

# 动态规划篇：最长公共子串问题

童咏昕

北京航空航天大学  
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

- 子序列

- 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果

- 示例

- 给定序列 $X$

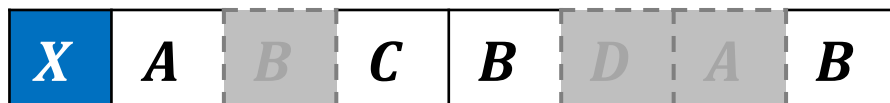
|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | $A$ | $B$ | $C$ | $B$ | $D$ | $A$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

- 子序列

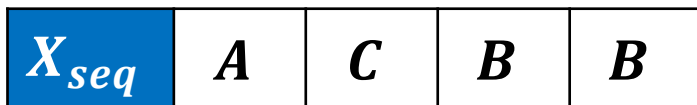
- 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果

- 示例

- 给定序列 $X$



$X$ 的子序列



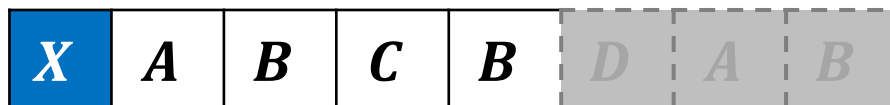
- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 子串
  - 给定序列中零个或多个**连续**的元素（如字符）组成的子序列
- 示例
  - 给定序列 $X$

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | $A$ | $B$ | $C$ | $B$ | $D$ | $A$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

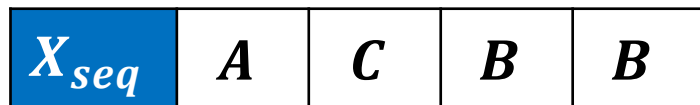
$X$ 的子序列

|           |     |     |     |     |
|-----------|-----|-----|-----|-----|
| $X_{seq}$ | $A$ | $C$ | $B$ | $B$ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|

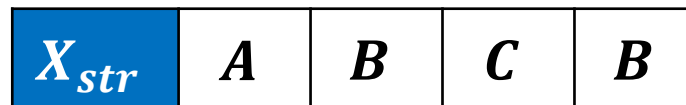
- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 子串
  - 给定序列中零个或多个**连续**的元素（如字符）组成的子序列
- 示例
  - 给定序列 $X$



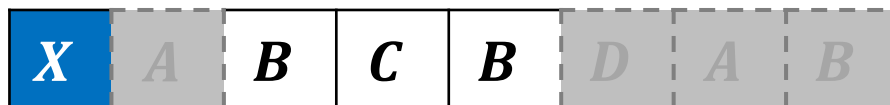
$X$ 的子序列



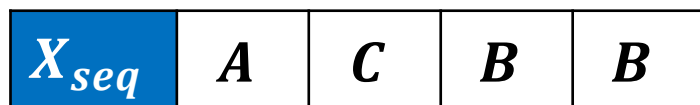
$X$ 的子串



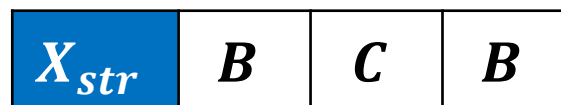
- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 子串
  - 给定序列中零个或多个**连续**的元素（如字符）组成的子序列
- 示例
  - 给定序列 $X$



$X$ 的子序列



$X$ 的子串



# 问题背景：公共子串



- 给定两个序列 $X$ 和 $Y$

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

|     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $Y$ | $B$ | $C$ | $E$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

- 公共子串示例

# 问题背景：公共子串



- 给定两个序列 $X$ 和 $Y$

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

|     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $Y$ | $B$ | $C$ | $E$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

- 公共子串示例

|       |     |
|-------|-----|
| $X_1$ | $B$ |
|-------|-----|

|       |     |
|-------|-----|
| $Y_1$ | $B$ |
|-------|-----|



# 问题背景：公共子串



- 给定两个序列 $X$ 和 $Y$

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

|     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $Y$ | $B$ | $C$ | $E$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

- 公共子串示例

|       |     |
|-------|-----|
| $X_1$ | $B$ |
|-------|-----|

|       |     |
|-------|-----|
| $Y_1$ | $B$ |
|-------|-----|

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $X_2$ | $B$ | $C$ |
|-------|-----|-----|

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $Y_2$ | $B$ | $C$ |
|-------|-----|-----|

# 问题背景：公共子串



- 给定两个序列 $X$ 和 $Y$

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

|     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $Y$ | $B$ | $C$ | $E$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

- 公共子串示例

|       |     |
|-------|-----|
| $X_1$ | $B$ |
|-------|-----|

|       |     |
|-------|-----|
| $Y_1$ | $B$ |
|-------|-----|

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $X_2$ | $B$ | $C$ |
|-------|-----|-----|

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $Y_2$ | $B$ | $C$ |
|-------|-----|-----|

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $X_3$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-------|-----|-----|-----|

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $Y_3$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-------|-----|-----|-----|

# 问题背景：公共子串



- 给定两个序列 $X$ 和 $Y$

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

|     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $Y$ | $B$ | $C$ | $E$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

- 公共子串示例

|       |     |
|-------|-----|
| $X_1$ | $B$ |
|-------|-----|

|       |     |
|-------|-----|
| $Y_1$ | $B$ |
|-------|-----|

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $X_2$ | $B$ | $C$ |
|-------|-----|-----|

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $Y_2$ | $B$ | $C$ |
|-------|-----|-----|

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $X_3$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-------|-----|-----|-----|

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $Y_3$ | $D$ | $B$ | $B$ |
|-------|-----|-----|-----|

问题：如何求两个给定序列的最长公共子串？

- 形式化定义

## 最长公共子串问题

### Longest Common Substring Problem

#### 输入

- 序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  和序列  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

- 形式化定义

## 最长公共子串问题

### Longest Common Substring Problem

#### 输入

- 序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  和序列  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

#### 输出

- 求解一个公共子串  $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$  , 令

- 形式化定义

## 最长公共子串问题

### Longest Common Substring Problem

#### 输入

- 序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  和序列  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

#### 输出

- 求解一个公共子串  $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$  , 令

$$\max |Z|$$

$$\begin{aligned} s. t. Z = \langle x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+l-1} \rangle = \langle y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+l-1} \rangle \\ (1 \leq i \leq n - l + 1; 1 \leq j \leq m - l + 1) \end{aligned}$$

- 形式化定义

## 最长公共子串问题

### Longest Common Substring Problem

#### 输入

- 序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  和序列  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

#### 输出

- 求解一个公共子串  $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$  , 令

$$\max |Z|$$

优化目标

$$\begin{aligned} s. t. Z = \langle x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+l-1} \rangle = \langle y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+l-1} \rangle \\ (1 \leq i \leq n - l + 1; 1 \leq j \leq m - l + 1) \end{aligned}$$

- 形式化定义

## 最长公共子串问题

### Longest Common Substring Problem

输入

- 序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  和序列  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

输出

- 求解一个公共子串  $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$  , 令

$$\max |Z|$$

优化目标

$$s. t. Z = \langle x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+l-1} \rangle = \langle y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+l-1} \rangle$$
$$(1 \leq i \leq n - l + 1; 1 \leq j \leq m - l + 1)$$

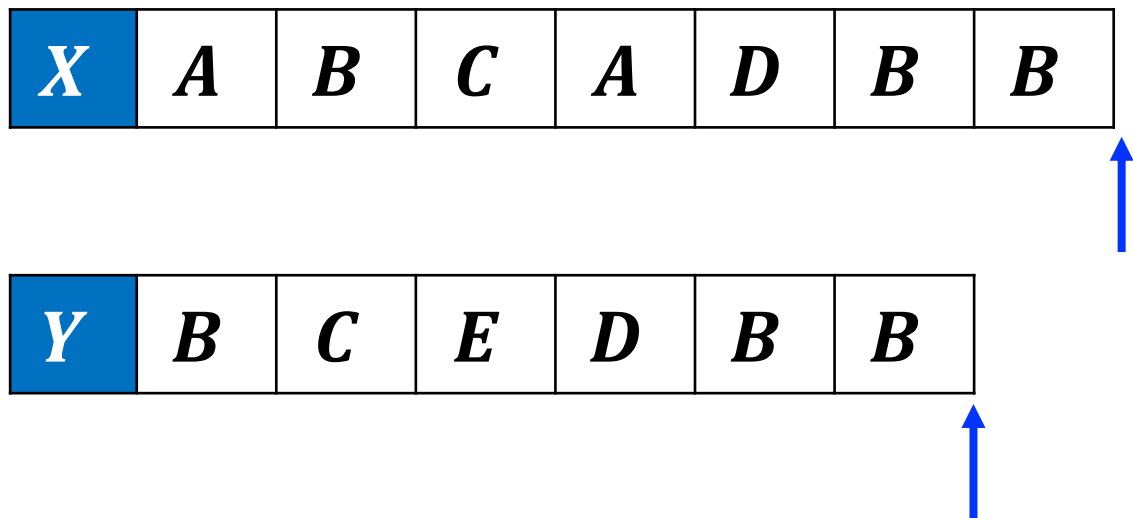
约束条件



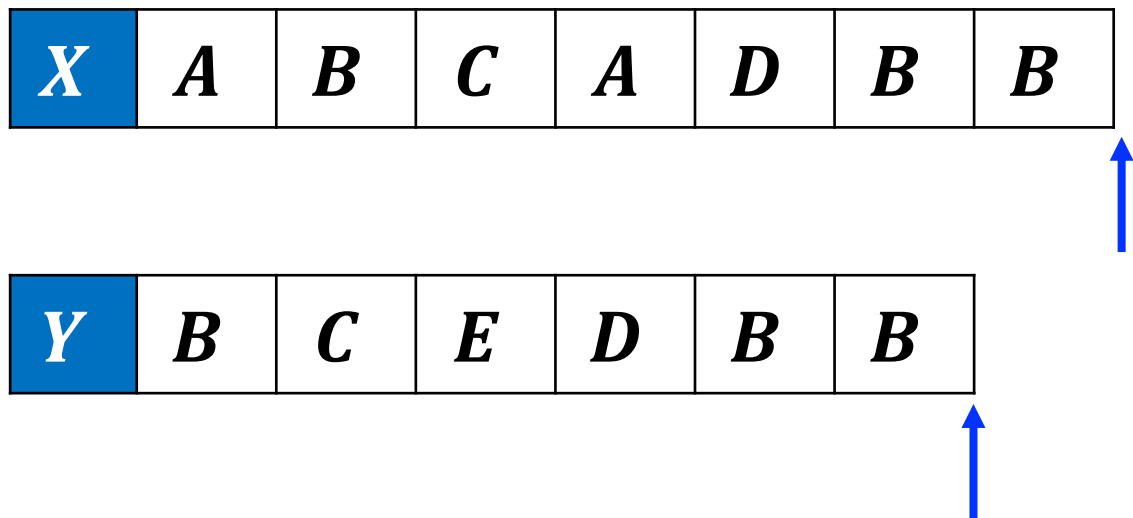
|                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <i><b>X</b></i> | <i><b>A</b></i> | <i><b>B</b></i> | <i><b>C</b></i> | <i><b>A</b></i> | <i><b>D</b></i> | <i><b>B</b></i> | <i><b>B</b></i> |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|

|                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <i><b>Y</b></i> | <i><b>B</b></i> | <i><b>C</b></i> | <i><b>E</b></i> | <i><b>D</b></i> | <i><b>B</b></i> | <i><b>B</b></i> |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|

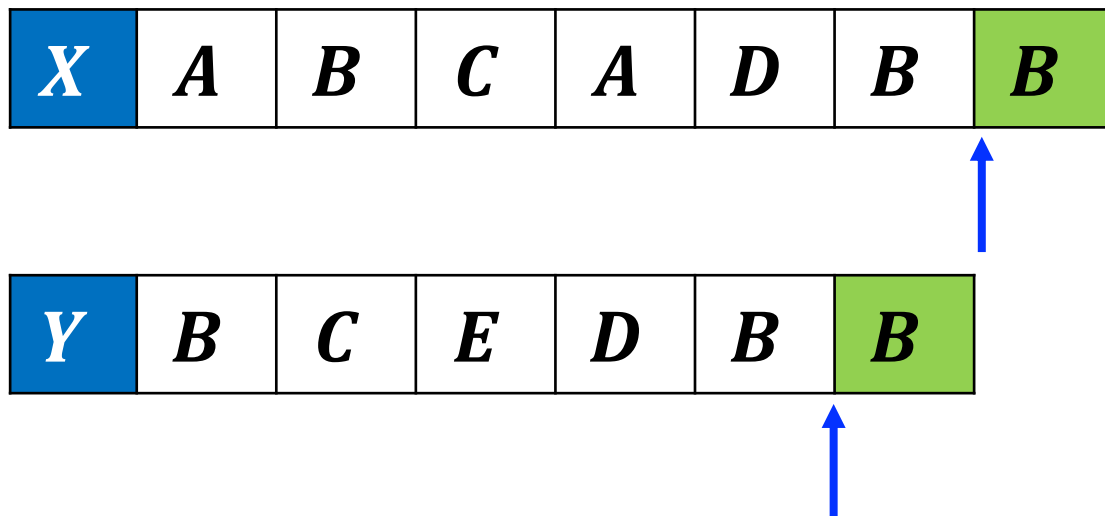
- 序列 $X$ 和序列 $Y$ 各选择一个位置 $X[i]$ 和 $Y[j]$



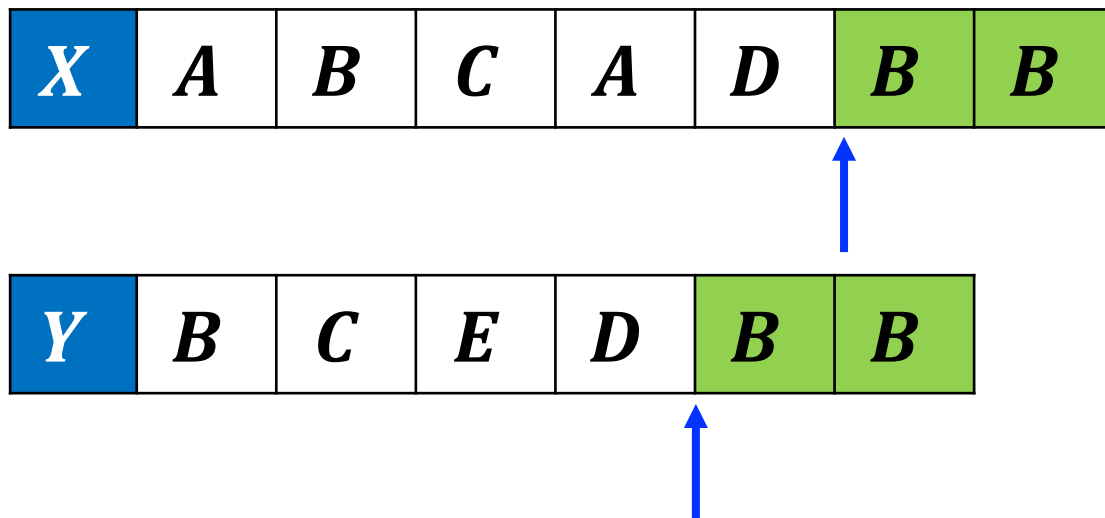
- 序列 $X$ 和序列 $Y$ 各选择一个位置 $X[7]$ 和 $Y[6]$



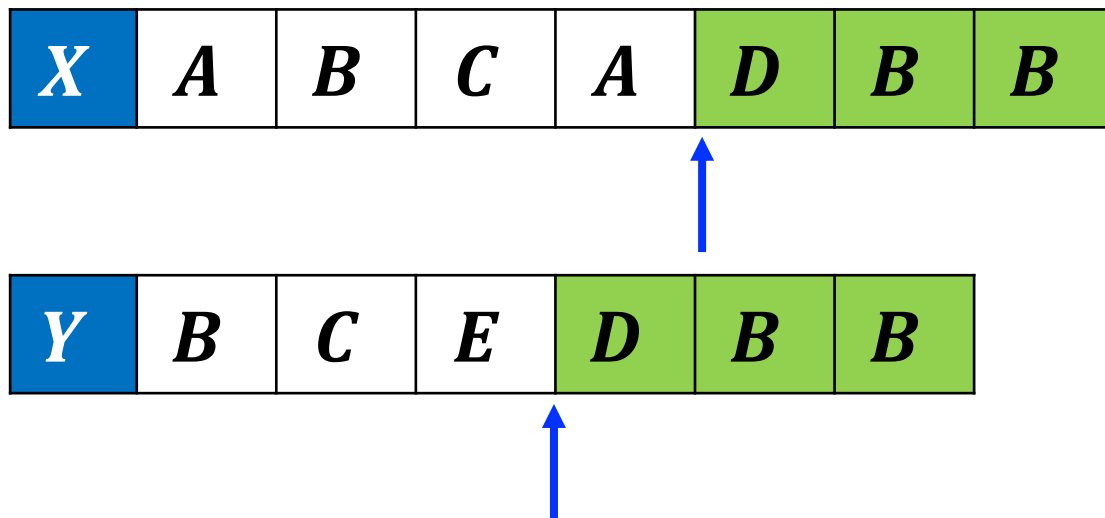
- 序列 $X$ 和序列 $Y$ 各选择一个位置 $X[7]$ 和 $Y[6]$
- 依次检查元素是否匹配



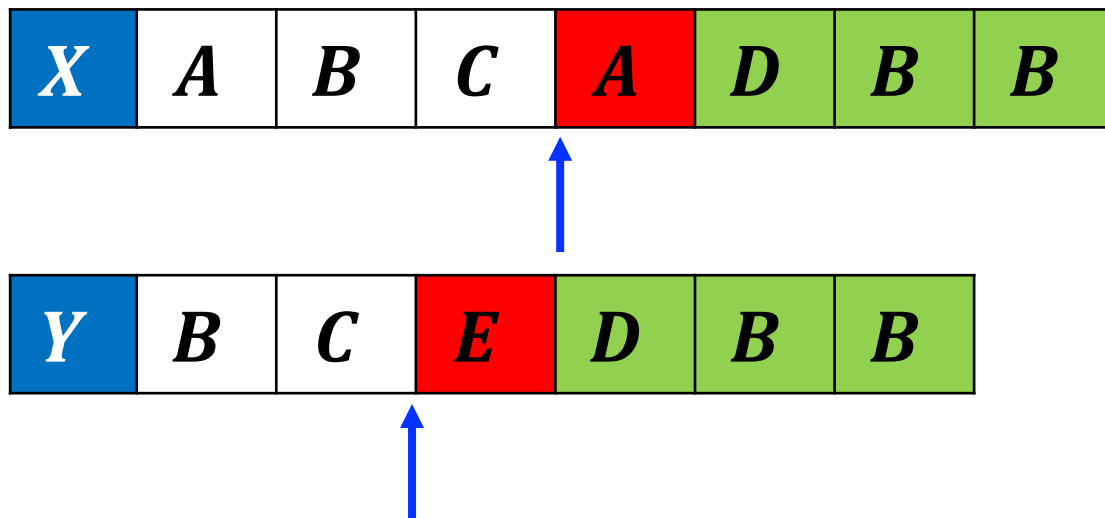
- 序列X和序列Y各选择一个位置 $X[7]$ 和 $Y[6]$
- 依次检查元素是否匹配
  - 元素相等继续匹配



- 序列X和序列Y各选择一个位置X[7]和Y[6]
- 依次检查元素是否匹配
  - 元素相等继续匹配



- 序列X和序列Y各选择一个位置 $X[7]$ 和 $Y[6]$
- 依次检查元素是否匹配
  - 元素相等继续匹配



- 序列 $X$ 和序列 $Y$ 各选择一个位置 $X[7]$ 和 $Y[6]$
- 依次检查元素是否匹配
  - 元素相等继续匹配
  - 元素不等(或某序列已达端点)匹配终止

|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

|          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

- 枚举所有的 $X[i], Y[j]$
- 求以其为结尾的尽可能长的公共子串





最长公共子串长度为3

- 枚举所有的 $X[i], Y[j]$
- 求以其为结尾的尽可能长的公共子串
- 记录最长公共子串长度

# 枚举观察



|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|          | <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |



# 枚举观察



|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|          | <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|          | <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |



# 枚举观察



|                 |          |          |          |          |          |          |          |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i><b>X</b></i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

|                 |          |          |          |          |          |          |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i><b>Y</b></i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

|                 |          |          |          |          |          |          |          |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i><b>X</b></i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

|                 |          |          |          |          |          |          |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i><b>Y</b></i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

|                 |          |          |          |          |          |          |          |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i><b>X</b></i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

|                 |          |          |          |          |          |          |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i><b>Y</b></i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|



# 枚举观察



|                 |                 |          |          |          |          |          |          |
|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i><b>X</b></i> | <i>A</i>        | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|                 | <i><b>Y</b></i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
| <i><b>X</b></i> | <i>A</i>        | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|                 | <i><b>Y</b></i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
| <i><b>X</b></i> | <i>A</i>        | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|                 | <i><b>Y</b></i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |

# 枚举观察



|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|          | <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|          | <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|          | <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |

- 可能存在**最优子结构**和**重叠子问题**

问题：如何利用动态规划求解？

# 问题结构分析

- 给出问题表示

- $C[i, j]$

- $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 中, 以 $x_i$ 和 $y_j$ 结尾的最长公共子串 $Z[1..l]$ 的长度

|       |       |       |     |           |       |
|-------|-------|-------|-----|-----------|-------|
| $X_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_{i-1}$ | $x_i$ |
| $Y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_{j-1}$ | $y_j$ |

|       |       |     |           |       |
|-------|-------|-----|-----------|-------|
| $Z_l$ | $z_1$ | ... | $z_{l-1}$ | $z_l$ |
|-------|-------|-----|-----------|-------|

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

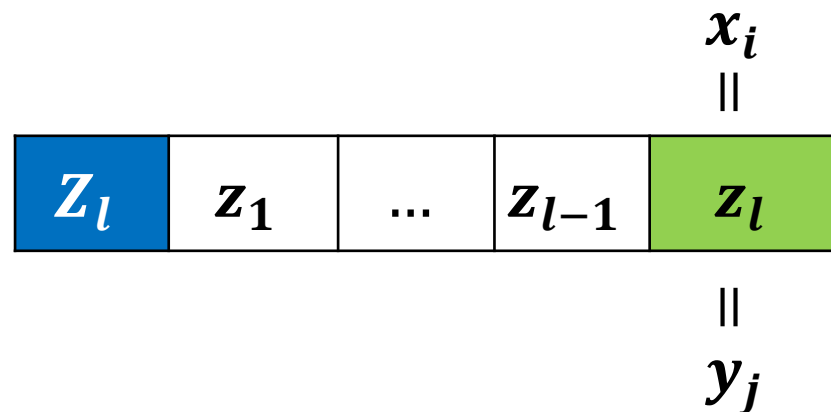
# 问题结构分析

- 给出问题表示

- $C[i, j]$

- $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 中, 以 $x_i$ 和 $y_j$ 结尾的最长公共子串 $Z[1..l]$ 的长度

|       |       |       |     |           |       |
|-------|-------|-------|-----|-----------|-------|
| $X_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_{i-1}$ | $x_i$ |
| $Y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_{j-1}$ | $y_j$ |



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪



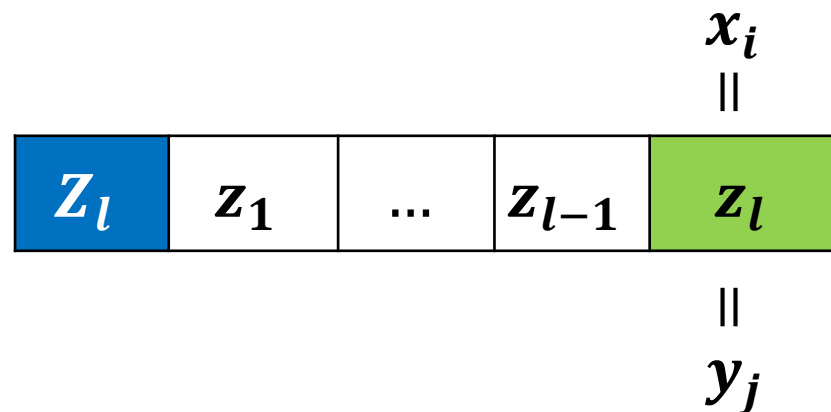
# 问题结构分析

## 给出问题表示

•  $C[i, j]$

◦  $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 中，以 $x_i$ 和 $y_j$ 结尾的最长公共子串 $Z[1..l]$ 的长度

|       |       |       |     |           |       |
|-------|-------|-------|-----|-----------|-------|
| $X_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_{i-1}$ | $x_i$ |
| $Y_j$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_{j-1}$ | $y_j$ |



## 明确原始问题

•  $p_{max} = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{C[i, j]\}$

◦  $X[1..n]$ 和 $Y[1..m]$ 中最长公共子串的长度

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况1:  $x_7 \neq y_6$

|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

|          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>A</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

- 情况2:  $x_7 = y_6$

|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况1:  $x_7 \neq y_6$

$C[7, 6]$

|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|          | <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>A</i> |

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况1:  $x_7 \neq y_6$

$C[7, 6]$

|          |          |   |   |   |   |   |          |
|----------|----------|---|---|---|---|---|----------|
| <b>X</b> | A        | B | C | A | D | B | <b>B</b> |
|          | <b>Y</b> | B | C | E | D | B | <b>A</b> |

不存在以其结尾的公共子串

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况1:  $x_7 \neq y_6$

$C[7, 6] = 0$

|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|          |          |          |          |          |          |          |          |
|          | <i>Y</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>A</i> |

不存在以其结尾的公共子串

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况1:  $x_i \neq y_j$

$$C[i, j] = 0$$

|     |       |       |     |           |       |
|-----|-------|-------|-----|-----------|-------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_{i-1}$ | $x_i$ |
| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_{j-1}$ | $y_j$ |

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况1:  $x_i \neq y_j$

$$C[i, j] = 0$$

|     |       |       |     |           |       |
|-----|-------|-------|-----|-----------|-------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_{i-1}$ | $x_i$ |
| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_{j-1}$ | $y_j$ |

无子问题

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况2:  $x_7 = y_6$

$C[7, 6]$

|                 |                 |          |          |          |          |          |          |
|-----------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b><i>X</i></b> | <i>A</i>        | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
|                 | <b><i>Y</i></b> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪



# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况2:  $x_7 = y_6$

$C[7, 6]$

|          |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|
| <b>X</b> | A | B | C | A | D | B | B |
| <b>Y</b> | B | C | E | D | B | B | B |

存在以其结尾的公共子串

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况2:  $x_7 = y_6$

$C[7, 6]$

|          |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|
| <b>X</b> | A | B | C | A | D | B | B |
| <b>Y</b> | B | C | E | D | B | B | B |

存在以其结尾的公共子串

$$C[7, 6] = C[7 - 1, 6 - 1] + 1$$

|          |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|
| <b>X</b> | A | B | C | A | D | B | B |
| <b>Y</b> | B | C | E | D | B | B | B |

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况2:  $x_i = y_j$

$C[i, j]$

|     |       |       |     |           |       |
|-----|-------|-------|-----|-----------|-------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_{i-1}$ | $x_i$ |
| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_{j-1}$ | $y_j$ |

问题结构分析



递推关系建立



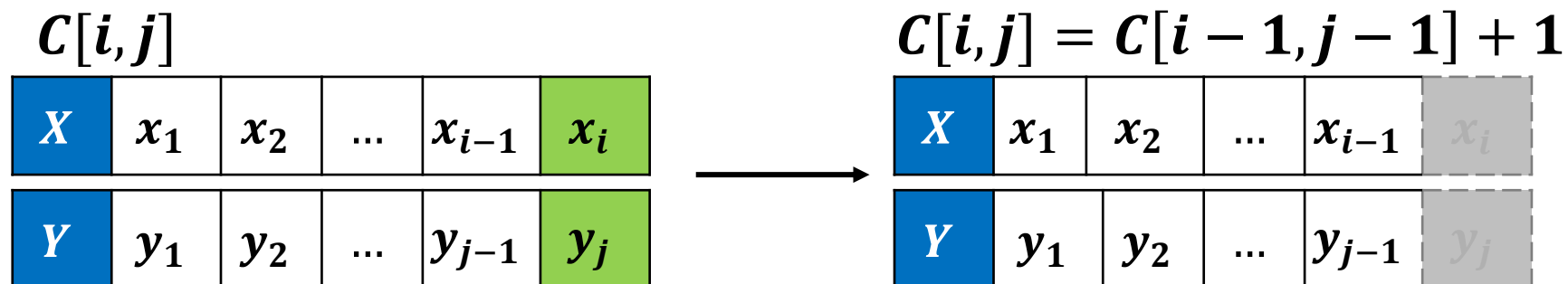
自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况2:  $x_i = y_j$



问题结构分析

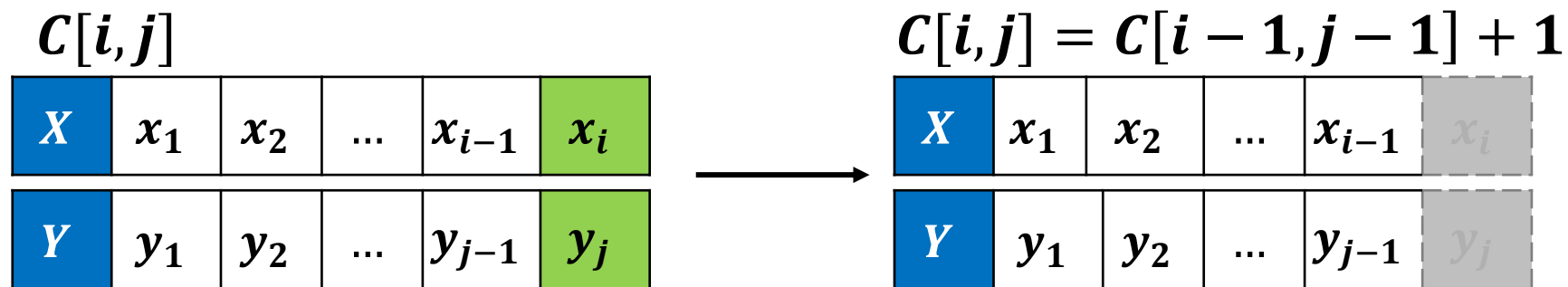
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 情况2:  $x_i = y_j$



- $C[i, j] = C[i - 1, j - 1] + 1$

最优子结构

问题结构分析

递推关系建立

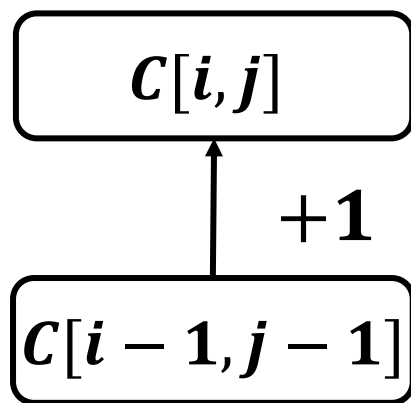
自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：构造递推公式



- $$C[i, j] = \begin{cases} 0 & , x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1 & , x_i = y_j \end{cases}$$



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



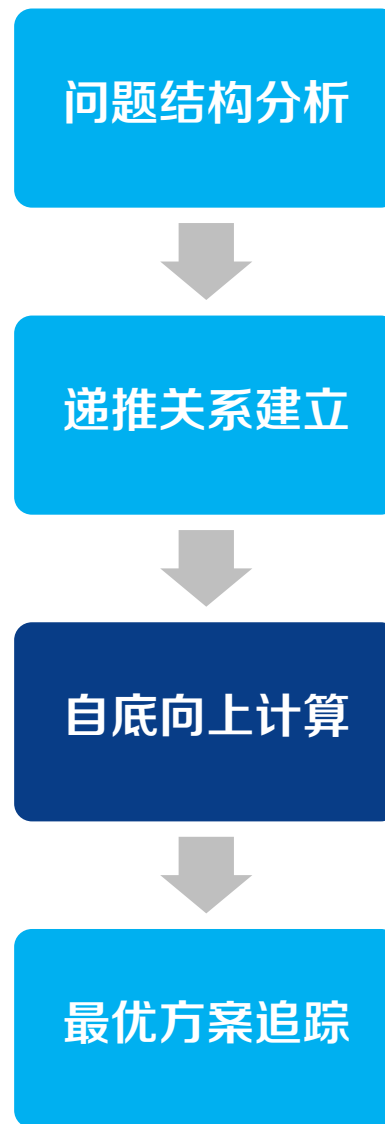
最优方案追踪

# 自底向上计算：确定计算顺序



- 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子串为0



# 自底向上计算：确定计算顺序

## • 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子串为0

| $C[i, j]$ | $j = 0$ | $j = 1$ | $j = 2$ | ... | $j = m$ |
|-----------|---------|---------|---------|-----|---------|
| $i = 0$   | 0       | 0       | 0       | 0   | 0       |
| $i = 1$   | 0       |         |         |     |         |
| $i = 2$   | 0       |         |         |     |         |
| ...       | 0       |         |         |     |         |
| $i = n$   | 0       |         |         |     |         |

初始化

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪



# 自底向上计算：确定计算顺序

## • 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子串为0

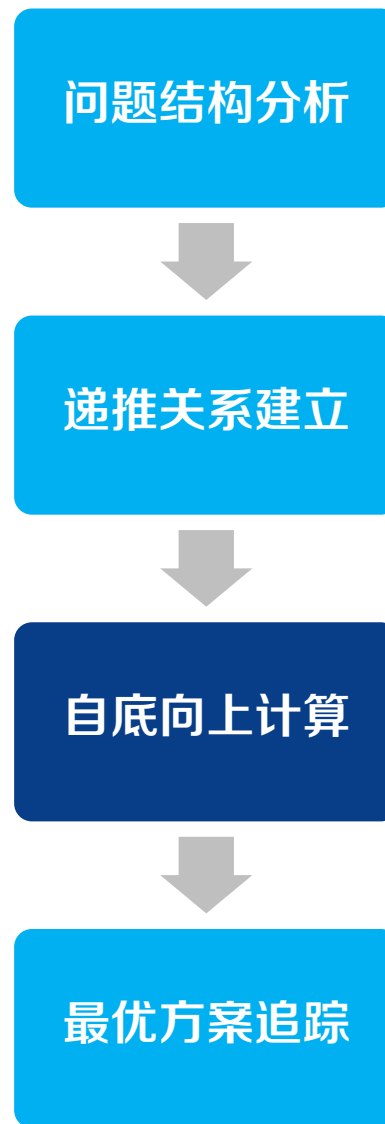
## • 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} 0 & , x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1 & , x_i = y_j \end{cases}$$

| $C[i, j]$ | $j = 0$ | $j = 1$ | $j = 2$ | $...$ | $j = m$ |
|-----------|---------|---------|---------|-------|---------|
| $i = 0$   | 0       | 0       | 0       | 0     | 0       |
| $i = 1$   | 0       |         |         |       |         |
| $i = 2$   | 0       |         |         |       |         |
| $...$     | 0       |         |         |       |         |
| $i = n$   | 0       |         |         |       |         |



$C[i, j]$



# 自底向上计算：依次求解问题

## • 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子串为0

## • 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} 0 & , x_i \neq y_j \\ C[i - 1, j - 1] + 1 & , x_i = y_j \end{cases}$$

| $C[i, j]$ | $j = 0$ | $j = 1$ | $j = 2$ | $\dots$ | $j = m$ |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $i = 0$   | 0       | 0       | 0       | 0       |         |
| $i = 1$   | 0       |         |         |         |         |
| $i = 2$   | 0       |         |         |         |         |
| $\dots$   | 0       |         |         |         |         |
| $i = n$   | 0       |         |         |         |         |

自底向上计算



# 自底向上计算：依次求解问题

- 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
    - 某序列长度为0时，最长公共子串为0

- 原始问题

- $p_{max} = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{C[i, j]\}$

| $C[i, j]$ | $j = 0$ | $j = 1$ | $j = 2$ | $\dots$ | $j = m$ |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $i = 0$   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $i = 1$   | 0       |         |         |         |         |
| $i = 2$   | 0       |         | ★       |         |         |
| $\dots$   | 0       |         |         |         |         |
| $i = n$   | 0       |         |         |         |         |

最优解

问题结构分析



递推关系建立



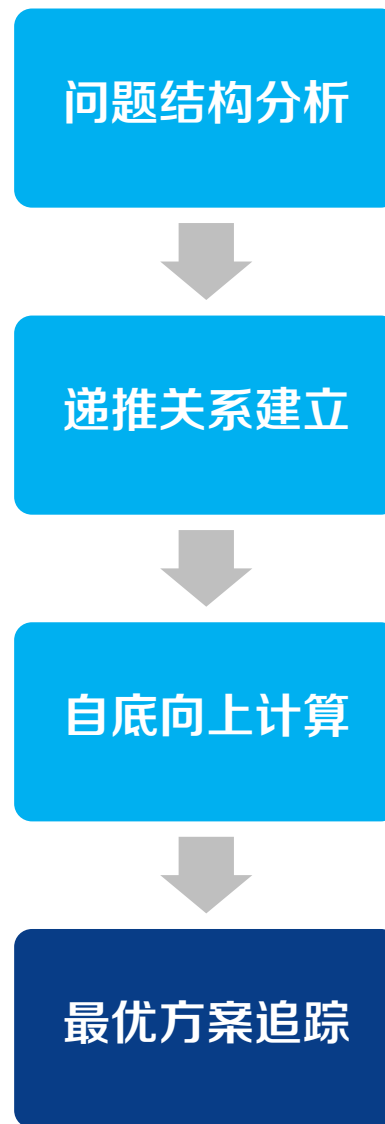
自底向上计算



最优方案追踪

- 记录决策过程

- 最长公共子串末尾位置为 $p_{max}$
- 最长公共子串长度为 $l_{max}$



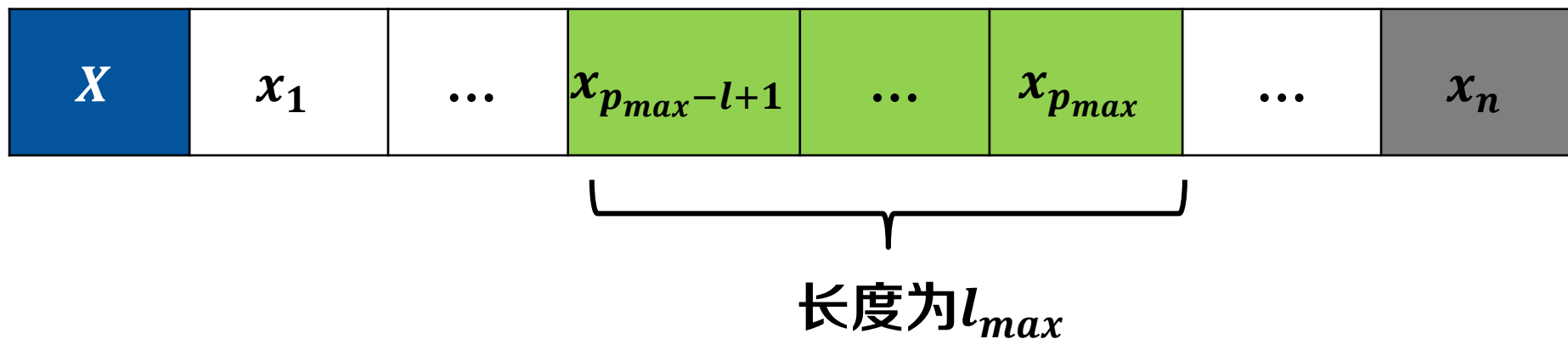
# 最优方案追踪

- 记录决策过程

- 最长公共子串末尾位置为  $p_{max}$
- 最长公共子串长度为  $l_{max}$

- 输出最优方案

- 最长公共子串  $\langle x_{p_{max}-l+1}, x_{p_{max}-l+2}, \dots, x_{p_{max}} \rangle$



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 算法实例



|       | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $X_i$ | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
| $Y_j$ | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |          |

# 算法实例



|       | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $X_i$ | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
| $Y_j$ | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |          |

位置  $p_{max} = 0$

长度  $l_{max} = 0$

$C[[]]$

| $\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                                    |   |   |   |   |   |   |   |
| 1                                    |   |   |   |   |   |   |   |
| 2                                    |   |   |   |   |   |   |   |
| 3                                    |   |   |   |   |   |   |   |
| 4                                    |   |   |   |   |   |   |   |
| 5                                    |   |   |   |   |   |   |   |
| 6                                    |   |   |   |   |   |   |   |
| 7                                    |   |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 0$

长度  $l_{max} = 0$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 2                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

初始化



# 算法实例



|       | 1 | 2              | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|----------------|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B              | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | $x_i \neq y_j$ |   |   |   | B | B |

位置  $p_{max} = 0$

长度  $l_{max} = 0$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 2                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2              | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|----------------|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B              | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | $x_i \neq y_j$ |   |   |   | B | B |

位置  $p_{max} = 0$

长度  $l_{max} = 0$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 |   |   |   |   |   |
| 2                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 0$

长度  $l_{max} = 0$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |
| 2                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 0$

长度  $l_{max} = 0$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
| 2                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 0$

长度  $l_{max} = 0$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |
| 2                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 0$

长度  $l_{max} = 0$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |
| 2                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 0$

长度  $l_{max} = 0$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3           | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|-------------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C           | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | $x_i = y_j$ |   |   |   | B |

位置  $p_{max} = 0$

长度  $l_{max} = 0$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |



# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3           | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|-------------|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C           | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | $x_i = y_j$ |   |   |   | B |

位置  $p_{max} = 2$   
长度  $l_{max} = 1$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 |   |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 2$   
长度  $l_{max} = 1$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 |   |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 2$   
长度  $l_{max} = 1$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 |   |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 2$   
长度  $l_{max} = 1$

$C[[]]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 2$   
长度  $l_{max} = 1$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |   |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 2$   
长度  $l_{max} = 1$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 2$   
长度  $l_{max} = 1$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 |   |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 |   |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |



# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 |   |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[[]]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |   |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |   |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
 长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 |   |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[[]]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[[]]$

| $\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| 0  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3  | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |
| 5  | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6  | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7  | 0 |   |   |   |   |   |   |



# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 |   |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[[]]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[[]]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |   |   |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| 0  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3  | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |   |
| 6  | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7  | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                | 0 |   |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |



# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                | 0 | 1 |   |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                | 0 | 1 | 0 |   |   |   |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[[]]$

| $\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                                    | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                                    | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                                    | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                                    | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                                    | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                                    | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                                    | 0 | 1 | 0 | 0 |   |   |   |
| 7                                    | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[[]]$

| $\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| 0  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3  | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |   |
| 7  | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |   |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7                | 0 |   |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7                | 0 | 1 |   |   |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7                | 0 | 1 | 0 |   |   |   |   |



# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| 0  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3  | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7  | 0 | 1 | 0 | 0 |   |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[[]]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |   |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 3$   
长度  $l_{max} = 2$

$C[]$

| $\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| 0  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3  | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |   |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 7$   
长度  $l_{max} = 3$

$C[]$

| $j \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7                | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 7$   
长度  $l_{max} = 3$

$C[]$

| $\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| 0  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3  | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6  | 0 | 1 | 0 |   |   |   | 1 |
| 7  | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |

最长公共子串长度

# 算法实例



|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | A | B | C | A | D | B | B |
| $Y_j$ | B | C | E | D | B | B |   |

位置  $p_{max} = 7$   
长度  $l_{max} = 3$

$C[]$

| $\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 0                                    | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1                                    | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2                                    | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3                                    | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4                                    | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5                                    | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6                                    | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 7                                    | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |

- Longest-Common-Substring( $X, Y$ )

输入: 两个字符串  $X, Y$

输出:  $X$  和  $Y$  的最长公共子串

//初始化

$n \leftarrow \text{length}(X)$

$m \leftarrow \text{length}(Y)$

新建二维数组  $C[0..n, 0..m]$

$l_{max} \leftarrow 0$

$p_{max} \leftarrow 0$

for  $i \leftarrow 0$  to  $n$  do

$C[i, 0] \leftarrow 0$

end

for  $j \leftarrow 0$  to  $m$  do

$C[0, j] \leftarrow 0$

end

序列长度

- Longest-Common-Substring( $X, Y$ )

输入: 两个字符串  $X, Y$

输出:  $X$  和  $Y$  的最长公共子串

//初始化

$n \leftarrow \text{length}(X)$

$m \leftarrow \text{length}(Y)$

新建二维数组  $C[0..n, 0..m]$

$l_{max} \leftarrow 0$

$p_{max} \leftarrow 0$

for  $i \leftarrow 0$  to  $n$  do

$C[i, 0] \leftarrow 0$

end

for  $j \leftarrow 0$  to  $m$  do

$C[0, j] \leftarrow 0$

end

初始化最优解



- Longest-Common-Substring( $X, Y$ )

//动态规划

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $X_i \neq Y_j$  then
      |  $C[i, j] \leftarrow 0$ 
    end
    else
      |  $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$ 
      | if  $C[i, j] > l_{max}$  then
      |   |  $l_{max} \leftarrow C[i, j]$ 
      |   |  $p_{max} \leftarrow i$ 
      | end
    end
  end
end
return  $l_{max}, p_{max}$ 
```

依次计算子问题

- Longest-Common-Substring( $X, Y$ )

//动态规划

for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do

for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do

if  $X_i \neq Y_j$  then

|  $C[i, j] \leftarrow 0$

end

else

|  $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$

if  $C[i, j] > l_{max}$  then

|  $l_{max} \leftarrow C[i, j]$

|  $p_{max} \leftarrow i$

end

end

end

end

return  $l_{max}, p_{max}$

末尾不等

- Longest-Common-Substring( $X, Y$ )

//动态规划

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $X_i \neq Y_j$  then
      |  $C[i, j] \leftarrow 0$ 
    end
    else
      |  $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$ 
      | if  $C[i, j] > l_{max}$  then
      |   |  $l_{max} \leftarrow C[i, j]$ 
      |   |  $p_{max} \leftarrow i$ 
      | end
    end
  end
end
return  $l_{max}, p_{max}$ 
```

末尾相等

- Longest-Common-Substring( $X, Y$ )

//动态规划

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $X_i \neq Y_j$  then
      |  $C[i, j] \leftarrow 0$ 
    end
    else
      |  $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$ 
      | if  $C[i, j] > l_{max}$  then
      |   |  $l_{max} \leftarrow C[i, j]$ 
      |   |  $p_{max} \leftarrow i$ 
      | end
    end
  end
end
return  $l_{max}, p_{max}$ 
```

记录最长公共子串

- Print-LCS( $X, l_{max}, p_{max}$ )

输入: 字符串  $X, l_{max}, p_{max}$

输出:  $X$  和  $Y$  的最长公共子串

```
if  $l_{max} = 0$  then  
  | return  $NULL$   
end  
for  $i \leftarrow (p_{max} - l_{max} + 1)$  to  $p_{max}$  do  
  | print  $X_i$   
end
```

无公共子串

- **Print-LCS( $X, l_{max}, p_{max}$ )**

输入: 字符串  $X, l_{max}, p_{max}$

输出:  $X$  和  $Y$  的最长公共子串

if  $l_{max} = 0$  then  
| return *NULL*

end

for  $i \leftarrow (p_{max} - l_{max} + 1)$  to  $p_{max}$  do  
| print  $X_i$

end

追踪最优解

- Longest-Common-Substring( $X, Y$ )

//动态规划

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $X_i \neq Y_j$  then
      |  $C[i, j] \leftarrow 0$ 
    end
    else
      |  $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$ 
      | if  $C[i, j] > l_{max}$  then
      |   |  $l_{max} \leftarrow C[i, j]$ 
      |   |  $p_{max} \leftarrow i$ 
      | end
    end
  end
end
return  $l_{max}, p_{max}$ 
```

时间复杂度:  $O(n \cdot m)$

## 最长公共子序列

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>D</i> | <i>A</i> | <i>B</i> |
| <i>Y</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |          |

## 最长公共子串

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>D</i> | <i>A</i> | <i>B</i> |
| <i>Y</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |          |



## 最长公共子序列

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>D</i> | <i>A</i> | <i>B</i> |
| <i>Y</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |          |

## 最长公共子串

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>D</i> | <i>A</i> | <i>B</i> |
| <i>Y</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |          |

情况2:  $x_5 = y_4$

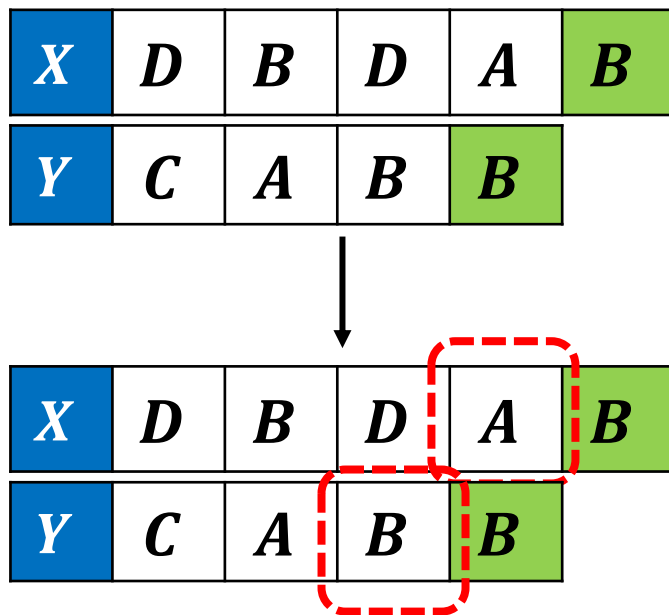
## 最长公共子序列

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>D</i> | <i>A</i> | <i>B</i> |
| <i>Y</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |          |

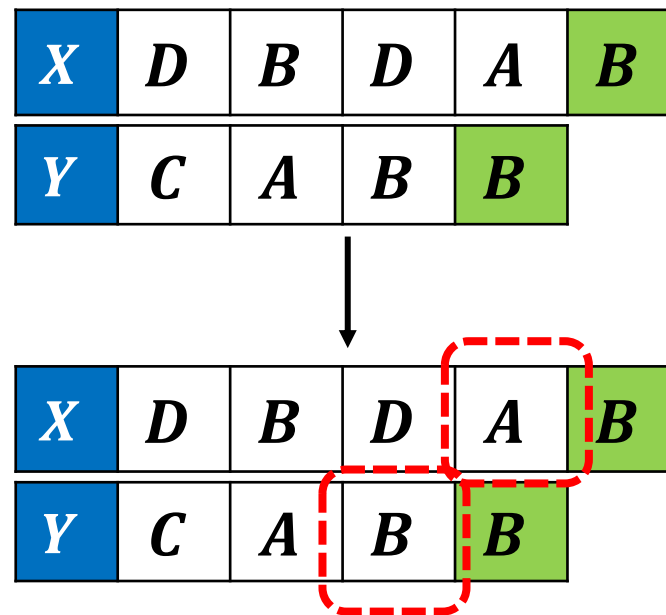
## 最长公共子串

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>X</i> | <i>D</i> | <i>B</i> | <i>D</i> | <i>A</i> | <i>B</i> |
| <i>Y</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |          |

## 最长公共子序列

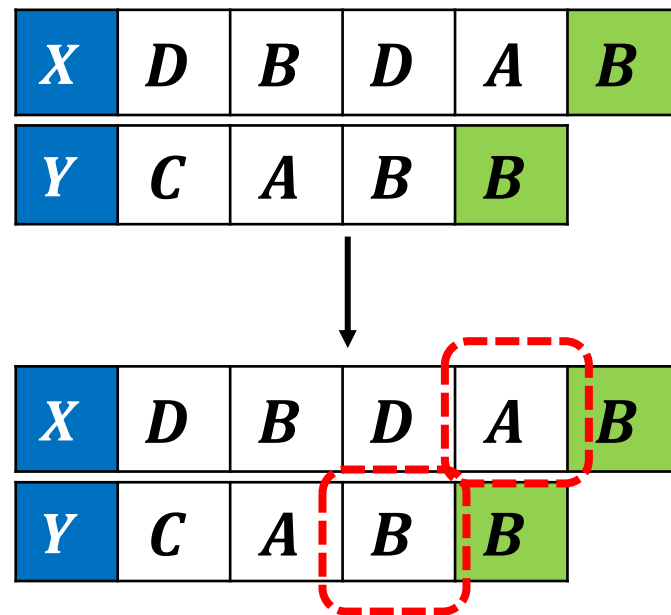


## 最长公共子串

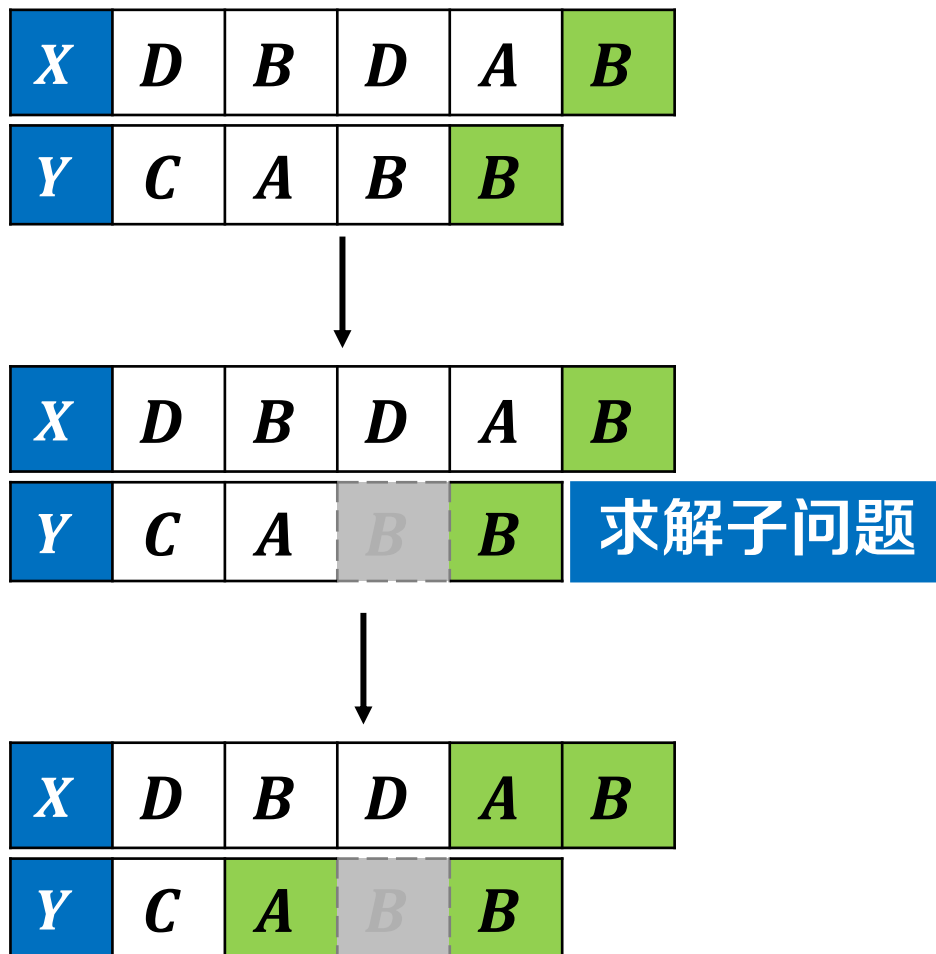


情况1:  $x_4 \neq y_3$

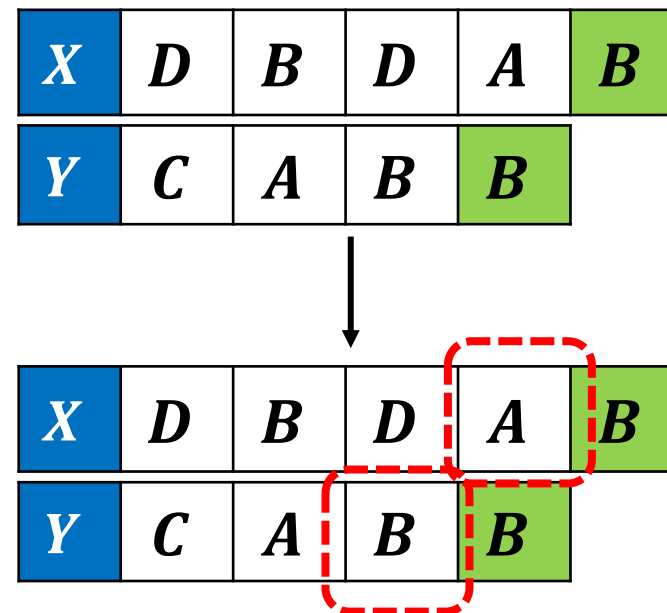
## 最长公共子串



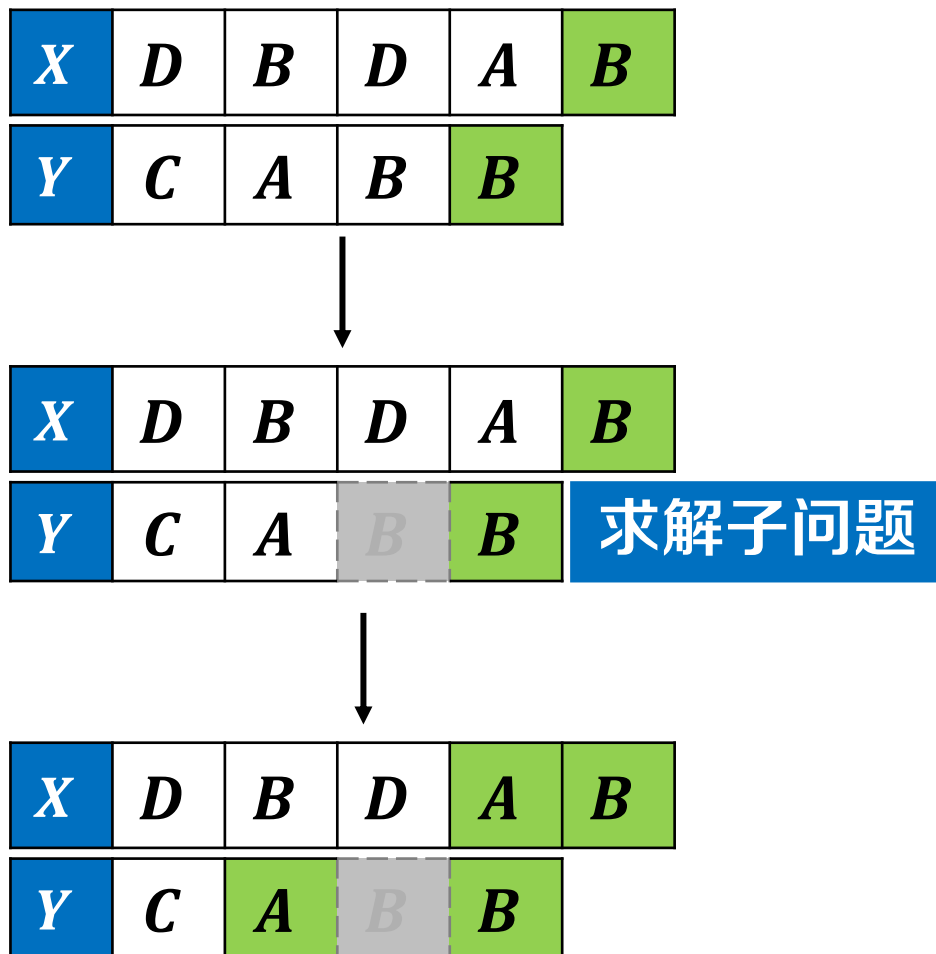
## 最长公共子序列



## 最长公共子串



## 最长公共子序列



## 最长公共子串

