Ахмаджонов Мумтозбек Б05-927б

Домашнее задание №1

Задача 1.

Доказать:

$$S - \text{выпукло} \iff \forall \alpha, \beta \geqslant 0 \ \alpha S + \beta S = (\alpha + \beta)S.$$

Решение:

$\Rightarrow$ Очевидно, что $(\alpha + \beta)S \subseteq \alpha S + \beta S \ \forall \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$. Для обратного вложения воспользуемся выпуклостью S:

$$\forall x, y \in S, \theta \in [0,1] \ \exists! z \in S : \theta x + (1-\theta)y = z.$$

Зафиксируем произвольные $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$, и положим $\theta = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, тогда:

$$\forall x, y \in S \ \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}y \in S \Longrightarrow \alpha x + \beta y \in (\alpha+\beta)S \Longrightarrow \alpha S + \beta S \subseteq (\alpha+\beta)S.$$

Очевидно что такое рассуждение верно для любых $\alpha \geqslant 0 \ \& \ \beta \geqslant 0$. Значит мы добились обратного вложения, из чего следует, что если S - выпукло, то

$$\forall \alpha \geqslant 0, b \geqslant 0 \ \alpha S + \beta S = (\alpha + \beta)S.$$

$\Leftarrow$ раз эти можества равны, имеем

$$\forall a \in \alpha S + \beta S \ \exists! b \in (\alpha+\beta)S : \ a = b.$$

Значит:

$$\forall x, y \in S: \ \alpha x + \beta y \in (\alpha+\beta)S \Longrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y \in S$$
$$\theta := \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \in [0,1], 1-\theta = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \Longrightarrow \forall x, y \in S \ \theta x + (1-\theta)y \in S.$$

В силу произвольности неотрицательных α и β можем сгенерировать произвольную $\theta \in [0,1]$, и так получаем, что S действительно выпукло. □

Задача 2.

Пусть $S_1, S_2, \cdots, S_n$ - произвольные непустые множества в $\mathbb{R}^k$. Докажите, что:

1. $cone\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} cone(S_i)$
2. $conv\left(\sum\limits_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} conv(S_i)$

Решение:

1. Докажем вложение $cone\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i\right) \subset \sum\limits_{i=1}^{n} cone(S_i)$.

   По определению конической оболочки:

$$\forall a \in cone\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) : a = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_m x_m, \ \forall i \ x_i \in \bigcup_{j=1}^{n} S_j \ \& \ \theta_i \geqslant 0 \qquad (1)$$

   В сумме в (1) сгруппируем слагаемые так, чтобы образовалась сумма конических комбинаций из элементов S_i по отдельности (если какой-то элемент находится в нескольких и данных множеств, то он попадает в группу из множества с наименьшим индексом), т.е.:

$$a = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + ... + \theta_m x_m = (\theta_{l_1} x_{l_1} + ... + \theta_{l_p} x_{l_p}) + ... + (\theta_{n_1} x_{n_1} + ... + \theta_{n_q} x_{n_q}) \tag{2}$$

Таким образом, мы разложили a на сумму конических комбинаций, что означает, что $a \in \sum_{i=1}^{n} cone(S_i)$. Вложенность доказана.

Для обратной вложенности поступим аналогичным образом, т.е.:

$$\forall b \in \sum_{i=1}^{n} cone(S_i) : b = (\theta_{l_1} x_{l_1} + ... + \theta_{l_p} x_{l_p}) + ... + (\theta_{n_1} x_{n_1} + ... + \theta_{n_q} x_{n_q}) \tag{3}$$

$$\forall \theta_j \geqslant 0, x_{i_s} \in S_i$$

Приведением подобных членов в (3) можно легко убедиться что получим снова же коническую комбинацию, но уже из точек множества $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Таким образом, получаем, что $b \in cone\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)$. □

2. Докажем вложение $conv\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) \subset \sum_{i=1}^{n} conv(S_i)$.

По определению выпуклой оболочки:

$$\forall a \in conv\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) : a = \theta_1 (x_{p_1} + ... + x_{p_n}) + ... + \theta_m (x_{q_1} + ... + x_{q_n}), \tag{4}$$

$$\forall i \ (x_{i_1} + ... + x_{i_n}) \in \sum_j S_j, \ \theta_i \geqslant 0, \sum_{l=1}^{m} \ \theta_l = 1$$

В сумме в (4) сгруппируем слагаемые так, чтобы образовалась сумма выпуклых комбинаций из элементов S_i по отдельности т.е.:

$$\begin{aligned} a = \theta_1 (x_{p_1} + ... + x_{p_n}) + ... + \theta_m (x_{q_1} + ... + x_{q_n}) = \\ = (\theta_1 x_{p_1} + ... + \theta_m x_{q_1}) + ... + (\theta_1 x_{p_n} + ... + \theta_m x_{q_n}) \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, мы разложили a на сумму выпуклых комбинаций, что означает, что $a \in \sum_{i=1}^{n} conv(S_i)$. Вложенность доказана.

Обратную вложенность докажем индукцией по n.

База: $n = 2 \Longrightarrow conv(A) + conv(B) \subset conv(A + B)$

$$\forall d \in conv(A) + conv(B) : d = \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j$$

Рассмотрим $\sum_i \alpha_i a_i + b_j$:

$$\sum_i \alpha_i a_i + b_j = \sum_i \alpha_i a_i + b_j \sum_i \alpha_i = \sum_i \alpha_i (a_i + b_j) \in conv(A + B) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d = \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = \sum_j \beta_j \left(\sum_i \alpha_i a_i + b_j \right) \in conv(conv(A+B)) =$$
$$= conv(A+B)$$

База доказана.

Для перехода воспользуемся очевидным утверждением:

$$A \subset B \Longrightarrow A + C \subset B + C.$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} conv(S_i) + conv(S_{n-1}) + conv(S_n) \subset \sum_{i=1}^{n-2} conv(S_i) +$$
$$+ conv(S_{n-1} + S_n) \subset \ \dots \ \subset conv(S_1) + conv\left(\sum_{i=2}^{n} S_i \right) \subset conv\left(\sum_{i=1}^{n} S_i \right). \qquad \square$$

Задача 3.

Определите, являются ли следующие множества выпуклыми или нет:

1. $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid exp(x_1) \leqslant x_2 \right\}$
2. $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2 \leqslant 1 \right\}$
3. $\left\{ a \in \mathbb{R}^k \mid p(0) = 1, |p(t)| \leqslant 1, t \in [\alpha, \beta] \right\}$, где $p(t) = a_1 + a_2 t + \ldots + a_k t^{k-1}$

Решение:

1. *Утверждение:*

   функция $f(x)$ выпукла $\Longrightarrow$ область над ее графиком G выпуклое множество

   Доказательство: рассмотрим произвольные $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G$:

   $$(z_1, z_2) := \theta(x_1, x_2) + (1-\theta)(y_1, y_2), \theta \in [0, 1] \Longrightarrow$$
   $$z_2 = \theta x_2 + (1-\theta) y_2 \geqslant \theta f(x_1) + (1-\theta) f(y_1) \geqslant f(\theta x_1 + (1-\theta) y_1) = f(z_1) \tag{6}$$

   Последнее неравенство в (6) верно в силу неравенства Йенсена для выпуклых функций. $\square$

   Итак, имеем, что функция $y = e^x$ выпукла, а значит из вышеуказанного утверждения ее "надграф" $y \geqslant e^x$ выпуклая область.

2. Выберем точки $a = (1, 0), b = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Легко проверить, что они принадлежат данной области.

   $$\theta a + (1-\theta) b = \left(\frac{3}{2}\theta - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2} \right). \tag{7}$$

   Возьмем $\theta = \frac{1}{2}$ в уравнении (7), тогда:

   $$\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$
   $$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16} + 1 > 1 \tag{8}$$

   Из (8) следует, что область не выпуклая.

3. Из $p(0) = 1$ следует, что у всех векторов из данной области первая координата равна единице. Рассмотрим $a = (1, a_2, \ \dots, a_k), b = (1, b_2, \ \dots, b_k)$ из данной области и многочлен образованный коэффициентами $\theta a + (1-\theta) b$:

   $$|r(t)| = |1 + (\theta a_2 + (1-\theta) b_2) t + \ldots + (\theta a_k + (1-\theta) b_k) t^{k-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \theta|1+a_2t+...+a_kt^{k-1}|+(1-\theta)|1+b_2t+...+b_kt^{k-1}| \leqslant$$
$$\leqslant \theta+(1-\theta)=1 \tag{9}$$

Из (9) следует, что $\theta a+(1-\theta)b$ тоже лежит в данной области для $\forall\theta \in [0,1]$. Значит данная область выпукла. □

Задача 4.

Доказать, что $conv(S)=\bigcap\limits_i S_i$, где S_i - выпуклые множества содержащие S.

Доказательство:

Очевидно, что $conv(S)\subseteq\bigcap\limits_i S_i$, т.к. пересечение, даже бесконечное, выпуклых множеств является выпуклым множеством, и это пересечение тоже содержит S, значит содержит и $conv(S)$.

Для обратного вложения, возьмем $\forall z \in \bigcap\limits_i S_i$, т.к. выпуклая оболочка сама по себе является открытым множеством, $\exists k: conv(S)=S_k$, и т.к. z лежит в пересечении, то он так же лежит и в самой выпуклой оболочке. Таким образом, доказаны оба вложение, что значит, что эти множества равны. □