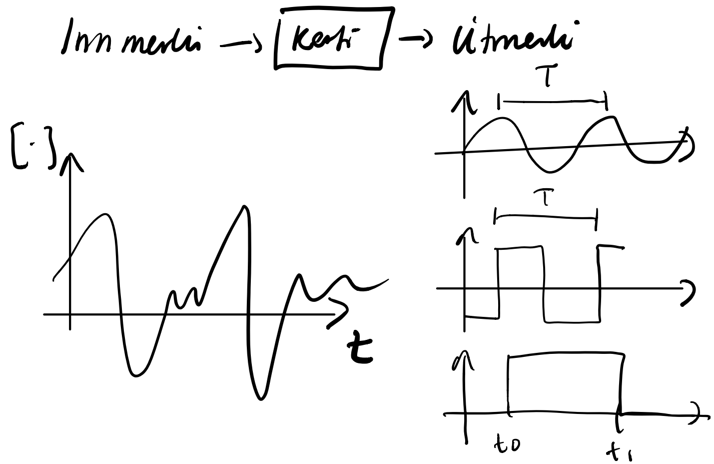


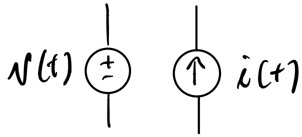
Greining Rása

Merki

Ólafur Bjarki Bogason

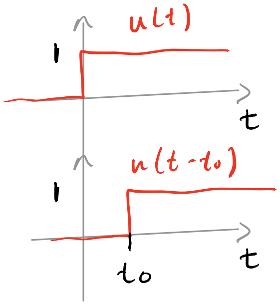
18. febrúar 2021

Inngangur



- Þegar lindarspennur og -straumar breytast með tíma er þeim lýst með tímaföllum sem við köllum **merki** (e. signal)
- **Merki flytja upplýsingar**
- Algengasta merkið er sínusmerkið. Veituspennan er sínuslaga, svo og öll radíómerki

Einingaþrepfallið



$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{ef} \quad t > 0 \\ 0 & \text{ef} \quad t < 0 \end{cases}$$

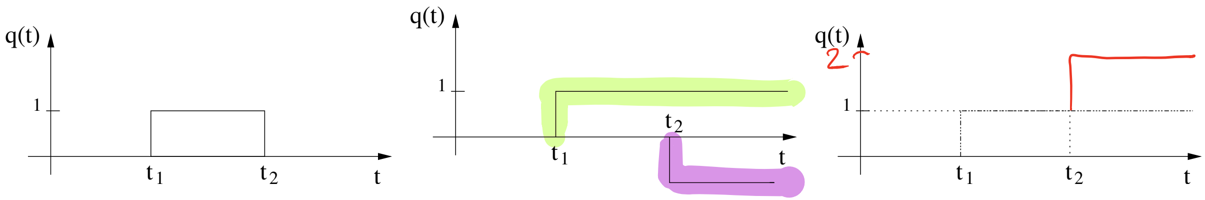
það er óskilgreint í $t = 0$

- Straumlind eða spennulind sem kveikt er á eða slökkt á við tímann $t = t_o$ má lýsa með einingarþrepfallinu $u(t - t_o)$
- Summu tveggja þrepfalla má nota til að lýsa:
  - stærðum sem „kviknar“ á og „slökknar“
  - eða stærðum sem skipta á milil tveggja gilda

Þrepfallið

- Þessu falli má t.d. lýsa sem summu tveggja þrepfalla

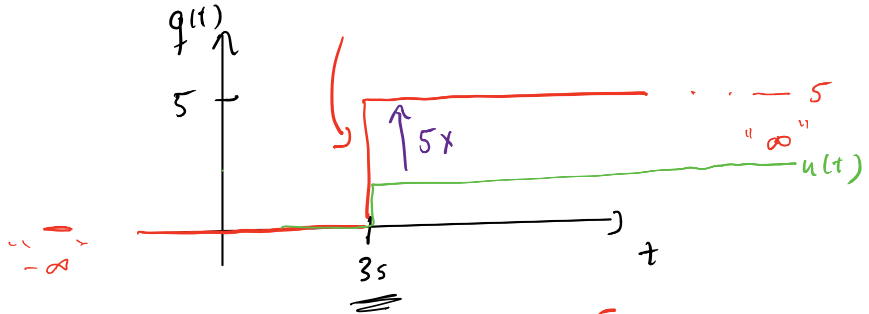
$$q(t) = u(t - t_1) - u(t - t_2)$$



$0 < t_1 < t_2$

Dæmi: Fallið $q(t)$ breytist úr $q=0$ í $q=5$ við $t=3\,s$

Skrifið q með því að nota einingarfall



$q(t) = 5\,u(t-3)$

$q(3^-) = 0 \qquad q(3^+) = 5$

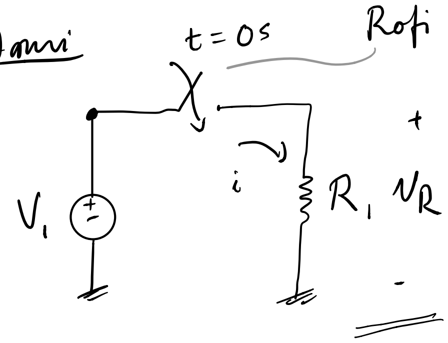
$$f(t) \xrightarrow[t_0>0]{\text{„Hliðrun til hægri"}} f(t-t_0)$$

t	f
0	$f(t_0)$
t_0	$f(0)$

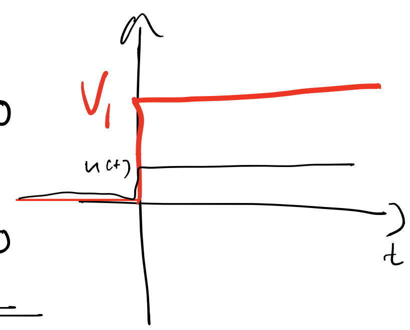
$$f(t) \xrightarrow[t_0>0]{\text{„Hliðrun til vinstri"}} f(t+t_0)$$

t	f
$-t_0$	$f(0)$
0	$f(t_0)$

Dæmi Rofi lokast við $t = 0\,s$. Finnið $v_R(t)$.



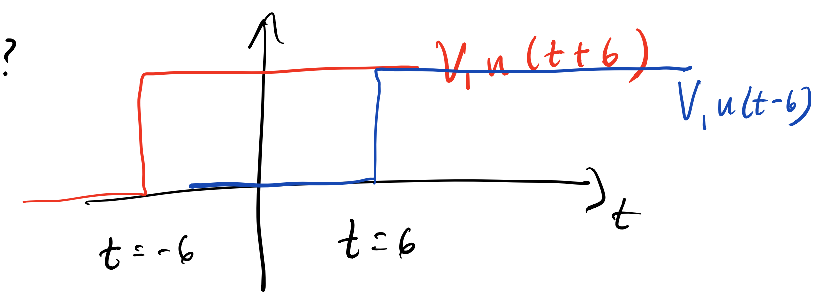
$$v_R(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ iR_1 = V_1 & t > 0 \end{cases}$$



$v_R(t) = V_1\,u(t)$

b) Hvað ef rofi lokast við $t = -6\,s$?

$v_R(t) = V_1\,u(t+6)$



Dæmi Grefið a fallið $f(t) = 1 - t$. Teiknið eftirfarandi föll á bilinu $t \in [2,2]$ ef $t_0 \geq 0$

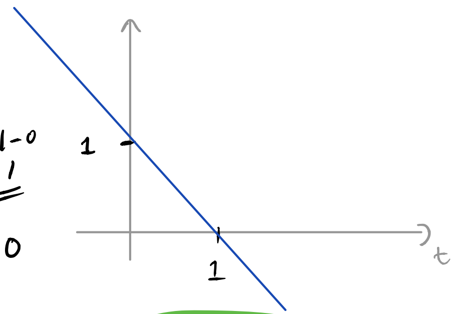
$1 - t = 0$

svo $t = 1$

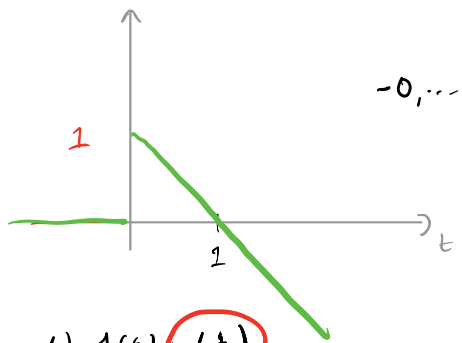
a) $f(t)$

$f(0) = 1 - 0 = 1$

$f(t) \overset{?}{=} 0$



b) $f(t)\,u(t)$

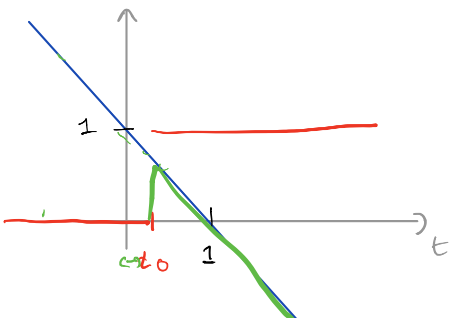


t	$u(t)$	$u(-t)$
-5	0	1
-2.5	0	1
0^-	0	1
0^+	1	0
42	1	0

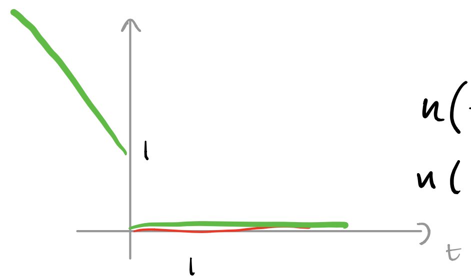
$-0, \ldots 1$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

c) $f(t)\,u(t - t_0)$



d) $f(t)\,u(-t)$

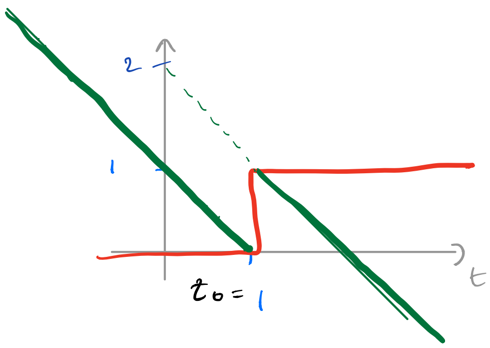


$u(-(-5)) = u(5)$

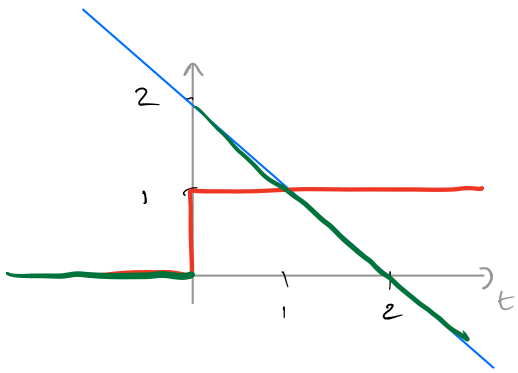
$u(-(-2.5)) = u(2.5)$

$u(-(0^-)) = u(-0^-)$
$\approx u(0^+)$

e) $f(t) + u(t - t_0)$



f) $f(t-1)\,u(t)$

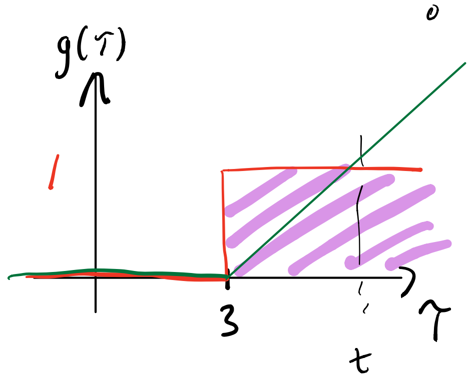


t	$f(t)$	$f(t-1)$
-1	$1-(-1) = 2$	$2-(-1) = 3$
0	$1-(0) = 1$	$2-0 = 2$
1	$1-(1) = 0$	$2-(1) = 1$
2	-1	0

$f(t) = 1 - t$

$f((t-1)) = 1 - (t-1)$
$= 2 - t$

Dæmi Finnið $f(t) = \int_0^t \underbrace{u(\tau - 3)}_{g(\tau)}\, d\tau \quad \forall t$ og teiknið $f(t)$

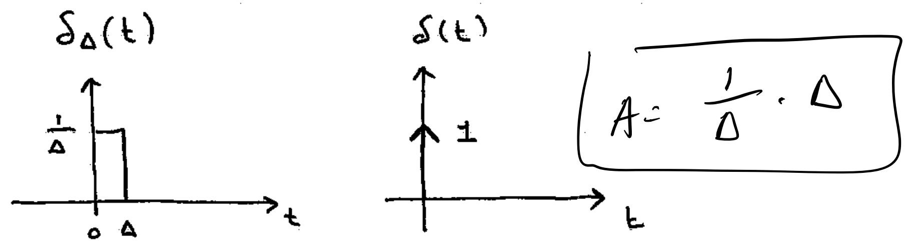


$$\int_0^3 \cancel{u(\tau - 3)}^{0}\, d\tau + \int_3^t \cancel{u(\tau-3)}^{1}\, d\tau$$

$$= \int_0^3 0 \cdot d\tau + \int_3^t 1\, d\tau = \left[\tau\right]_3^t = t - 3 \qquad t > 3$$

$$f(t) = (t - 3)\, u(t - 3)$$

Impúlsinn



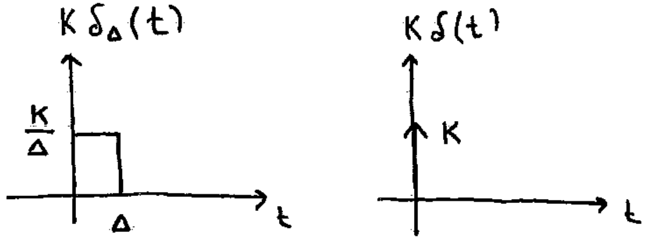
- Skoðum púls $\delta_\Delta(t)$ með flatarmálið 1

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{ef} \quad 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Látum nú $\Delta \longrightarrow 0$, og þá verður púlsinn mjórri og hærri.
- Markgildið er óendanlega hár og óendanlega mjór púls sem hefur flatarmálið 1. Þetta er **impúlsinn**

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

Impúlsinn

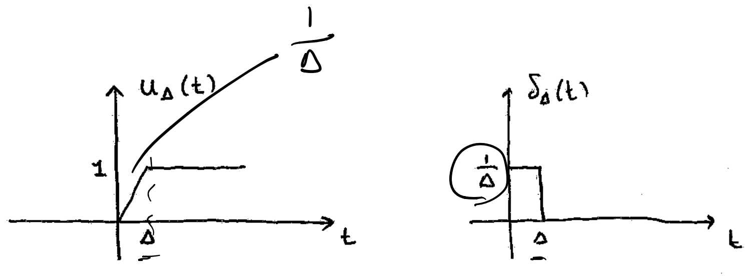


- impúlsinn hefur flatarmál 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = u(0^+) - u(0^-) = 1$$

- Ef púlsinn var upphaflega K/Δ á hæð og Δ á breidd, þá er flatarmál hans $(K/\Delta)\Delta = K$
- Það að margfalda impúls með tölu (fasta) breytir aðeins flatarmáli hans, ekki hæð né breidd.

Samband impúls og þrepfalls



- Sjáum að

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

- Samband impúls og þrepfalls ($\Delta \to 0$):

$$\boxed{\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}}$$

og öfugt

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau}$$

Impúlsinn

- Impúlsinn er ekki fall í ströngustu merkingu. Spennulind sem gefur impúls, t.d. $v(t) = 10\delta(t)$ er heldur ekki til.
- En það er hægt að búa til nálgun á impúls, t.d. spennulind sem fer frá 0 til 1.000.000 V og aftur í 0 á um 1 μs, sem er nægilega góð nálgun í flestum tilfellum.

Dann Reicht $\underline{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\,\delta(\tau)\,d\tau = \int_{0^-}^{0^+} 4\,\delta(\tau)\,d\tau = 4 \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)\,d\tau = 4 \cdot 1 = \underline{\underline{4}}$

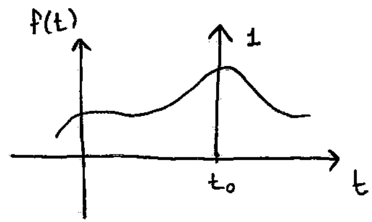
$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & \text{Anners} \end{cases}$$

Impúlsinn

Almennt má finna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t = f(t_o)$$

þ.e. tegrið af einhverju falli $f(t)$ margfölduðu með impúlsi við tímann t_o.

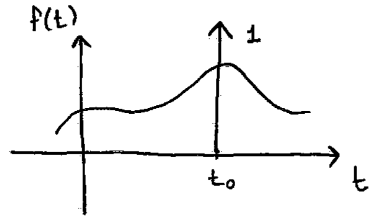


$$= \begin{cases} 1 & t = t_o \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Þessi stærð er núll allsstaðar nema í $t = t_o$ (því $\delta(t - t_o)$ er núll nema í $t = t_o$). Því má skrifa tegrið sem

$$I = \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} f(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t$$

Impúlsinn



Gerum síðan ráð fyrir að $f(t)$ breytist ekki yfir örstutt tímabilið $[t_{0-}, t_{0+}]$ og meðhöndlum fallið $f(t)$ sem fasta $f(t_o)$; og tökum út fyrir og fáum

$$I = f(t_o) \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} \delta(t - t_o) \mathrm{d}t = f(t_o)$$

Því að tegrið af impúlsinum er 1.

Almennt er

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_o) \mathrm{d}t = f(t_o)$$

Dæmi   Reiknið $y(t) = \int_{-\infty}^{t} \overbrace{2\tau\, u(\tau-1)}^{g(\tau)}\,\delta(\tau-4)\, d\tau$

$t > 4$

$t < 4$

$4^- < t < 4^+$

Fyrir $t < 1$ fæst að $\int_{-\infty}^{t} 2\tau\, \cancelto{0}{u(\tau-1)}\,\delta(\tau-4)\, d\tau = 0$

Annars .. $t > 1$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_o)\mathrm{d}t = f(t_o)$$

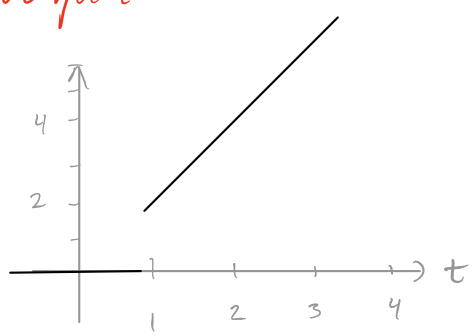
$$\int_{-\infty}^{t} 2\tau\, u(\tau-1)\,\delta(\tau-4)\, d\tau$$

$h(t) = 2t$

$$= \int_{-\infty}^{t} 2\tau\,\delta(\tau-4)\, d\tau = \int_{4^-}^{4^+} 2\tau\,\delta(\tau-4)\, d\tau = h(4) = 2\cdot 4 = \underline{\underline{8}}$$

af hverju?

$$\underline{\underline{y(t) = 8\,u(t-4)}}$$



Veldisfallið

Algengt merki er

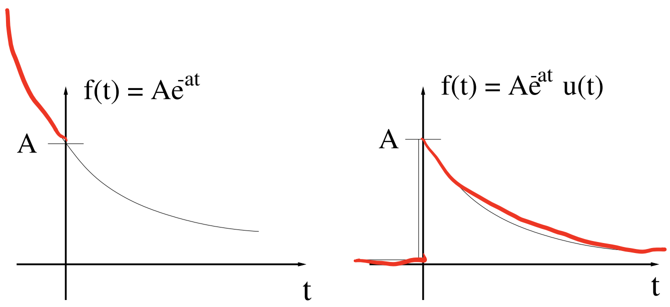
$$f(t) = Ae^{-at}$$

Við vitum að $e^0 = 1$ svo að $f(0) = Ae^0 = A$.

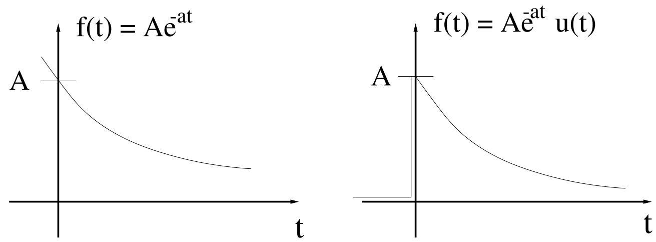
Fyrir $t < 0$ þá er $f(t) > A$.

Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþrepi þá fæst fall sem er núll fyrir $t < 0$ en veldisfall fyrir $t > 0$, þ.e.

$$f(t) = Ae^{-at}u(t)$$



Veldisfallið



Tímastuðull veldisfallsins er skilgreindur með

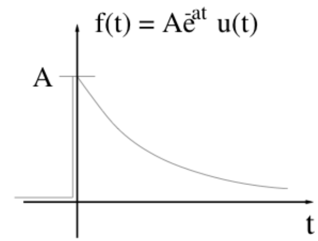
$$\tau = \frac{1}{a} \qquad f(t) = A\mathrm{e}^{-at}$$

og við $t = \tau$ fæst

$$f(\tau) = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}\tau} = A\frac{1}{\mathrm{e}} = 0.3679A$$

Eftir einn tímastuðul er merkið í 37 prósentum af hágildi sínu.
Eftir tvo tímastuðla er merkið í 14 prósentum af hágildi sínu.

Veldisfallið



Diffurkvóti veldisfallsins er aftur veldisfall

$$f(t) = A\mathrm{e}^{-at}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -aA\mathrm{e}^{-at}$$

Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþrepfalli og diffrað þá fæst

$f(t) = Ae^{-at}u(t)$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = A\left(\mathrm{e}^{-at}\delta(t) - a\mathrm{e}^{-at}u(t)\right)$$

eða

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = A\left(\delta(t) - a\mathrm{e}^{-at}u(t)\right)$$

Dørni

Finner $g(t) = \int_{-\infty}^{t} A e^{-a\tau} u(\tau)\, d\tau$

$t < 0$ fordi $u(\tau) = 0$

$$\int_{-\infty}^{t} A e^{-a\tau} u(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} A e^{-a\tau}\, d\tau = A \int_{0}^{t} e^{-a\tau}\, d\tau$$

$$= A \left[\frac{e^{-a\tau}}{-a} \right]_0^t = -\frac{A}{a}\left(e^{-at} - 1\right) = \frac{A}{a}\left(1 - e^{at}\right)$$

Sinusfallið

- Algengasta fallið er sínusfallið
- Við notum sínus og cosínus jöfnum höndum (sama fallið!)
- Dæmi um slíkt fall er

$$f(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

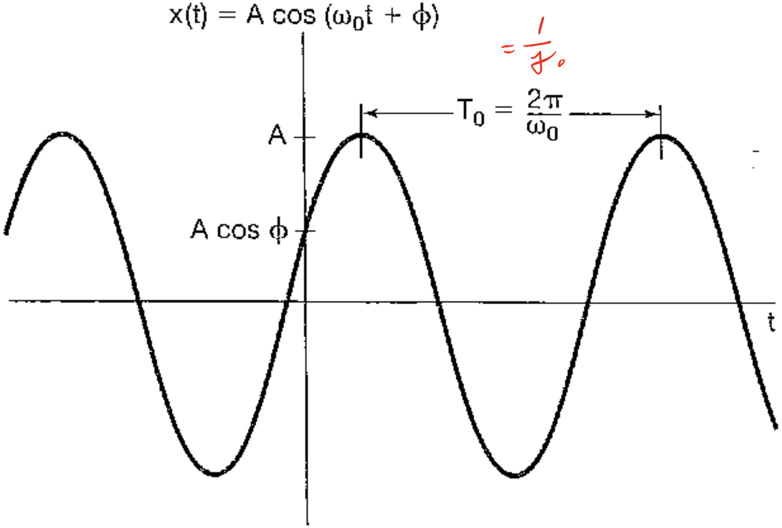
  þar sem A, ω_0 og ϕ eru fastar

  - A er útslag merkisins [V] eða [A] eða ?
  - ω_0 er horntíðni $\left[\frac{rad}{s}\right]$
  - t er tími [s]
  - ϕ er fasahorn [rad] eða [°]

- Ef t er mælt í sekúndum þá eru einingar ω_0 og ϕ rad/sek
- Oft er skrifað $\omega_0 = 2\pi f_0$ þar sem f_0 hefur eininguna hringir/sek, eða hertz [Hz]

Sinusfallið

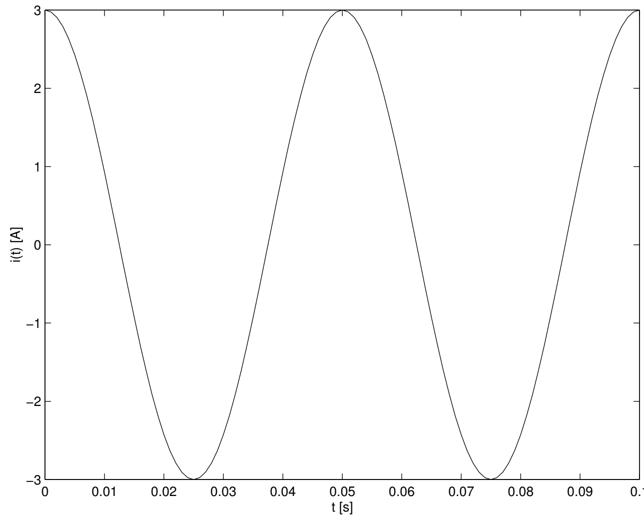
$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$



- **Lotan** T er stysti tími milli endurtekninga sinusfallsins.

Sinusfallið

sin eða cos ?



Sagt er að sinusfallið sé $\pi/2$ rad (90°) á eftir cosinusfallinu og að cosinusfallið sé $\pi/2$ rad (90°) á undan sínusfallinu

$$\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$