Домашнее задание №1

Ахмаджонов Мумтозбек Б05-927

Задача 1.

Построить матрицу поворота на угол φ вокруг точки $A(a, b)$ на плоскости.

Решение:

Будем предполагать, что точка задается в виде 3х-мерного вектор-столбца: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. Т.е. $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда все просто, т.е. нам нужно перейти в новую систему координат, где A является началом кооординат. Потом повернуть и вернуться в исходную систему координат. Математически, это выглядит вот так:

$$R'_\varphi = T^{-1} R_\varphi T$$

, где T - матрица перехода в новую систему координат, а R_φ - матрица поворота на угол φ. Матрица перехода, которая тут является просто матрицей сдвига выглядит вот так:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

А матрица поворота на угол:

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $R'_\varphi = T^{-1} R_\varphi T$

Задача 3.

Построить матрицу поворота на угол φ вокруг прямой L в 3D-пространстве проходящей через точку $A = (a, b, c)$ и имеющей направляющий вектор (l, m, n) с единичным модулем.

Решение:

Как и в предыдущей задаче будем представлять точки в пространстве 4х-мерными вектор-столбцами. Тогда $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$. Логика снова такая же, т.е. переходим в новую систему координат повернем там и вернемся в исходную. Переход в новую систему координат осуществляется совмещением прямой L с осью, например z и сдвигом точки A в начало координат. Совмещение в свою очередь по теореме Эйлера -- это два поворота: вокруг оси x на угол ψ, вокруг оси y на угол θ. Тогда итоговый ответ выражается в виде:

$$R_L(\varphi) = Q^{-1} R_z(\varphi) Q,$$
$$Q = R_y(\theta) \cdot R_x(\psi) \cdot T(a, b, c)$$
$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$d = \sqrt{m^2 + n^2} \implies \sin\psi = \frac{m}{d}, \ \cos\psi = \frac{n}{d} \implies$$
$$\implies R_x(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & -\frac{m}{d} & 0 \\ 0 & \frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sin\theta = \frac{l}{1}, \ \cos\theta = \frac{d}{1} \implies R_y(\theta) = \begin{bmatrix} d & 0 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ответ:

$$R_L(\varphi) = T(-a, -b, -c) \cdot R_x(-\psi) \cdot R_y(-\theta) \cdot R_z(\varphi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\psi) \cdot T(a, b, c)$$

Задача 8.

Пусть первый поворот совершается вокруг оси x на угол $\frac{\pi}{2}$, а второй - вокруг оси y на тот же угол.

Найдите результирующий поворот.

Решение:

основываясь на теоритическом материале, имеем

$$q_i = \cos\frac{\varphi_i}{2} + v_i \sin\frac{\varphi_i}{2}, i = 1, 2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$$

$$q_2 \cdot q_1 = \frac{1}{2} \cdot (1+i) \cdot (1+j) = \frac{1}{2} \cdot (1+i+j+(-k)) = \frac{1}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \sin\frac{\pi}{6}.$$

Значит, результирующий угол равен: $\frac{\pi}{3}$

Ответ: поворот вокруг оси $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ на угол $\frac{\pi}{3}$.