Greining Rása

Orkugeymandi rásaeiningar

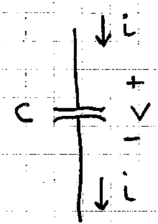
Ólafur Bjarki Bogason

18. febrúar 2021

Inngangur

- Í þessum kafla eru innleiddar **þéttar** og **spólur**, sem eru **orkugeymandi rásaeiningar**
- Þessar rásaeiningar eru t.d. nytsamlegar í afriðun (AC í DC) og síunar-rásum (e. filters)
- Þessar einingar hafa mikið að segja um tíðnisvörun rásar og hversu hratt þær vinna

Þéttir



- Fyrir þétti er samband straums og spennu er gefið með jöfnunni

  $$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$$

  þar sem stuðullinn C kallast **rýmd** þéttisins og hefur eininguna farad [F] eða

  $$1\ \mathrm{F} = \frac{1\ \mathrm{C}}{1\ \mathrm{V}}$$

Þéttir

- Með því að heilda báðar hliðar jöfnunnar frá $t = -\infty$ til einhvers tímapunkts t_0 fæst

$$\boxed{v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(t)\mathrm{d}t}$$

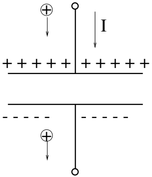
- Tegrið $\int_{-\infty}^{t_0} i(t)\mathrm{d}t$ er nettóhleðslan q sem safnast hefur fyrir í þéttinum við tímann t_0 af völdum straumsins sem streymt hefur inn í þéttinn frá $t = -\infty$ til $t = t_0$, þ.a

$$\boxed{v(t) = \frac{q(t)}{C}}$$

- Þéttir er rásaeining sem geymir hleðslu; því meiri hleðslu sem hann geymir, þeim mun hærri spenna mælist yfir hann

Þéttir

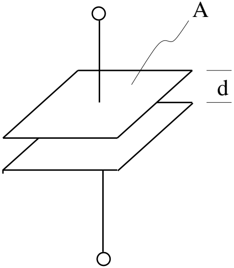
- Þéttir er gerður úr tveim leiðandi plötum með einangrandi (rafsvara) efni á milli
- Þegar fastur straumur I streymir "um" þétti þá safnast jákvæðar hleðslur jafnt og þétt á plötuna þar sem straumurinn streymir inn



- Jákvæðar hleðslur flæða út úr þéttinum hinummegin svo að heildar hleðslan á þeirri plötu verður neikvæð. Þar sem straumur út er jafn stór og straumur inn þá er jafn stór hleðsla á báðum plötunum, $q(t)$, aðeins með mismunandi formerki

Þéttir

- Gerum nú ráð fyrir plötuþétti sem samanstendur af plötum með flatarmál A og aðskilnað d



- Ef plöturnar hafa hleðslu Q þá er **yfirborðshleðsluþéttleiki**

$$\rho_\mathrm{s} = \frac{Q}{A}$$

Þéttir

- **Rafsviðsstyrkur** E milli platnanna er einsleitur og af styrk

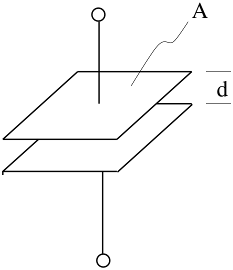
$$E = \frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\epsilon} \qquad \text{[Lögmál Gauss]}$$

  með $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ þar sem ϵ_0 er **rafsvörunarstuðull lofttæmis** og ϵ_r er **hlutfallslegur rafsvörunarstuðull** efnisins milli platnanna

- Hlutfallslegur rafsvörunarstuðull

Efni	$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$
Gler	7
Nylon	2
Bakelite	5

Þéttir



- Spennan yfir þéttinn er þá

$$v = \int_1^2 \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{s} = Ed$$

og rýmdin

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\epsilon A}{d}$$

Orka í þétti

- Orku þéttis má finna sem tegrið af aflinu sem þéttirinn hefur fengið frá umhverfi sínu, við einhvern tíma $t = t_0$

$$\begin{aligned} w(t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} p(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{t_0} v(t)i(t)\mathrm{d}t \\ &= C\int_{-\infty}^{v(t_0)} v(t)\frac{dv}{dt}dt \\ &= C\int_{v(-\infty)}^{v(t_0)} v(t)dv \end{aligned}$$

- Þegar $v(-\infty) = 0$ fæst

$$\boxed{w(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)}$$

Þéttir

Tveir mikilvægir eiginleikar þéttis ($i(t) = C dv/dt$)

- Ef spenna yfir þétti er sínuslaga

  $$v_\mathrm{C}(t) = V \sin(\omega t)$$

  þá verður straumurinn

  $$i_\mathrm{C}(t) = C\omega V \cos(\omega t)$$

  þ.e. í beinu hlutfalli við tíðnina

  $$\text{há tíðni} \longrightarrow \text{hár straumur}$$

  $$\text{lág tíðni} \longrightarrow \text{lítill straumur}$$

- **ATH: EF TÍÐNIN ER MJÖG HÁ MÁ SETJA SKAMMHLAUP Í STAÐ ÞÉTTISINS OG EF HÚN ER NÚLL (DC) MÁ SETJA OPNA RÁS Í STAÐ þÉTTIS**

Þéttir

- Til að spennan $v_{\mathrm{C}}(t)$ yfir þéttinn geti breyst ósamfellt verður straumurinn $i_{\mathrm{C}}(t)$ að vera óendanlega hár, þ.e. impúls
- Því má segja að ef engir impúlsar eru til staðar þá verður spennan yfir þéttinn alltaf samfelld, þ.e. engin spennuþrep eru möguleg (nema impúlsar komi til)

Þéttir

- Spenna yfir sérhvern þétti við $t > 0$ ræðst af tvennu:
  - Hvaða straumur hefur flætt inn í þéttinn síðan $t = 0$
  - Hvaða spenna var yfir þéttinn við $t = 0$
- Þetta má skrifa sem

$$v_{\mathrm{C}}(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_{\mathrm{C}}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_{\mathrm{C}}(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_{\mathrm{C}}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- Fyrra tegrið er nettóhleðslan sem safnast hefur í þéttinum á tímabilinu $-\infty < t < 0$. Þegar deilt er með rýmd þéttisins C þá fæst spennan yfir þéttinn við tímann $t = 0$.

Þéttir

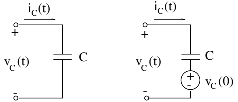
- Þess vegna er

$$v_{\mathrm{C}}(t) = v_{\mathrm{C}}(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_{\mathrm{C}}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

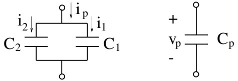
eða

$$v_{\mathrm{C}}(t) = v_{\mathrm{C}}(0) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^t i_{\mathrm{C}}(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

sem segir að í stað þéttis sem hefur upphafsgildi við $t = 0$ má setja jafnstóran þétti sem er óhlaðinn við $t = 0$ og raðtengda spennulind með spennu $v_{\mathrm{C}}(0)$.



Þéttir



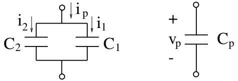
Ef tveir þéttar C_1 og C_2 eru hliðtengdir má setja í stað þeirra einn jafngildisþétti C_p.

$$i_\mathrm{p} = C_\mathrm{p} \frac{\mathrm{d}V_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$i_\mathrm{p} = i_1 + i_2 = C_1 \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} + C_2 \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}$$

Þéttir



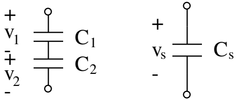
Þar sem $V_\mathrm{p} = V_1 = V_2$ þá er

$$i_\mathrm{p} = (C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}V_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$C_\mathrm{p} = C_1 + C_2$$

Þéttir



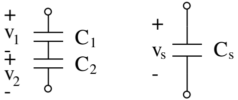
Ef tveir þéttar C_1 og C_2 eru raðtengdir má setja í stað þeirra einn jafngildisþétti C_s

$$v_\mathrm{s}(t) = \frac{1}{C_\mathrm{s}} \int_{-\infty}^{t} i_\mathrm{s}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða þar eð $v_\mathrm{s} = v_1(t) + v_2(t)$ þá er

$$v_\mathrm{s}(t) = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Þéttir



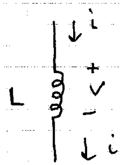
Nú er $i_\mathrm{s} = i_1 = i_2$ svo að

$$v_\mathrm{s}(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}\right) \int_{-\infty}^{t} i_\mathrm{s}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða

$$C_\mathrm{s} = \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

Spóla

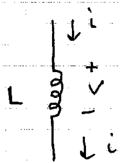


- Vír má vinda upp og mynda spólu
- Línuleg spóla er rásaeining þar sem samband straums og spennu er gefið með jöfnunni

$$\boxed{v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}}$$

- Stuðullinn L kallast **span** spólunnar og hefur eininguna henry [H]

Spóla



- Með því að tegra báðar hliðar jöfnunnar frá $t = -\infty$ til einhvers tímapunkts t_0 fæst

$$\boxed{i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v(t)\mathrm{d}t}$$

þ.e. straumurinn í spólunni ræðst af því hvernig spennan yfir hana hefur verið frá upphafi

Spóla

Við getum séð að spólan er orkugeymandi rásaeining með því að finna heildarorkuna sem hún hefur þegið frá umhverfi sínu:

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} p(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{t_0} v(t)i(t)\mathrm{d}t$$

eða

$$w(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}i(t)\mathrm{d}t = L\int_{i(-\infty)}^{i(t_0)} i(t)\mathrm{d}i$$

Með $i(-\infty) = 0$ fæst

$$\boxed{w(t_0) = L\frac{i^2(t_0)}{2}}$$

Spóla

Lítum á tvo mikilvæga eiginleika spólu:

- Ef straumurinn í spólunni er sínuslaga

  $$i_L(t) = I\sin(\omega t)$$

  þá verður spennan

  $$v_L(t) = L\omega I\cos(\omega t)$$

  þ.e. í beinu hlutfalli við tíðnina

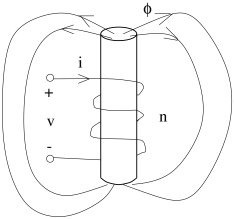
  $$\text{há tíðni} \longrightarrow \text{há spenna}$$

  $$\text{lág tíðni} \longrightarrow \text{lág spenna}$$

Spóla

- **Ef tíðnin er mjög há má setja opna rás í stað spólunnar og ef hún er núll (dc) má setja skammhlaup í stað spólunnar**
- Ef engir spennuimpúlsar eru til staðar þá er straumurinn í spólunni samfelldur, þ.e. enginn straumþrep eru möguleg (nema impúls komi til)

Spóla



- Dæmigerð spóla er undin úr viðnámslausum vír með n vindingum. Ef straumur i fer um spóluna þá myndast segulflæði $\phi(t)$ [Weber] sem hefur lokaðar segulsviðslínur.
- Spennan yfir spóluna er tímaafleiðan af segulflæðinu $n\phi$,

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\phi) = n\frac{\mathrm{d}(\phi)}{\mathrm{d}t} \text{ [Lögmál Faradays]}$$

- Jákvæð spenna þýðir að segulflæðið sé að vaxa; neikvæð spenna þýðir að það fari minnkandi.

Spóla

- Við getum snúið þessari jöfnu við og fengið

$$\phi(t) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau$$

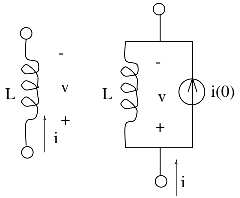
eða

$$\phi(t) = \frac{L}{n} i(t)$$

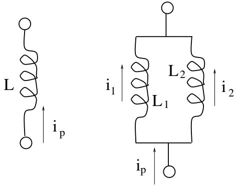
- Stærðin á segulflæðinu ϕ ræðst af straumnum $i(t)$.

Spóla

- Fyrir $t > 0$ gildir að straumur í spólu er
$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$
eða
$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$
- Í stað spólu með upphafsstraum (við $t = 0$) má því setja spólu án upphafsstraums og hliðtengja straumlind $i(0)$ og reikna síðan strauma og spennur fyrir $t > 0$ út frá þessum gildum



Spóla

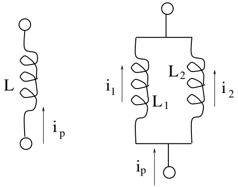


- Ef tvær spólur L_1 of L_2 eru hliðtengdar má setja í stað þeirra eina jafngildisspólu L_p

$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^{t} v_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^{t} v_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Spóla



og

$$i_{\mathrm{p}} = i_1 + i_2$$

$$v_1 = v_2 = v_{\mathrm{p}}$$

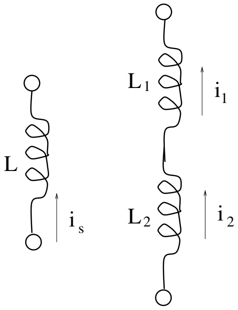
svo

$$i_{\mathrm{p}} = i_1 + i_2 = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) \int_{-\infty}^{t} v_{\mathrm{p}}(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L_{\mathrm{p}}} \int_{-\infty}^{t} v_{\mathrm{p}}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

eða

$$L_{\mathrm{p}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Spóla



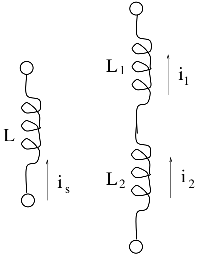
Ef tvær spólur L_1 og L_2 eru raðtengdar má setja í stað þeirra eina jafngildisspólu L_s

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad \text{og} \quad v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

en

$$i_1 = i_2 = i_\mathrm{s}$$

Spóla



Þar með er

$$v_\mathrm{s} = v_1 + v_2 = (L_1 + L_2)\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = L_\mathrm{s}\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}$$

eða

$$L_\mathrm{s} = L_1 + L_2$$