Ахмаджонов Мумтозбек Б05-927б

Домашнее задание №5

Задача 1.

Найдите решения задач:

- Функция Розенброка

$$(1-x_1)^2+\alpha\sum_{i=2}^{n}\left(x_i-x_{i-1}^2\right)^2\to\mathbf{min},\ \alpha>0.$$

- Задача линейного программирования

$$\begin{array}{cc}\mathbf{max}_{x1,x2} & 4x_1+3x_2\\ \text{s.t.} & 2x_1+x_2\leqslant 10\\ & x_{1,2}\geqslant 0\end{array}$$

- Задача квадратичного программирования

$$\begin{array}{cc}\mathbf{min}_{x_1,x_2} & (x_1-4)^2+(x_2-4)^2\\ \text{s.t.} & x_1+x_2\leqslant 4\\ & x_1+3x_2\leqslant 9\end{array}$$

Решение:

1) пусть $f(x)=(1-x_1)^2+\alpha\sum_{i=2}^{n}\left(x_i-x_{i-1}^2\right)^2$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f(x)=-2(1-x_1)-4\alpha x_1\left(x_2-x_1^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}f(x)=2\alpha\left(x_k-x_{k-1}^2\right)-4\alpha x_k\left(x_{k+1}-x_k^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n}f(x)=2\alpha\left(x_n-x_{n-1}^2\right)$$

$$-2(1-x_1)-4\alpha x_1\left(x_2-x_1^2\right)=0\Longrightarrow x_2-x_1^2=\frac{x_1-1}{2ax_1}$$

$$2\alpha\left(x_k-x_{k-1}^2\right)-4\alpha x_k\left(x_{k+1}-x_k^2\right)=0\Longrightarrow x_{k+1}-x_k^2=\frac{x_k-x_{k-1}^2}{2x_k}$$

Легко понять отсюда, что $\nabla f(x)|_{(1,1,\ldots,1)}=0$. Рассмотрим гессиан в этой точке:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}f(x)=2-4\alpha\left(x_2-x_1^2\right)+8\alpha x_1^2=12\alpha x_1^2-4\alpha x_2+2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_k}f(x)=\begin{cases}-4\alpha x_1 & k=2\\ 0 & k\neq 2\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}f(x)=2\alpha-4\alpha x_{k+1}+12\alpha x_k^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}f(x)=2\alpha$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_{k-1}}f(x)=-4\alpha x_{k-1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_{k+1}} f(x) = -4\alpha x_k$$

$$\forall |m| > 1 \ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_{k+m}} f(x) = 0$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} f(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} f(x) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(x) \end{bmatrix} =$$

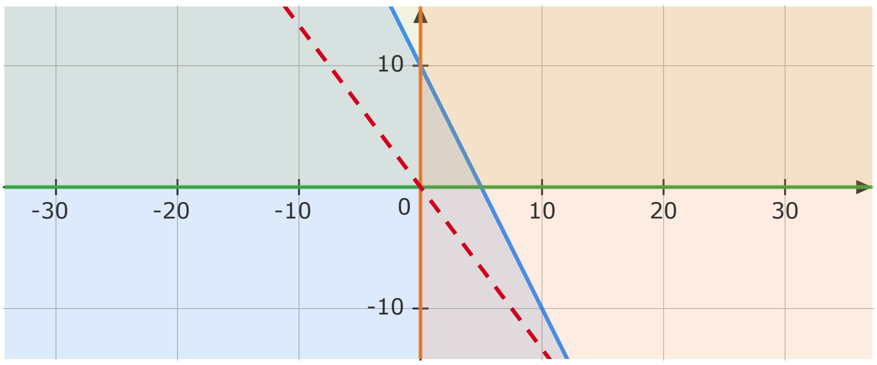
$$= \begin{bmatrix} 12\alpha x_1^2 - 4\alpha x_2 + 2 & -4\alpha x_1 & \dots & 0 \\ -4\alpha x_1 & 12\alpha x_2^2 - 4\alpha x_3 + 2\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x)|_{(1,1,\dots,1)} = \begin{bmatrix} 8\alpha + 2 & -4\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -4\alpha & 10\alpha & -4\alpha & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -4\alpha & 10\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 10\alpha & -4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -4\alpha & 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & -4\alpha & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\alpha & -4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2\alpha \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

Имеем собсвтенные значения: $2, 2\alpha$. Оба положительные, значит гессиан в точке $(1, 1, \dots, 1)$ положительно определен. Значит эта точка решение этой задачи.

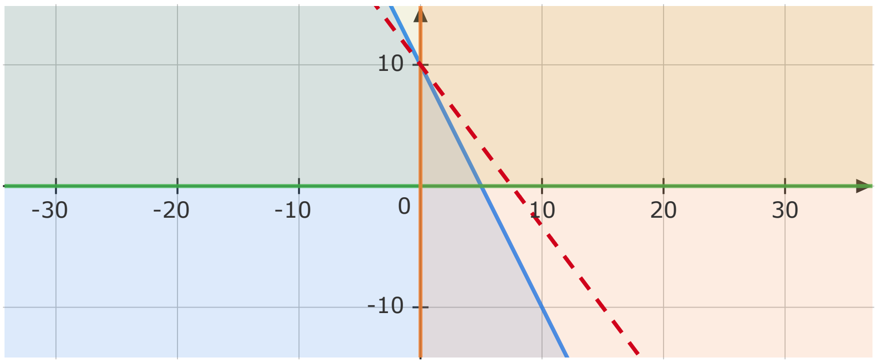
2) Рассмотрим данный график:
тут горизонтальная прямая -- ось Ox_1, вертикальная -- Ox_2. Красная пунктирная линия -- прямая $4x_1 + 3x_2 = k$ при $k = 0$.



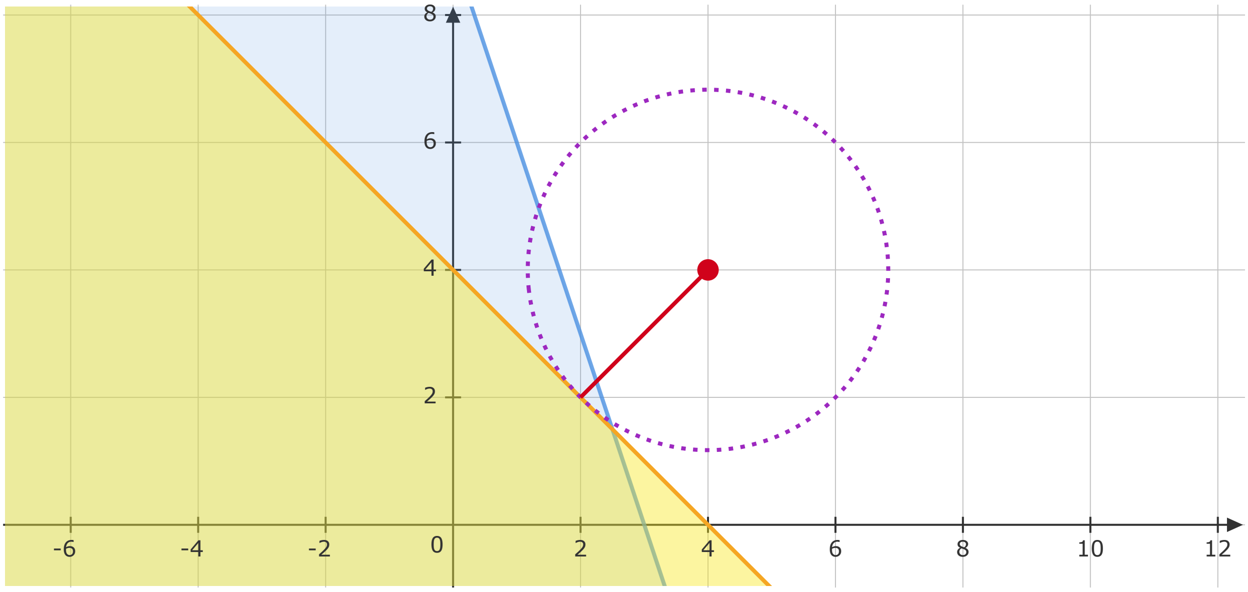
Как видно из графика, область допустимых значений -- центральный темный треугольник. Проведем такое преобразование:

$$4x_1 + 3x_2 = k \Longrightarrow x_2 = -\frac{4}{3}x_1 + \frac{k}{3}$$

Видно, что пунктиную линию можно сместить вверх только на 10, дальше выйдем из области допустимых значений. Значит, $\mathbf{max}\frac{k}{3} = 10 \Longrightarrow \mathbf{max}k = 30$.



3) Рассмотрим такой график:
тут горизонтальная прямая -- ось Ox_2, вертикальная -- Ox_1. Фиолетовая пунктирная окружность -- $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = R^2$ при $R = 2\sqrt{2}$.



Область допустимых значений -- пересечение голубой и синей полуплоскостей. Из графика очевидно, что тогда минимально возможный при данных условиях радиус окружности -- красный вектор, т.е. расстояние из точки $(4, 4)$ до прямой $x_1 + x_2 = 4$.

Ответ:

1. $f^*(1, 1, \ldots, 1) = 0$
2. $f^*(0, 10) = 30$
3. $f^*(2, 2) = 8$

Задача 2.
Найти двойственную функцию и построить двойственную задачу:

$$\begin{array}{rc} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

Решение:

$$L(x, \lambda, \mu) = c^T x + \lambda^T (Gx - h) + \mu^T (Ax - b) = -\lambda^T h - \mu^T b + \left(c^T + \lambda^T G + \mu^T A\right) x$$

Двойственная функция:

$$g(\lambda, \mu) = \inf_x L(x, \lambda, \mu) = -\lambda^T h - \mu^T b + \inf_x \left(c + G^T \lambda + A^T \mu\right)^T x$$

т.к. линейная функция $t(x) = \left(c^T + \lambda^T G + \mu^T A\right) x$ может быть ограниченной $\Leftrightarrow t(x) \equiv 0$:

$$g(\lambda, \mu) = \begin{cases} -\lambda^T h - \mu^T b & c + G^T \lambda + A^T \mu = 0 \\ -\infty & \text{иначе} \end{cases}.$$

Условие $g(\lambda, \mu) \leqslant f^*$ нетривиально, только когда $\lambda \succeq 0$ и $c + G^T \lambda + A^T \mu = 0$. Тогда $-\lambda^T h - \mu^T b$ нижняя грань оптимального значения данной задачи. А значит, двойственная задача имеет вид:

$$\begin{array}{rc} \max_{\lambda, \mu} & -\lambda^T h - \mu^T b \\ \text{s.t.} & \lambda \succeq 0 \\ & c + G^T \lambda + A^T \mu = 0 \end{array}$$

Ответ:

$$g(\lambda, \mu) = \begin{cases} -\lambda^T h - \mu^T b & c + G^T \lambda + A^T \mu = 0 \\ -\infty & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rc} \max_{\lambda, \mu} & -\lambda^T h - \mu^T b \\ \text{s.t.} & \lambda \succeq 0 \\ & c + G^T \lambda + A^T \mu = 0 \end{array}$$

Задача 3.

Сформулируйте двойственную задачу и по ее решению найдите решение прямой задачи:

$$\begin{array}{cc} \min_{x,y,z} & \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}z^2 + x + y + 2z \\ \text{s.t.} & x + 2y + z = 4 \end{array}$$

Решение:

$$L(x, y, z, \mu) = \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}z^2 + x + y + 2z + \mu(x + 2y + z - 4)$$

Двойственная функция:

$$g(\mu) = \inf_{x,y,z} L(x, \lambda, \mu) = -4\mu + \inf_{x,y,z}\left(\frac{1}{2}x^2 + x + \mu x + 2y^2 + y + 2\mu y + \frac{1}{2}z^2 + 2z + \mu z\right)$$

Имеем $t(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + x + \mu x + 2y^2 + y + 2\mu y + \frac{1}{2}z^2 + 2z + \mu z$. Найдем его минимум:

$$\nabla t = \begin{bmatrix} x + \mu + 1 \\ 4y + 2\mu + 1 \\ z + \mu + 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \nabla t\left(-\mu - 1, -\frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}, -\mu - 2\right) = 0$$

$$\nabla^2 t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

$$\inf_{x,y,z}\left(\frac{1}{2}x^2 + x + \mu x + 2y^2 + y + 2\mu y + \frac{1}{2}z^2 + 2z + \mu z\right) = t\left(-\mu - 1, -\frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}, -\mu - 2\right) =$$

$$= -\frac{3\mu^2}{2} - \frac{7\mu}{2} - \frac{21}{8}$$

$$g(\mu) = -4\mu - \frac{3\mu^2}{2} - \frac{7\mu}{2} - \frac{21}{8} = -\frac{3\mu^2}{2} - \frac{15\mu}{2} - \frac{21}{8}$$

Двойственная задача выглядит, как:

$$g(\mu) \to \max$$

Тогда:

$$g'(\mu^*) = -3\mu^* - \frac{15}{2} = 0 \Longrightarrow \mu^* = -\frac{5}{2} \Longrightarrow g^* = g(\mu^*) = 6.75$$

Задача выпукла. ограничений с неравенствами нет, а $x + 2y + z = 4$ афинное преобразование $\Longrightarrow$ условия Слейтера выполнение $\Longrightarrow$ есть сильняя двойственность $\Longrightarrow$ $f^* = g^*$

Ответ:

$$f^* = g^* = 6.75$$

Задача 4.

Рассмотрим следуюущую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned} \mathbf{min}_{x,y} \quad & e^{-x} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{x^2}{y} \leqslant 0 \end{aligned}$$

определенную на множестве $D(x,y) = \{(x,y) \mid y > 0\}$.

- Покажите, что она выпукла. Найдите оптимум.
- Постройте двойственную задачу. Найдите оптимальное значение множителей Лагранжа и решение двойственной. Чему равен зазор двойственности?
- Выполняются ли условия Слейтера для этой задачи?
- Чему равно $f^*(u)$ задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{min}_{x,y} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \frac{x^2}{y} \leqslant u \end{aligned} ?$$

Решение:

1) очевидно, что данное множество D выпукло, и в ней e^{-x} очевидно выпукла (вторая производная положительна). Покажем, что $t(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ выпукла на D:

$$\nabla^2 t = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{y} & -\dfrac{2x}{y^2} \\ -\dfrac{2x}{y^2} & \dfrac{2x^2}{y^3} \end{bmatrix}$$

$$\forall \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \nabla^2 t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{2}{y} & -\dfrac{2x}{y^2} \\ -\dfrac{2x}{y^2} & \dfrac{2x^2}{y^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2a^2}{y} - \frac{4abx}{y^2} + \frac{2b^2x^2}{y^3} = \frac{2}{y}\left(a - \frac{bx}{y}\right)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow \nabla^2 t \succeq 0 \Longrightarrow t - \text{выпукла на } D.$$

Значит, данная задача выпукла.Область допустимых значений -- $A = (0, y), y > 0$. Оптимум очевидно $f^* = e^0 = 1$.

2) переформулируем задачу:

$$\begin{aligned} \mathbf{min}_{x,y} \quad & e^{-x} \\ \text{s.t.} \quad & -y < 0 \\ & x = 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что эти формулировки асболютно эквиавалентны. Тогда, лагранжиан имеет вид:

$$L(x,y,\lambda,\mu) = e^{-x} - \lambda y + \mu x$$

двойственная функция - $g(\lambda,\mu) = \inf\limits_{x,y} L(x,y,\lambda,\mu) = \inf\limits_{x,y}\left(e^{-x} - \lambda y + \mu x\right)$

Пусть $t(x,y) = e^{-x} - \lambda y + \mu x$

$$\nabla t = \begin{bmatrix} -e^{-x} + \mu \\ -\lambda \end{bmatrix} \Longrightarrow \nabla t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\ln \mu \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$$g(\lambda, \mu) = \begin{cases} \mu - \mu \ln \mu & \lambda = 0 \\ -\infty & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{aligned} \mathbf{max}_{\lambda,\mu} & \quad \mu - \mu \ln \mu \\ \text{s.t.} & \quad \lambda = 0 \end{aligned}$$

$$\mu^* = 1 \Longrightarrow g^* = 1$$

Получили: $\lambda^* = 0, \mu^* = 1$. Зазор двойственности: $f^* - g^* = 0$.

3) т.к. в переформулированной задаче только ограчниения в виде строгих неравенств и афинних преобразований, и сама задача выпукла, условия Слейтера выполняются.

4) Переформулируем задачу:

$$\begin{aligned} \mathbf{min}_{x,y} & \quad c_1 x + c_2 y \\ \text{s.t.} & \quad \frac{x^2}{y} \leqslant u \\ & \quad -y < 0 \end{aligned}$$

Тогда, лагранжиан выглядит как:

$$L(x, y, \lambda) = c_1 x + c_2 y + \lambda_1 \left(\frac{x^2}{y} - u \right) - \lambda_2 y$$

Напишем условия ККТ (т.к. задача выпукла они являются и необходимыми и достаточными):

$$\begin{cases} \lambda_1 \left(\dfrac{x^2}{y} - u \right) = 0 \\ -\lambda_2 y = 0 \\ \nabla_x L(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \left(\dfrac{x^2}{y} - u \right) = 0 \\ -\lambda_2 y = 0 \\ c_1 + 2\lambda_1 \dfrac{x}{y} = 0 \\ c_2 - \lambda_1 \dfrac{x^2}{y^2} - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{c^2}{\lambda_1} \\ \dfrac{x}{y} = -\dfrac{c_1}{2\lambda_1} \\ c_2 - \lambda_1 \dfrac{x^2}{y^2} - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{c_1^2}{4\lambda_1^2} = \frac{c_2}{\lambda_1} \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{c_1^2}{4c_2}$$

$$\frac{x^2}{y} = \frac{c_2 y}{\lambda_1} \Longrightarrow c_2 y - \lambda_1 u = 0 \Longrightarrow y = \frac{\lambda_1 u}{c_2} = \frac{u c_1^2}{4c_2^2}$$

$$\frac{x}{y} = -\frac{c_1}{2\lambda_1} = -\frac{2c_2}{c_1} \Longrightarrow x = -\frac{2c_2}{c_1} \cdot y = -\frac{2c_2}{c_1} \cdot \frac{u c_1^2}{4c_2^2} = -\frac{u c_1}{2c_2}$$

Получили, что: $x^* = -\dfrac{u c_1}{2c_2}$ и $y^* = \dfrac{u c_1^2}{4c_2^2} \Rightarrow f^*(u) = c_1 x^* + c_2 y^* = -\dfrac{u c_1^2}{2c_2} + \dfrac{u c_1^2}{4c_2^2} = -\dfrac{u c_1^2}{4c_2^2}$.