

# 动态规划篇：最长公共子序列问题

童咏昕

北京航空航天大学  
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果

# 问题背景：子序列



- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 示例
  - 给定序列 $X$

$X$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

# 问题背景：子序列

- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 示例
  - 给定序列 $X$

$X$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- $X$ 的子序列

$X_1$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

# 问题背景：子序列

- 子序列
  - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 示例
  - 给定序列 $X$

$X$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- $X$ 的子序列

$X_1$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$X_2$	$A$	$B$	$C$	$B$
-------	-----	-----	-----	-----

# 问题背景：子序列



- 子序列

- 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果

- 示例

- 给定序列 $X$

$X$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- $X$ 的子序列

$X_1$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$X_2$	$A$	$B$	$C$	$B$
-------	-----	-----	-----	-----

$X_3$	$A$	$C$	$B$	$B$
-------	-----	-----	-----	-----

# 问题背景：公共子序列



- 给定两个序列 $X$ 和 $Y$

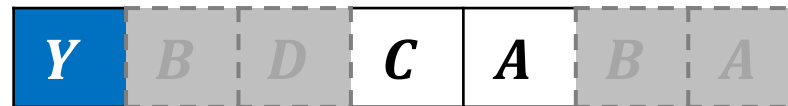
$X$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$Y$	$B$	$D$	$C$	$A$	$B$	$A$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

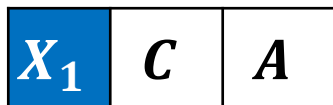
# 问题背景：公共子序列



- 给定两个序列 $X$ 和 $Y$



- 公共子序列示例





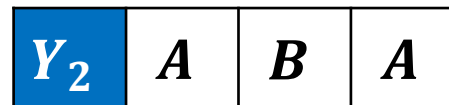
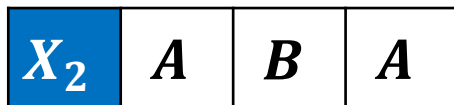
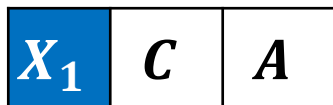
# 问题背景：公共子序列



- 给定两个序列 $X$ 和 $Y$



- 公共子序列示例



# 问题背景：公共子序列



- 给定两个序列 $X$ 和 $Y$

$X$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$Y$	$B$	$D$	$C$	$A$	$B$	$A$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 公共子序列示例

$X_1$	$C$	$A$
-------	-----	-----

$Y_1$	$C$	$A$
-------	-----	-----

$X_2$	$A$	$B$	$A$
-------	-----	-----	-----

$Y_2$	$A$	$B$	$A$
-------	-----	-----	-----

$X_3$	$B$	$C$	$A$	$B$
-------	-----	-----	-----	-----

$Y_3$	$B$	$C$	$A$	$B$
-------	-----	-----	-----	-----

# 问题背景：公共子序列

- 给定两个序列 $X$ 和 $Y$

$X$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$Y$	$B$	$D$	$C$	$A$	$B$	$A$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 公共子序列示例

$X_1$	$C$	$A$
-------	-----	-----

$Y_1$	$C$	$A$
-------	-----	-----

$X_2$	$A$	$B$	$A$
-------	-----	-----	-----

$Y_2$	$A$	$B$	$A$
-------	-----	-----	-----

$X_3$	$B$	$C$	$A$	$B$
-------	-----	-----	-----	-----

$Y_3$	$B$	$C$	$A$	$B$
-------	-----	-----	-----	-----

问题：如何求两个给定序列的最长公共子序列？

- 形式化定义

## 最长公共子序列问题

### Longest Common Subsequence Problem

#### 输入

- 序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  和序列  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

- 形式化定义

## 最长公共子序列问题

### Longest Common Subsequence Problem

#### 输入

- 序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  和序列  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

#### 输出

- 求解一个公共子序列  $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$ , 令

$$\max |Z|$$

- 形式化定义

## 最长公共子序列问题

### Longest Common Subsequence Problem

#### 输入

- 序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  和序列  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

#### 输出

- 求解一个公共子序列  $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$ , 令

$$\max |Z|$$

$$\begin{aligned} s. t. \quad & \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l} \rangle = \langle y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_l} \rangle \\ & (1 \leq i_1 < i_2, \dots, i_l \leq n; 1 \leq j_1 < j_2, \dots, j_l \leq m) \end{aligned}$$

- 形式化定义

## 最长公共子序列问题

### Longest Common Subsequence Problem

#### 输入

- 序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  和序列  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

#### 输出

- 求解一个公共子序列  $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$ , 令

$$\max |Z|$$

优化目标

$$\begin{aligned} s. t. \quad & \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l} \rangle = \langle y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_l} \rangle \\ & (1 \leq i_1 < i_2, \dots, i_l \leq n; 1 \leq j_1 < j_2, \dots, j_l \leq m) \end{aligned}$$

- 形式化定义

## 最长公共子序列问题

### Longest Common Subsequence Problem

#### 输入

- 序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  和序列  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

#### 输出

- 求解一个公共子序列  $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$ , 令

$$\max |Z|$$

优化目标

$$\begin{aligned} s. t. \quad & \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l} \rangle = \langle y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_l} \rangle \\ & (1 \leq i_1 < i_2, \dots, i_l \leq n; 1 \leq j_1 < j_2, \dots, j_l \leq m) \end{aligned}$$

约束条件



- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>C</i>
----------	----------

枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>C</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>C</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>C</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

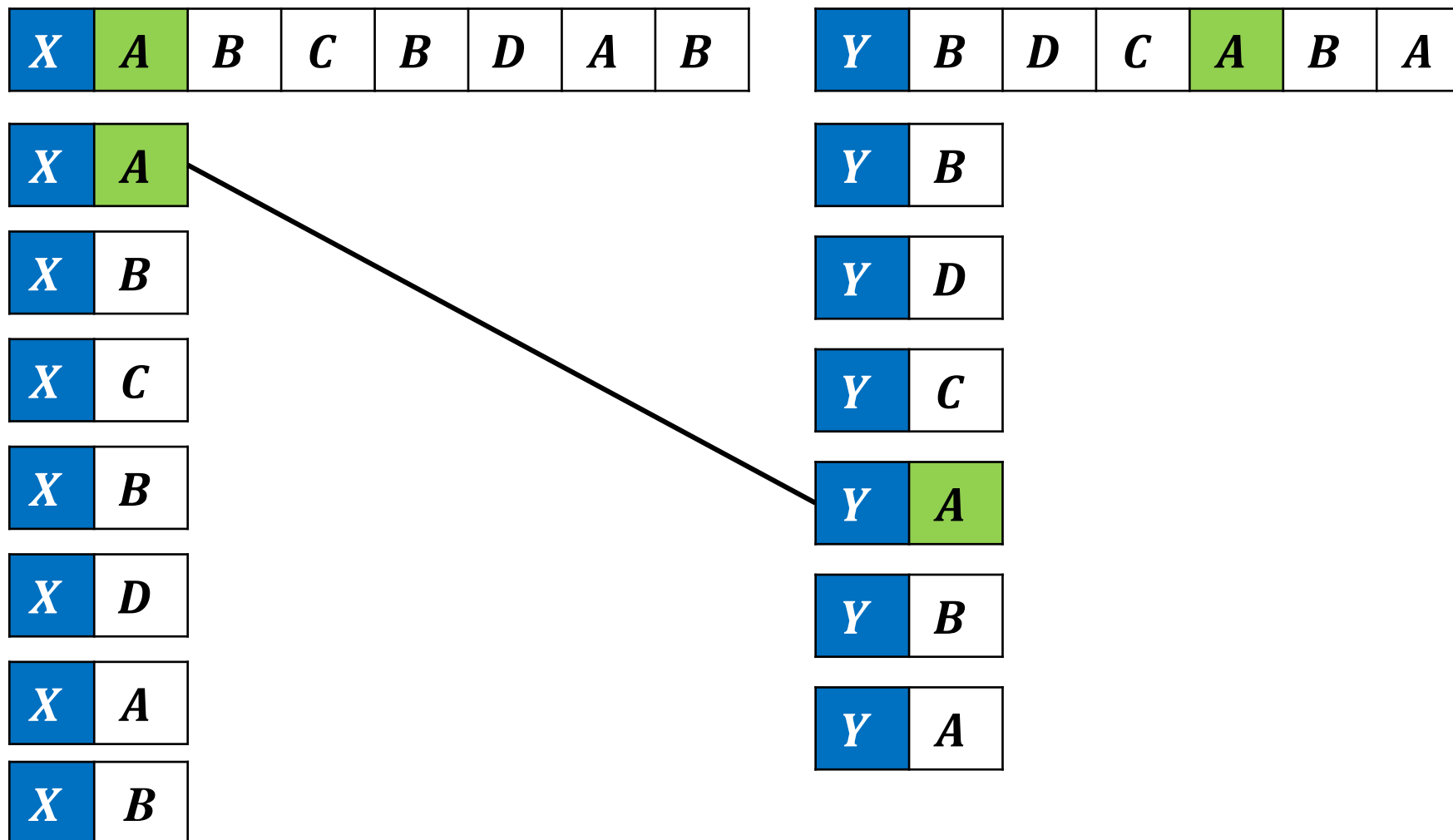
<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列



枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

<i>X</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

<i>Y</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

枚举并检查长度为4的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

...

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

...

<i>X</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

枚举并检查长度为4的子序列



- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

...

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

...

<i>X</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

枚举并检查长度为4的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

...

<i>X</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

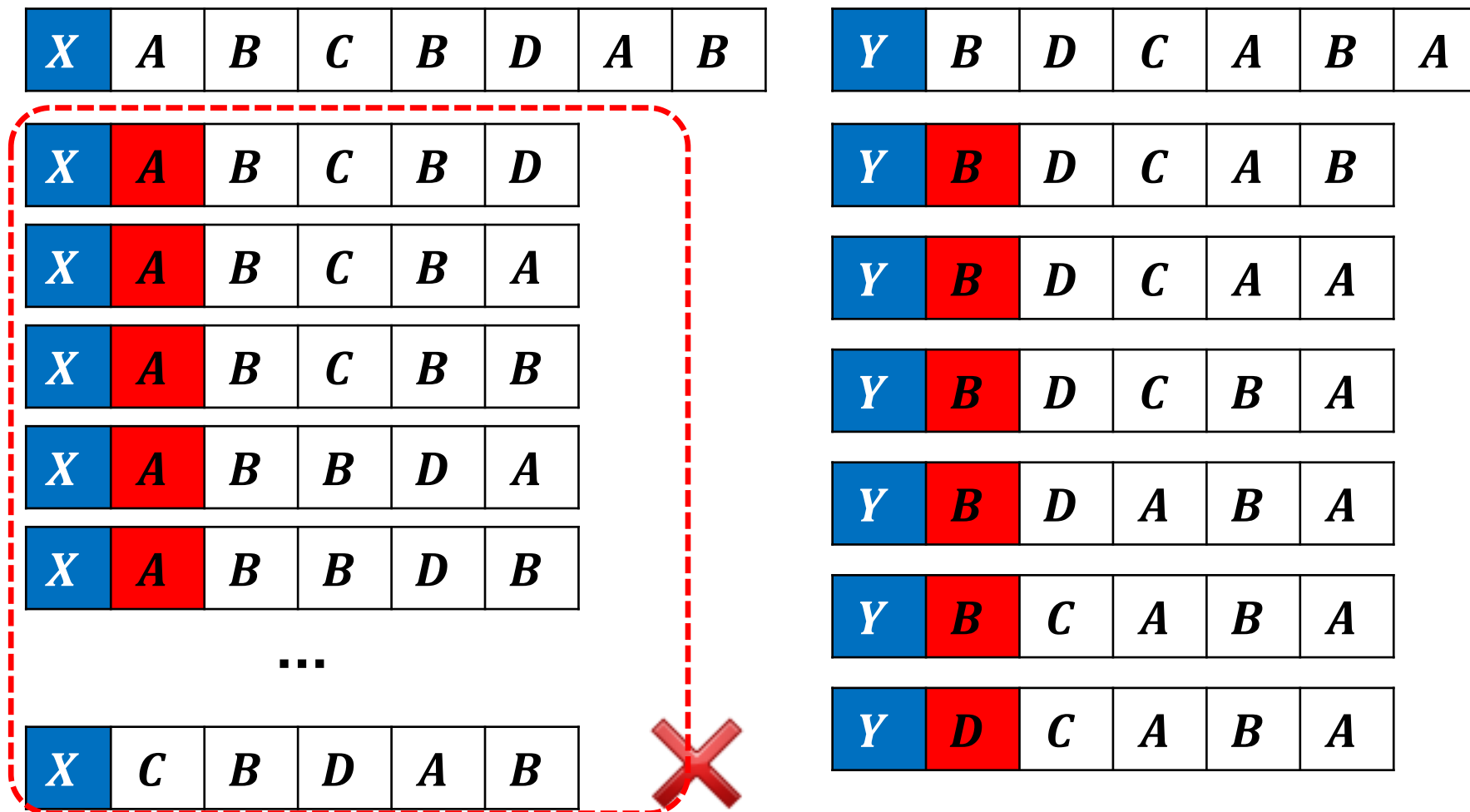
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

枚举并检查长度为5的子序列

- 枚举所有子序列



枚举并检查长度为5的子序列

# 蛮力枚举



- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

长度为1

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

长度为2

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

长度为3

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

长度为4

<i>X</i>					
----------	--	--	--	--	--

<i>Y</i>					
----------	--	--	--	--	--

长度为5

<i>X</i>						
----------	--	--	--	--	--	--

<i>Y</i>						
----------	--	--	--	--	--	--

长度为6



# 蛮力枚举



- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

长度为1

长度为2

长度为3

长度为4

# 蛮力枚举



- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

长度为1

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

长度为2

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

长度为3

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

长度为4

最长公共子序列



# 枚举观察



<i><b>X</b></i>	<i><b>B</b></i>	<i><b>D</b></i>	<i><b>A</b></i>	<i><b>B</b></i>
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

<i><b>Y</b></i>	<i><b>B</b></i>	<i><b>D</b></i>	<i><b>A</b></i>	<i><b>B</b></i>
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

长度为4

# 枚举观察



<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

长度为4

长度为3



# 枚举观察



<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

长度为4

长度为3

长度为2

# 枚举观察



<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

长度为4

长度为3

长度为2

长度为1

# 枚举观察



<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

长度为4

长度为3

长度为2

长度为1

- 可能存在**最优子结构**和**重叠子问题**

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

长度为4

长度为3

长度为2

长度为1

- 可能存在**最优子结构**和**重叠子问题**

问题：如何利用动态规划求解？

- 给出问题表示

- $C[i, j]$ :  $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列长度

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 给出问题表示

- $C[i, j]$ :  $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列长度

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

- 明确原始问题

- $C[n, m]$ :  $X[1..n]$ 和 $Y[1..m]$ 的最长公共子序列长度

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况1:  $x_7 \neq y_6$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

- 情况2:  $x_7 = y_6$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
		<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况1:  $x_7 \neq y_6$

$C[7,6]$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>

不同时出现

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪



# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况1:  $x_7 \neq y_6$

$C[7, 6]$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

$C[7, 6 - 1] + 0$							
<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

## 考察末尾字符

### 情况1: $x_7 \neq y_6$

$C[7, 6]$

<b>X</b>	A	B	C	B	D	A	<b>B</b>
----------	---	---	---	---	---	---	----------

<b>Y</b>	B	D	C	A	B	<b>A</b>
----------	---	---	---	---	---	----------

$C[7, 6 - 1] + 0$

<b>X</b>	A	B	C	B	D	A	B
<b>Y</b>	B	D	C	A	B	A	

$C[7 - 1, 6] + 0$

<b>X</b>	A	B	C	B	D	A	B
<b>Y</b>	B	D	C	A	B	A	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况1:  $x_7 \neq y_6$

$C[7, 6]$

<b>X</b>	A	B	C	B	D	A	<b>B</b>
----------	---	---	---	---	---	---	----------

max

<b>Y</b>	B	D	C	A	B	<b>A</b>
----------	---	---	---	---	---	----------

$C[7, 6 - 1] + 0$

<b>X</b>	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	---

<b>Y</b>	B	D	C	A	B	A
----------	---	---	---	---	---	---

$C[7 - 1, 6] + 0$

<b>X</b>	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	---

<b>Y</b>	B	D	C	A	B	A
----------	---	---	---	---	---	---

问题结构分析

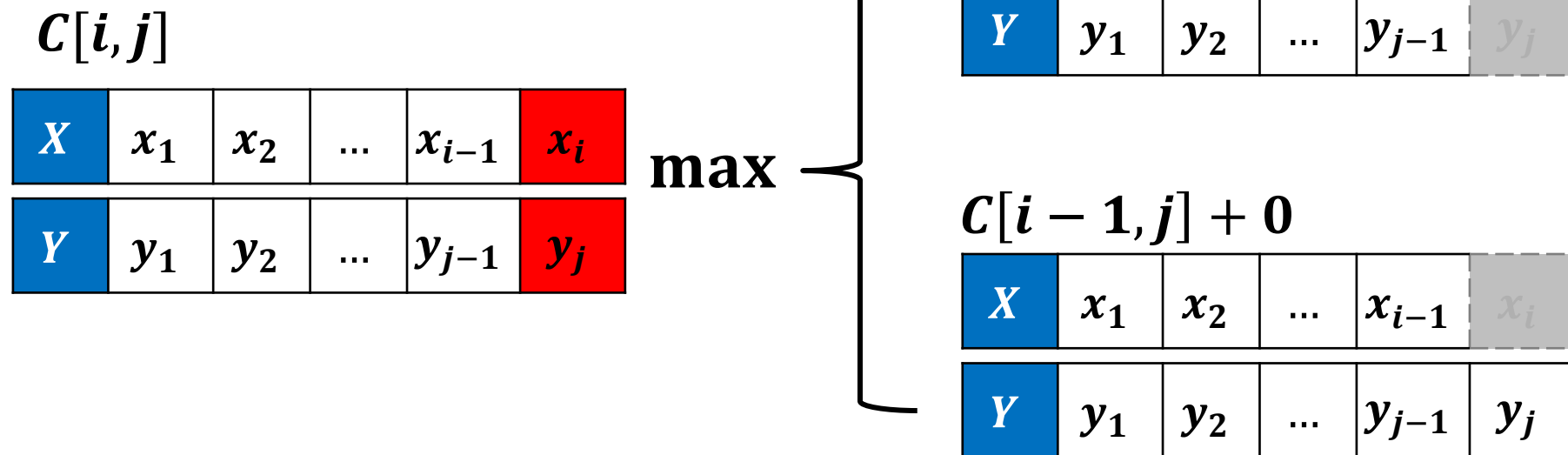
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i \neq y_j$



问题结构分析

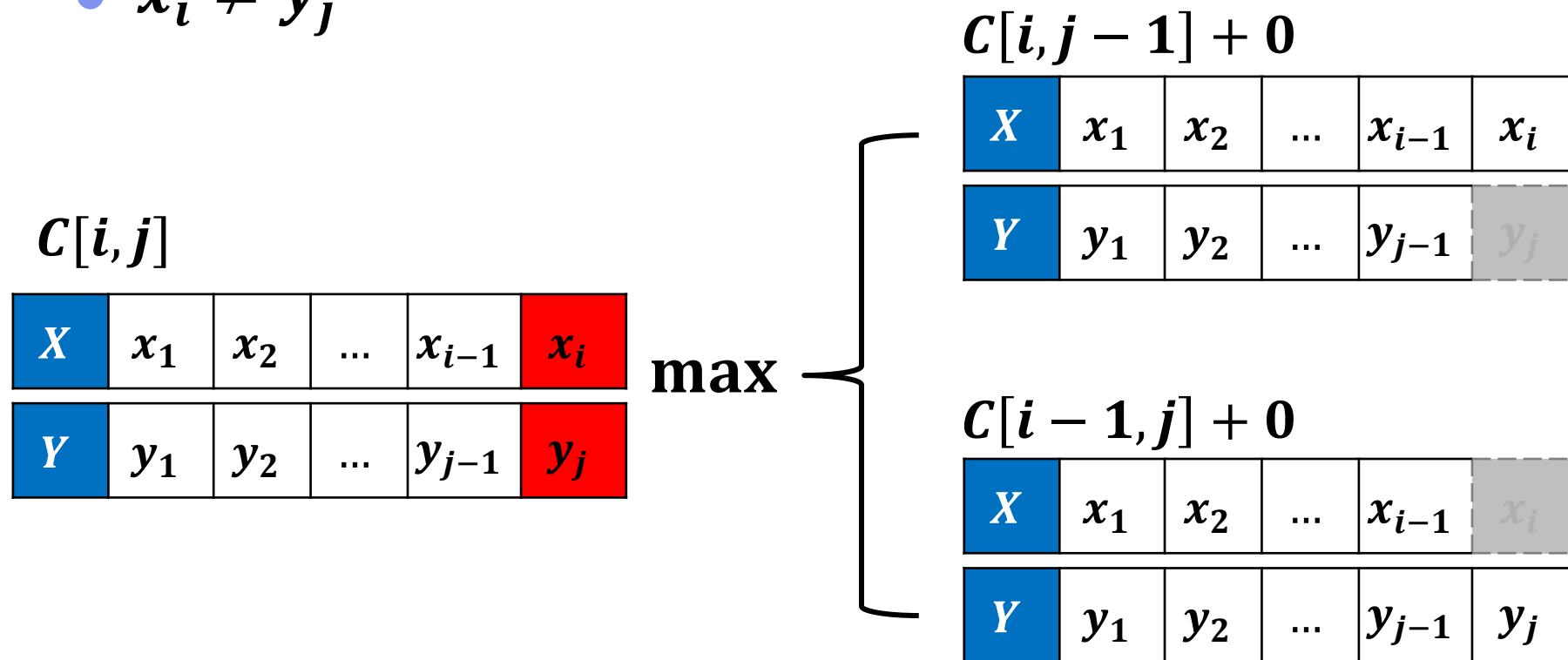
递推关系建立

自底向上计算

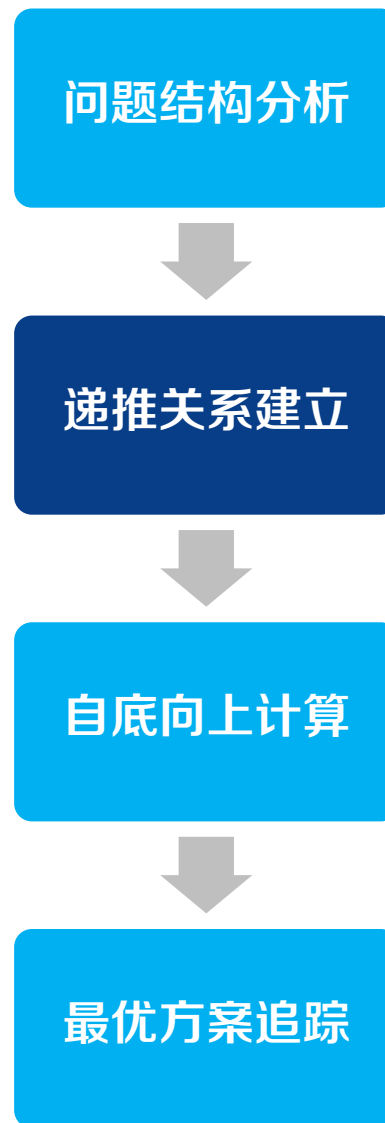
最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i \neq y_j$

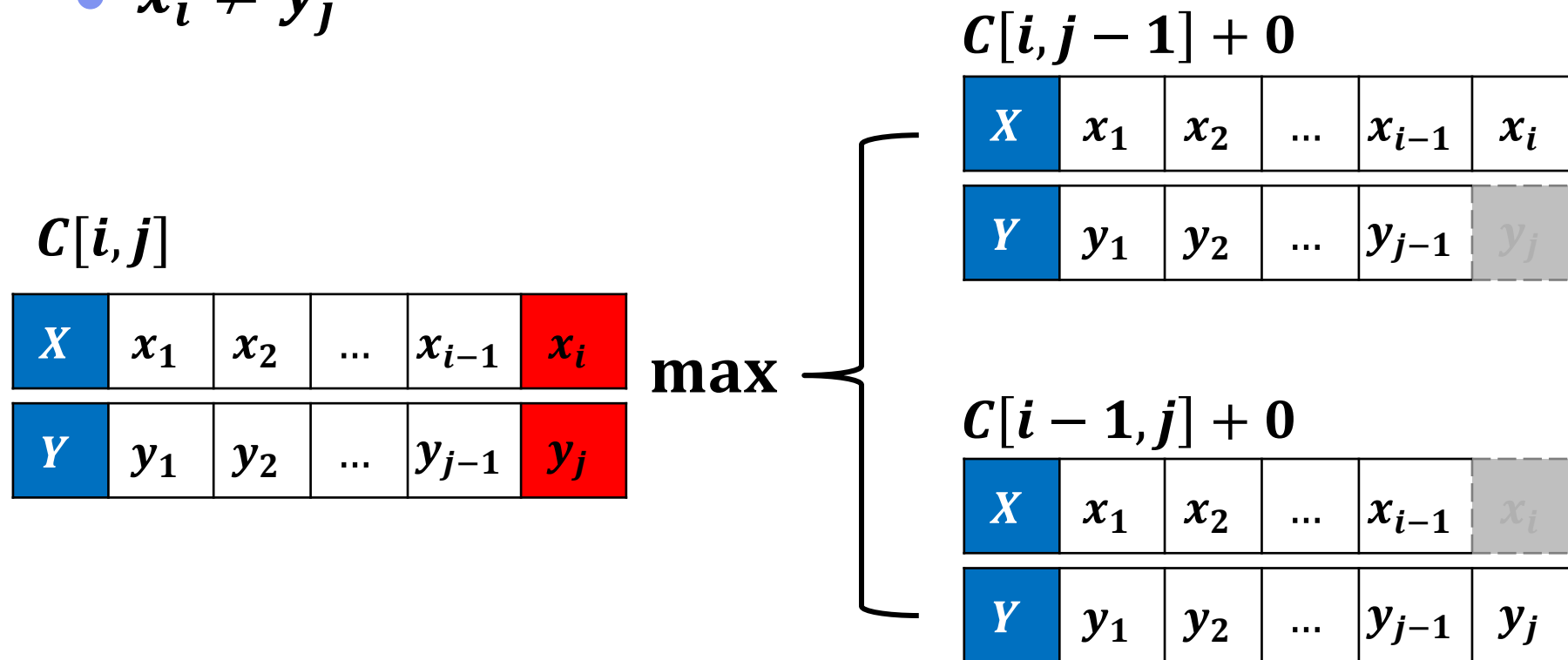


- $C[i, j] = \max\{C[i - 1, j], C[i, j - 1]\}$



# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i \neq y_j$



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

- $C[i, j] = \max\{C[i - 1, j], C[i, j - 1]\}$

最优子结构

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况2:  $x_7 = y_6$

$C[7, 6]$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况2:  $x_7 = y_6$

$C[7,6]$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>B</i>

可同时出现

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪



# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

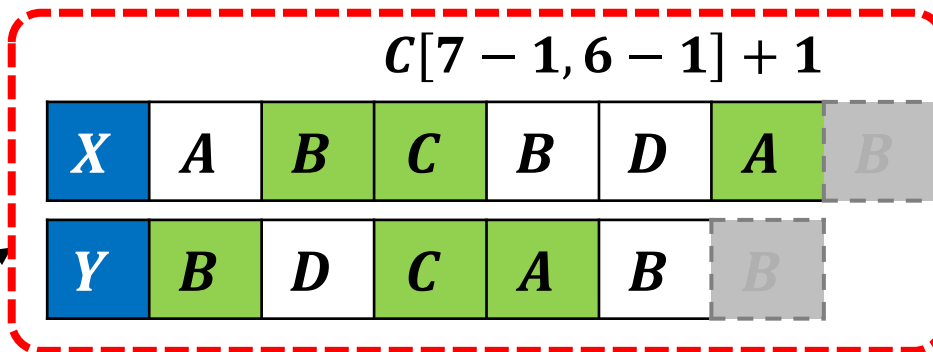
- 情况2:  $x_7 = y_6$

$C[7, 6]$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

可同时出现



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

## 考察末尾字符

### 情况2: $x_7 = y_6$

$C[7, 6]$

$X$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$Y$	$B$	$D$	$C$	$A$	$B$	$B$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

也可不同时出现

$C[7 - 1, 6 - 1] + 1$

$X$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
$Y$	$B$	$D$	$C$	$A$	$B$	$B$	

$C[7, 6 - 1] + 0$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	

$C[7 - 1, 6] + 0$

$X$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
$Y$	$B$	$D$	$C$	$A$	$B$	$B$	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况2:  $x_7 = y_6$

$C[7, 6]$

<b>X</b>	A	B	C	B	D	A	<b>B</b>
----------	---	---	---	---	---	---	----------

<b>Y</b>	B	D	C	A	B	<b>B</b>
----------	---	---	---	---	---	----------

max

$C[7 - 1, 6 - 1] + 1$

<b>X</b>	A	B	C	B	D	A	<b>B</b>
----------	---	---	---	---	---	---	----------

<b>Y</b>	B	D	C	A	B	<b>B</b>
----------	---	---	---	---	---	----------

$C[7, 6 - 1] + 0$

<b>X</b>	A	B	C	B	D	A	<b>B</b>
----------	---	---	---	---	---	---	----------

<b>Y</b>	B	D	C	A	B	<b>B</b>
----------	---	---	---	---	---	----------

$C[7 - 1, 6] + 0$

<b>X</b>	A	B	C	B	D	A	<b>B</b>
----------	---	---	---	---	---	---	----------

<b>Y</b>	B	D	C	A	B	<b>B</b>
----------	---	---	---	---	---	----------

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$

$$C[i, j]$$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

max

$$C[i-1, j-1] + 1$$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

$$C[i-1, j] + 0$$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

$$C[i, j-1] + 0$$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$

$$C[i, j]$$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

max

$$C[i-1, j-1] + 1$$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

$$C[i-1, j] + 0$$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

$$C[i, j-1] + 0$$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

问题：3个问题是否都需要求解？

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$ 
  - $C[i-1, j]$  比  $C[i-1, j-1]$  至多大1
  - $C[i, j-1]$  比  $C[i-1, j-1]$  至多大1

$$C[i, j]$$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

max

$C[i-1, j-1] + 1$					
$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$
$C[i-1, j] + 0$					
$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$
$C[i, j-1] + 0$					
$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$ 
  - $C[i-1, j]$  比  $C[i-1, j-1]$  至多大1
  - $C[i, j-1]$  比  $C[i-1, j-1]$  至多大1
  - $C[i-1, j-1] + 1$ , 另外两个+0

$$C[i, j]$$

<b>X</b>	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
<b>Y</b>	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

max

$$C[i-1, j-1] + 1$$

<b>X</b>	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
<b>Y</b>	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

$$C[i-1, j] + 0$$

<b>X</b>	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
<b>Y</b>	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

$$C[i, j-1] + 0$$

<b>X</b>	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
<b>Y</b>	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$ 
  - $C[i-1, j]$  比  $C[i-1, j-1]$  至多大1
  - $C[i, j-1]$  比  $C[i-1, j-1]$  至多大1
  - $C[i-1, j-1] + 1$ , 另外两个+0

$C[i, j]$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

max

$$C[i-1, j-1] + 1 \geq \max\{C[i, j-1], C[i-1, j]\}$$

$C[i-1, j-1] + 1$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

$C[i-1, j] + 0$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

$C[i, j-1] + 0$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪



# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$ 
  - $C[i-1, j]$  比  $C[i-1, j-1]$  至多大1
  - $C[i, j-1]$  比  $C[i-1, j-1]$  至多大1
  - $C[i-1, j-1] + 1$ , 另外两个+0

$C[i, j]$

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

max

$$C[i-1, j-1] + 1 \geq \max\{C[i, j-1], C[i-1, j]\}$$

$C[i-1, j-1] + 1$  已充分

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

$C[i-1, j] + 0$  非必要

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

$C[i, j-1] + 0$  非必要

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_{i-1}$	$x_i$
$Y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_{j-1}$	$y_j$

问题结构分析

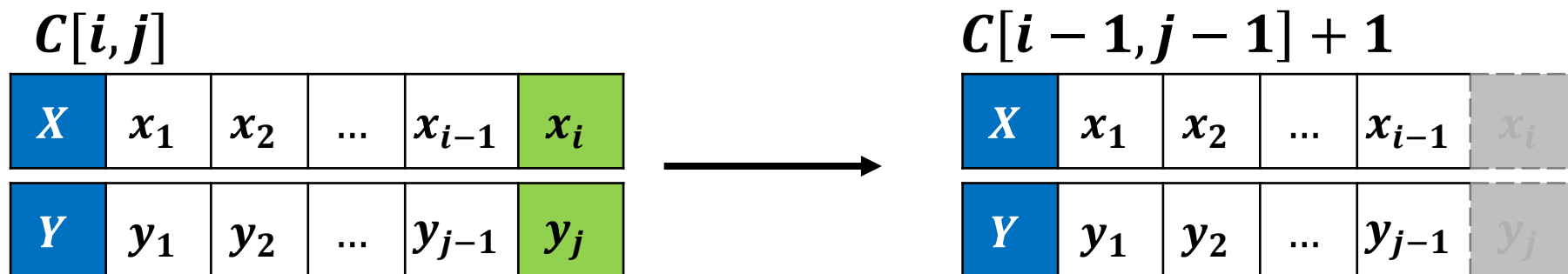
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$



问题结构分析

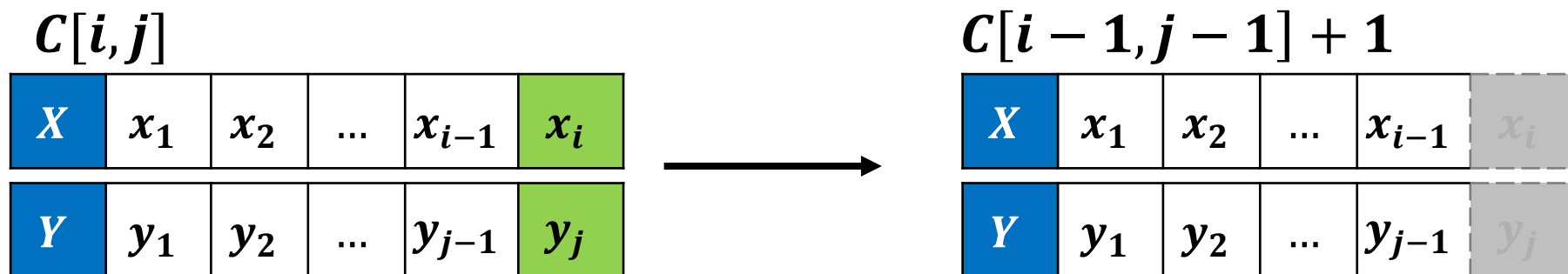
递推关系建立

自底向上计算

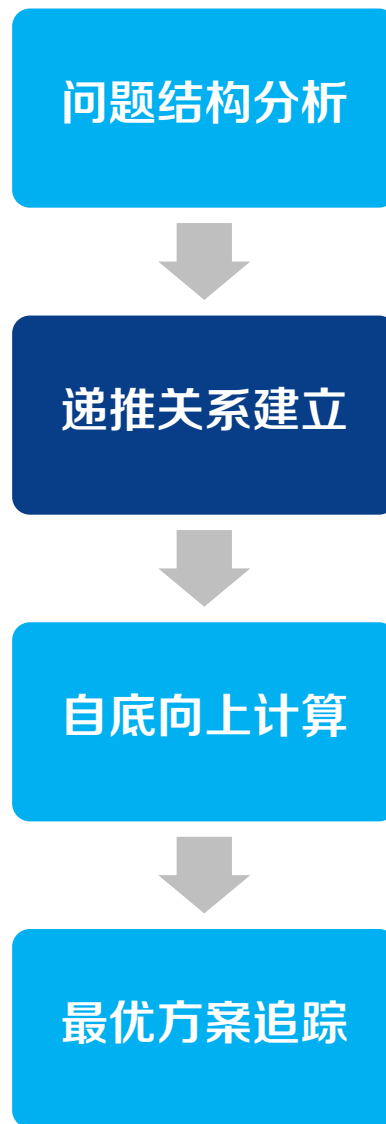
最优方案追踪

# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$

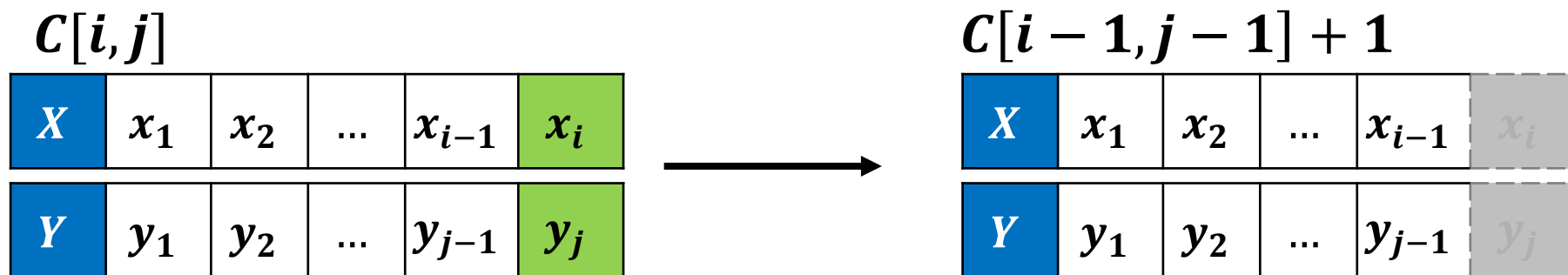


- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1$



# 递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$



- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1$

最优子结构

问题结构分析

递推关系建立

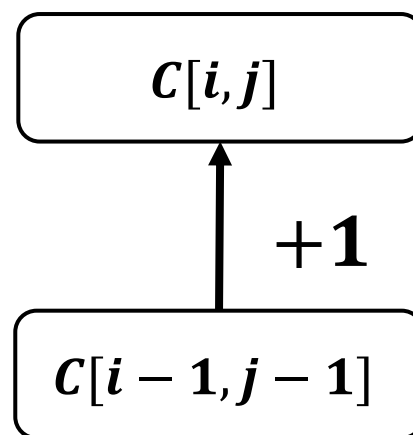
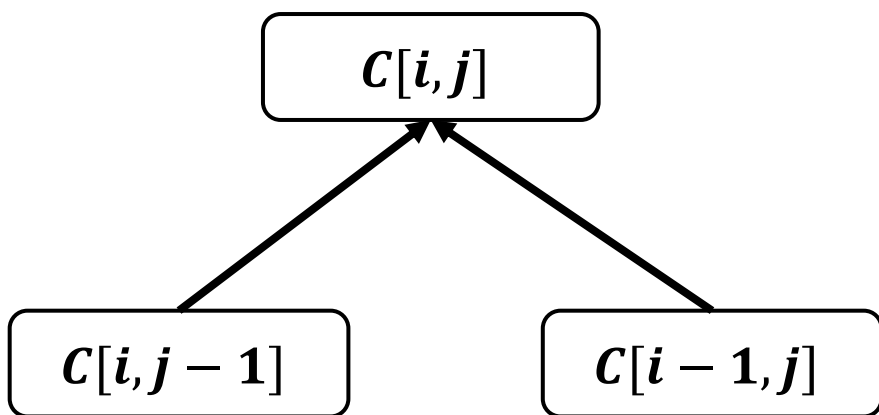
自底向上计算

最优方案追踪

# 递推关系建立：构造递推公式



- $$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1, & x_i = y_j \end{cases}$$



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 自底向上计算：确定计算顺序

- 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$\dots$	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
$\dots$					
$i = n$					

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 自底向上计算：确定计算顺序

## • 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0				
$i = 2$	0				
...	0				
$i = n$	0				

初始化

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

# 自底向上计算：确定计算顺序

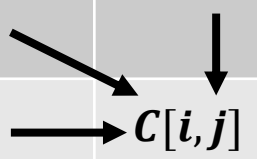
## • 初始化

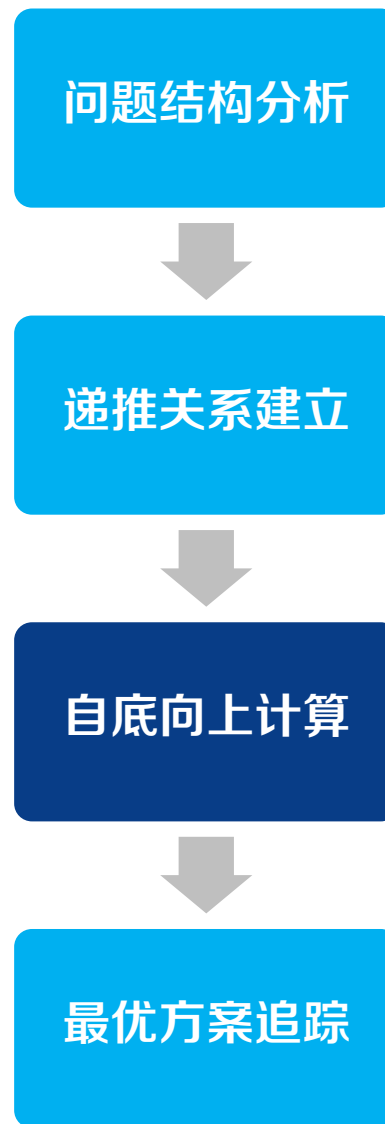
- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

## • 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1, & x_i = y_j \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0				
$i = 2$	0				
...	0				
$i = n$	0				







# 自底向上计算：确定计算顺序

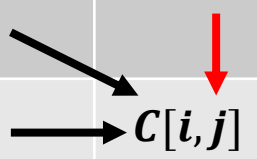
## • 初始化

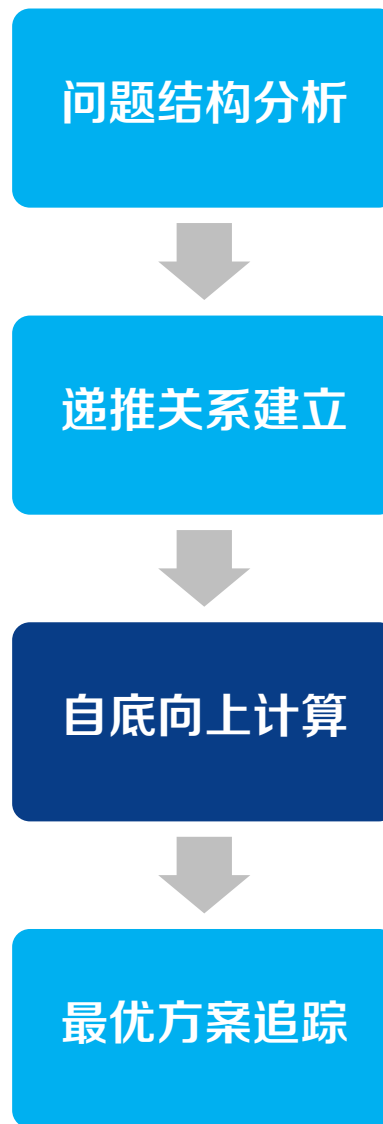
- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

## • 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1 & , x_i = y_j \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0				
$i = 2$	0				
...	0				
$i = n$	0				





# 自底向上计算：确定计算顺序

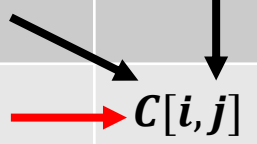
## • 初始化

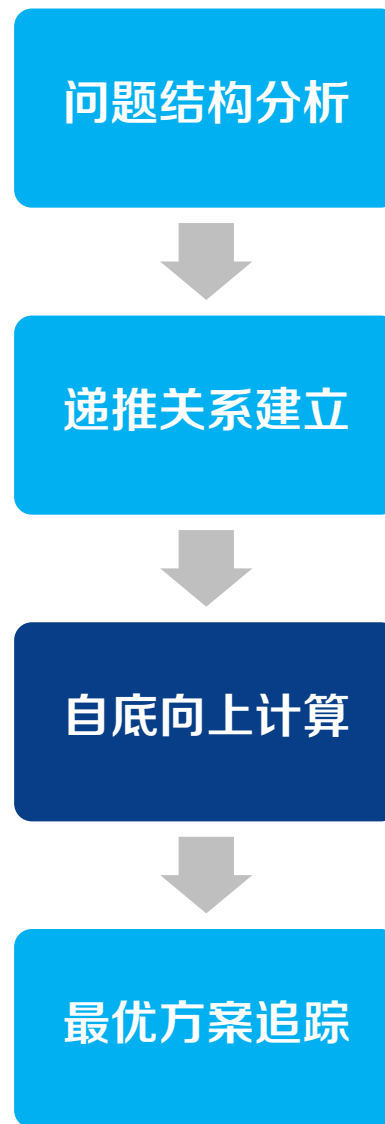
- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

## • 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1, & x_i = y_j \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0				
$i = 2$	0				
...	0				
$i = n$	0				





# 自底向上计算：确定计算顺序

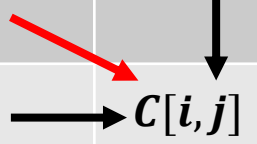
## • 初始化

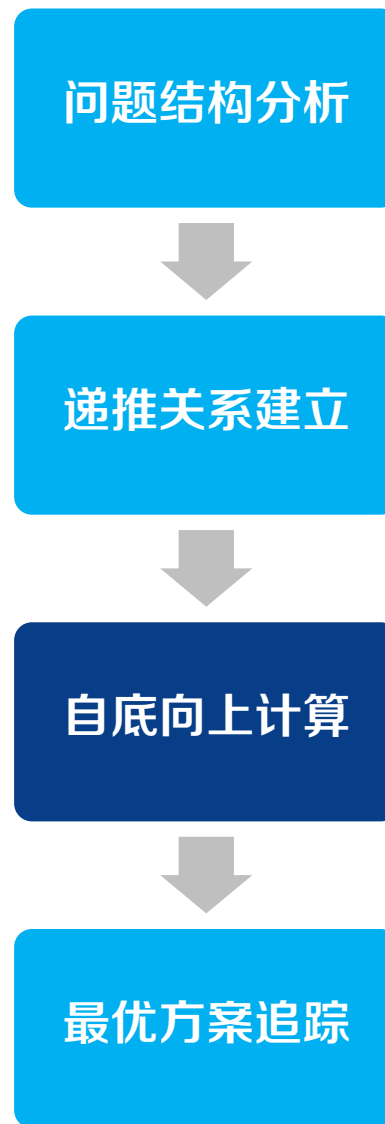
- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

## • 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ \mathbf{C[i-1, j-1]} + 1, & x_i = y_j \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0				
$i = 2$	0				
...	0				
$i = n$	0				





# 自底向上计算：依次求解问题

## • 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$ 
  - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

## • 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1 & , x_i = y_j \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0	→			
$i = 2$	0	←	→	→	→
...	0	←	→	→	→
$i = n$	0	←	→	→	→ ★

自底向上计算

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



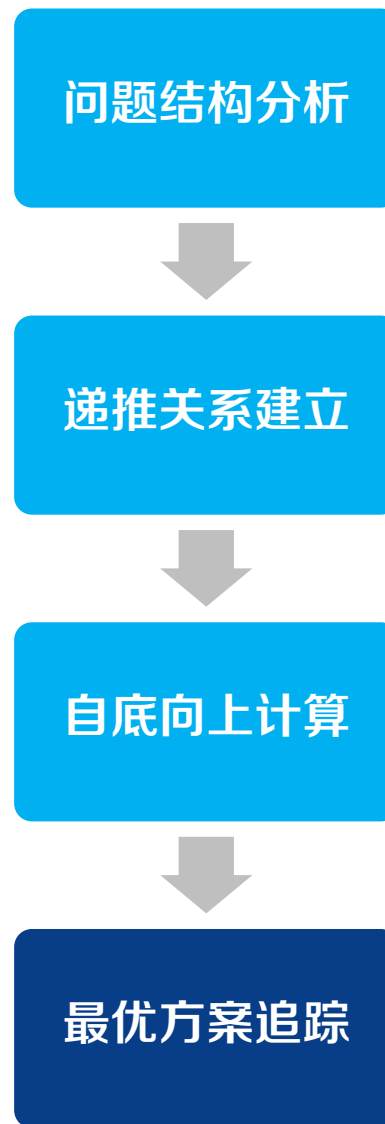
最优方案追踪

# 最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组 $rec[1..n]$ ，记录子问题来源

$$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j-1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
...					
$i = n$					



# 最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组 $rec[1..n]$ ，记录子问题来源

$$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j-1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$...$	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
$...$					
$i = n$					

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 最长公共子序列末尾为 $X[i] = Y[j]$

# 最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组 $rec[1..n]$ ，记录子问题来源

$$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j-1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
...					
$i = n$					

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

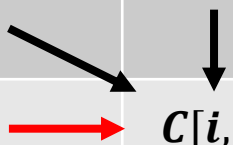
- 最长公共子序列在 $X[1..i-1]$ 和 $Y[1..j]$ 中

# 最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组  $rec[1..n]$ ，记录子问题来源

$$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j-1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
...					
$i = n$					



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 最长公共子序列在  $X[1..i]$  和  $Y[1..j-1]$  中



# 最优方案追踪：输出最优方案



- 输出最长公共子序列

- $$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j - 1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j - 1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$...$	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
$...$					
$i = n$					

$rec[] = L$

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 最长公共子序列在 $X[1..i]$ 和 $Y[1..j-1]$ 中

# 最优方案追踪：输出最优方案



- 输出最长公共子序列

- $$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j - 1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j - 1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
...					
$i = n$					

$rec[] = U$  (pointing to the cell at  $i=n, j=3$ )

$rec[] = L$  (pointing to the cell at  $i=n, j=4$ )

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 最长公共子序列在  $X[1..i - 1]$  和  $Y[1..j]$  中

# 最优方案追踪：输出最优方案



- 输出最长公共子序列

- $$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j - 1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j - 1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	...	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
...					
$i = n$					

Diagram illustrating the backtracking process for the Longest Common Subsequence (LCS) problem. The table shows the DP table  $C[i, j]$  and the corresponding backtracking path for the optimal solution. The path is marked by red dashed boxes and arrows, starting from the bottom-right cell  $(n, m)$  and moving towards the top-left. The labels  $rec[] = LU$ ,  $rec[] = U$ , and  $rec[] = L$  indicate the direction of the backtracking step at each cell.

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 最长公共子序列末尾为  $X[i] = Y[j]$

# 最优方案追踪：输出最优方案



- 输出最长公共子序列

- $$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j - 1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j - 1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$...$	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
$...$					
$i = n$					

Diagram illustrating the backtracking process for the Longest Common Subsequence (LCS) problem. Red dashed boxes highlight the sequence of cells traced back from the bottom-right corner to the top-left corner. Arrows indicate the direction of backtracking. Labels indicate the type of operation performed at each step:  $rec[] = LU$  (diagonal),  $rec[] = U$  (upward), and  $rec[] = L$  (leftward).

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
$Y_j$	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	$A$	$B$	$C$	$B$	$D$	$A$	$B$
$Y_j$	$B$	$D$	$C$	$A$	$B$	$A$	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

初始化

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$X_i \neq Y_j$

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$X_i \neq Y_j$

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						



# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$X_i \neq Y_j$

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$C[1, 1] = \max\{C[1, 0], C[0, 1]\}$

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U					
2						
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0				
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U				
2						
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0			
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U			
2						
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$X_i = Y_j$   $rec[]$

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1		
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$C[1, 4] = C[0, 3] + 1$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU		
2						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1		
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	
2						
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2						
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1					
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU					
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1				
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L				
3						
4						
5						
6						
7						



# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1			
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L			
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1		
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U		
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3						
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1					
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U					
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1				
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U				
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2			
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU			
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2		
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L		
4						
5						
6						
7						



# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4						
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1					
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU					
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1				
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U				
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2			
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U			
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2		
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U		
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	
5						
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5						
6						
7						



# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1					
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U					
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2				
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU				
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2			
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U			
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2		
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U		
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6						
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1					
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U					
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2				
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U				
7						



# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2			
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U			
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3		
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU		
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7						

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1					

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU					

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2				

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U				

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2			

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U			

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3		

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U		



# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	U	U	U	U	LU	U

最长公共子序列的长度

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

--	--	--	--

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

			A
--	--	--	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

			A
--	--	--	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

		B	A
--	--	---	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

		B	A
--	--	---	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U



# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

	C	B	A
--	---	---	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

	C	B	A
--	---	---	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

B	C	B	A
---	---	---	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

# 算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
$X_i$	A	B	C	B	D	A	B
$Y_j$	B	D	C	A	B	A	

B	C	B	A
---	---	---	---

最长公共子序列

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

- Longest-Common-Subsequence( $X, Y$ )

输入: 两个序列  $X, Y$

输出:  $X$  和  $Y$  的最长公共子序列

$n \leftarrow \text{length}(X)$

$m \leftarrow \text{length}(Y)$

//初始化

新建二维数组  $C[0..n, 0..m]$  和  $rec[0..n, 0..m]$

for  $i \leftarrow 0$  to  $n$  do

$C[i, 0] \leftarrow 0$

end

for  $j \leftarrow 0$  to  $m$  do

$C[0, j] \leftarrow 0$

end

序列长度

- Longest-Common-Subsequence( $X, Y$ )

输入: 两个序列  $X, Y$

输出:  $X$  和  $Y$  的最长公共子序列

$n \leftarrow \text{length}(X)$

$m \leftarrow \text{length}(Y)$

//初始化

新建二维数组  $C[0..n, 0..m]$  和  $rec[0..n, 0..m]$

for  $i \leftarrow 0$  to  $n$  do

$C[i, 0] \leftarrow 0$

end

for  $j \leftarrow 0$  to  $m$  do

$C[0, j] \leftarrow 0$

end

初始化

- Longest-Common-Subsequence( $X, Y$ )

//动态规划

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $X_i = Y_j$  then
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "LU"$ 
    end
    else if  $C[i - 1, j] \geq C[i, j - 1]$  then
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j]$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "U"$ 
    end
    else
       $C[i, j] \leftarrow C[i, j - 1]$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "L"$ 
    end
  end
end
return  $C, rec$ 
```

依次计算子问题

- Longest-Common-Subsequence( $X, Y$ )

//动态规划

for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do

for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do

if  $X_i = Y_j$  then

$C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$

$rec[i, j] \leftarrow "LU"$

end

else if  $C[i - 1, j] \geq C[i, j - 1]$  then

$C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j]$

$rec[i, j] \leftarrow "U"$

end

else

$C[i, j] \leftarrow C[i, j - 1]$

$rec[i, j] \leftarrow "L"$

end

end

end

return  $C, rec$

末尾相等



- Longest-Common-Subsequence( $X, Y$ )

//动态规划

for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do

    for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do

        if  $X_i = Y_j$  then

$C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$

$rec[i, j] \leftarrow "LU"$

        end

        else if  $C[i - 1, j] \geq C[i, j - 1]$  then

$C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j]$

$rec[i, j] \leftarrow "U"$

        end

        else

$C[i, j] \leftarrow C[i, j - 1]$

$rec[i, j] \leftarrow "L"$

        end

    end

end

return  $C, rec$

记录长度和决策

- Longest-Common-Subsequence( $X, Y$ )

//动态规划

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
```

```
  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
```

```
    if  $X_i = Y_j$  then
```

```
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$ 
```

```
       $rec[i, j] \leftarrow "LU"$ 
```

```
    end
```

```
    else if  $C[i - 1, j] \geq C[i, j - 1]$  then
```

```
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j]$ 
```

```
       $rec[i, j] \leftarrow "U"$ 
```

```
    end
```

```
  else
```

```
     $C[i, j] \leftarrow C[i, j - 1]$ 
```

```
     $rec[i, j] \leftarrow "L"$ 
```

```
  end
```

```
end
```

```
end
```

```
return  $C, rec$ 
```

末尾不等

- **Print-LCS( $rec, X, i, j$ )**

输入: 追踪数组 $rec$ , 序列 $X$ , 当前位置 $i$ 和 $j$

输出:  $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列

if  $i = 0$  or  $j = 0$  then

    | return NULL

end

if  $rec[i, j] = \text{"LU"}$  then

    | Print-LCS( $rec, X, i - 1, j - 1$ )

    | print  $x_i$

end

else if  $rec[i, j] = \text{"U"}$  then

    | Print-LCS( $rec, X, i - 1, j$ )

end

else

    | Print-LCS( $rec, X, i, j - 1$ )

end

倒序追踪方案

- **Print-LCS( $rec, X, i, j$ )**

输入: 追踪数组 $rec$ , 序列 $X$ , 当前位置 $i$ 和 $j$

输出:  $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列

```
if  $i = 0$  or  $j = 0$  then  
| return NULL  
end
```

递归终止: 序列长度为0

```
if  $rec[i, j] = \text{"LU"}$  then  
| Print-LCS( $rec, X, i - 1, j - 1$ )  
| print  $x_i$   
end
```

```
else if  $rec[i, j] = \text{"U"}$  then  
| Print-LCS( $rec, X, i - 1, j$ )  
end
```

```
else  
| Print-LCS( $rec, X, i, j - 1$ )  
end
```

- **Print-LCS( $rec, X, i, j$ )**

输入: 追踪数组 $rec$ , 序列 $X$ , 当前位置 $i$ 和 $j$

输出:  $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列

if  $i = 0$  or  $j = 0$  then

    return NULL

end

if  $rec[i, j] = \text{"LU"}$  then

    Print-LCS( $rec, X, i - 1, j - 1$ )

    print  $x_i$

end

else if  $rec[i, j] = \text{"U"}$  then

    Print-LCS( $rec, X, i - 1, j$ )

end

else

    Print-LCS( $rec, X, i, j - 1$ )

end

追踪方案: 末尾相等

- **Print-LCS( $rec, X, i, j$ )**

输入: 追踪数组 $rec$ , 序列 $X$ , 当前位置 $i$ 和 $j$

输出:  $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列

if  $i = 0$  or  $j = 0$  then

    | return NULL

end

if  $rec[i, j] = \text{"LU"}$  then

    | Print-LCS( $rec, X, i - 1, j - 1$ )

    | print  $x_i$

end

else if  $rec[i, j] = \text{"U"}$  then

    | Print-LCS( $rec, X, i - 1, j$ )

end

else

    | Print-LCS( $rec, X, i, j - 1$ )

end

追踪方案: 末尾不等

- Longest-Common-Subsequence( $X, Y$ )

//动态规划

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $X_i = Y_j$  then
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "LU"$ 
    end
    else if  $C[i - 1, j] \geq C[i, j - 1]$  then
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j]$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "U"$ 
    end
    else
       $C[i, j] \leftarrow C[i, j - 1]$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "L"$ 
    end
  end
end
return  $C, rec$ 
```

时间复杂度:  $O(n \cdot m)$