逆関数定理と陰関数定理

む (@tatsujin65536)

2020 年 10 月 9 日

概要

ここでは、多様体にこれから入門する人を対象として、多様体に入門するにあたって重要な定理である逆関数定理、陰関数定理について述べる。

ただし、これらの定理の証明に関しては一切述べず、その代わり定理の意味する所を、具体的な関数を例に、図も用いて解説していく。

目次

1 ２つの定理の主張とその需要

まず、２つの定理の主張を述べる。””で囲んだ部分は感覚的説明、「」で囲んだ部分は厳密な説明である。

定理 1 (逆関数定理)**.** $m \geq 0$、$1 \leq r \leq \infty$、$p_0 \in U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ とする。

$f : U \to \mathbb{R}^m$: C^r 級関数の点 a における Jacobi 行列 $(Jf)_{p_0}$ が正則であるとき、”p_0 のまわりで f の局所的逆がある”、すなわち

「$p_0 \in U' \subset U$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ が存在して、$f|_{U'} : U' \to f(U')$ は全単射 (C^r 級関数) となり、またこの逆写像 $(f|_{U'})^{-1} : f(U') \to U'$ も C^r 級関数となる。」

簡潔に言えば、f の $p_0 \in \exists U' \subset U (U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m)$ への制限が C^r 級微分同相となる。

定理 2 (陰関数定理)**.** $m \geq n \geq 0$、$1 \leq r \leq \infty$、$p_0 \in U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ とする。

$f : U \to \mathbb{R}^n$: C^r 級関数の点 p_0 における Jacobi 行列が $\mathrm{rank}(Jf)_{p_0} = n$ (この条件は、$(Jf)_{p_0}$ 倍する線形写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が全射である、と言い換えられる) を満たすとき、以下が成立する。

(1) ”p_0 のまわりで集合 $\{p \in U |\, f(p) = f(p_0)\}$ が $m - n$ 個の実数でパラメータ付けられる”、すなわち

「$p_0 \in U' \subset U$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ と、別の $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ と C^r 級微分同相 $\varphi : U' \to V$ が存在して、

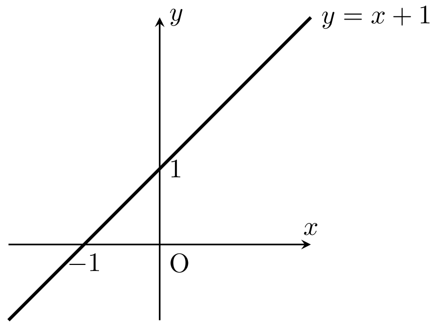
$$\{p \in U' | f(p) = f(p_0)\} = \varphi^{-1}(\{q = (y_1, \ldots, y_m) \in V |\, y_1 = \cdots = y_n = 0\})$$
$$(= \varphi^{-1}(V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n})))$$

となる。」

これらの定理は、多様体の持つべき性質である「謎の”空間”であって、大域的にはユークリッド空間とは異なりうるが局所的にはユークリッド空間 (の開集合) と同じ」という条件が実際に成り立つことを保証するためのものである。

具体的な多様体を扱いたい場合、関数を使って作られた特定の空間が多様体になることを保証するために重宝される。

2　逆関数定理



3　陰関数定理