

Wojskowa Akademia Techniczna

WYDZIAŁ MECHATRONIKI I LOTNICTWA



Przedmiot: Cyfrowe układy regulacji

Zadanie nr 2: Projekt regulatora PID dla warunku kompensacji stałych czasowych obiektu oraz zapewnienia aperiodyczności procesu przejściowego

Prowadzący: dr inż. Marek JAWOROWICZ

Wykonanie: Violetta Munar Ernandes, Michał Bokiniec, Mateusz Janus

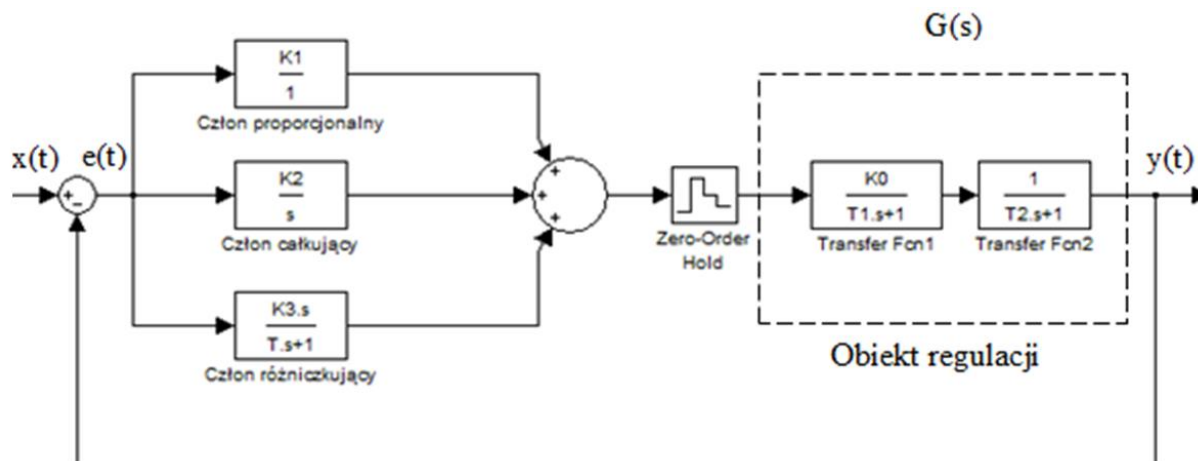
Grupa: A1A1S1

Spis treści

1.	Sformułowanie zadania.....	3
1.1	Założenia.....	3
1.2	Rozwiązanie zadania	3
2.	Model matematyczny regulatora PID	4
2.1	Realizacja warunku kompensacji	4
2.2.	Warunek aperiodyczności.....	5
2.3.	Obliczanie parametrów regulatora PID	6
3.	Model matematyczny układu regulacji.....	7
3.1.	Dyskretyzacja regulatora metodą interpolacyjną:	7
3.2.	Dyskretyzacja obiektu regulacji:	7
3.3.	Zdyskretyzowany układ regulacji.....	8
4.	Model numeryczny układu regulacji	9
4.1.	Przykładowy wydruk programu <i>pid_numeryczny.m</i>	9
5.	Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe dyskretnego układu regulacji	12
6.	Wnioski.....	14

1. Sformułowanie zadania

Na rys. 1.1. przedstawiono model strukturalny układu automatycznej regulacji w dziedzinie czasu rzeczywistego z zewnętrzną pętlą sprzężenia zwrotnego. Regulację w układzie pełni regulator PID umiejscowiony w pętli głównej. Obiektem regulacji jest człon inercyjny II rzędu. Sygnał wyjściowy $y(t)$ z obiektu podawany jest na węzeł sumujący poprzez ujemną pętlę sprzężenia zwrotnego i sumowany z sygnałem wejściowym $x(t)$. Wynikiem takiej operacji jest uchyb $e(t)$ regulacji podawany na wejście regulatora.



Rys. 1.1 Schemat układu regulacji z regulatorem ciągłym PID

Wyznaczyć parametry regulatora k_1 , k_2 , k_3 , T_3 w wersji dyskretny który zapewni kompensację stałych czasowych T_1 , T_2 oraz aperiodyczny przebieg procesu przejściowego, przy założonym czasie regulacji.

Dane:

$$T_1 = 0.2[s]$$

$$T_2 = 0.5[s]$$

1.1 Założenia

Założenia niezbędne do realizacji zadania projektowego:

- Stabilny układ regulacji
- Spełnienie warunku kompensacji przez projektowany regulator
- Aperiodyczny przebieg procesu przejściowego (przeregulowanie $p = 0\%$)

1.2 Rozwiązanie zadania

Rozwiązaniem zadania są:

- Dyskretna transmitancja regulatora $G(z)$
- Dyskretny model układu regulacji
- Model numeryczny układu regulacji (transmitancyjny w przestrzeni stanów)
- Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe układu regulacji

2. Model matematyczny regulatora PID

Regulator PID jest złożeniem członu proporcjonalnego (P), całkującego (I) oraz różniczkującego (D). Najczęściej jego celem jest utrzymanie wartości wyjściowej na poziomie wartości zadanej. Sygnałem na wyjściu regulatora jest sygnał sterujący $u(t)$, zaś sygnałem wejściowym jest uchyb regulacji $e(t)$. Transmittancja operatorowa idealnego regulatora PID ma postać:

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (1)$$

gdzie:

k – wzmacnienie

T_I – stała zdwojenia

T_D – stała wyprzedzenia

W zadaniu rozpatrywany jest rzeczywisty regulator PID którego ogólna transmittancja operatorowa ma następującą postać:

$$G_R(s) = k_1 + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3 s}{T_3 s + 1} \quad (2)$$

2.1 Realizacja warunku kompensacji

Warunek kompensacji dynamiki zostaje spełniony gdy współczynniki mianownika obiektu regulacji są równe współczynnikom licznika regulatora, tzn. sprowadza się do znoszenia w torze sygnałowym obiektu z licznikiem regulatora.

Transmittancja regulatora po przekształceniu:

$$G_R(s) = k_1 + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3 s}{T_3 s + 1} = \frac{(k_1 T_3 + k_3) s^2 + (k_1 + k_2 T_3) s + k_2}{s(T_3 s + 1)} = \frac{a_1 s^2 + b_1 s + c_1}{s(T_3 s + 1)} \quad (3)$$

Współczynniki licznika regulatora po przyrównaniu tożsamościowym wynoszą:

$$a_1 = k_1 T_3 + k_3$$

$$b_1 = k_1 + k_2 T_3$$

$$c_1 = k_2$$

Transmittancja operatorowa obiektu regulacji po przekształceniu:

$$G_o(s) = \frac{k_o}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{k_o}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1} = \frac{k_o}{a_0 s^2 + b_0 s + c_0} \quad (4)$$

Współczynniki mianownika obiektu po przyrównaniu tożsamościowym wynoszą:

$$a_0 = T_1 T_2 = 0.1$$

$$b_0 = T_1 + T_2 = 0.7$$

$$c_0 = 1$$

Warunek kompensacji spełniają równania:

$$\begin{matrix} a_0 = a_1 \\ b_0 = b_1 \\ c_0 = c_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 T_3 + k_3 = 0.1 \\ k_1 + k_2 T_3 = 0.7 \\ k_2 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

2.2. Warunek aperiodyczności

Transmitancja układu otwartego po kompensacji stałych czasowych przyjmie następującą postać:

$$G_{OT}(s) = G_O(s)G_R(s) = \frac{k_O}{s(T_3 s + 1)} \quad (6)$$

Transmitancja układu zamkniętego będzie więc miała postać:

$$G_Z(s) = \frac{G_{OT}(s)}{1 + G_{OT}(s)} = \frac{\frac{k_O}{T_3}}{s^2 + \frac{1}{T_3}s + \frac{k_O}{T_3}} = \frac{L_Z(s)}{M_Z(s)} \quad (7)$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego:

$$M_Z(s) = s^2 + \frac{1}{T_3}s + \frac{k_O}{T_3} = 0 \quad (8)$$

Warunek aperiodyczności jest warunkiem jakościowym regulacji. Zostaje narzucony przez model równania charakterystycznego członu oscylacyjnego.

Transmitancja operatorowa członu oscylacyjnego II rzędu ma postać:

$$G(s) = \frac{k}{T_{mz}^2 s^2 + 2\xi T_{mz} s + 1} = \frac{\frac{k}{T_{mz}^2}}{s^2 + 2\xi \frac{1}{T_{mz}}s + \frac{1}{T_{mz}^2}} \quad (9)$$

gdzie:

- ξ – współczynnik tłumienia
- T_n – stała czasowa

Równanie charakterystyczne członu oscylacyjnego II rzędu ma postać:

$$M_{mz}(s) = s^2 + 2\xi \frac{1}{T_{mz}}s + \frac{1}{T_{mz}^2} = 0 \quad (10)$$

Narzucenie wymagań dynamiki na układ regulacji odbywa się przez przyrównanie tożsamościowe:

$$M_Z(s) \approx M_{mz}(s) \quad (11)$$

zatem:

$$\begin{cases} \frac{1}{T_3} = 2\xi \frac{1}{T_{mz}} \\ \frac{k_o}{T_3} = \frac{1}{T_{mz}^2} \end{cases} \quad (12)$$

W założeniach określono aby w układzie regulacji przeregulowanie było równe zero ($p=0\%$). Aby założenie zostało spełnione należy dobrać odpowiedni czas regulacji.

Warunkiem do realizacji założenia ($p=0\%$) jest dobór czasu regulacji spełniającego poniższą nierówność:

$$t_r \leq 1,5 [s] \quad (13)$$

Przyjęto następujące wartości liczbowe parametrów:

- Czas regulacji - $t_r = 1,5 [s]$
- Współczynnik tłumienia - $\xi = 1$
- Zależność między stałą czasową członu oscylacyjnego T_{mz} , a czasem regulacji
- $t_r = 5T_{mz}$
- Stała czasowa członu oscylacyjnego - $T_{mz} = \frac{1,5}{5} = 0,3 [s]$

Podstawienie powyższych danych pod układ równań (12) i jego rozwiązanie jest wynikiem otrzymanych przedstawionych poniżej wartości liczbowych parametrów:

$$T_3 = 0,15 [s], \quad k_o = 1,67$$

2.3. Obliczanie parametrów regulatora PID

W celu wyznaczenia pozostałych parametrów regulatora podstawiamy wartość stałej czasowej T_3 do układu równań (5) z podpunktu 2.2. Rozwiązując układ równań otrzymujemy parametry regulatora:

Parametry regulatora PID są równe:

$$k_1 = 0.55$$

$$k_2 = 1$$

$$k_3 = 0.02$$

$$T_3 = 0,15 [s]$$

Po podstawieniu otrzymanych parametrów (podane powyżej) pod równanie (2) pkt 2. transmitancja ciągła regulatora PID przyjmuje poniższą postać:

$$G_R(s) = 0.55 + \frac{1}{s} + \frac{0.02s}{0.15s+1} = \frac{0.1025s^2+0.7s+1}{0.15s^2+s} \quad (14)$$

3. Model matematyczny układu regulacji

Aby wyznaczyć model dyskretny układu regulacji należy zdyskretyzować obiekt regulacji i regulator, a następnie metodą przekształceń schematów strukturalnych pomnożyć oba człony przez siebie.

3.1. Dyskretyzacja regulatora metodą interpolacyjną:

Dyskretyzacja metodą interpolacyjną polega na wyrażeniu operatora s przez dyskretny operator z :

$$s = \frac{z-1}{T_p * z} \quad (15)$$

Do dyskretyzacji dobrany został optymalny czas próbkowania według zależności:

$$T_p \leq 0.1 T_m \quad (16)$$

Okres próbkowania regulatora wynosi:

$$T_p = 0.1 * T_3 = 0.1 * 0.15 = 0.015[s] \quad (17)$$

Po podstawieniu równania (15) pod wyrażenie (14) otrzymano dyskretną postać regulatora:

$$G_{reg_z}(z) = \frac{0.1025 * \left(\frac{z-1}{T_p * z}\right)^2 + 0.7 * \left(\frac{z-1}{T_p * z}\right) + 1}{\frac{z-1}{T_p * z} * \left(0.15 * \frac{z-1}{T_p * z} + 1\right)} = \frac{0.686z^2 - 1.306z + 0.621}{z^2 - 1.909z + 0.909} \quad (18)$$

3.2. Dyskretyzacja obiektu regulacji:

Obiekt regulacji dyskretyzowany będzie metodą skokowo-inwariantną. Po podstawieniu wartości liczbowych parametrów k_o , T_1 , T_2 pod wyrażenie (4) oraz po przekształceniu transmitancji podaną powyżej metodą, otrzymano następującą postać transmitancji obiektu dyskretnego:

$$\begin{aligned} G_{ob}(z) &= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z \left[\frac{k_o}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right] = \frac{z-1}{z} * Z \left[5 * \frac{1}{(s+5)} + 3.334 \frac{1}{(s+2)} \right] = \\ &= 5 \left(\frac{z}{z - e^{-5 * T_p}} \right) * 3.334 \left(\frac{z}{z - e^{-2 * T_p}} \right) = \frac{0.001811 * z + 0.001748}{z^2 - 1.898 * z + 0.9003} \end{aligned} \quad (19)$$

3.3. Zdyskretyzowany układ regulacji

Transmitancja zamkniętego układu regulacji po podstawieniu wyrażeń transmitancyjnych regulatora(18) i obiektu(19) otrzymano dyskretną transmitancję zamkniętego układu regulacji (21):

$$G_{ur_za}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G_R(z)G_{ob}(z)}{1+G_R(z)G_{ob}(z)} \quad (20)$$

$$G_{ur_za}(z) = \frac{0.001242z^3 - 0.001165z^2 - 0.001159z + 0.00109}{z^4 - 3.8060z^3 + 5.4320z^2 - 3.446z + 0.8196} \quad (21)$$

Równanie różnicowe układu regulacji przedstawione jest poniżej:

$$y(n) = 3.806 y(n-1) - 5.432y(n-2) + 3.446 y(n-3) - 0.8196y(n-4) + 0.001242x(n) - 0.001165 x(n-1) - 0.001159 x(n-2) + 0.00109 x(n-3) \quad (22)$$

4. Model numeryczny układu regulacji

Poniżej przedstawiony jest model numeryczny dyskretnego układu regulacji w postaci równań stanu:

$$x(n+1) = \begin{bmatrix} 3,797 & -1,351 & 0,855 & -0,4057 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} 0,0625 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(n)$$
$$y(n) = [0,0198 \quad -0,004615 \quad -0,004612 \quad 0,008598] x(n) \quad (23)$$

Transmitancję dyskretnego układu regulacji wyznaczono wykorzystując następujące polecenia w środowisku Matlab:

`M = pid(Kp,Ki,Kd,Tf,Ts)` –wyznaczanie dyskretnej postaci resugaltora pid

`reg_z=tf(M)` – transmitancja dyskretna regulatora

`Gob_s=ko/((T1*s+1)*(T2*s+1))` –transmitancja ciągła obiektu

`Gob=(0.001811*z+0.001748)/(z^2-1.898*z+0.9003)` –dyskretna transmitancja obiektu

$$G_{ur_z}(z) = \frac{0.001238 z^3 - 0.001154 z^2 - 0.001153 z + 0.001075}{z^4 - 3.797 z^3 + 5.405 z^2 - 3.42 z + 0.8113} \quad (24)$$

Pierwiastki transmitancji układu zamkniętego wyznaczono za pomocą funkcji $P=eig(Gur_z)$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0.9765 \\ \varphi_2 &= 0.9496 + 0.0184i \\ \varphi_3 &= 0.9496 - 0.0184i \\ \varphi_4 &= 0.9210 \end{aligned}$$

Na podstawie pierwiastków można stwierdzić, że układ jest stabilny ponieważ pierwiastki leżą w okręgu o promieniu 1.

4.1. Przykładowy wydruk programu `pid_numeryczny.m`

Przedstawiono program realizujący projektowanie regulatora metodą analityczną oraz numeryczną w celu porównania otrzymanych wyników. Symulacja zachowania się układu regulacji realizowana jest poprzez wymuszenia (step, impulse, bode, nyquist) podane na wejście układu.

```
clc
clear all
format short
%%%DANE%%
Kp=0.55;
Ki=1;
Kd=0.02;
Tf=0.15;
Ts=0.015;
ko=1.6667;
T1=0.2;
T2=0.5;
```

```

z=tf('z',Ts);
s=tf('s');

%%%%REGULATOR WYZNACZONY NUMERYCZNIE%%%%%%%%
disp('transmitancja regulatora wyznaczona numerycznie')

Ms= pid(Kp,Ki,Kd,Tf);
M = pid(Kp,Ki,Kd,Tf,Ts)
reg_z=tf(M)

%%%%REGULATOR WYZNACZONY ANALITYCZNIE %%%%%%%%%
disp('transmitancja regulatora wyznaczona analitycznie')

Gregz= (0.686212121212121*z^2 - 1.30606060606061*z +
0.621212121212121) ...
      / (z^2 - 1.90909090909091*z + 0.909090909090909);
Gregs=(0.1025*s^2+0.7*s+1)/(0.15*s^2+s);

%%%%%%%%OBIEKT REGULACJI%%%%%%%%
disp('transmitancja obiektu regulacji wyznaczona analitycznie')

Gob_s=ko/((T1*s+1)*(T2*s+1)) %ciągły
Gob=(0.001811*z+0.001748)/(z^2-1.898*z+0.9003)

%%%%%%%%UKŁAD REGULACJI WYZNACZONY ANALITYCZNIE%%%%%%%%
disp('transmitancja układu regulacji liczona analitycznie')

GUL=(1.24254141309656e-3*z^3 -1.16511153529754e-3*z^2 -
1.15873245574877e-3*z + 1.08615599320765e-3);
GUM=(z^4-3.80603738755488*z^3 + 5.43206572172536*z^2 -
3.44558647546322*z + 0.819562994707995);
Gur_z=GUL/GUM

%%%%%%%%UKŁAD REGULACJI WYZNACZONY NUMERYCZNIE%%%%%%%%
disp('Transmitancja UR wyznaczona numerycznie')

Gur_z = feedback(M*Gob,1,-1)

%%%%%%%%%%%% WYKRESY %%%%%%%%%
figure(1)
subplot(1,2,1);
step(M,0:Ts:1); title('regulator numeryczny dyskretny')
subplot(1,2,2);
step(Gregz,0:Ts:1); title('regulator analityczny dyskretny');

figure(2)
subplot(1,2,1);
step(Gur_z); title('Odpowiedź skokowa zamkniętego układu
regulacji liczonego analitycznie')
subplot(1,2,2);
step(Gur_z); title('Odpowiedź skokowa zamkniętego układu
regulacji liczonego numerycznie')

```

```

figure(3)
subplot(1,2,1);
impz(Gur_za); title('Odpowiedź impulsowa zamkniętego układu
regulacji liczonego analitycznie')
subplot(1,2,2);
impz(Gur_z); title('Odpowiedź impulsowa zamkniętego układu
regulacji liczonego numerycznie')

figure(4)
subplot(1,2,1);
bode(Gur_za); title('Charakterystyki Bodego zamkniętego układu
regulacji liczonego analitycznie')
subplot(1,2,2);
bode(Gur_z); title('Charakterystyki Bodego zamkniętego układu
regulacji liczonego numerycznie')

figure(5)
subplot(1,2,1);
nyquist(Gur_za); title('Charakterystyka Nyquista zamkniętego
układu regulacji liczonego analitycznie')
subplot(1,2,2);
nyquist(Gur_z); title('Charakterystyka Nyquista zamkniętego
układu regulacji liczonego numerycznie')

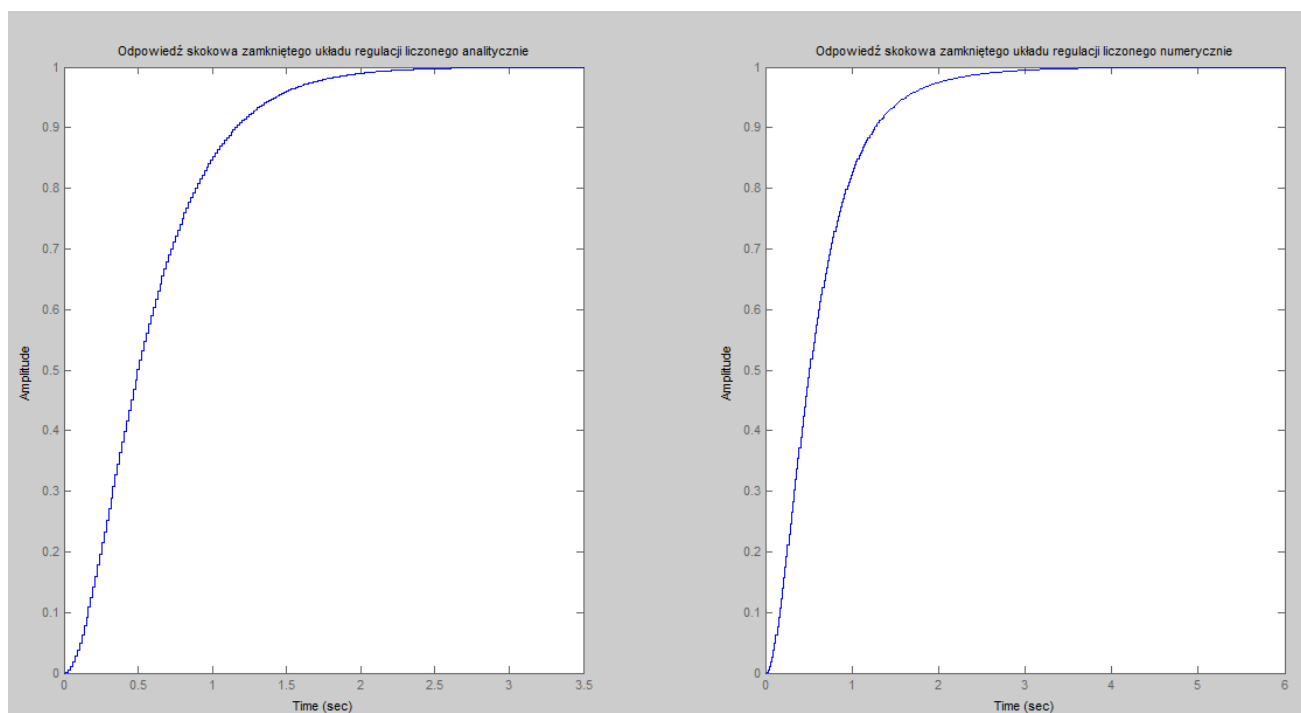
%%%%%MODEL STANOWY%%%%%%%%%
disp('model stanowy układu regulacji dyskretnego-Gur_z-
numeryczny')
MOD_z=ss(Gur_z)

disp('pierwiastki')
P=eig(Gur_z)

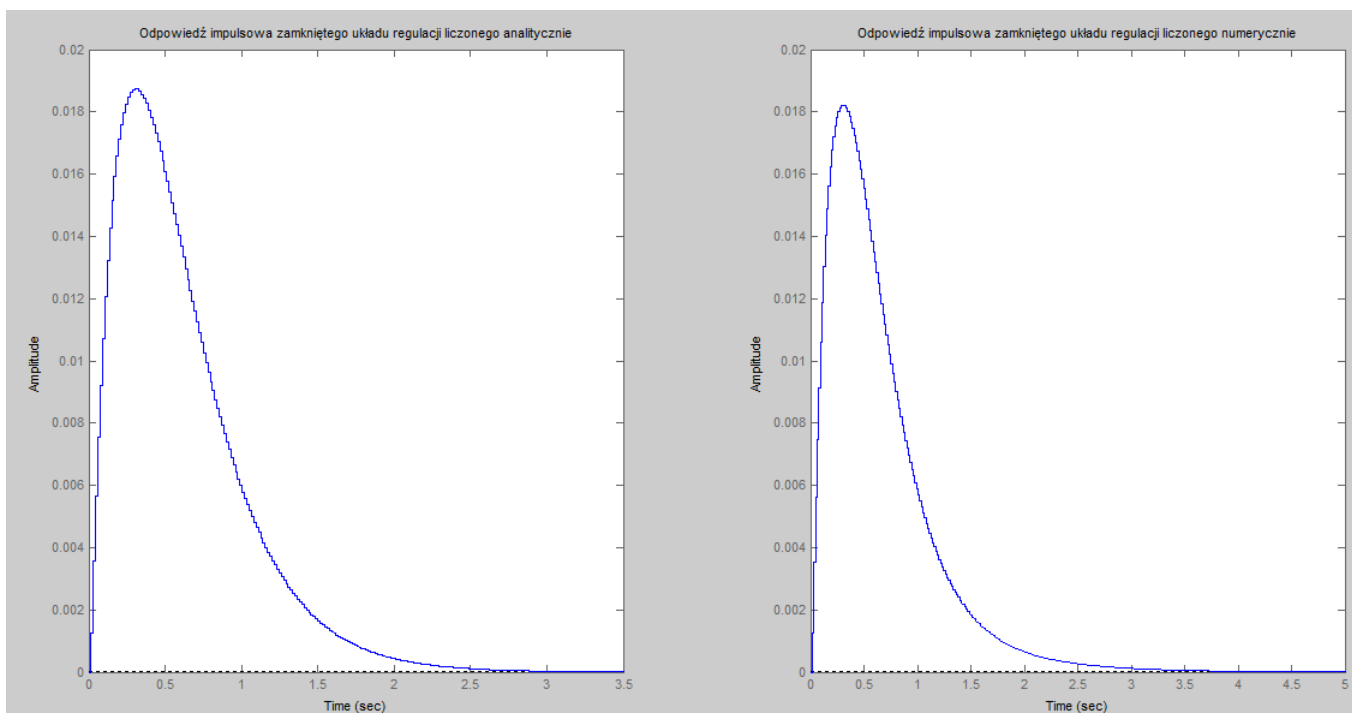
```

5. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe dyskretnego układu regulacji

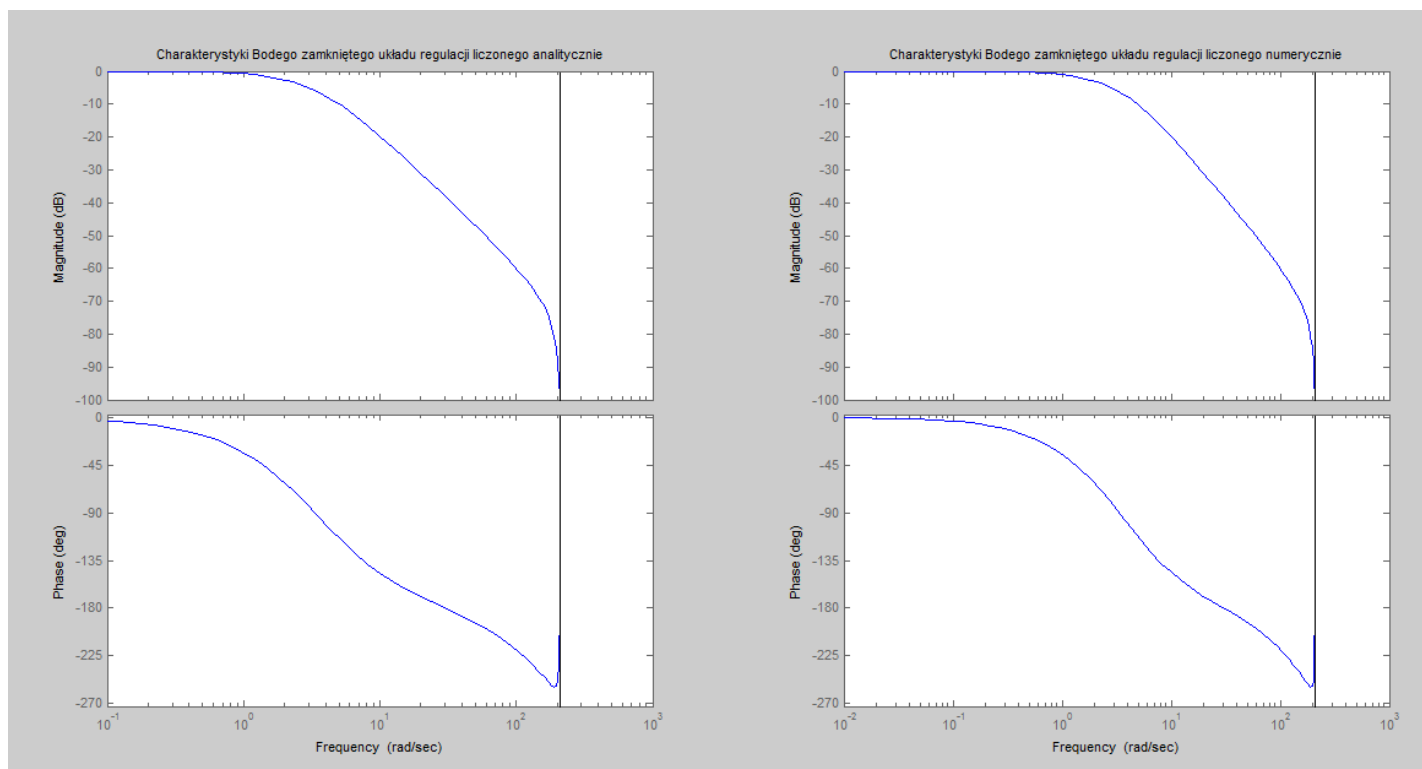
Poniżej przedstawione zostały wyniki symulacji w postaci charakterystyki czasowych i częstotliwościowych otrzymanego układu regulacji.



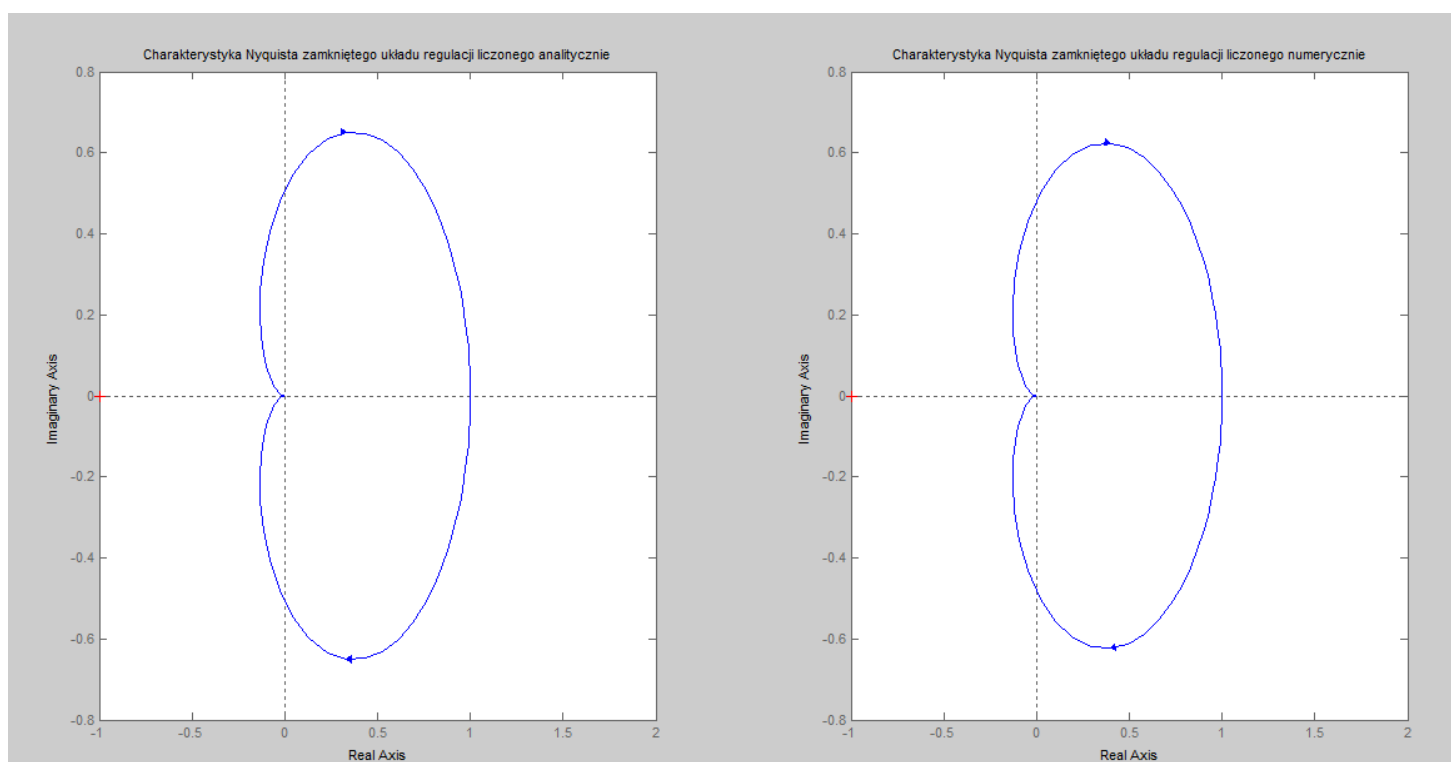
Rys. 5.1 Odpowiedź skokowa dyskretnego układu regulacji wyznaczona analitycznie i numerycznie



Rys. 5.2 Odpowiedź impulsowa dyskretnego układu regulacji analitycznie i numerycznie



Rys. 5.3 Charakterystyka Bodego dla dyskretnego układu regulacji analitycznie i numerycznie



Rys. 5.4 Charakterystyka Nyquista dla dyskretnego układu regulacji analitycznie i numerycznie

6. Wnioski

Celem zadania było wyznaczenie transmitancji oraz modelu w przestrzeni stanów dyskretnej postaci zamkniętego układu regulacji z regulatorem PID dla warunku kompensacji stałych czasowych obiektu oraz zapewnienie aperiodycznego procesu przejściowego.

Po wykonaniu zadania doszliśmy do następujących wniosków:

- Na podstawie wartości biegunów
 $\varphi_1 = 0.9765$, $\varphi_2 = 0.9496 + 0.0184i$, $\varphi_3 = 0.9496 - 0.0184i$, $\varphi_4 = 0.9210$
oraz odpowiedzi skokowej dyskretnego układu regulacji stwierdzamy, że układ regulacji jest układem stabilnym.
- Analizując charakterystyki czasowe - skokową (rys.5.1) i impulsową (rys. 5.2) odczytujemy, iż czas regulacji układu wynosi $t_r=1.5$ [s] przy amplitudzie $A=0.94$. Znajomość odpowiedzi impulsowej pozwala nam przewidzieć odpowiedź układu na każde inne pobudzenie. Odpowiedź układu na dowolne pobudzenie jest bowiem splotem sygnału pobudzającego oraz odpowiedzi impulsowej układu. Analiza funkcji odpowiedzi impulsowej pozwala na określenie cech układu m.in czy mamy do czynienia z układem o skończonej, czy nieskończonej odpowiedzi impulsowej.
- Analizując charakterystyki częstotliwościowe Bodego (rys. 5.3) i Nyquist'a (rys. 5.4.) wyznaczono zapas amplitudy $G_m = -37.6\text{dB}$ oraz zapas fazy wynoszący $\Delta f=122.4^\circ$, jest ona dodatnia zatem układ jest stabilny z zapasem fazy 122.4° , który mówi o tym, o ile można zwiększyć fazę układu otwartego bez zmiany jego wzmocnienia, aby układ pozostawał jeszcze stabilnym .
- Zapas modułu wskazuje o ile można zwiększyć moduł w układzie, aby przy niezmienniej fazie pozostawał on stabilny. Wzmocnienie układu otwartego można zwiększyć o 75.86dB bez utraty stabilności układu.
- Spełniony został warunek kompensacji dynamiki obiektu. Do układu otwartego wprowadzono dynamikę członu oscylacyjnego II rzędu która zapewniła czas regulacji równy 1.5s , co może świadczyć o poprawności rozwiązane zadania.
- W odpowiedzi skokowej układu regulacji nie występują przeregulowania – spełniony został zatem warunek aperiodyczności.