Dæmi 1 – Diffurjafna

Rás er lýst með diffurjöfnunni

$$\frac{di}{dt} + \frac{7}{20}i = \frac{1}{4}e^{-t}, \quad t > 0.$$

Finnið núllástand-, núllinnmerkis- og heildarlausn fyrir $i(t)$ ef gefið er að $i(0^+) = 2\,\text{A}$.

Náttúruleg lausnin er lausn á óhliðruðu jöfnunni $\frac{di}{dt} + \frac{7}{20}i = 0$

Gískum á $i(t) = Ae^{st}$ svo $sA\cancel{e^{st}} + \frac{7}{20}A\cancel{e^{st}} = 0$, svo $s_1 = -\frac{7}{20}$

$i'(t) = sAe^{st}$

Þá fæst $i_n(t) = Ae^{-\frac{7}{20}t}$

Sérlausn er lausn á hliðruðu jöfnunni $\frac{di}{dt} + \frac{7}{20}i = \frac{1}{4}e^{-t}$

Gískum á $i(t) = K_0 e^{-t}$ svo $-K_0\cancel{e^{-t}} + \frac{7}{20}K_0\cancel{e^{-t}} = \frac{1}{4}\cancel{e^{-t}}$

$i'(t) = -K_0e^{-t}$

eða $-\frac{13}{20}K_0 = \frac{1}{4}$ svo $K_0 = -\frac{5}{13}$

Þá er $i_p(t) = -\frac{5}{13}e^{-t}$

Heildarlausn er $i(t) = i_n(t) + i_p(t) = Ae^{-\frac{7}{20}t} - \frac{5}{13}e^{-t}$

Finnum A með upphafsgildi $i(0^+) = A - \frac{5}{13} = 2$ svo $A = \frac{31}{13}$

svo $i(t) = \frac{1}{13}\left(31e^{-\frac{7}{20}t} - 5e^{-t}\right)$ A $t > 0$

Núllástandslausn er heildarlausn með $i(0^+) = 0$ & fastinn A óþekktur.

svo $i_{zs}(t) = Ae^{-\frac{7}{20}t} - \frac{5}{13}e^{-t}$

$i_{zs}(0^+) = 0 = A - \frac{5}{13}$ svo $A = \frac{5}{13}$

Þá er $i_{zs}(t) = \frac{5}{13}\left(e^{-\frac{7}{20}t} - e^{-t}\right)$

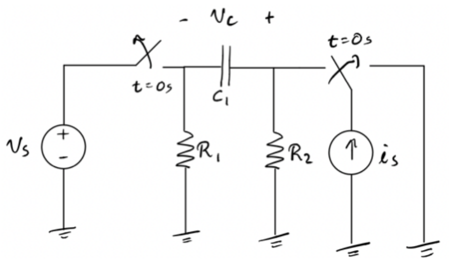
Núllinnmerkislausn er náttúruleg lausn með $i(0^+) = 2$A

$i_{zi}(t) = Ae^{-\frac{7}{20}t}$ svo $A = 2$ eða $i_{zi}(t) = 2e^{-\frac{7}{20}t}$

$i(t) = i_{zs}(t) + i_{zi}(t) = \frac{1}{13}\left(31e^{-\frac{7}{20}t} - 5e^{-t}\right)$ $t > 0$ (sama & heildarlausn)

Dæmi 2 – Tveir rofar

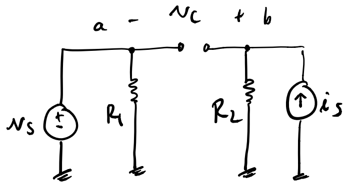
Rofarnir hafa verið lokaðir lengi en opnast við $t = 0$s. Finnið $v_c(0^+)$, $v_c'(0^+)$ og orkuna sem er geymd í þéttinum $w_c(0^+)$. Finnið að lokum $\lim_{t\to\infty} v_c(t)$.



Breyta	Gildi
R_1	$1\,\Omega$
R_2	$3\,\Omega$
C_1	$2\,\mathrm{F}$
v_s	$2\,\mathrm{V}$
i_s	$1\,\mathrm{A}$

Skoðum fyrst við $\underline{t=0^-}$

$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = 0$ þ.e. þéttir virkar eins og opin rás



Hér er $v_a = v_s = 2V$

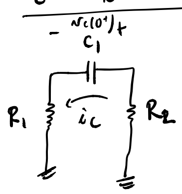
$v_b = i_s R_2 = 3V$

svo $v_c = v_b - v_a = \underline{\underline{1\,V}}$

Engir impulsar eru í rás svo $\underline{\underline{v_c(0^-) = v_c(0^+) = 1V}}$

$w_c(0^-) = w_c(0^+) = \frac{1}{2}C_1 v_c(0^-) = \underline{\underline{1\,J}}$

Við $\underline{t=0^+ \text{ lítur rás svona út}}$



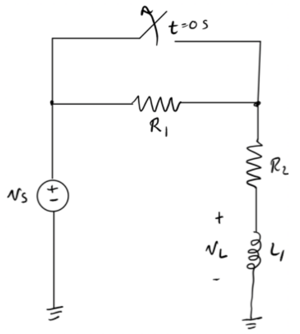
KCL gefur $i_c(R_1+R_2) + v_c(0^-) = 0$

svo $i_c(0^+) = \frac{-v_c(0^+)}{R_1+R_2} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}\,A}}$ Núna er $i_c = C\frac{dv}{dt}$ svo $\underline{\underline{\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{i_c}{C_1} = -\frac{1}{8}\,\frac{V}{s}}}$

þéttir afhleðst þegar $t\to\infty$ svo $\underline{\underline{\lim_{t\to\infty} v_c(t) = 0\,V}}$

Dæmi 3 – Rofar til

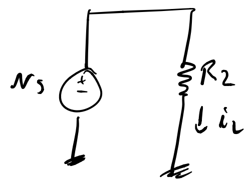
Rofinn hefur verið lokaður í langan tíma en opnast við $t = 0$s. Finnið $v_L(0^+)$ og síðan $v_L(t)$ fyrir öll t.



Breyta	Gildi
R_1	$40\,\Omega$
R_2	$10\,\Omega$
L_1	$0.5\,\mathrm{H}$
v_s	$100\,\mathrm{V}$

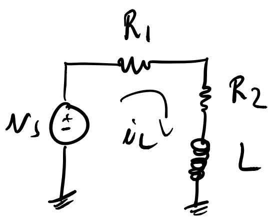
Höfum $v_L = L\frac{di_L}{dt}$ (*),

Við $t=0^-$ lítur rásin svona út (rofi opinn lengi svo $v_L(0^-)=0V$)



svo $i_L(0^-) = \frac{v_s}{R_2} = 10\,A$ engir impúlsar svo $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 10A$

Við $t=0^+$ lítur rásin út svona



KVL gefur $v_s(0^+) = i_L(0^+)(R_1+R_2) + v_L(0^+)$

svo $v_L(0^+) = v_s(0^+) - i_L(0^+)(R_1+R_2)$

$= 100 - 10(40+10) = -400\,V$

Fyrir $t>0$ gildir þá:

KVL $v_s - i_L(R_1+R_2) - v_L = 0$

Set inn (a) $L_1\frac{di_L}{dt} + i_L(R_1+R_2) = v_s$ svo $\frac{di_L}{dt} + 100\,i_L = 200$ (**)

Náttúrulega lausn (Giskum á $i_L(t) = Ae^{st}$)

$i_{Ln}(t) = Ae^{-100t}$

Sérlausn (Giskum á $i_L(t) = k$)

$i_{Lp}(t) = 2$

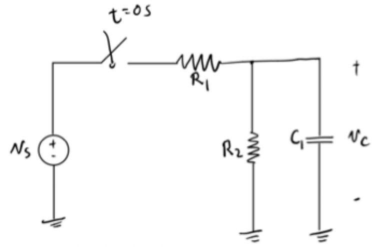
Heildarlausn $i_L(t) = i_{Ln}(t) + i_{Lp}(t) = Ae^{-100t} + 2$

nú er $v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -50Ae^{-100t}$, $v_L(0^+) = -50A = -400$ svo $A = 20$

$i_L(t) = 20e^{-100t} + 2$ & $v_L(t) = -400e^{-100t}u(t)\ \forall t$

Dæmi 4 – Forhlaðinn þéttir

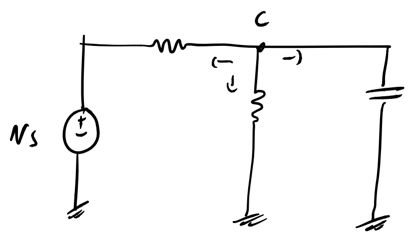
Þéttirinn er forhlaðin svo $v_c(0^+) = 0.4\,\mathrm{V}$. Finnið $v_c(t)$ fyrir $t > 0$.



Breyta	Gildi
R_1, R_2	$1\,\mathrm{k\Omega}$
C_1	$10\,\mathrm{\mu F}$
v_s	$1\,\mathrm{V}$

Engir impúlsar í rás svo $v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0.4\,V$

Skoðum rás við $t > 0$



KCL í c gefur $G_1(v_c - v_s) + G_2(v_c - 0) + C_1 p(v_c - 0) = 0$

eða $p v_c + v_c \dfrac{G_1 + G_2}{C_1} = \dfrac{G_1}{C_1} v_s$

eða $\dfrac{dv_c}{dt} + 200 v_c = 100 v_s \quad (*)$

Náttúrleg lausn (Gískum á $v_c(t) = Ae^{st}$ & setjum í óhliðraða jöfnu)

$$v_{cn}(t) = Ae^{-200t}$$

Sérlausn (Gískum á $v_c(t) = k$ & setjum í hliðraða jöfnu (*))

$$v_{cp}(t) = \frac{1}{2}$$

Heildarlausn

$$v_c(t) = v_{cn}(t) + v_{cp}(t) = Ae^{-200t} + \frac{1}{2}$$

Nú er $v_c(0^+) = 0.4 = A + \frac{1}{2}$ svo $A = -\frac{1}{10}$

$$v_c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}e^{-200t}, \quad t > 0$$