

A. PERSAMAAN FUNGSI KUADRAT

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$ atau $y = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$. Dalam bentuk tersebut x disebut variabel bebas, a adalah koefisien x^2 , b adalah koefisien x , dan c adalah konstanta.

Persamaan fungsi kuadrat dapat ditentukan sebagai berikut.

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ jika parabola melalui tiga titik sebarang.
2. $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ jika parabola memotong sumbu X di titik x_1 dan x_2 $[(x_1, 0), (x_2, 0)]$ dan nilai a diperoleh dari satu titik lain.
3. $f(x) = a(x - x_p)^2 + y_p$ jika diketahui titik puncak (x_p, y_p) dan nilai a diperoleh dari satu titik lain.

B. CIRI-CIRI GRAFIK FUNGSI KUADRAT

Fungsi kuadrat memiliki variabel bebas x yang nilainya tidak terbatas dan dapat diplot dalam sebuah grafik membentuk grafik parabola. Jika diplot pada diagram kartesian, $f(x)$ akan mewakili nilai y (sumbu Y) sehingga $f(x)$ sama dengan y .

a. Bentuk dan Letak Grafik Berdasarkan Koefisien Fungsi Kuadrat

Posisi dan bentuk parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ bergantung pada nilai a , b , dan c -nya.

1. Nilai a

Nilai ini menentukan arah parabola, yaitu terbuka ke atas atau ke bawah.

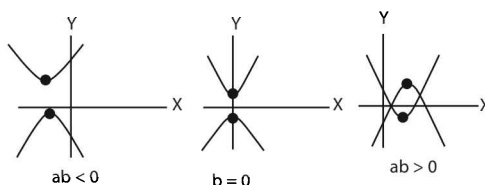
- $a > 0$ maka parabola terbuka ke atas sehingga akibatnya nilai minimum
- $a < 0$ maka parabola terbuka ke bawah sehingga akibatnya nilai maksimum



2. Nilai b

Tanda nilai b terkait tanda nilai a , yakni menentukan letak titik puncak parabola. Tanda ini maksudnya adalah nilai positif atau negatif tanpa memperhatikan besarnya.

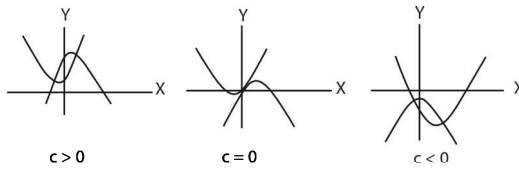
- Jika tanda $a = b$ maka puncak di sebelah kiri sumbu Y
- Jika tanda $a \neq b$ maka puncak di sebelah kanan sumbu Y



3. Nilai c

Nilai c menunjukkan perpotongan grafik dengan sumbu Y sebagai berikut.

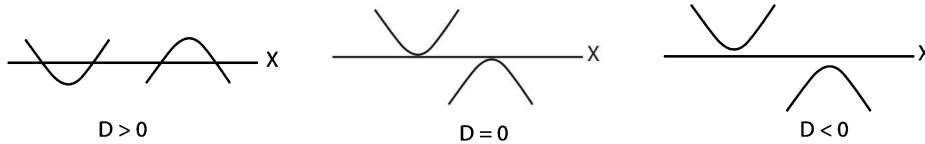
- Jika $c > 0$ maka grafik memotong sumbu Y positif
- Jika $c < 0$ maka grafik menyinggung sumbu Y negatif
- Jika $c = 0$ maka grafik memotong sumbu Y di pusat $(0,0)$



b. Kedudukan Parabola pada Sumbu X

Posisi parabola juga ditentukan oleh nilai diskriminan ($D = b^2 - 4ac$) fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Jika $D > 0$ maka grafik memotong sumbu X di dua titik yang berbeda
- Jika $D = 0$ maka grafik menyinggung sumbu X
- Jika $D < 0$ maka grafik tidak memotong sumbu X



c. Titik Puncak dan Sumbu Simetri Parabola

Titik puncak dan sumbu simetri parabola dari fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ ditentukan sebagai berikut.

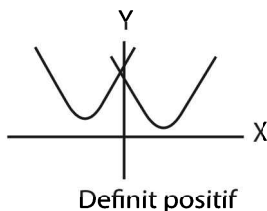
$$(x_p, y_p) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a} \right) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$$

d. Definit Positif dan Definit Negatif

Bentuk definit ditentukan oleh nilai diskriminan ($D = b^2 - 4ac$) dan nilai a dari fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$.

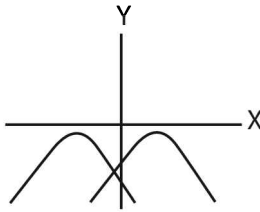
1. Definit positif

Pada bentuk ini, kurva selalu berada di atas sumbu X sehingga nilai fungsi kuadrat selalu positif untuk semua nilai x . Syarat definit positif adalah $D < 0$ dan $a > 0$.



2. Definit negatif

Pada bentuk ini, kurva selalu berada di bawah sumbu X sehingga nilai fungsi kuadrat selalu negatif untuk semua nilai x . Syarat definit negatif adalah $D < 0$ dan $a < 0$.



Definit negatif

C. MENGGESER GRAFIK FUNGSI KUADRAT

Grafik fungsi kuadrat dapat juga ditentukan dengan menggeser grafik fungsi kuadrat lain. Teknik menggeser ini memerlukan kemampuan mengubah bentuk umum fungsi kuadrat ke bentuk kuadrat sempurnanya. Misalkan $y = ax^2 + bx + c$ bentuk kuadrat sempurnanya $y = k(x \pm a)^2 \pm b$.

a. Jika a adalah bilangan positif

- Grafik $y = f(x + a)$ artinya menggeser grafik $y = f(x)$ sejauh a ke arah kiri sumbu X (sumbu X negatif).
- Grafik $y = f(x - a)$ artinya menggeser grafik sejauh a ke arah kanan sumbu X (sumbu X positif).

b. Jika b adalah bilangan positif

- Grafik $y = f(x) + b$ artinya menggeser grafik $y = f(x)$ sejauh b ke arah atas sumbu Y (sumbu Y positif).
- Grafik $y = f(x) - b$ artinya menggeser grafik $y = f(x)$ sejauh b ke arah bawah sumbu Y (sumbu Y negatif).

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 - (2a - 4)x + (a + 4)$ selalu bernilai positif untuk nilai a yang memenuhi (SNMPTN 2007)

- A. $a \geq 2$ D. $a > \frac{1}{2}$
 B. $a > 2$ E. $a > 0$
 C. $a \geq \frac{1}{2}$

Pembahasan:

Nilai fungsi kuadrat selalu positif untuk semua nilai x berarti grafik parabola berbentuk definit positif. Syarat definit positif adalah $D < 0$ dan $a > 0$.

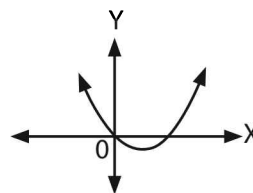
$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &< 0 \\ (-(2a - 4))^2 - 4(a)(a + 4) &< 0 \\ 4a^2 - 16a + 16 - 4a^2 - 16a &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -32a + 16 &< 0 \\ -32a &< -16 \\ a &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

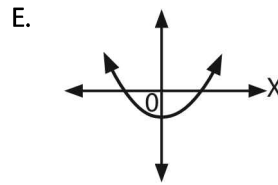
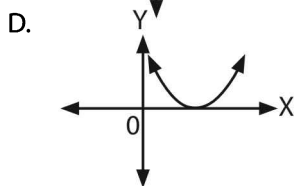
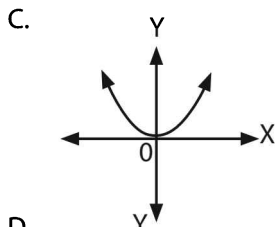
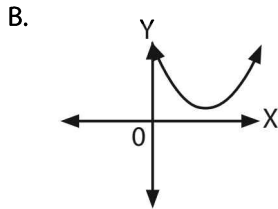
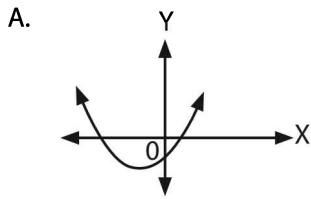
Jadi, fungsi kuadrat tersebut selalu bernilai positif untuk nilai $a > \frac{1}{2}$.

Jawaban: D

2. Fungsi $f(x) = x^2 + ax$ mempunyai grafik berikut.

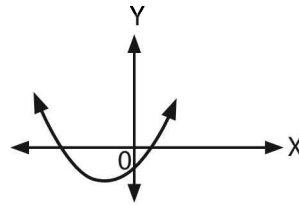


Grafik fungsi $g(x) = x^2 - ax - 5$ adalah (SNMPTN 2010)



Pembahasan:

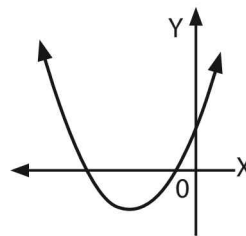
Grafik $g(x) = x^2 - ax - 5$ memiliki nilai $a > 0$ sehingga parabola terbuka ke atas dan nilai $c < 0$ maka grafik menyinggung sumbu Y negatif. Jadi, grafik yang tepat untuk fungsi kuadrat tersebut adalah pilihan jawaban A sebagai berikut.



Jawaban: A

UJI PEMAHAMAN

- Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 7$ dapat diperoleh dengan cara menggeser grafik fungsi $f(x) = x^2$ ke arah (SNMPTN 2009)
 - kanan sumbu X sejauh 2 satuan dan ke arah bawah sumbu Y sejauh 3 satuan
 - kiri sumbu X sejauh 3 satuan dan ke arah atas sumbu Y sejauh 2 satuan
 - kanan sumbu X sejauh 3 satuan dan ke arah bawah sumbu Y sejauh 2 satuan
 - kanan sumbu X sejauh 6 satuan dan ke arah bawah sumbu Y sejauh 7 satuan
 - kiri sumbu X sejauh 2 satuan dan ke arah atas sumbu Y sejauh 3 satuan
- Grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$ ditunjukkan berikut ini.



Pernyataan yang benar adalah (SNMPTN 2011)

- $ab > 0$ dan $a + b + c > 0$
- $ab < 0$ dan $a + b + c > 0$
- $ab < 0$ dan $a + b + c \leq 0$
- $ab < 0$ dan $a + b + c < 0$
- $ab < 0$ dan $a + b + c \geq 0$

3. Jika f adalah fungsi kuadrat yang grafik melalui titik $(1, 0)$, $(4, 0)$, dan $(0, -4)$, nilai $f(7)$ adalah **(SNMPTN 2012)**
 A. -16 D. -19
 B. -17 E. -20
 C. -18
4. Untuk $0 < a < 10$, fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + 2ax + 10$ memenuhi sifat **(SBMPTN 2014)**
 A. selalu negatif
 B. selalu positif
 C. hanya positif di setiap x , dengan $0 < x < 10$
 D. hanya negatif di setiap x , dengan $0 < x < 10$
 E. hanya positif di setiap x , dengan $x < 0$ atau $x > 10$
5. Jika grafik fungsi kuadrat mempunyai titik puncak $(8, 4)$ dan memotong sumbu X negatif maka **(SBMPTN 2013)**
 A. $a > 0, b > 0$, dan $c > 0$
 B. $a < 0, b < 0$, dan $c > 0$
 C. $a < 0, b > 0$, dan $c < 0$
 D. $a > 0, b > 0$, dan $c < 0$
 E. $a < 0, b > 0$, dan $c > 0$
6. Titik P dan Q masing-masing mempunyai absis $2p$ dan $-3p$ terletak pada parabola $y = x^2 - 1$. Jika garis g tegak lurus PQ dan menyinggung parabola tersebut maka garis g memotong sumbu Y di titik **(SBMPTN 2014)**
 A. $\frac{1}{4p^2} - 1$ D. $\frac{p^2 - 1}{4}$
 B. $-\frac{1}{4p^2} + 1$ E. $\frac{1}{4p^2} + 1$
 C. $-\frac{1}{4p^2} - 1$
7. Grafik fungsi kuadrat $y = f(x)$ mempunyai titik puncak $(-1, 8)$ dan memotong sumbu X di $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$. Jika $x_1 \cdot x_2 = -3$ maka grafik tersebut memotong sumbu Y di **(UM UGM 2010)**
 A. $(0, -10)$ D. $(0, 6)$
 B. $(0, -2)$ E. $(0, 10)$
 C. $(0, 4)$
8. Parabola $y = -x^2 + 2ax + a - 2$ dan garis $y = ax + a - 2$ berpotongan di (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) . Jika $x_1 + x_2 = 2$ maka $y_1 + y_2 = \dots$ **(UM UGM 2013)**
 A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3
 E. 4
9. Parabola $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ memotong sumbu X pada $x = p$ dan $x = 2p$, $p \neq 0$. Nilai $c - b > 0$ terpenuhi apabila **(UM UGM 2015)**
 A. $-\frac{3}{2} < p < 0$
 B. $p < -\frac{3}{2}$ atau $p > 0$
 C. $p < -\frac{3}{2}$ atau $p > \frac{3}{2}$
 D. $0 < p < \frac{3}{2}$
 E. $p < 0$ atau $p > \frac{3}{2}$
10. Diketahui ordinat titik puncak fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah 2. Jika $f(2) = f(4) = 0$ maka $a + b + c = \dots$ **(UM UGM 2016)**
 A. -10
 B. -6
 C. -4
 D. 4
 E. 6
11. Diketahui b merupakan suatu bilangan bulat dan p merupakan suatu bilangan prima. Jika grafik $y = x^2 + bx + p$ memotong sumbu X negatif di dua titik berbeda, maka nilai $b - p$ adalah **(SBMPTN 2018)**
 A. -2 D. 1
 B. -1 E. 2
 C. 0

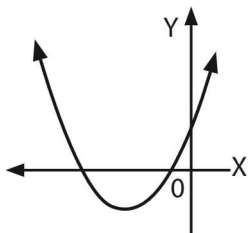
PEMBAHASAN UJI PEMAHAMAN

1. Diketahui: grafik $f(x) = x^2 - 6x + 7$ didapatkan dari menggeser grafik $f(x) = x^2$
 $f(x) = x^2 - 6x + 7$
 $= (x - 3)^2 - 2$

Berdasarkan bentuk di atas maka didapatkan grafik $y = f(x - a)$ dan $y = f(x) - b$. Jadi, grafik tersebut diperoleh dengan menggeser grafik $f(x) = x^2$ ke arah sumbu X positif sejauh 3 satuan dan ke arah sumbu Y negatif sejauh 2 satuan.

Jawaban: C

2. Diketahui: fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$



Analisis grafik di atas sebagai berikut.

- Grafik berada di sebelah kiri sumbu Y dan nilai $b \neq 0$ berarti nilai $ab < 0$.
- Grafik memotong sumbu X di dua titik sehingga nilai $D > 0$ sehingga jumlah ketiga nilai tersebut tidak mungkin sama dengan nol.

Jadi, pernyataan yang benar adalah $ab < 0$ dan $a + b + c > 0$.

Jawaban: B

3. Diketahui: grafik fungsi kuadrat melalui titik $(1, 0)$, $(4, 0)$, dan $(0, -4)$
 Melalui dua titik $(1, 0)$ dan $(4, 0)$ berarti grafik tersebut memotong sumbu X di dua titik, yakni $[(x_1, 0), (x_2, 0)]$. Fungsi kuadratnya dapat disusun dengan persamaan berikut.
 $f(x) = a(x - 1)(x - 4)$
 Nilai a dapat diketahui dari satu titik lainnya, yakni memasukkan titik $(0, -4)$ ke fungsi tersebut.

$$-4 = a(0 - 1)(0 - 4)$$

$$-4 = a(-1)(-4)$$

$$a = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\text{Didapatkan } f(x) = -(x - 1)(x - 4)$$

Jadi, nilai dari

$$f(7) = -(7 - 1)(7 - 4) = -(6)(3) = -18$$

Jawaban: C

4. Diketahui: fungsi kuadrat
 $f(x) = ax^2 + 2ax + 10$, $0 < a < 10$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (2a)^2 - 4(a)(10)$$

$$= 4a^2 - 40a$$

Misalkan untuk $a = 1$

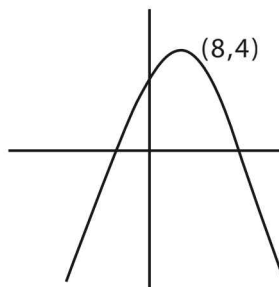
$$D = 4(1)^2 - 40(1) = -36$$

Didapatkan nilai $D < 0$ dan $a > 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut berbentuk definit positif.

Jadi, fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + 2ax + 10$ memenuhi sifat selalu positif untuk semua nilai x .

Jawaban: B

5. Diketahui: fungsi kuadrat $(x_p, y_p) = (8, 4)$ dan memotong sumbu X negatif



Berdasarkan grafik tersebut maka parabola membuka ke bawah atau $a < 0$, memotong sumbu X negatif berarti $b > 0$, dan memotong sumbu Y positif berarti $c > 0$. Jadi, jawaban yang tepat adalah $a < 0$, $b > 0$, dan $c > 0$.

Jawaban: E

6. Diketahui: parabola $y = x^2 - 1$, absis (x) titik P (2p), Q (-3p)
Substitusikan nilai absis ke persamaan tersebut maka akan didapat koordinat.
P(2p, $4p^2 - 1$) dan Q(-3p, $9p^2 - 1$)

Garis antara kedua titik tersebut.

$$\begin{aligned}\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ \Leftrightarrow \frac{y - (4p^2 - 1)}{(9p^2 - 1) - (4p^2 - 1)} &= \frac{x - 2p}{-3p - 2p} \\ \Leftrightarrow \frac{y - 4p^2 + 1}{5p^2} &= \frac{x - 2p}{-5p} \\ \Leftrightarrow y - 4p^2 + 1 &= p(2p - x) \\ \Leftrightarrow y &= 6p^2 - px + 1\end{aligned}$$

Jika garis g tegak lurus PQ dan menyinggung parabola maka gradien garis

$$g, m_g = \frac{1}{p}$$

Titik singgung:

$$\begin{aligned}y' = m_g \Rightarrow 2x &= \frac{1}{p} \Rightarrow x = \frac{1}{2p} \\ y &= f\left(\frac{1}{2p}\right) = \left(\frac{1}{2p}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4p^2} - 1\end{aligned}$$

Persamaan garis g:

$$\begin{aligned}y - y_1 &= m(x - x_1) \\ \Leftrightarrow y - \left(\frac{1}{4p^2} - 1\right) &= \frac{1}{p}\left(x - \frac{1}{2p}\right)\end{aligned}$$

Garis g memotong sumbu Y artinya $x = 0$

Jadi, garis g memotong sumbu Y di titik

$$y = \frac{-1}{4p^2} - 1$$

Jawaban: C

7. Diketahui: titik puncak (-1,8); titik potong ($x_1, 0$) dan ($x_2, 0$); $x_1 \cdot x_2 = -3$
Persamaan fungsi kuadrat dengan titik puncak (x_p, y_p) = (-1,8) dengan satu titik lain = a:

$$\begin{aligned}f(x) &= a(x - x_p)^2 + y_p \\ &= a(x + 1)^2 + 8 \\ &= a^2 + 2ax + (a + 8)\end{aligned}$$

Hasil kali kedua titik potong $x_1 \cdot x_2 = -3$

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \\ -3 &= \frac{a + 8}{a} \\ -3a &= a + 8 \\ -4a &= 8 \\ a &= -2\end{aligned}$$

Untuk $a = -2$ maka $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu Y ($x = 0$) adalah di (0, 6).

Jawaban: D

8. Diketahui: parabola $y = -x^2 + 2ax + a - 2$; garis $y = ax + a - 2$ dan berlaku $x_1 + x_2 = 2$
Titik potong (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}-x^2 + 2ax + a - 2 &= ax + a - 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - ax &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 &= a\end{aligned}$$

Jika berlaku $x_1 + x_2 = 2$ maka $0 + a = 2 \Rightarrow a = 2$

Persamaan y dicari dengan substitusi nilai a ke persamaan garis.

$$\begin{aligned}y &= ax + a - 2 \\ y &= 2x + 2 - 2 \\ y &= 2x\end{aligned}$$

Substitusi nilai x sebagai berikut.

$$\begin{aligned}x_1 = 0 &\Rightarrow y_1 = 2(0) = 0 \\ x_2 = 2 &\Rightarrow y_2 = 2(2) = 4\end{aligned}$$

Jadi, nilai $y_1 + y_2 = 0 + 4 = 4$

Jawaban: E

9. Diketahui: parabola $y = ax^2 + bx + c$ memotong sumbu X di $x_1 = p$ dan $x_2 = 2p$, $p \neq 0$
Fungsi kuadrat parabola tersebut dapat disusun sebagai berikut.

$$\begin{aligned}f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ y &= a(x - p)(x - 2p) \\ &= a(x^2 - 3px + 2p^2) \\ &= ax^2 - 3pax + 2p^2a\end{aligned}$$

maka didapatkan $b = -3ap$ dan $c = 2p^2a$
 $c - b > 0$

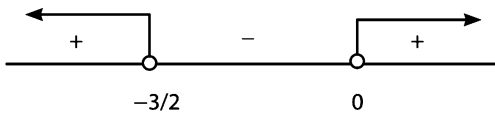
$$\Leftrightarrow 2p^2a - (-3ap) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2p^2a + 3ap > 0$$

$$\Leftrightarrow ap(2p + 3) > 0 \quad (\text{dibagi } a)$$

$$\Leftrightarrow p(2p + 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow p = 0 \vee p = -\frac{3}{2}$$



Nilai yang diminta adalah yang lebih besar dari nol ($c - b > 0$) sehingga intervalnya adalah yang positif. Jadi, interval nilai p agar memenuhi $c - b > 0$ adalah $p < -\frac{3}{2} \vee p > 0$.

Jawaban: B

10. Diketahui: $f(x) = ax^2 + bx + c$, ordinat $y_p = 2$; $f(2) = f(4) = 0$

Dari $f(2) = f(4) = 0$ didapatkan $x_1 = 2, x_2 = 4$

$$\text{maka } x_p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Titik puncak $(x_p, y_p) = (3, 2)$

Fungsi kuadrat dengan titik puncak $(x_p, y_p) = (3, 2)$ dan $f(x) = f(2) = 0$ dapat disusun dengan persamaan berikut.

$$y = a(x - x_p)^2 + y_p$$

$$0 = a(2 - 3)^2 + 2$$

$$0 = a + 2$$

$$a = -2$$

Substitusi nilai a sehingga didapatkan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$y = -2(x - 3)^2 + 2$$

$$y = -2(x^2 - 6x + 9) + 2$$

$$y = -2x^2 + 12x - 18 + 2$$

$$y = -2x^2 + 12x - 16$$

Dari fungsi tersebut didapatkan nilai $a = -2, b = 12, c = -16$

Jadi, nilai $a + b + c = -2 + 12 + (-16) = -6$

Jawaban: B

11. Diketahui: b bilangan bulat
 p bilangan prima

Grafik $y = x^2 + bx + p$ memotong sumbu X negatif di dua titik berbeda maka:

- koefisien x^2 sama tandanya dengan koefisien x (b positif)
- titik potong parabola pada sumbu Y positif (p positif)
- Diskriminan > 0 ($b^2 - 4p > 0$)

maka, $b^2 - 4p > 0$

$$b^2 > 4p$$

misal $P = 2$ (bilangan prima), maka $b = 3$ (bilangan bulat)

Jadi, $b - p = 3 - 2 = 1$

Jawaban: D