逆関数定理と陰関数定理

む

2020 年 10 月 8 日

概要

ここでは、多様体にこれから入門する人を対象として、多様体に入門するにあたって重要な定理である逆関数定理、陰関数定理について述べる。

ただし、これらの定理の証明に関しては一切述べず、その代わり定理の意味する所を、具体的な関数を例に、図も用いて解説していく。

目次

1　２つの定理の主張とその需要

定理 1 (逆関数定理)**.** $m \geq 0$、$1 \leq r \leq \infty$、$p \in U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ とする。

$f : U \to \mathbb{R}^m$: C^r 級関数の点 p における Jacobi 行列 $(Jf)_p$ が正則であるとき、”p のまわりで f の局所的逆がある”、すなわち

$p \in U' \subset U$ なるある $U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ が存在して、$f|_{U'} : U' \to f(U')$ は全単射となり、またこの逆写像 $(f|_{U'})^{-1} : f(U') \to U'$ は C^r 級関数となる。

簡潔に言えば、f の $p \in \exists U' \subset U(U' \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m)$ への制限が C^r 級微分同相となる。

定理 2 (陰関数定理)**.** $m \geq n \geq 0$、$1 \leq r \leq \infty$、$p \in U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ とする。

$f : U \to \mathbb{R}^n$: C^r 級関数の点 p における Jacobi 行列が $\mathrm{rank}(Jf)_p = n$ (この条件は、$(Jf)_p$ 倍する線形写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が全射である、と言い換えられる) を満たすとき、以下が成立する。

(1)

2　逆関数定理

ユークリッド空間の部分集合に多様体として整合的な局所的構造を与えるための

3　陰関数定理