dfrac{-2}{5}\ \dfrac{A}{s}$

$\underset{-}{i_{L1}}, \underset{+}{v_{c1}}, \dfrac{di_{L1}}{dt}, \dfrac{dv_{c1}}{dt}$

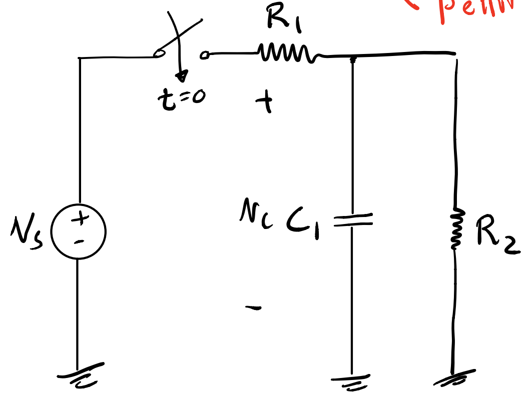
$i_{L1}(0^+) = 3A$ $\qquad v_{c1}(0^+) = 0V$

$\left.\dfrac{di_{L1}}{dt}\right|_{t=0^+} = -\dfrac{2}{5}\,\dfrac{A}{s}$ $\qquad \left.\dfrac{dv_{c1}}{dt}\right|_{t=0^+} = -6\,\dfrac{V}{s}$



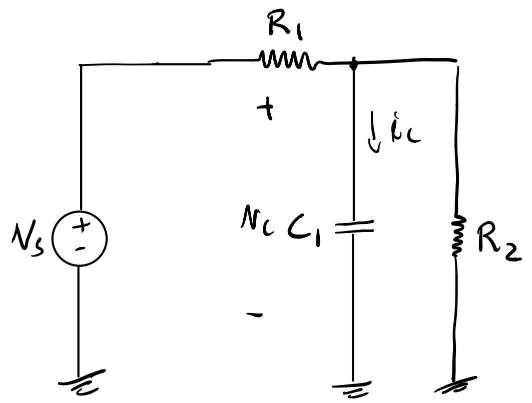
Dæmi $v_s = 6V$ $v_c(0^-) = 0V$, $R_1 = 10\Omega$ $R_2 = 5\Omega$ $C_1 = 2F$

þéttir óhlaðinn þegar kveikt á rás



Finna $v_c(t)$ fyrir $t>0$

$$i_c = C p v_c = C\frac{dv_c}{dt}$$



KCL í c: $\dfrac{v_s - v_c}{R_1} = i_c + \dfrac{v_c}{R_2}$

svo $\dfrac{6 - v_c}{10} = 2\dfrac{dv_c}{dt} + \dfrac{v_c}{10}$

einföldum $\boxed{\dfrac{dv_c}{dt} + \dfrac{3}{20}v_c = \dfrac{3}{10} \qquad t>0}$

hliðruð diffurjafna

Náttúrleg lausn

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{3}{20}v_c = 0$$

$v_{cn}(t) = Ae^{st}$, kennijafnan er $s + \frac{3}{20} = 0$

svo $v_{cn}(t) = Ae^{-\frac{3}{20}t}$

Sérlausn

$$\frac{dv_p}{dt} + \frac{3}{20}v_p = \frac{3}{10}$$

Giska að $v_p = k \in \mathbb{R}$ $\dfrac{dv_p}{dt} = 0 \Rightarrow 0 + \dfrac{3}{20}k = \dfrac{3}{10}$ svo $k = 2$

$$v_p(t) = 2$$

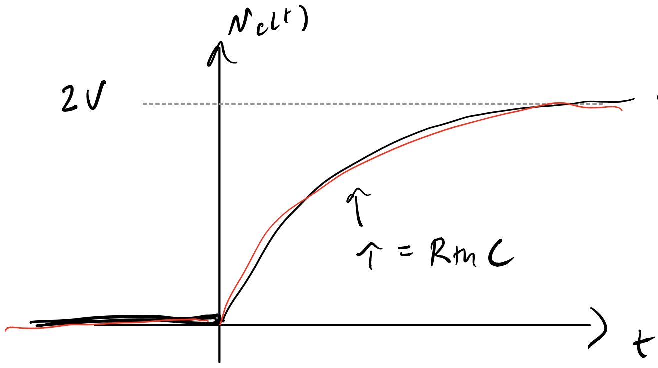
Heildarlausn

$$v_c(t) = v_{cn}(t) + v_p(t) = Ae^{-\frac{3}{20}t} + 2$$

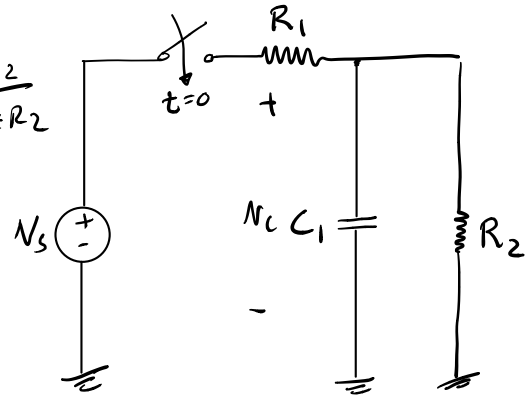
Nú er $v_c(0^-) = 0 = v_c(0^+) = Ae^{0} + 2 = 0$

svo $A = -2$

$$v_c(t) = 2\left(1 - e^{-3t/20}\right)u(t) \text{ V}$$



opin rás $\frac{R_2}{R_1+R_2}$



$v_c(0^-) = 1V$

engar impúlsar í rás

Núllinnmerkislausn er náttúrulegu lausnin með $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 1V$

Hér er ekkert innmerki, bara upphafsgildi

$$v_{cn}(t) = Ae^{-\frac{3}{20}t}$$

$v_{cn}(0^-) = 1 = A\cancel{e^{0}}$ svo $A = 1$

$$v_{czi} = e^{-\frac{3}{20}t}$$

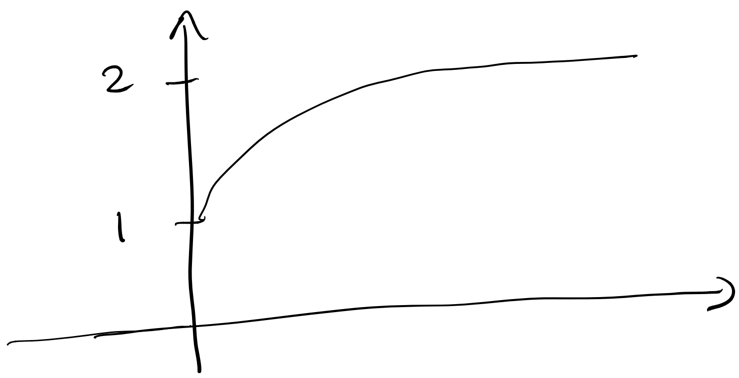
Núllástandslausnin er heildarlausn með upphafsgildi í 0 ($v_c(0) = 0V$)

$A\cancel{e^{-\frac{3}{20}t}} + 2 = 0$ svo $A = -2$

$v_{cp}(0^+) = A + 2 = 0$ svo $v_{czs}(t) = -2e^{-\frac{3}{20}t} + 2$

$\rightarrow v_c(t) = v_{czi} + v_{czs} = 2 - e^{-\frac{3}{20}t}$, hei er $v(0^-) = 1V$

$\rightarrow v_c(t) = 2\left(1 - e^{-3t/20}\right) u(t)\ V$, hei er $v(0^-) = 0\ V$



Heildarsvörun

- Lítum nú á aðferð til að finna heildarsvörun fyrir línuleg kerfi (ekki bara fyrstu gráðu kerfi)
- Skoðum nú rásir sem eru örvaðar með lindum fyrir $t > 0$

Heildarsvörun fyrstu gráðu kerfa

Aðferðin til að leysa fyrstu gráðu rásir með lindum er því:

1. Skrifa diffurjöfnuna fyrir $t > 0$ $f(x) = 0$
2. Leysa óhliðruðu diffurjöfnuna (finna náttúrulegu svörunina):
   - Gera ráð fyrir
     $$x_n(t) = Ae^{st}$$
   - Setja $x_n(t)$ inn í óhliðruðu diffurjöfnuna og finna s. A er enn óþekkt.
3. Finna sérlausn x_p sem uppfyllir hliðruðu diffurjöfnuna
4. Leggja saman lausnir úr skrefi 2. og 3.

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t)$$

5. Finna A með hjálp byrjunarskilyrða

Núllástandssvörun og núllinnmerkissvörun

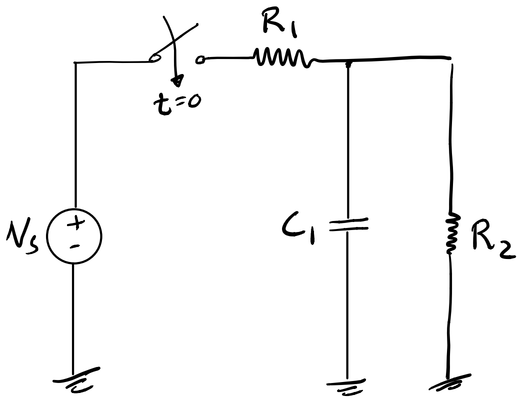
Höfum séð að heildarsvörun kerfis er summa náttúrulegu lausnarinnar og sérlausnarinnar.

En við getum einnig hugsað okkur að heildarlausnin sé sett saman úr tveimur öðrum þáttum:

- **Núllinnmerkislausn**, sem er svörun eða örvun með upphafsgildum eingöngu (engar lindir)
- **Núllástandslausn**, sem er svörun við örvun með innmerki eingöngu (upphafsgildi öll núll).

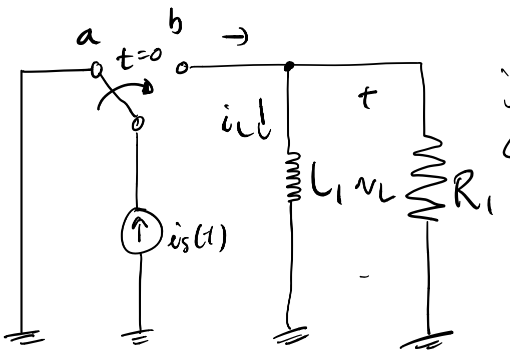
Dapni $v_s = 6V$ $v_C(0^-) = 1V$, $R_1 = 10\,\Omega$ $R_2 = 5\,\Omega$ $C_1 = 2F$

Finn nollinsignal- & nolltillståndslösningen

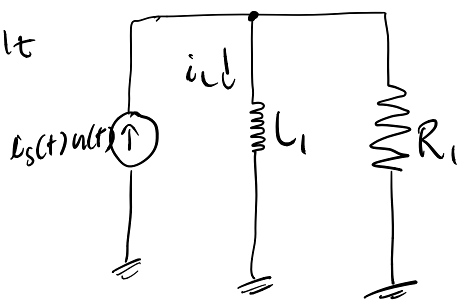


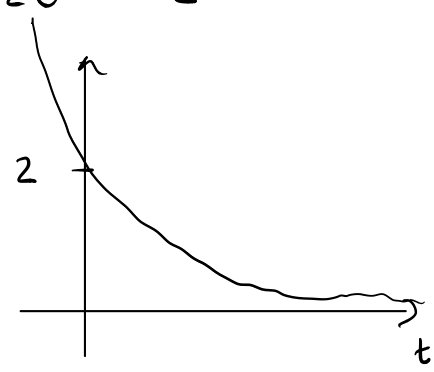
Dæmi: Finnum $i_L(t)$ fyrir $t>0$ ef $i_s(t) = 2e^{-5t}\ \forall t$ $\quad i_s(0) = 2e^{-5\cdot 0} = 2$

$L_1 = 4H \quad R_1 = 3\Omega$



jafngilt

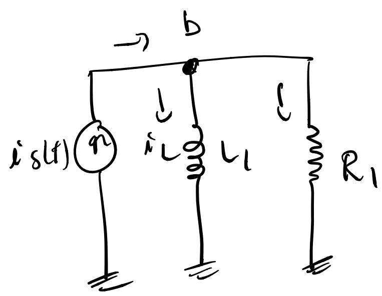




Rofi fer úr a í b við $t = 0$ s. Finnum $i_L(t)$ $\forall t > 0$ ef $i_s(t) = 2e^{-5t}\ \forall t$

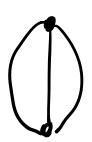
Lausn: Gerum ráð fyrir að $i_L(0^-) = 0A$. Fyrir $t>0$ gildir

KCL í b: $\quad i_L + \dfrac{v_L}{R_1} = i_s$



Hef að $v_L = L_1 \dfrac{di}{dt} = 4\dfrac{di}{dt}$

svo $\quad i_L + \dfrac{4}{3}\dfrac{di}{dt} = 2e^{-5t}$



eða $\boxed{\dfrac{di}{dt} + \dfrac{3}{4} i_L = \dfrac{3}{2} e^{-5t}}$ Diffurjafna sem lýsir allri rásinni (LTI)

Náttúruleg svörunin er á forminu $i_n(t)$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{3}{4} i_L = 0$$

plöggum $i_{Ln}(t) = Ae^{st}$ (ágiskun) inn í óhliðraða diffurjöfnu

$$i'_{Ln}(t) = sAe^{st}$$

$$s\cancel{Ae^{st}} + \frac{3}{4}\cancel{Ae^{st}} = 0 \quad \text{svo} \quad s = -\frac{3}{4}$$

$$i_{Ln}(t) = Ae^{-\frac{3}{4}t}$$

Sér lausn á: $\frac{di}{dt} + \frac{3}{4} i_L = \frac{3}{2} e^{-5t}$

Gískum $i_{Lp}(t) = K_0 e^{-5t}$ & pluggum inn í upprunalegu diffurjöfnu

$i_{Lp}'(t) = (-5) K_0 e^{-5t}$

eða $-5K_0 \cancel{e^{-5t}} + \frac{3}{4} K_0 \cancel{e^{-5t}} = \frac{3}{2} \cancel{e^{-5t}}$

eða $-5K_0 + \frac{3}{4} K_0 = \frac{3}{2}$ svo $K_0 = -\frac{6}{17}$

Heildarlausn er þá $i_L(t) = i_{Ln}(t) + i_{Lp}(t)$

$= A e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{6}{17} e^{-5t}$

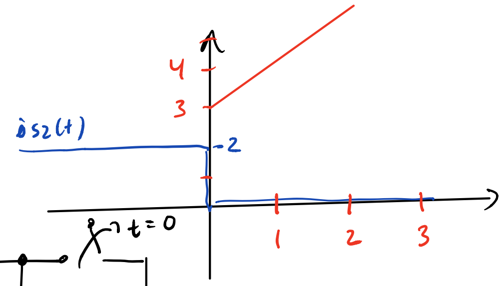
Vitum að $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0\,A = A e^{0} - \frac{6}{17} e^{0}$

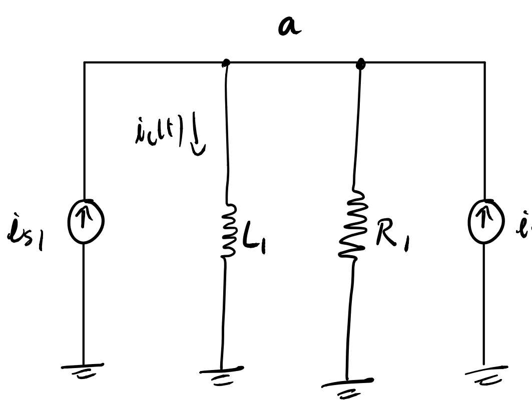
svo $A = \frac{6}{17}$

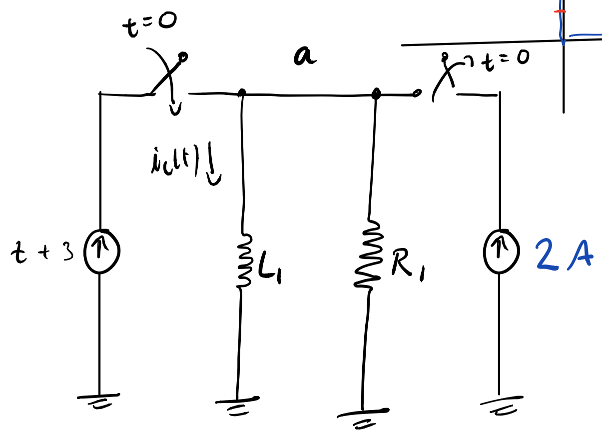
þá $i_L(t) = \frac{6}{17}\left(e^{-\frac{3}{4}t} - e^{-5t}\right) u(t) \quad A$

Dæmi 10.10 Finnum $i_L(t)$ ef $i_{s1}(t) = (t+3)u(t)$ A

$i_{s2}(t) = 2u(-t)$ A







$L_1 = 6$ H

$R_1 = 3\,\Omega$

Fyrir $t<0$ er $i_{s1} = 0$ & $i_{s2} = 2A = i_L(0^-)$ $\qquad v_L = L\frac{di}{dt}$

Fyrir $t>0$ er $i_{s1} = t+3$ & $i_{s2} = 0$

Fyrir $t>0$ á fyrst

KCL í a: $i_L + \frac{v_L - 0}{R_1} = t+3$ eða $i_L + \frac{1}{3}6\frac{di_L}{dt} = t+3$

eða $\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2}i_L = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}$ (*) $t>0$

Náttúruleg lausn

Skoðum óhliðraða útgáfu af (*) þ.e. $\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2}i_L = 0$

Giskum á $i_{Ln}(t) = Ae^{st}$ svo $s\cancel{Ae^{st}} + \frac{1}{2}\cancel{Ae^{st}} = 0$

$i'_{Ln}(t) = sAe^{st}$ eða $s = -\frac{1}{2} = -\frac{L_1}{R_1}$

$i_{Ln}(t) = Ae^{-t/2}$

Sérlausn $\underbrace{\frac{di_L}{dT} + \frac{1}{2} i_L = \underbrace{\frac{t}{2} + \frac{3}{2}}}$

Giskum á $i_p(t) = k_1 t + k_2$, k_1 & $k_2 \in \mathbb{R}$

$i_p'(t) = k_1$

Setjum inn í ólíkuðu diffjöfn.

$$K_1 + \frac{1}{2}(k_1 t + k_2) = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}$$

$$K_1 \cdot \frac{1}{2} t + \left(k_1 + \frac{1}{2} k_2\right) = \frac{t}{2} + \frac{3}{2} \quad \text{svo} \quad \underline{k_1 = 1 \quad k_2 = 1}$$

svo $\underline{i_p(t) = t + 1}$

Heildarlausn

$$i_L(t) = i_{Ln}(t) + i_{Lp}(t)$$

$$= \underline{A e^{-t/2} + (t + 1)}$$

Finnum nú gildi á A. $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2A$

svo $i_L(0) = 2 = A e^0 + (0 + 1)$

eða $2 = A + 1$ svo $\underline{A = 1}$

Þá er $\underline{\underline{i_L(t) = e^{-t/2} + t + 1 \quad t \geq 0}}$

Núllinnmerkislausn er náttúrleg lausn $i_{Ln}(t) = Ae^{-t/2}$ með $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2$

svo $i_{Ln}(0) = 2 = Ae^0$ svo $A = 2$

$$\underline{i_{zi}(t) = 2e^{-t/2}}$$

Nullåstandslausn er heilder lausnin $i_L(t) = A e^{-t/2} + (t+1)$

med $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$ so $i_L(0) = Ae^0 + (0+1)$ so $\underline{A = -1}$

$$i_{zs}(t) = -e^{-t/2} + t + 1$$

so $i_L(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t)$

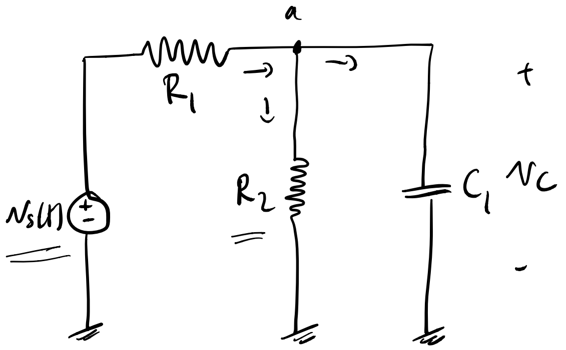
$= \underline{e^{-t/2} + t + 1}$ sama og heilder lausn

Þrepsvörun og impúlssvörun

Þrepsvörun og **impúlssvörun** fyrstu gráðu kerfa eru skilgreindar sem núllástandslausn kerfisins þegar innmerkið er einingarþrep eða einingarimpúls (straumur eða spenna).

Engin orka er þá geymd í rásinni við tímann $t = 0$.

Dæmi: Finnum þrepsvörun $u(t)$ fyrir v_c. $R_1 = 5\Omega$ $R_2 = 3\Omega$ $C_1 = \frac{1}{4}F$
$v_s = u(t)$



Fyrir $t > 0$ gildir

KCL í a: $\dfrac{1 - v_c}{R_1} = \dfrac{v_c - 0}{R_2} + C_1 \dfrac{dv_c}{dt}$

eða $\dfrac{1 - v_c}{5} = \dfrac{v_c}{3} + \dfrac{1}{4}\dfrac{dv_c}{dt}$

$i_c = C\cancel{\dfrac{dv_c}{dt}} = 0$

$v_c(t \to \infty) = 1 \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{3}{8}$

eða $\dfrac{dv_c}{dt} + \dfrac{32}{15} v_c = \dfrac{4}{5}$ $\quad t \geq 0$ $\quad (*)$

Náttúrleg lausn (óliðuð $*$)

$v_n(t) = Ae^{st}$ $\rightarrow$ svo $sA\cancel{e^{st}} + \dfrac{32}{15} A\cancel{e^{st}} = 0$

$v_n'(t) = sAe^{st}$ svo $s = -\dfrac{32}{15}$

$v_n(t) = Ae^{-\frac{32}{15}t}$

Sérlausn $(*)$

Giskum á $v_p(t) = k \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ svo $0 + \dfrac{32}{15} k = \dfrac{4}{5}$ svo $k = \dfrac{3}{8}$

$v_p'(t) = 0$

$v_p(t) = \dfrac{3}{8}$

Heildarlausn

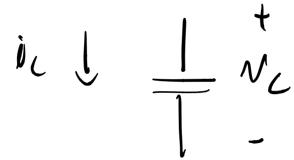
$v_c(t) = v_n(t) + v_p(t) = Ae^{-\frac{32}{15}t} + \dfrac{3}{8}$

Nú er $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$ $\quad v_c(0) = A + \dfrac{3}{8} = 0$ eða $A = -\dfrac{3}{8}$

$v_c(t) = \dfrac{3}{8}\left(1 - e^{-32t/15}\right) u(t)$

$\lim_{t \to \infty} v(t) = \dfrac{3}{8}$

Þrepsvörun og impúlssvörun



Ef straumur í þétti er impúls, þ.e.

$$i_C(t) = \delta(t)$$

$i_c = C p v = C \frac{dv}{dt}$

þá stekkur spennan upp um $1/C$ volt, þ.e.

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau + v_C(0^-)$$

eða

$$v_C(0^+) - v_C(0^-) = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{C}$$

Þrepsvörun og impúlssvörun

Á sama hátt gildir að ef spenna yfir spólu er impúls, þ.e.

$$v_L(t) = \delta(t)$$

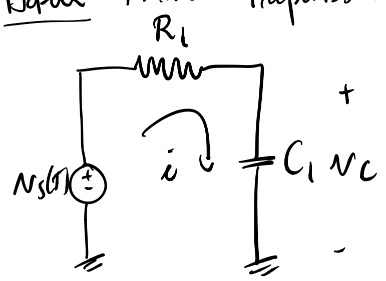
þá stekkur straumurinn upp um $1/L$ amper, þ.e.

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} v_L(\tau)\mathrm{d}\tau + i_L(0^-)$$

eða

$$i_L(0^+) - i_L(0^-) = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{L}$$

Dæmi: Finnum impúlssvörun $h(t)$ fyrir $v_C(t)$ $\left(v_s(t) = \delta(t)\right)$ ef $R_1 = 2\Omega$ $C_1 = \frac{1}{3}F$



KVL gefur $v_s = iR + v_C$ $\qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$

eða $RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = v_s$

svo $\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C = \frac{1}{RC}v_s$ $\qquad$ Áður ke^{-st} $\quad k_0 t + k_1$

eða $\boxed{\frac{dv_C}{dt} + \frac{3}{2}v_C = \frac{3}{2}\delta(t) \quad \forall t}$

Fyrir $t>0$

$\frac{dv_C}{dt} + \frac{3}{2}v_C = 0$ (óhliðruð diffurjafna)

$$\boxed{v_C(t) = Ae^{-\frac{3}{2}t}}$$

Það má nálga „óendanlegan" straum í gegnum þétti en ekki orku $\left(w_C = \frac{1}{2}Cv^2\right)$ $\quad w_L = \frac{1}{2}Li^2$

$\Rightarrow$ Spennan yfir þétti getur aldrei orðið impúls

Impúlsinn er núll $t>0$. Það eina sem hann gerir er að „búa til" byrjunargildi á þéttinn við $t=0^+$.

Impúlsspennan hlýtur þá öll að fara yfir viðnámið $v_R(0) = \infty$

$$i(0) = \frac{v_R(0)}{R_1} = \frac{1}{2}\delta(t)$$

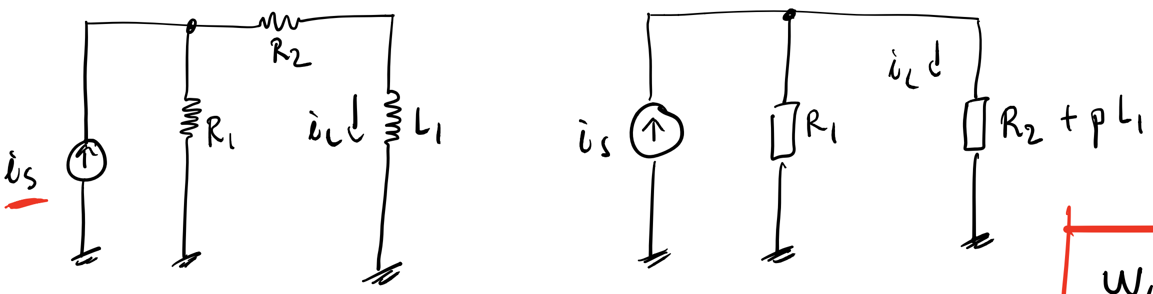
þá er $v_C(0^+) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^+} \frac{1}{2}\delta(\tau)d\tau = \frac{3}{2}\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)d\tau = \underline{\underline{\frac{3}{2}V}}$

upphafsskilyrði

$v_C(0) = \frac{3}{2} = Ae^0$ svo $A = \frac{3}{2}$, $\quad \boxed{v_C(t) = \frac{3}{2}e^{-3/2t}, \quad t>0}$

$$\boxed{h(t) = \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}u(t)} \quad \forall t$$

Dæmi Finna impúlssvörun fyrir $i_L(t)$ ($i_s(t) = \delta(t)$) ef $R_1 = 2\Omega$ $R_2 = 3\Omega$ $L_1 = 4H$.



$$W_L = \frac{1}{2} L i^2 < \infty$$

$$i_L = i_s \frac{R_1}{(R_1) + (R_2 + pL_1)} = i_s \frac{2}{5 + p4}$$

$$(5 + 4p) i_L = 2 i_s \qquad \text{eða} \qquad 4 \frac{di_L}{dt} + 5 i_L = 2 i_s$$

$$\boxed{\frac{di_L}{dt} + \frac{5}{4} i_L = \frac{1}{2} i_s}$$

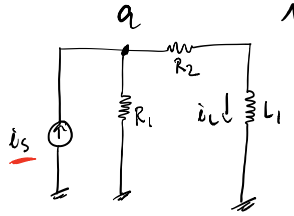
Náttúruleg lausn

$$i_L(t) = A e^{-\frac{5}{4}t}, \quad t > 0$$

Impúlsinn „býr til" upphafsgildi á $i_L(0^+)$ sem ekki verður til staðar við 0^-

Impúlsinn „býr til" upphafsgildi á $i_L(0^+)$ sem ekki verður til staðar við 0^-. Straumur frá i_s (impúls) skiptist ekki milli greina (straumur í spólu ekki breytt) þá annars yrði $W_L \to \infty$ (stranglega bannað!)

þá fer allur impúls $i_s(t) = \delta(t)$ í gegnum R_1



$$v_a = v_2 = i_s \cdot R_1 = 2\delta(t)$$

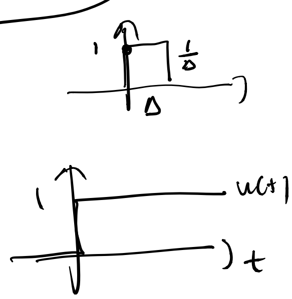
svo $$i_L(0^+) = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^{0^+} v_L(\tau) d\tau = \frac{1}{4} \int_{0^-}^{0^+} 2\delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} A$$

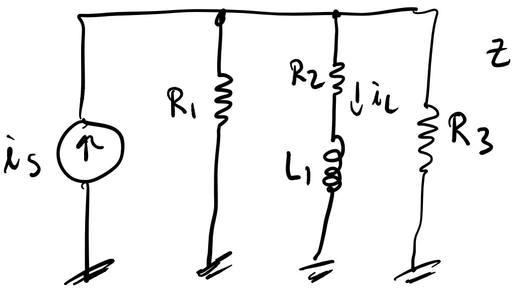
Impúlssvörun verður þá $$i_L(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{5}{4}t}, \quad t > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$$

$$= \int_{t_0^-}^{t_0^+} f(t)\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$$

eða $$h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{5}{4}t} u(t) \quad \forall t$$





$$Z = R_1 \parallel (R_2 + L_1 p) \parallel R_3 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + L_1 p} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{R_3 (R_2 + L_1 p) + R_1 \cdot R_3 + R_1 (R_2 + L_1 p)}{R_1 (R_2 + L_1 p) R_3} \right)^{-1}$$

$$= \frac{R_1 R_3 (R_2 + L_1 p)}{(R_2 + L_1 p)(R_1 + R_3) + R_1 \cdot R_3}$$

$$i_L = \frac{Z}{(R_2 + L_1 p)} i_S = \frac{R_1 R_3}{(R_2 + L_1 p)(R_1 + R_3) + R_1 R_3} i_S$$

$$i_L \left[(R_2 + L_1 p)(R_1 + R_3) + R_1 R_3 \right] = R_1 R_3 i_S$$

$$i_L p \left(L_1 (R_1 + R_3) \right) + i_L (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3) = R_1 R_3 i_S \quad (*)$$

passo fatto?

$$i_L = i_S \frac{R_1}{(R_1) + (R_2 + p L_1)} \qquad \boxed{p L_1 i_L + (R_1 + R_2) i_L = i_S R_1}$$

$$i_L p \; L_1 \left(\cancel{\frac{R_1}{R_3}}^{\to 0} + 1 \right) + i_L \left(\cancel{\frac{R_1 R_2}{R_3}}^{\to 0} + R_2 + R_1 \right) = R_1 i_S$$

$R_3 \to \infty$

sno nit evdu mit

$$i_L L_1 p + i_L (R_1 + R_2) = R_1 i_S$$

$$i_L p + i_L \frac{R_1 + R_2}{L} = \frac{R_1}{L_1} i_S$$

$$A e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t}$$

$$i_L p + i_L \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{L_1 (R_1 + R_3)}$$

Þrepsvörun og impúlssvörun

Ef við þekkjum innmerki $x(t)$ og tilsvarandi útmerki (núllástandssvörun) $y(t)$ fyrir línulegt kerfi og örvum síðan sama kerfi með innmerkinu $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ þá er útmerkið $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$

Impúlssvörun má finna með því að diffra þrepsvörunina.

Heildarsvörun fundin með tegrun

Óhliðruðu fyrstu gráðu jöfnurnar sem við fáum eru á forminu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha x = f(t)$$

og þær má ætíð leysa fyrir $x(t)$ á eftirfarandi hátt:

Margföldum báðar hliðar jöfnunnar með $e^{\alpha t}$ þ.a.

$$e^{\alpha t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha e^{\alpha t}x = e^{\alpha t}f(t)$$

sem skrifa má

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\alpha t}x) = e^{\alpha t}f(t)$$

Tegrum báðar hliðar frá $-\infty$ til t

$$xe^{\alpha t} = \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{0^-} e^{\alpha\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{0^-}^{t} e^{\alpha\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Heildarsvörun fundin með tegrun

Fyrra tegrið er fasti, því mörkin eru fastar:

$$xe^{\alpha t} = K + \int_{0^-}^{t} e^{\alpha\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Margföldum með $e^{-\alpha t}$

$$x(t) = Ke^{-\alpha t} + \int_{0^-}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

þar sem fastinn K ákvarðast af byrjunar- skilyrðum; $Ke^{-\alpha t}$ er núllinnmerkislausn og

$$\int_{0^-}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

er núllástandslausn.