逆関数定理と陰関数定理

む (@tatsujin65536)

2020 年 10 月 14 日

概要

ここでは、多様体にこれから入門する人を対象として、多様体に入門するにあたって重要な定理である逆関数定理、陰関数定理について述べる。ただし、これらの定理の証明に関しては一切述べず、その代わり定理の意味する所を、具体的な関数を例に、図も用いて解説していく。また、説明は、主張の意味を感覚的に述べたものと、主張を厳密に用いる様子を感覚的に述べたもの、の２種類用意した。

目次

1　２つの定理の主張とその需要

逆関数定理・陰関数定理は、多様体の持つべき性質である「位相空間であって、大域的にはユークリッド空間とは異なりうるが局所的にはユークリッド空間 (の開集合) と同じ」という条件が実際に成り立つことを保証するためのものである。

具体的な多様体を扱いたい場合、関数を使って作られた特定の空間が多様体になることを保証するために重宝される。

さて、２つの定理の主張を述べる。「」で囲んだ部分は感覚的説明、それ以外の部分は厳密な説明である。

定理 1 (逆関数定理)**.** $m \geq 0$、$1 \leq r \leq \infty$、$p_0 \in U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ とする。

$f : U \to \mathbb{R}^m$: C^r 級関数の点 p_0 における Jacobi 行列 $(Jf)_{p_0}$ が正則であるとき、「p_0 のまわりで f の局所的逆がある」、すなわち

$p_0 \in U' \subset U$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ が存在して、$f|_{U'} : U' \to f(U')$ は全単射 (C^r 級関数) となり、またこの逆写像 $(f|_{U'})^{-1} : f(U') \to U'$ も C^r 級関数となる。

簡潔に言えば、f の $p_0 \in \exists U' \subset U(U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m)$ への制限が C^r 級微分同相となる。

定理 2 (陰関数定理 (の一部))**.** $m \geq n \geq 0$、$1 \leq r \leq \infty$、$p_0 \in U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ とする。

$f : U \to \mathbb{R}^n$: C^r 級関数の点 p_0 における Jacobi 行列が $\mathrm{rank}(Jf)_{p_0} = n$ (この条件は、$(Jf)_{p_0}$ 倍する線形写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が全射である、と言い換えられる) を満たすとき、

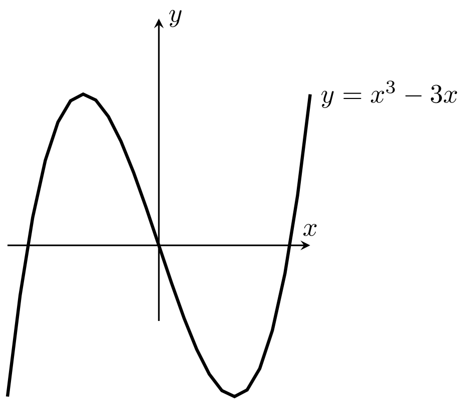
「p_0 のまわりで集合 $\{p \in U |\, f(p) = f(p_0)\}$ が $m-n$ 個の実数でパラメータ付けられる」、すなわち $p_0 \in U' \subset U$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ と、別の $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ と C^r 級微分同相 $\varphi : U' \to V$ が存在して、

$$\{p \in U' |\, f(p) = f(p_0)\} = \varphi^{-1}(\{q = (y_1, \ldots, y_m) \in V |\, y_1 = \cdots = y_n = 0\})$$
$$(\, = \varphi^{-1}(V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n})))$$

となる。

2　逆関数定理

$y = f(x) = x^3 - 3x$ を例とする。



まず、逆関数定理の意味を、感覚的に説明する。

「各 $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し、x_0 の十分近くに制限したとき f の逆関数があるか？」という問題を考える。まず、f のグラフを x_0 の十分近くだけ見ると、ほぼ直線 (1 次関数) に見える。その傾きは、f の x_0 における微分係数 $f'(x_0)$ である。

上の関数では、$f'(x_0) = 3x_0^2 - 3$ である。

もし $f'(x_0) \neq 0$ なら、その近似した 1 次関数は逆関数をもつ (これは明らかであろう)。とすれば、このとき f も x_0 の十分近くで (滑らかな) 逆関数をもつのではないか？と想像される。

実際、これは正しい。これを保証してくれるのが逆関数定理である。

次に、この例で逆関数定理を厳密に用いてみる。

上の関数では、$f'(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow x_0 \neq \pm 1$ である。

実際に、± 1 でない x_0 に対し逆関数定理が適用できるので、適用してみると、以下を得る。

「$x_0 \in U' \subset \mathbb{R}$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$ が存在して、$f|_{U'} : U' \to f(U')$ は全単射 (C^r 級関数) となり、またこの逆写像 $(f|_{U'})^{-1} : f(U') \to U'$ も C^r 級関数となる。」

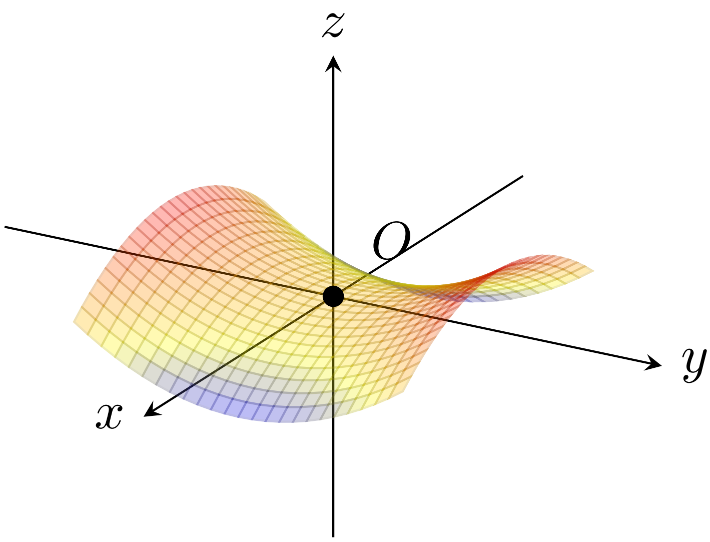
ここに現れる U' や $f(U')$ は下図 (ないです) のようになっていて、見た目にも確かに x_0 のまわりで滑らかな逆関数をもっていると想像される。

(図が描けない)

また、$x_0 = \pm 1$ については、f は点 x_0 のまわりでだいたい x 軸と平行になってしまっていて、少なくとも上で述べた直感的な議論では逆関数をもたなさそうであると想像される。

3　陰関数定理

$z = f(x, y) = -x^2 + y^2$ を例とする。



まず、陰関数定理の意味を、感覚的に説明する。

「各 $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ に対し、p_0 の十分近くに制限したとき $f(p) = f(p_0)$ なる点 p の集合 (ここではこれを f の p_0 を通る等高線と呼ぶことにする) を 1 個の実数でパラメータ付けできるか？」という問題を考える。まず、f のグラフを p_0 の十分近くだけ見ると、ほぼ平面に見える。その「傾き」は、f の p_0 における Jacobi 行列 $(Jf)_{p_0}$ で表される。

上の関数では、$(Jf)_{p_0} = (-2x_0 \quad 2y_0)$ である。

もし $\mathrm{rank}(Jf)_{p_0} = 1$ なら、その近似した 1 次関数の p_0 を通る等高線は 1 個の実数でパラメータ付けできる。($\because$ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(Jf)_{p_0}) = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 - \mathrm{rank}(Jf)_{p_0} = 1$。) とすれば、このとき f の p_0 を通る等高線も p_0 の十分近くで (滑らかな) パラメータ表示ができるのではないか？と想像される。[*1]

実際、これは正しい。これを保証してくれるのが陰関数定理である。

次に、この例で陰関数定理を厳密に用いてみる。

上の関数では、$\mathrm{rank}(Jf)_{p_0} = 1 \Leftrightarrow p_0 \neq (0, 0)$ である。

そこで、実際に $(0, 0)$ でない $p_0 = (x_0, y_0)$ に対し陰関数定理が適用できるので、適用してみると、以下を得る。

「$p_0 \in U' \subset \mathbb{R}^2$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$ と、別の $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$ と C^r 級微分同相 $\varphi : U' \to V$ が存在して、

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in U' \mid f(x, y) = f(x_0, y_0)\} &= \varphi^{-1}(\{(x', y') \in V \mid x' = 0\}) \\ (=\{(x, y) \in U' \mid -x^2 + y^2 = -x_0^2 + y_0^2\}) & \end{aligned}$$

[*1] この部分だけ、数学的に厳密な議論におきかえようとするとき注意が必要である。詳細は述べないが、p_0 だけでなく、p_0 のある開近傍 U が存在してその任意の点 $p \in U$ における Jacobi 行列 $(Jf)_p$ の rank が p_0 での rank と同じ (つまり一定) である必要がある。幸い、Jacobi 行列については「p_0 において Jacobi 行列の rank が l のとき、p_0 のある開近傍 U が存在してその任意の点 $p \in U$ における Jacobi 行列の rank は l 以上である」という主張が成立する。今回の陰関数定理では rank として考えられる値の最大値が n なので、p_0 での rank が n であると仮定すればこの条件は満たされ、この条件について深く考える必要はなくなる。

となる。」

ここに現れる U' や V, φ は例えば下図 (ないです) のようになっていて、見た目にも確かに f の等高線が p_0 のまわりで 1 個の実数による滑らかなパラメータ付けができていると想像される。

(図が描けない)

また、$p_0 = (0,0)$ については、f の p_0 を通る等高線は原点で交わる 2 つの直線からなり、これでは原点のまわりで 1 個の実数でパラメータ付けできないであろうと想像される。