Greining Rása

Annarar gráðu kerfi

Ólafur Bjarki Bogason

18. mars 2021

Inngangur

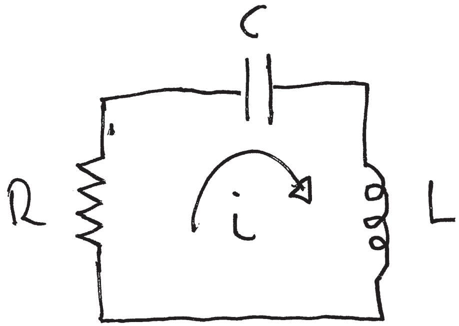
- Annarar gráðu rás inniheldur tvær orkugeymandi einingar
- Við þurfum að leysa annarar gráðu diffurjöfnu
- Nytsamlegar í síurásum (e. filters)
- Nytsamlegar til að greina flutningslínur og fleiri hagnýt tól

Heildarsvörun annarar gráðu kerfa

Aðferðin til að leysa annarar gráðu rásir með lindum er því:

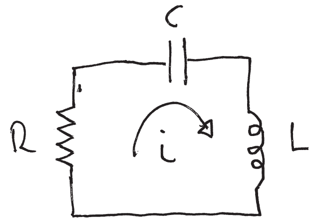
- Skrifa diffurjöfnuna fyrir $t > 0$ með því að nota KCL, KVL, Ohm's lögmál o.s.frv. $t=0^+$ $t=0^-$ $i(0^+)=k$
- Finnum upphafsgildin (þurfum tvö upphafsgildi) $i'(0^+)=w$
- Leysum óhliðruðu diffurjöfnuna (finnum náttúrulegu svörunina)
  - Hefur tvær óháðar lausnir
- Finnum sérlausnina x_p sem uppfyllir hliðruðu diffurjöfnuna
- Leggjum saman nátturulega lausnina og sérlausnina til að fá heildarlausnina
- Finna óþekktu stuðlana með hjálp byrjunarskilyrða

Raðtengd RLC rás



- Skoðum raðtengda RLC rás
- Byrjum á náttúrulegu svöruninni

Raðtengd RLC rás



$$Z_R = R \qquad p = \frac{d}{dt}$$

$$Z_L = Lp$$

$$Z_C = \frac{1}{Cp}$$

- KVL:

$$v_R + v_C + v_L = 0$$

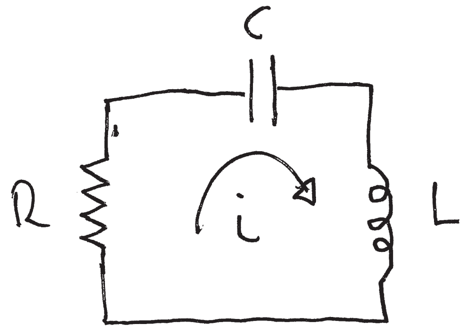
$$Ri + \frac{1}{Cp}i + Lpi = 0$$

$$Lp^2 i + Rpi + \frac{1}{C}i = 0$$

$$p^2 i + \frac{R}{L}pi + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

Raðtengd RLC rás



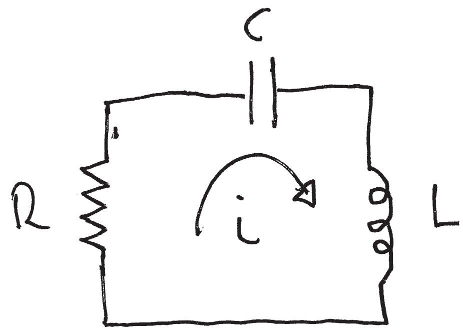
- KVL gefur

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0}$$

þar sem

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{R}{2L} \\ \omega_0^2 &\equiv \frac{1}{LC} \end{aligned}$$

Raðtengd RLC rás: Kennijafna



- Ágiskun $i = Ae^{st}$ gefur kennijöfnu

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

  sem hefur lausn

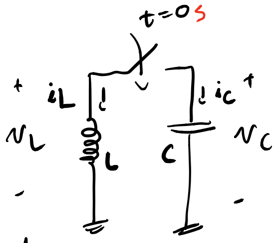
$$s_{1,2} = -\alpha \pm [\alpha^2 - \omega_0^2]^{1/2}$$

- Það eru þrír möguleikar

Kennijafna

$$s_{1,2} = -\alpha \pm [\alpha^2 - \omega_0^2]^{1/2}$$

- Ef $\alpha > \omega_0$ þá fáum við yfirdempaða svörun, $s_{1,2}$ eru negatífar rauntölur
  - Spenna eða straumur stefnir á lokagildi sitt án sveiflu
- Ef $\alpha < \omega_0$ þá fáum við undirdempaða svörun, $s_{1,2}$ eru tvinntölur
  - Spenna eða straumur sveiflast um lokagildi sitt
- Ef $\alpha = \omega_0$ þá fáum við markdempaða svörun, $s_{1,2} = \alpha$
  - Spenna eða straumur er á barmi þess að sveiflast um lokagildi sitt $\rightarrow$ Tvær negatívar rauntölulausnir (eru sömu tölurnar!)



Lausn

$v_C(0^+) = V_0$

$i_L(0^+) = 0$

Vitum að $i_L = -i_C$ & $v_L = v_C$ $(t > 0)$

$$v_L = L p i_L$$
$$= L p(-i_c)$$
$$= L p(-C p v_c)$$
$$= -LCp^2 v_C$$

$$i_L = -i_C$$
$$= -C p v_C$$
$$= -C p v_L$$
$$= -Cp(Lp i_L)$$
$$= -LCp^2 i_L$$

Ⓐ → $\boxed{\frac{d^2 v_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0}$

$\boxed{\frac{d^2 i_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0}$

Ná Hvorleg svörun sú sama & heildarsvörun

Giska á $v_C(t) = Ae^{st}$ & finna út hennijöfn $s^2 + \frac{1}{LC} = 0$ $s_{1,2} = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0$

þá er $v_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = A_1 e^{+j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}$

óþekktar, fastar tvær jöfn

Vitum að $\boxed{v_C(0^+) = A_1 + A_2 = V_0}$

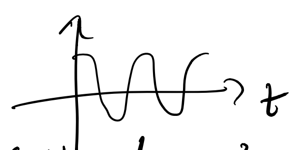
$$v_C'(t) = A_1 j\omega_0 e^{+j\omega_0 t} - A_2 j\omega_0 e^{-j\omega_0 t}$$

Vitum að $i_L(0^+) = -i_C(0^+) = 0$ svo $i_C(0^+) = C v'(0^+) = 0$

$\boxed{v_C'(0^+) = A_1 j\omega_0 - A_2 j\omega_0 = 0 = A_1 - A_2}$

$A_1 = A_2$ $\quad 2A_1 = V_0$ svo $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}V_0$ $\quad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$

$$v_C(t) = \frac{1}{2}V_0\left(e^{+j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = V_0 \cos(\omega_0 t)$$



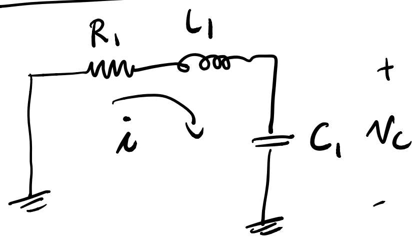
$p_C + p_L = 0$ $\quad p_C = -p_L$ $\quad w_C(t) + w_L(t) = w_C(0^+) = \frac{1}{2}CV_0^2$

θ

$]$

Dæmi 11.1

Fáum gefið $R_1 = 3\Omega$ $L_1 = 1H$ $C_1 = \frac{1}{2}F$



Upphafsskilyrði $v_C(0^-) = -9V$

$$i_L(0^-) = 2A$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_R = R \\ Z_L = Lp \\ Z_C = \frac{1}{Cp} \end{array}}$$

Finna i, $t>0$

Náttúrleg lausn

$$v_R + v_L + v_C = 0 \quad \text{eða} \quad iR_1 + iL_1p + i\frac{1}{C_1p} = 0$$

$$\text{eða} \quad iR_1C_1p + iL_1C_1p^2 + i = 0$$

$$\text{eða} \quad p^2 i + \frac{R_1}{L_1} ip + i\frac{1}{L_1C_1} = 0$$

$$\text{eða} \quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1}\frac{di}{dt} + \frac{1}{L_1C_1}i = 0$$

óhliðruð diffr.

Kennijafna er $s^2 + \frac{R_1}{L_1}s + \frac{1}{L_1C_1} = 0$

$$s^2 + 3s + 2 = 0 = (s+1)(s+2)$$

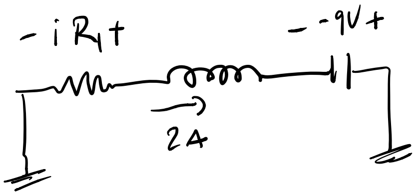
Náttúrleg svörun $i(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t}$

$$i'(t) = -A_1e^{-t} - 2A_2e^{-2t}$$

Notum byrjunarskilyrði $\begin{cases} v_C(0^-) = -9V \\ i_L(0^-) = 2A \end{cases}$ til að finna A_1 og A_2

(*)

Vitum að



$$v_L(0^+) = -(v_R(0^+) + v_C(0^+))$$

$$= -(2\cdot 3 + (-9)) = 3V$$

þá er $v_L(0^+) = Li'(0^+) = \underline{\underline{3\frac{V}{s}}}$

$i(0^+) = 2 = A_1 + A_2$

$i'(0^+) = 3 = -A_1 - 2A_2$

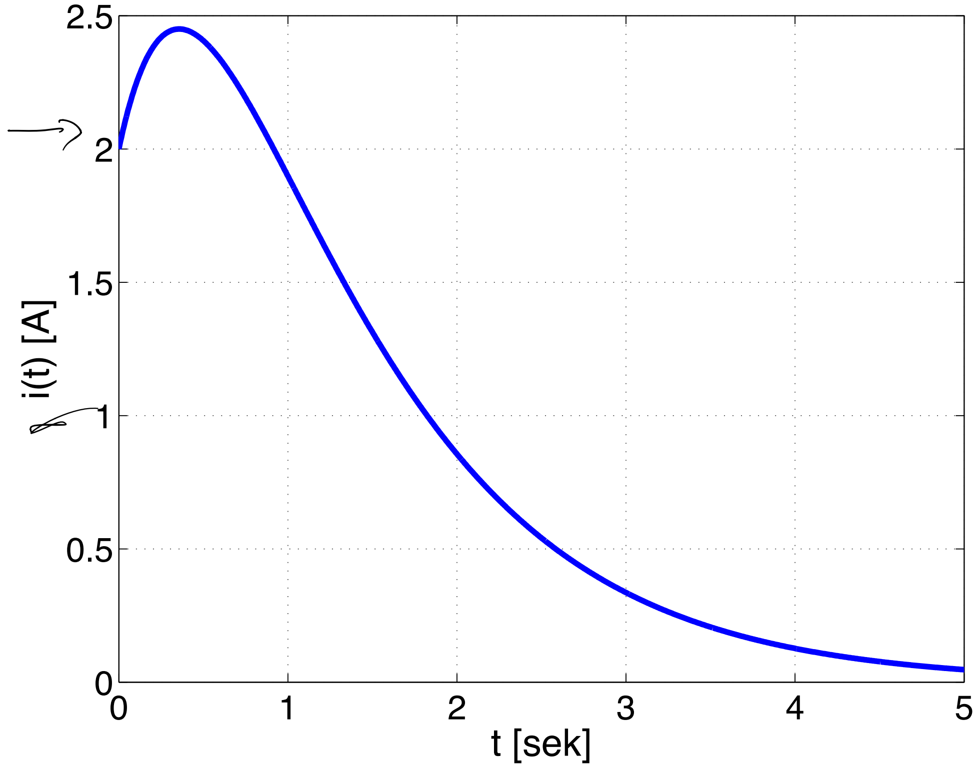
Fáum að $\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{i(t) = 7e^{-t} - 5e^{-2t}}} \quad t \geq 0$$

$i_C(t) = C v_C'(t)$

$v_L(t) = L i'(t)$

Dæmi 11.1 Yfirdempuð rás



Undirdempuð svörun

- Þegar kennijafnan hefur tvinntölulausnir $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ þá fáum við undirdempaða svörun
- Lausnin er

$$y(t) = A_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t}$$

- **Það er ekki ásættanlegt að skila niðurstöðunni á þessu formi**
- Rifjum upp reglu Eulers:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

Undirdempuð svörun

- Við fáum

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\alpha t}\left((A_1 + A_2)\cos(\omega_d t) + j(A_1 - A_2)\sin(\omega_d t)\right) \\ &= e^{-\alpha t}\left(B_1\cos(\omega_d t) + B_2\sin(\omega_d t)\right) \end{aligned}$$

  þar sem $B_1 = A_1 + A_2$ og $B_2 = j(A_1 - A_2)$ þurfa að vera rauntölur þar sem $y(t)$ er rauntölustærð

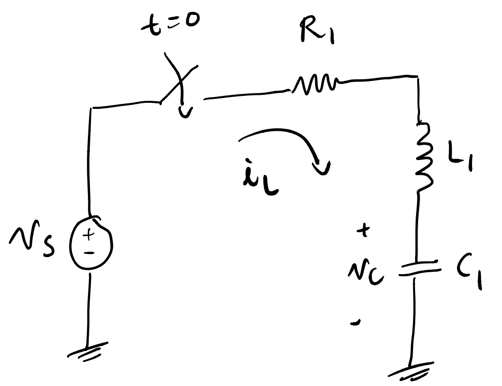
- Því er almenn lausn undirdempaðrar rásar með eigingildi $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$

$$\boxed{y(t) = e^{-\alpha t}\left(B_1\cos(\omega_d t) + B_2\sin(\omega_d t)\right)}$$

- stuðlana B_1 og B_2 má finna með byrjunargildunum $y(0+)$ og $y'(0+)$

Dæmi 11.2 Fáum gefin upphafsskilyrði $v_c(0^+) = 5V$ $i_L(0^+) = 0A$

$R_1 = \frac{1}{2}\Omega$ $L_1 = \frac{1}{4}H$ $C_1 = \frac{1}{4}F$ $v_s = 10V$



a) Finnið $i_L(t)$ fyrir $t>0$.

b) Finna fyrstu útgildi (jákvætt - neikvætt) & fyrstu skurðp. við tímaás (núllstöðvar).

c) Teikna straum & „umhylju" frá 0 til 2s.

a) Finnum kerfisjöfnu rásarinnar

$$v_R + v_L + v_C = v_s$$

$$iR_1 + (L_1 p)i + \frac{1}{C_1 p} i = v_s$$

$$i C_1 R_1 p + C_1 L_1 p^2 i + i = C_1 p v_s$$

$$p^2 i + \frac{R_1}{L_1} i p + \frac{1}{C_1 L_1} i = \frac{1}{L_1} p v_s$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1}\frac{di}{dt} + \frac{1}{C_1 L_1} i = \frac{1}{L_1}\frac{dv_s}{dt} = 0$$

Náttúrulega svörun (gískum á $i(t) = Ae^{s_{1,2}t}$

Kennijafnan er þá $s^2 + 2s + 4^2 = 0$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-64}}{2} \approx -1 \pm j3.873$$

$$i_n(t) = Ae^{-t}\cos(3.873t + \theta)$$

Sérlausn er núll þar örvunin er núll (óhliðruð diffurjafna)

Heildarlausn er þá $i(t) = i_n(t) = Ae^{-t}\cos(3.873t + \theta)$

$\underline{i_L(0^+) = 0\,A} = i_R(0^+)$ ópekkt   5V (gefið)   0 $v_c(0^+) = 5V$

10 (gefið)

$$\cancel{v_S(0^+)} = v_L(0^+) + \cancel{v_c(0^+)} + \cancel{v_R(0^+)}$$

svo $v_L(0^+) = v_S(0^+) - v_c(0^+) = \underline{10 - 5 = 5V}$

vitum að $v_L(0^+) = L \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+}$ svo $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \underline{20 \ \frac{A}{s}}$

Vitum nú bæði $i_L(0^+)$ & $i_L'(0^+)$. Getum fundið A & θ

$$\underline{i_L(0^+) = A e^{0} \cos(\theta) = 0} \quad \text{svo} \quad \underline{\theta = 90^\circ} \ \text{(viljum ekki } \underline{A = 0}\text{)}$$

$$i_L'(0^+) = A\left[e^{-t}\left(-3.873 \sin(\overbrace{3.873t + \theta}^{90^\circ})\right) + (-1)e^{-t}\cos(\overbrace{3.873t+\theta}^{90^\circ})\right]$$

$$= A e^{-t}\left(\underbrace{-3.873 \sin(\underbrace{3.873t}_{0} + \theta)}_{1} - \underbrace{\cos(\underbrace{3.873t}_{0} + \theta)}_{0}\right)\Big|_{t=0^+}$$

svo $-3.873A = 20$ eða $\underline{A \approx -5.164}$

$\underline{\text{Lausnin er því}}$ $\quad i(t) = -5.164 e^{-t} \cos(3.873t + 90^\circ)$

a) $$\underline{\underline{= 5.164 e^{-t} \sin(3.873t) \quad t > 0}}$$

b) Hámark & lámark fæst með diffrun

$\boxed{i'(t) = 0}$ $\quad i'(t) = 5.164\left(e^{-t}(3.873)\cos(3.873t) - e^{-t}\sin(3.873t)\right)$

$= 0$

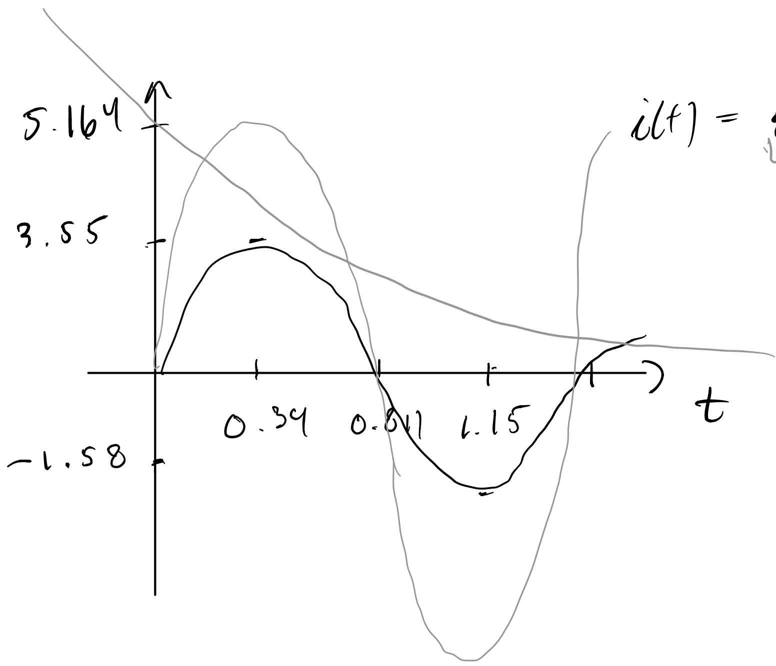
eða $3.873 \cos(3.873t) = \sin(3.873t)$

$$t_1 = \frac{\tan^{-1}(3.873)}{3.873} \approx 0.34\,s \leftarrow \text{første høimerk}$$

$$t_2 = \frac{\tan^{-1}(3.873 + 180°)}{3.873} \approx 1.15\,s \leftarrow \text{første lånmerk}$$

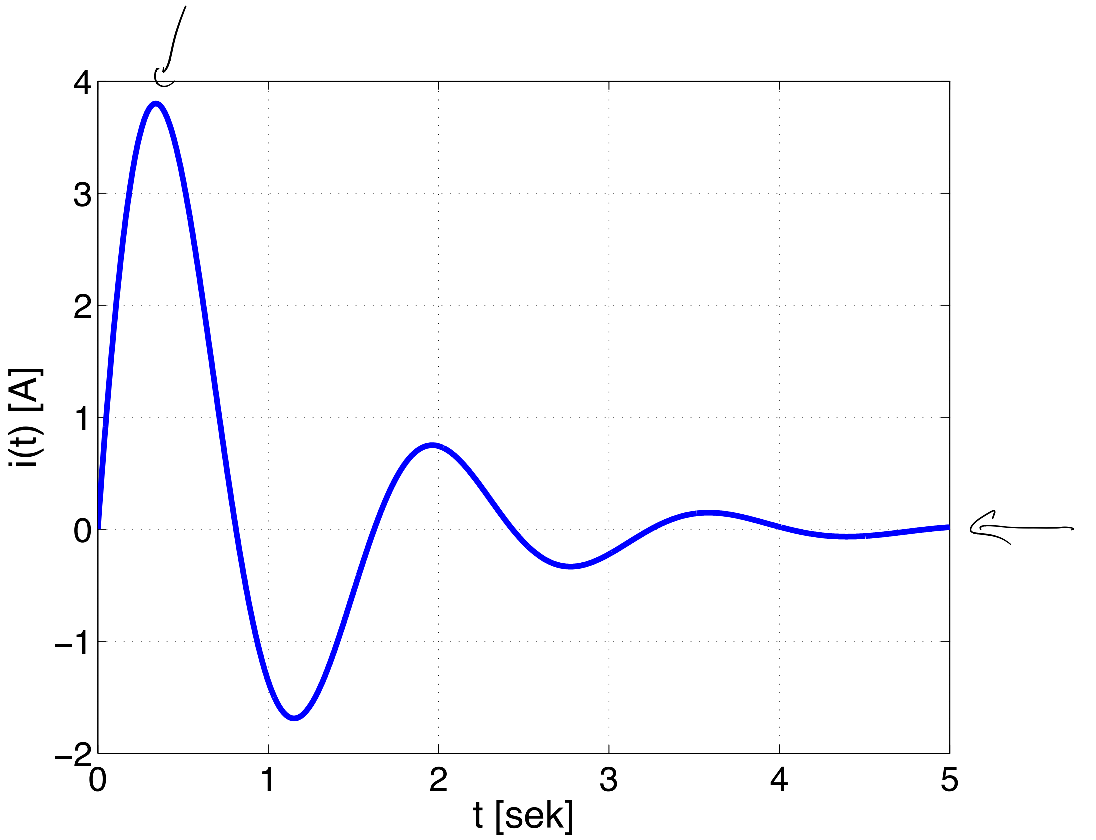
$$i(t_1) = 3.55\,A \quad , \quad i(t_2) = -1.58\,A$$

$$3.873 = \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{3.873} \approx 0.811\,s$$



$$i(t) = \underbrace{5.164\,e^{-t}}_{\text{avt falls}} \underbrace{\sin(3.873t)} \qquad t > 0$$

Dæmi 11.2 Undirdempuð svörun



Markdempuð svörun

- Markdempuð svörun fæst þegar kennijafna hefur tvöfalda rauntölurót
- Diffurjafnan er þá á forminu

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0$$

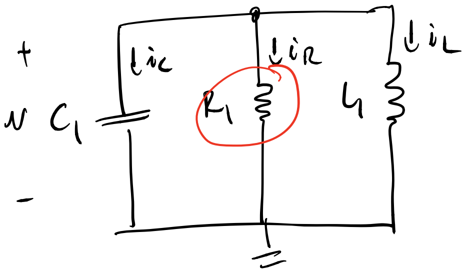
- Tilsvarandi kennijafna er

$$s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = 0 \qquad s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

  sem hefur ræturnar $s_{1,2} = -\alpha$
- Náttúrulega svörunin er

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)}$$

Dæmi 11.3 $C_1 = \frac{1}{18}F$ $R_1 = 3\Omega$ $L_1 = 2H$



Fáum gefin byrjunarskilyrði $v(0^+) = 2V$ $i_L(0^+) = \frac{5}{9}A$

Finna $v(t)$, $t > 0$

Lausn KCL $i_C + i_R + i_L = 0$

$$C_1 p v + \frac{v}{R_1} + \frac{v}{L_1 p} = 0$$

$$p^2 v + \frac{1}{RC} p v + \frac{1}{LC} v = 0$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 6\frac{dv}{dt} + 9v = 0$$ ← óhliðruð diffurjafna

Náttúruleg svörun Giskum á $v(t) = Ae^{s_{1,2}t}$

$6 = 2\alpha$ svo $\alpha = 3$

$\alpha^2 = 9$

Fáum kennijöfnu á formi $s^2 + 6s + 9 = 0$

$$s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = 0$$

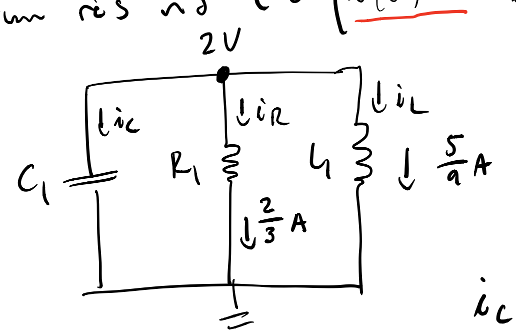
Eigingildi rásamhrei

$s_{1,2} = -3$ $(s+3)(s+3) = 0$

Vitum að náttúrulega svörunin er á formi $v_n(t) = e^{-3t}(A_1 t + A_2)$

$$v_n'(t) = e^{-3t}(A_1 - 3A_1 t - 3A_2)$$

Skoðum rás við $t = 0^+$ ($v(0^+) = 2V$ $i_L(0^+) = \frac{5}{9}A$)



$i_C = -(i_R + i_L)$

$= -\frac{2}{3} - \frac{5}{9} = -\frac{11}{9}$ við $t = 0^+$

$i_C = C\frac{dv_c}{dt}$ $\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -22\frac{V}{s}$

$$v_n(0^+) = \underline{\underline{A_2 = 2}}$$

$$v_n'(0^+) = A_1 - 3A_2 = -22 \quad \text{eða} \quad \underline{\underline{A_1 = -16}}$$

$$v(t) = e^{-3t}(2 - 16t) \qquad t \geq 0$$

Byrjunarskilyrði $v(0^+)$ & $v'(0^+)$

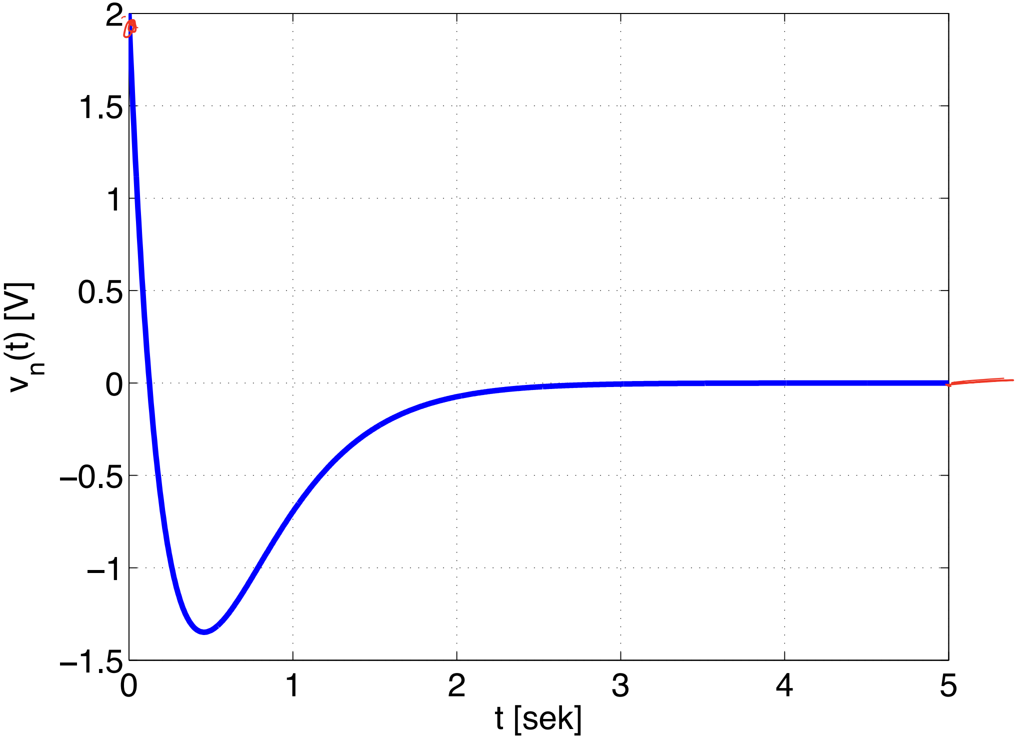
α fundum með kerfisjöfnu & lausn á kennijöfnu

(KCL) (Giskun á $Ae^{s_{1,2}t}$)

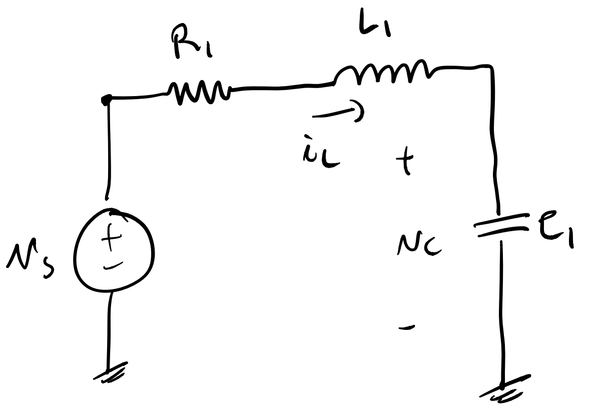
Sáum að um markdempaða svörun var að ræða

$$v_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

Dæmi 11.3 Markdempuð rás



Dæmi 11.4 $R_1 = 6\,\Omega$ $L_1 = 1H$ $C_1 = \frac{1}{25}F$



Gefið að $v_s(t) = (t^2+1)u(t)$ V

Byrjunarskilyrði

$$i_L(0^-) = \frac{1}{9}A \quad v_c(0^-) = \frac{1}{2}V$$

Finna $i_L(t)$, $t>0$

Lausn Notum KVL

$$v_s = v_R + v_L + v_C$$

$$\text{eða} \quad \left(p^2 + \frac{R_1}{L_1}p + \frac{1}{L_1C_1}\right)i = \frac{p}{L}v_s$$

$$\text{eða} \quad (p^2 + 6p + 25)\,i = p(t^2+1) \quad \text{A}$$

$$\text{eða} \quad \frac{d^2i}{dt^2} + 6\frac{di}{dt} + 25i = \frac{d}{dt}(t^2+1) = 2t \;,\; t>0$$

Náttúrleg svörun $\quad \frac{d^2i}{dt^2} + 6\frac{di}{dt} + 25i = 0$

$\alpha \pm \omega_n^2$

$s^2 + 6s + 25 = 0$, hefur lausnir $S_{1,2} = -3 \pm j4$

Undirdempuð rás $\quad s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = 0$

$$\omega_n = 5 \quad \zeta = 0.6$$

Svo $\quad i_n(t) = e^{-3t}\left(A_1\cos(4t) + A_2\sin(4t)\right)$

Sérlausn $\quad i_p(t) = k_1t + k_2 \quad i_p' = k_1 \quad i_p'' = 0$

svo $\quad 6k_1 + 25k_1t + 25k_2 = 2t \quad$ eða $k_1 = \frac{2}{25} = 0.08$

& $\quad 6k_1 + 25k_2 = 0$, $k_2 = -\frac{6k_1}{25}$

$k_2 = -0.0192$

Heilderlausn

$(fg)' = f'g + fg'$

$(f(g))' = f'(g)g'$

$$i(t) = i_n(t) + i_p(t)$$
$$= e^{-3t}\left(A_1\cos(4t) + A_2\sin(4t)\right) + 0.08t - 0.0192$$

$$i'(t) = e^{-3t}\left(-4A_1\sin(4t) + 4A_2\cos(4t)\right) - 3e^{-3t}\left(A_1\cos 4t + A_2\sin 4t\right) + 0.08$$

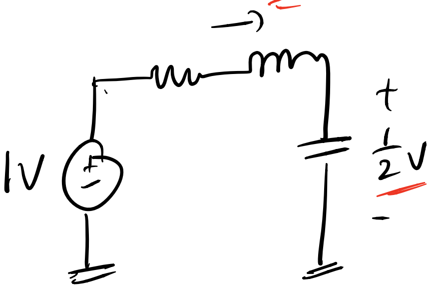
$$\boxed{i'(0^+) = 4A_2 - 3A_1 + 0.08} \qquad \boxed{i(0^+) = A_1 - 0.0192}$$

þarf að finna út frá rás

Fáum gefið

$$\boxed{i'(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L}}$$

Við $t=0^+$ er rásin



$$v_R = R\cdot i_L = 6\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{3}\,V$$

$$v_L = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

svo $i'(0^+) = \frac{-1/6}{1} = -\frac{1}{6}$ $\frac{4}{3}$

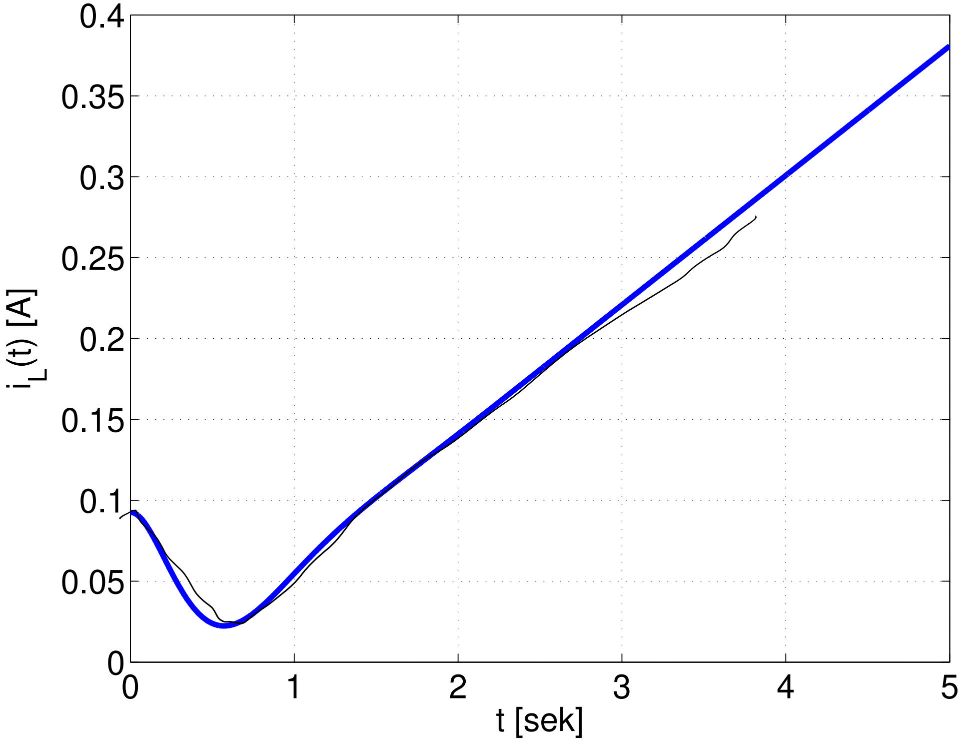
− gefið?

$$\left.\begin{aligned} i(0^+) &= A_1 - 0.0192 = \frac{1}{9} \\ i'(0^+) &= 4A_2 - 3A_1 + 0.08 = -\frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A_1 &= 0.13 \\ A_2 &= 0.0358 \end{aligned}$$

$$i(t) = e^{-3t}\left(0.13\cos 4t + 0.0358\sin 4t\right) + 0.08t - 0.0192 \quad t\geq 0$$

$$= 0.13e^{-3t}\cos(4t - 15.4^\circ) + 0.08t - 0.0192 \quad t\geq 0$$

Dæmi 11.4 Heildarsvörun



Tvö sértilfelli

- Venjulega má finna sérlausnina sem summu innmerkisins og allra diffurkvóta þess
- Í tveimur sértilfellum er þörf á öðrum aðferðum
    - Ef annað eigingildið er núll, þá á sérlausnin að vera tegrið af venjulegu sérlausninni
    - Ef innmerkið inniheldur lið sem einnig er í náttúrulegu svöruninni þá meðhöndlum við þetta eins og markdempaða tilvikið þar sem venjulega sérlausnin er margfölduð með $K_1 t + K_2$

Dæmi 11.5

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = e^{-t} \qquad t > 0 \qquad (*)$$

Finna $y(t)$ $t>0$

Lausn: Kennijafnan er $s^2 - 1 = 0$ $\quad s = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

$$y_n(t) = A_1 e^{t} + A_2 e^{-t} \qquad \text{(Náttúrleg lausn)}$$

Sérlausn $y_p(t) = (k_2 t + k_1) e^{-t}$

$$y_p'(t) = -k_1 e^{-t} - k_2 t e^{-t} + k_2 e^{-t}$$

$$y_p''(t) = k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t} - k_2 e^{-t} - k_2 e^{-t}$$

Setjum inn í $(*)$

$$(k_1 - 2k_2 + k_2 t) e^{-t} - (k_1 + k_2 t) e^{-t} = e^{-t}$$

eða $k_1 - 2k_2 - k_1 = 1$ svo $k_2 = -\frac{1}{2}$

Ekkert skilyrði sett á k_1, svo við veljum $k_1 = 0$

$$y_p(t) = -\frac{1}{2} t e^{-t}$$

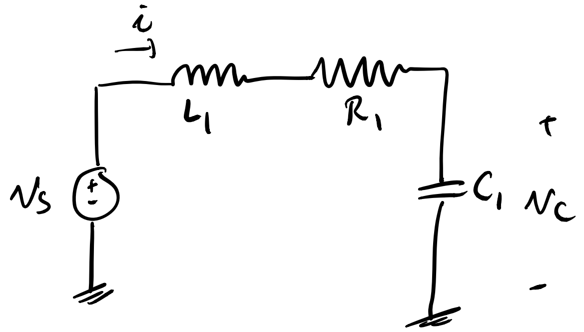
Heildarlausn $y(t) = y_n(t) + y_p(t)$

$$= A_1 e^{t} + \left(A_2 - \frac{1}{2} t\right) e^{-t} \qquad t > 0$$

Þrepsvörun og impúlssvörun

- Þrepsvörun og impúlssvörun eru skilgreind alveg eins og fyrir 1. gráðu kerfi þ.e. sem núllástandssvörun rásarinnar við þrepi/impúls

Dæmi 11.6 Fáum gefið $L_1 = 1H$ $R_1 = 12\Omega$ $C_1 = 0.01F$



Viljum finna $v_C(t)$ ef $v_S(t) = u(t)$ (þrepsvörun)

$\rightarrow v_C(0^-) = 0V$ & $i_L(0^-) = 0A$

$$Z_C = \frac{1}{Cp} \quad Z_R = R \quad Z_L = Lp$$

$$v_C = v_S \frac{Z_C}{Z_C + Z_R + Z_L} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}$$

Setjum inn tölur

$$(p^2 + 12p + 100)v_C = 100v_S = 100 \quad t \geq 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + 12\frac{dv_C}{dt} + 100v_C = 100, \quad t \geq 0$$

undirdempuð ris

Náttúruleg svörun kennijafnan er $s^2 + 12s + 100 = 0$ svo $s_{1,2} = -6 \pm j8$

$$v_{Cn}(t) = e^{-6t}(A\cos(8t) + B\sin(8t))$$

Sérlausn $V_{cp}(t) = k$ $v_{cp}' = v_{cp}'' = 0$

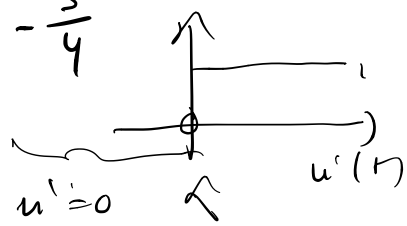
$0 + 0 + 100k = 100$ svo $\underline{k = 1 = V_{cp}(t)}$

Heildarlausn

$$V_C(t) = V_{Cn}(t) + V_{cp}(t) = e^{-6t}(A\cos 8t + B\sin 8t) + 1$$

$$v_C'(t) = e^{-6t}(-8A\sin 8t + 8B\cos 8t) - 6e^{-6t}(A\cos 8t + B\sin 8t)$$

$$\left.\begin{aligned} v_c(0^+) &= A + 1 = 0 \\ v_c'(0^+) &= 8B - 6A = 0 \end{aligned}\right\} \quad A = -1 \ \& \ B = -\frac{3}{4}$$

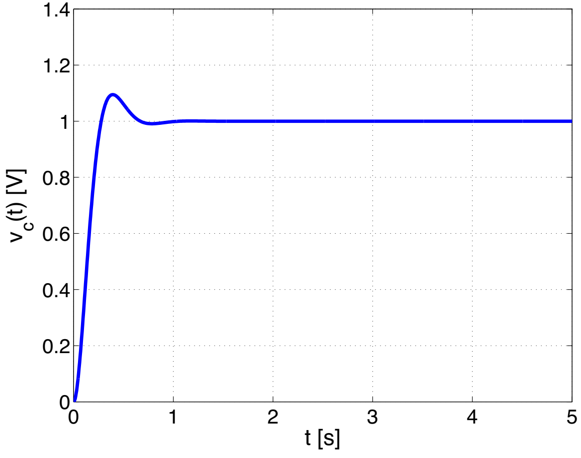


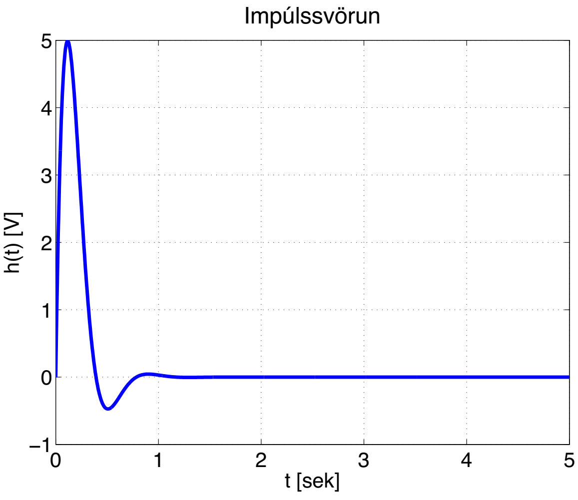
svo $v_c(t) = \left(1 - e^{-6t}\left(\cos 8t + \frac{3}{4}\sin 8t\right)\right)u(t) = w(t)$

Impúlssvörun er fundin með því að... $u'(t) = \delta(t)$

$$h(t) = w'(t) = \underline{\underline{12.5\, e^{-6t} \sin 8t \; u(t)}}$$

Dæmi 11.6 Þrepsvörun og impúlssvörun





Almennt um annarar gráðu rásir

- Kennijafna: $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$
- α: dempunarstuðull, $e^{-\alpha t}$ dempar v_c og i_L
  - A.t.h. að einnig er til annar dempunarstuðull (þ.e. með sama nafni) sem er skilgreindur $\zeta = \dfrac{\alpha}{\omega_0}$
- ω_0: ódempuð náttúruleg tíðni. Ef $\alpha = 0$ þá sveiflast v_c og i_L á tíðninni ω_0
- $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$: dempuð náttúruleg tíðni

$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$

- $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$: Gæðastuðull. Hann er hár fyrir undirdempaða rás