逆関数定理と陰関数定理

む (@tatsujin65536)

2020 年 10 月 23 日

概要

ここでは、多様体にこれから入門する人を対象として、多様体に入門するにあたって重要な定理である逆関数定理、陰関数定理について述べる。ただし、これらの定理の証明に関しては一切述べず、その代わり定理の意味する所を、具体的な関数を例に、図も用いて解説していく。

目次

1　２つの定理の主張とその需要

逆関数定理・陰関数定理は、多様体の持つべき性質である「位相空間であって、大域的にはユークリッド空間とは異なりうるが局所的にはユークリッド空間 (の開集合) と同じ」という条件が実際に成り立つことを保証するためのものである。具体的な多様体を扱いたい場合、関数を使って作られた特定の空間が多様体になることを保証するために重宝される。

さて、２つの定理の主張を述べる。「」で囲んだ部分は感覚的説明、それ以外の部分は厳密な説明である。

定理 1 (逆関数定理)**.** $m \geq 0$、$1 \leq r \leq \infty$、$p_0 \in U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ とする。
$f \colon U \to \mathbb{R}^m$ を C^r 級関数とし、f の点 p_0 における Jacobi 行列 $(Jf)_{p_0}$ が正則であるとき、「p_0 のまわりで f の局所的逆がある」、すなわち
$p_0 \in U' \subset U$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ が存在して、$f|_{U'} \colon U' \to f(U')$ は全単射 (C^r 級関数) となり、またこの逆写像 $(f|_{U'})^{-1} \colon f(U') \to U'$ も C^r 級関数となる。

簡潔に言えば、f の $p_0 \in \exists U' \subset U (U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m)$ への制限が C^r 級微分同相となる。

定理 2 (陰関数定理 (の一部)). $m \geq n \geq 0$、$1 \leq r \leq \infty$、$p_0 \in U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ とする。
$f: U \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級関数とし、f の点 p_0 における Jacobi 行列が $\mathrm{rank}(Jf)_{p_0} = n$ (この条件は、$(Jf)_{p_0}$ 倍する線形写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が全射である、と言い換えられる) を満たすとき、以下が成り立つ。
(1)「p_0 のまわりで集合 $\{p \in U \mid f(p) = f(p_0)\}$ が $m-n$ 個の実数でパラメータ付けられる」、すなわち
$p_0 \in U' \subset U$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ と、別の $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ と C^r 級微分同相 $\varphi\colon U' \to V$ が存在して、

$$\begin{gathered}\{p \in U' \mid f(p) = f(p_0)\} = \varphi^{-1}(\{q = (y_1, \ldots, y_m) \in V \mid y_1 = \cdots = y_n = 0\}) \\ (= \varphi^{-1}(V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n})))\end{gathered}$$

となる。
(2) 上の仮定に加えて、$n \times m$ 行列 $(Jf)_{p_0}$ の第 1 列から第 m 列の中の n 個の列の組であって、それらの列ベクトルが線形独立であるようなものが 1 組わかっていて、**それら以外**の列が第 i_l 列 $(1 \leq l \leq m-n, 1 \leq i_l \leq m)$ であるとする。このとき、「パラメータとして $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{m-n}}$ がとれる」、すなわち
φ としてより具体的に $p = (x_1, \ldots, x_m) \in U'$ に対し $\varphi(p) = (*, *, \ldots, *, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{m-n}})$ となるものがとれる。
(3)「p_0 のまわりのうまい座標によって、f を施す写像が実質 m 個の成分のうち n 個の成分への射影とみなせる」、すなわち
$p_0 \in U' \subset U$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ と、別の $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ と C^r 級微分同相 $\varphi\colon U' \to V$ が存在して、
$(f|_{U'}) \circ \varphi^{-1}\colon V \to \mathbb{R}^n$ は $y = (y_1, \ldots, y_m) \mapsto (y_1, \ldots, y_n)$ で表される。

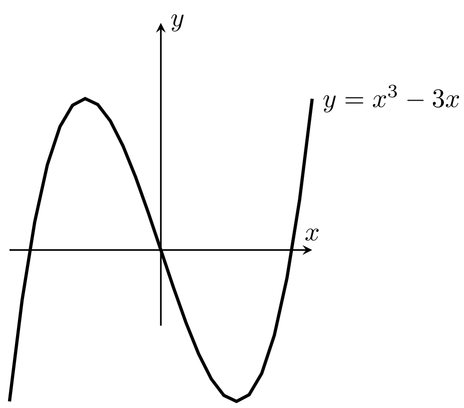
2 逆関数定理

2.1 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の例

関数

$$y = f(x) = x^3 - 3x$$

を例とする。



まず、逆関数定理の意味を、感覚的に説明する。
「各 $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し、x_0 の十分近くに制限したとき f の逆関数があるか?」という問題を考える。まず、f のグラフを x_0 の十分近くだけ見ると、ほぼ直線 (1 次関数) に見える。その傾きは、f の x_0 における微分係数

$f'(x_0)$ である。
上の関数では、$f'(x_0) = 3x_0^2 - 3$ である。
もし $f'(x_0) \neq 0$ なら、その近似した 1 次関数は逆関数をもつ (これは明らかであろう)。とすれば、このとき f も x_0 の十分近くで (滑らかな) 逆関数をもつのではないか？と想像される。
実際、これは正しい。これを保証してくれるのが逆関数定理である。

　次に、この例で逆関数定理を厳密に用いてみる。
上の関数では、$f'(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow x_0 \neq \pm 1$ である。
実際に、± 1 でない x_0 に対し逆関数定理が適用できるので、適用してみると、以下を得る。
「$x_0 \in U' \subset \mathbb{R}$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$ が存在して、$f|_{U'} \colon U' \to f(U')$ は全単射 (C^r 級関数) となり、またこの逆写像 $(f|_{U'})^{-1} \colon f(U') \to U'$ も C^r 級関数となる。」
ここに現れる U' や $f(U')$ は下図 (ないです) のようになっていて、見た目にも確かに x_0 のまわりで滑らかな逆関数をもっていると想像される。
　(図が描けない)
また、$x_0 = \pm 1$ については、f は点 x_0 のまわりでだいたい x 軸と平行になってしまっていて、少なくとも上で述べた直感的な議論では逆関数をもたなさそうであると想像される。

2.2　$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の例

　今度は

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) := (y - x^2, x - y^2)$$

を例とする。
この例について、逆関数定理の意味の感覚的な説明を行う。
1 つ目の例と同様に、$p_0 \in \mathbb{R}^2$ に対し f のグラフを p_0 のまわりで近似した 1 次関数を考える。その「傾き」は、f の p_0 における Jacobi 行列 $(Jf)_{p_0}$ で表される。
上の関数では、$(Jf)_{p_0} = \begin{pmatrix} -2x_0 & 1 \\ 1 & -2y_0 \end{pmatrix}$ である。
近似した 1 次関数が逆関数をもつことは $(Jf)_{p_0}$ が正則であることと同値であるから、
$(Jf)_{p_0}$ が正則であれば f も p_0 の十分近くで (滑らかな) 逆関数をもつだろうと想像される。実際これは正しい。
$(Jf)_{p_0}$ が正則 $\Leftrightarrow \det(Jf)_{p_0} \neq 0 \Leftrightarrow 4x_0y_0 - 1 \neq 0$ であるから、
上の関数では、$4x_0y_0 - 1 \neq 0$ ならば f は p_0 の十分近くで滑らかな逆関数をもつということが逆関数定理によりわかる。

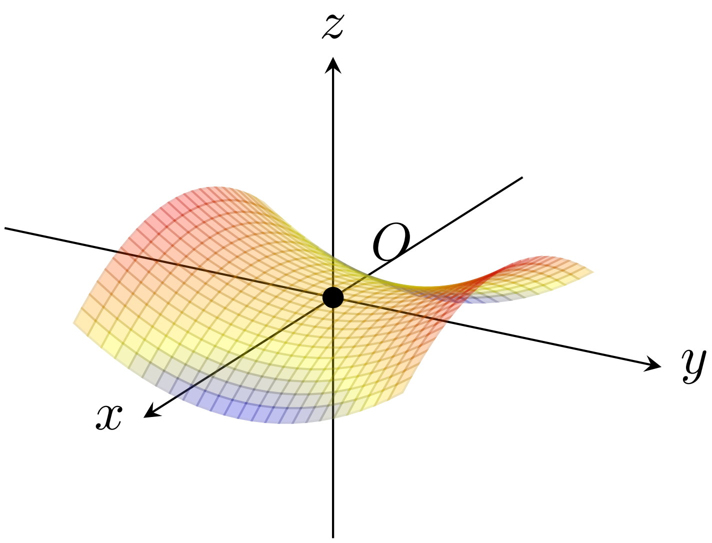
3　陰関数定理

3.1　$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の例

　関数

$$z = f(x, y) = -x^2 + y^2$$

を例とする。



3.1.1 (1) パラメータ表示

まず、陰関数定理 (1) の意味を、感覚的に説明する。

「各 $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ に対し、p_0 の十分近くに制限したとき $f(p) = f(p_0)$ なる点 p の集合 (ここではこれを f の「p_0 を通る等高線」と呼ぶことにする) を 1 個の実数でパラメータ付けできるか？」という問題を考える。まず、f のグラフを p_0 の十分近くだけ見ると、ほぼ平面に見える。その「傾き」は、f の p_0 における Jacobi 行列 $(Jf)_{p_0}$ で表される。

上の関数では、$(Jf)_{p_0} = \begin{pmatrix} -2x_0 & 2y_0 \end{pmatrix}$ である。

もし $\mathrm{rank}(Jf)_{p_0} = 1$ なら、その近似した 1 次関数の「p_0 を通る等高線」は 1 個の実数でパラメータ付けできる。($\because$ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(Jf)_{p_0}) = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 - \mathrm{rank}(Jf)_{p_0} = 1$。) とすれば、このとき f の「p_0 を通る等高線」も p_0 の十分近くで (滑らかな) パラメータ表示ができるのではないか？と想像される。[*1]

実際、これは正しい。これを保証してくれるのが陰関数定理 (1) である。

次に、この例で陰関数定理 (1) を厳密に用いてみる。

上の関数では、$\mathrm{rank}(Jf)_{p_0} = 1 \Leftrightarrow p_0 \neq (0,0)$ である。

そこで、実際に $(0,0)$ でない $p_0 = (x_0, y_0)$ に対し陰関数定理が適用できるので、適用してみると、以下を得る。

「$p_0 \in U' \subset \mathbb{R}^2$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$ と、別の $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$ と C^r 級微分同相 $\varphi : U' \to V$ が存在して、

$$\begin{aligned} \{(x,y) \in U' \mid f(x,y) = f(x_0,y_0)\} \quad &= \varphi^{-1}(\{(x',y') \in V \mid x' = 0\}) \\ (= \{(x,y) \in U' \mid -x^2 + y^2 = -x_0^2 + y_0^2\}) & \end{aligned}$$

となる。」

[*1] この部分だけ、数学的に厳密な議論におきかえようとするとき注意が必要である。詳細は述べないが、p_0 だけでなく、p_0 のある開近傍 U が存在してその任意の点 $p \in U$ における Jacobi 行列 $(Jf)_p$ の rank が p_0 での rank と同じ (つまり一定) である必要がある。幸い、Jacobi 行列については「p_0 において Jacobi 行列の rank が l のとき、p_0 のある開近傍 U が存在してその任意の点 $p \in U$ における Jacobi 行列の rank は l 以上である」という主張が成立する。今回の陰関数定理では rank として考えられる値の最大値が n なので、p_0 での rank が n であると仮定すればこの条件は満たされ、この条件について深く考える必要はなくなる。

ここに現れる U' や V, φ は例えば下図 (ないです) のようになっていて、見た目にも確かに f の「等高線」が p_0 のまわりで 1 個の実数による滑らかなパラメータ付けができていると想像される。

(図が描けない)

また、$p_0 = (0,0)$ については、f の「p_0 を通る等高線」は原点で交わる 2 つの直線からなり、これでは原点のまわりで 1 個の実数でパラメータ付けできないであろうと想像される。

3.1.2 (2) パラメータにとれる変数

陰関数定理 (2) の意味を、感覚的に説明する。(厳密に用いる様子は、(1) とあまり変わりないので省略する。)

「点 $p_0 = (x_0, y_0)$ のまわりで、f の「p_0 を通る等高線」のパラメータ表示があるとして、そのパラメータとして x 座標または y 座標がとれるか？」という問題を考える。

見た目には、x 座標がパラメータとしてとれるためには、f を p_0 のまわりで近似して作られる 1 次関数の「p_0 を通る等高線」(これは直線となる) が x 座標でパラメータ付けられればよいだろう、と想像される。

xy 平面内の直線のうち、x 座標でパラメータ付けできないのは y 軸と平行な直線のみであり、さらに 1 次関数の「等高線」が (実際直線になるとして)y 軸と平行になることはその関数の y 方向の偏微分係数が 0 であることと同値である。

したがって、x 座標でパラメータ付けできるためには、f の y 方向の偏微分係数が 0 でなければ十分だろうと想像できる。これが実際正しい。

上の関数では $(Jf)_{p_0} = (-2x_0 \quad 2y_0)$ であったから、$2y_0 \neq 0$、すなわち $y_0 \neq 0$ であれば、パラメータとして x がとれる。

同様に、$-2x_0 \neq 0$、すなわち $x_0 \neq 0$ であれば、パラメータとして y がとれる。

この例では、(2) の仮定がどういう意味であるか説明しきれていないと思われるので、以下に続く例でも説明する。下の例であれば、(2) の仮定の意味を十分説明できる (と考えている)。

3.1.3 (3) より精密な f の表示

陰関数定理 (3) は、(1) をより強くした主張である。つまり、単に $f(p) = f(p_0)$ なる p 全体の集合がパラメータ付けられるだけでなく、その集合の外も含めて p_0 のまわりで f の様子が座標変換によって簡潔に表される、という主張である。(3) については、以下に続く例も含めてこれ以上の説明はしない。(できない)

3.2 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の例

今度は、

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) := (x^2 + y^2, y^2 + z^2)$$

を例とする。

この例について、陰関数定理 (2) の意味の感覚的な説明を行う。

今までの例と同様に、$p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ のまわりで f のグラフを近似した 1 次関数を考える。

上の関数では、$(Jf)_{p_0} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 0 \\ 0 & 2y_0 & 2z_0 \end{pmatrix}$ である。

(1) については、$\mathrm{rank}(Jf)_{p_0} = 2 \Leftrightarrow x_0, y_0, z_0$のうち少なくとも 2 つが 0 でない、となるから、

x_0, y_0, z_0のうち少なくとも 2 つが 0 でなければ、p_0 のまわりで f の「p_0 を通る等高線」は 1 個の実数でパラメータ付けられる。
さらに言うなら、今回の場合、$f(p) = f(p_0)$ なる点 p 全体の集合は、2 つの円柱の側面の共通部分である。

さて、(2) の意味を感覚的に説明する。
ここでは、f を近似した 1 次関数を g とおく。
「$p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ のまわりで、f の p_0 を通る等高線のパラメータ表示があるとして、そのパラメータとして x, y, z のうちどれがとれるか？」という問題を考える。
感覚的には、x がパラメータとしてとれるためには、f を p_0 のまわりで近似した 1 次関数 g の「p_0 を通る等高線」が x でパラメータ付けられればよいだろう、と想像される。
次に、g の「等高線」が x でパラメータ付けられるために $(Jf)_{p_0}$ が満たして欲しい条件を調べたい。
陰関数定理の最初の例のように直接調べてもよいが、ここでは線形代数的に調べてみる。
まず、g の「等高線」は、「$\mathbb{R}^3$ の点 p について、g での値を指定したとき、もとの点 p を絞り込める範囲」とみなす。
さらに、「等高線」が x でパラメータ付けられるという条件を、「等高線上の点 p について、x 座標を指定したとき、もとの点 p が一意に復元できる」という条件とみなす。
これら 2 つの解釈を合わせると、「等高線」が x でパラメータ付けられるという条件は
「$\mathbb{R}^3$ の点 p について、g での値と x 座標を指定したとき、もとの点 p が一意に復元できる」という条件とみなせる。
これを線形代数の言葉で書けば、
「g に新たに x という情報を加えて作った 1 次関数

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 0 \\ 0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{倍写像}$$

が可逆である」
となる。この条件は行列 $\begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 0 \\ 0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が正則であることと同値であり、そしてそれは $(Jf)_{p_0}$ の第 2 列と第 3 列の列ベクトルが線型独立であることと同値である。
以上より、f の「等高線」が x でパラメータ付けられるためには、$(Jf)_{p_0}$ の第 2 列と第 3 列の列ベクトルが線型独立であればよい、という推測ができた。そしてこれは、陰関数定理 (2) の仮定そのものであるから、この推測は正しいことがわかる。
上の関数では、$(Jf)_{p_0}$ の第 2 列と第 3 列の列ベクトルが線型独立 $\Leftrightarrow y_0, z_0 \neq 0$ であるから、
$y_0, z_0 \neq 0$ であれば、パラメータとして x がとれることになる。
同様に、$(Jf)_{p_0}$ の第 1 列と第 3 列の列ベクトルが線型独立 $\Leftrightarrow x_0, z_0 \neq 0$ であるから、
$x_0, z_0 \neq 0$ であれば、パラメータとして y がとれることがわかり、
$(Jf)_{p_0}$ の第 1 列と第 2 列の列ベクトルが線型独立 $\Leftrightarrow x_0, y_0 \neq 0$ であるから、
$x_0, y_0 \neq 0$ であれば、パラメータとして z がとれることがわかる。

3.3　$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の例

最後は

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$$

を例とする。
この例で新たに説明するべきことはもうないので、復習にでも使ってもらえればよい。
今までの例と同様に、$p_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ のまわりで f のグラフを p_0 のまわりで近似した 1 次関数を考える。
上の関数では、Jacobi 行列は $(Jf)_{p_0} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \end{pmatrix}$ である。

(1) については、陰関数定理の最初の例と全く同様にして、$\mathrm{rank}(Jf)_{p_0}=1$ が成り立つとき p_0 のまわりで $f(p)=f(p_0)$ なる p の集合 (今回は f の p_0 を通る「等高面」とでも呼ぶべきだろうか) は 2 個の実数でパラメータ付けできるだろう、と想像できる。
$\mathrm{rank}(Jf)_{p_0}=1 \Leftrightarrow (x_0,y_0,z_0)\neq 0$ であるから、
上の関数では $(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ ならば p_0 のまわりで f の「p_0 を通る等高面」は 2 個の実数でパラメータ付けられることが陰関数定理 (1) によりわかる。
さらに言うなら、今回の場合、$f(p)=f(p_0)$ なる点 p 全体の集合は球面である。

(2) については、f の「等高面」が x,y でパラメータ付けられるためには、f の 1 次近似に x,y を加えた関数

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{倍写像}$$

が可逆であれば十分、つまり $z_0\neq 0$ であれば十分である、ということが陰関数定理 (2) によりわかる。
同様に、$y_0\neq 0$ であれば x,z でパラメータ付けられて、
$x_0\neq 0$ であれば y,z でパラメータ付けられる。