Greining Rása

Merki

Ólafur Bjarki Bogason

18. febrúar 2021

Inngangur

- Þegar lindarspennur og -straumar breytast með tíma er þeim lýst með tímaföllum sem við köllum **merki** (e. signal)
- **Merki flytja upplýsingar**
- Algengasta merkið er sínusmerkið. Veituspennan er sínuslaga, svo og öll radíómerki

Einingaþrepfallið

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{ef} \quad t > 0 \\ 0 & \text{ef} \quad t < 0 \end{cases}$$

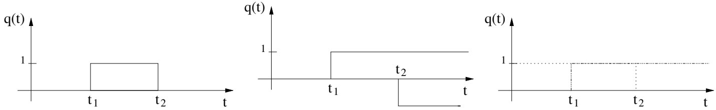
það er óskilgreint í $t = 0$

- Straumlind eða spennulind sem kveikt er á eða slökkt á við tímann $t = t_o$ má lýsa með einingarþrepfallinu
- Summu tveggja þrepfalla má nota til að lýsa:
  - stærðum sem „kviknar“ á og „slökknar“
  - eða stærðum sem skipta á milil tveggja gilda

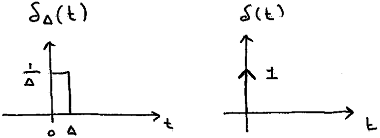
Þrepfallið

- Þessu falli má t.d. lýsa sem summu tveggja þrepfalla

$$q(t) = u(t - t_1) - u(t - t_2)$$



Impúlsinn



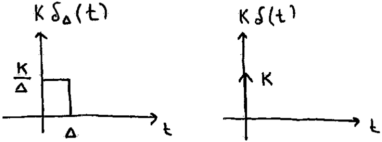
- Skoðum púls $\delta_\Delta(t)$ með flatarmálið 1

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{ef} \quad 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Látum nú $\Delta \longrightarrow 0$, og þá verður púlsinn mjórri og hærri.
- Markgildið er óendanlega hár og óendanlega mjór púls sem hefur flatarmálið 1. Þetta er **impúlsinn**

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

Impúlsinn

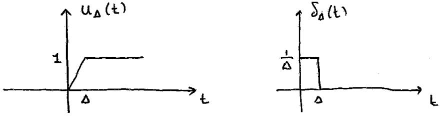


- impúlsinn hefur flatarmál 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = u(0^+) - u(0^-) = 1$$

- Ef púlsinn var upphaflega K/Δ á hæð og Δ á breidd, þá er flatarmál hans $(K/\Delta)\Delta = K$
- Það að margfalda impúls með tölu (fasta) breytir aðeins flatarmáli hans, ekki hæð né breidd.

Samband impúls og þrepfalls



- Sjáum að

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

- Samband impúls og þrepfalls ($\Delta \to 0$):

$$\boxed{\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}}$$

og öfugt

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau}$$

Impúlsinn

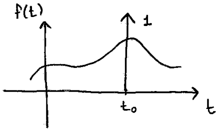
- Impúlsinn er ekki fall í ströngustu merkingu. Spennulind sem gefur impúls, t.d. $v(t) = 10\delta(t)$ er heldur ekki til.
- En það er hægt að búa til nálgun á impúls, t.d. spennulind sem fer frá 0 til 1.000.000 V og aftur í 0 á um 1 μs, sem er nægilega góð nálgun í flestum tilfellum.

Impúlsinn

Almennt má finna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t$$

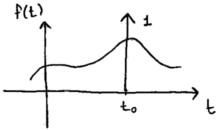
þ.e. tegrið af einhverju falli $f(t)$ margfölduðu með impúlsi við tímann t_o.



Þessi stærð er núll allsstaðar nema í $t = t_o$ (því $\delta(t - t_o)$ er núll nema í $t = t_o$). Því má skrifa tegrið sem

$$I = \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} f(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t$$

Impúlsinn



Gerum síðan ráð fyrir að $f(t)$ breytist ekki yfir örstutt tímabilið $[t_{0-}, t_{0+}]$ og meðhöndlum fallið $f(t)$ sem fasta $f(t_o)$; og tökum út fyrir og fáum

$$I = f(t_o) \int_{t_{0-}}^{t_{0+}} \delta(t - t_o)\mathrm{d}t = f(t_o)$$

Því að tegrið af impúlsinum er 1.

Almennt er

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_o)\mathrm{d}t = f(t_o)$$

Veldisfallið

Algengt merki er

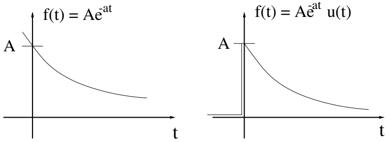
$$f(t) = A\mathrm{e}^{-at}$$

Við vitum að $\mathrm{e}^0 = 1$ svo að $f(0) = A\mathrm{e}^0 = A$.

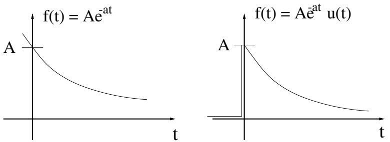
Fyrir $t < 0$ þá er $f(t) > A$.

Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþrepi þá fæst fall sem er núll fyrir $t < 0$ en veldisfall fyrir $t > 0$, þ.e.

$$f(t) = A\mathrm{e}^{-at}u(t)$$



Veldisfallið



Tímastuðull veldisfallsins er skilgreindur með

$$\tau = \frac{1}{a}$$

og við $t = \tau$ fæst

$$f(\tau) = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}\tau} = A\frac{1}{\mathrm{e}} = 0.3679A$$

Eftir einn tímastuðul er merkið í 37 prósentum af hágildi sínu.
Eftir tvo tímastuðla er merkið í 14 prósentum af hágildi sínu.

Veldisfallið

Diffurkvóti veldisfallsins er aftur veldisfall

$$f(t) = A\mathrm{e}^{-at}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = -aA\mathrm{e}^{-at}$$

Ef veldisfallið er margfaldað með einingarþrepfalli og diffrað þá fæst

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = A\left(\mathrm{e}^{-at}\delta(t) - a\mathrm{e}^{-at}u(t)\right)$$

eða

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = A\left(\delta(t) - a\mathrm{e}^{-at}u(t)\right)$$

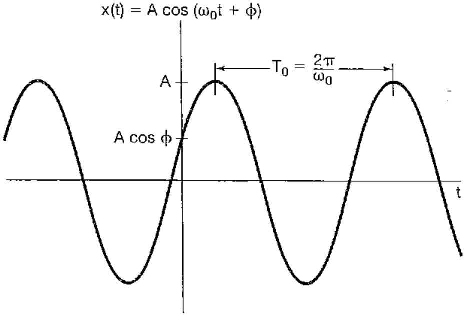
Sinusfallið

- Algengasta fallið er sínusfallið
- Við notum sínus og cosínus jöfnum höndum
- Dæmi um slíkt fall er

$$f(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

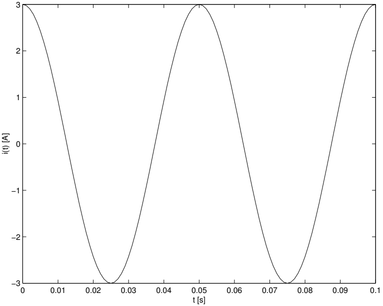
  þar sem A, ω_0 og ϕ eru fastar
  - A er útslag merkisins
  - ω_0 er horntíðni
  - t er tími
  - ϕ er fasahorn
- Ef t er mælt í sekúndum þá eru einingar ω_0 og ϕ rad/sek
- Oft er skrifað $\omega_0 = 2\pi f_0$ þar sem f_0 hefur eininguna hringir/sek, eða hertz [Hz]

Sinusfallið



- **Lotan** T er stysti tími milli endurtekninga sinusfallsins.

Sinusfallið



Sagt er að sinusfallið sé $\pi/2$ rad ($90°$) á eftir cosinusfallinu og að cosinusfallið sé $\pi/2$ rad ($90°$) á undan sínusfallinu

$$\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$