RAF201G – Lokapróf

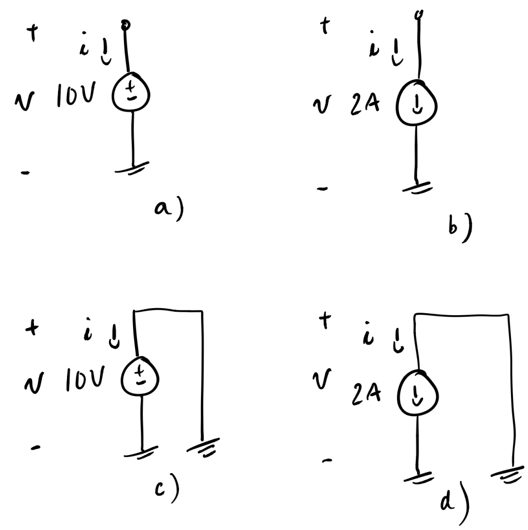
27. apríl, 9:00-12:00

Prófið inniheldur sex dæmi. Setjið inn lausnir og útreikninga á Gradescope. Gangi ykkur vel!

Lausn 20/04/21

Dæmi 1 – Straumur og spenna (10%)

Greining rása snýst um að finna strauma og spennur. Ef, af einhverjum ástæðum, reynist ómögulegt að finna þessar stærðir er rásin sögð *illa skilgreind*. Hér að neðan eru fjórar „rásir". Finnið straum i og spennu v fyrir hverja þeirra eða útskýrið hvers vegna tiltekin „rás" er illa skilgreind. Athugið að a) og b) eru opnar, á meðan c) og d) hefur verið skammhleypt.



a) $v = 10V$ og $i = 0A$

b) $i = 2A$ skv. straumlind en efri póll ekki tengdur í neitt svo $i = 0A$

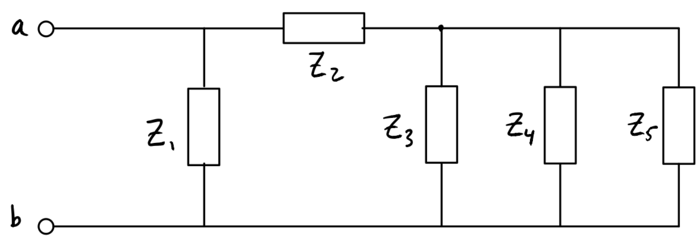
Það gengur ekki [illegible] rás, því illa skilgreind.

c) Hér er skammhleypt á milli póla spennulindarinnar $v = 0V$ en gildið hennar er 10V. Það gengur ekki. Rás illa skilgreind!

d) $v = 0V$ $i = 2A$

Dæmi 2 – Tvær Thévenin jafngildisrásir (20%)

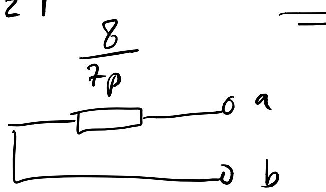
Finnið Thévenin jafngildisrás með samviðnám á forminu $Z_{\text{eq}}(p)$ fyrir tvær rásir. Annars vegar ef samviðnám Z_{1-5} eru 0.5F þéttar og hins vegar ef þau eru 10Ω viðnám. Teiknið jafngildisrásirnar.



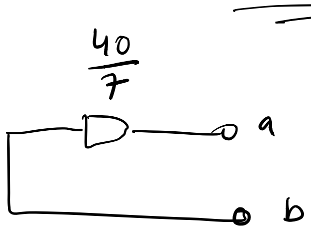
$V_{th} = 0V$ (engir óháðar lindir)

$$Z_{eq} = Z_1 \parallel \left(Z_2 \perp \left(Z_3 \parallel Z_4 \parallel Z_5 \right) \right) = \left(Z^{-1} + \left(Z_2 + \left(Z_3^{-1} + Z_4^{-1} + Z_5^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1}$$

a) $Z_{1-5} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}p}$ svo $\underline{Z_{eq} = \dfrac{8}{7p}}$

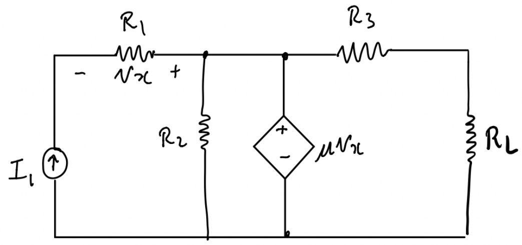


b) $Z_{1-5} = 10$ svo $\underline{Z_{eq} = \dfrac{40}{7}}$



Dæmi 3 – Afl hámarkað (20%)

Finnið gildi á R_L sem hámarkar aflið sem tapast í viðnáminu.

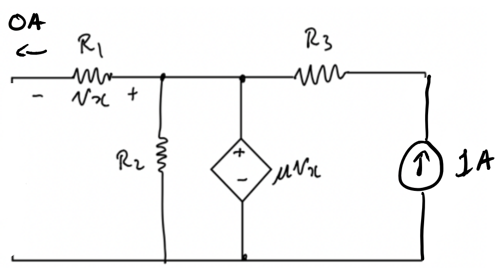


Breyta	Gildi
R_1	$100\,\mathrm{k\Omega}$
R_2	$6.2\,\mathrm{k\Omega}$
R_3	$42\,\Omega$
I_1	$1\,\mathrm{mA}$
μ	$\sqrt{2}$

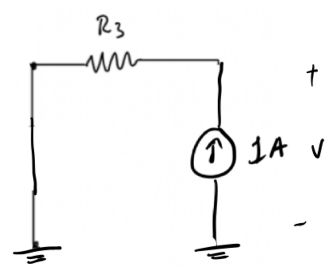
Þévenin jafngildisrás

Auðveldasta leiðin er að muna að gildi sem hámarkar aflflutning er $R_L = R_{Th}$

Finnum R_{Th} með því að taka R_L úr rás, núllstilla I_1, setja 1A prufustraum & mæla spennu, því er $R_{Th} = \frac{v}{1A}$



Hér er $v_x = 0V$ svo þessar rásir eru jafngildar

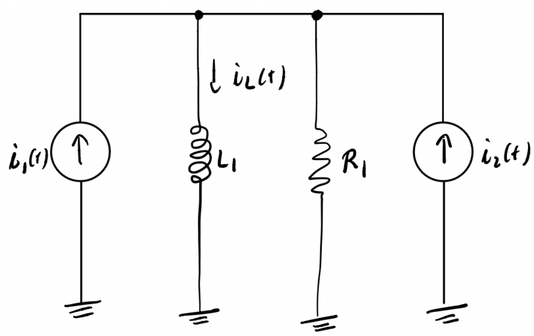


$v = 1A \cdot R_3 = R_3$ & $\underline{R_L = R_3}$ sem hámarkar aflflutning.

Það má líka setja upp MNA fylki, finna v_{RL}, spennu yfir R_L, & leysa jöfnuna $\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{v_{RL}^2}{R_L} = 0$ m.t.t. R_L. Þá fæst einnig $\underline{R_L = R_3}$

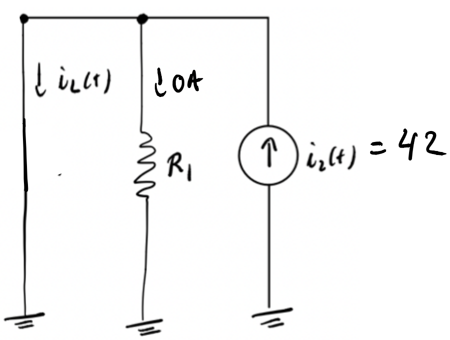
Dæmi 4 – Fyrstu gráðu rás (15%)

Gefið er að $i_1(t) = tu(t)$A og $i_2(t) = 42u(-t))$A. Finnið $i_L(t)$ fyrir $t > 0$.



Breyta	Gildi
R_1	$3\,\Omega$
L_1	$1\,\text{H}$

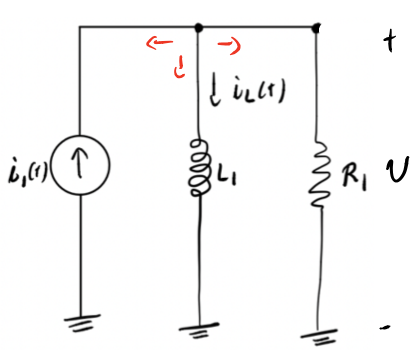
Skoðum rás við $t = 0^-$



engir impúlsar

Sjáum að $\underline{i_L(0^-) = 42A} = i_L(0^+)$

Skoðum rás við $t \geq 0$



KCL gefur $\quad -i_s(t) + i_L(t) + \dfrac{v - 0}{R_1} = 0$

nú er $v = L\, i_L'$ svo $\dfrac{L_1}{R_1} i_L' + i_L = i_s$

eða $\quad i_L' + \dfrac{R_1}{L_1} i_L = \dfrac{R_1}{L_1} t$

svo $\quad \underline{i_L' + 3 i_L = 3t}$ (*)

Náttúruleg lausn (Giska á $i_{Ln}(t) = Ae^{st}$ & setja inn í öðlidtröðe (*))

$$i_{Ln}(t) = Ae^{-3t}$$

Sérlausn Giskum á $i_{Lp}(t) = k_1 t + k_0$ & setjum inn í (*)

$$i'_{Lp}(t) = k_1$$

$$k_1 + 3(k_1 t + k_0) = 3t$$

eða $\begin{cases} 3k_1 = 3 \\ k_1 + 3k_0 = 0 \end{cases}$ svo $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_0 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Heildarlausn

$$i_L(t) = i_{Ln}(t) + i_{Lp}(t)$$

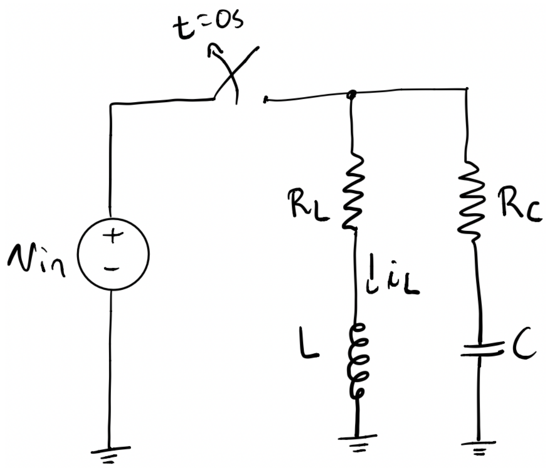
$$= Ae^{-3t} + t - \frac{1}{3}$$

en $i_L(0) = 42 = A - \frac{1}{3}$

þá er $\underline{\underline{i_L(t) = 42\frac{1}{3}e^{-3t} + t - \frac{1}{3} \quad t > 0}}$

Dæmi 5 – Annarar gráðu rás (15%)

Rofinn hefur verið lokaður í langan tíma og rásaeiningar náð jafnvægi. Við tímann $t = 0$ opnast rofinn. Finnið $i_L(t)$ fyrir $t > 0$.



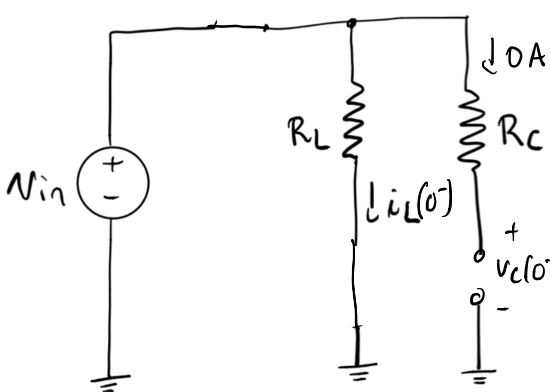
Breyta	Gildi
v_{in}	$3\,\text{V}$
R_L, R_C	$3\,\Omega$
L_1	$1\,\text{H}$
C_1	$\frac{1}{9}\,\text{F}$

engir impúls

Skoðum rás við $t=0^-$

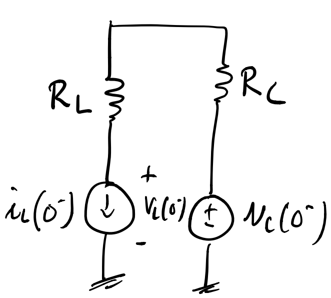
Sjáum að $i_L(0^-) = \dfrac{v_{in} - 0}{R_L} = 1\,A = i_L(0^-)$

& $v_C(0^-) = v_{in} = 3\,V = v_C(0^+)$



Skoðum rás við $t=0^+$

Hér er $i_L(0^-) = \dfrac{v_C(0^-) - v_L(0^-)}{R_L + R_C}$

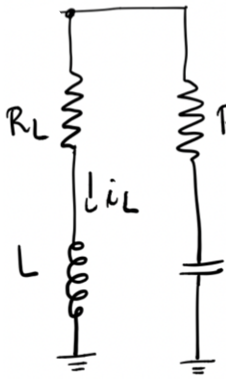


svo $v_L(0^-) = v_C(0^-) - i_L(0^-)(R_L + R_C)$

$= 3 - 1\,(3+3) = -3\,V$

& $i_L'(0^-) = i_L'(0^+) = \dfrac{v_L(0^-)}{L} = -3\,\dfrac{A}{s}$

Skoðum rás við $t>0s$



KVL gefur $i_L\left(R_L+R_C+pL+\frac{1}{pC}\right)=0$

eða $i_L\left(p^2+p\frac{R_L+R_C}{L}+\frac{1}{LC}\right)=0$

svo $i_L''+\frac{R_L+R_C}{L}i_L'+\frac{1}{LC}=0$

eða $\underline{i_L''+6i_L'+9=0}$ $(*)$

Kennijafnan er $s^2+6s+9=\underline{(s+3)^2=0}$ svo rásin er <u>markdempuð</u>.

Giskum á $i_L(t)=e^{-3t}(A_1t+A_2)$

$i_L'(t)=-3e^{-3t}(A_1t+A_2)+e^{-3t}A_1$

Nú er $i_L(0)=1=A_2$

$i_L'(0)=-3=-3A_2+A_1$

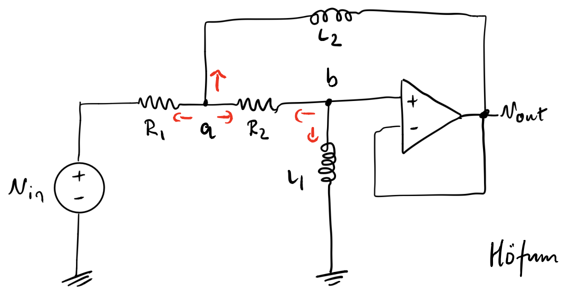
$$\begin{cases} A_2=1 \\ A_1=0 \end{cases}$$

svo $\underline{\underline{i_L(t)=e^{-3t} \quad t>0}}$

Dæmi 6 – Yfirfærslufall og sínuslaga innmerki (20%)

Gerið ráð fyrir fullkomnum aðgerðarmagnara. Finnið $H(p) = v_{\text{out}}/v_{\text{in}}$, yfirfærslufall fyrir rásina hér að neðan. Finnið að lokum útmerkið $v_{\text{out}}(t)$ ef $v_{\text{in}}(t) = \cancel{3}cos(2t + \cancel{60}°)$.

5 37°



Breyta	Gildi
R_1, R_2	$1\,\Omega$
L_1, L_2	$1\,\mathrm{H}$

Höfum $Y_{R1} = Y_{R1} = 1\,\mho$ & $Y_{L1} = Y_{L2} = \frac{1}{p}\,\mho$

KCL í a: $Y_{R1}(v_a - v_{in}) + Y_{L2}(v_a - v_{out}) + Y_{R2}(v_a - v_b) = 0$

b: $Y_{R2}(v_b - v_a) + Y_{L1}(v_b - 0) = 0$

Nú er $v_b = v_{out}$ & við höfum 2 jöfn. & 2 óþekktar. Þetta getum við leyst!

$$\begin{bmatrix} Y_{R1}+Y_{L2}+Y_{R2} & -Y_{L2}-Y_{R2} \\ -Y_{R2} & Y_{R2}+Y_{L1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{R1} v_{in} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eða} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{p}+2 & -\frac{1}{p}-1 \\ -1 & 1+\frac{1}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{in} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Þá er
$$\underline{\begin{bmatrix} v_a \\ v_{out} \end{bmatrix} = v_{in} \begin{bmatrix} \frac{p}{p+1} \\ \frac{p^2}{p^2+2p+1} \end{bmatrix}} \quad \text{eða} \quad \underline{\underline{H(p) = \frac{v_{out}(p)}{v_{in}(p)} = \frac{p^2}{p^2+2p+1}}}$$

Nú er $v_{in}(t) = 5\cos(2t + 37°)$ $\quad \underline{V_{in} = 5 \angle 37°}$ & $\omega = 2$ rad/s

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + 1 + 2j\omega} \quad \& \quad H(j2) = \frac{-4}{-3+4j} \approx \underline{\frac{4}{5}\angle 53.13°}$$

$$V_{out} = H(j2)\,V_{in} = \left(\frac{4}{5}\cdot 5\right) \angle (37° + 53.13) = \underline{4\angle 90.13°}$$

$$\underline{\underline{v_{out}(t) = 4\cos(2t + 90.13°)}}$$