7.1. Конвейер. На ленте конвейера, движущейся с некоторой скоростью υ, находятся цилиндрические емкости. Над лентой через каждые L метров установлены краны, из которых в те промежутки времени когда под ними проходят емкости, с постоянным объемным расходом выливается готовый продукт. За некоторое время t_0 емкость заполняется на половину своего объема V.

1) Какая часть объема V будет заполняться за то же время t_0, если расстояние между кранами увеличить в 2 раза, а скорость движения ленты в 3?

2) Представьте, что все размеры емкости увеличили в 2 раза, расстояние между кранами – в три раза, а скорость движения ленты установили 2υ. Какая часть объема V_1 новой емкости заполнится за время $4{,}5t_0$?

При решении задачи считайте, что $t_0 \gg L/\upsilon$.

7.1. Возможное решение. Если $t_0 \gg L/\upsilon$, то за время t_0 сосуд окажется под кранами $n=\frac{\upsilon t_0}{L}$ раз. Под каждым краном сосуд будет находиться в течение времени $\tau=\frac{d}{\upsilon}$, где d – диаметр сосуда. Таким образом, за время t_0 в сосуд нальется объем продукта $V_1=\mu\tau n=\mu\frac{d}{\upsilon}\frac{\upsilon t_0}{L}=\frac{\mu d t_0}{L}$, где μ – объем продукта, выливающийся из крана в единицу времени (расход). Видно, что скорость заполнения сосуда не зависит от скорости υ движения ленты. По условию задачи $\frac{\mu d t_0}{L}=\frac{V}{2}$.

1) Если расстояние между кранами увеличить в 2 раза, то за то же время, независимо от скорости конвейера, будет заполняться объем $V/4$.

2) Если все размеры емкости увеличить в 2 раза, то ее диаметр увеличится в 2 раза $\left(d_1=2d\right)$, а объем – в 8 раз $\left(V_1=8V\right)$. За время $4{,}5t_0$ готовым продуктом заполнится объем:

$$\mu\frac{2d}{3L}4{,}5t_0=\left(\frac{\mu d t_0}{L}\right)\frac{2\cdot 4{,}5}{3}=\frac{3}{2}V=\frac{3}{2}\frac{V_1}{8}=\frac{3}{16}V_1.$$

№	**7.1. Критерии оценивания (из 15 баллов)**	Баллы
1	Отмечено, что скорость заполнения ёмкости не зависит от скорости движения ленты	2
2	Записана зависимость между временем, проведённым под краном, и полным временем движения	3
3	В любом виде записано верное уравнение, связывающее объём и время	2
4	Определено, что в первом случае заполнится четверть объёма	3
5	Верно посчитано соотношение между старым и новым объёмами ёмкости во втором случае	3
6	Определено, что во втором случае будет заполнено 3/16 объёма V_1 Если ответ представлен в виде 3 V/2, ставьте 1 балл	2

7.2. Неудачное испытание. Во время испытаний дрона, созданного для наблюдения за движением транспортных средств по загородному шоссе, что-то пошло не так. Дрон выдал таблицу в которой вперемешку приведены координаты трёх находящихся на трассе автомобилей в разные моменты времени.

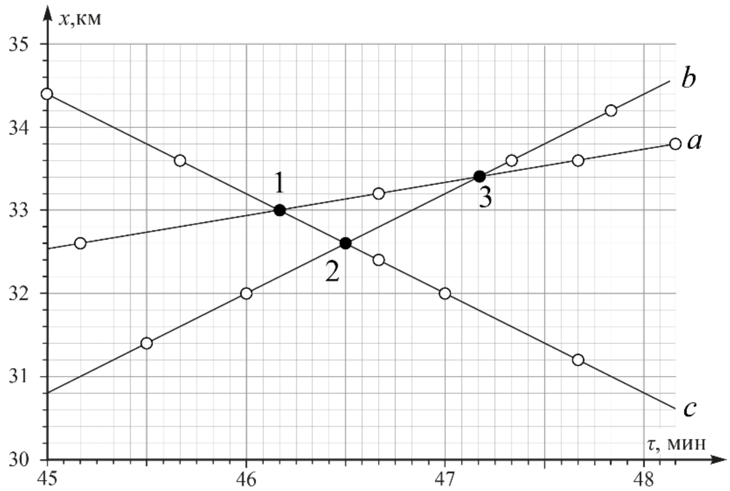
Считая, что автомобили двигались с постоянными скоростями вдоль оси *x*, не разворачиваясь, определите:

(a) величины скоростей автомобилей;

(b) координаты и моменты времени, когда автомобили поравнялись (встречались или обгоняли друг друга).

Время, ч:мин:с	*x*, км
12:45:00	34,4
12:45:10	32,6
12:45:30	31,4
12:45:40	33,6
12:46:00	32,0
12:46:40	32,4
12:46:40	33,2
12:46:50	33,0
12:47:00	32,0
12:47:20	33,6
12:47:40	31,2
12:47:40	33,6
12:47:50	34,2
12:48:10	33,8

7.2. Возможное решение. На координатной сетке *x* от *t* отметим положение автомобилей в разные моменты времени (согласно табличным данным). Так как автомобили едут с постоянной скоростью, проведём через нанесённые точки три прямые (*a*, *b*, *c*) так, чтобы не осталось точек вне прямых. По угловому коэффициенту этих прямых вычислим искомые скорости:



$\upsilon_a = 24$ км/ч; $\upsilon_b = 72$ км/ч; $\upsilon_c = 72$ км/ч.

Точки (1), (2) и (3) – соответствуют моментам времени встреч или обгона автомобилями друг друга. Встреча автомобиля (*a*) и (*c*): *x* = 33 км при *t* = 12 ч 46 мин 10 с.

Встреча автомобиля (*b*) и (*c*): *x* = 32,6 км при *t* = 12 ч 46 мин 30 с.

Встреча автомобиля (*a*) и (*b*): *x* = 33,4 км при *t* = 12 ч 47 мин 10 с.

№	**7.2. Критерии оценивания (из 15 баллов)**.	Баллы
1	Построен график *x* от *t* и нанесены координатные точки	3
2	Проведены прямые, соответствующие движению каждого из автомобилей (по 2 балла за каждую прямую)	6
3	Найдены скорости автомобилей (по 1 баллу за каждую)	3
4	Найдены координаты точек, соответствующих моментам времени встреч или обгонов	3

7.3. Маша и медведи. В комнате у Маши стоит аквариум объёмом V_0, частично заполненный водой плотностью ρ_0. Также у Маши есть два одинаковых плюшевых медведя. Когда Маша погрузила одного медведя в аквариум, он намок и опустился на дно; при этом средняя плотность содержимого аквариума оказалась равной ρ_1, а когда она погрузила и второго медведя, плотность стала равной ρ_2. Определите массу m одного медведя. Вода из аквариума не вытекала.

7.3. Возможное решение. Пусть при погружении одного медведя суммарный объём содержимого аквариума стал равным $V_0 + V_1$, где V_1 – объём воды, вытесненной промокшим медведем. Найдём среднюю плотность системы:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0 V_0 + m}{V_0 + V_1}. \qquad (1)$$

Поскольку медведи одинаковые, при погружении в аквариум второго медведя объём системы станет равным $V_0 + 2V_1$. Найдём среднюю плотность системы ρ_2:

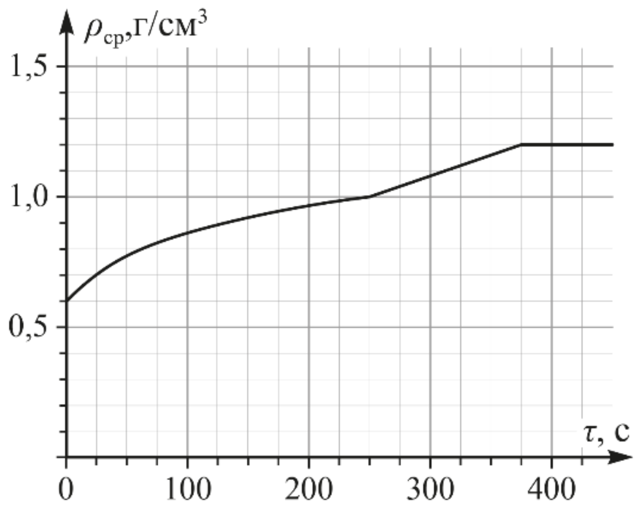
$$\rho_2 = \frac{\rho_0 V_0 + 2m}{V_0 + 2V_1}. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), получим:

$$m = \frac{V_0\left(\rho_1\rho_2 - \rho_0\left(2\rho_2 - \rho_1\right)\right)}{2\left(\rho_2 - \rho_1\right)}.$$

№	**7.3. Критерии оценивания (из 15 баллов)**	Баллы
1	Получено выражение для массы содержимого аквариума при погружении одного медведя	2
2	Получено выражение для объёма содержимого аквариума при погружении одного медведя	2
3	Получена формула (1)	1
4	Получено выражение для массы содержимого аквариума при погружении двух медведей	2
5	Получено выражение для объёма содержимого аквариума при погружении двух медведей	2
6	Получена формула (2)	1
7	Объём V_1 исключён из уравнений (1) и (2)	3
8	Получено выражение для m	2

7.4. Стратифицированные жидкости. В цилиндрическом сосуде находится $V_1 = 100$ мл жидкости плотностью ρ_1. В него начинают наливать с постоянным массовым расходом μ жидкость с плотностью ρ_2. График зависимости средней плотности содержимого сосуда от времени представлен на рисунке. Определите плотности ρ_1 и ρ_2, объём V_0 сосуда и массовый расход μ. Жидкости не смешиваются.



7.4. Возможное решение.

1) $\rho_{\text{ср}}(t) = \dfrac{\rho_1 V_1 + \mu t}{V_1 + \dfrac{\mu t}{\rho_2}}$ при $t \le t_1$, где $t_1 = \dfrac{\rho_2 (V_0 - V_1)}{\mu}$.

2) $\rho_{\text{ср}}(t) = \dfrac{\rho_1 \left(V_0 - \dfrac{\mu t}{\rho_2} \right) + \mu t}{V_0}$ при $t_1 \le t \le t_2$, где $t_2 = \dfrac{\rho_2 V_0}{\mu}$.

3) $\rho_{\text{ср}}(t) = \rho_2$ при $t \ge t_2$.

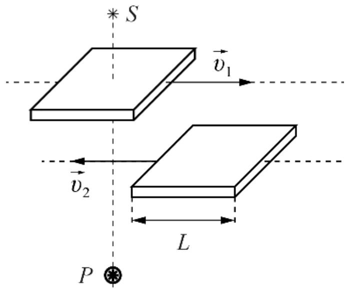
Из графика (для момента времени t = 0) получим: $\rho_1 = 0{,}6$ г/см^3.

Из графика (для момента времени t > 375 с) получим: $\rho_2 = 1{,}2$ г/см^3.

Решая совместно уравнения (1) и (2) для t_1 и t_2 находим: $\mu = 0{,}96$ г/с; $V_0 = 300$ мл.

№	**7.4. Критерии оценивания (из 15 баллов)**	Баллы
1	Из графика (для момента времени t = 0) найдено значение $\rho_1 = 0{,}6$ г/см^3.	2
2	Из графика (для момента времени t > 375 с) найдено значение $\rho_2 = 1{,}2$ г/см^3.	2
3	Записано уравнение для t_1	3
4	Записано уравнение для t_2	3
5	Из системы уравнений для t_1 и t_2 найдено значение μ	3
6	Из системы уравнений для t_1 и t_2 найдено значение V_0	2

8.1. Подвижные препятствия. Между источником сигнала S и приёмником P перпендикулярно соединяющей их прямой движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями две пластины длиной $L = 1$ м. Если сигнал по пути от источника к приёмнику проходит только через одну из пластин, то приёмник зажигает жёлтую лампочку, если через две – то красную. В некоторый момент времени на $t_1 = 3$ с зажглась жёлтая лампочка, затем $t_2 = 3$ с горела красная, а потом в течение $t_3 = 1$ с – опять жёлтая.



Определите, за какое время τ одна пластина проезжает мимо другой.

8.1. Возможное решение. Жёлтая лампочка загорается на дисплее в момент, когда одна из пластин (будем называть её первой) начинает перекрывать путь сигналу. В момент, когда загорается красная лампочка, на пути сигнала возникает вторая пластина. Красный цвет меняется на жёлтый, когда одна из пластин перестает мешать прохождению сигнала. Причём, это может быть как первая, так и вторая пластина.

В первом случае скорости пластин можно определить, как:

$$v_1 = \frac{L}{t_1+t_2} \text{ и } v_2 = \frac{L}{t_2+t_3}.$$

Во втором случае скорости пластин будут:

$$u_1 = \frac{L}{t_1+t_2+t_3} \text{ и } u_2 = \frac{L}{t_2}.$$

Пластины движутся друг другу навстречу. Значит, любая из пластин проходит мимо другой со скоростью $v_1 + v_2$ или $u_1 + u_2$ преодолевая при этом расстояние $2L$. В первом случае на это потребуется время:

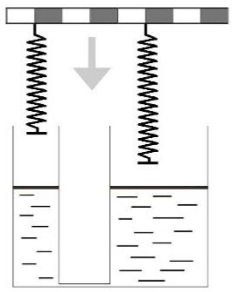
$$\tau_1 = \frac{2L}{\frac{L}{t_1+t_2} + \frac{L}{t_2+t_3}} = \frac{2(t_1+t_2)(t_2+t_3)}{t_1+2t_2+t_3} = 4{,}8 \text{ с.}$$

А во втором:

$$\tau_2 = \frac{2L}{\frac{L}{t_1+t_2+t_3} + \frac{L}{t_2}} = \frac{2t_2(t_1+t_2+t_3)}{t_1+2t_2+t_3} = 4{,}2 \text{ с.}$$

№	**8.1. Критерии оценивания (из 15 баллов)**	**Баллы**
1	Указано, что возможны две ситуации	1
2	Описана первая из возможных ситуаций	2
3	Верно определены v_1 и v_2 (1 балл + 1 балл)	2
4	Определено τ_1 (формула)	2
5	Определено τ_1 (число)	1
6	Описана вторая из возможных ситуаций	2
7	Верно определены u_1 и u_2 (1 балл + 1 балл)	2
8	Определено τ_2 (формула)	2
8	Определено τ_2 (число)	1

8.2. Балансир. Две пружины жёсткостью k (длинная) и $2k$ (короткая) отличаются по длине на l**.** Их прикрепляют к однородной массивной балке длиной $8l$. Затем конструкцию устанавливают на лёгкие тонкие поршни сообщающихся сосудов, заполненных жидкостью плотностью ρ, сечения которых S и $2S$. При этом балка принимает горизонтальное положение. Определите массу балки M.



8.2. Возможное решение. Введем обозначения T_1, l_1 и Δl_1 – сила упругости, длина и деформация левой пружины, T_2, l_2 и Δl_2 – сила упругости, длина и деформация правой пружины, Δh - разница высот между поршнями.

Определим силы упругости пружин. Для этого применим правило моментов для балки относительно точек крепления правой и левой пружин:

$$T_1 \cdot 4l = Mg \cdot l.$$
$$T_2 \cdot 4l = Mg \cdot 3l.$$

Откуда следует:

$$T_1 = \frac{1}{4}Mg.$$
$$T_2 = \frac{3}{4}Mg.$$

Таким образом, давление под правым поршнем будет выше, чем под левым (площади отличаются в 2 раза, а силы – в 3). Значит, левый поршень поднимется, а правый опустится.

Из закона Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{Mg}{8k};\ \Delta l_2 = \frac{3Mg}{4k}. \qquad (1)$$

Из условия равенства давлений на дне сообщающихся сосудов:

$$\frac{Mg}{8S} = \rho g \Delta h. \qquad (2)$$
$$\frac{3Mg}{4 \cdot 2S} = \frac{Mg}{4 \cdot S} + \rho g \Delta h.$$

Поскольку балка горизонтальна:

$$l_1 - \Delta l_1 + \Delta h = l_2 - \Delta l_2. \qquad (3)$$

С учётом разницы длин пружин:

$$\Delta h = l - \Delta l_2 + \Delta l_1 = l - \frac{3Mg}{4k} + \frac{Mg}{8k}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получим:

$$\frac{Mg}{8S} = \rho g \left(l - \frac{5Mg}{8k} \right).$$

Откуда:

$$M = \frac{8\rho Slk}{(5\rho g S + k)}.$$

№	**8.2. Критерии оценивания (из 15 баллов)**	**Баллы**
1	Найдены силы натяжения пружин через Mg (1 + 1 = 2 балла)	2
2	Указано или использовано в решении, что левый поршень поднимется, а правый опустится	2
3	Записан Закон Гука для пружин (1) ((1 + 1 = 2 балла)	2
4	Условие равенства давлений на дне сообщающихся сосудов (2)	3
5	Условие на длину пружин (3)	2
6	Получено выражение для Δh (4)	2
7	Получено выражение для M	2

8.3. Тёплый пол. Отопление кухни организовано с помощью системы электрического тёплого пола. Сначала он работал в базовом режиме, и на кухне установилась температура t_1 = 18°С. Затем его мощность увеличили в 4 раза, и температура на кухне возросла до t_2 = 21°С.

- Какая температура t_x установится на кухне, если базовую мощность увеличить в 9 раз?
- Определите температуру t_0 воздуха на улице.

8.3. Возможное решение. Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур между улицей и кухней. Пусть P – базовая мощность тёплого пола, а α – коэффициент пропорциональности тепловых потерь. Тогда условия теплового равновесия для каждого из случаев выглядят так:

$$\alpha(t_1 - t_0) = P. \qquad (1)$$

$$\alpha(t_2 - t_0) = 4P. \qquad (2)$$

$$\alpha(t_x - t_0) = 9P. \qquad (3)$$

Разделив (2) на (1) получим:

$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = 4,$$

откуда:

$$t_0 = \frac{4t_1 - t_2}{3} = 17°\text{C}.$$

Аналогично, разделив (3) на (1) получим:

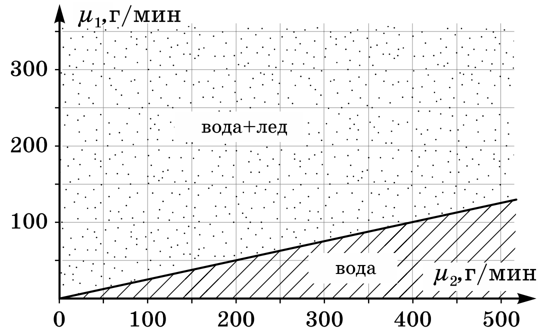
$$\frac{t_x - t_0}{t_1 - t_0} = 9,$$

откуда:

$$t_x = 9t_1 - 8t_0 = 26°\text{C}.$$

№	**8.3. Критерии оценивания (из 15 баллов)**	**Баллы**
1	Указано, что мощность тепловых потерь пропорциональна разнице температур между улицей и кухней	2
2	Указано, что в установившемся режиме мощность тёплого пола равна мощности тепловых потерь	1
3	Записано уравнение (1) или его аналог	2
4	Записано уравнение (2) или его аналог	2
5	Записано уравнение (3) или его аналог	2
6	Определена температура t_0	3
7	Определена температура t_x	3

8.4. Обледенение. В теплоизолированный сосуд по одной трубе с массовым расходом μ_1 поступает колотый лёд при температуре t_1 = 0°C, а по другой с массовым расходом μ_2 наливается вода при температуре t_2. На осях $\mu_1(\mu_2)$ представлена диаграмма состояний содержимого сосуда.



1) Определите температуру t_2 поступающей воды.
2) Постройте на осях $\mu_1(\mu_2)$ диаграмму состояний содержимого сосуда для случая, когда температура поступающей воды остается прежней, а температура льда равна t_3 = – 40°C.

Удельная теплоёмкость воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость льда $c_л$ = 2100 Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда λ = 335 кДж/кг. Теплоёмкостью сосуда можно пренебречь.

8.4. Возможное решение. Прямая, разделяющая на диаграмме две области, соответствует состоянию, в котором сосуд заполнен только водой при 0°C. Т.е. весь лёд тает, но не нагревается. Тогда можно записать уравнение теплового баланса для поступивших за время τ порций воды и льда:

$$\mu_1\tau\lambda = \mu_2\tau c_в(t_2 - t_0), \text{ где } t_0 = 0°C \text{ – температура плавления льда.}$$

По угловому коэффициенту наклона прямой $\mu_1 = \mu_2 c_в t_2/\lambda$ можно найти температуру воды.

$$c_в t_2/\lambda = 0{,}25, \text{ откуда } t_2 = 20°C.$$

Если по первой трубе будет поступать «холодный» лёд, то содержимое сосуда может находиться в трёх различных равновесных состояниях: 1) только лёд; 2) смесь вода + лёд; 3) только вода.

Найдем границу 1 и 2 состояний. Вся поступающая вода замерзает, но остается при 0°C. До этой же температуры нагревается поступающий лёд. Запишем уравнение теплового баланса.

$$\mu_1\tau c_л(t_0 - t_3) = \mu_2\tau c_в(t_2 - t_0) + \mu_2\tau\lambda,$$

из которого найдём коэффициент наклона прямой, разделяющей 1 и 2 состояния.

$$\mu_1/\mu_2 = (c_в(t_2 - t_0) + \lambda)/(c_л(t_0 - t_3)) = 5{,}0.$$

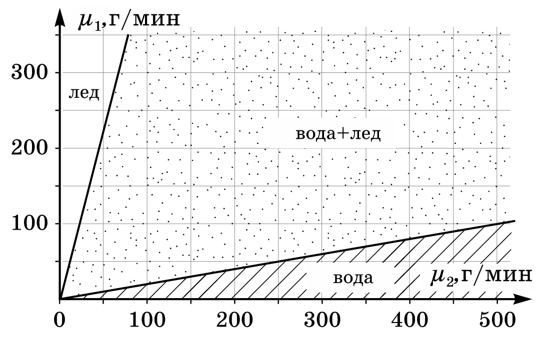
Граница 2 и 3 состояний находится аналогично. Только теперь весь поступающий лёд тает и остаётся при 0°C.

Такому процессу соответствует уравнение теплового баланса:

$$\mu_1\tau c_л(t_0 - t_3) + \mu_1\tau\lambda = \mu_2\tau c_в(t_2 - t_0),$$

из которого $\mu_1/\mu_2 = c_в(t_2 - t_0)/(c_л(t_0 - t_3) + \lambda) = 0{,}20$.

Строим новую диаграмму состояний.



№	8.4. Критерии оценивания (из 15 баллов)	Баллы
1	Уравнение теплового баланса для граничного состояния содержимого	2
2	Определение температуры воды из углового коэффициента наклона (идея (2 балла) + численный результат (1 балл))	3
3	Учёт трёх возможных состояний содержимого в случае «холодного» льда	2
4	Уравнение теплового баланса для границы 1 и 2 состояний содержимого	2
5	Расчёт углового коэффициента наклона границы 1 и 2 состояний	1
6	Уравнение теплового баланса для границы 2 и 3 состояний содержимого	2
7	Расчёт углового коэффициента наклона границы 2 и 3 состояний	1
8	Построение диаграммы состояний	2