

Анализ категориальных данных

Занятие 6. Мультиномиальные логит-модели

10 апреля 2020

Мультиномиальная модель как набор моделей с бинарным откликом:

Мультиномиальная модель как набор моделей с бинарным ОТКЛИКОМ:

Случай трех категорий: A, B, C, где C – база

$$\ln \frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)} = \beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i$$

$$\ln \frac{P(y_i = B)}{P(y_i = C)} = \beta_{0,B|C} + \beta_{1,B|C} x_i$$

Мультиномиальная модель как набор моделей с бинарным ОТКЛИКОМ:

Случай трех категорий: A, B, C, где C – база

$$\ln \frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)} = \beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i$$

$$\ln \frac{P(y_i = B)}{P(y_i = C)} = \beta_{0,B|C} + \beta_{1,B|C} x_i$$

Выполним преобразование:

$$\exp\left(\ln \frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)}\right) = \exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i)$$

Мультиномиальная модель как набор моделей с бинарным ОТКЛИКОМ:

Случай трех категорий: A, B, C, где C – база

$$\ln \frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)} = \beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i$$

$$\ln \frac{P(y_i = B)}{P(y_i = C)} = \beta_{0,B|C} + \beta_{1,B|C} x_i$$

Выполним преобразование:

$$\exp\left(\ln \frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)}\right) = \exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i)$$

$$\frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)} = \exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i)$$

Мультиномиальная модель как набор моделей с бинарным ОТКЛИКОМ:

Случай трех категорий: A, B, C, где C – база

$$\ln \frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)} = \beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i$$

$$\ln \frac{P(y_i = B)}{P(y_i = C)} = \beta_{0,B|C} + \beta_{1,B|C} x_i$$

Выполним преобразование:

$$\exp(\ln \frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)}) = \exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i)$$

$$\frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)} = \exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i)$$

$$P(y_i = A) = \exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i) P(y_i = C)$$

Мультиномиальная модель как набор моделей с бинарным откликом (продолжение):

Мультиномиальная модель как набор моделей с бинарным откликом (продолжение):

Случай трех категорий: A, B, C, где C – база

Выразим вероятность попасть в базовую категорию:

$$\begin{aligned} P(y_i = C) &= 1 - \sum_{j=A}^B P(y_i = j) = 1 - \sum_{j=A}^B P(y_i = C) \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j} x_i) \\ &= 1 - P(y_i = C) \sum_{j=A}^B \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j} x_i) \end{aligned}$$

Мультиномиальная модель как набор моделей с бинарным откликом (продолжение):

Случай трех категорий: A, B, C, где C – база

Выразим вероятность попасть в базовую категорию:

$$P(y_i = C) = 1 - \sum_{j=A}^B P(y_i = j) = 1 - \sum_{j=A}^B P(y_i = C) \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j}x_i)$$

$$= 1 - P(y_i = C) \sum_{j=A}^B \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j}x_i)$$

$$P(y_i = C) = \frac{1}{1 + \sum_{j=A}^B \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j}x_i)}, \text{ следовательно, для A:}$$

Мультиномиальная модель как набор моделей с бинарным откликом (продолжение):

Случай трех категорий: A, B, C, где C – база

Выразим вероятность попасть в базовую категорию:

$$P(y_i = C) = 1 - \sum_{j=A}^B P(y_i = j) = 1 - \sum_{j=A}^B P(y_i = C) \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j} x_i)$$

$$= 1 - P(y_i = C) \sum_{j=A}^B \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j} x_i)$$

$$P(y_i = C) = \frac{1}{1 + \sum_{j=A}^B \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j} x_i)}, \text{ следовательно, для A:}$$

$$P(y_i = A) = \frac{\exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i)}{1 + \sum_{j=A}^B \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j} x_i)}$$

Очень хочется перейти к «шансам»:

$$\frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)} = \frac{\frac{\exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i)}{1 + \sum_{j=A}^B \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j} x_i)}}{\frac{1}{1 + \sum_{j=A}^B \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j} x_i)}} = \exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i)$$

Очень хочется перейти к «шансам»:

$$\frac{P(y_i = A)}{P(y_i = C)} = \frac{\frac{\exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i)}{1 + \sum_{j=A}^B \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j} x_i)}}{\frac{1}{1 + \sum_{j=A}^B \exp(\beta_{0j} + \beta_{1j} x_i)}} = \exp(\beta_{0,A|C} + \beta_{1,A|C} x_i)$$

А шансы ли это?

У S. Long Вы прочитаете привычную интерпретацию в терминах отношения шансов, однако, строго говоря, это не шансы, а риски (risk ratio). Вместо отношения шансов в мультиномиальной модели считаются отношения вероятностей.

Допущение о независимости от посторонних альтернатив (ИА)

Допущение о независимости от посторонних альтернатив (IIA)

Риски попасть в категорию не зависят от альтернатив.

Пример

А - черные ботинки; $P(A) = \frac{1}{2}$

В - черные туфли; $P(B) = \frac{1}{2}$

Допущение о независимости от посторонних альтернатив (IIA)

Риски попасть в категорию не зависят от альтернатив.

Пример

А - черные ботинки; $P(A) = \frac{1}{2}$

В - черные туфли; $P(B) = \frac{1}{2}$

Вдруг вмешались С - красные туфли. Тогда если $P(A) = \frac{1}{3}$;
если $P(B) = \frac{1}{3}$; если $P(C) = \frac{1}{3}$, то соблюдается IIA.

Допущение о независимости от посторонних альтернатив (IIA)

Риски попасть в категорию не зависят от альтернатив.

Пример

А - черные ботинки; $P(A) = \frac{1}{2}$

В - черные туфли; $P(B) = \frac{1}{2}$

Вдруг вмешались С - красные туфли. Тогда если $P(A) = \frac{1}{3}$;
если $P(B) = \frac{1}{3}$; если $P(C) = \frac{1}{3}$, то соблюдается IIA.

Вопрос

В каком случае IIA будет нарушаться?

Тестирование ИА

Hausman-McFadden test

- 1 H_0 : ИА
- 2 Переоценить модель на сокращенной выборке (без категории J)
- 3 $S = (\hat{b}_r - \hat{b}_f)^T (Cov(\hat{b}_r) - Cov(\hat{b}_f))^{-1} (\hat{b}_r - \hat{b}_f) \sim \chi_k^2$, где k – количество параметров в restricted model; \hat{b}_r – оценки в restricted model; \hat{b}_f – оценки в полной модели