Greining Rása

Annarar gráðu kerfi

Ólafur Bjarki Bogason

18. mars 2021

Inngangur

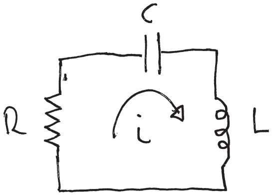
- Annarar gráðu rás inniheldur tvær orkugeymandi einingar
- Við þurfum að leysa annarar gráðu diffurjöfnu
- Nytsamlegar í síurásum (e. filters)
- Nytsamlegar til að greina flutningslínur og fleiri hagnýt tól

Heildarsvörun annarar gráðu kerfa

Aðferðin til að leysa annarar gráðu rásir með lindum er því:

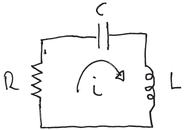
- Skrifa diffurjöfnuna fyrir $t > 0$ með því að nota KCL, KVL, Ohm's lögmál o.s.frv.
- Finnum upphafsgildin (þurfum tvö upphafsgildi)
- Leysum óhliðruðu diffurjöfnuna (finnum náttúrulegu svörunina)
    - Hefur tvær óháðar lausnir
- Finnum sérlausnina x_p sem uppfyllir hliðruðu diffurjöfnuna
- Leggjum saman nátturulega lausnina og sérlausnina til að fá heildarlausnina
- Finna óþekktu stuðlana með hjálp byrjunarskilyrða

Raðtengd RLC rás



- Skoðum raðtengda RLC rás
- Byrjum á náttúrulegu svöruninni

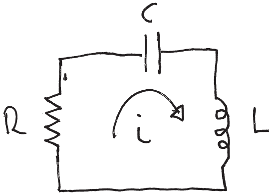
Raðtengd RLC rás



- KVL:

$$
\begin{aligned}
Ri + \frac{1}{Cp}i + Lpi &= 0 \\
Lp^2 i + Rpi + \frac{1}{C}i &= 0 \\
p^2 i + \frac{R}{L}pi + \frac{1}{LC} &= 0 \\
\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i &= 0
\end{aligned}
$$

Raðtengd RLC rás



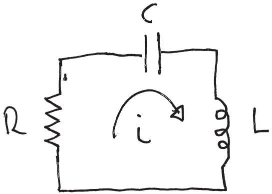
- KVL gefur

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0}$$

  þar sem

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{R}{2L} \\ \omega_0^2 &\equiv \frac{1}{LC} \end{aligned}$$

Raðtengd RLC rás: Kennijafna



- Ágiskun $i = Ae^{st}$ gefur kennijöfnu

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

sem hefur lausn

$$s_{1,2} = -\alpha \pm [\alpha^2 - \omega_0^2]^{1/2}$$

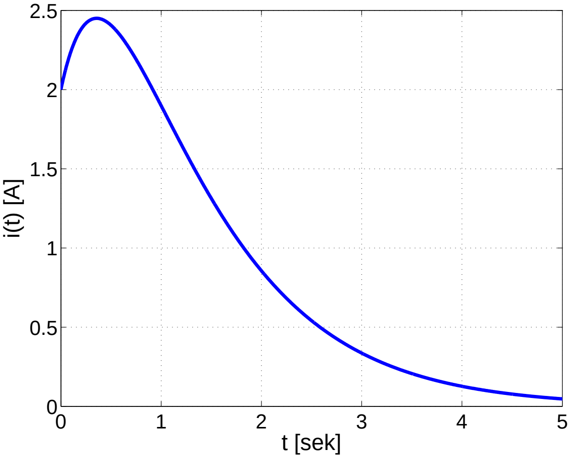
- Það eru þrír möguleikar

Kennijafna

$$s_{1,2} = -\alpha \pm [\alpha^2 - \omega_0^2]^{1/2}$$

- Ef $\alpha > \omega_0$ þá fáum við <u>yfirdempaða svörun</u>, $s_{1,2}$ eru negatífar rauntölur
    - Spenna eða straumur stefnir á lokagildi sitt án sveiflu
- Ef $\alpha < \omega_0$ þá fáum við <u>undirdempaða svörun</u>, $s_{1,2}$ eru tvinntölur
    - Spenna eða straumur sveiflast um lokagildi sitt
- Ef $\alpha = \omega_0$ þá fáum við <u>markdempaða svörun</u>, $s_{1,2} = \alpha$
    - Spenna eða straumur er á barmi þess að sveiflast um lokagildi sitt

Dæmi 11.1 Yfirdempuð rás



Undirdempuð svörun

- Þegar kennijafnan hefur tvinntölulausnir $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ þá fáum við undirdempaða svörun
- Lausnin er

$$y(t) = A_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$

- **Það er ekki ásættanlegt að skila niðurstöðunni á þessu formi**
- Rifjum upp reglu Eulers:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

Undirdempuð svörun

- Við fáum

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\alpha t}\left((A_1 + A_2)\cos(\omega_d t) + j(A_1 - A_2)\sin(\omega_d t)\right) \\ &= e^{-\alpha t}\left(B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)\right) \end{aligned}$$

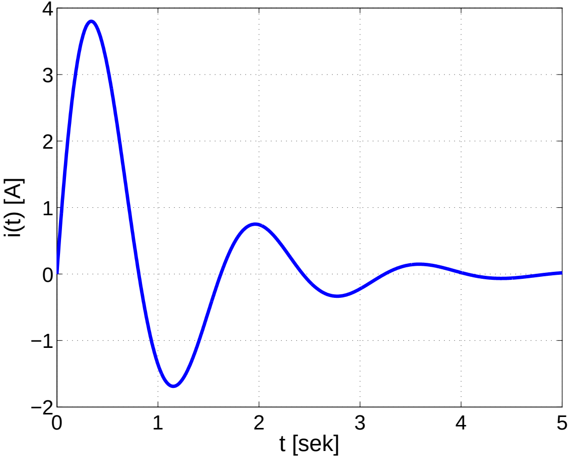
  þar sem $B_1 = A_1 + A_2$ og $B_2 = j(A_1 - A_2)$ þurfa að vera rauntölur þar sem $y(t)$ er rauntölustærð

- Því er almenn lausn undirdempaðrar rásar með eigingildi $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$

$$\boxed{y(t) = e^{-\alpha t}\left(B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)\right)}$$

- stuðlana B_1 og B_2 má finna með byrjunargildunum $y(0+)$ og $y'(0+)$

Dæmi 11.2 Undirdempuð svörun



Markdempuð svörun

- Markdempuð svörun fæst þegar kennijafna hefur tvöfalda rauntölurót
- Diffurjafnan er þá á forminu

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0$$

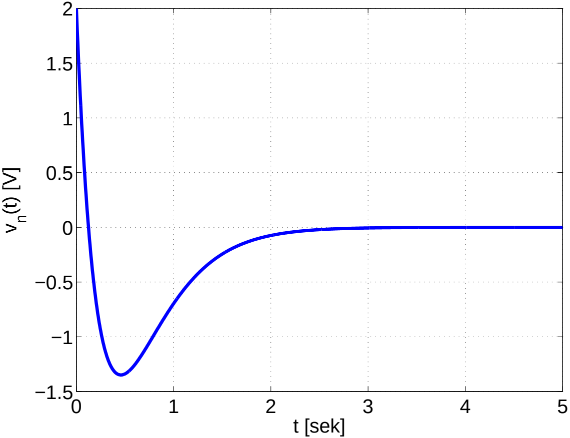
- Tilsvarandi kennijafna er

$$s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = 0$$

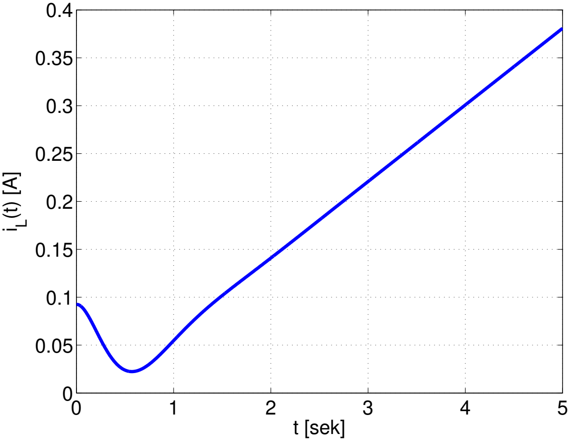
  sem hefur ræturnar $s_{1,2} = -\alpha$
- Náttúrulega svörunin er

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)}$$

Dæmi 11.3 Markdempuð rás



Dæmi 11.4 Heildarsvörun



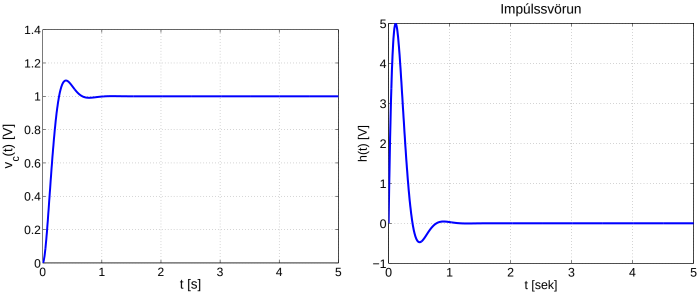
Tvö sértilfelli

- Venjulega má finna sérlausnina sem summu innmerkisins og allra diffurkvóta þess
- Í tveimur sértilfellum er þörf á öðrum aðferðum
  - Ef annað eigingildið er núll, þá á sérlausnin að vera tegrið af venjulegu sérlausninni
  - Ef innmerkið inniheldur lið sem einnig er í náttúrulegu svöruninni þá meðhöndlum við þetta eins og markdempaða tilvikið þar sem venjulega sérlausnin er margfölduð með $K_1 t + K_2$

Þrepsvörun og impúlssvörun

- Þrepsvörun og impúlssvörun eru skilgreind alveg eins og fyrir 1. gráðu kerfi þ.e. sem núllástandssvörun rásarinnar við þrepi/impúls

Dæmi 11.6 Þrepsvörun og impúlssvörun



Almennt um annarar gráðu rásir

- Kennijafna: $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$
- α: dempunarstuðull, $e^{-\alpha t}$ dempar v_c og i_L
  - A.t.h. að einnig er til annar dempunarstuðull (þ.e. með sama nafni) sem er skilgreindur $\zeta = \dfrac{\alpha}{\omega_0}$
- ω_0: ódempuð náttúruleg tíðni. Ef $\alpha = 0$ þá sveiflast v_c og i_L á tíðninni ω_0
- $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$: dempuð náttúruleg tíðni
- $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$: Gæðastuðull. Hann er hár fyrir undirdempaða rás