RAF201G – Miðmisserispróf 2

8. apríl, 8:20-9:50

Prófið inniheldur fjögur dæmi sem hver um sig gilda 25 prósent. Setjið inn lausnir og útreikninga á Gradescope. Gangi ykkur vel!

Lausnir 8. april

Dæmi 1 – Diffurjafna

Rás er lýst með diffurjöfnu hér að neðan. Finnið $i(t)$ fyrir $t > 0$ ef $i(0^+) = 1\text{A}$.

$$\frac{di}{dt} + i = 1, \quad t > 0. \quad ①$$

Náttúruleg lausn

Gískum á $i(t) = Ae^{st}$, $i'(t) = Ase^{st}$ & setjum inn í óhliðraða jöfnu ①

þ.e. $Ase^{st} + Ae^{st} = 0$ svo $s = -1$

$i_n(t) = Ae^{-st}$

Sérlausn

Gískum á $i(t) = k \in \mathbb{R}$ & setjum inn í ①

$0 + k = 1$ svo $k = 1$

$i_p(t) = 1$

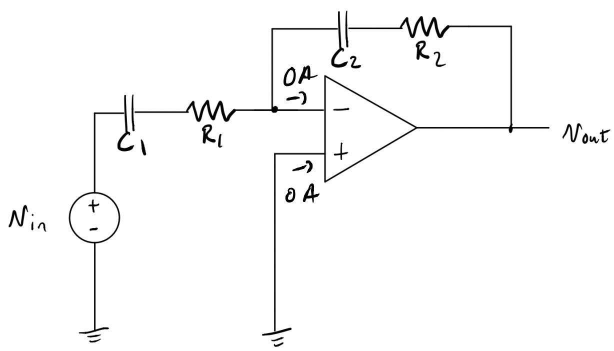
Heildarlausn $i(t) = i_n(t) + i_p(t) = Ae^{-st} + 1$

Nú er $i(0^+) = 1 = A + 1$ svo $A = 0$

Þá er $i(t) = 1\,\text{A}$ $t \geq 0$

Dæmi 2 – Kerfisjafna

Gerið ráð fyrir fullkomnum aðgerðarmagnara og finnið $H(p) = v_{\text{out}}/v_{\text{in}}$.



Set $Z_1 = \frac{1}{C_1 p} + R_1$ & $Z_2 = \frac{1}{C_2 p} + R_2$ & $Y_i = \frac{1}{Z_i}$

$$Z_1 = \frac{C_1 R_1 p + 1}{C_1 p} \qquad Z_2 = \frac{C_2 R_2 p + 1}{C_2 p}$$

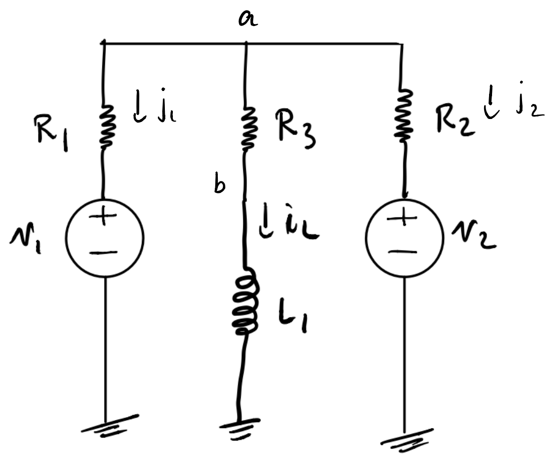
Veit að $v_- = v_+$ engin straum flæðir í -/+ póla aðgerðarmagnarans

þá er $Y_1(v_{in} - 0) = Y_2(0 - v_{out})$

eða $$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{Y_1}{Y_2} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{C_1(C_2 R_2 p + 1)}{C_2(C_1 R_1 p + 1)}$$

Dæmi 3 – Kerfi af fyrstu gráðu

Finnið $i_L(t)$ fyrir $t > 0$ ef $i_L(0^-) = 0$. $v_1(t) = 24u(t)$ og $v_2(t) = 12u(t)$ er gefið.



Breyta	Gildi
R_1	$3\,\Omega$
R_2, R_3	$6\,\Omega$
L_1	$16\,\mathrm{H}$

$$v_a - v_1 = R_1 j_1$$
$$v_a - v_2 = R_2 j_2$$

Það eru margar leiðir til að leysa þetta dæmi. Prófum fyrst MNA $\quad Z_{R_i} = R_i \quad Z_{L_1} = L_1 p$

$$Y_i = \frac{1}{Z_i}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & V_1 & V_2 \\ \hline a & & & & \\ b & & & & \\ V_1 & & & & \\ V_2 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ V_1 \\ V_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & V_1 & V_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{R_3} & -Y_{R_3} & 1 & 1 \\ -Y_{R_3} & Y_{R_3}+Y_{L_1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -Z_{R_1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -Z_{R_2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{svo} \quad \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Nú er $i_L = Y_{L_1}(v_b - 0) = \dfrac{15}{4(3p + 3/2)} = \dfrac{5/4}{p + 1/2}$

svo diffrjafnan er $\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{1}{2} i_L = \dfrac{5}{4}$

Náttúrleg lausn $\quad i_{Ln}(t) = Ae^{-\frac{1}{2}t}$

Sérlausn $\quad i_{Lp}(t) = k = \dfrac{5}{2}$

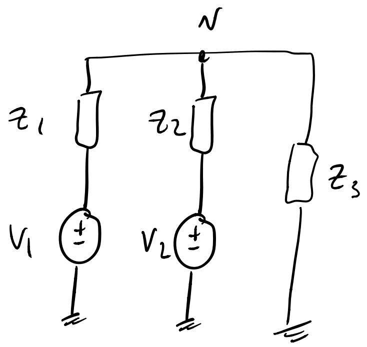
Heildarlausn $\quad i_L(t) = i_{Ln}(t) + i_{Lp}(t) = Ae^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5}{2} \quad t \geq 0$

$i_L(0^+) = 0 = A + \frac{5}{2}$

svo $\quad i_L(t) = \dfrac{5}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right) \quad t \geq 0$

Önnur leið til að leysa sama dæmi er að nota samtvinnun, spennudeili og „superposition“

Teiknum upp rás með samtvinnun



$Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$ $Z_3 = R_3 + Lp$ vír

Notum „superposition“ (slökkvum á hvori spennulind fyrir sig) & teiknum tillegg hennar til V

$$N = \frac{Z_2 \| Z_3}{Z_1 + Z_2 \| Z_3} V_1 + \frac{Z_1 \| Z_3}{Z_2 + Z_1 \| Z_3} V_2$$

$$\underline{\underline{i_L = \frac{N}{Z_3} = \frac{5/4}{p + \frac{1}{2}}}}$$ sem er það sama og að ofan.

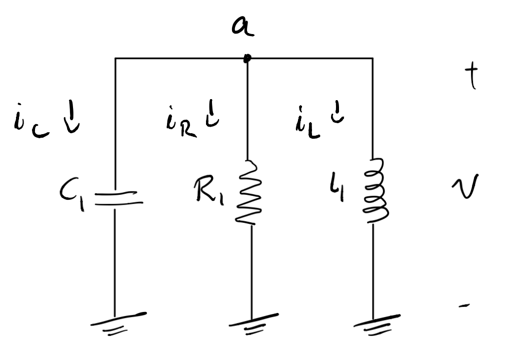
Dæmi 4 – Kerfi af annarri gráðu

Finnið $v(t)$ fyrir $t > 0$ ef $i_L(0^+) = 5/9\text{A}$ og $v(0^+) = 2\text{V}$.

$$i_R = \frac{v}{R}$$

$$i_L = \frac{v}{Lp}$$

$$i_C = vCp$$



Breyta	Gildi
R_1	$3\,\Omega$
C_1	$\frac{1}{18}\,\text{F}$
L_1	$2\,\text{H}$

KCL í a gefur

$$i_C + i_R + i_L = 0$$

eða $$C_1 p v + \frac{v}{R_1} + \frac{v}{L_1 p} = 0$$

eða $$R_1 L_1 C_1 p^2 v + L_1 p v + R v = 0$$

eða $$p^2 v + \frac{1}{R_1 C_1} p v + \frac{1}{LC} v = 0$$

Stingum inn tölum & fáum út

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 6\frac{dv}{dt} + 9v = 0$$

Diffurjafnan sem lýsir rásinni er óhliðruð svo náttúrleg svörun er heildarlausn

Giskum á $v(t) = Ae^{st}$ & fáum kennijöfnu $s^2 + 6s + 9s = (s+3)(s+3) = \underline{(s+3)^2 = 0}$

Hér er því $s_1 = s_2 = -3$ svo rásin er markdempuð.

Náttúrleg svörun er því $v(t) = e^{-3t}(A_1 t + A_2)$, $v'(t) = (-3)e^{-3t}(A_1 t + A_2) + e^{-3t} A_1$

$$= e^{-3t}(-3A_1 t + A_1 - 3A_2)$$

Vitum að $v(0^+) = 2 = A_2$

& $$v'(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C_1} = -\frac{i_R(0^+) + i_L(0^+)}{C_1} = -\frac{v(0^+)/R_1 + i_L(0^+)}{C_1} = -\frac{2/3 + 5/9}{1/18} = -\frac{6/9 + 5/9}{1/18} = -\frac{11/9}{1/18} = -22$$

svo $v'(0^+) = -22 = -3A_2 + A_1$ svo $A_1 = -22 + 6 = -16$

$$\underline{v(t) = 2e^{-2t}(1 - 8t) \quad t > 0}$$