**GRAM-SCHMIDT ORTOGONALLEŞTİRME TEOREMİ**

160201015 Nilüfer TOKDEMİR , 160201005 Berna EROL

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü  
 Kocaeli Üniversitesi

[tokdemirnilufer@gmail.com](mailto:tokdemirnilufer@gmail.com), <bernae1998@gmail.com>

**Özet**

*GRAM-SCHMİDT ortogonalleştirme teoreminin uygulanışı ve bu teoremden çıkarılacak sonuçlarını anlatmaya çalıştık.*

**1)GİRİŞ**

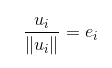
Matematikte Doğrusal cebir ve sayısal analizde , Gram–Schmidt süreci bir dizi vektörleri bir iç çarpım uzayı içinde ortonormal etmek için kullanılan bir yöntemdir. İç çarpım uzayında olan vektörler, genellikle Öklit uzayında R*n* donatılmış olan standart iç çarpım vektörlerdir. Gram–Schmidt süreci bir sonlu, doğrusal bağımsız kümeni,*S* = {*v*1, ...,*vk*},*k*≤*n*, alıp ve R'in aynı k-boyutlu alt uzayındayayılan ortogonal kümeni,*S’*= {*u*1, ...,*uk*}, üretmektedir.

Bu yöntem ismini Jorgen Pedersen Gram ve Erhard Schmidt, den almaktadır. Ancak, daha önce Laplace ve Cauchy’nin çalışmalarında da ortaya çıkmıştı. Yalan grup parçalanması[ı](http://www.wikizero.biz/index.php?q=aHR0cHM6Ly90ci53aWtpcGVkaWEub3JnL3dpa2kvTGllX2dydWJ1X2F5ciVDNCVCMSVDNSU5Rm1hcyVDNCVCMQ) teorisinde Iwasawa ayrışma tarafından genelleştirilmiş .

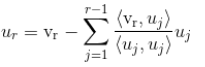
Bir vektör uzayı için sahip olabileceğimiz en iyi basis ortogonal bir basisdir. Bunun sebebi bir vektörün basis vektörlerin kombinasyonu şeklinde ifade etmek için gerekli katsayıları kolayca bulabiliriz

Bu algoritmanın zaman açısından maliyeti O(n(k\*k)) derecesindendir. Buradaki n vektörlerin olduğu büyüklüktür.

Vn boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. İçin  olmak üzere  lineer bağımsız bir vektör sistemini alalım. Gram-Schmidt metodu yardımıyla  ortogonal vektör sistemi elde edilir. Bu ortogonal vektör sistemindeki her vektör kendi normuna bölünerek ortonormal vektör sistemi elde edilir yani,  olmak üzere

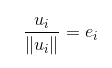


şeklindeki vektörlerden oluşanortonormal vektör sistemi elde edilir:



**2.Yöntemin Uygulanması**

İlk vektörü aşağıda şekilde birim vektörü bulunur.

****

İkinci vektörün ilk vektör üzerindeki izdüşümü bulunur.

****

Bu formülde v2 vektörünün üzerine dik izdüşümü alınır ve bu uzunluk u1 birim vektörüyle çarpılır elde edilen vektör v2 den çıkarılarak u1 vektörüne dik olan u2 vektörü elde edilir.

Üçüncü vektörün ortogonal vektörünün bulunması için aşağıdaki formül uygulanır.

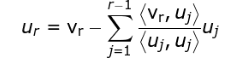


Bu formülde v3 vektörünün u2 ve u1 vektörleri üzerindeki izdüşümü bulur ve u1 ile u2 nin birim vektörüne bölünür. Ortaya çıkan sonuç v3 vektöründen çıkarılarak u3 vektörü elde edilir.

Bu formülleri belli bir kurala koyarsak eğer r sayıda vektörün ortogonal vektörünü bulma işlemi aşağıda ki şekide olacaktır ;

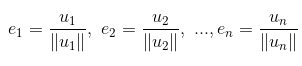


Bu şekilde ifade edilebilen teorem aşağıdaki şekildede ifade edilebilir.

****

**3)SONUÇ**

 lineer bağımsız vektör sisteminden  ortogonal vektör sistemi elde edilir. Bu ortogonal vektör sistemindeki her vektör kendi normuna bölünerek



şeklinde **** ortonormal vektör sistemi elde edilir.

Gram-Schmidt yönteminde  lineer bağımsız vektör sistemini matris formatında yazıp bu matrise A dersek ;



Bu lineer bağımsız sisteminden elde edilen ortogonal vektörler matrise Q dersek eğer Q ortogonal bir matristir ve ortogonal bir matrisin tersi transpozuna eşittir. Bu bilgi büyük boyutlu matrislerin tersini almada kolaylık sağlayacaktır. R üst üçgensel matris olmak üzere A = Q . R şeklinde çarpanlarına ayrılabilir.

**3.1) 1.ÇIKARIM**

V eğer sonlu bir iç çarpım uzayıysa V’nin ortonormal vektör temeli olduğu söylenebilir. Bu durumu şu şekilde kanıtlayabiliriz ;

V sonlu boyutlu bir uzaysa {*v*1,*v*2,...,*v**n*} n adet vektörden oluşur.Bu vektör seti lineer bağımsız ise Gram-Schmidt methodunu uygulayarak n adet {*e*1,*e*2,...,*e**n*} ortonormal vektörlerini elde edebiliriz.Bu vektör seti n boyutlu ve lineer bağımsız olduğundan {*e*1,*e*2,...,*e**n*} V nin ortonormal basis i olduğu söylenebilir.

**3.2) 2.ÇIKARIM**

V’deki her oronormal vektör listesi V’nin ortonormal basisine genişletilebilir. Bu druumu şu şekilde açıklayabiliriz ;

{e1, . . . , em} vektör setini V uzayındaki ortonormal vektörler olarak kabul edersek, bu vektör seti lineer bağımsızdır dolayısıyla V’nin {e1, . . . , em, v1, . . . , vn} basis vektör uzayına genişletilebilir. Eğer Gram-Schmidt prosedürünü {e1, . . . , em, v1, . . . , vn} vektörlerine uygularsak ;

**(1)** {e1, . . . , em,f1, . . . ,fn} elde edilir.

{e1, . . . , em} vektörlerinin değişmemesi zaten ortonormal olmaları yüzündendir.

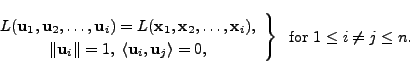
**(1)** numaradaki denklem V’nin ortonormal basisidir çünkü lineer bağımsızdır ve span{e1,..., em,f1,.. ,fn}

V uzayına eşittir.

**4)QR AYRIŞTIRMASI**

Eğer A lineer olarak bağımsız sütunlara sahip m x n matrisi ise, A matrisi A = QR olarak ayrıştırılabilir.Q ortogonal bir matris iken R üst üçgensel bir matristir.Eğer A matrisi singular olmayan bir matris ise bu ayrıştırma benzersizdir.Bu durumu şu şekilde kanıtlayabiliriz ;

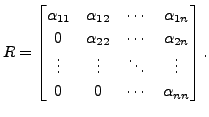
A matrisinin sütunları {x1,x2,..xn} ise Gram-Schmidt methodunun bu sütunlara uygulanmasıyla {u1,u2,...un} vektörleri bulunur.



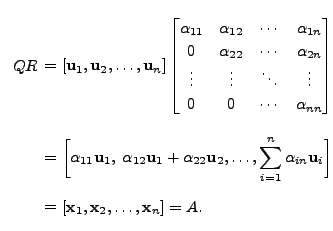
Hesaplanmış basis B ={u1,u2..un} ise yukarıdaki resimde belirtilen 1 <= i <=n’i dikkate alarak ;



Sonucuna varabiliriz.Q=[u1,u2..un] olarak belirlersek ve Q’nun ortogonal bir matris olduğunu biliyorsak, R nxn üst üçgensel matrisini

****

Şu şekilde tanımlayabiliriz.



Yukarıdaki şekilde görülebileceği üzere A matrisi QR matrisine eşittir.

**5) KAYNAKÇA**

Teorem hakkında yabancı dilde ve türkçe kaynaklardan araştırma yaptık. [1] ve [2] numaralı kaynaklar method uygulanışı ve sonuçlarını bize detaylı biçimde aktarırken, [3] ve [4] numaralı kaynaklar method uygulanışı hakkında bize detaylı bilgi verdi.[2] numaralı kaynaktan aynı zamanda QR ayrıştırması alınmıştır.

[1]https://math.berkeley.edu/~arash/54/notes/6\_4.pdf

[2]:<https://nptel.ac.in/courses/122104018/node49.html>

[3]: <https://www.matematiksel.org/gram-schmidt-metodunun-geometrik-yorumu/>

[4]:<https://www.math.usm.edu/lambers/mat415/lecture3.pdf>