

## A. BENTUK UMUM LOGARITMA

Fungsi logaritma dinyatakan dengan persamaan  $y = {}^a\log f(x)$

Variabel  $a$  disebut bilangan pokok dengan syarat  $a > 0$  dan  $a \neq 1$

$f(x)$  disebut numerus dengan syarat  $f(x) > 0$

## B. SIFAT-SIFAT LOGARITMA

Misalkan  $a$  dan  $b$  adalah bilangan positif dengan  $a \neq 1$  maka berlaku sifat-sifat berikut.

1.  ${}^a\log b = c \Leftrightarrow b = a^c$
2.  ${}^a\log b \cdot {}^b\log c = {}^a\log c$
3.  ${}^a\log b = \frac{{}^k\log b}{{}^k\log a}, k > 0, k \neq 1$
4.  ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$
5.  ${}^a\log (b \cdot c) = {}^a\log b + {}^a\log c$
6.  ${}^a\log b^n = n \cdot {}^a\log b$
7.  ${}^a\log \frac{b}{c} = {}^a\log b - {}^a\log c$
8.  ${}^{a^m}\log b^n = \frac{n}{m} \cdot {}^a\log b$
9.  $(a)^{{}^a\log b} = b$

## C. PERSAMAAN LOGARITMA

Persamaan logaritma dinyatakan dalam bentuk berikut.

1.  ${}^a\log f(x) = p$  maka  $f(x) = a^p$  dengan  $f(x) > 0$
2.  ${}^a\log f(x) = {}^a\log p$  maka  $f(x) = p$  dengan  $f(x) > 0$
3.  ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$  maka  $f(x) = g(x)$  dengan  $f(x), g(x) > 0$
4.  ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$  maka  $f(x) = 1$

## CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Jika  $a = {}^9\log(\sqrt[3]{16})$  dan  $b = {}^2\log\left(\frac{1}{3}\right)$  maka  $ab = \dots$  (SNMPTN 2008)

- A.  $\frac{4}{3}$  D.  $-\frac{2}{3}$   
 B.  $\frac{2}{3}$  E.  $-\frac{4}{3}$   
 C.  $\frac{4}{9}$

### Pembahasan:

Diketahui:  $a = {}^9\log(\sqrt[3]{16})$ ;  $b = {}^2\log\left(\frac{1}{3}\right)$

Sesuai dengan sifat logaritma:

$$a^m \log b^n = \frac{n}{m} a \log b$$

$$\begin{aligned} a &= {}^9\log(\sqrt[3]{16}) \\ &= {}^{3^2}\log(2)^{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} ({}^3\log 2) \\ &= \frac{2}{3} ({}^3\log 2) \end{aligned}$$

$$b = {}^2\log\left(\frac{1}{3}\right) = {}^2\log 3^{-1} = -({}^2\log 3)$$

Jika  ${}^a\log b \cdot {}^b\log c = {}^a\log c$  maka nilai dari perkalian a dan b sebagai berikut.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \frac{2}{3} ({}^3\log 2) \cdot (-{}^2\log 3) \\ &= \frac{2}{3} (-1) ({}^3\log 3) \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Jawaban: D

2. Jika  $6(3^{40})({}^2\log a) + 3^{41}({}^2\log a) = 3^{43}$  maka nilai a adalah .... (SNMPTN 2011)

- A.  $\frac{1}{8}$  D. 8  
 B.  $\frac{1}{4}$  E. 16  
 C. 4

### Pembahasan:

$$\begin{aligned} 6(3^{40})({}^2\log a) + 3^{41}({}^2\log a) &= 3^{43} \\ \Leftrightarrow 3^{41}[2 \cdot {}^2\log a + {}^2\log a] &= 3^{43} \\ \Leftrightarrow [2+1] {}^2\log a &= \frac{3^{43}}{3^{41}} \\ \Leftrightarrow 3 {}^2\log a &= 3^2 \\ \Leftrightarrow {}^2\log a &= 3 \end{aligned}$$

Sesuai sifat  ${}^a\log b = c \Leftrightarrow b = a^c$   
 ${}^2\log a = 3 \Leftrightarrow a = 2^3 = 8$

Jadi, nilai a adalah 8.

Jawaban: D

## UJI PEMAHAMAN

1. Jika persamaan  ${}^x\log(2) + {}^x\log(3x-4) = 2$  mempunyai akar  $x_1$  dan  $x_2$  dengan  $x_1 > x_2$  maka  $x_1 - x_2 = \dots$  (SNMPTN 2008)
- A. 0 D. 3  
 B. 1 E. 4  
 C. 2
2. Nilai  $\left({}^a\log\frac{1}{b^2}\right)\left({}^a\log\frac{1}{c^2}\right)\left({}^a\log\frac{1}{a^3}\right) = \dots$  (SNMPTN 2010)
- A. -6 D. -12  
 B. -8 E. -14  
 C. -10

3. Jika  ${}^4\log 3 = k$  maka  ${}^2\log 27 = \dots$  (SNMPTN 2012)
- A.  $\frac{1}{6}k$  D.  $\sqrt[6]{k}$   
 B.  $k$  E.  $k^6$   
 C.  $6k$
4. Jika  $\frac{{}^3\log x}{{}^3\log w} = 2$  dan  ${}^{xy}\log w = \frac{2}{5}$  maka nilai  $\frac{{}^2\log w}{{}^2\log y} = \dots$  (SBMPTN 2013)
- A. 8 D. 2  
 B. 6 E. 1  
 C. 4
5. Jika  $p = ({}^a\log 2)({}^{a^b}\log 4)$ , maka  $\frac{1}{p} = \dots$  (SBMPTN 2014)
- A.  $2^2\log a + {}^2\log \sqrt{a} \cdot {}^2\log b$   
 B.  $2 \cdot {}^2\log a + \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(ab)$   
 C.  $({}^2\log a)^2 + \frac{1}{2} \cdot {}^2\log a \cdot {}^2\log b$   
 D.  $({}^2\log a)^2 + \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(ab)$   
 E.  $({}^2\log a)^2 + {}^2\log \sqrt{ab}$
6. Jika  $xy = 40$  dan  $\log x - \log y = 1$  maka  $x - y = \dots$  (SBMPTN 2015)
- A. 18 D. 24  
 B. 20 E. 25  
 C. 22
7. Jika  ${}^3\log 5 = x$  dan  ${}^2\log 3 = y$  maka  ${}^6\log 15$  sama dengan .... (UM UGM 2005)
- A.  $\frac{y(x+1)}{y+1}$  D.  $\frac{x}{y}$   
 B.  $\frac{x+1}{y+1}$  E.  $xy$   
 C.  $\frac{xy}{y+1}$
8. Jika  $x$  memenuhi  ${}^2\log {}^3\log(x+2) = 1$  dan  $y$  memenuhi  ${}^a\log(3y-1) {}^2\log a = 3$  maka nilai  $x+y$  adalah .... (UM UGM 2006)
- A. 16 D. 9  
 B. 13 E. 4  
 C. 10
9. Jika  ${}^3\log 8 = x$  dan  ${}^3\log 25 = y$  maka  ${}^3\log 15\sqrt[3]{16} = \dots$  (UM UGM 2007)
- A.  $9x+8y+18$  D.  $\frac{8x+9y+18}{18}$   
 B.  $\frac{9x+8y+18}{18}$  E.  $\frac{2x+3y+5}{7}$   
 C.  $8x+9y+18$
10. Jika  $2^x = a$  dan  $2^y = b$  dengan  $x, y > 0$ , maka  $\frac{2x+3y}{x+2y} = \dots$  (UM UGM 2009)
- A.  $\frac{3}{5}$  C.  $1 + {}^{ab}\log ab^2$   
 B.  $\frac{5}{3}$  E.  $1 + {}^{ab^2}\log ab$   
 D.  $1 + {}^{ab}\log a^2b$
11. Jika  $2^x = 2 - \sqrt{3}$  maka  ${}^{2+\sqrt{3}}\log 4^x = \dots$  (UM UGM 2010)
- A.  $-2$  D.  $\frac{1}{2}$   
 B.  $-\frac{1}{2}$  E. 2  
 C. 1
12. Jika  ${}^{x+y}\log 2 = a$  dan  ${}^{x-y}\log 8 = b$  dengan  $0 < y < x$  maka  ${}^4\log(x^2 - y^2) = \dots$  (UM UGM 2010)
- A.  $\frac{a+3b}{ab}$  D.  $\frac{3a+b}{2ab}$   
 B.  $\frac{a+b}{2ab}$  E.  $\frac{3a+b}{4ab}$   
 C.  $\frac{a+b}{4ab}$
13. Jika diketahui bahwa  ${}^a\log b + {}^b\log a = 1$  di mana  $a, b > 0$  dan  $a, b \neq 1$  maka nilai  $a+b = \dots$  (SIMAK UI 2011)
- A.  $\frac{a^2+1}{a}$  D.  $a^2$   
 B.  $2\sqrt{a}$  E.  $a^{1+\sqrt{2}}$   
 C.  $2a$

14. Jika solusi dari persamaan  $5^{x+5} = 7^x$  dapat dinyatakan dalam bentuk  $x = {}^a\log 5^5$  maka nilai  $a = \dots$  (SIMAK UI 2011)

- A.  $\frac{5}{12}$  D.  $\frac{12}{7}$   
 B.  $\frac{5}{7}$  E.  $\frac{12}{5}$   
 C.  $\frac{7}{5}$

15. Diketahui  $A = \begin{pmatrix} 2 & {}^z\log b \\ {}^a\log \frac{1}{z} & 1 \end{pmatrix}$  merupakan matriks singular. Maka  ${}^a\log b^3 a + {}^z\log a \cdot {}^b\log z^2 = \dots$  (SIMAK UI 2012)

- A. -10 D. 6  
 B. -6 E. 10  
 C. 0

16. Jika  $x_1$  dan  $x_2$  memenuhi  $\left({}^{(x-1)}\log 8\right)^2 = 9$ , maka nilai  $x_1 + x_2$  adalah .... (SBMPTN 2018)

- A.  $\frac{9}{2}$  D. 0  
 B. 3 E.  $-\frac{9}{2}$   
 C.  $\frac{3}{2}$

## PEMBAHASAN UJI PEMAHAMAN

1. Diketahui:  ${}^x\log(2) + {}^x\log(3x-4) = 2$  akar-akarnya  $x_1, x_2$  dengan  $x_1 > x_2$

$$\begin{aligned} {}^x\log 2 + {}^x\log(3x-4) &= 2 \\ {}^x\log 2(3x-4) &= {}^x\log x^2 \\ 6x-8 &= x^2 \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ (x-4)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Didapatkan nilai  $x_1 = 4$  dan  $x_2 = 2$   
 Jadi, nilai  $x_1 - x_2 = 4 - 2 = 2$

**Jawaban: C**

2.  $\left({}^a\log \frac{1}{b^2}\right) \left({}^a\log \frac{1}{c^2}\right) \left({}^a\log \frac{1}{a^3}\right)$   
 $= ({}^a\log b^{-2}) ({}^b\log c^{-2}) ({}^c\log a^{-3})$   
 $\left({}^a\log \frac{1}{b^2}\right) \left({}^a\log \frac{1}{c^2}\right) \left({}^a\log \frac{1}{a^3}\right)$   
 $= (-2)(-2)(-3) ({}^a\log b) ({}^b\log c) ({}^c\log a)$   
 $= -12 ({}^a\log c) ({}^c\log a)$   
 $= -12$

**Jawaban: D**

3. Diketahui:  ${}^4\log 3 = k$

$$k = {}^2\log 3 = \frac{1}{2} {}^2\log 3$$

$$2k = {}^2\log 3$$

Nilai dari  ${}^2\log 27$  didapatkan dari penyelesaian berikut.

$$\begin{aligned} {}^2\log 27 &= {}^2\log 3^3 \\ &= 3 {}^2\log 3 \\ &= 3(2k) \\ &= 6k \end{aligned}$$

**Jawaban: C**

4. Diketahui:  $\frac{{}^3\log x}{{}^3\log w} = 2$ ;

$${}^{xy}\log w = \frac{2}{5} \Rightarrow {}^w\log xy = \frac{5}{2}$$

$${}^w\log xy = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow {}^w\log x + {}^w\log y = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log x}{\log w} + {}^w \log y = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow {}^w \log y = \frac{5}{2} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log y}{\log w} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Jadi, nilai dari } \frac{{}^2 \log w}{{}^2 \log y} = \frac{2}{1} = 2$$

**Jawaban: D**

5. Diketahui:  $p = ({}^a \log 2)({}^{a^2 b} \log 4)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1}{({}^a \log 2)({}^{a^2 b} \log 4)} \\ &= \frac{({}^2 \log a)}{({}^{a^2 b} \log 2^2)} \\ &= \frac{1}{2} ({}^2 \log a) ({}^2 \log a^2 + {}^2 \log b) \\ &= \frac{1}{2} ({}^2 \log a) (2 {}^2 \log a + {}^2 \log b) \\ &= ({}^2 \log a)^2 + \left( \frac{1}{2} ({}^2 \log a) ({}^2 \log b) \right) \end{aligned}$$

**Jawaban: C**

6. Diketahui:  $xy = 40$ ;  $\log x - \log y = 1$

$$\log \frac{x}{y} = 1$$

$$\frac{x}{y} = 10 \Rightarrow x = 10y$$

Masukkan nilai x ke persamaan xy berikut.

$$xy = 40$$

$$\Leftrightarrow (10y)y = 40$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{40}{10}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{4} = 2$$

Substitusi nilai y maka didapatkan nilai  $x = 10(2) = 20$

Jadi, nilai dari  $x - y = 20 - 2 = 18$

**Jawaban: A**

7. Diketahui:  ${}^3 \log 5 = x$ ;  ${}^2 \log 3 = y$

$$\begin{aligned} {}^6 \log 15 &= \frac{{}^3 \log 15}{{}^3 \log 6} \\ &= \frac{{}^3 \log 5 + {}^3 \log 3}{{}^3 \log 2 + {}^3 \log 3} \\ &= \frac{x+1}{\frac{1}{y}+1} \\ &= \frac{y(x+1)}{y+1} \end{aligned}$$

**Jawaban: A**

8. Diketahui: x memenuhi  ${}^2 \log {}^3 \log(x+2) = 1$ ; y memenuhi  ${}^a \log(3y-1) {}^2 \log a = 3$

$${}^2 \log {}^3 \log(x+2) = 1 \Rightarrow {}^2 \log {}^3 \log(x+2) = {}^2 \log 2$$

Berlaku  ${}^a \log f(x) = {}^a \log p \Rightarrow f(x) = p$  dengan  $f(x) > 0$  untuk bentuk logaritma di atas.

$${}^3 \log(x+2) = 2$$

$$x+2 = 3^2$$

$$x = 9 - 2 = 7$$

Nilai y didapatkan dari penyelesaian berikut.

$$({}^a \log(3y-1)) {}^2 \log a = 3$$

$$\Leftrightarrow ({}^a \log(3y-1)) \cdot \frac{1}{{}^a \log 2} = 3$$

$$\Leftrightarrow ({}^a \log(3y-1)) = 3 {}^a \log 2$$

$$\Leftrightarrow ({}^a \log(3y-1)) = {}^a \log 2^3$$

$$\Leftrightarrow 3y - 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8+1}{3} = 3$$

Jadi, nilai dari  $x + y = 7 + 3 = 10$

**Jawaban: C**

9. Diketahui:  ${}^3 \log 8 = x \Rightarrow {}^3 \log 2 = \frac{x}{3}$ ;

$${}^3 \log 25 = y \Rightarrow {}^3 \log 5 = \frac{y}{2}$$

$$\begin{aligned}
{}^3\log 15\sqrt[3]{16} &= {}^3\log 15 + {}^3\log 16^{\frac{1}{3}} \\
&= ({}^3\log 5 \cdot 3) + \frac{1}{3} {}^3\log 2^4 \\
&= {}^3\log 5 + {}^3\log 3 + \frac{4}{3} {}^3\log 2 \\
&= \frac{y}{2} + 1 + \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{3} \right) \\
&= \frac{4x}{9} + \frac{y}{2} + 1 \\
&= \frac{8x + 9y + 18}{18}
\end{aligned}$$

**Jawaban: D**

10. Diketahui:  $2^x = a$  dan  $2^y = b$ ;  $x, y > 0$   
Bentuk pangkat diubah menjadi bentuk logaritma:  $x = {}^2\log a$ ;  $y = {}^2\log b$

$$\begin{aligned}
\frac{2x + 3y}{x + 2y} &= \frac{{}^2\log a^2 + {}^2\log b^3}{{}^2\log a + {}^2\log b^2} \\
&= \frac{{}^2\log a^2 b^3}{{}^2\log ab^2} \\
&= ab^2 \log a^2 b^3 \\
&= ab^2 \log ab^2 + ab^2 \log ab \\
&= 1 + ab^2 \log ab
\end{aligned}$$

**Jawaban: E**

11. Diketahui:  $2^x = 2 - \sqrt{3}$   
Penyetaraan bentuk akar:

$$2^x = 2 - \sqrt{3} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$$

Penyelesaian bentuk logaritma tersebut sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
{}^{2+\sqrt{3}}\log 4^x &= {}^{2+\sqrt{3}}\log (2^x)^2 \\
&= {}^{2+\sqrt{3}}\log (2 - \sqrt{3})^2 \\
&= {}^{2+\sqrt{3}}\log ((2 + \sqrt{3})^{-1})^2 \\
&= {}^{2+\sqrt{3}}\log (2 + \sqrt{3})^{-2} \\
&= -2
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } {}^{2+\sqrt{3}}\log 4^x = -2$$

**Jawaban: A**

12. Diketahui:  ${}^{x+y}\log 2 = a$ ;  ${}^{x-y}\log 8 = b$  dengan  $0 < y < x$

$${}^{x+y}\log 2 = a \Rightarrow {}^2\log (x+y) = \frac{1}{a}$$

$${}^{x-y}\log 8 = b \Rightarrow 3 {}^{x-y}\log 2 = b \Rightarrow {}^2\log (x-y) = \frac{3}{b}$$

Penyelesaian bentuk logaritma:

$$\begin{aligned}
{}^4\log (x^2 - y^2) &= {}^2\log (x+y)(x-y) \\
&= \frac{1}{2} ({}^2\log (x+y) + {}^2\log (x-y)) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{3}{b} \right) \\
&= \left( \frac{3a + b}{2ab} \right)
\end{aligned}$$

**Jawaban: D**

13. Diketahui:  ${}^a\log b + {}^b\log a = 1$ ;  $a, b > 0$  dan  $a, b \neq 1$

$${}^a\log b + {}^b\log a = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot {}^a\log b + \frac{1}{2} \cdot {}^b\log a = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} ({}^a\log b + {}^b\log a) = 1$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log b + \frac{1}{{}^a\log b} = 2$$

$$\Leftrightarrow ({}^a\log b)^2 + 1 = 2 ({}^a\log b)$$

$$\Leftrightarrow ({}^a\log b)^2 - 2 ({}^a\log b) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow ({}^a\log b - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log b = 1$$

Jika  ${}^a\log b = 1$  maka  $a^1 = b \Leftrightarrow a = b$

Jadi, nilai dari  $a + b = a + a = 2a$

**Jawaban: C**

14. Diketahui:  $x = {}^a\log 5^5$  solusi persamaan  $5^{x+5} = 7^x$

$$5^{x+5} = 7^x \Leftrightarrow \log 5^{x+5} = \log 7^x$$

$$\Leftrightarrow (x+5)\log 5 = x\log 7$$

$$\Leftrightarrow x\log 5 + 5\log 5 = x\log 7$$

$$\Leftrightarrow 5\log 5 = x\log 7 - x\log 5$$

$$\Leftrightarrow \log 5^5 = x\log\left(\frac{7}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log 5^5}{\log\left(\frac{7}{5}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{7}{5}\right)\log 5^5$$

Jadi, nilai  $a = \frac{7}{5}$ .

**Jawaban: C**

15. Diketahui: matriks singular

$$A = \begin{pmatrix} 2 & {}^z\log b \\ {}^a\log \frac{1}{z} & 1 \end{pmatrix}$$

Jika A adalah matriks singular maka  $\det(A) = 0$

$$\det(A) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 1 - {}^a\log \frac{1}{z} \cdot {}^z\log b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - {}^a\log z^{-1} \cdot {}^z\log b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + {}^a\log z \cdot {}^z\log b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + {}^a\log b = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log b = -2$$

Jadi, penyelesaian dari perhitungan logaritma tersebut sebagai berikut.

$${}^a\log b^3 + {}^z\log a \cdot {}^b\log z^2$$

$$= {}^a\log b^3 + {}^a\log a + {}^b\log z^2 \cdot {}^z\log a$$

$$= 3 {}^a\log b + 1 + 2 {}^b\log a$$

$$= 3(-2) + 1 + 2\left(\frac{1}{-2}\right)$$

$$= -6 + 1 - 1 = -6$$

**Jawaban: B**

16.  $\left({}^{(x-1)}\log 8\right)^2 = 9$

Ingat!  ${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$

$$\left(\frac{\log 8}{\log(x-1)}\right)^2 = 9$$

$$\frac{\log^2 8}{\log^2(x-1)} = 9$$

$$\log^2(x-1) = \frac{\log^2 8}{9}$$

$$\log(x-1) = \frac{\log 8}{3} \text{ atau } -\frac{\log 8}{3}$$

$$\log(x-1) = \log \sqrt[3]{8} \text{ atau } \log \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$$

$$\log(x-1) = \log 2 \text{ atau } \log \frac{1}{2}$$

$$x-1 = 2 \text{ atau } x-1 = \frac{1}{2}$$

$$x = 3 \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Jadi, } x_1 + x_2 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

**Jawaban: A**