

Greining Rása

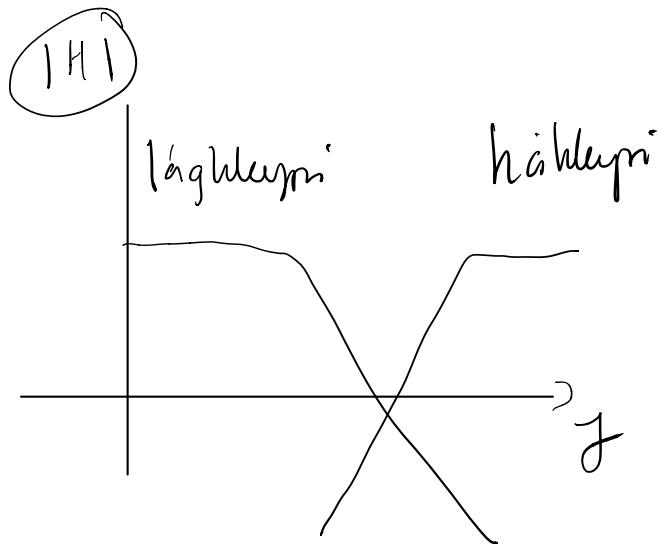
Orkugeymandi rásaeiningar

Ólafur Bjarki Bogason

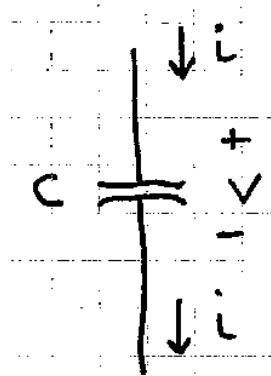
18. febrúar 2021

Inngangur

- Í þessum kafla eru innleiddar **þéttar og spólur**, sem eru **orkugeymandi rásaeiningar**
- Þessar rásaeiningar eru t.d. nytsamlegar í afriðun (AC í DC) og síunar-rásum (e. filters)
- Þessar einingar hafa mikið að segja um tíðnisvörun rásar og hversu hratt þær vinna



Péttir



- Fyrir þetti er samband straums og spennu er gefið með jöfnunni

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = \frac{dq}{dt}$$
$$q = Cv$$

þar sem stuðullinn C kallast **rýmd** péttisins og hefur eininguna farad [F] eða

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}$$

Péttir

- Með því að heilda báðar hliðar jöfnunnar frá $t = -\infty$ til einhvers tímapunkts t_0 fæst

$$v(t_0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(t) dt \quad v = \frac{q}{C}$$

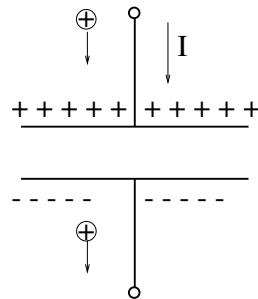
- Tegrið $\int_{-\infty}^{t_0} i(t) dt$ er nettóhleðslan q sem safnast hefur fyrir í þéttinum við tímann t_0 af völdum straumsins sem streymt hefur inn í þéttinn frá $t = -\infty$ til $t = t_0$, b.a

$$v(t) = \frac{q(t)}{C}$$

- Péttir er rásaeining sem geymir hleðslu; því meiri hleðslu sem hann geymir, þeim mun hærri spenna mælist yfir hann

Péttir

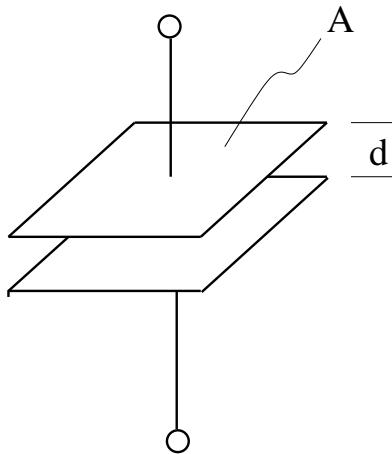
- Péttir er gerður úr tveim leiðandi plötum með einangrandi (rafsvara) efni á milli
- Þegar fastur straumur I streymir “um” þétti þá safnast jákvæðar hleðslur jafnt og þétt á plötuna þar sem straumurinn streymir inn



- Jákvæðar hleðslur flæða út úr þéttinum hinummegin svo að heildar hleðslan á þeirri plötu verður neikvæð. Þar sem straumur út er jafn stór og straumur inn þá er jafn stór hleðsla á báðum plötunum, $q(t)$, aðeins með mismunandi formerki

Péttir

- Gerum nú ráð fyrir plötubétti sem samanstendur af plötum með flatarmál A og aðskilnað d



- Ef plöturnar hafa hleðslu Q þá er
yfirborðshleðslubéttleiki

$$\rho_s = \frac{Q}{A}$$

Péttir

- **Rafsviðsstyrkur** E milli pltnanna er einsleitur og af styrk

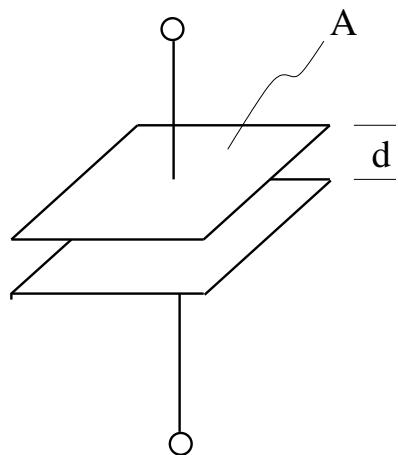
$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon} \quad [\text{Lögmál Gauss}]$$

með $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ þar sem ϵ_0 er **rafsvörunarstuðull lofttæmis** og ϵ_r er **hlutfallslegur rafsvörunarstuðull** efnisins milli pltnanna

- Hlutfallslegur rafsvörunarstuðull

Efni	$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$
Gler	7
Nylon	2
Bakelite	5

Péttir



- Spennan yfir þéttinn er þá

$$v = \int_1^2 E ds = Ed$$

og rýmdin

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\epsilon A}{d}$$

100% rimfrætileg heild

Orka í þétti

- Orku þéttis má finna sem tegrið af aflinu sem þéttirinn hefur fengið frá umhverfi sínu, við einhvern tíma $t = t_0$

$$\begin{aligned} w(t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} p(t)dt = \int_{-\infty}^{t_0} v(t)i(t)dt \\ &= C \int_{-\infty}^{v(t_0)} v(t) \frac{dv}{dt} dt \\ &= C \int_{v(-\infty)}^{v(t_0)} v(t)dv = C \left[\frac{v^2(t)}{2} \right]_{v(-\infty)}^{v(t_0)} \end{aligned}$$

- Þegar $v(-\infty) = 0$ fæst

$$w(t) = \frac{1}{2} Cv^2(t)$$

Péttir

Tveir mikilvægir eiginleikar þéttis ($i(t) = Cdv/dt$)

- Ef spenna yfir þétti er sínusлага

$$v_C(t) = \underline{V} \sin(\omega t)$$

$$j(g(x))' = j'(g(x))g'(x)$$

þá verður straumurinn

$$i_C(t) = C\omega V \cos(\omega t) = C \frac{dV}{dt}$$

þ.e. í beinu hlutfalli við tíðnina

há tíðni \longrightarrow hár straumur

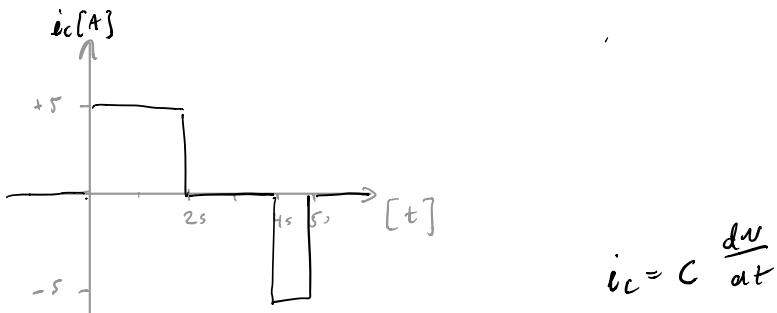
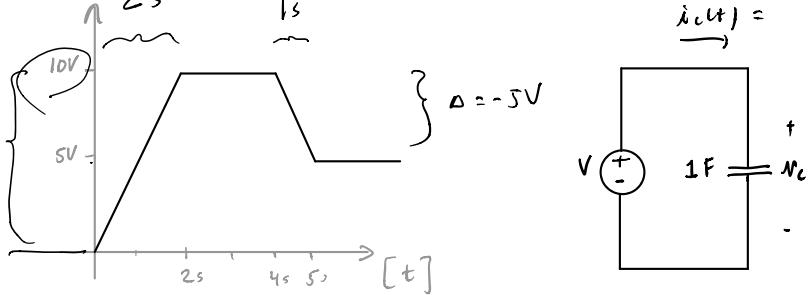
lág tíðni \longrightarrow lítill straumur

- **ATH: EF TÍÐNIN ER MJÖG HÁ MÁ SETJA SKAMMHHLAUP Í STAÐ PÉTTISINS OG EF HÚN ER NÚLL (DC) MÁ SETJA OPNA RÁS Í STAÐ þÉTTIS**

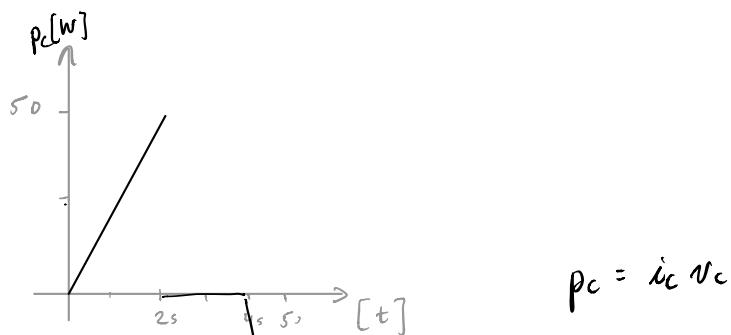
Péttir

- Til að spennan $v_C(t)$ yfir þéttinn geti breyst ósamfellt verður straumurinn $i_C(t)$ að vera óendanlega hár, þ.e. impúls
- Því má segja að ef engir impúlsar eru til staðar þá verður spennan yfir þéttinn alltaf samfelld, þ.e. engin spennuþrep eru möguleg (nema impúlsar komi til)

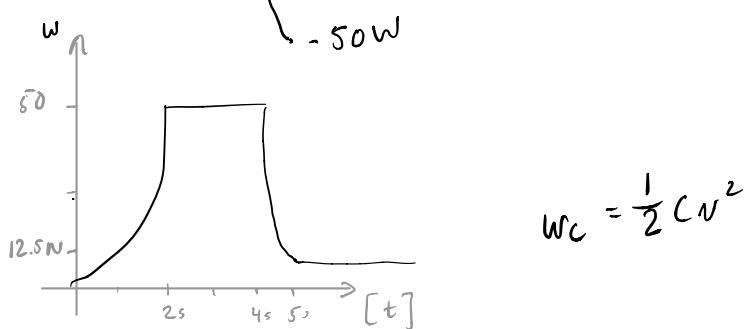
Därmed $N_C [V]$ Givet är spänna $yför 1F pötti$. Finnn $i_C(t)$, $p_C(t)$ & $w_C(t)$.



$$i_C = C \frac{dV}{dt}$$



$$p_C = i_C N_C$$



$$w_C = \frac{1}{2} C N^2$$

Dauer Finit straum i(t) für $C = 2F$ potti et - -

a) $v_c(t) = 3 \sin(4t + 45^\circ) V$

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dv_c}{dt} = C \cdot 3 \cos(4t + 45^\circ) \cdot 4$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$= 24 \cos(4t + 45^\circ) A$$

$$(fg)' = f'(g(x)) g'(x)$$

$$u'(t) = \delta(t)$$

b) $v_c(t) = 3 u(t) \cdot \sin(4t + 45^\circ) V \quad (fg)' = f'g + fg'$

$$i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt} = 2 \cdot 3 \left[u(t) \cdot \cos(4t + 45^\circ) \cdot 4 + \underbrace{\delta(t) \sin(4t + 45^\circ)}_{\delta(t) \sin(0 \cdot t + 45^\circ)} \right]$$

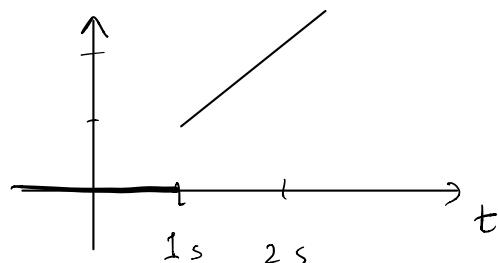
$$= 6 \left[4u(t) \cos(4t + 45^\circ) + \delta(t) \sin(45^\circ) \right]$$

$$= 24 u(t) \cos(4t + 45^\circ) + 3 \overline{\delta(t)} A$$

c) $v_c(t) = t \underbrace{u(t)}_f \underbrace{u(t-1)}_g V$

$$= t \cdot u(t-1) V$$

$$f \quad g$$



$$i_c(t) = C \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

$$= 2 \left[1 \cdot u(t-1) + \underbrace{t \cdot \delta(t-1)(1)}_{\delta(t-1)} \right]$$

$$\delta(t-1)$$

$$= 2u(t-1) + \delta(t-1) A$$

$$\underline{\underline{\quad}}$$

Péttir $i_C = C \frac{dv_c}{dt}$

- Spenna yfir sérhvern þetti við $t > 0$ ræðst af tvennu:
 - Hvaða straumur hefur flætt inn í þéttinn síðan $t = 0$
 - Hvaða spenna var yfir þéttinn við $t = 0$
- Þetta má skrifa sem

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

- Fyrra tegrið er nettóhleðslan sem safnast hefur í þéttinum á tímabilinu $-\infty < t < 0$. Þegar deilt er með rýmd þéttisins C þá fæst spennan yfir þéttinn við tímann $t = 0$.

Péttir

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \quad \text{skilgr.}$$

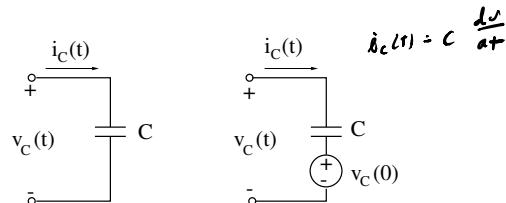
- Þess vegna er $= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau \quad \text{algebra}$

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

eða

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) u(\tau) d\tau$$

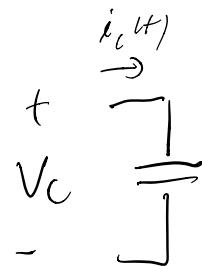
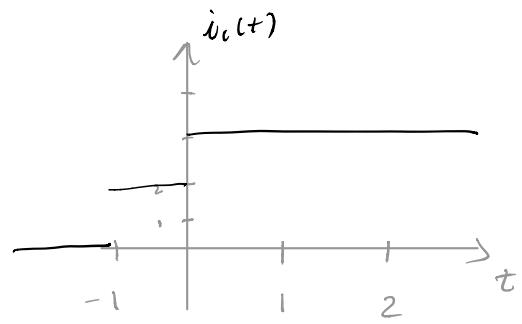
sem segir að í stað þéttis sem hefur upphafsgildi við $t = 0$ má setja jafnstóran þetti sem er óhlaðinn við $t = 0$ og raðtengda spennulind með spennu $v_C(0)$.



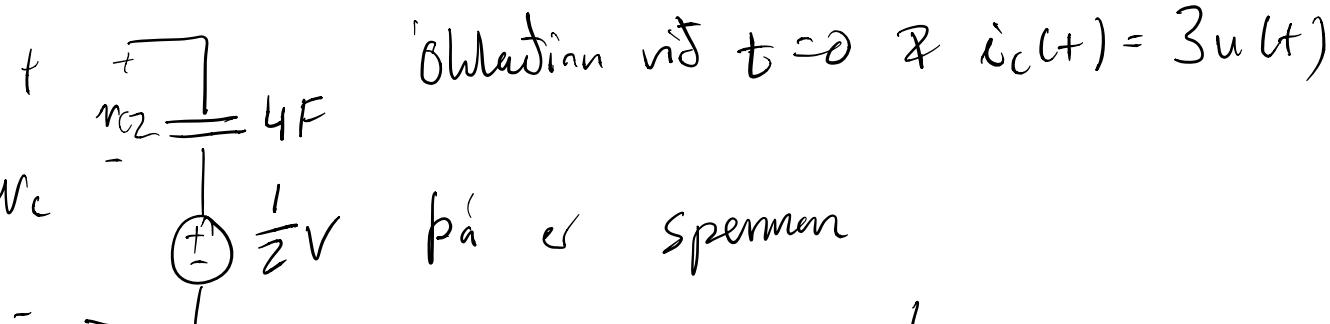
Dørun Strommen inn i $C = 4F$ pøtti er getinn med

$$i_C(t) = 2u(t+1) + u(t) A - \frac{1}{4}t$$

Finnnum spennet $v_C(t)$ gitt pøttingen.



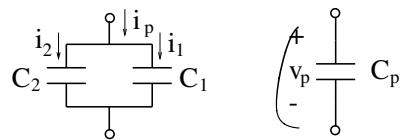
$$\begin{aligned} V_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_{-\infty}^0 i_C(\tau) d\tau + \int_0^t i_C(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_{-1}^0 2 d\tau + \int_0^t 3 d\tau \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\left[2\tau \right]_{-1}^0 + \left[3\tau \right]_0^t \right] = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}t}} \end{aligned}$$



$$V_{C2} = \frac{1}{C} \int_0^t 3u(\tau) d\tau = \frac{3}{4} \int_0^t d\tau = \underline{\underline{\frac{3}{4}t}}$$

$$\text{Svø } \underline{\underline{V_C = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}t}}$$

Péttir



Ef tveir péttar C_1 og C_2 eru hliðtengdir má setja í stað þeirra einn jafngildisþétti C_p .

$$i_p = C_p \frac{dV_p}{dt}$$

eða

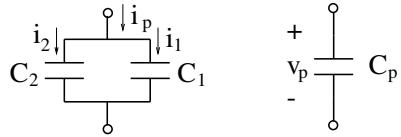
$$i_p = i_1 + i_2 = C_1 \frac{dV_1}{dt} + C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

$$\text{Graf að } V_1 = V_2 = V_p \quad \& \quad V'_1 = V'_2 = V_p'$$

$$\text{eða } C_p \frac{dV_p}{dt} = C_1 \frac{dV_1}{dt} + C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

Péttir þá es $C_p \cancel{V_p} = C_1 V_p' + C_2 V_p'$ svo

$$C_p = C_1 + C_2$$



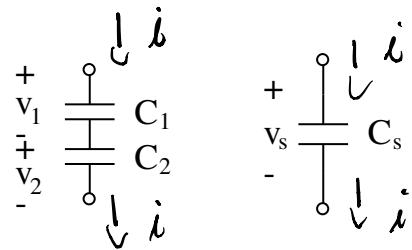
Par sem $V_p = V_1 = V_2$ þá er

$$i_p = (C_1 + C_2) \frac{dV_p}{dt}$$

eða

$$\underline{\underline{C_p = C_1 + C_2}}$$

Péttir



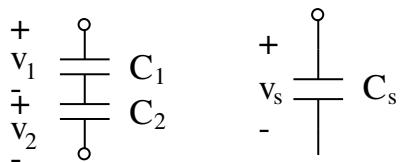
Ef tveir péttar C_1 og C_2 eru raðtengdir má setja í stað þeirra einn jafngildisþétti C_s

$$v_s(t) = \frac{1}{C_s} \int_{-\infty}^t i_s(\tau) d\tau$$

eða þar eð $v_s = v_1(t) + v_2(t)$ þá er

$$v_s(t) = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i_1(\tau) d\tau + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau$$

Péttir



Nú er $i_s = i_1 = i_2$ svo að

$$v_s(t) = \frac{1}{C_s} \int_{-\infty}^t i_s(\tau) d\tau$$

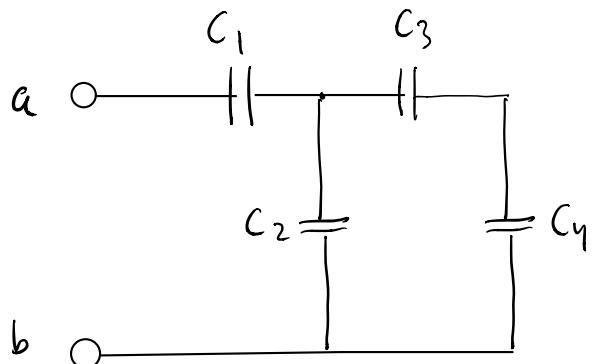
$$v_s(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_{-\infty}^t i_s(\tau) d\tau$$

eða

$$C_s = \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right)$$

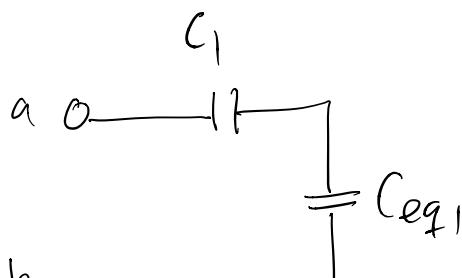
$$R_s = R_1 + R_2 \quad C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$
$$R_p = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad C_p = C_1 + C_2$$

Darmi Finnu järjistäisiin mihin poloi a & b et C₁ = 6 mF C₂ = 9 mF
 C₃ = 12 mF C₄ = 4 mF



$$\frac{C_3 \cdot C_4}{C_3 + C_4} + C_2 = C_{eq1} = 12 \text{ mF}$$

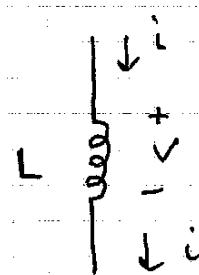
3 mF



$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_{eq1}}{C_1 + C_{eq1}} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = \underline{\underline{\frac{72}{18}}} = 4 \text{ mF}$$

Python lausunā HD5 → Slack

Spóla



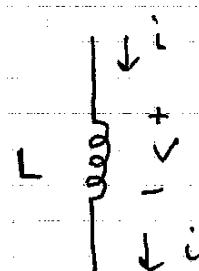
- Vír má vinda upp og mynda spólu
- Línuleg spóla er rásaeining þar sem samband straums og spennu er gefið með jöfnunni

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\mathcal{N}(\ell) = L(v, t) \dot{\ell}'$$

- Stuðullinn L kallast **span** spólunnar og hefur eininguna henry [H]

Spóla



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

- Með því að tegra báðar hliðar jöfnunnar frá $t = -\infty$ til einhvers tímapunkts t_0 fæst

$$i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(t) dt$$

b.e. straumurinn í spólunni ræðst af því hvernig spennan yfir hana hefur verið frá upphafi

Spóla

Við getum séð að spólan er orkugeymandi rásaeining með því að finna heildarorkuna sem hún hefur þegið frá umhverfi sínu:

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} p(t)dt = \int_{-\infty}^{t_0} v(t)i(t)dt$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

eða

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} L \frac{di(t)}{dt} i(t)dt = L \int_{i(-\infty)}^{i(t_0)} i(t)di$$

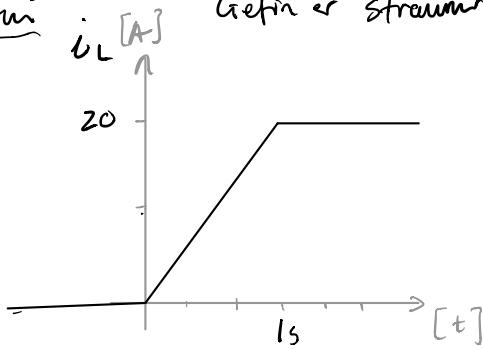
Með $i(-\infty) = 0$ fæst

$$w(t_0) = L \frac{i^2(t_0)}{2}$$

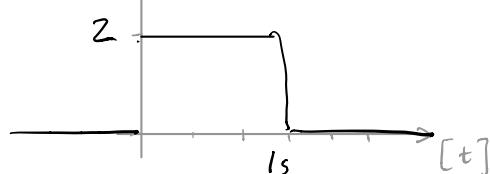
$$w(t_0) = C \frac{\mathcal{N}^2(t_0)}{2}$$

Dømme: Givet en strøm i et ytre spole. Finn nummer spennin, akt og arbeid

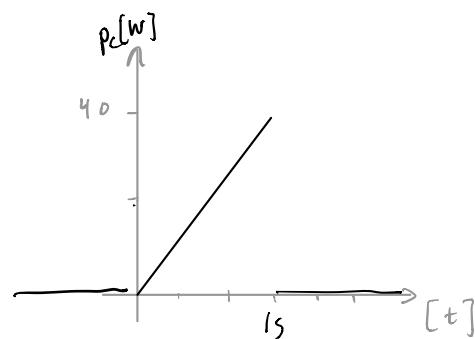
$$L = 0.1 \text{ H}$$



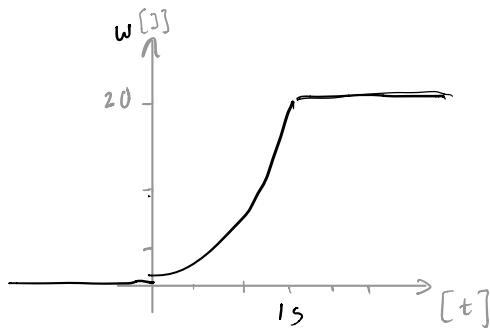
$$i_L(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 20t & t \in [0, 1] \\ 20 & \text{annars} \end{cases}$$



$$V_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = L \cdot \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 20 & t \in [0, 1] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



$$p_L = i_L V_L = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ (20t)(20) & t \in [0, 1] \\ 0 & \text{annars} \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 40t & t \in [0, 1] \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



$$\frac{L}{2} = 0.05 \text{ H}$$

$$w_L = \frac{1}{2} L i^2 = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 20t^2 & t \in [0, 1] \\ 20 & \text{annars} \end{cases}$$

Spóla

Lítum á two mikilvæga eiginleika spólu:

- Ef straumurinn í spólunni er sínuslag

$$i_L(t) = I \sin(\omega t)$$

þá verður spennan

$$v_L(t) = L\omega I \cos(\omega t)$$

þ.e. í beinu hlutfalli við tíðnina

há tíðni \longrightarrow há spenna

lág tíðni \longrightarrow lág spenna

↑

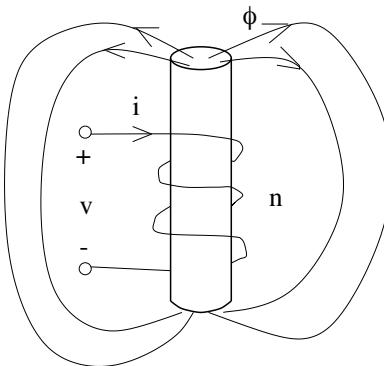
↓

|

Spóla

- Ef tíðnin er mjög há má setja opna rás í stað spólunnar og ef hún er núll (dc) má setja skammhlaup í stað spólunnar
- Ef engir spennuimpúlsar eru til staðar þá er straumurinn í spólunni samfelldur, þ.e. enginn straumþrep eru möguleg (nema impúls komi til)

Spóla



- Dæmigerð spóla er undin úr viðnámslausum vír með n vindingum. Ef straumur i fer um spóluna þá myndast segulflæði $\phi(t)$ [Weber] sem hefur lokaðar segulsviðslínur.
- Spennan yfir spóluna er tímaafleiðan af segulflæðinu $n\phi$,

$$v(t) = \frac{d}{dt}(n\phi) = n \frac{d(\phi)}{dt} \text{ [Lögmál Faradays]}$$

- Jákvæð spenna þýðir að segulflæðið sé að vaxa; neikvæð spenna þýðir að það fari minnkandi.

Spóla

- Við getum snúið þessari jöfnu við og fengið

$$\phi(t) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

eða

$$\phi(t) = \frac{L}{n} i(t)$$

- Stærðin á segulflæðinu ϕ ræðst af straumnum $i(t)$.

Spóla

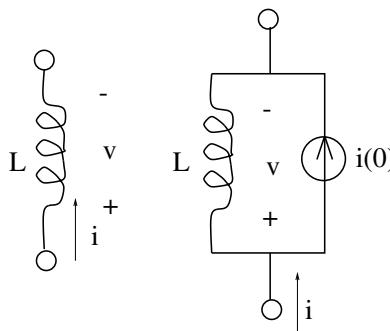
- Fyrir $t > 0$ gildir að straumur í spólu er

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$

eða

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$

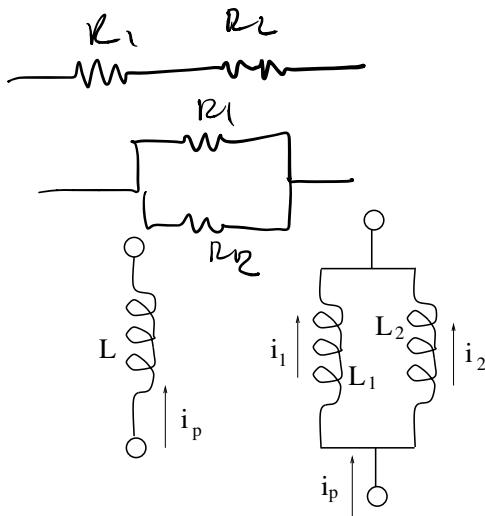
- Í stað spólu með upphafsstraum (við $t = 0$) má því setja spólu án upphafssstraums og hliðtengja straumlind $i(0)$ og reikna síðan strauma og spennur fyrir $t > 0$ út frá þessum gildum



Spóla

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_p = C_1 + C_2$$



$$R_s = R_1 + R_2$$

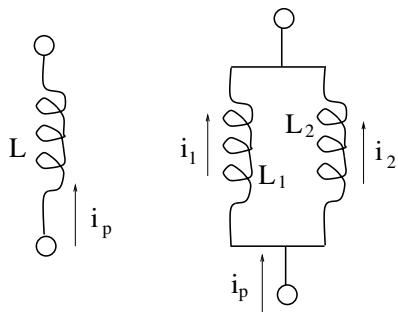
$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

- Ef tvær spólur L_1 of L_2 eru hliðtengdar má setja í stað þeirra eina jafngildisspólu L_p

$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t v_1(\tau) d\tau$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^t v_2(\tau) d\tau$$

Spóla



$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t v_1(\tau) d\tau$$

og

$$\begin{aligned} i_p &= i_1 + i_2 & i_2 &= \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^t v_2(\tau) d\tau \\ v_1 &= v_2 = v_p \end{aligned}$$

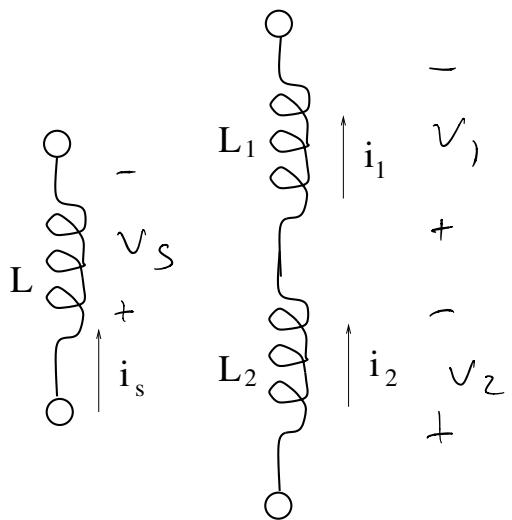
SVO

$$i_p = i_1 + i_2 = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_{-\infty}^t v_p(\tau) d\tau = \frac{1}{L_p} \int_{-\infty}^t v_p(\tau) d\tau$$

eða

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Spóla



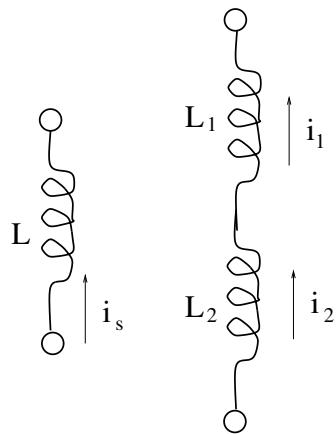
Ef tvær spólur L_1 og L_2 eru raðtengdar má setja í stað þeirra eina jafngildisspólu L_s

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{og} \quad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

en

$$i_1 = i_2 = i_s \quad \& \quad v_s = v_1 + v_2$$

Spóla



Par með er

$$v_s = v_1 + v_2 = (L_1 + L_2) \frac{di_s}{dt} = L_s \frac{di_s}{dt}$$

eða

$$L_s = L_1 + L_2$$

beitr

Spola

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$$

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

$$\omega = \frac{1}{2} CN^2$$

~~$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$~~

~~$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$~~

~~$$\omega = \frac{1}{2} Li^2$$~~

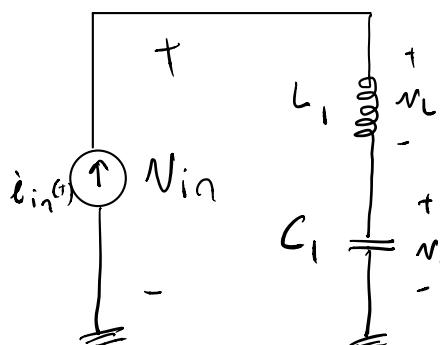
$$C_S = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad C_P = C_1 + C_2$$

$$L_S = L_1 + L_2 \quad L_P = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Fürum at $L_1 = 2.5 \text{ mH}$, $C_1 = 1 \mu\text{F}$

$$i_{in}(t) = 20te^{-10t} u(t) \text{ A}$$

Fürum N_L, N_C, w_L, w_C



$$N_L(t) = L_1 \frac{di_{in}}{dt} = 2.5 \cdot 10^3 \frac{d}{dt} \left[20te^{-10t} u(t) \right]$$

$$N_C(t) = 0.05 \left[e^{-10t} - 10te^{-10t} \right] u(t) + 0.05 \left[t e^{-10t} \delta(t) \right]$$

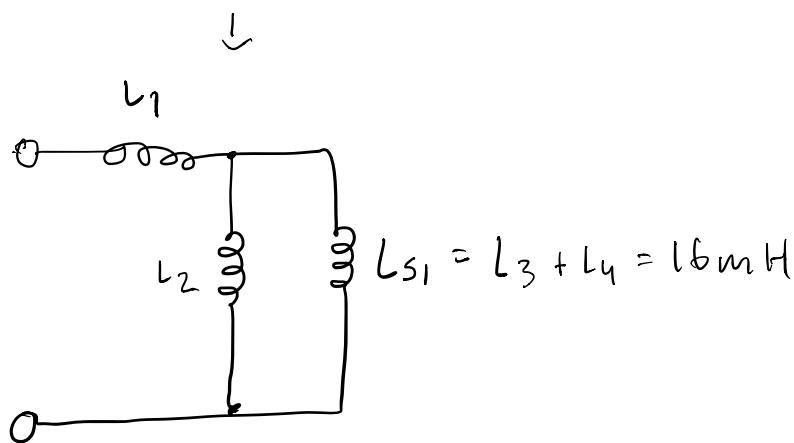
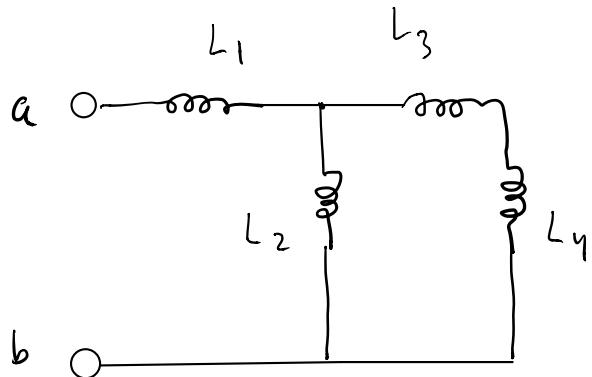
$$N_C(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t 20te^{-10t} u(t) dt = \frac{20}{C_1} \left[-te^{-10t} - \frac{1}{10} e^{-10t} \right]_0^t$$

$$= 2000 \left[\frac{1}{10} - te^{-10t} - \frac{1}{10} e^{-10t} \right] u(t)$$

$$w_L = \frac{1}{2} L i_{in}^2 \quad w_C = \frac{1}{2} C N_C^2$$

$$N_{in} = N_L + N_C = u(t) \left[0.05 \left(e^{-10t} - 10te^{-10t} \right) + 2000 \left[\frac{1}{10} - te^{-10t} - \frac{1}{10} e^{-10t} \right] \right]$$

Dann Finnut jettjäidisryhmä millä pola $a \neq b$ et $L_1 = 6\text{mH}$ $L_2 = 9\text{mH}$
 $L_3 = 12\text{mH}$ $L_4 = 4\text{mH}$



↓

$$L_{p1} = \frac{L_2 \cdot L_{S1}}{L_2 + L_{S1}} = \frac{(9\text{mH})(16\text{mH})}{(9\text{mH}) + (16\text{mH})} = \frac{144\mu\text{H}^2}{25\text{mH}}$$

$$\approx 5.75$$

$$L_{eq} = L_1 + L_{p1} \approx \underline{\underline{11.75\text{ mH}}}$$