

KOMPOSISI DAN INVERS

MODUL
27

A. ISTILAH DAN NOTASI FUNGSI

Suatu fungsi memetakan anggota himpunan A tepat satu pada himpunan B sehingga dinyatakan dengan notasi berikut.

$$f : A \rightarrow B$$

Notasi fungsi lainnya adalah $y = f(x)$ dibaca y merupakan fungsi dari x.

Istilah-istilah yang terdapat dalam fungsi sebagai berikut.

1. Himpunan A disebut daerah asal (domain).
2. Himpunan B disebut daerah kawan (kodomain)
3. Himpunan bagian B yang berpasangan dengan A disebut daerah hasil (range).
4. Relasi dari himpunan A ke himpunan B terjadi jika ada anggota A dan B yang berpasangan.

B. FUNGSI KOMPOSISI

Jika diketahui fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ maka dapat disusun fungsi baru sebagai berikut.

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
2. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Kedua fungsi di atas disebut fungsi komposisi dan memiliki beberapa sifat sebagai berikut.

1. $f \circ g \neq g \circ f$
2. I adalah fungsi identitas yang mana $I(x) = x$ sehingga berlaku $I \circ f \neq f \circ I$ dan $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

C. FUNGSI INVERS

Suatu fungsi mempunyai fungsi invers jika fungsi itu berkorespondensi satu-satu. Invers dari $f(x)$ dinotasikan $f^{-1}(x)$, jika $f(x) = y$ maka $f^{-1}(y) = x$. Pada invers fungsi dan komposisi berlaku sifat berikut.

1. $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$
2. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
3. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
4. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Jika $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ dan g adalah invers dari

fungsi f , maka $g(5) = \dots$ (SNMPTN 2008)

- A. $-\frac{12}{25}$ D. $-\frac{15}{25}$
 B. $-\frac{13}{25}$ E. $-\frac{16}{25}$
 C. $-\frac{14}{25}$

Pembahasan:

Jika g adalah invers dari fungsi f maka $f^{-1}(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \\ \Leftrightarrow y^2 &= \frac{1}{2x+1} \\ \Leftrightarrow (2x+1)y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{1-y^2}{y^2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1-y^2}{2y^2} \end{aligned}$$

$$\text{Artinya } f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1-y^2}{2y^2}$$

Jadi, nilai dari $g(5)$ sebagai berikut.

$$g(5) = \frac{1-(5)^2}{2(5)^2} = \frac{1-25}{50} = \frac{-24}{50} = -\frac{12}{25}$$

Jawaban: A

2. Jika $g(x+1) = 2x-1$ dan $f(g(x+1)) = 2x+4$ maka $f(0) = \dots$ (SNMPTN 2010)

- A. 6 D. -4
 B. 5 E. -6
 C. 3

Pembahasan:

$$f(g(x+1)) = 2x+4$$

$$f(2x-1) = 2x+4$$

$$\text{Misalkan } m = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{m+1}{2}$$

$$f(m) = 2\left(\frac{m+1}{2}\right) + 4 = m+5$$

Didapatkan $f(x) = x+5$

$$\text{Jadi, } f(0) = 0+5 = 5$$

Jawaban: B

UJI PEMAHAMAN

1. Jika $f(x) = x^2+2$ dan $g(x) = \sqrt{x-1}$, daerah asal fungsi $f \circ g$ adalah (SNMPTN 2007)
- A. $-\infty < x < \infty$ D. $x \geq 1$
 B. $1 \leq x \leq 2$ E. $x \geq 2$
 C. $x \geq 0$
2. Jika $f(x-1) = \frac{x-1}{2-x}$ dan f^{-1} adalah invers dari fungsi f maka $f^{-1}(x+1) = \dots$ (SNMPTN 2008)
- A. $-\frac{1}{x+1}$ D. $\frac{x-1}{x-2}$
 B. $\frac{1}{x+1}$ E. $\frac{2x+1}{x+2}$
 C. $\frac{x+1}{x+2}$
3. Jika $f(x-1) = x+2$ dan $g(x) = \frac{2-x}{x+3}$, nilai $(g^{-1} \circ f)(1)$ adalah (SNMPTN 2011)
- A. -6 D. $\frac{1}{4}$
 B. -2 E. 4
 C. $-\frac{1}{6}$
4. Jika $f(x) = ax+3, a \neq 0$, dan $f^{-1}(f^{-1}(9)) = 3$, nilai $a^2 + a + 1$ adalah (SNMPTN 2012)

- A. 11
B. 9
C. 7
- D. 5
E. 3

5. Jika $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2-x}{1+3x}$ maka nilai a yang memenuhi $f(a-1) = -5$ adalah (SNMPTN 2013)

- A. 3
B. 2
C. 1
- D. $-\frac{1}{2}$
E. -1

6. Jika $g(x-2) = \frac{x-4}{x+2}$ dan $f(x) = x^2+3$ maka $(f \circ g^{-1})(2) = \dots$ (SBMPTN 2014)

- A. 103
B. 104
C. 130
- D. 134
E. 143

7. Diketahui suatu fungsi bersifat $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap bilangan real x . Jika $f(3) = -5$ dan $f(-5) = 1$ maka $f(f(-3)) = \dots$ (SBMPTN 2015)

- A. -5
B. -2
C. -1
- D. 1
E. 2

8. Jika $f(x-2) = \frac{1}{2+5x}$ maka $f^{-1}(x) = \dots$ (SBMPTN 2015)

- A. $\frac{1+12x}{5x}$
B. $\frac{1-12x}{5x}$
C. $\frac{1-2x}{5x}$
- D. $\frac{1+2x}{5x}$
E. $\frac{1}{12+5x}$

9. Jika fungsi $f(x) = 2x+a+b$ dan $g(x) = bx+1$ memenuhi $(f \circ g)(x) = 2(g(x))$ maka $a+b = \dots$ (SBMPTN 2016)

- A. -2
B. -1
C. 0
- D. 1
E. 2

10. Jika fungsi f dan g mempunyai invers dan memenuhi $g(x-2) = f(x+2)$ maka $g^{-1}(x) = \dots$ (SBMPTN 2016)

- A. $f^{-1}(x)+4$
B. $4-f^{-1}(x)$
C. $f^{-1}(x+4)$
- D. $-f^{-1}(x)-4$
E. $f^{-1}(x)-4$

11. Jika $f(x) = x^2+2$ dan $g(x) = -3x+8$ maka nilai maksimum fungsi $(g \circ f)$ adalah (SBMPTN 2017)

- A. 0
B. 1
C. 2
- D. 3
E. 4

12. Diketahui $f(x) = 2x-1$ dan $g(x) = \frac{5x}{x+1}$. Jika h adalah fungsi sehingga $(g \circ h)(x) = x-2$ maka $(h \circ f)(x) = \dots$ (UM UGM 2009)

- A. $\frac{2x-3}{2x+8}$
B. $\frac{2x-3}{-2x+6}$
C. $\frac{2x-3}{2x-8}$
- D. $\frac{2x-3}{-2x+8}$
E. $\frac{2x-3}{-2x-8}$

13. Jika $f(x+1) = 2x$ dan $(f \circ g)(x+1) = 2x^2+4x-2$ maka $g(x) = \dots$ (SIMAK UI 2009)

- A. x^2-1
B. x^2-2
C. x^2+2x
- D. x^2+2x-1
E. x^2+2x-2

14. Jika $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}$ dan $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+7}}$ maka $g(x+2) = \dots$ (UM UGM 2010)

- A. $\frac{1}{x+3}$
B. $\frac{1}{x-2}$
C. $(x-2)$
- D. $(x+3)$
E. $(x+5)$

15. Diketahui $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ dan $g(x) = 3x$. Jumlah semua nilai x yang mungkin sehingga $f(g(x)) = g(f(x))$ adalah (SIMAK UI 2011)

- A. $-\frac{4}{3}$
B. $-\frac{3}{4}$
C. $\frac{3}{4}$
- D. $\frac{4}{3}$
E. 2

17. Jika $f(x) = -\frac{1}{x}$ dan $(f \circ g)(x) = 1 - \frac{3}{x+5}$, maka himpunan penyelesaian $g(x) > 2f(x)$ adalah **(SBMPTN 2018)**

A. $\{x \mid x < -4 \text{ atau } x > -2\}$
B. $\{x \mid x < -2 \text{ atau } x > 1\}$

- C. $\{x \mid -4 < x < -2 \text{ atau } 0 < x < 1\}$
D. $\{x \mid -2 < x < 0 \text{ atau } 0 < x < 1\}$
E. $\{x \mid x < -4 \text{ atau } -2 < x < 0 \text{ atau } x > 1\}$

18. Diketahui f dan g merupakan fungsi yang mempunyai invers. Jika $f(g(x)) = x + 1$ dan $g(x + 2) = x - 4$, maka $f^{-1}(2) + g^{-1}(2) = \dots$
(SBMPTN 2018)

A. -5
B. -3
C. 1
D. 3
E. 5

PEMBAHASAN UJI PEMAHAMAN

1. Diketahui: $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = \sqrt{x-1}$
Domain $f \circ g$ = Domain g
 $g(x) = \sqrt{x-1}$
 $x-1 \geq 0$
 $x \geq 1$

Jadi, daerah asal fungsi $f \circ g$ adalah $x \geq 1$

Jawaban: D

2. Diketahui: $f(x-1) = \frac{x-1}{2-x}$

$$f(x-1) = \frac{x-1}{2-x}$$
$$f(x) = \frac{(x+1)-1}{2-(x+1)} = \frac{x}{1-x}$$

Invers dari fungsi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a} \\ f^{-1}(x) &= \frac{-x}{-x-1} = \frac{x}{x+1} \\ f^{-1}(x+1) &= \frac{(x+1)}{(x+1)+1} = \frac{x+1}{x+2} \end{aligned}$$

Jawaban: C

3. Diketahui: $f(x-1) = x+2$; $g(x) = \frac{2-x}{x+3}$
 Jika $g(x) = \frac{2-x}{x+3}$ maka inversnya adalah
 $g^{-1}(x) = \frac{-3x+2}{x+1}$

Jika $f(x-1)=x+2$ maka $f(x)=x+3$

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f)(x) &= g^{-1}(f(x)) \\&= \frac{-3(x+3)+2}{(x+3)+1} \\&= \frac{-3x-9+2}{x+4} \\&= \frac{-3x-7}{x+4}\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari

$$(g^{-1} \circ f)(1) = \frac{-3(1) - 7}{(1) + 4} = \frac{-10}{5} = -2$$

Jawaban: B

4. Diketahui: $f(x) = ax + 3, a \neq 0, f^{-1}(f^{-1}(9)) = 3$

$$f(x) = ax + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{a}$$

$$f^{-1}(f^{-1}(9)) = 3$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{6}{a}\right)=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 - 3}{a} = 3$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3a = 3a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a = 2$$

Jadi, nilai dari $a^2 + a + 1 = 2 + 1 = 3$

Jawaban: E

5. Diketahui: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2-x}{1+3x}$

Jika $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2-x}{1+3x}$ maka $f(x) = \frac{2-\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{3}{x}\right)}$

Nilai a didapatkan dari persamaan berikut.

$$\begin{aligned} f(a-1) &= \frac{2-\frac{1}{a-1}}{1+\frac{3}{a-1}} \\ \Leftrightarrow -5 &= \frac{2(a-1)-1}{(a-1)+3} \\ \Leftrightarrow -7(a-1) &= 14 \\ \Leftrightarrow a-1 &= -2 \\ \Leftrightarrow a &= -1 \end{aligned}$$

Jawaban: E

6. Diketahui: $g(x-2) = \frac{x-4}{x+2}$; $f(x) = x^2+3$

$$g(x) = \frac{(x+2)-4}{(x+2)+2} = \frac{x-2}{x+4}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{-4x-2}{x-1}$$

Jadi, nilai dari $(f \circ g^{-1})(2)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f \circ g^{-1}(2) &= f(g^{-1}(2)) \\ &= f\left(\frac{-4(2)-2}{2-1}\right) \\ &= f(-10) \\ &= (-10)^2 + 3 = 103 \end{aligned}$$

Jawaban: A

7. Diketahui: $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap bilangan real x

Jika $f(3) = -5$ dan $f(-5) = 1$ maka nilai $f(f(-3))$ sebagai berikut.

$$f(f(-3)) = f(5) = -1$$

Jawaban: C

8. Diketahui: $f(x-2) = \frac{1}{2+5x}$

$$f(x-2) = \frac{1}{2+5x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2+5(x+2)} = \frac{1}{5x+12}$$

Invers fungsi $f(x)$ didapatkan dari penyelesaian berikut.

$$x = \frac{1}{5y+12}$$

$$5y = \frac{1}{x} - 12$$

$$y = \frac{1}{5} \left(\frac{1-12x}{x} \right)$$

$$\text{Jadi, nilai dari } f^{-1}(x) = \frac{1-12x}{5x}$$

Jawaban: B

9. Diketahui: $f(x) = 2x+a+b$; $g(x) = bx+1$;

$$(f \circ g)(x) = 2(g(x))$$

$$(f \circ g)(x) = 2(bx+1) + a + b$$

$$= 2bx + 2 + a + b$$

$$2(g(x)) = 2(bx+1) = 2bx + 2$$

Jadi, nilai dari $a+b$ sebagai berikut.

$$(f \circ g)(x) = 2(g(x))$$

$$\Leftrightarrow 2bx + 2 + a + b = 2bx + 2$$

$$\Leftrightarrow a + b = 0$$

Jawaban: C

10. Diketahui: $g(x-2) = f(x+2)$

$$g(x-2) = f(x+2)$$

$$g(x) - 2 = f(x) + 2$$

$$g(x) = f(x) + 4$$

$$f(x) = g(x) - 4$$

$$g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - 4$$

Jawaban: E

11. Diketahui: $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = -3x + 8$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= -3(x^2 + 2) + 8$$

$$= -3x^2 - 6 + 8$$

$$= -3x^2 + 2$$

Nilai maksimum didapat dari turunan
 $(g \circ f)(x) = 0$

$$(g \circ f)'(x) = -6x \Leftrightarrow x = 0$$

Jadi, nilai maksimum fungsi $(g \circ f)(x)$ adalah

$$(g \circ f)(0) = -3(0)^2 + 2 = 2$$

Jawaban: C

12. Diketahui: $f(x) = 2x - 1$; $g(x) = \frac{5x}{x+1}$;
 $(g \circ h)(x) = x - 2$

Fungsi h dicari dari fungsi komposisi
 $(g \circ h)(x)$ berikut.

$$g(h(x)) = \frac{5h(x)}{h(x)+1} = x - 2$$

$$\Leftrightarrow 5h(x) = (h(x)+1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 5h(x) = xh(x) - 2h(x) + x - 2$$

$$\Leftrightarrow (7-x)h(x) = x - 2$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{x-2}{7-x}$$

Fungsi $(h \circ f)(x)$ adalah sebagai berikut.

$$h(f(x)) = \frac{(2x-1)-2}{7-(2x-1)}$$

$$= \frac{2x-3}{-2x+8}$$

$$\text{Jadi, } (h \circ f)(x) = \frac{2x-3}{-2x+8}$$

Jawaban: D

13. Diketahui: $f(x+1) = 2x$;

$$(f \circ g)(x+1) = 2x^2 + 4x - 2$$

$$(f \circ g)(x+1) = f(g(x+1))$$

$$2(g(x+1)) = 2x^2 + 4x - 2$$

$$g(x+1) = x^2 + 2x - 1$$

Misalkan: $m = x + 1 \Rightarrow x = m - 1$

$$g(m) = (m-1)^2 + 2(m-1) - 1$$

$$= m^2 - 2m + 1 + 2m - 2 - 1$$

$$= m^2 - 2$$

$$\text{Jadi, } g(x) = x^2 - 2$$

Jawaban: B

14. Diketahui: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}$;

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+7}}$$

$$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+7}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(g^2(x))-2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+7}}$$

$$\Leftrightarrow g^2(x) - 2 = x^2 + 6x + 7$$

$$\Leftrightarrow g^2(x) = x^2 + 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow g^2(x) = (x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow g(x) = (x+3)$$

$$\text{Jadi, } g(x+2) = (x+2+3) = (x+5)$$

Jawaban: E

15. Diketahui: $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; $g(x) = 3x$;

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

$$f(g(x)) = f(3x) = \frac{3x-1}{3x+1}$$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{3x-3}{x+1}$$

$f(g(x)) = g(f(x))$ sehingga diperoleh

$$\frac{3x-1}{3x+1} = \frac{3x-3}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x+1) = (3x+1)(3x-3)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 = 9x^2 - 9x + 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 9x^2 - 6x - 3$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 8x - 2 = 0$$

Jika x_1 dan x_2 adalah penyelesaian persamaan di atas maka jumlahnya didapatkan dari rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat berikut.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{6} = \frac{4}{3}$$

Jadi, jumlah semua nilai x yang mungkin

$$\text{adalah } \frac{4}{3}.$$

Jawaban: D

16. Diketahui: $g(x) = (f \circ f \circ f)(x)$; $f(0) = 0$;
 $f'(0) = 2$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'((f \circ f)(x)) \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x) \\ \Leftrightarrow g'(0) &= f'((f \circ f)(0)) \cdot f'(f(0)) \cdot f'(0) \\ \Leftrightarrow g'(0) &= f'(f(0)) \cdot f'(0) \cdot f'(0) \\ \Leftrightarrow g'(0) &= f'(0) \cdot f'(0) \cdot f'(0) \\ \Leftrightarrow g'(0) &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow g'(0) &= 8 \end{aligned}$$

Jawaban: D

17. Diketahui: $f(x) = -\frac{1}{x}$;

$$(f \circ g)(x) = 1 - \frac{3}{x+5}$$

$$f(g(x)) = \frac{x+2}{x+5}$$

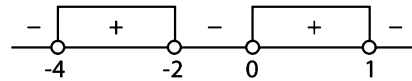
$$-\frac{1}{g(x)} = \frac{x+2}{x+5}$$

$$g(x) = \frac{-x-5}{x+2}$$

Penyelesaian
 $g(x) > 2f(x)$:

pertidaksamaan

$$\begin{aligned} \frac{-x-5}{x+2} &> -\left(\frac{2}{x}\right) \\ \frac{-x-5}{x+2} + \frac{2}{x} &> 0 \\ \frac{(-x-5)x + 2(x+2)}{(x+2)x} &> 0 \\ \frac{-x^2 - 3x + 4}{(x+2)x} &> 0 \\ \frac{(x+4)(-x+1)}{(x+2)x} &> 0 \end{aligned}$$



Jadi, himpunan penyelesaian yang tepat adalah $\{x \mid -4 < x < -2 \text{ atau } 0 < x < 1\}$.

Jawaban: C

18. Diketahui: fungsi f dan g memiliki invers
 Jika $f(g(x)) = x+1$ dan $g(x+2) = x-4$
 maka

$$f(g(x+2)) = x+3$$

$$f(x-4) = x+3$$

Misalkan $m = x-4 \Rightarrow x = m+4$

$$f(m) = m+7$$

$$f(x) = x+7$$

Fungsi invers dari f dan g :

$$f^{-1}(x) = x-7 \Rightarrow f^{-1}(2) = 2-7 = -5$$

$$g^{-1}(x) = x+6 \Rightarrow g^{-1}(2) = 2+6 = 8$$

Penyelesaian dari persamaan berikut.

$$f^{-1}(2) + g^{-1}(2) = (-5) + 8 = 3$$

Jawaban: D