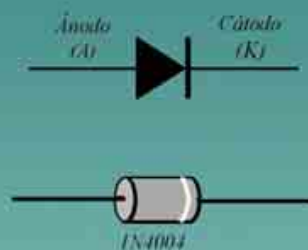
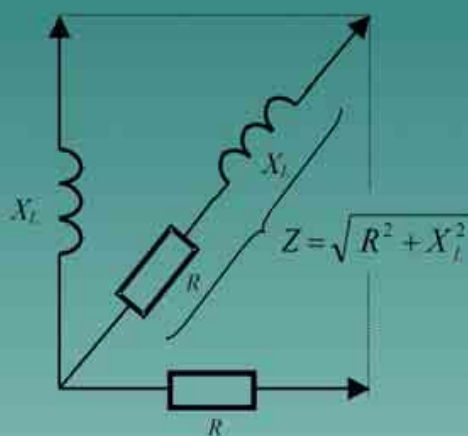


# Principios de electricidad y electrónica

TOMO III

Antonio Hermosa Donate



**marcombo**  
BOIXAREU EDITORES

**¡CON  
EJERCICIOS  
PROPUESTOS Y  
DESARROLLADOS!**

**Principios de  
electricidad y  
electrónica  
Tomo III**

*Amigo lector:*

*La obra que usted tiene en sus manos posee un gran valor. En ella, su autor, ha vertido conocimientos, experiencia y mucho trabajo. El editor ha procurado una presentación digna de su contenido y está poniendo todo su empeño y recursos para que sea ampliamente difundida, a través de su red de comercialización.*

*Usted puede obtener fotocopias de las páginas del libro para su uso personal. Pero desconfíe y rehúse cualquier ejemplar “pirata” o fotocopia ilegal del mismo porque, de lo contrario, contribuiría al lucro de quienes, consciente o inconscientemente, se aprovechan ilegalmente del esfuerzo del autor y del editor.*

*La reprografía indiscriminada y la piratería editorial, no solamente son prácticas ilegales, sino que atentan contra la creatividad y contra la difusión de la cultura.*

**PROMUEVA LA CREATIVIDAD**

**RESPETE EL DERECHO DE AUTOR**

# Principios de electricidad y electrónica

TOMO III

**Antonio Hermosa Donate**

Profesor de electricidad y electrónica  
Escuela Técnica Profesional del Clot (Barcelona)



**marcombo**  
BOIXAREU EDITORES

# Principios de electricidad y electrónica.

## Tomo III

© Antonio Hermosa, 2003  
Reservados todos los derechos de  
publicación, reproducción, préstamo,  
alquiler o cualquier otra forma de  
cesión del uso de este ejemplar  
en cualquier idioma por  
MARCOMBO, S.A.  
Gran Via de les Corts Catalanes, 594  
08007 Barcelona (España)

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización de los propietarios del “Copyright”, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, así como la exportación e importación de esos ejemplares para su distribución en venta, fuera del ámbito de la Unión Europea.

Depósito Legal: SE-869-2003 (III)

ISBN: 84-267-1357-2

Impreso en España

Printed in Spain

Composición: Kikero - Gran Via, 594 - 08007 Barcelona

Impresión: Publicaciones Digitales, S.A.

www.publidisa.com — (+34) 95.458.34.25. (Sevilla)

# Índice general

Introducción .....	IX
--------------------	----

Capítulo 1. Conceptos y análisis de circuitos básicos en corriente alterna .....	1
--	---

1.1 Resistencia puramente óhmica .....	1
1.2 La bobina en corriente alterna. Reactancia inductiva ( $X_L$ ) .....	1
1.3 El condensador en corriente alterna. Reactancia capacitiva ( $X_C$ ) .....	6
1.4 Análisis de los circuitos elementales en corriente alterna.....	8
1.4.1 Análisis del circuito puramente resistivo.....	8
1.4.1.1 Potencia eléctrica desarrollada.....	12
1.4.2 Análisis del circuito puramente inductivo.....	15
1.4.2.1 Potencia eléctrica desarrollada.....	17
1.4.3 Análisis del circuito puramente capacitivo.....	21
1.4.3.1 Potencia eléctrica desarrollada.....	23
1.5 Conceptos sobre potencia en corriente alterna (activa, reactiva, aparente y $\cos \varphi$ ).....	27
1.5.1 Potencia activa (P).....	27
1.5.2 Potencia reactiva (Q) .....	27
1.5.3 Potencia aparente (S).....	28
1.5.4 Factor de potencia ( $\cos \varphi$ ).....	29
1.6 Ejercicios desarrollados .....	33
1.6.1 Cálculo de las potencias en el circuito inductivo.....	33
1.6.2 Cálculo de las potencias en el circuito capacitivo.....	34
1.7 Ejercicios propuestos .....	34

Capítulo 2. Introducción al cálculo de circuitos mediante números complejos.....	37
--	----

2.1 Introducción a los números complejos .....	37
2.2 El operador $j$ (unidad imaginaria) .....	38
2.2.1 El operador $j$ hace girar un vector $90^\circ$ .....	38
2.3 Concepto de número complejo.....	41

2.4 Formas de expresión de un número complejo.....	44
2.4.1 Forma binómica.....	44
2.4.2 Forma trigonométrica .....	44
2.4.3 Forma polar .....	45
2.4.4 Ejercicio de ejemplo: Representación en la forma binómica, polar y trigonométrica: .....	46
2.5 Ejercicios desarrollados .....	48
2.6 Operaciones básicas con los números complejos.....	51
2.6.1 Aplicación de la calculadora .....	51
2.6.1.1 Ejemplo de operaciones de conversión mediante calculadora.....	51
2.6.2 Suma de números complejos.....	53
2.6.2.1 Ejercicio de aplicación .....	55
2.6.3 Resta de números complejos .....	58
2.6.3.1 Ejemplo de aplicación .....	59
2.6.4 Operación de multiplicar.....	60
2.6.4.1 Multiplicación en la forma binómica.....	61
2.6.4.2 Multiplicación en la forma polar.....	61
2.6.5 Operación de dividir.....	62
2.6.5.1 División en la forma binómica.....	62
2.6.5.1.1 Conjugado de un complejo .....	62
2.6.5.2 División en la forma polar .....	65
2.7 Aplicación de la notación compleja a los circuitos de electricidad y electrónica.....	66
2.8 Ejercicios propuestos .....	71

## Capítulo 3. Circuitos serie con resistencia, inductancia y capacidad (R - L - C) .....73

3.1 Circuito serie R – L .....	73
3.1.1 Impedancia.....	76
3.1.2 Potencia .....	81
3.1.3 Ejercicio de ejemplo análisis.....	84
3.2 Circuito serie R-C.....	85
3.2.1 Impedancia.....	89
3.2.2 Potencia .....	89
3.2.3 Ejemplo de ejercicio de análisis.....	91
3.3 Circuito serie R-L-C .....	93
3.3.1 Principios básicos generales .....	93
3.3.2 Ejemplo de cálculo .....	98
3.3.3 Circuito R- L - C de carácter inductivo.....	101
3.3.4 Circuito R-C-L de carácter capacitivo.....	101
3.4 Resonancia en el circuito serie .....	103
3.4.1 Principios básicos .....	103
3.4.2 Ejemplo de ejercicio .....	106

3.5 Ejercicios desarrollados .....	109
3.5.1 Circuito R - L .....	109
3.5.2 Circuito R - C .....	114
3.5.3 Circuito R-L-C.....	116
3.6 Ejercicios propuestos .....	120

## **Capítulo 4. Circuitos paralelo R-L-C: Principios básicos, resonancia y compensación de potencia reactiva. ....121**

4.1 Introducción .....	121
4.1.1 Generalidades sobre suma de intensidades y potencias .....	123
4.2 Circuito paralelo R-C.....	126
4.2.1 Susceptancia y admitancia.....	128
4.2.2 Ejemplo de ejercicio de cálculo de un circuito R-C .....	132
4.2.3 Ejemplo de aplicación de las admitancias.....	134
4.3 Circuito paralelo R-L.....	135
4.3.1 Ejemplo de ejercicio de cálculo de un circuito R-L.....	137
4.4 Circuitos paralelo R-L-C .....	139
4.4.1 Circuito de carácter capacitivo .....	139
4.4.2 Circuito de carácter inductivo .....	142
4.4.3 Impedancia.....	142
4.4.4 Ejemplo de ejercicio de cálculo de un circuito R-L-C.....	143
4.5 Resonancia en el circuito paralelo.....	149
4.6 Factor Q .....	156
4.7 Compensación de la potencia reactiva.....	158
4.7.1 Calculo de los condensadores de compensación.....	161
4.8 Ejercicios desarrollados .....	167
4.8.1 Montaje paralelo de un motor y una resistencia calefactora.....	167
4.8.2 Circuito serie – paralelo .....	171
4.8.3 Compensación de reactiva .....	176
4.8.4 Cálculo del $\cos \varphi$ en función del consumo de P y Q.....	179
4.9 Ejercicios propuestos .....	180

## **Capítulo 5. Introducción a la electrónica y sus componentes básicos .....183**

5.1 Introducción .....	183
5.2 ¿Qué es la electrónica? .....	183
5.3 Introducción a los componentes semiconductores .....	185
5.3.1 NTC-PTC (termistores) .....	186
5.3.2 LDR (Ligth Dependent Resistor).....	188
5.3.3 Fotodiodo y Fototransistor .....	188
5.3.4 LED (Light Emitting Diode) .....	189



5.3.4.1 Displays de 7 segmentos .....	189
5.3.5 VDR (Voltaje Dependent Resistor) .....	190
5.3.6 El diodo y el transistor bipolar .....	191
5.3.6.1 El transistor bipolar .....	192
5.3.6.2 El transistor de efecto de campo (MOS).....	193
5.3.7 Tiristores .....	194
5.3.7.1 Tiristor SCR .....	194
5.3.7.2 Triac y Diac .....	194
5.3.8 Circuitos integrados (CI) .....	195
5.4 Conceptos sobre física de los semiconductores .....	197
5.4.1 Semiconductor intrínseco .....	197
5.4.2 Enlace covalente .....	199
5.4.3 Portadores de carga: Electrones y Huecos .....	199
5.4.4 Semiconductores N y P .....	201
5.4.1.1 Semiconductor N.....	202
5.4.1.2 Semiconductor P .....	203
5.5 La unión PN: El diodo.....	205
5.5.1 Polarización de la unión PN (diodo) .....	206
5.5.1.1 Polarización directa .....	207
5.5.1.2 Polarización inversa.....	208
<b>Respuestas a los ejercicios propuestos .....</b>	<b>211</b>

# Introducción

La materia que se expone en esta serie de libros constituye los principios fundamentales de la electricidad y de la electrónica. En este tomo (III), se explican, de forma detallada y práctica, los principios básicos sobre los circuitos de corriente alterna tales como *reactancia*, *impedancia*, *desfases*, *factor de potencia* ( $\cos \varphi$ ), *potencias activas y reactivas*, *resonancia*, etc., así como una introducción al cálculo mediante *números complejos*.

Todo ello se explica combinando adecuadamente los conceptos teóricos con la utilidad práctica, y apoyado por diversos ejercicios desarrollados. También se dedica un capítulo completo para explicar los principios conceptuales de la electrónica y proporcionar una visión global sobre los componentes electrónicos básicos, así como la base física que soporta a la electrónica; los materiales semiconductores, en especial el silicio.

El nivel técnico es básico-medio, procurando un máximo didactismo y un enfoque práctico. Estas características hacen que resulte de especial interés en los estudios de formación técnica profesional en general (*ciclos formativos*), así como a todo aquel interesado en las bases de la electricidad y electrónica.

Dado las necesidades de los estudios profesionales (*ciclos formativos*) y a la formación autodidacta a que se ven obligados los técnicos en ejercicio, así como el interés mostrado por los lectores, se ha considerado ampliar esta colección con nuevos tomos para poder así tratar todos los temas fundamentales de la electricidad y electrónica con el nivel y enfoque adecuado a los estudios profesionales y necesidades de la industria. Por ello, se ha hecho una reestructuración de la serie para dar lugar a nuevos tomos. A partir del tomo IV, todos los temas serán exclusivamente de electrónica, siguiendo la misma línea didáctica que en los anteriores tomos. Se iniciará partiendo de la base electrónica que se explica en el capítulo 5 del presente tomo, cuyos componentes serán tratados de forma detallada y, sobre todo, con circuitos prácticos de aplicación. En sucesivos tomos se tratarán todos los demás componentes y sistemas de mayor interés de la electrónica aplicada, dentro de las ramas de *amplificación de sonido (audio)*, *electrónica industrial* y *técnicas digitales*.

EL AUTOR



## Capítulo 1

# Conceptos y análisis de circuitos básicos en corriente alterna

### 1.1 RESISTENCIA PURAMENTE ÓHMICA

Se entiende por resistencia óhmica pura, aquella cuyo valor viene dado específicamente por sus características físicas materiales, siendo su valor constante e independiente de la frecuencia. Dicho valor viene determinado por el parámetro resistividad,  $\rho$ , característico de cada material. Así, pues, el valor resistivo de un hilo conductor (por ejemplo, cobre) de una cierta longitud y sección viene dado exclusivamente por la conocida expresión:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

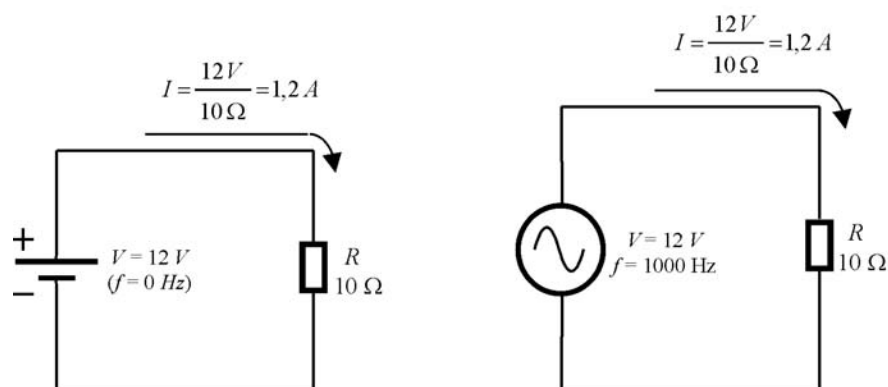
Y el valor de la resistencia ( $R$ ) es igual tanto en c.c. como en c.a.; de hecho, en la fórmula no aparece el factor frecuencia. En el caso de los componentes denominados resistores (o simplemente, resistencias) es su valor característico. Así, por ejemplo, una resistencia pura de  $100 \Omega$  debe producir el mismo efecto de oposición al paso de la corriente tanto con una tensión continua como con una tensión alterna; el valor de corriente queda determinado por los  $100 \Omega$ , como se representa gráficamente en la figura 1.1.

### 1.2 LA BOBINA EN CORRIENTE ALTERNA. REACTANCIA INDUCTIVA ( $X_L$ )

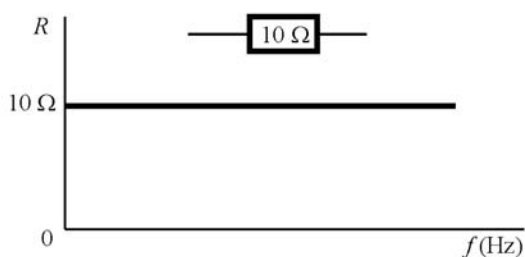
Antes de pasar a explicar el comportamiento y características que presenta la bobina cuando se le aplica corriente alterna, veamos un breve repaso sobre el comportamiento de la bobina en corriente continua.

#### ***Comportamiento de la bobina en corriente continua:***

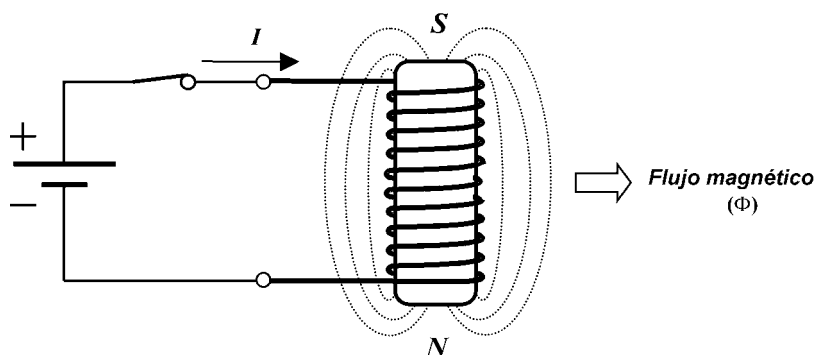
Cuando se le aplica una tensión continua a la bobina ésta genera un campo magnético mientras circule corriente por ella; o sea, se comporta como un imán (fig.1.2). Además, se producen unos retrasos en la corriente en los instantes de la conexión y desconexión (fig.1.3), que hace que se tarde un cierto en alcanzar los



*El valor de la resistencia puramente óhmica no varía con la frecuencia.*

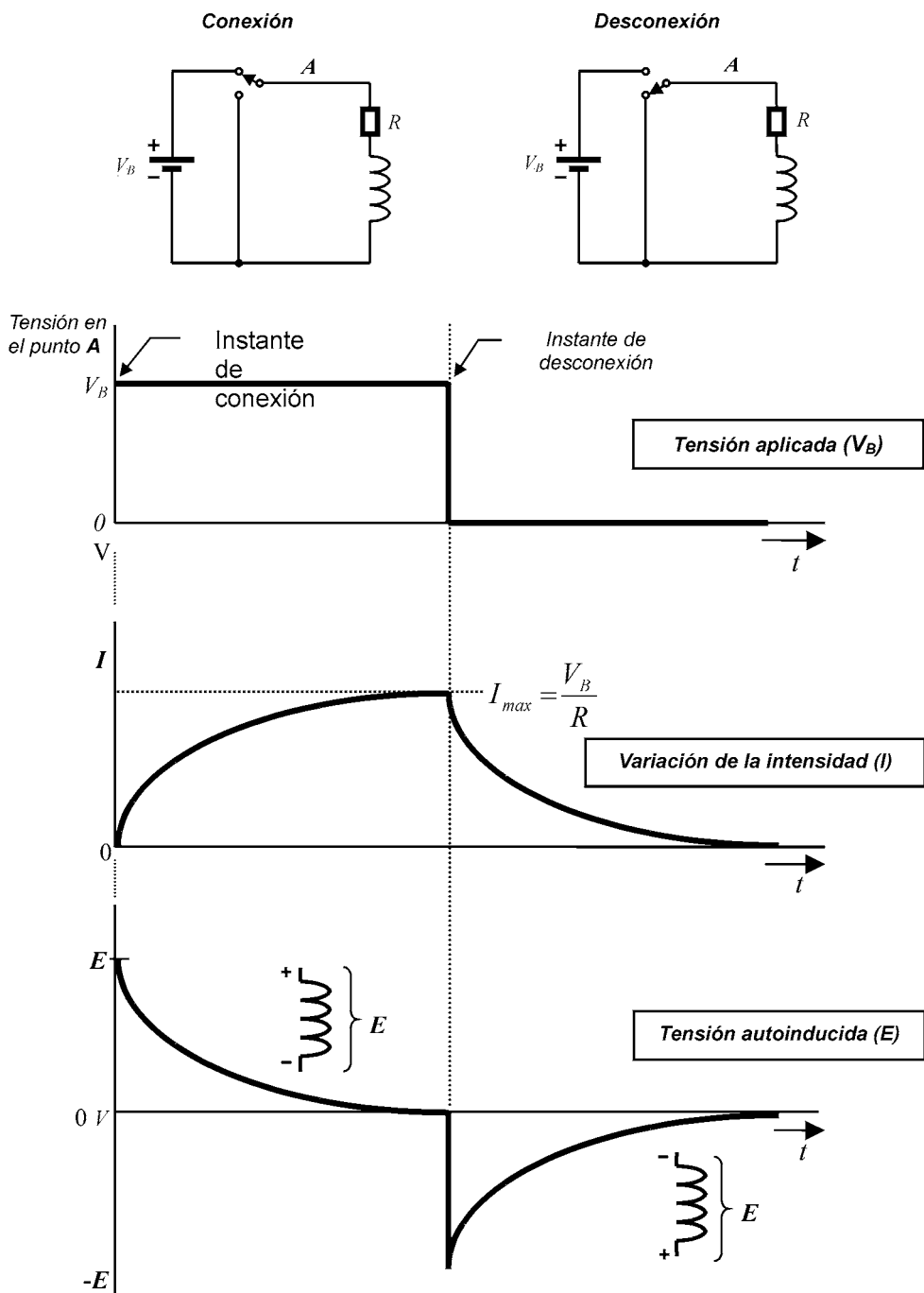


**Figura 1.1.**



*Al circular corriente continua por la bobina, ésta genera un flujo magnético ( $\Phi$ ) constante.*

**Figura 1.2.**



**Figura 1.3.** Variación de la corriente y pulsos de f.e.m. en la bobina en los instantes de la conexión y desconexión.

valores permanentes. (Esto es debido al efecto de autoinducción; las variaciones de corriente dan lugar a que se genere una f.e.m. cuya polaridad es siempre tal que se opone a que la corriente aumente o disminuya – ley de Lenz). Asimismo, en los instantes de la desconexión, debido al efecto de autoinducción y a la gran rapidez con se puede extinguir la corriente, se pueden generar unos impulsos de f.e.m. de muy elevado voltaje.

A nivel resistivo, todo se limita a la resistencia óhmica del hilo; por ello, en la práctica, a veces se dice que la bobina en corriente continua se comporta como si fuera un hilo conductor

Cuando la bobina recibe corriente alterna, además de la resistencia puramente óhmica determinada por el hilo, aparece otro factor de oposición a la circulación de la c.a. que se denomina *reactancia inductiva*, que se representa por  $X_L$  y se mide en  $\Omega$ . Esto es debido al efecto de autoinducción, que se da de forma continua y con una rapidez determinada por la frecuencia.

La reactancia es el valor resistivo que normalmente se tiene en cuenta en las bobinas; de hecho, en la bobina ideal (o pura) se supone una resistencia óhmica (la del hilo) de  $0 \Omega$ .

El valor de reactancia de una bobina depende de su valor de inductancia y de la frecuencia de la corriente alterna aplicada. Se basa en la fórmula:

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L = \omega L$$

$X_L$  = Reactancia inductiva ( $\Omega$ )

$2\pi = 6,283$

$f$  = Frecuencia (Hz)

$L$  = Inductancia de la bobina (H)

### Ejemplo 1.1:

Una bobina de 2 H conectada a una tensión de 2 kHz presenta una reactancia de:

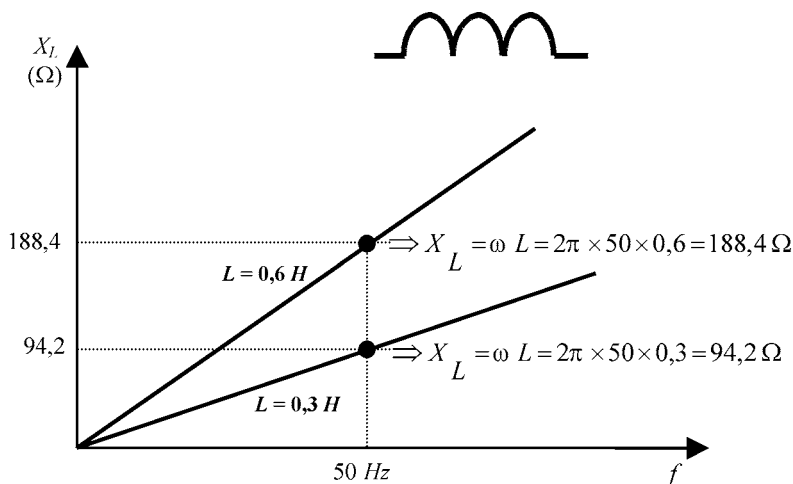
$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 6,283 \times 2.000 \times 2 = 25132 \Omega$$

Así, a dicha frecuencia equivale a una resistencia de  $25132 \Omega$ .

Aunque la bobina equivale a dicho valor resistivo, en la realidad, no es equivalente totalmente a una resistencia del mismo valor óhmico, ya que, como más adelante se explica, no disipa potencia eléctrica como la resistencia.

La oposición que presenta una bobina al paso de la corriente alterna, como se deduce, aumenta pues con la frecuencia; la reactancia es mayor conforme aumenta la frecuencia. Y cuanto mayor sea el valor de la inductancia ( $L$ ) mayor será también el efecto de la reactancia (fig.1.4); el factor  $2\pi L$  es una constante que determina la pendiente de la recta. De hecho, la expresión  $X_L = 2\pi f L$  se corresponde con la ecuación de una recta,  $y = a x + b$ , siendo:  $b = 0$ ,  $a = 2\pi L$  y  $x = f$ .

A muy elevada frecuencia, como se deduce, su reactancia tiende a infinito; o sea, la bobina tiende a comportarse como un circuito abierto. Por otra parte, a fre-



**Figura 1.4.** La reactancia inductiva es directamente proporcional a la frecuencia y a la inductancia.

cuencias muy bajas la reactancia será muy baja; o sea, la bobina se comporta casi como un cortocircuito.

El efecto de oposición al paso de la corriente alterna que presenta la bobina, reactancia inductiva, aparece como consecuencia del fenómeno de la autoinducción. Que, como ya debe saberse (tomo 2), consiste en que la bobina se autoinduce una f.e.m. cuando se producen variaciones de corriente; y la polaridad de dicha f.e.m. es tal que siempre se opone a dichas variaciones (ley de Lenz). En resumen, presenta resistencia a las corrientes variables. El valor de f.e.m. ( $E$ ) autoinducida viene dado por la fórmula de Faraday:

$$E = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Cuanto mayor se la frecuencia mayor será la velocidad de variación de la intensidad ( $\Delta I/\Delta t$ ) y mayor será también entonces el valor de la f.e.m. autoinducida ( $E$ ). Y este efecto será asimismo mayor cuanto mayor sea el valor de la inductancia ( $L$ ).

O sea, la corriente alterna de entrada se encuentra una oposición (originada por la f.e.m.) que es mayor cuanto mayor sea la frecuencia. Y, por este mismo motivo de oposición a las variaciones de corriente, la intensidad circula por la bobina con un retraso (teórico) de  $90^\circ$  con respecto a la tensión.

En cambio en corriente continua, la resistencia únicamente se debe a la puramente óhmica del hilo; por ello, en la práctica, a veces se dice que la bobina en c.c. se comporta como si fuera un simple hilo conductor, y que sólo tiene resistencia en corriente alterna. De hecho, la fórmula de la reactancia también indica que en c.c. el valor de la reactancia vale cero:

$$\text{Corriente continua} \Rightarrow f = 0 \text{ Hz} \Rightarrow X_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 0 \cdot L = 0 \Omega$$

Como se explicará más adelante de una forma más detallada, en la práctica, los



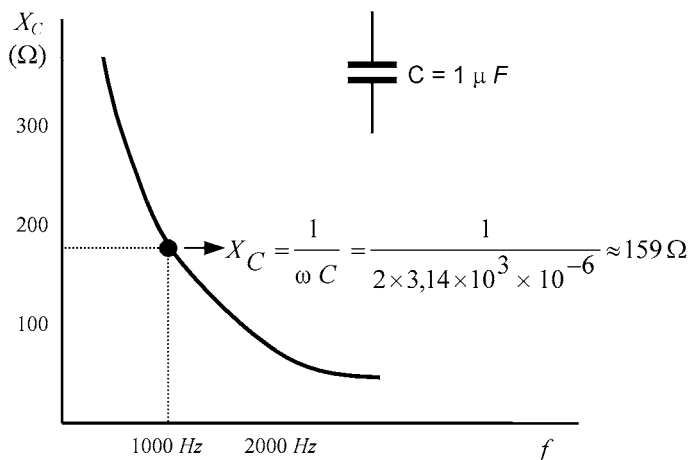
componentes no son puros y por ello tampoco aparecen circuitos puramente resistivos ni inductivos. Por ejemplo, en las bobinas la resistencia del hilo puede llegar a influir notablemente en las características del circuito; y, por otra parte, hasta en los cables de conexión y componentes resistores, a ciertas frecuencias, el efecto inductivo puede ser notable.

Cuando se consideran la acción combinada de la resistencia óhmica y de la reactancia aparece otro concepto muy importante, que se denomina *impedancia* ( $Z$ ); es el efecto resultante (suma vectorial) de los dos tipos de oposiciones (o resistencias). (Se explica en el capítulo siguiente).

### 1.3 EL CONDENSADOR EN CORRIENTE ALTERNA. REACTANCIA CAPACITIVA ( $X_C$ )

Tal como se explica detalladamente en el tomo 2, el condensador almacena carga eléctrica (culombios). Y sólo da lugar a una circulación de corriente por el circuito mientras se está cargando o descargando. Así, pues, el condensador en c.c. no permite una circulación de corriente de forma permanente; únicamente la permite cuando existen variaciones de tensión, lo cual sucede en los tiempos que se carga o descarga.

En el condensador, la corriente toma el valor máximo en el instante inicial de la carga o descarga, y después va disminuyendo conforme se va cargando o descargando. Así, pues, si le aplica una tensión alterna, puesto que ésta varía constantemente de polaridad y de valor, el condensador se va cargando y descargando continuamente con una rapidez dependiente de la frecuencia; de lo cual resulta una corriente alterna permanente de un determinado valor medio, que será mayor cuanto más alta sea la frecuencia. Así, pues, se puede decir que el condensador en c.a. se comporta como una resistencia, cuyo valor depende de la frecuencia y de la capacidad del condensador.



**Figura 1.5.** La reactancia capacitiva es inversamente proporcional a la frecuencia y a la capacidad.

Y a este tipo de resistencia se denomina *reactancia capacitiva*, que se representa por  $X_C$  y se mide en  $\Omega$ . Su valor viene dado por la fórmula:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

Como se observa en ella, la oposición que presenta el condensador al paso de la corriente alterna,  $X_C$ , es inversamente proporcional a la frecuencia y a la capacidad. Así, cuanto mayor sea la frecuencia ( $f$ ) y la capacidad ( $C$ ) menor será la reactancia, como se representa en la figura 1.5.

### Ejemplo 1.2:

Un condensador de  $4,7 \mu\text{F}$  conectado a una tensión alterna de frecuencia  $50 \text{ Hz}$  presenta una reactancia de:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 50 \times 4,710^{-6}} \approx 677 \Omega$$

Así, a dicha frecuencia realiza el mismo efecto resistivo que una resistencia de  $677 \Omega$ .

Al igual que ocurre con la bobina, como más adelante se explicará, la reactancia capacitiva tampoco disipa potencia eléctrica, por lo que únicamente es equivalente a una resistencia en cuanto al valor óhmico.

Además del factor reactancia, el condensador presenta otra característica muy importante: produce un desfase de  $90^\circ$  de la tensión con respecto a la intensidad. Como se sabe, el condensador tarda un cierto tiempo en cargarse y descargarse, es decir, presenta una cierta oposición a los cambios de tensión; pues dicha característica es la que da lugar, además de a la reactancia, ha que la tensión quede retrasada  $90^\circ$  con respecto a la corriente. Esto equivale a decir que la onda de la corriente en el condensador se adelanta  $90^\circ$  con respecto a la onda de la tensión.

Así, pues, según se deduce, el condensador se comporta de forma contraria a la bobina.

Un resumen sobre ambos componentes es:

### **Bobina:**

La onda de la intensidad va retrasada  $90^\circ$  con respecto a la onda de la tensión

Si aumenta la inductancia ( $L$ )  $\Rightarrow$  aumenta la reactancia ( $X_L$ )

Si la frecuencia aumenta  $\Rightarrow$  aumenta la reactancia

En c.c. ( $f = 0 \text{ Hz}$ )  $\Rightarrow X_L = 2 \pi f L = 0 \Omega$  (Muy baja resistencia)

A muy alta frecuencia ( $f \rightarrow \infty$ )  $\Rightarrow X_L = \omega L \Rightarrow \infty \Omega$  (Muy alta resistencia)

### **Condensador:**

La onda de la intensidad va adelantada  $90^\circ$  con respecto a la onda de la tensión

Si aumenta la capacidad ( $C$ )  $\Rightarrow$  disminuye la reactancia ( $X_C$ )

Si la frecuencia aumenta  $\Rightarrow$  disminuye la reactancia

$$\text{En c.c. (} f = 0 \text{ Hz)} \Rightarrow X_c = \frac{1}{2\pi f C} = \infty \Omega \text{ (Muy alta resistencia)}$$

$$\text{A muy alta frecuencia (} f \rightarrow \infty \text{)} \Rightarrow X_c = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow 0 \Omega \text{ (Baja resistencia)}$$

## 1.4 ANÁLISIS DE LOS CIRCUITOS ELEMENTALES EN CORRIENTE ALTERNA

Una vez explicado los conceptos básicos relativos a los componentes elementales, a continuación pasamos a hacer un análisis de los circuitos basados en dichos componentes.

### 1.4.1 Análisis del circuito puramente resistivo

Como ya se ha indicado al principio, son circuitos resistivos puros aquellos en los cuales el valor de resistencia no depende de la frecuencia. En ellos no existe efecto inductivo ni capacitivo, y no existe por tanto desfase entre las ondas de tensión y de corriente.

Hay que tener en cuenta que, en la práctica, no existen circuitos resistivos puros, ya que siempre existe algo de efecto capacitivo e inductivo, aunque su efecto puede ser despreciable. Un ejemplo de cargas (receptores) que, en la práctica, se consideran totalmente resistivas son: Bombillas de incandescencia, estufas eléctricas, soldadores, etc.

#### *Ejemplo de análisis 1.1:*

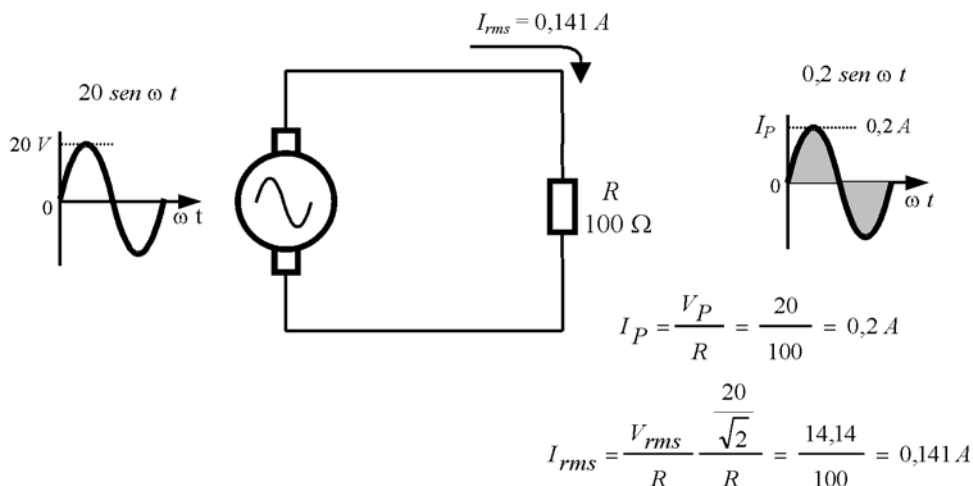
Supongamos el circuito de la figura 1.6. A una resistencia de  $100 \Omega$  se aplica una tensión alterna de  $V_p = 20 \text{ V}$  y  $f = 50 \text{ Hz}$ .

El valor instantáneo de la tensión del generador se puede expresar, pues:

$$v = 20 \text{ sen } \omega t$$

O bien, puesto que la velocidad angular (rad/s) es  $\omega = 2\pi f = 2 \times 3,14 \times 50 = 314,16$ :

$$v = 20 \text{ sen } 314,16 t$$



En un circuito puramente resistivo, la tensión y la corriente van en fase.

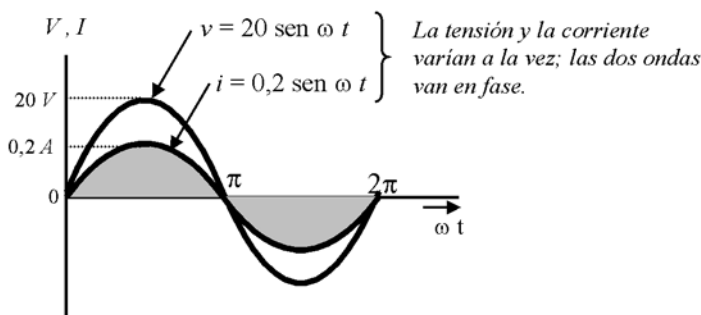


Figura 1.6.

El valor de pico y eficaz de la intensidad se obtiene aplicando la ley de Ohm:

$$I_P = \frac{V_P}{R} = \frac{20}{100} \approx 0,2 \text{ A} = 200 \text{ mA} \quad \Rightarrow \quad I_{rms} = \frac{I_P}{\sqrt{2}} = \frac{0,2}{1,414} = 0,141 \text{ A} = 141 \text{ mA}$$

Así, la expresión analítica de la corriente alterna que circula por la resistencia es:

$$i = 0,2 \sin 314,16 t$$

Y, como ya se sabe, las ondas de tensión y de corriente varían de la misma manera, alcanzan los valores máximo y mínimo en los mismos instantes; no existe

desfase alguno entre ellas, lo cual ya queda reflejado en las expresiones analíticas de la tensión y corriente.

En la notación compleja (como se explicará en el capítulo 2), el cálculo de la intensidad (eficaz) y desfase se expresa de la manera:

$$I = \frac{V \angle \varphi}{R \angle 0^\circ} = \frac{V}{R} \angle \varphi - 0^\circ = \frac{V}{R} \angle \varphi$$

Poniendo valores:

$$I = \frac{\frac{V_p}{\sqrt{2}} \angle \varphi}{R \angle 0^\circ} = \frac{\frac{20}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{100 \angle 0^\circ} = 0,141 \text{ A} \angle 0^\circ$$

En la práctica, la onda de la intensidad en los circuitos se puede representar mediante el osciloscopio poniendo una resistencia de bajo valor en serie con la carga, y aplicando la caída de tensión que se produce en dicha resistencia a uno de los canales del osciloscopio, como se muestra en la figura 1.7. Como es obvio, la caída de tensión será proporcional a la intensidad que circule por el circuito, y será la representación de la intensidad, cuyo valor viene dado por:  $I_p = V_p/R_s$ .

Para que la resistencia sensora ( $R_s$ ) influya mínimamente en el circuito ésta debe ser de un valor bajo en comparación con la resistencia de carga ( $R_L$ ), al menos diez veces menor ( $R_s < R_L/10$ ). En este caso (fig.1.7) se ha utilizado una resistencia 100 veces menor, por lo cual la resistencia sensora casi no afecta al valor de la intensidad.

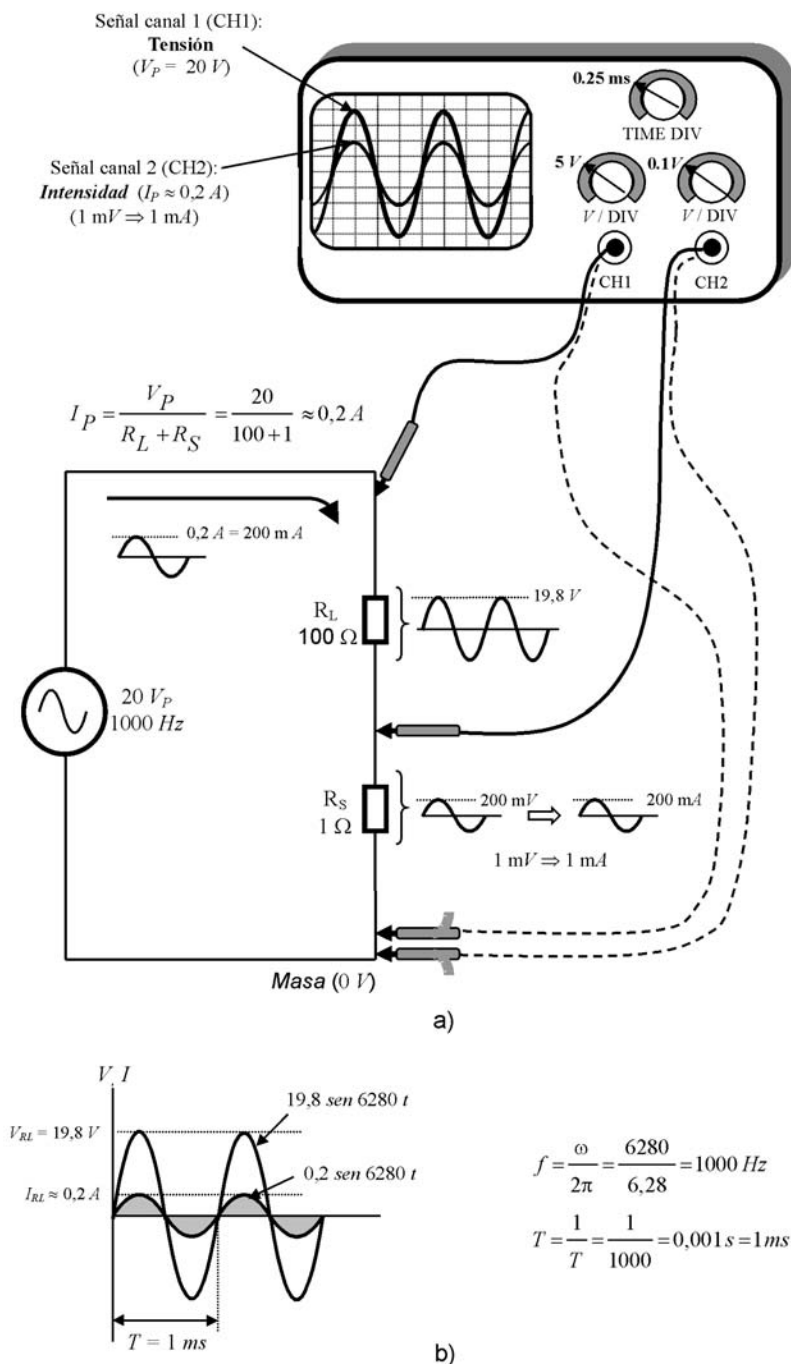
Sin la resistencia sensora:

$$I_p = \frac{V_p}{R_L} = \frac{20}{100} = 0,2 \text{ A} = 200 \text{ mA}$$

Con la resistencia sensora:

$$I_p = \frac{V_p}{R_L + R_s} = \frac{20}{100 + 1} = 0,198 \text{ A} = 198 \text{ mA}$$

Así, la caída de tensión en la resistencia sensora será de:  $V_p = I_p R_s = 0,198 \times 1 = 0,198 \text{ V}$ . Esta tensión representará a la onda de intensidad en el osciloscopio; cada mV representa un mA. Si se ajusta la sensibilidad del osciloscopio a 0,1 V por división (0,1V/DIV), la onda de la intensidad alcanzará una amplitud de casi 2 divisiones para representar la intensidad de pico de (casi) 200 mA, que es más que suficiente para poder observarla y compararla con la onda de tensión en la resistencia de carga ( $R_L = 100 \Omega$ ). Ajustando el canal para la tensión de  $R_L$  a 5 V/DIV, la onda de tensión alcanzará casi 4 divisiones en el valor de pico ( $\approx 20 \text{ V}$ ).



**Figura 1.7.** Circuito puramente resistivo. a) Representación práctica del montaje para visualizar las ondas de tensión y corriente mediante osciloscopio. b) Características calculadas de las ondas de tensión y corriente del circuito.

### 1.4.1.1 Potencia eléctrica desarrollada

En los circuitos puramente resistivos, la potencia consumida, o sea, el efecto térmico desarrollado en el total del valor de resistencia, es la media aritmética de todos los valores instantáneos de la potencia en un ciclo. De una forma gráfica, se puede hallar la curva de potencia multiplicando punto a punto la onda de tensión por la onda de la corriente. Se obtiene así una onda de frecuencia doble a la de la tensión, y que se encuentra siempre por encima del eje de cero (todos sus valores son positivos), como se muestra en la figura 1.8. La media de los valores instantáneos de la onda de potencia es la potencia real consumida por el circuito. La potencia instantánea viene dada por el producto, en cada instante, de la tensión por la corriente ( $P_i = V_i I_i$ ), y puede tomar valores positivos (encima del eje cero) o negativos (por debajo del eje cero), dependiendo del instante que se considere. Por potencia positiva se considera una transferencia de energía desde el generador hacia el receptor (carga); una potencia negativa significaría que existe una transferencia de energía desde el receptor hacia el generador, lo cual sólo se da en los circuitos con efecto reactivo (bobinas y condensadores).

Cuando las ondas de tensión y corriente están en fase, como en este caso, todos los valores instantáneos de la onda de potencia resultan positivos, están por encima del eje cero. Durante el semiciclo positivo, se multiplican siempre dos valores positivos y, claro, el resultado es también un valor positivo. Durante el semiciclo negativo se multiplican siempre dos valores negativos, lo cual da también valores positivos (menos por menos es igual a más:  $- \times - = +$ ).

Por otra parte, el sentido de circulación de la corriente no afecta al desarrollo de potencia; durante el semiciclo positivo se desarrolla la misma potencia que en el semiciclo negativo. Por ello, en la onda de potencia aparece un pulso positivo de potencia por cada semiciclo de las onda de tensión y corriente; la onda de potencia aparece pues con una frecuencia doble a las ondas de tensión y de corriente (fig.1.8a).

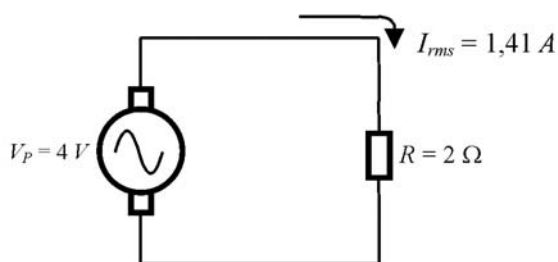
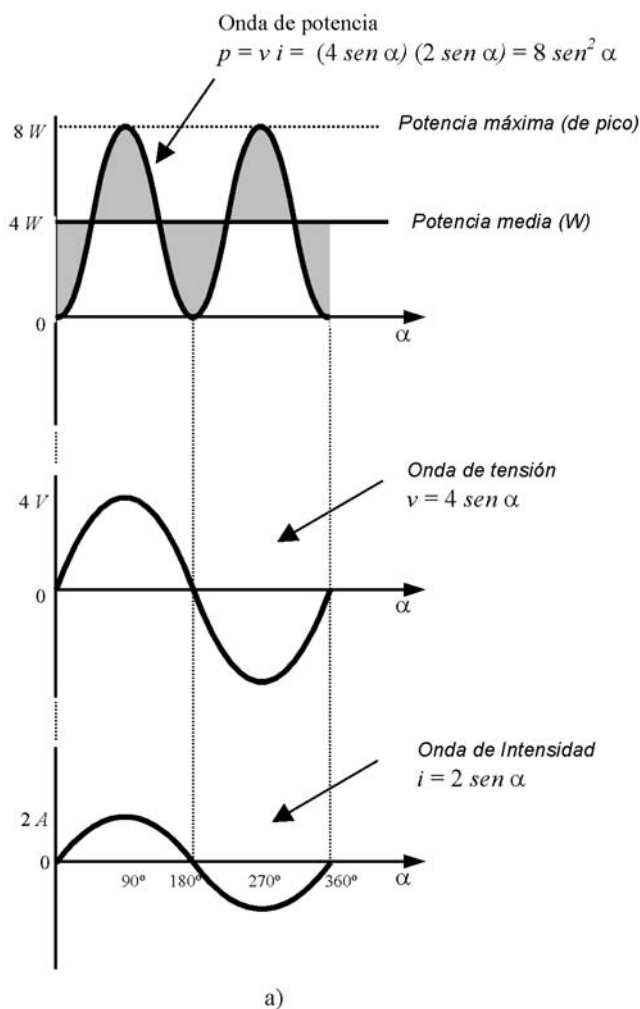
#### Potencia instantánea:

Puesto que la onda de potencia es el resultado de multiplicar los valores instantáneos de las ondas de tensión y corriente entre sí, matemáticamente se puede poner:

$$\left. \begin{array}{l} v = V_p \text{ sen } \omega t \\ i = I_p \text{ sen } \omega t \end{array} \right\} p = (V_p \text{ sen } \omega t) (I_p \text{ sen } \omega t) = V_p I_p \text{ sen}^2 \omega t$$

Y, como que:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \Rightarrow p = V_p I_p \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2}$$



$$I_P = \frac{V_P}{R} = \frac{4}{2} = 2 \text{ A}$$

$$I_{rms} = \frac{I_P}{\sqrt{2}} = \frac{2}{1,414} = 1,41 \text{ A}$$

b)

**Figura 1.8.** a) Ondas de tensión, corriente y potencia que aparece en el circuito puramente resistivo (b) .



El dato  $2\omega t$  de la fórmula significa que la velocidad angular ( $\omega$ ) de la onda de potencia es el doble de la velocidad angular de la onda de tensión o de corriente ( $\omega t$ ).

$$\text{Potencia de pico} \Rightarrow P_p = V_p I_p$$

$$\text{Potencia media (eficaz)} \Rightarrow P_{med} = \frac{1}{2} V_p I_p$$

Así, en la onda de potencia de la figura 1.8, la potencia máxima, de pico, desarrollada en la resistencia de  $2 \Omega$  es:

$$P_p = V_p I_p = 4 \times 2 = 8 \text{ W}$$

La potencia efectiva, eficaz, ( $P_{rms}$ ) se obtiene utilizando los valores eficaces de la tensión y corriente:

$$\left. \begin{aligned} V_{rms} &= \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{4}{1,414} = 2,82 \text{ V} \\ I_{rms} &= \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{2}{1,414} = 1,41 \text{ A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{rms} = V_{rms} \times I_{rms} = 2,82 \times 1,41 = 4 \text{ W}$$

Y, como se deduce, dicho valor coincide con el valor medio de la onda de potencia, lo cual se verifica también gráficamente (fig.1.8):

$$P_{rms} = V_{rms} \times I_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{V_p I_p}{2} = \frac{P_p}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ W}$$

Así, en general se puede poner:

$$P_{rms} = \frac{V_p I_p}{2} = \frac{P_p}{2} = V_{rms} I_{rms}$$

### Ejercicio de ejemplo 1.1:

Supongamos que a una resistencia de  $200 \Omega$  se le aplica una tensión alterna cuya expresión analítica es:

$$40 \text{ sen } (377 t + 20^\circ)$$

Se trata de una tensión alterna de  $V_p = 40 \text{ V}$ , con un desfase inicial (en adelante) de  $20^\circ$  y de frecuencia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{377}{2 \times 3,14} = 60 \text{ Hz}$$

Esta tensión alterna se puede representar también (notación polar) de la manera:

$$V = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \angle \varphi = \frac{40}{1,414} \angle 20^\circ \Rightarrow 28,28 V \angle 20^\circ$$

Es el valor eficaz de la tensión junto con su ángulo de desfase. (En este modo de representación normalmente se opera con valores eficaces).

El valor de la intensidad, aplicando la ley de Ohm es:

$$I = \frac{V \angle \varphi}{R \angle 0^\circ} = \frac{28,28 \angle 20^\circ}{200 \angle 0^\circ} = 0,14 A \angle 20^\circ$$

Esto indica un valor de intensidad (eficaz) de 0,14 A con un desfase de  $20^\circ$ .

La expresión analítica de la intensidad es:

$$i = 0,14 \sqrt{2} \sin(377 t + 20^\circ) = 0,2 \sin(377 t + 20^\circ)$$

Como el desfase de la tensión y corriente es el mismo ( $20^\circ$ ), no existe ningún desfase entre dichas magnitudes.

En cuanto a la potencia disipada, tenemos:

Potencia máxima, de pico:

$$P_p = I_p V_p = (I_{\text{rms}} \sqrt{2}) V_p = (0,14 \sqrt{2}) \times 40 = 8 \text{ W}$$

Potencia media, eficaz:

$$P_{\text{rms}} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} = 28,28 \times 0,14 = 4 \text{ W}$$

Como se comprueba, el valor eficaz coincide con la mitad de la potencia de pico:

$$\frac{V_p I_p}{2} = \frac{P_p}{2} = \frac{40 \times 0,2}{2} = 4 \text{ W}$$

### 1.4.2 Análisis del circuito puramente inductivo

Un circuito es puramente inductivo si únicamente consta de efecto de inductancia, no existe efecto resistivo ni capacitivo; debe basarse pues en una bobina ideal. En la práctica se pueden dar circuitos que, aunque los componentes no son ideales, se pueden considerar puros, debido a que los efectos no deseados son despreciables.

## Ejemplo de análisis 1.2:

Supongamos el circuito que se muestra en la figura 1.9. Se basa en una bobina de 0,5 H, que se considera que no tiene efecto resistivo (resistencia del hilo = 0  $\Omega$ ), a la cual se le aplica una tensión alterna de  $f = 50$  Hz y  $V_p = 20$  V. La expresión analítica de la tensión del generador es, pues:

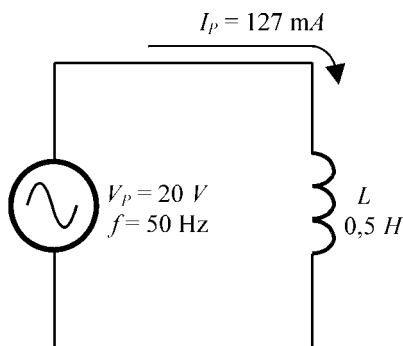
$$v = 20 \sin \omega t = 20 \sin (2\pi f) t = 20 \sin (2 \times 3,14 \times 50) t \Rightarrow v = 20 \sin 314,16 t$$

El valor de reactancia es:

$$X_L = 2\pi f L = 2 \times 3,14 \times 50 \times 0,5 = 157 \Omega$$

El valor de pico y eficaz de la intensidad se obtiene aplicando la ley de Ohm:

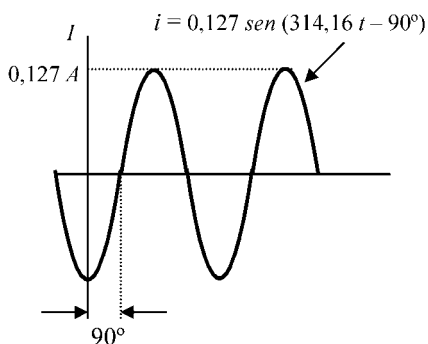
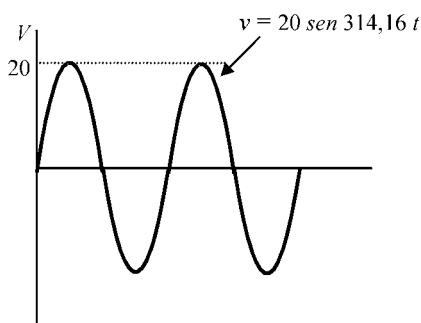
$$I_p = \frac{V_p}{X_L} = \frac{20}{157} \approx 0,127 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_{rms} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{0,127}{1,414} = 0,09 \text{ A}$$



$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 6,28 \times 50 \times 0,5 \approx 157 \Omega$$

$$I_p = \frac{V_p}{X_L} = \frac{20}{157} = 0,127 \text{ A} = 127 \text{ mA}$$

$$I_{rms} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{0,127}{1,414} = 0,09 \text{ A} = 90 \text{ mA}$$



**Figura 1.9.** Circuito puramente inductivo.

La expresión analítica de la corriente alterna que circula por la bobina, teniendo en cuenta que ésta va retrasada  $90^\circ$ , es:

$$i = 0,127 \sin (314,16 t - 90^\circ)$$

Como se sabe, en las bobinas, debido al efecto de autoinducción, la onda de la corriente se retrasa  $90^\circ$  con respecto a la onda de la tensión.

La representación de la onda de corriente mediante el osciloscopio se puede hacer de la manera que se indicó con el circuito resistivo; poniendo una resistencia en serie con la bobina, cuyo valor debe ser lo suficiente bajo para que el error introducido sea mínimo. Por ejemplo, se puede poner una resistencia del valor normalizado de  $6,8 \Omega$ , que es 23 más bajo que la  $X_L$ , con lo cual se obtendrá una caída de tensión de:  $R_S I = 6,8 \times 0,127 \approx 0,86 \text{ V}$ ; esta caída de tensión representará la intensidad de  $0,127 \text{ A}$  que circulará por el circuito (fig.1.10).

### 1.4.2.1 Potencia eléctrica desarrollada

La onda de potencia en el circuito inductivo viene dada de la misma manera que el caso del circuito resistivo; es el producto de la onda de tensión por la onda de corriente. Aplicando una tensión instantánea  $v$  se obtiene una corriente de valor instantáneo  $i$ , siendo la potencia instantánea:  $p = v i$ . Su desarrollo matemático es:

$$\left. \begin{array}{l} v = V_p \sin \omega t \\ i = I_p \sin (\omega t - \pi/2) \end{array} \right\} \Rightarrow p = (V_p \sin \omega t) (I_p \sin \omega t - \pi/2) = V_p I_p (\sin \omega t) [\sin (\omega t - \pi/2)]$$

$$\sin (\omega t - \pi/2) = -\cos \omega t \Rightarrow V_p I_p (\sin \omega t) (-\cos \omega t)$$

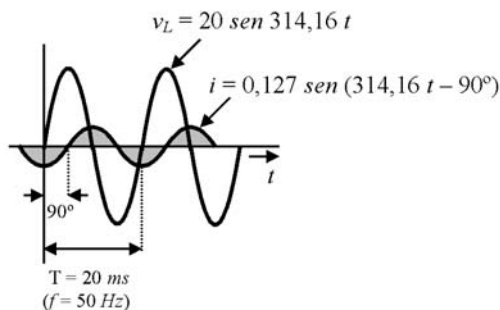
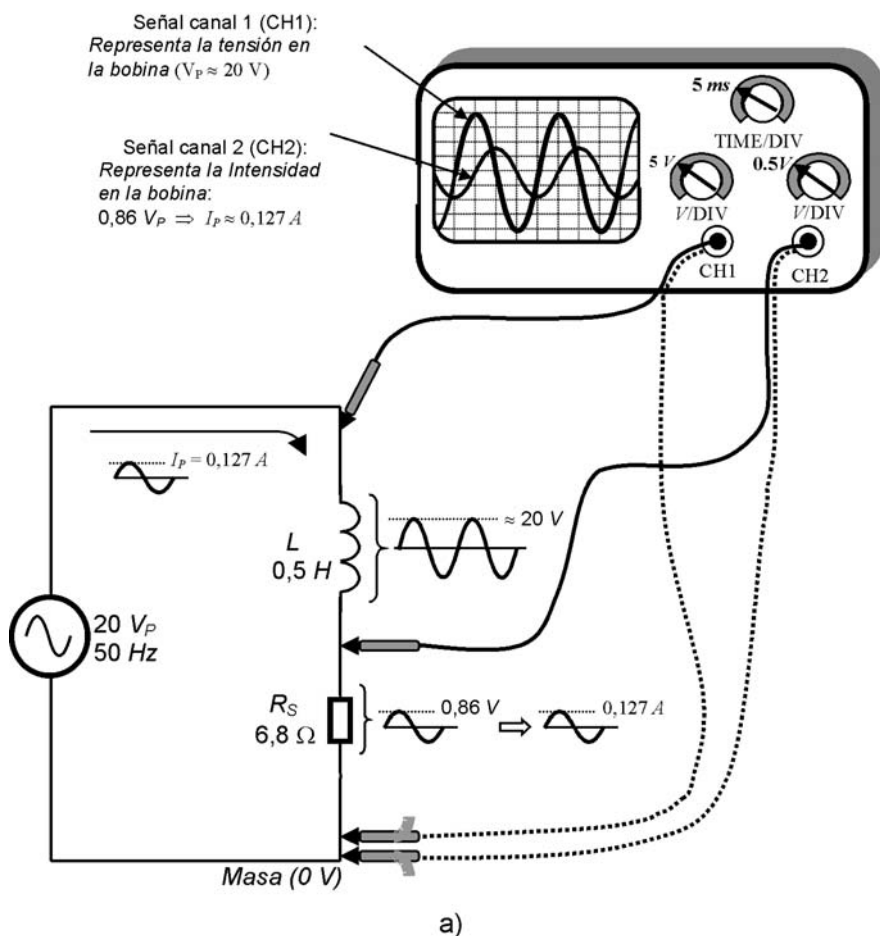
$$(\sin x) (\cos x) = 1/2 \sin 2x \Rightarrow p = -1/2 V_p I_p (\sin 2 \omega t)$$

Gráficamente, se puede obtener multiplicando las ondas de tensión y corriente entre sí, punto a punto; aparece una onda cuyo valor medio es cero (fig.1.11). Durante el semiciclo positivo de la onda de potencia existe una transferencia de energía desde el generador hacia la bobina, que es la creadora del flujo magnético. Y durante el semiciclo negativo, la bobina (debido a la f.e.m. que genera por el efecto de autoinducción) devuelve al generador la energía que antes le había suministrado.

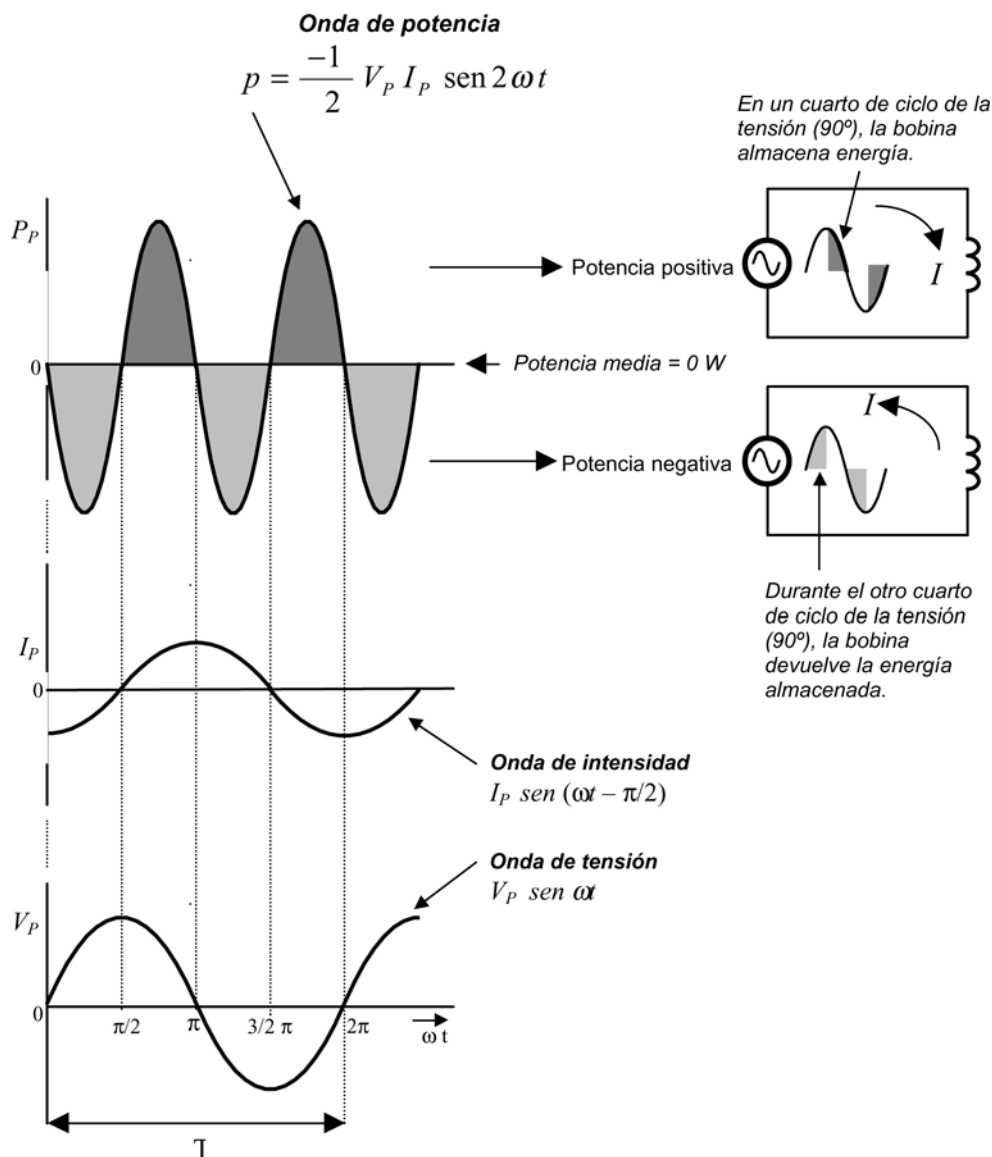
Así, pues, en el circuito puramente inductivo no se consume potencia eléctrica, puesto que la potencia absorbida es igual a la devuelta, por ello el valor medio de la onda de potencia es cero.

Este sería el caso de la bobina ideal (resistencia del hilo igual a cero). Pero, en la práctica, todas las bobinas poseen un cierto valor resistivo debido a la resistencia del hilo, por lo cual cierta potencia suministrada por el generador siempre se disipa en dicha resistencia transformada en calor, y que resulta en una pérdida. Aunque dicho valor puede ser muy bajo, y poder despreciarse.

Aunque (en teoría) la potencia cedida por el generador y devuelta por la bobina no es una potencia gastada, sí da lugar a una circulación de corriente por el circuito. Pues a esta potencia en circulación se denomina *potencia reactiva*, que se expresa por  $Q$  y se mide en voltio-amperios reactivos (VAR). Viene dada pues, por:



**Figura 1.10.** Circuito puramente inductivo. a) Montaje para obtener una representación gráfica de las ondas de tensión y corriente mediante osciloscopio y poder así observar el desfase. b) Ondas de tensión y corriente del circuito calculadas.



**Figura 1.11.** Ondas de tensión, corriente y potencia que aparece en el circuito puramente inductivo.

$$Q = V I = \frac{V^2}{X_L} = I^2 X_L$$

Y, en general, se puede hallar también por:  $Q = V I \sin \varphi$ .

$Q$  es la potencia desarrollada en el elemento reactivo. En el caso del circuito anterior (fig.1.9), dicha potencia vale:

$$Q = I^2 X_L = 0,09^2 \times 157 = 1,27 \text{ V} \cdot \text{A} \cdot \text{r}$$

Que es la potencia que está en trasiego desde el generador y la carga.

En general, en los circuitos donde existe un cierto desfase ( $\varphi$ ) entre la corriente y tensión, se puede hallar el valor de potencia activa (la disipada) aplicando la fórmula:

$$P_{rms} = V_{rms} I_{rms} \cos \varphi = \frac{V_p I_p}{2} \cos \varphi$$

Por ejemplo, en el caso de una bobina ideal, como el desfase es  $\varphi = 90^\circ$  y el coseno de  $90^\circ$  vale cero, tenemos que efectivamente aparece un valor de potencia igual a cero:

$$P_{rms} = V_{rms} I_{rms} \cos 90^\circ = 0 \text{ W}$$

### Ejercicio de ejemplo 1.2:

Supongamos una bobina de  $L = 5,3 \text{ mH}$  por la cual circula una intensidad cuyo valor instantáneo viene dado por:  $i = 0,2 \text{ sen}(377 t + 45^\circ)$ . Hallar la expresión de la tensión instantánea en la bobina.

#### Desarrollo:

El valor de la reactancia es:

$$X_L = \omega L = 377 \times 0,0053 = 2 \Omega$$

La tensión de pico en la bobina será, pues:

$$V_p = I_p X_L = 0,2 \times 2 = 0,4 \text{ V}$$

Como en la bobina la tensión siempre va adelantada  $90^\circ$  respecto a la corriente y la intensidad ya lleva un adelanto de  $45^\circ$  (respecto a la referencia), la tensión irá  $135^\circ$  adelantada respecto a la referencia, que se puede expresar por:

$$v_L = 0,4 \text{ sen}(377 t + 135^\circ)$$

O bien, puesto que  $135^\circ = 3 \pi/4$ :

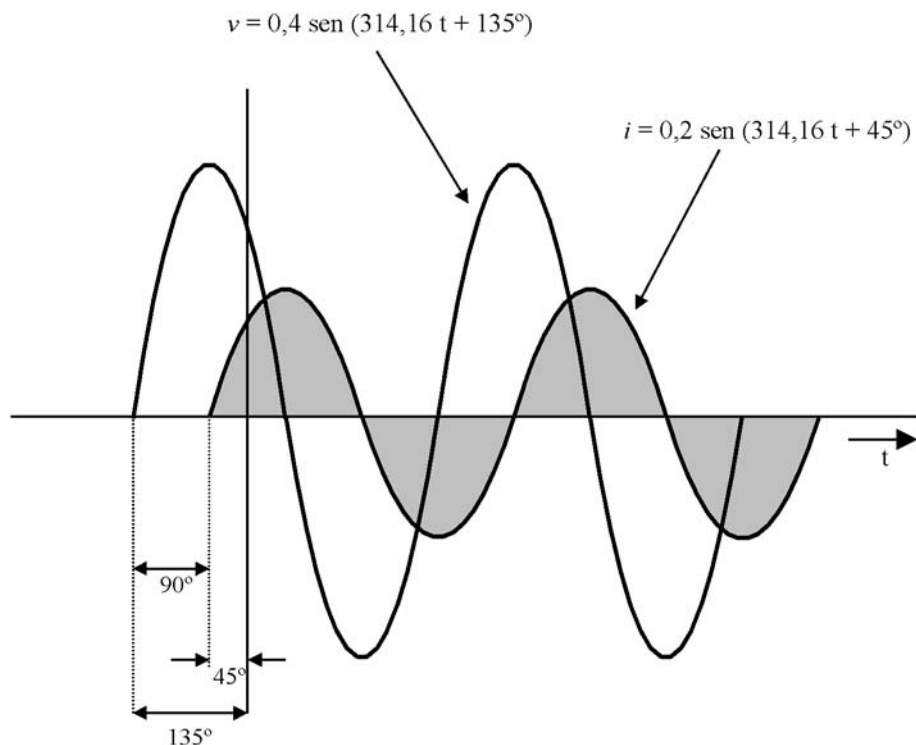
$$v_L = 0,4 \text{ sen}(377 t + 3 \pi/4)$$

O sea, la tensión en la bobina va adelantada  $135^\circ = 3 \pi/4 \text{ rad}$  respecto a la referencia de tiempos (fig.1.12).

Aplicando la notación compleja, en la forma polar, la cuestión de desfases aparece ya explícita en los cálculos:

$$V_p = I_p \angle \varphi \times X_L \angle 90^\circ = 0,2 \angle 45^\circ \times 2 \angle 90^\circ = 0,4 \angle 135^\circ$$

En la multiplicación de valores en forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos (ángulos). Esta forma de cálculo es muy conveniente conocer ya que resulta muy eficaz, al menos cuando aparecen diversos datos sobre ángulos o los circuitos revisten cierta complejidad.



**Figura 1.12.** Con respecto a una referencia (punto 0 del eje de coordenadas), la onda de tensión va adelantada  $135^\circ$  y la onda de corriente  $45^\circ$ ; entre ellas, el desfase es de  $90^\circ$  (la corriente va en retraso).

### 1.4.3 Análisis del circuito puramente capacitivo

Un circuito es puramente capacitivo si únicamente consta de efecto de capacidad, no existe efecto resistivo ni inductivo; debe basarse pues en un condensador ideal. Pero, en la práctica, no existen componentes ideales, puros. Así, por ejemplo, en los condensadores siempre existe algo de efecto resistivo e inductivo, aunque, en la práctica, sus valores son despreciables.

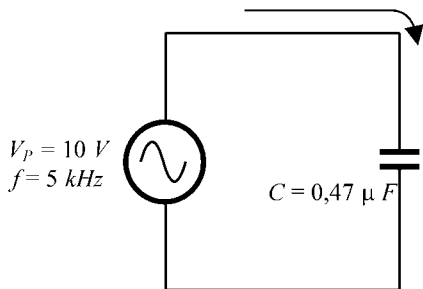


### Ejemplo de análisis 1.3:

Supongamos un circuito puramente capacitivo (fig. 1.13). Un condensador del valor normalizado de  $0,47 \mu\text{F}$  al cual se le aplica una tensión alterna de  $f = 5 \text{ kHz}$  y  $V_p = 10 \text{ V}$ . La tensión del generador se puede expresar, pues, por:

$$v = 10 \text{ sen } \omega t = 10 \text{ sen } 2 \pi f \Rightarrow v = 10 \text{ sen } 31416 t$$

$$I_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2} X_C} = \frac{10}{67,7} = 0,104 \text{ A} = 104 \text{ mA}$$

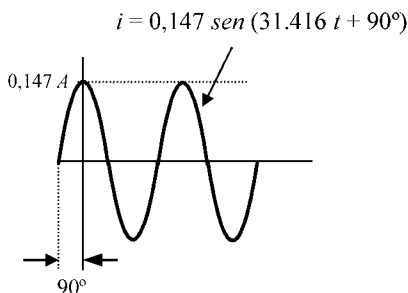
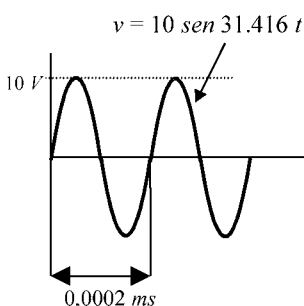


$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 5.000 = 31.416$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{31.416 \times 0,47 \cdot 10^{-6}} = 67,7 \Omega$$

$$I_P = \frac{V_P}{X_C} = \frac{10}{67,7} = 0,147 \text{ A}$$

a)



$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{31.416}{2\pi} = 5000 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5000} = 0,0002 \text{ s}$$

b)

**Figura 1.13.** Circuito puramente capacitivo.

El valor de reactancia es:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 5 \cdot 10^3 \times 0,47 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{0,0147} \approx 67,7 \Omega$$

Y el valor de pico y eficaz de la intensidad que circulará por el circuito:

$$I_p = \frac{V_p}{X_c} = \frac{10}{67,7} \approx 0,147 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_{rms} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{0,147}{1,414} \approx 0,104 \text{ A}$$

La expresión analítica de la corriente, teniendo en cuenta que el condensador produce un desfase de  $90^\circ$ , es:

$$i = 0,147 \text{ sen } (31416 t + 90^\circ)$$

Como se sabe, debido al efecto de la capacidad, la corriente circula adelantada  $90^\circ$  con respecto a la tensión (es como decir que la tensión va retrasada  $90^\circ$ ).

La representación de la onda de corriente mediante el osciloscopio se puede hacer de la manera ya explicada; poniendo una resistencia en serie con el condensador de un valor lo suficientemente bajo para que el error introducido sea mínimo. Por ejemplo, con una resistencia del valor normalizado de  $3,3 \Omega$ , que es un valor 20 veces más bajo que la  $X_c$ , se obtendrá una caída de tensión de:  $R_S I_p = 3,3 \times 0,147 \approx 0,48 \text{ V}_p$ ; esta caída de tensión representará la intensidad que circulará por el circuito (fig.1.14).

### 1.4.3.1 Potencia eléctrica desarrollada

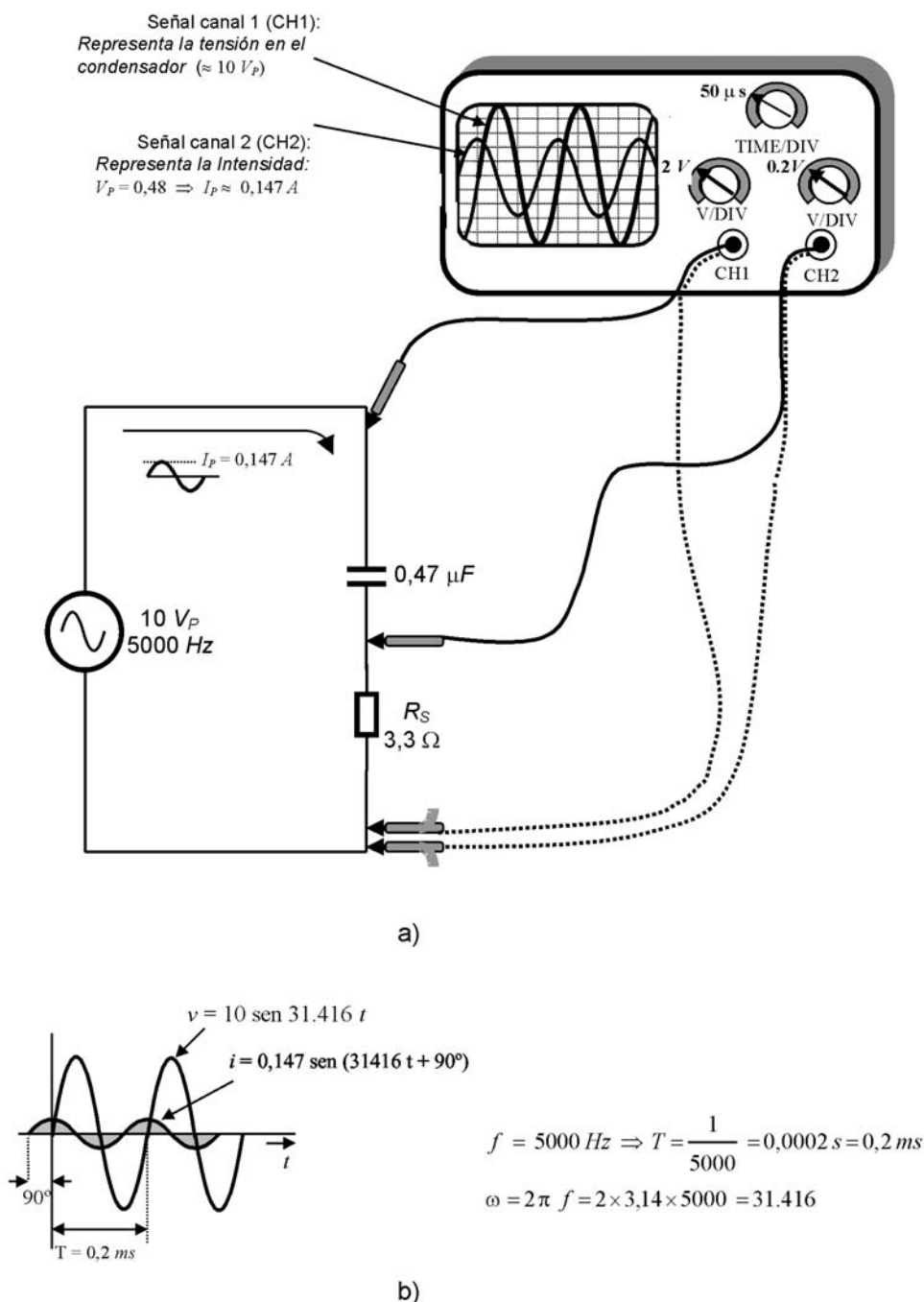
La onda de potencia en el circuito capacitivo viene dada de la misma manera que el caso del circuito inductivo; es el producto de la onda de tensión por la onda de corriente. La expresión analítica de la onda de potencia viene dada, pues, por:

$$\left. \begin{aligned} v &= V_p \text{ sen } \omega t \\ i &= I_p \text{ sen } (\omega t + \pi/2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = (V_p \text{ sen } \omega t) (I_p \text{ sen } \omega t + \pi/2) = V_p I_p (\text{sen } \omega t) [\text{sen } (\omega t + \pi/2)]$$

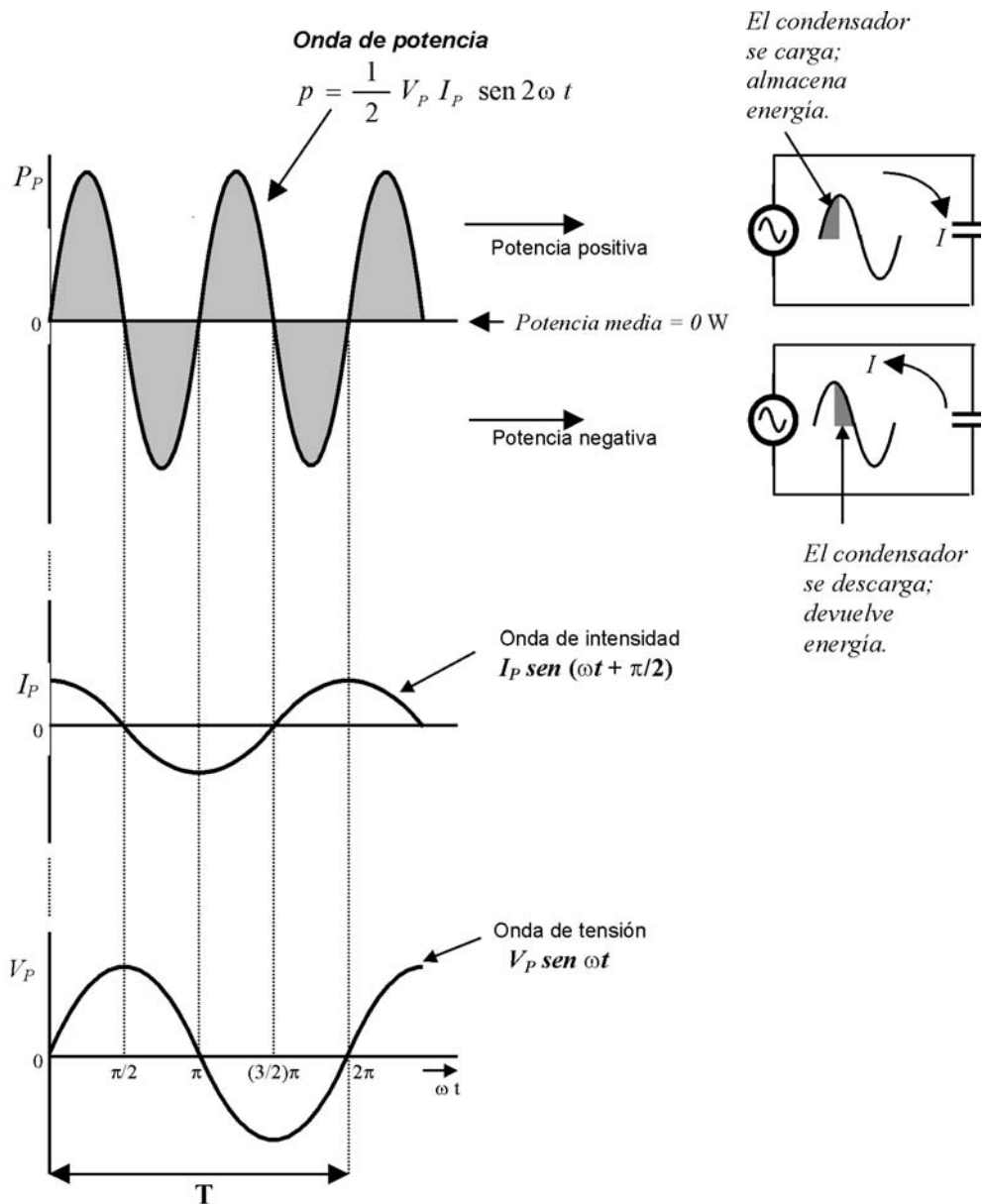
$$\text{sen } (\omega t + \pi/2) = \cos \omega t \Rightarrow V_p I_p (\text{sen } \omega t) (\cos \omega t)$$

$$(\text{sen } x) (\cos x) = 1/2 \text{ sen } 2 x \Rightarrow p = 1/2 V_p I_p (\text{sen } 2 \omega t)$$

Se obtiene, al igual que el circuito inductivo, una onda cuyo valor medio es cero (fig.1.15). Durante el semiciclo positivo de la onda de potencia existe una transferencia de energía desde el generador hacia el condensador, el cual se carga. Y durante el semiciclo negativo, el condensador se descarga y devuelve al generador la energía que antes le había suministrado.



**Figura 1.14.** Circuito puramente capacitivo. a) Montaje para obtener una representación gráfica de las ondas de tensión y corriente mediante osciloscopio, y poder así observar el desfase. b) Ondas de tensión y corriente del circuito calculadas.



**Figura 1.15.** Ondas de tensión, corriente y potencia que aparece en el circuito puramente capacitivo. Al igual que en el circuito puramente inductivo, no existe potencia consumida.

Y, como se puede observar, la onda de potencia es inversa a la del circuito capacitivo.

Así, pues, en el circuito puramente capacitivo tampoco se consume potencia eléctrica, puesto que la potencia absorbida es igual a la devuelta, por ello el valor medio de la onda de potencia es cero.

La potencia cedida por el generador y devuelta por el condensador no es una potencia gastada, pero sí da lugar a una circulación de corriente por el circuito y en consecuencia a una potencia *reactiva* ( $Q$ ). En el caso del ejemplo anterior, se tiene:

$$Q = I^2 X_C = 0,104^2 \times 67,7 = 0,732 \text{ V}\cdot\text{A r}$$

Que es la potencia que está en trasiego desde el generador y el condensador. Matemáticamente, el valor de potencia gastada, disipada, se obtiene por:

$$P_{rms} = V_{rms} I_{rms} \cos \varphi = \frac{V_p I_p}{2} \cos \varphi$$

En el caso del condensador, como  $\varphi = 90^\circ$ , tenemos que efectivamente aparece un valor de potencia igual a cero:

$$P_{rms} = V_{rms} I_{rms} \cos 90^\circ = 0W$$

Si observamos las ondas de potencia del circuito inductivo (fig.1.11) y capacitivo (fig.1.15), se ve que éstas van de forma inversa. Cuando en la onda de potencia del circuito inductivo aparece el semiciclo positivo, en la onda de potencia del circuito capacitivo aparece un semiciclo negativo, y viceversa. Por ello, existe una aplicación muy importante en la industria que se llama *compensación de potencia reactiva*, que se basa en utilizar condensadores para reducir la potencia reactiva causada por las cargas inductivas (motores); el trasiego de potencias se da entonces entre las cargas inductivas y los condensadores utilizados para compensación, y se logra así reducir la intensidad que circula por las líneas de la instalación.

### Ejercicio de ejemplo 1.3:

Supongamos un condensador de  $4,7 \mu\text{F}$  al cual se le aplica una tensión de  $V_p = 20 \text{ V}$  y de  $f = 1000 \text{ Hz}$ . Determinar la expresión analítica de la corriente que circulará por el circuito.

#### Desarrollo:

Valor de la reactancia:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 10^3 \times 4,7 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{0,0295} \approx 33,86 \Omega$$

La expresión polar de la tensión aplicada es:

$$V = 20/\sqrt{2} \angle 0^\circ = 14,14 \text{ V} \angle 0^\circ$$

Es el valor eficaz de la tensión con su ángulo de desfase; en la notación compleja se opera con los valores eficaces de la tensión y corriente.

Por ley de Ohm:

$$I = \frac{V \angle \varphi}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{14,14 \angle 0^\circ}{33,86 \angle -90^\circ} = 0,417 \text{ A} \angle 90^\circ$$

Así, la expresión de la corriente en el dominio del tiempo será:

Como:  $I_p = 0,417 \sqrt{2} \approx 0,59 \text{ A}$  y  $\omega = 2\pi \times f \approx 6283$  y  $90^\circ = \pi/2$ , se tiene:

$$i = I_p \sin(\omega t + 90^\circ) = 0,59 \sin(6283 t + \pi/2)$$

## 1.5 CONCEPTOS SOBRE POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA (ACTIVA, REACTIVA, APARENTE Y $\cos \varphi$ )

Aunque este tema se ha tratado en el capítulo 4 de una forma más detallada y apoyada con diversos ejercicios prácticos, por razones didácticas, se hace ahora una introducción a dicho tema.

### 1.5.1 Potencia activa (P)

Como se ha visto anteriormente, en el circuito puramente resistivo (fig.1.8) la onda de potencia tiene un valor medio, que es la potencia eficaz, que viene dado por:

$$P_{rms} = \frac{V_P I_P}{2} = \frac{P_P}{2} = V_{rms} I_{rms}$$

Solo existe consumo de potencia (transformación en calor, gasto energético) cuando la tensión y corriente van en fase. Y a esto se denomina **potencia activa**, que se representa por  $P$  y se mide en vatios (W).

En un sistema eléctrico donde pueden haber componentes resistivos, inductivos y capacitivos, la potencia activa es la disipada únicamente por los componentes resistivos:  $P = I V_R$

Cuando la tensión y corriente no van en fase, entonces, la potencia activa resulta menor a la aparente ( $V I$ ), pudiendo llegar a ser nula si el desfase es de  $90^\circ$ . Es el caso de los circuitos inductivos o capacitivos.

### 1.5.2 Potencia reactiva (Q)

Como se representa gráficamente en las ondas de potencia del circuito inductivo y capacitivo (figuras 1.11 y 1.15), cuando el desfase entre la tensión y la corriente es de  $90^\circ$  aparece una onda de potencia cuyo valor medio es cero; la potencia posi-

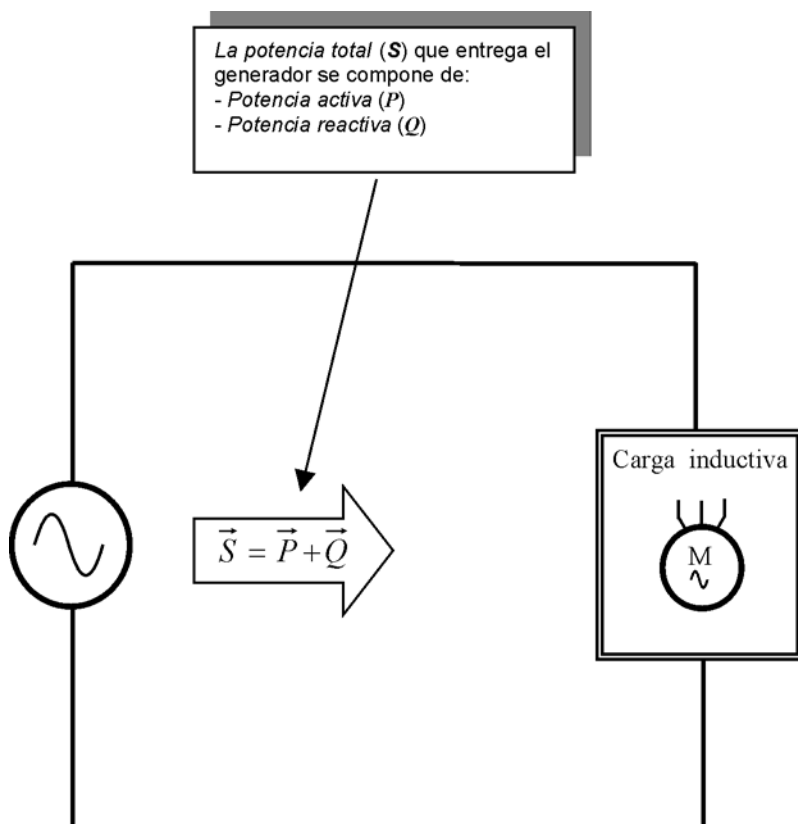


Figura 1.16.

tiva (cedida por el generador) es igual a la potencia negativa (recibida por el generador). Este es el caso de los circuitos puramente inductivos o capacitivos. A esta potencia que está en trasiego entre el generador y la carga (que no es consumida) se denomina **potencia reactiva**, que se representa por  $Q$  y se mide voltio-amperios reactivos (VAR). Es una potencia devuelta al generador como consecuencia de la descarga de condensadores o de la transformación de energía magnética en corriente (f.e.m.) en las bobinas.

En un sistema eléctrico, la potencia reactiva viene dada únicamente por la potencia desarrollada en los componentes reactivos (bobinas o condensadores);  $Q = I^2 X$ .

### 1.5.3 POTENCIA APARENTE ( $S$ )

Es la potencia total (*aparente*) que entrega el generador (fig.1.16); o sea, la que da el producto  $S = V I$ . Prácticamente, se puede hallar midiendo la tensión e intensidad del generador. Se expresa por  $S$  y se mide voltio-amperios (VA). Es una poten-

cia aparente porque, si hay cargas reactivas, parte de dicha potencia es reactiva, o sea, devuelta al generador.

La potencia aparente es la suma vectorial de la potencia activa y la reactiva. Se puede expresar por:

$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{Q}$$

siendo su módulo (S) y argumento (desfase) ( $\varphi$ ):

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{Q}{P}$$

### 1.5.4 FACTOR DE POTENCIA ( $\cos \varphi$ )

Es la relación que hay entre la potencia activa y la aparente:

$$\text{Factor de potencia} = \frac{\text{potencia activa}}{\text{potencia aparente}}$$

Es un indicativo del porcentaje de potencia aparente que se transforma en potencia activa. En el caso que no exista potencia reactiva, circuito puramente resistivo, el valor de la potencia activa es igual al de la aparente ( $P = S$ ), y el factor de potencia es 1. Y en el caso de circuitos puramente inductivos (o capacitivos), donde no existe potencia activa ( $P = 0$ ), el valor de la potencia aparente es igual al de la potencia reactiva ( $S = Q$ ), el factor de potencia es entonces 0.

Así, pues el factor de potencia es un valor que varía entre 0 y 1. Y, como más adelante se explica, este valor coincide con el coseno del ángulo de desfase ( $\varphi$ ) que hay entre la tensión y la corriente:

$$\text{Factor de potencia} = \frac{P}{S} = \cos \varphi$$

$$\varphi = 0^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 1 \text{ (Circuito puramente resistivo)}$$

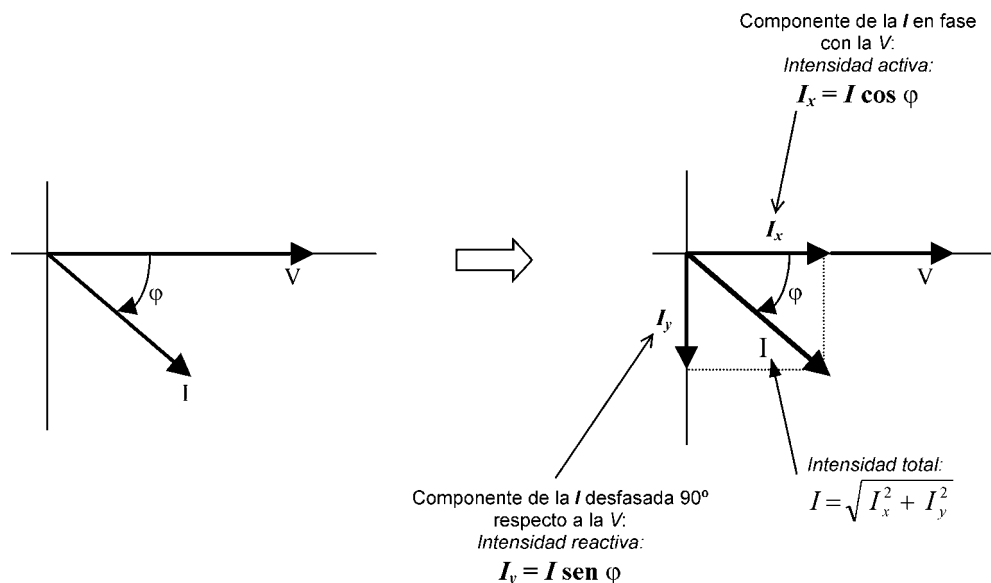
$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0 \text{ (Circuito puramente capacitivo o inductivo)}$$

El desarrollo de las fórmulas fundamentales de la potencia en c.a. se puede hacer como a continuación, resumidamente, se indica.

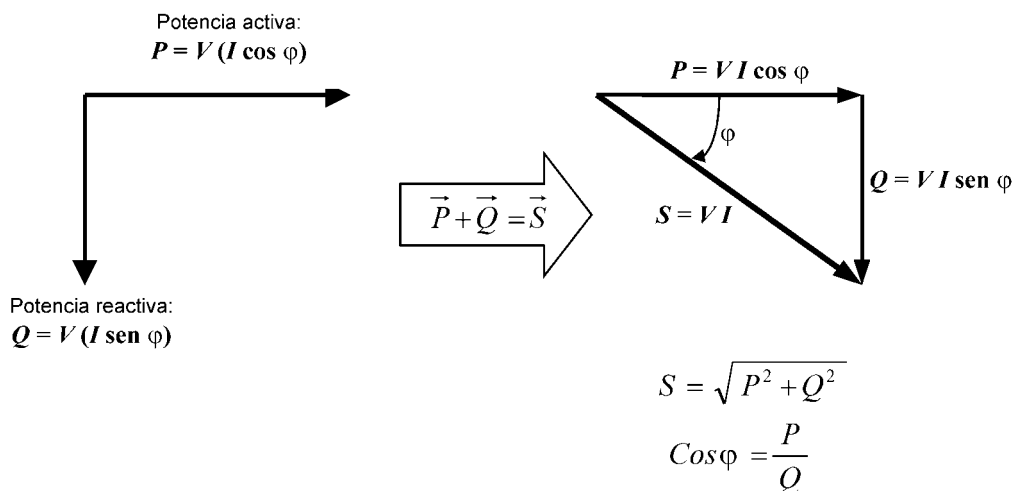
Como se sabe, las ondas senoidales se pueden ver como magnitudes vectoriales, y todo vector se puede descomponer en dos componentes perpendiculares (desfasadas  $90^\circ$  entre sí). Así, una intensidad (I) con un cierto desfase ( $\varphi$ ) respecto a la tensión (V), vectorialmente, equivale a dos componentes de intensidad desfasadas entre sí  $90^\circ$  (fig.1.17). A la componente en fase con la tensión se llama *intensidad activa*, y viene dada por:

$$I_{\text{activa}} = I \cos \varphi$$





**Figura 1.17.** Una intensidad  $I$  con un desfase  $\varphi$ , al ser una magnitud, vectorial, se puede descomponer en dos componentes de intensidad perpendiculares; uno en fase con la tensión (intensidad activa) y el otro desfasado  $90^\circ$  (intensidad reactiva).



**Figura 1.18.** La suma vectorial de la potencia activa ( $P$ ) y la reactiva ( $Q$ ) da lugar a la potencia total cedida por el generador: potencia aparente ( $S$ ).

Y a la componente desfasada ( $90^\circ$ ) se llama *intensidad reactiva*, que es

$$I_{\text{reactiva}} = I \sen \varphi$$

Y, obviamente, la suma vectorial de dichas componentes es la intensidad total:

$$I = \sqrt{I_{\text{activa}}^2 + I_{\text{reativa}}^2}$$

Como se deduce de los gráficos de ondas de las figuras 1.8, 1.11 y 1.15, únicamente se produce una potencia activa cuando las ondas de tensión y corriente van en fase. Así, pues, solo producirá potencia activa la componente de la corriente que está en fase con la tensión, cuyo valor se deduce que es:

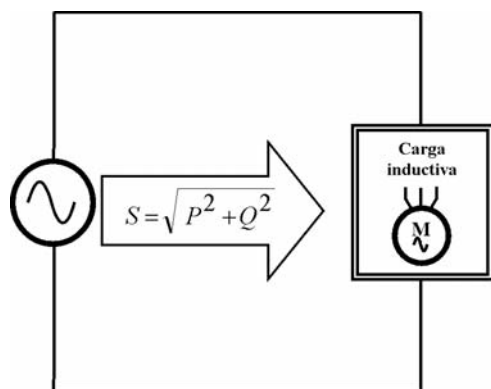
$$P = V I \cos \varphi$$

La componente de la intensidad desfasada  $90^\circ$  es la que da lugar a la potencia reactiva, cuyo valor es:

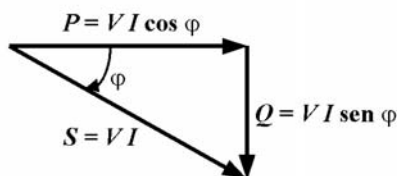
$$Q = V I \sen \varphi$$

Y, en base a este desarrollo, como la potencia aparente es la suma vectorial de la potencia activa y la reactiva, se obtiene lo que se denomina **triángulo de potencias** (fig.1.18). Si en vez de tomar a la tensión como referencia (eje x) se toma a la intensidad, entonces, es el vector tensión el que se puede descomponer en una componente activa y otra reactiva, y el triángulo de potencias sale al revés. A veces se representa de dicha forma.

Un resumen sobre este muy importante tema se muestra en la figura 1.19.



Triángulo de potencias

**Fórmulas y datos importantes:****Cargas puramente inductivas (o capacitivas):**

$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0$$

$$P = 0 \text{ W} \Rightarrow S = \sqrt{P^2 + Q^2} = Q$$

No hay potencia activa ( $P$ ); la potencia aparente ( $S$ ) es igual a la potencia reactiva ( $Q$ ).

**Cargas puramente resistivas:**

$$\varphi = 0^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 1$$

$$Q = 0 \Rightarrow S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P$$

No hay potencia reactiva ( $Q$ ); la potencia aparente ( $S$ ) es igual a la potencia activa ( $P$ ).

**Cargas parcialmente inductivas (o capacitivas):**

$$0^\circ < \varphi < 90^\circ \Rightarrow \cos \varphi < 1$$

Hay parte de *potencia activa* y de *reactiva*; la *potencia aparente* es la suma vectorial de ambas, resultando:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \cos \varphi = \frac{P}{Q}$$

$$P = S \cos \varphi \quad \text{y} \quad Q = S \sin \varphi$$

**Figura 1.19.** Resumen sobre potencia en c.a.

## 1.6 EJERCICIOS DESARROLLADOS

### 1.6.1 Cálculo de las potencias en el circuito inductivo

En el caso del circuito puramente inductivo de la figura 1.9, tenemos:

$$v=20\text{sen } 314,16 t \Rightarrow V=\frac{V_p}{\sqrt{2}}=\frac{20}{\sqrt{2}}\approx 14,14\text{V}$$

$$X_L = \omega L = 314,16 \times 0,5 = 157 \, \Omega \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{X_L} = \frac{14,14}{157} = 0,09 \text{ A}$$

Téngase en cuenta que, normalmente, si no se especifica nada, los valores de tensión y corriente son eficaces.

#### Potencia aparente (S):

$$S = V I = 14,14 \times 0,09 = 1,27 \text{ VA}$$

#### Potencia activa (P):

Al ser un circuito puramente inductivo, como ya se sabe por concepto, la potencia activa es cero, lo cual se verifica también por cálculo. Como el ángulo de desfase entre la tensión y la corriente es  $90^\circ$ , y  $\cos 90^\circ = 0$ , se obtiene:

$$P = V I \cos \varphi = 14,14 \times 0,09 \times \cos 90^\circ = 0 \text{ W}$$

El factor de potencia del circuito puramente inductivo, como es obvio, es cero:

$\text{Factor de potencia} = \frac{P}{S} = \cos \varphi = 0$
--

Esto indica de que no existe potencia activa (consumida); toda la potencia aparente es reactiva, como se verifica a continuación.

#### Potencia reactiva (Q):

$$Q = V I \text{sen } \varphi = 14,14 \times 0,09 \times \text{sen } 90^\circ = 1,27 \text{ VAR}$$

Como se comprueba, este valor coincide con el de la potencia aparente, y es la potencia desarrollada en la bobina:

$$Q = I^2 X_L = 0,09^2 \times 157 = 1,27 \text{ VAR}$$

## 1.6.2 Cálculo de las potencias en el circuito capacitivo

En el caso del circuito puramente capacitivo de la figura 1.13, tenemos:

$$v=10\text{sen } 31.416 t \Rightarrow V=\frac{V_p}{\sqrt{2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}\approx 7,07V$$

$$X_c=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{31.416\times 0,47\cdot 10^{-6}}=67,7\Omega \Rightarrow I=\frac{V}{X_L}=\frac{7,07}{67,7}=0,104 A$$

**Potencia aparente (S):**

$$S = V I = 7,07 \times 0,104 = \mathbf{0,738 \text{ VA}}$$

**Potencia activa (P):**

Al ser el circuito puramente capacitivo el ángulo de desfase entre la tensión y la corriente es  $90^\circ$ , y como  $\cos 90^\circ = 0$ :

$$P = V I \cos \varphi = 7,07 \times 0,104 \times \cos 90^\circ = 0 \text{ W}$$

El factor de potencia del circuito, como es obvio, es cero:

$$\text{Factor de potencia} = \frac{P}{S} = \cos \varphi = 0$$

No existe potencia activa; toda la potencia aparente es reactiva.

**Potencia reactiva (Q):**

$$Q = V I \text{sen } \varphi = 7,07 \times 0,104 \times \text{sen } 90^\circ = 0,738 \text{ VAr}$$

Como se comprueba, este valor coincide con el de la potencia aparente, y es la potencia desarrollada en el condensador:

$$Q = I^2 X_L = 0,104^2 \times 67,7 = 0,738 \text{ VAr}$$

## 1.7 EJERCICIOS PROPUESTOS

**1.1 Dar una breve explicación sobre el concepto de resistencia puramente óhmica.**

- 1.2 A una resistencia de 20 W se le aplica una tensión alterna de  $f = 1000$  Hz y de 10 V de pico. Hallar:**
- El valor eficaz de la intensidad que circulará por la resistencia.
  - El valor de pico y eficaz de la potencia disipada.
  - La expresión de la corriente en el dominio del tiempo.
- 1.3 Explicar resumidamente el concepto de reactancia inductiva.**
- 1.4 Calcular el valor de reactancia de una bobina de  $L = 3$  H cuando se le aplica una tensión de  $f = 5$  kHz.**
- 1.5 Explicar resumidamente el concepto de reactancia capacitiva.**
- 1.6 Cuál será el valor de reactancia de un condensador de  $4,7 \mu\text{F}$  a la frecuencia de 50 Hz.**
- 1.7 A una bobina de 2 H se le aplica una tensión dada por:  $v = 24 \text{ sen } 31416 t$ .**
- Calcular el valor eficaz de la intensidad que circulará.
  - Determinar la expresión de la intensidad en el dominio del tiempo.
  - Calcular el valor de la potencia reactiva.
- 1.8 A un condensador de  $C = 470$  nF se le aplica una tensión cuya expresión en el dominio del tiempo es  $v = 170 \text{ sen } 314,16 t$ .**
- Determinar la expresión de la intensidad instantánea.
  - Calcular el valor eficaz de la intensidad.
  - Calcular el valor de la potencia reactiva.
- 1.9 Si en un aparato eléctrico, con cargas inductivas, alimentado a 220 V, se mide una intensidad de 12 A y se sabe que la potencia consumida (activa) es 2,2 kW, hallar:**
- El factor de potencia.
  - El valor de potencia reactiva.
  - Dibujar el triángulo de potencias.



## Capítulo 2

# Introducción al cálculo de circuitos mediante números complejos

### 2.1. INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Aunque la denominación de *números complejos* o *notación compleja* puede indicar lo contrario, es un procedimiento de cálculo sencillo y de elevado interés en los circuitos de corriente alterna (c.a.) y, en general, cuando se tiene que operar con magnitudes de tipo vectorial. Aunque sí es cierto que si, en un principio, se le da un enfoque abstracto y matemático (cosa que ocurre en muchos textos, y que se intentará que no sea este el caso) puede resultar una materia ardua y exasperante; ¡quizá por ello hasta muchos profesionales siguen sin saber utilizar esta elegante y práctica técnica de cálculo, e incluso la rehuyen¡.

Bien, sería un logro pues si mediante esta introducción el estudiante (o aquellos profesionales interesados) es capaz de entender y aplicar la notación compleja, o al menos interesarse por el tema.

Como ya se ha dicho, ésta es una forma de cálculo muy conveniente conocer ya que su aplicación resulta muy eficaz cuando se tienen que hacer operaciones con valores que llevan asociado un cierto ángulo, como es caso de las reactancias, impedancias y tensiones e intensidades de c.a.

Normalmente se opera con los valores eficaces de las tensiones e intensidades (que se deben representar en mayúsculas,  $V$  e  $I$ ), y se pueden utilizar los mismos métodos que en los circuitos de corriente continua (Ohm, Kirchhoff, Thevenin) teniendo en cuenta también en los cálculos el ángulo de desfase.

De esta manera, en los resultados de las operaciones nos aparecen también los valores de desfases resultantes. Las operaciones donde aparecen valores vectoriales se pueden desarrollar entonces de una forma algebraica, sin necesidad de realizar gráficos. Bueno, de no utilizar la notación compleja, otras alternativas posibles son:

- Por el método gráfico de dibujar y operar con los vectores (u ondas) a escala; una labor casi artesanal, que requiere una cierta dosis de arte.
- Operar con los vectores aplicando trigonometría (teorema de los senos, teorema del coseno, etc.); una mezcla de procedimiento gráfico y matemático.
- O bien, algo que da buen resultado y es similar al cálculo por complejos; aplicar la descomposición de los vectores en sus dos componentes (horizontal y vertical), y hacer las operaciones siempre con vectores en la misma dirección o perpendiculares.



Para terminar con esta introducción, téngase en cuenta que las operaciones con los números complejos, que en un principio pueden parecer complicadas, se pueden realizar de una forma muy rápida y sencilla por medio de las calculadoras (que dispongan de esta función, siendo así la mayoría (del tipo científicas sencillas) y cuyo precio es muy asequible.

## 2.2 EL OPERADOR $j$ (UNIDAD IMAGINARIA)

El símbolo  $j$  se denomina *unidad imaginaria*, y se puede definir como un ente abstracto al que se atribuye la propiedad de que  $j^2 = -1$ , por lo que  $j = \sqrt{-1}$ . Se origina en el mundo de las matemáticas para resolver ecuaciones donde aparecen raíces cuadradas de números negativos, tales como:  $X^2 + 1 = 0 \Rightarrow X = \sqrt{-1}$ . Por ello, su representación original es  $i$  (que viene de *imaginario*); pero en su aplicación a la electricidad se representa por  $j$ , para evitar confusiones con la  $i$  de intensidad.

Para simplificar esta introducción, desde el punto de vista geométrico, el operador  $j$  hace que una magnitud puede girar un ángulo de  $90^\circ$ . Si se multiplica un valor por el operador  $j$  hace que dicho valor gire un ángulo de  $90^\circ$  hacia la izquierda (positivo, en el sentido trigonométrico). Y si se multiplica por  $-j$ , entonces el giro es de  $90^\circ$  pero en sentido inverso, o sea, hacia la derecha (sentido horario). Y en base a esta propiedad, además de en la resolución de ecuaciones matemáticas, su aplicación se ha extendido hacia las operaciones donde aparecen magnitudes con un ángulo asociado, como es el caso de los vectores. Y como las tensiones e intensidades alternas se pueden ver como magnitudes vectoriales (*fasores*), entonces se puede aplicar este método de cálculo también a los circuitos de alterna, lo cual se conoce por: *cálculo por números complejos* o simplemente *notación compleja*. Ello nos permite representar y operar con las magnitudes eléctricas y sus ángulos de desfase asociados.

En la definición de número complejo aparece la suma de dos componentes; uno que se llama *componente real* (no tiene desfase) y otro *componente imaginario* (que sí tiene desfase); de ahí la denominación de complejo. Es, por ejemplo, la suma de una resistencia ( $R$ ) y una reactancia inductiva ( $X_L$ ), lo cual da lugar a lo que se denomina impedancia ( $Z$ ); en la notación compleja se representa por:  $Z = R + jX_L$ .

Veamos a continuación cómo opera geoméricamente el operador  $j$  y cómo se deduce que su valor es  $j = \sqrt{-1}$ .

### 2.2.1. El operador $j$ hace girar un vector $90^\circ$

En la figura 2.1 se muestra dos vectores (de módulo  $a$ ) en sentido contrario, o sea, desfasados  $180^\circ$ .

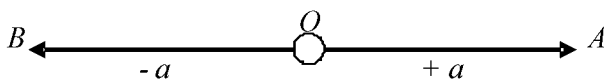


Figura 2.1.

Si el valor  $+a$  se multiplica por  $-1$  se obtiene el valor  $-a$ . Y si lo que se multiplica por  $-1$  es el valor  $-a$  se obtiene  $+a$ .

O sea:

$$+a \cdot (-1) = -a \Rightarrow \text{Se pasa de OA a OB (Giro de } 180^\circ \text{ en sentido antihorario)}$$

$$-a \cdot (-1) = +a \Rightarrow \text{Se pasa de OB a OA (Giro de } 180^\circ \text{ en sentido horario)}$$

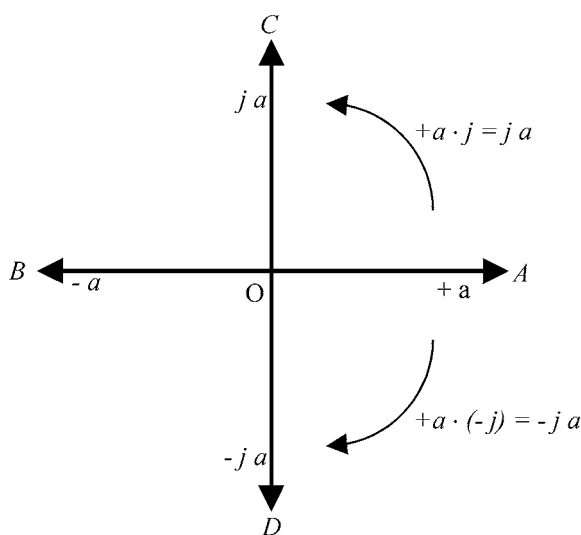
Así, al multiplicar por  $-1$  se pasa a la cantidad contraria, lo cual equivale a un giro de  $180^\circ$  (media vuelta). Se puede decir pues que multiplicar por  $-1$  es una forma algebraica de hacer que un vector gire  $180^\circ$ .

Si en vez de multiplicar por  $-1$  se hace por el operador  $j$ , entonces los giros son de  $90^\circ$ . Tenemos así que:

*$-1$  es el operador algebraico que hace girar un vector  $180^\circ$*

*$j$  es el operador algebraico que hace girar un vector  $90^\circ$*

Observemos el diagrama siguiente (figura 2.2.).



**Figura 2.2.**

Al multiplicar  $+a$  por  $j$  se obtiene  $ja$  (vector  $OC$ ):

$$+a \cdot j = ja \Rightarrow \text{El vector OA gira } 90^\circ \text{ hacia la izquierda (sentido antihorario)}$$

Al multiplicar el vector  $+a$  por  $-j$  se obtiene  $-ja$  (vector  $OD$ ):

$$+a \cdot (-j) = -ja \Rightarrow \text{El vector OA gira } 90^\circ \text{ hacia la derecha (sentido horario)}$$

Al multiplicar 3 veces  $+a$  por  $j$  se obtienen 3 giros de  $90^\circ$  hacia la izquierda; se obtiene el vector  $OD$ :

$$+a \cdot (j \cdot j \cdot j) = +a j^3 \Rightarrow \text{El vector } OA \text{ gira } 3 \times 90^\circ = 270^\circ \text{ hacia la izquierda.}$$

Y si  $OA$  se hubiera multiplicado 4 veces por  $j$  se llegaría a la posición de inicio, ya que recorrería un ángulo de  $360^\circ$  (una vuelta completa):

Así, está claro que el paso del valor  $+a$  (vector  $OA$ ) al valor  $-a$  (vector  $OB$ ) se puede expresar por:

$$(+a \cdot j) \cdot j = +a \cdot j^2 = -a$$

Si dividimos por  $a$  se obtiene que:

$$a \cdot j^2 = -a \Rightarrow \boxed{j^2 = -1 \Rightarrow j = \sqrt{-1}}$$

Y esto también se puede hallar simplemente pensando que al multiplicar por  $j^2$  se produce un giro de  $180^\circ$  (sentido antihorario), que es equivalente a multiplicar por  $-1$ ; de lo cual se deduce que:  $j^2 = -1$  y por tanto:  $j = \sqrt{-1}$ .

La denominación de número imaginario se basa en que  $\sqrt{-1}$  no es calculable (cualquier número negativo elevado al cuadrado da un valor positivo).

Normalmente, se pone el operador  $j$  delante de la variable y no se ponen ni los puntos de multiplicación ni los signos  $+$ .

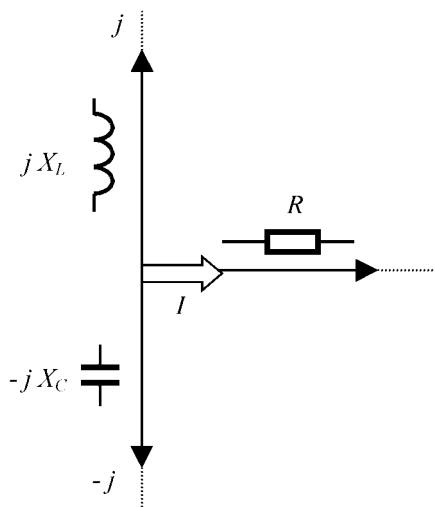
Algunos cálculos interesantes sobre el operador  $j$ , son:

$$\begin{aligned} j &= \sqrt{-1} \\ j^2 &= (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ j^3 &= j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j \\ j^4 &= j^3 \cdot j = -j \cdot j = -j^2 = 1 \\ \frac{1}{j} &= \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j \\ \frac{1}{j^2} &= \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

De ellos, en especial, conviene recordar de cara a la práctica:

$$\boxed{\begin{aligned} j &= \sqrt{-1} \\ j^2 &= -1 \\ j^3 &= -j \\ j^4 &= 1 \end{aligned}}$$

Ya, aplicando la propiedad que tiene el operador  $j$  de poder hacer que una magnitud gire un ángulo de  $90^\circ$ , la resistencia y reactancias se pueden representar de la manera siguiente (fig.2.3):



**Figura 2.3.** Ilustración sobre la representación en la notación compleja de la resistencia, reactancia inductiva y reactancia capacitiva.

Resistencia pura :  $R \Rightarrow$  No desfasa; vector horizontal

Inductancia pura :  $jX_L \Rightarrow$  Desfase de  $90^\circ$  en adelante; vector vertical hacia arriba

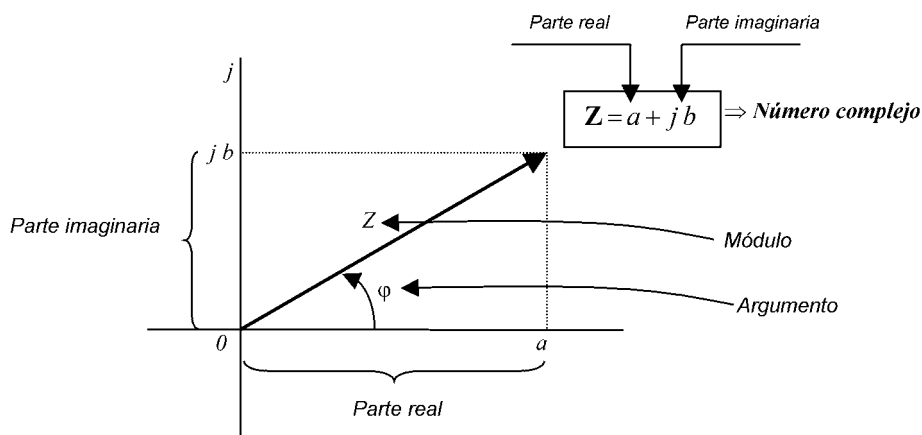
Capacidad pura :  $-jX_C \Rightarrow$  Desfase de  $90^\circ$  en retraso; vector hacia abajo

Dichos desfases son de la tensión respecto a la intensidad. Y esto coincide con las representaciones vectoriales típicas de estos componentes, como ya se puede ir intuyendo y se verá en capítulos siguientes.

## 2.3 CONCEPTO DE NÚMERO COMPLEJO

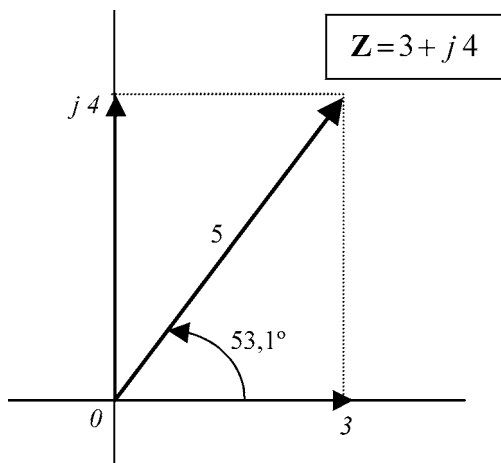
Se define como *número complejo* a la suma de un valor real con un imaginario, siendo el símbolo  $j$  lo que da origen a dicha a la denominación, y se utiliza para distinguir entre las componentes denominadas *real* (eje horizontal) e *imaginaria* (eje vertical). Los números complejos los representaremos en negrita (por ejemplo,  $\mathbf{Z}$ ) para distinguir entre el módulo (longitud del vector,  $Z$ ), y la magnitud vectorial (módulo más argumento), como se muestra en la figura 2.4.

Según el sentido trigonométrico, los ángulos se consideran positivos ( $\varphi$ ) si el sentido de rotación (que se indica por una flecha curvada) es contrario al de las agujas del reloj (*sentido antihorario*); si es al revés (sentido horario), el ángulo es negativo ( $-\varphi$ ).



**Figura 2.4.** Ilustración sobre las componentes de un número complejo.

Los vectores (*faseores*, en el caso de la c.a.), al ser magnitudes con un valor y un sentido, se pueden representar por tanto como números complejos. En la figura 2.5 se muestra un ejemplo. Se trata de un vector cuyo *módulo* es 5 y desfasado un ángulo (*argumento*) de  $53,1^\circ$  (respecto al eje horizontal, en sentido antihorario). Esto aplicado a la electricidad, puede ser una intensidad (eficaz) de 5 A con una desfase de  $53,1^\circ$ , cuya expresión analítica es:  $i = 5\sqrt{2} \text{ Sen } (\omega t + 53,1^\circ)$



**Figura 2.5.** Ejemplo de un número complejo.

La expresión del vector en la forma compleja es  $Z = 3 + j4$ , que equivale a un módulo 5 y argumento  $53,1^\circ$ , como vemos a continuación.

Como la parte imaginaria (que vale 4) y la real (que vale 3) forman un triángulo rectángulo, aplicando *Pitágoras* se obtiene que el valor (módulo) del vector es:

$$\mathbf{Z} = 3 + j4 \Rightarrow \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

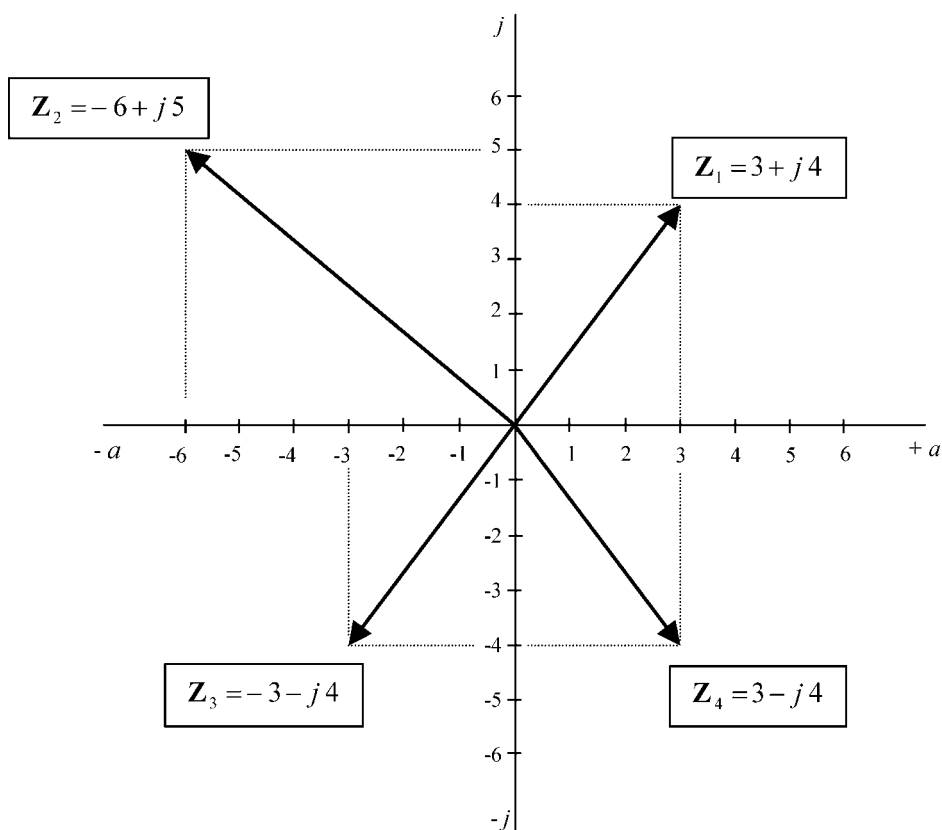
Y el ángulo, por trigonometría, es el arco tangente ( $\tan^{-1}$ ):

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 53,1^\circ$$

De hecho, lo que se ha mostrado aquí es la representación de un vector en sus dos formas más utilizadas; la *polar* y la *binómica*.

$$\mathbf{Z} = 3 + j4 = 5 \angle 53,1^\circ$$

Un ejemplo de varias cantidades en notación compleja (que pueden ser vectores) se muestra en la figura 2.6. A un eje de coordenadas de este tipo, donde aparece el operador  $j$ , se llama *plano complejo*.



**Figura 2.6.** Representación gráfica de varios números complejos.

## 2.4. FORMAS DE EXPRESIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO

Básicamente, nos resultan interesantes tres formas de expresión de los números complejos, que son la *Binómica*, *Polar* y *Trigonométrica*, en especial las dos primeras.

### 2.4.1. Forma binómica

Consiste en representar el número complejo mediante sus componentes real e imaginaria:

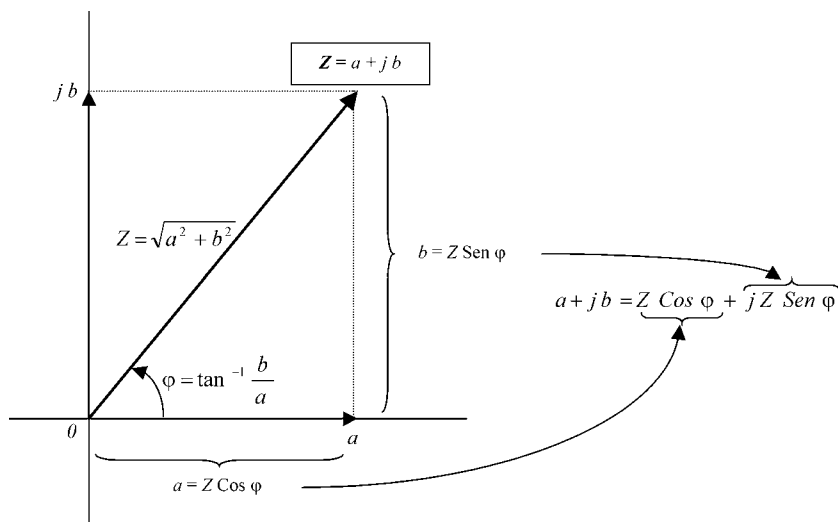
$$\boxed{Z = a + j b}$$

O sea, se basa en el diagrama de coordenadas (plano complejo), que se ha mostrado anteriormente (fig. 2.6).

Esta forma de expresión tiene especial interés porque es de la única manera en que se pueden hacer las operaciones de suma y resta de los números complejos. (Y también se pueden hacer las operaciones de multiplicar y dividir).

### 2.4.2. Forma trigonométrica

Se basa en descomponer un vector en sus componentes vertical y horizontal, y representar dicho vector por expresiones trigonométricas. Como se muestra en la figura 2.7, el vector representado por su módulo ( $Z$ ) y argumento ( $\varphi$ ) se puede descomponer en sus dos componentes, que vienen dadas por:



**Figura 2.7.** Ilustración sobre las partes de un número complejo, representado en la forma binómica y trigonométrica.

$$a = Z \cos \varphi$$

$$b = Z \sin \varphi$$

Y como:  $Z = a + j b \Rightarrow Z = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi = Z (\cos \varphi + j \sin \varphi)$

Siendo  $Z$  el módulo y  $\varphi$  el argumento, cuyo valor se deduce que es:

$$\boxed{\begin{aligned} Z &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{b}{a} \end{aligned}}$$

### 2.4.3. Forma polar

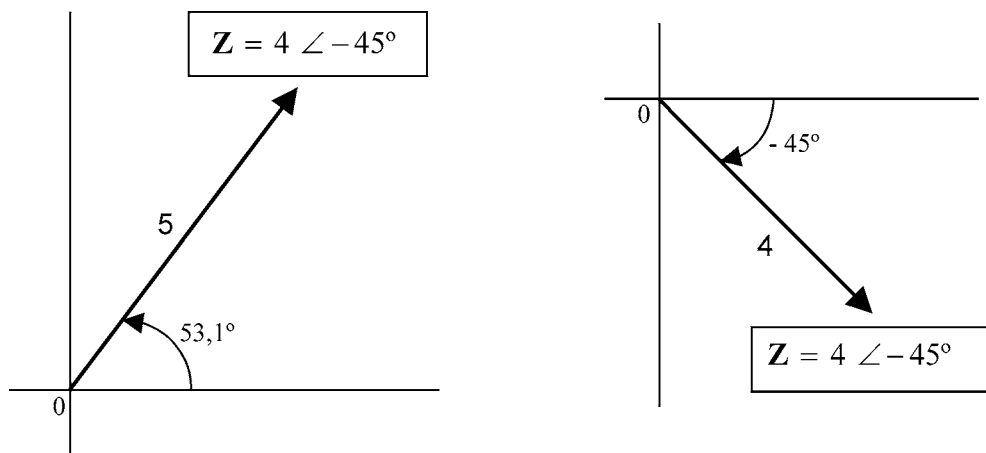
Es la forma de representación más importante en la práctica, junto con la forma binómica.

El vector se representa dando su valor (módulo) y desfase (argumento), de la manera:

$$\mathbf{Z} = Z \angle \varphi$$

Módulo ↗
↖ Argumento

A continuación se muestran unos ejemplos (fig.2.8).



**Figura 2.8.** Números complejos representados en la forma polar.

En la forma polar es como más fácilmente se realizan las operaciones de multiplicar y dividir, como veremos posteriormente. Y como la única forma de realizar las operaciones de suma y resta es en la forma binómica, dichas formas de expresión son las más usuales en la práctica.



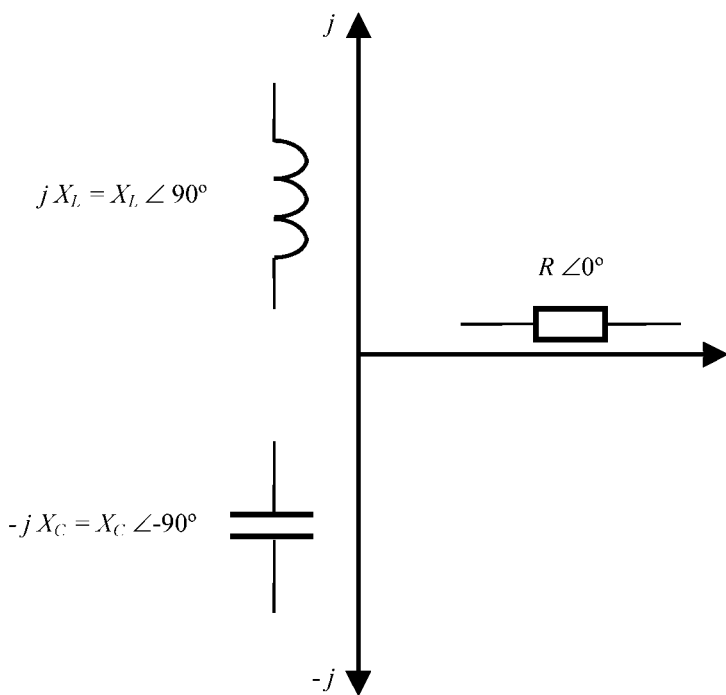
La aplicación de la notación compleja a los componentes resistencia, inductancia y capacidad da lugar a la representación que se muestra en la figura 2.9. Como la resistencia no produce desfase, se puede representar como un número complejo cuya parte imaginaria es nula, o sea:

Resistencia:  $R \angle 0^\circ = (R + j0) \Rightarrow$  No hay desfase

Pero la inductancia y capacidad pura, puesto que producen una desfase de  $90^\circ$  entre la tensión e intensidad, se representan por:

Reactancia inductiva:  $X_L \angle 90^\circ = (0 + j X_L) \Rightarrow$  Adelanto de  $90^\circ$

Reactancia capacitiva:  $X_C \angle -90^\circ = (0 - j X_C) \Rightarrow$  Retraso de  $90^\circ$



**Figura 2.9.** Ilustración sobre las formas usuales de representación en la notación compleja de la resistencia, reactancia inductiva y reactancia capacitiva.

#### 2.4.4. Ejercicio de ejemplo: Representación en la forma binómica, polar y trigonométrica

Como resumen de estas tres formas de representación de los números complejos, veamos a continuación un ejercicio de expresión de las tres formas que se han explicado. Partimos de la expresión en forma binómica:  $\mathbf{Z} = 6 + j5$

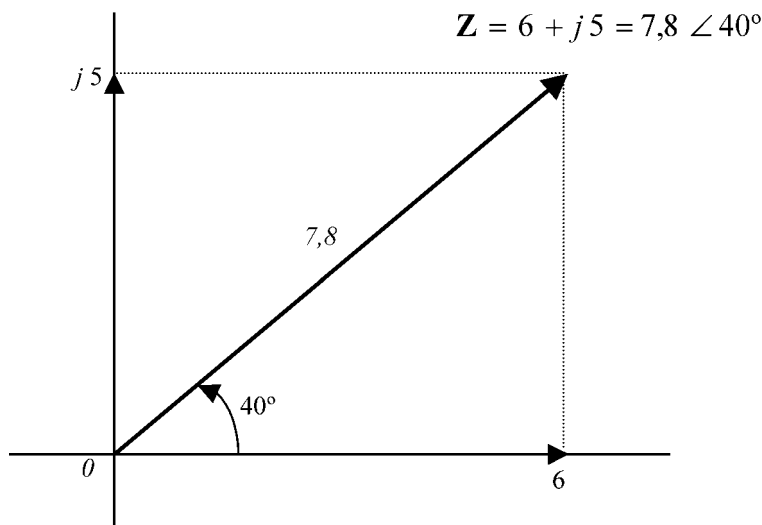
**Expresión en forma polar:**

$$\text{Módulo} \Rightarrow Z = \sqrt{6^2 + 5^2} = 7,8$$

$$\text{Argumento} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \frac{5}{6} \cong 40^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = 7,8 \angle 40^\circ}$$

Esto se muestra gráficamente en la figura 2.10.



**Figura 2.10.** Ejemplo de número complejo representado en la forma binómica y polar.

**Expresión en forma trigonométrica:**

Conociendo el módulo y argumento, la expresión en forma trigonométrica es sencilla de obtener:

$$Z = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi \Rightarrow 7,8 \cos 40^\circ + j 7,8 \sin 40^\circ = \boxed{7,8 (\cos 40^\circ + j \sin 40^\circ)}$$

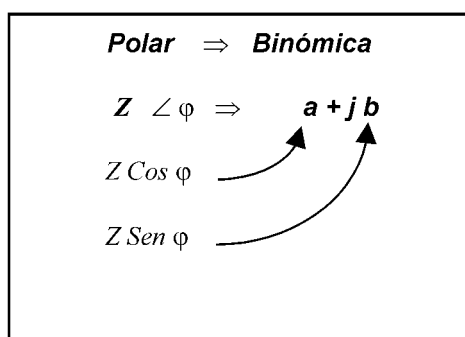
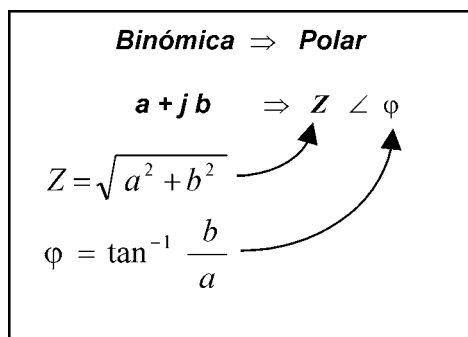
De donde a su vez se comprueba que coincide con la expresión en forma binómica:

$$Z = \underbrace{7,8 \cos 40^\circ}_6 + j \underbrace{7,8 \sin 40^\circ}_{j5} = 6 + j5$$

Se obtienen así tres expresiones diferentes del mismo vector:

$$\mathbf{Z} = \underbrace{6 + j5}_{\text{Binómica}} = \underbrace{7,8 \angle 40^\circ}_{\text{Polar}} = \underbrace{7,8 (\cos 40^\circ + j \sin 40^\circ)}_{\text{Trigonométrica}}$$

En la práctica, normalmente sólo se utilizan la forma binómica y polar; por ello, se tiene que tener claro la conversión entre dichas formas de expresión. Teniendo en cuenta la figura 2.7 (vista anteriormente), la conversión se basa en las operaciones:



Como complemento a esto, conviene tener en cuenta que cuando aparezcan las expresiones  $(-a + jb)$  ó  $(-a - jb)$ , el vector se encuentra en el segundo o tercer cuadrante de la circunferencia (ángulo de desfase entre  $90^\circ$  y  $270^\circ$ ); entonces, se tiene que sumar  $180^\circ$  al valor del ángulo dado por:  $\tan^{-1} \frac{b}{a}$  (teniendo en cuenta los signos de  $a$  y  $b$ ). Es decir, el ángulo (argumento) del vector vendrá dado entonces por:  $\varphi = \tan^{-1} \frac{b}{a} + 180^\circ$ .

Otra consideración a tener en cuenta es que el coseno sale igual tanto si el ángulo es positivo como negativo; por ello, cuando se hace un coseno se puede prescindir del signo del ángulo. En cambio, el seno sale con el mismo signo del ángulo, por lo cual se debe tener en cuenta dicho signo. O sea, que:

$$\text{Sen}(-\varphi) = -\text{Sen } \varphi$$

$$\text{Cos } \varphi = \text{Cos}(-\varphi)$$

## 2.5 EJERCICIOS DESARROLLADOS

Conversión de las siguientes expresiones binómicas a polares:

- $3 + j4$
- $2 - j6$
- $-3 + j4$
- $-3 - j4$

Respuestas:

a)

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{4}{3} = 53,1^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{5 \angle 53,1^\circ = 3 + j4}$$

b)

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \cong 6,32 \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{-6}{2} \cong -71,5^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{6,32 \angle -71,5^\circ = 2 - j6}$$

c)

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \tan^{-1} \frac{4}{-3} = -53,1^\circ &\Rightarrow \varphi = 180^\circ + (-53,1^\circ) = 126,9^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{5 \angle 126,9^\circ = -3 + j4}$$

d)

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \tan^{-1} \frac{-4}{-3} = 53,1^\circ &\Rightarrow \varphi = 180^\circ + 53,1^\circ = 233,1^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{5 \angle 233,1^\circ = -3 - j4}$$

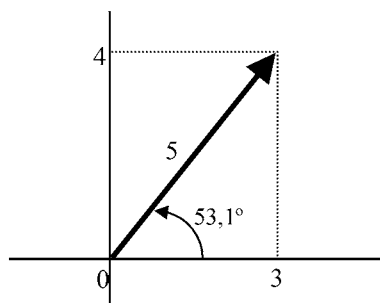
Estos dos últimos ejemplos (c y d) se han puesto para hacer que aparezca el caso de vectores en el segundo y tercer cuadrante (ángulos de  $90^\circ$  a  $270^\circ$ ); en dicho caso, para obtener el ángulo de desfase respecto al punto de referencia ( $0^\circ$ ), se tiene que sumar  $180^\circ$  al valor que nos da  $\tan^{-1} \frac{b}{a}$  (teniendo en cuenta los signos de  $a$  y  $b$ ).

Por otra parte, hay que tener en cuenta que un ángulo positivo (sentido anti horario) es equivalente a otro ángulo negativo (sentido horario), por lo cual nos podemos encontrar con expresiones con valores de ángulo diferentes pero que equivalen a lo mismo. Por ejemplo, en el ejercicio anterior (d) los  $233,1^\circ$  positivos (desfase en adelante) son equivalente a  $126,9^\circ$  negativos (desfase en retraso); en ambos casos, el vector se encuentra en la misma posición (fig.2.11d). Se puede poner pues:  $5 \angle 233,1^\circ = 5 \angle -126,9^\circ$

En la figura 2.11 se muestran los resultados de los ejercicios de forma gráfica.

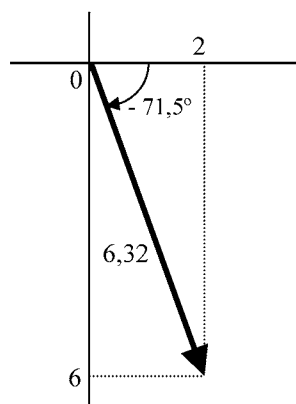
a)

$$\mathbf{Z} = 3 + j4 = 5 \angle 53,1^\circ$$



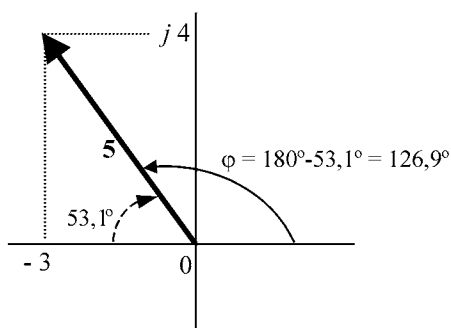
b)

$$\mathbf{Z} = 2 - j6 = 6,32 \angle -71,5^\circ$$



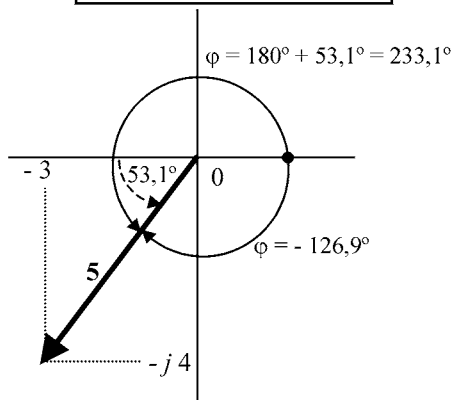
c)

$$\mathbf{Z} = -3 + j4 = 5 \angle 126,9^\circ$$



d)

$$\mathbf{Z} = -3 - j4 = 5 \angle 233,1^\circ$$



**Figura 2.11.** Resultados de los ejercicios propuestos.

Conversión de las siguientes expresiones polares a binómicas:

a)  $220 \angle 30^\circ$

b)  $24 \angle -50^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 220 \cos 30^\circ = 190,5 \\ 220 \sin 30^\circ = 110 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{190,5 + j110 = 220 \angle 30^\circ}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 24 \cos 50^\circ = 15,42 \\ 24 \sin(-60^\circ) = -18,38 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{15,42 - j 18,38 = 24 \angle -50^\circ}$$

## 2.6 OPERACIONES BÁSICAS CON LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Utilizando los números complejos se pueden realizar las operaciones básicas como suma, resta, multiplicación, etc., de la misma manera que se realiza con las cantidades normales; aunque, en este caso, se opera con magnitudes vectoriales, como pueden ser fuerzas, tensiones y corrientes alternas, etc.

Aunque pueden realizarse otras operaciones, nos basaremos sólo en la suma, resta, multiplicación y división por ser las más usuales en la práctica.

### 2.6.1. Aplicación de la calculadora

Es conveniente saber que las operaciones con números complejos se pueden realizar de una forma muy rápida y sencilla por medio de las calculadoras. Obviamente, tienen que ser calculadoras que dispongan de esta función, que son la mayoría (del tipo científicas) y son muy baratas (por ejemplo, la *Casio fx-100W*, que es una de las que más se ven en el aula). De esta manera, las conversiones entre las formas polar y binómica resultan muy sencillas y rápidas, y también se pueden realizar muy fácilmente todas las operaciones básicas como suma, resta, multiplicación, etc. En este libro, por cuestiones didácticas, se prefiere poner el desarrollo completo de las operaciones, aunque en algunos casos se supondrá la utilización de calculadora, en especial, en las conversiones binómica-polar. Es conveniente saber que la forma de expresión binómica también se conoce por forma rectangular, y así es como suele representarse en las calculadoras.

#### 2.6.1.1 Ejemplo de operaciones de conversión mediante calculadora

A modo de ejemplo, la conversión entre las formas binómica y polar con calculadora (*Casio fx-100W*, que es una de las más usuales), que son las operaciones más frecuentes que se tienen que hacer, es de la forma (fig.2.12 y 2.13):

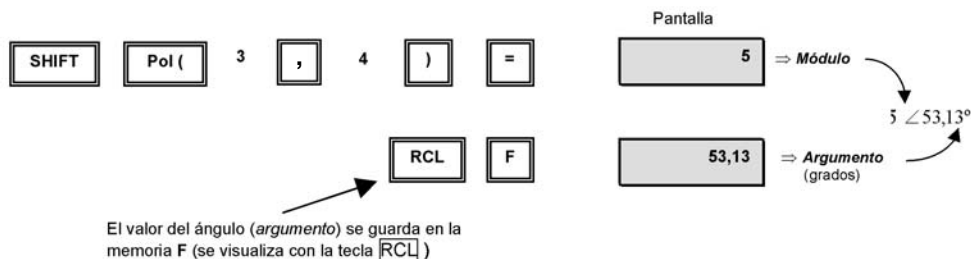
Hay que considerar que los números complejos se pueden presentar también incompletos, o sea, con algunos de sus factores (real o imaginario) nulo. Se puede tener:

$$\text{Valor imaginario} = 0 \Rightarrow \mathbf{Z} = a + j0 = a$$

$$\text{Valor real} = 0 \Rightarrow \mathbf{Z} = 0 + jb = jb$$

**Pol (** ⇒ Tecla de conversión a la forma polar  
(se accede pulsando previamente la tecla **SHIFT** )

Ejemplo, para pasar a la forma polar el número  $3 + j4$  la secuencia es:

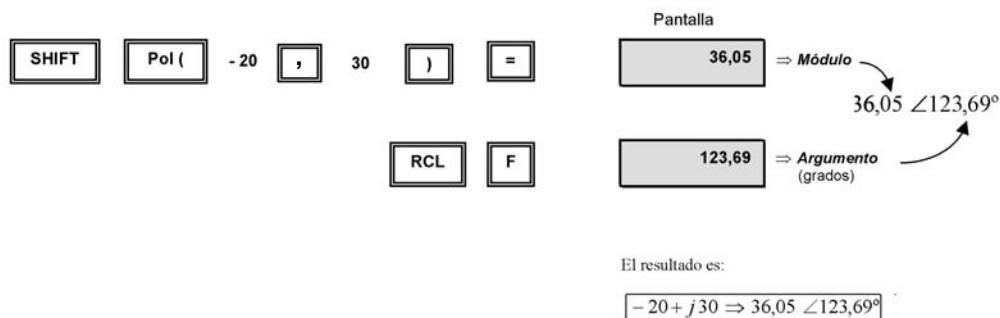


El resultado es pues:

$$3 + j4 \Rightarrow 5 \angle 53,13^\circ$$

Veamos otro ejemplo:

Conversión a la forma polar de la expresión binómica:  $-20 + j30$



**Figura 2.12.** Ejemplo de la secuencia para la conversión de complejos de la forma binómica a polar con la calculadora (Casio, fx 100W).

Es el caso, por ejemplo, de una inductancia pura o resistencia pura; en dicho caso, la expresión de la impedancia, que es una cantidad compleja (suma de resistencia y de reactancia), es:

$$\text{Resistencia pura} \Rightarrow \mathbf{Z} = R + jX = R + j0 = R$$

$$\text{Reactancia inductiva pura} \Rightarrow \mathbf{Z} = R + jX_L = 0 + jX_L = X_L$$

**Rec (** ⇒ Tecla de conversión a la forma binómica  
(se accede pulsando previamente la tecla **SHIFT**)

Ejemplo, para pasar a la forma binómica la expresión polar  $5 \angle 53,13^\circ$  la secuencia es:

**SHIFT** **Rec (** 5 **,** 53,13 **)** **=**

Pantalla

3 ⇒ Valor real

4 ⇒ Valor imaginario

$3 + j4$

El valor imaginario se guarda en la memoria F  
(se visualiza con la tecla **RCL**)

**RCL** **F**

El resultado es pues:

$5 \angle 53,13^\circ \Rightarrow 3 + j4$

Veamos otro ejemplo:

Conversión a la forma binómica de  $150 \angle 30^\circ$ :

**SHIFT** **Rec (** 150 **,** 30 **)** **=**

Pantalla

129,9 ⇒ Valor real

75 ⇒ Valor imaginario

$129,9 + j75$

**RCL** **F**

El resultado es:

$150 \angle 30^\circ \Rightarrow 129,9 + j75$

**Figura 2.13.** Ejemplo de la secuencia para la conversión de complejos de la forma polar a binómica con la calculadora (Casio, fx 100W).

## 2.6.2 Suma de números complejos

En principio, hay que saber que las operaciones de suma y resta sólo se pueden realizar en la forma binómica. Así, si se tienen expresiones en forma polar y se tiene que hacer una suma (o resta), se tiene que convertir la expresión polar a la expresión binómica (y, después, si interesa, el resultado se vuelve a la forma polar).

La suma se lleva a cabo sumando por separado las componentes reales e ima-



ginnarias de los operandos; el resultado de dichas sumas será el número complejo resultante. En general, esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= a_1 + j b_1 \\ \mathbf{Z}_2 &= a_2 + j b_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = (a_1 + j b_1) + (a_2 + j b_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

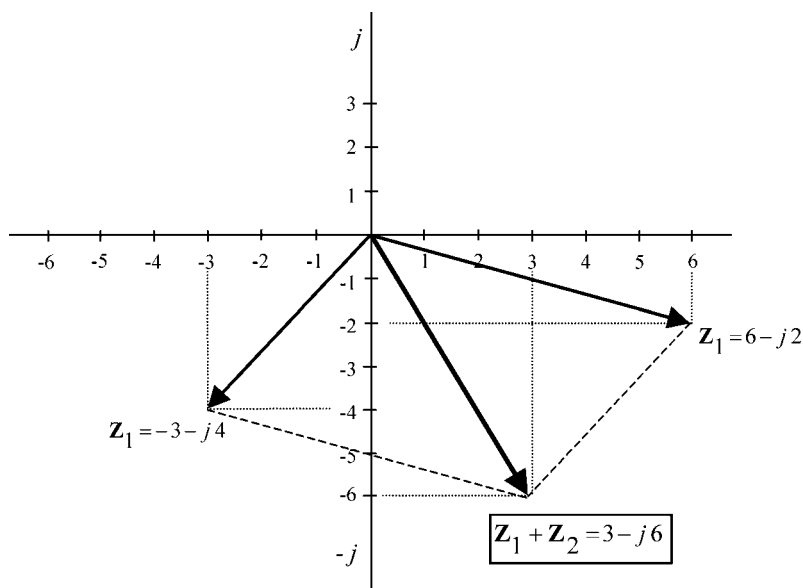
### Ejemplo 2.1

$$\mathbf{Z}_1 = 6 - j 2$$

$$\mathbf{Z}_2 = -3 - j 4$$

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = (6 - j 2) + (-3 - j 4) = \boxed{3 - j 6}$$

En la figura 2.14 se representa de forma gráfica el resultado de dicha suma..

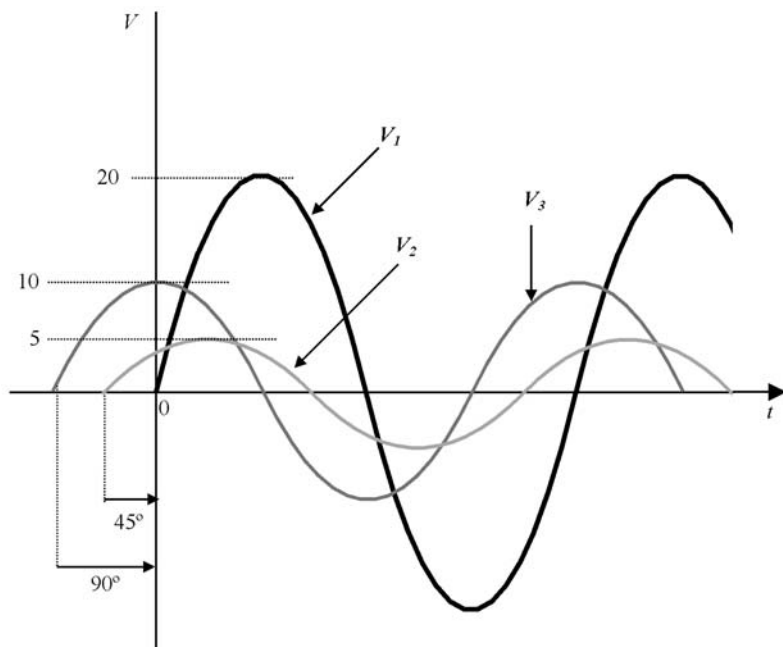


**Figura 2.14.** Representación gráfica de la suma de dos números complejos.

Además de el resultado dado por la suma de los números complejos, por simple observación gráfica (por la regla de completar el paralelogramo) también se deduce el resultado. No se debe olvidar el significado geométrico que tiene un número complejo; lo que se ha hecho es sumar dos vectores; vemos, pues, que mediante los números complejos se pueden efectuar operaciones geométricas de una forma algebraica.

### 2.6.2.1 Ejemplo de aplicación

A modo de ejemplo de aplicación, vamos a ver el desarrollo para sumar las tres ondas senoidales que se muestran en la figura 2.15. Este es un ejercicio que se encuentra también en el tomo II (apartado 6.2.1.4), desarrollado aplicando la descomposición vectorial. De esta manera, además, esto nos vale también para comparar entre el cálculo por complejos y por descomposición de vectores.



**Figura 2.15.** Tres ondas senoidales con diferente desfase para realizar su suma.

Estas tres ondas representadas en su forma analítica es:

$$v_1 = 20 \operatorname{Sen} \omega t$$

$$v_2 = 5 \operatorname{Sen}(\omega t + 45^\circ)$$

$$v_3 = 10 \operatorname{Sen}(\omega t + 90^\circ)$$

Como se sabe, el valor que multiplica al Seno es la tensión de pico de la onda ( $V_p$ ) y  $\omega t$  representa su frecuencia. El ángulo de desfase, para facilitar su comprensión, se expresa en grados, pero a fines de cálculo se tendría que pasar a radianes (ya que  $\omega = 2 \pi f \text{ rad/s}$ ).

Pues dichas ondas se pueden expresar en la forma polar sencillamente por:

$$v_1 = 20 \operatorname{Sen} \omega t$$

$$v_2 = 5 \operatorname{Sen}(\omega t + 45^\circ)$$

$$v_3 = 10 \operatorname{Sen}(\omega t + 90^\circ)$$

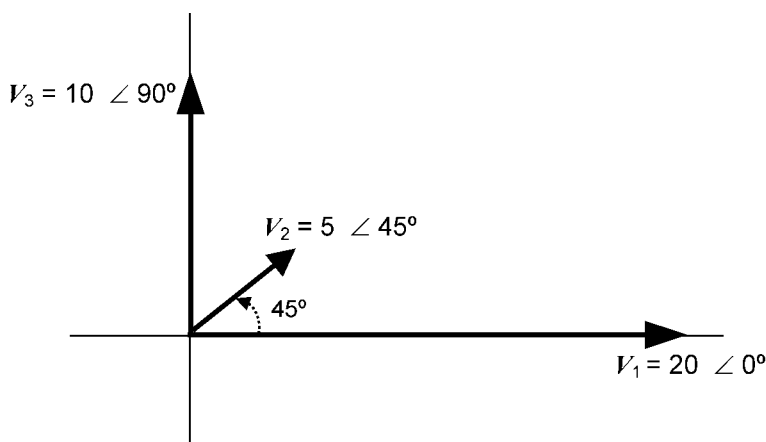


$$V_1 = 20 \angle 0^\circ$$

$$V_2 = 5 \angle 45^\circ$$

$$V_3 = 10 \angle 90^\circ$$

Cuya representación gráfica se muestra en la figura 2.16.



**Figura 2.16.** Representación vectorial de las tres ondas de la figura anterior.

Una observación, es que normalmente en la notación compleja se opera con los valores eficaces de las ondas y en este caso, por simplificación, se hará con los valores de pico. Se recuerda que el valor eficaz se obtiene por:  $V_{RMS} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$ .

Puesto que la suma sólo se puede hacer en la forma binómica, haciendo la conversión de polar a binómica (lo cual resulta sumamente sencillo con la calculadora), tenemos:

$$V_1 = 20 \angle 0^\circ = 20 + j0$$

$$V_2 = 5 \angle 45^\circ = 3,53 + j3,53$$

$$V_3 = 10 \angle 90^\circ = 0 + j10$$

Realizando la suma se obtiene:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 = (20 + j0) + (3,53 + j3,53) + (0 + j10) = (20 + 3,53) + j(3,53 + 10) \Rightarrow$$

$$\boxed{V_T = 23,53 + j13,53}$$

Pasando a la forma polar, tenemos:

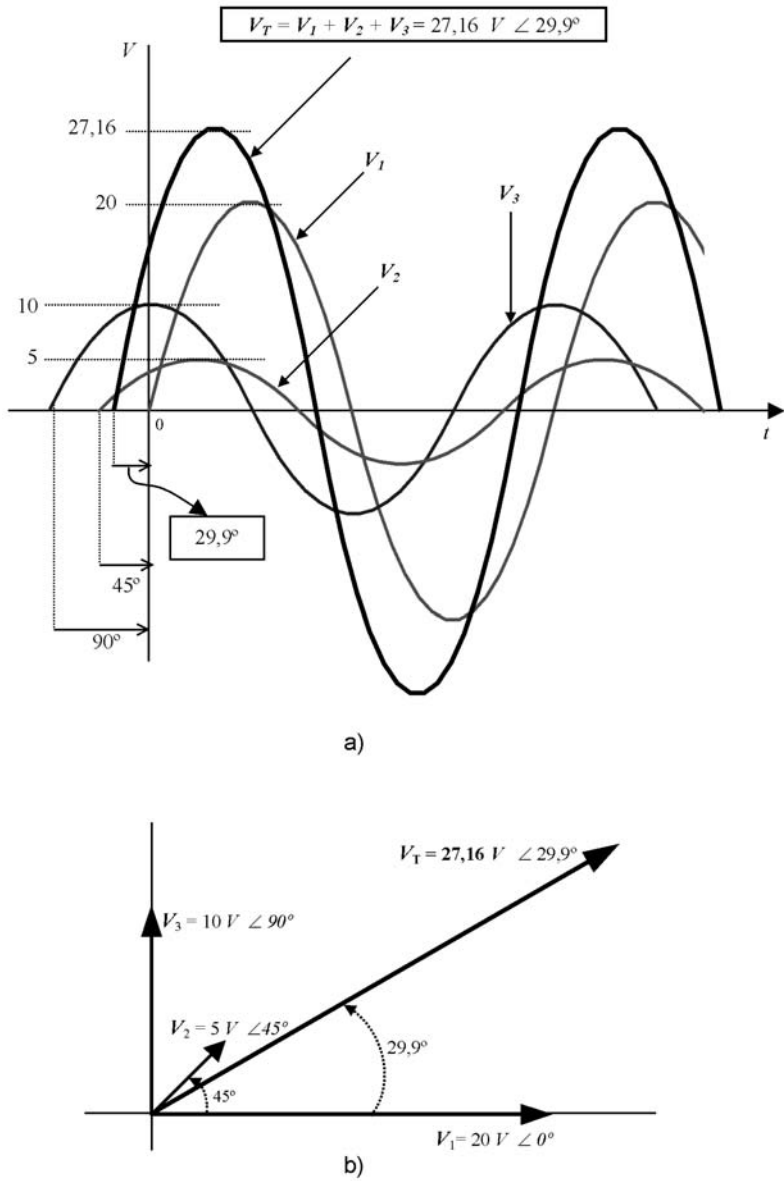
$$V_T = 23,53 + j13,53 = 27,14 \angle 29,9^\circ$$

O sea, la suma de las ondas representadas en la figura 2.15 da lugar a una onda resultante con un valor de pico de 27,14 V y con un desfase de 29,9°. Su expresión analítica es:

$$\boxed{v_T = 27,14 \text{ Sen}(\omega t + 29,9^\circ)}$$

Puesto que hemos operado con los valores de pico de las tensiones en vez de con los eficaces, no ha sido necesario convertir la tensión resultante a valor de pico.

En la figura 2.17 se representa el gráfico de ondas, resaltando la onda resultante y el diagrama vectorial correspondiente.



**Figura 2.17 .** a) Diagrama de ondas con la onda resultante de la suma. b) Diagrama vectorial resultante de la suma de las tres ondas. (Para facilitar la comprensión del desarrollo, las tensiones están en valor de pico (para que coincidan con los valores de pico de las ondas).

### 2.6.3 Resta de números complejos

La resta de los números complejos se realiza de la misma manera que la suma, cambiando la operación suma por la resta; se restan por separado las componentes reales e imaginarias de los operandos, siendo el resultado de dichas restas el número complejo resultante. De forma general, esto es:

$$\mathbf{Z}_1 = a_1 + j b_1$$

$$\mathbf{Z}_2 = a_2 + j b_2$$

$$\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2 = (a_1 + j b_1) - (a_2 + j b_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

Esto, puesto que una resta también se puede ver como una suma:  $A - B = A + (-B)$ , es equivalente a sumar el sustraendo con signo contrario, por lo cual:

$$\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_1 + (-\mathbf{Z}_2) \Rightarrow (a_1 + j b_1) - (a_2 + j b_2) = (a_1 + j b_1) + (-a_2 - j b_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

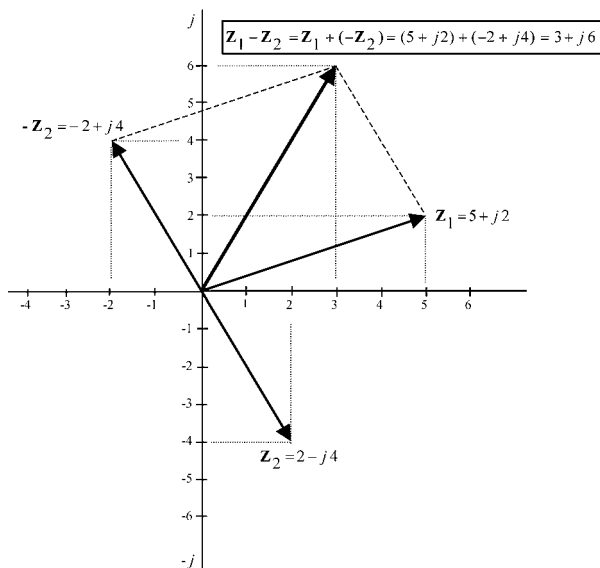
#### Ejemplo 2.2:

$$\mathbf{Z}_1 = 5 + j2$$

$$\mathbf{Z}_2 = 2 - j4$$

$$\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2 = (5 + j2) - (2 - j4) = (5 + j2) + (-2 + j4) = (5 - 2) + (j2 + j4) = \boxed{3 + j6}$$

En la figura 2.18 se representa de forma gráfica el resultado de dicha resta.



**Figura 2.18.** Representación gráfica de la resta de dos números complejos.

Como se observa, el vector del complejo a restar (sustraendo) aparecen con signo contrario, por lo cual está en sentido contrario al original. Cuando en un número complejo se cambian los signos de la partes real e imaginaria se obtiene un complejo de signo contrario, que equivale a un vector opuesto. Ejemplo, el opuesto de  $(1 - j 4)$  es  $(-1 + j 4)$ ; gráficamente, corresponde a dos vectores de igual módulo pero en sentido contrario.

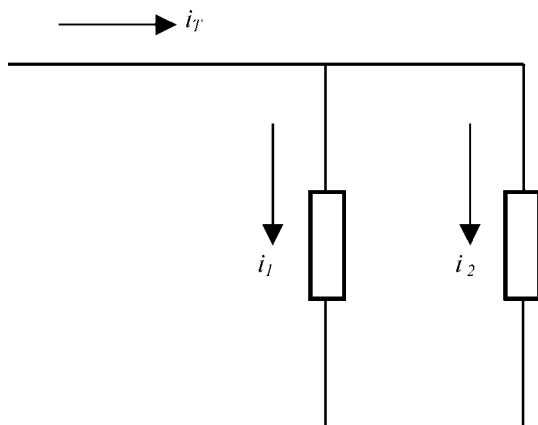
### 2.6.3.1 Ejemplo de aplicación

Al igual que se ha hecho en el caso de la suma, veamos un ejemplo de aplicación a la electricidad.

Supongamos el nudo del circuito siguiente (fig.2.19), en el cual se tiene que hallar la intensidad  $i_1$  sabiendo que:

$$i_T = 12 \text{ Sen}(314,16t + 90^\circ)$$

$$i_2 = 6 \text{ Sen}(314,16t + 45^\circ)$$



**Figura 2.19.** Circuito del ejercicio.

Aplicando Kirchhoff se sabe que el valor de  $i_1$  se obtiene por:

$$i_T = i_1 + i_2 \Rightarrow \boxed{i_1 = i_T - i_2}$$

Para obtener  $i_1$  se tiene que efectuar pues una operación de resta.

Las expresiones analíticas de  $i_T$  e  $i_2$  anteriores nos dan el valor instantáneo de la intensidad (intensidad en función del tiempo), cuyo significado es:  $i_T$  es una intensidad de 12 A de pico, de  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314,16}{6,283} = 50 \text{ Hz}$  desfasada  $90^\circ$ ; en el caso de  $i_2$ , se trata de una intensidad de 6 A de pico, también de  $f = 50 \text{ Hz}$ , con un desfase de  $45^\circ$ .

Primeramente pasaremos dichas expresiones a la forma polar, para lo cual lo primero que haremos es pasar los valores de la intensidad a su valor eficaz. Obtenemos así:

$$I_T = \frac{12}{\sqrt{2}} = 8,48 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,24 \text{ A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} I_T = 8,48 \angle 90^\circ \\ I_2 = 4,24 \angle 45^\circ \end{matrix}}$$

Estas expresiones en forma polar nos indican que: la intensidad  $I_T$  tiene un valor eficaz de 8,48 A y su desfase es de  $90^\circ$ . De forma análoga,  $I_2$  es de 4,24 A eficaces y su desfase es  $45^\circ$ . Dichas intensidades, como es obvio, son fasores, por lo que también se puede decir que la intensidad  $I_T$  tiene por módulo 8,48 y por argumento  $90^\circ$ .

Puesto que la resta, al igual que la suma, sólo se puede realizar en la forma binómica, convertimos las expresiones polares en binómicas (aconsejablemente mediante calculadora, dado su sencillez), obteniéndose:

$$I_T = 8,48 \angle 90^\circ \Rightarrow I_T = j8,48$$

$$I_2 = 4,24 \angle 45^\circ \Rightarrow I_2 = 3 + j3$$

Efectuando la operación de resta, tenemos:

$$I_1 = I_T - I_2 \Rightarrow I_1 = j8,48 - (3 + j3) = -3 + j8,48 - j3 = \boxed{-3 + j5,48}$$

Pasando el resultado a la forma polar:

$$\boxed{I_1 = -3 + j5,48 = 6,25 \angle 118,7^\circ}$$

Así, la onda de intensidad  $I_1$  tiene un valor (eficaz) de 6,25 A y un desfase de  $118,7^\circ$ . Expresada en su forma analítica, esto es:

$$i_1 = 6,25 \sqrt{2} \text{ Sen } (314,16t + 118,7^\circ)$$

Como en las expresiones analíticas tiene que ponerse el valor de pico y en la onda senoidal es  $I_p = I \sqrt{2}$ , siendo  $I$  el valor eficaz, en la expresión aparece  $6,25 \sqrt{2}$ .

## 2.6.4 Operación de multiplicar

La multiplicación de los números complejos se hace al igual que los binomios algebraicos, teniendo en cuenta que cuando aparezca  $j^2$  (lo cual es muy probable) se sustituya por  $-1$ . Puesto que al multiplicar pueden aparecer potencias del operador  $j$ , se tiene que tener en cuenta que:  $j^2 = -1$ ,  $j^3 = -j$ ,  $j^4 = 1$ , etc.

La operación de multiplicar puede realizarse en la forma binómica o polar, siendo más sencillo en la forma polar como veremos posteriormente.

### 2.6.4.1 Multiplicación en la forma binómica

En general, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= a_1 + j b_1 \\ \mathbf{Z}_2 &= a_2 + j b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 &= (a_1 + j b_1) (a_2 + j b_2) = (a_1 \cdot a_2) + (a_1 \cdot j b_2) + (j b_1 \cdot a_2) + (j b_1 \cdot j b_2) = \\ &= a_1 a_2 + a_1 j b_2 + a_2 j b_1 + j^2 b_1 b_2 \end{aligned}$$

Como que  $j^2 = -1$ , el término  $j^2 b_1 b_2 = -b_1 b_2$ . Por lo cual se puede poner:

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = (a_1 \cdot a_2) + (a_1 \cdot j b_2) + (a_2 \cdot j b_1) - (b_1 b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

#### Ejemplo 2.3:

$$\mathbf{Z}_1 = 5 + j 3$$

$$\mathbf{Z}_2 = 2 - j 2$$

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = (5 + j 3) + (2 - j 2) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot (-j 2) + j 3 \cdot 2 + j 3 \cdot (-j 2)$$

Puesto que el término que:  $j 3 \cdot (-j 2) = j^2 (-3 \cdot 2) = (-1) \cdot (-6) = 6$ , se obtiene que:

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = 10 - j 10 + j 6 + 6 = (10 + 6) + (j 6 - j 10) = \boxed{16 - j 4}$$

### 2.6.4.2 Multiplicación en la forma polar

En la forma polar la multiplicación resulta más sencilla que en la forma binómica, como vamos a ver. Por ello, cuando se tienen expresiones binómicas y se tiene que multiplicar a veces puede resultar mejor pasar a la forma polar para hacer las operaciones y, después, si conviene, el resultado se vuelve a la forma binómica.

La multiplicación en la forma polar consiste en multiplicar los módulos de las expresiones y sumar los argumentos (ángulos); el módulo resultante es el producto de los módulos, y el argumento resultante la suma de los ángulos. Esto es, en general:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= Z_1 \angle \varphi_1 \\ \mathbf{Z}_2 &= Z_2 \angle \varphi_2 \end{aligned} \right\} \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = Z_1 \angle \varphi_1 \times Z_2 \angle \varphi_2 = Z_1 \cdot Z_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$$

#### Ejemplo 2.4:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= 220 \angle 30^\circ \\ \mathbf{Z}_2 &= 18 \angle -45^\circ \end{aligned} \right\} \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = (220 \angle 30^\circ) \times (18 \angle -45^\circ) = 3960 \angle -15^\circ$$



Así, la multiplicación de  $(5 + j3) \cdot (2 - j2)$ , realizada anteriormente en la forma binómica, podríamos realizarla también pasándola a la forma polar y después volviéndola a la forma binómica. Esto es:

$$\mathbf{Z}_1 = 5 + j3 = 5,83 \angle 30,9^\circ$$

$$\mathbf{Z}_2 = 2 - j2 = 2,83 \angle -45^\circ$$

$$\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = (5,83 \angle 30,9^\circ) \times (2,83 \angle -45^\circ) = 16,5 \angle -14,1^\circ$$

Dicho resultado, pasado a la forma binómica es:

$$\left. \begin{array}{l} 16,5 \cos(-14,1^\circ) = 16 \\ 16,5 \sin(-14,1^\circ) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{Z} = 16 - j4$$

Como es de esperar, el resultado es el mismo que el obtenido haciéndolo en la forma binómica.

## 2.6.5 Operación de dividir

La operación de dividir, al igual que la multiplicación, puede realizarse en la forma binómica o polar, resultando más sencillo en la forma polar. Veamos los dos casos.

### 2.6.5.1 División en la forma binómica

En la división de esta manera, además de las operaciones típicas de división de polinomios algebraicos, se requiere una operación de simplificación que se llama *racionalizar*; consiste en multiplicar el numerador y el denominador por el *conjugado* del denominador. De esta manera el denominador se convierte en un número real (desaparece la parte imaginaria), con lo cual se puede dividir al numerador. Veamos primero en que consiste el conjugado de un número complejo.

#### 2.6.5.1.1 Conjugado de un complejo

En la forma binómica, el conjugado se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria. Así, pues, un número complejo es conjugado de otro si únicamente difiere en el signo de la parte imaginaria. En general, el conjugado se suele representar poniendo un asterisco como exponente:

$$\mathbf{Z}_1 = a + jb \Rightarrow \mathbf{Z}_1^* = a - jb$$

$$\mathbf{Z}_2 = -a - jb \Rightarrow \mathbf{Z}_2^* = -a + jb$$

**Ejemplo 2.5:**

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= 3 + j4 \Rightarrow \mathbf{Z}_1^* = 3 - j4 \\ \mathbf{Z}_2 &= -5 - j4 \Rightarrow \mathbf{Z}_1^* = -5 + j4 \end{aligned}$$

En la forma polar, dos números son conjugados si tienen el mismo módulo y argumento pero difieren en el signo del argumento. O sea, el conjugado se obtiene simplemente cambiando el signo del ángulo. Esto es:

$$\boxed{\mathbf{Z}_1 = Z_1 \angle \varphi \Rightarrow \mathbf{Z}_1^* = Z_1 \angle -\varphi}$$

**Ejemplo 2.6:**

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= 125 \angle 60^\circ \Rightarrow \mathbf{Z}_1^* = 125 \angle -60^\circ \\ \mathbf{Z}_2 &= 35 \angle -90^\circ \Rightarrow \mathbf{Z}_2^* = 35 \angle 90^\circ \end{aligned}$$

El conjugado también puede aparecer en la forma trigonométrica y, en base a lo explicado en la forma binómica, se deduce que es:

$$\mathbf{Z} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi \Rightarrow \mathbf{Z}^* = Z \cos \varphi - j Z \sin \varphi$$

La utilidad del obtener el conjugado de un complejo, es que nos puede permitir ciertas simplificaciones. Su propiedad más interesante es que: *el producto de un número complejo por su conjugado da lugar siempre a un número real* (desaparece la parte imaginaria). En general, se tiene:

$$\mathbf{Z} = a + jb \Rightarrow \mathbf{Z}^* = a - jb$$

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 - jab + jab - j^2 b^2$$

Y como que  $j^2 = -1$ , el término  $j^2 b^2 = -b^2$ .

Obteniéndose así:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^* = a^2 - jab + jab - j^2 b^2 = a^2 - jab + jab - (-b^2) = \boxed{a^2 + b^2}$$

**Ejemplo 2.7:**

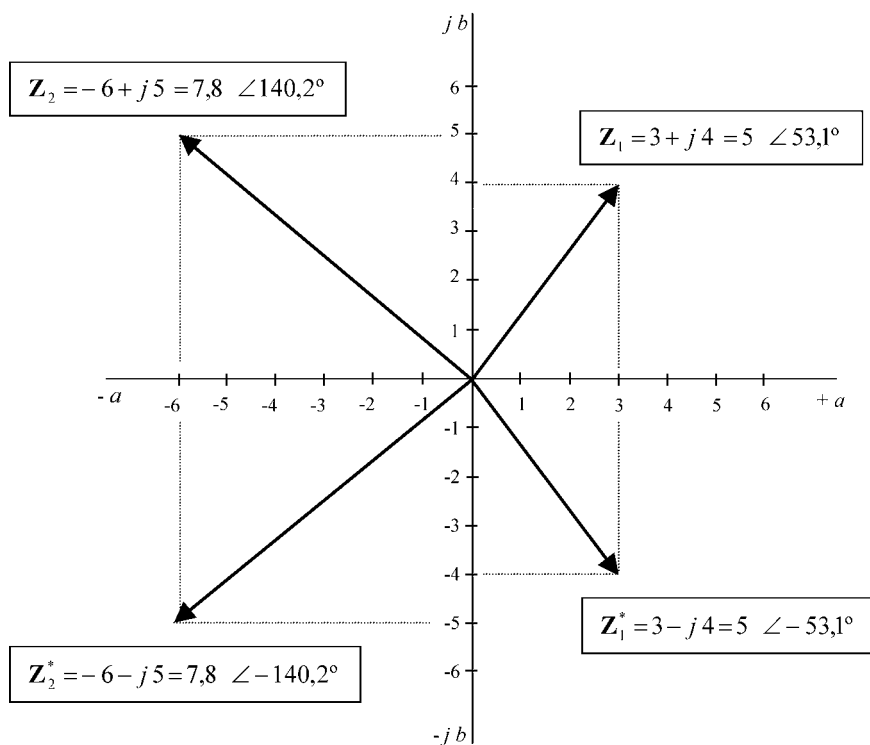
$$\mathbf{Z} = 3 - j2 \Rightarrow \mathbf{Z}^* = 3 + j2$$

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^* = (3 - j2)(3 + j2) = (3 \times 3) + (3 \times j2) + (-j2 \times 3) + (-j2 \times j2) = 9 + j6 - j6 - j^2 4 = 9 + 4 = 13$$

Y se obtiene el mismo resultado más fácilmente aplicando la fórmula deducida antes:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^* = (3 - j2)(3 + j2) = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$

De forma gráfica, en el plano complejo, el conjugado aparece siempre de forma simétrica respecto al eje real, como se muestra en la figura 2.20.



**Figura 2.20.** Representación gráfica de dos números complejos y sus conjugados.

Una vez visto los números conjugados, veamos la división en forma binómica.

En la división de esta manera, se tiene que multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, para así convertir el denominador en un número real (desaparece el operador  $j$ ) y poder dividir al numerador. En el caso general, esto es:

$$Z_1 = a_1 + jb_1$$

$$Z_2 = a_2 + jb_2 \Rightarrow Z_2^* = a_2 - jb_2$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{Z_1 \cdot Z_2^*}{Z_1 \cdot Z_2^*} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

### Ejemplo 2.8:

$$Z_1 = 8 - j10$$

$$Z_2 = 2 + j4 \Rightarrow Z_2^* = 2 - j4$$

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{8 - j10}{2 + j4} = \frac{(8 - j10)(2 - j4)}{(2 + j4)(2 - j4)} = \frac{16 - j32 - j20 + j^2 40}{2^2 + 4^2} = \frac{-24 - j52}{20} = \boxed{-1,2 - j2,6}$$

Reacuérdesse que  $j^2 = -1$ , por lo cual:  $j^2 40 = -40$ .

Como ejercicio interesante complementario, vamos a hacer la conversión del resultado a la forma polar.

Como la parte real e imaginaria tienen signo negativo, se deduce que el vector se encuentra dentro del tercer cuadrante del plano complejo; por ello, para obtener el argumento, al ángulo dado por  $\tan^{-1} \frac{-2,6}{-1,2} = 65,2^\circ$  se le tiene que sumar  $180^\circ$ , lo cual

nos da:  $\varphi = 65,2^\circ + 180^\circ = 245,2^\circ$ . Y el módulo es:  $Z = \sqrt{1,2^2 + 2,6^2} = 2,86$ . Así, pues:

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{8 - j10}{2 + j4} = -1,2 - j2,6 = 2,86 \angle 245,2^\circ$$

Por otra parte, hay que tener en cuenta que el ángulo de  $245,2^\circ$  (desfase en adelanto, sentido antihorario) es equivalente a  $-114,8^\circ$  (desfase en retraso, sentido horario), por lo cual ha veces se ponen valores de ángulos que son diferentes pero equivalen a lo mismo. Por ejemplo:  $2,86 \angle 245,2^\circ = 2,86 \angle -114,8^\circ$

### 2.6.5.2 División en la forma polar

La división en la forma polar es mucho más sencilla que en la forma binómica, como vamos a ver. Por ello, en muchos casos, cuando se parte de expresiones binómicas y se tiene que dividir, lo que se hace es pasar las expresiones a la forma polar para hacer las operaciones y después, si interesa, se vuelve el resultado a la forma binómica.

Para hacer una división en forma polar, simplemente se dividen los módulos y se restan los argumentos (ángulos). En el caso general, esto es:

$$\frac{Z_1 \angle \varphi_1}{Z_2 \angle \varphi_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2$$

O sea, que: El módulo resultante es la división entre el módulo del numerador y del denominador, y el argumento resultante es la resta entre el ángulo del numerador y del denominador.

#### Ejemplo 2.9:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Z}_1 = 250 \angle 30^\circ \\ \mathbf{Z}_2 = 10 \angle -60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{250 \angle 30^\circ}{10 \angle -60^\circ} = \frac{250}{10} \angle 30^\circ - (-60^\circ) = 25 \angle 90^\circ$$

Así, la división hecha antes en la forma binómica también se podría hacer en la forma polar, convirtiendo primeramente las expresiones binómicas a la forma polar y el resultado pasándolo después a la forma binómica. O sea, de la siguiente manera:

$$Z_1 = 8 - j10 \Rightarrow Z_1 = 12,8 \angle -51,3^\circ$$

$$Z_2 = 2 + j4 \Rightarrow Z_2 = 4,47 \angle 63,4^\circ$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{12,8 \angle -51,3^\circ}{4,47 \angle 63,4^\circ} = \frac{12,8}{4,47} \angle -51,3^\circ - 63,4^\circ = 2,86 \angle -114,7^\circ$$

La conversión de este resultado a la forma binómica nos da:

$$\left. \begin{array}{l} 2,86 \cos 114,7^\circ = -1,2 \\ 2,86 \sin(-114,7^\circ) = -2,6 \end{array} \right\} 2,86 \angle -114,7^\circ = -1,2 - j2,6$$

Que coincide con el obtenido anteriormente operando en la forma binómica. De esta manera se evita tener que hacer el conjugado y las operaciones de racionalizar, pero en contrapartida se tienen que hacer las correspondientes conversiones entre las formas binómica y polar (aunque con las calculadoras científicas normales estas cosas resultan muy rápidas y sencillas).

## 2.7 APLICACIÓN DE LA NOTACIÓN COMPLEJA A LOS CIRCUITOS DE ELECTRICIDAD Y ELECTRÓNICA

Y para terminar con esta introducción al cálculo mediante números complejos, cuyo nuestro principal objetivo es su aplicación a los circuitos de electricidad y electrónica, se debe recordar la siguiente representación:

$$\text{Resistencia pura} \Rightarrow R \angle 0^\circ$$

$$\text{Reactancia inductiva pura} \Rightarrow X_L \angle 90^\circ = j X_L$$

$$\text{Reactancia capacitiva pura} \Rightarrow X_C \angle -90^\circ = -j X_C$$

De una forma gráfica esto se muestra en la figura 2.21. Dicha representación se hace en base a los desfases entre la intensidad y la tensión que producen los componentes resistencia (R), inductancia (L) y capacidad (C), tomando como referencia la intensidad (I).

En la figura 2.22 se representa el caso de una resistencia (que se supone pura), en el que aparece el diagrama vectorial, el diagrama de ondas y un ejemplo de cálculo de aplicación. Como la resistencia no desfasa, la intensidad y la tensión van en fase.

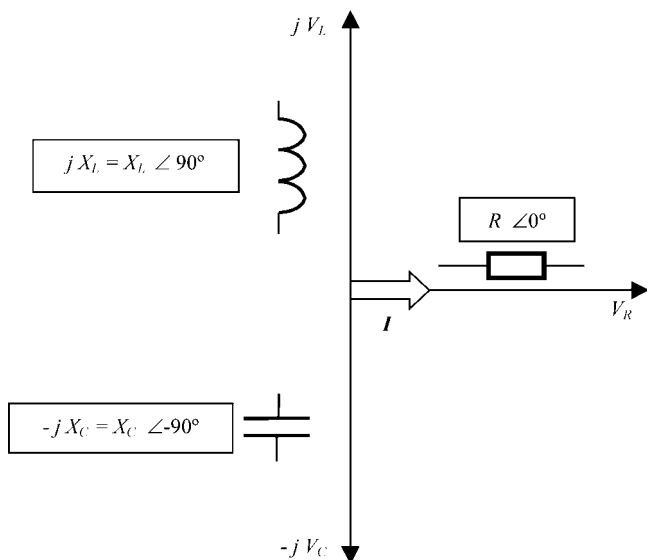


Figura 2.21.

### Resistencia pura

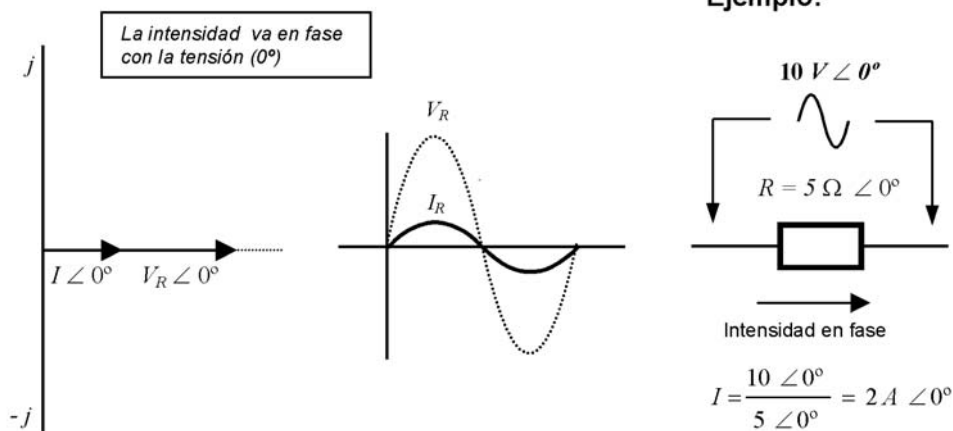
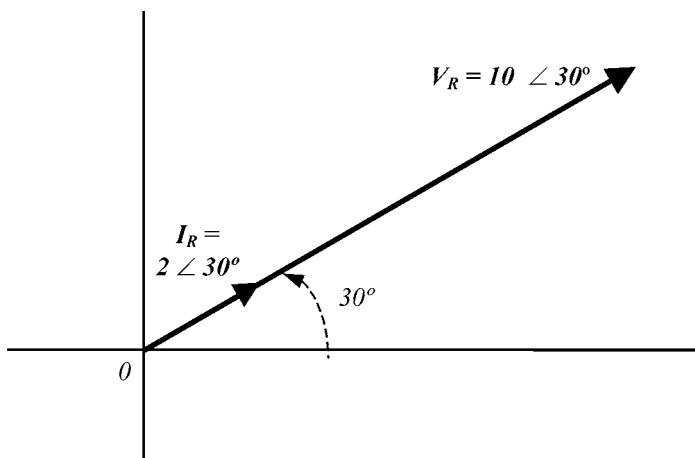


Figura 2.22. Diagrama vectorial y de ondas de una resistencia pura, con un ejemplo de cálculo aplicando la notación compleja.

Y en el caso de que la tensión aplicada tuviera un desfase de  $30^\circ$ , la intensidad circularía también con dicho desfase, y así es como aparece también por cálculo (en la forma polar):

$$I_R = \frac{V \angle 30^\circ}{R \angle 0^\circ} = \frac{10 \angle 30^\circ}{5 \angle 0^\circ} = 2 A \angle 30^\circ$$

Su representación vectorial es la que se muestra en la figura 2.23. El vector tensión se encuentra adelantado  $30^\circ$  respecto a la línea de referencia ( $0^\circ$ ), y el vector intensidad está situado en la misma posición porque la intensidad también va adelantada  $30^\circ$  (debido a que la tensión y la intensidad van en fase).



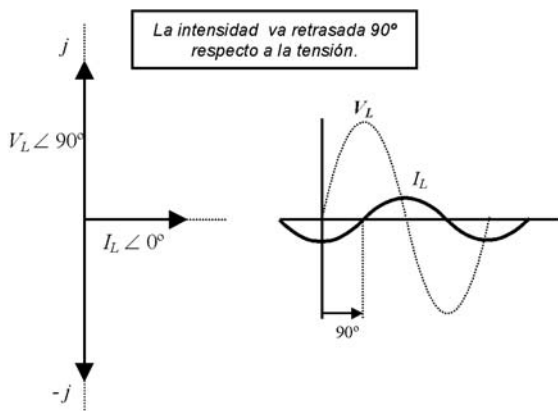
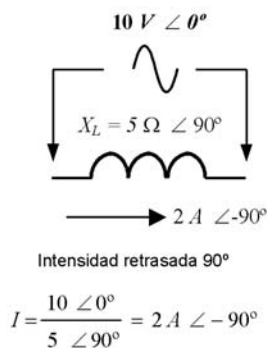
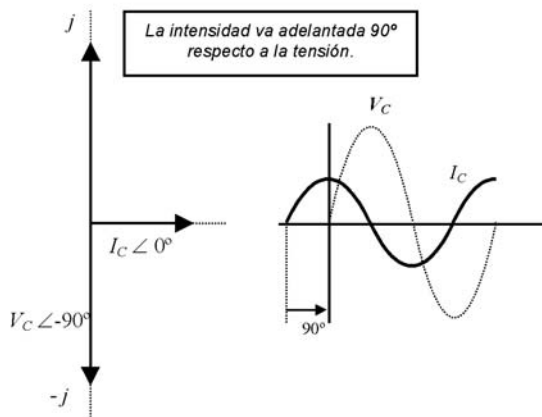
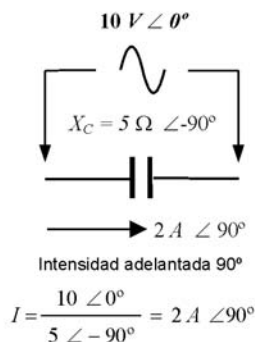
**Figura 2.23.** Diagrama vectorial que se obtendría si la tensión aplicada a la resistencia de la figura anterior estuviera adelantada  $30^\circ$ .

Otro ejemplo gráfico, en este caso, con respecto a la inductancia y la capacidad (que se suponen puras) se muestra en la figura 2.24. Los desfases (de  $90^\circ$ ) que producen dichos componentes quedan representados por los diagramas vectorial y de ondas, y también aparecen en los resultados del cálculo.

En el caso de que la tensión aplicada tuviera un desfase de  $30^\circ$ , la intensidad circularía con un desfase que viene dado por la regla de la división en la forma polar:

$$\text{Intensidad en la Inductancia} \Rightarrow I_L = \frac{V \angle 30^\circ}{X_L \angle 90^\circ} = \frac{10 \angle 30^\circ}{5 \angle 90^\circ} = 2 A \angle -60^\circ$$

$$\text{Intensidad en la capacidad} \Rightarrow I_C = \frac{V \angle 30^\circ}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{10 \angle 30^\circ}{5 \angle -90^\circ} = 2 A \angle 120^\circ$$

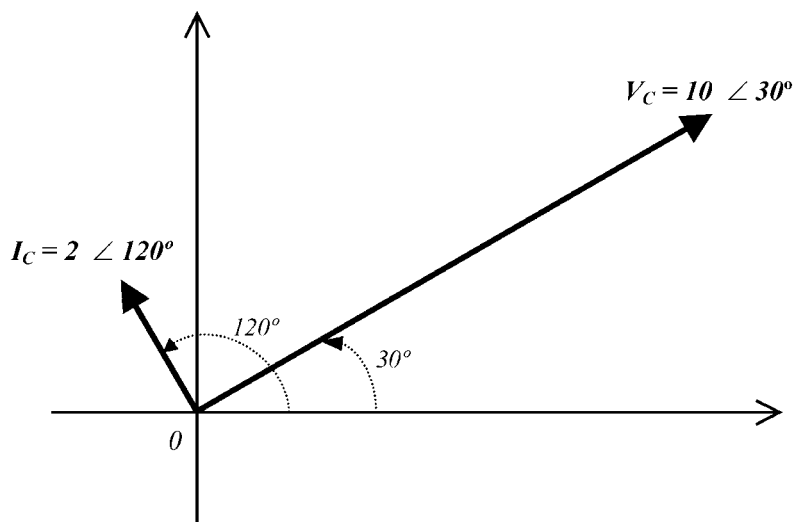
**Inductancia pura****Ejemplo:****Capacidad pura****Ejemplo:**

**Figura 2.24.** Diagrama vectorial y de ondas de una inductancia y capacidad pura, con un ejemplo de cálculo aplicando la notación compleja.

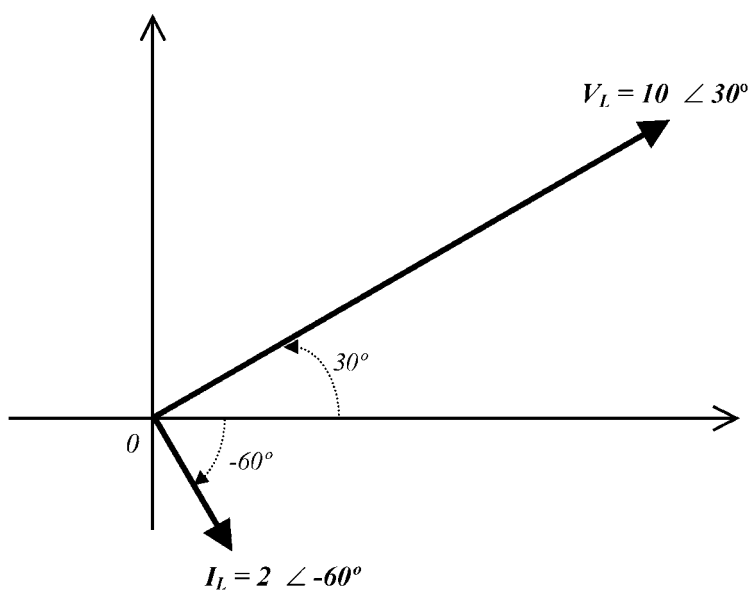
En el caso de la inductancia, esto se interpreta como que, con respecto a la línea de referencia ( $0^\circ$ ), la tensión está adelantada  $30^\circ$  y la intensidad circula retrasada  $60^\circ$ ; siendo esto equivalente a decir que la intensidad circula retrasada  $90^\circ$  respecto a la tensión (fig. 2.25a).

Y en el caso de la capacidad, significa que, respecto a la referencia ( $0^\circ$ ), la tensión está adelantada  $30^\circ$  y la intensidad circula adelantada  $120^\circ$ ; que equivale a decir que la intensidad va adelantada  $90^\circ$  respecto a la tensión (fig. 2.25b).





b)



a)

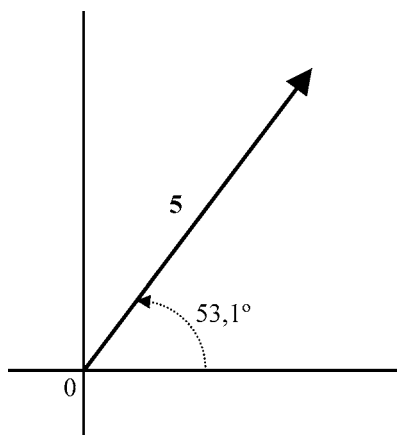
**Figura 2.25.** Diagramas vectoriales que se obtendrían si la tensión aplicada a la inductancia y capacidad de la figura anterior estuviera adelantada  $30^\circ$ .  
a) Inductancia. b) Capacidad.

## 2.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

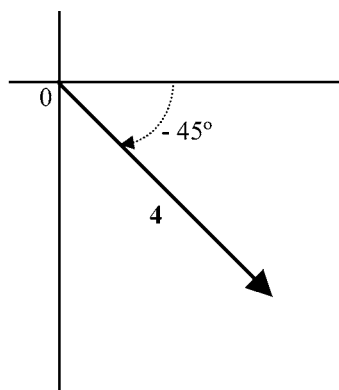
1. Representar de forma gráfica (*plano complejo*) los números:

- a)  $4 + j\ 3$
- b)  $-5 + j\ 5$
- c)  $-4 - j\ 3$
- d)  $5 - j\ 3$

2. Pasar a la forma binómica los vectores que se representan a continuación (fig.2.26):



a)



b)

Figura 2.26.

3. Pasar a la forma polar los números complejos:

- a)  $9 + j\ 4,1$
- b)  $2,3 - j\ 35$

4. Realizar la suma de los siguientes números complejos y representarla gráficamente en el plano complejo.

$$Z_1 = 4 + j\ 2$$

$$Z_2 = -2 + j\ 4$$

5. Dado los números complejos siguientes:

$$Z_1 = 3 + j2$$

$$Z_2 = -2 + j4$$

Realizar la resta  $Z_2 - Z_1$  y representar el resultado gráficamente.

6. Hacer la suma de las siguientes intensidades y representar su resultado en la forma polar.

$$i_1 = 32 \text{ Sen } (\omega t + 30^\circ)$$

$$i_2 = 7 \text{ Sen } (\omega t + 90^\circ)$$

7. Qué valor de intensidad y desfase se obtendrá si se aplica una tensión de 50 V con un desfase de  $45^\circ$  sobre los componentes (puros):

- a) Resistencia de  $20 \Omega$
- b) Inductancia de  $X_L = 50 \Omega$
- c) Condensador de  $X_C = 200 \Omega$

- 8) Supongamos dos intensidades representadas por las siguientes expresiones:

$$i_1 = 10 \text{ Sen } (6283 t + 45^\circ)$$

$$i_2 = 20 \text{ Sen } (6283 t + 90^\circ)$$

Hallar:

- a) La frecuencia
- b) La resta entre dichas intensidades:  $i_T = i_2 - i_1$ .

## Capítulo 3

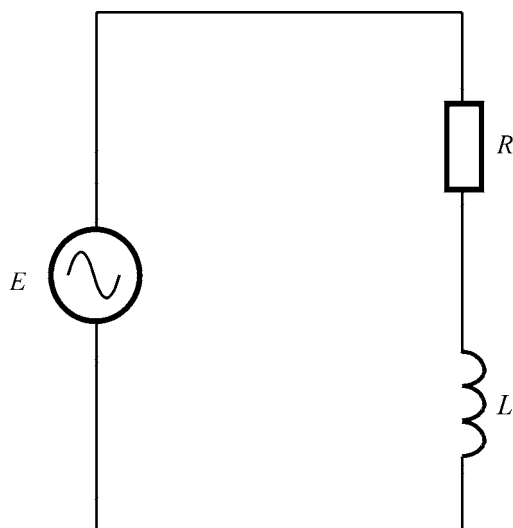
# Circuitos serie con resistencia, inductancia y capacidad (R-L-C)

### 3.1 CIRCUITO SERIE R – L

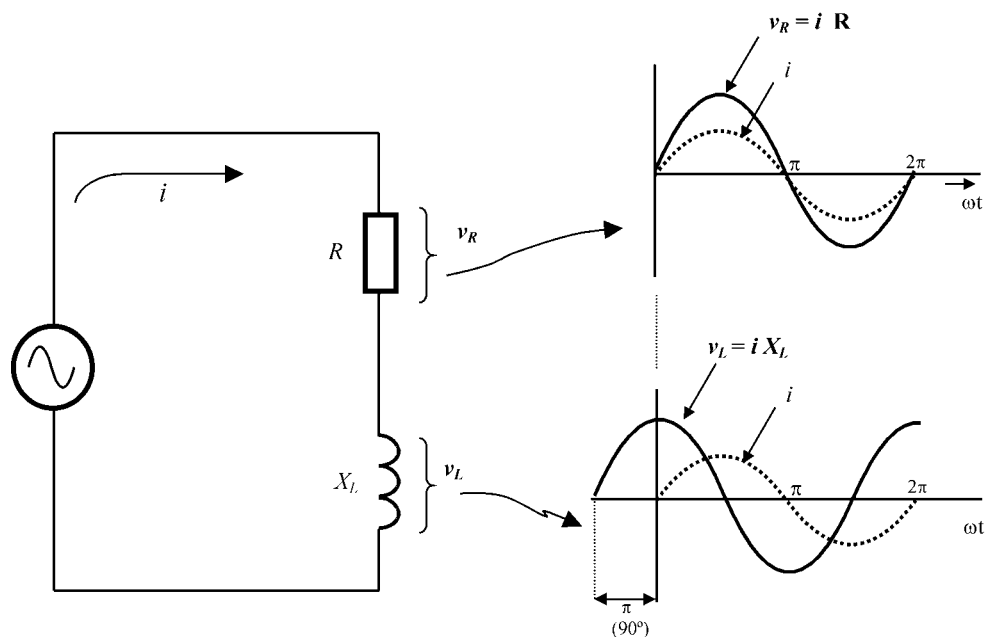
Son circuitos R-L los que se basan en inductancia (L) y resistencia (R); en la práctica, circuitos con bobinas y resistencias. Realmente, cualquier bobina por si sola ya da lugar a un circuito R-L, ya que, como se sabe, siempre tienen algo de resistencia óhmica debido al hilo con la que están formadas; es por ello que, en la práctica, no existen circuitos inductivos puros. Un circuito R-L básico es como se muestra en la figura 3.1. La resistencia puede ser simplemente la del hilo de la bobina o bien un componente resistor utilizado a propósito.

El análisis de este tipo de circuito nos revelará que el efecto de la resistencia hace que el típico desfase de  $90^\circ$  que introduce la bobina se haga menor y, además, que aparezca una potencia activa (disipada, en forma de calor, en la resistencia). Cuanto mayor sea el valor de la resistencia en comparación con el valor de la reactancia de la bobina, menos inductivo será el circuito y menor será el desfase. Como ya se puede inferir, si el valor de la resistencia es mucho mayor que el de la reactancia el circuito será casi totalmente resistivo y entonces casi no habrá desfase; o sea, cumplirá con las características explicadas en el apartado 1.4.1 del capítulo 1. Pero si la reactancia es mucho mayor que la resistencia, entonces las características del circuito estarán más próximas a las del circuito inductivo puro (apartado 1.4.2 del capítulo 1).

Si analizamos el circuito R-L de la figura 3.1, al ser un circuito de tipo serie, la intensidad que circulará será la misma en la resistencia y en la bobina. La onda de tensión en la resistencia, como es obvio, estará en fase con la onda de la intensidad. Pero esto no es así en la bobina, ya que, como se sabe, en la bobina la intensidad se retrasa  $90^\circ$  respecto a su tensión; esto hace que la onda de tensión en los terminales de la bobina vaya adelantada  $90^\circ$  con respecto a la intensidad que circula por el circuito. Esto queda representado en la figura 3.2. Y como es obvio, por Kirchhoff, se tiene que cumplir que la suma de la tensión en la resistencia y en la bobina debe ser igual a la tensión del generador. Es decir, la suma de los valores instantáneos de las ondas de tensión en la resistencia y en la bobina debe dar la onda del generador, como se representa en la figura 3.3a. Para ello se tiene que efectuar una suma vectorial de tensiones, o sea, teniendo en cuenta la fase de las ondas. Así, en el caso del circuito de la figura 3.1, la suma vectorial de las tensiones se puede expresar matemáticamente de la manera (fig.3.3b):

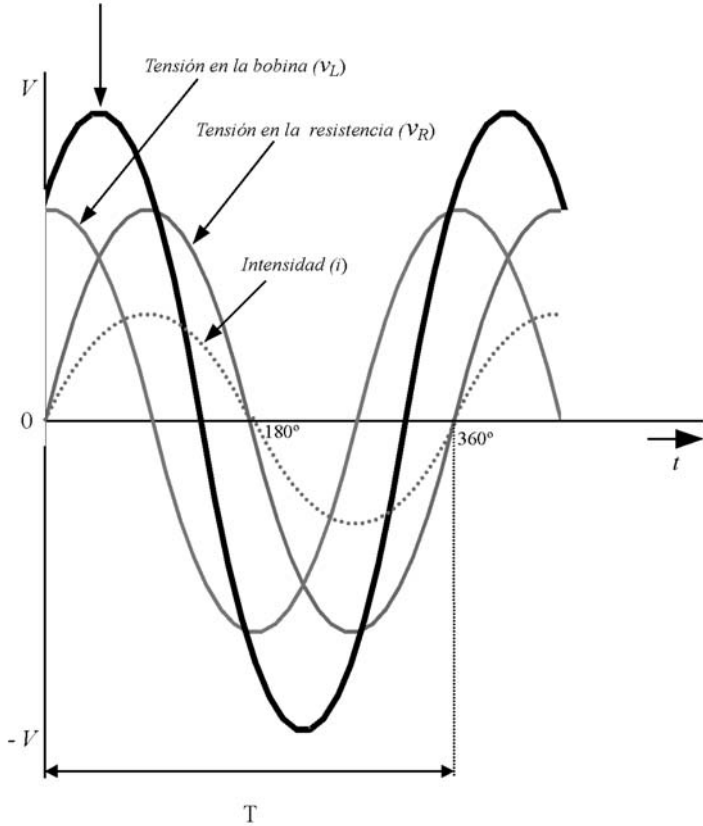


**Figura 3.1.** Circuito R - L elemental.

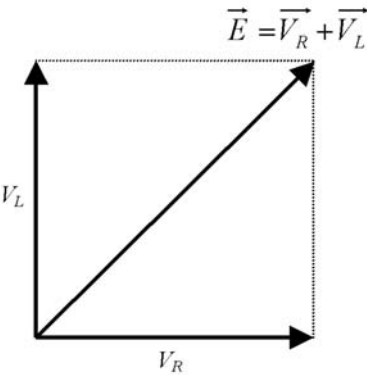


**Figura 3.2.** Ondas en los componentes del circuito R - L.

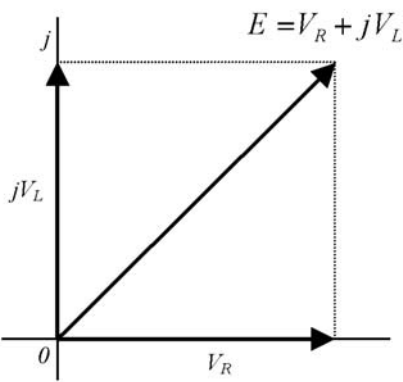
Tensión del generador = Tensión en la bobina + Tensión en la resistencia



a)



b)



c)

**Figura 3.3.** a) Diagrama de ondas del circuito R-L elemental. La suma de las ondas en resistencia y en la bobina tiene por resultante la onda del generador. b) Representación vectorial de las tensiones. c) Representación en la notación compleja.

$$\vec{E} = \vec{V}_R + \vec{V}_L$$

O, bien, en la forma compleja (fig.3.3c):

$$E = V_R + j V_L$$

En general, cuando se tienen señales desfasadas no se debe operar de forma simple aritmética, ya que los resultados no son correctos. Como se sabe, las ondas de c.a. se pueden ver como vectores giratorios (fasores), y por tanto se debe operar con ellos según las reglas del cálculo vectorial.

En los circuitos de c.a. del tipo R-L-C aparece una cosa muy peculiar, objeto a veces de muchas extrañezas y preguntas; ¡la suma (aritmética) de las tensiones en los componentes puede dar un valor de tensión hasta mucho mayor que la tensión del generador!. Esto se verificará más adelante mediante los cálculos.

Tomando la intensidad como vector de referencia, ya que, al ser un circuito serie, es común a todos los componentes, aparece el diagrama vectorial de tensiones del circuito (fig.3.4a). Donde se deduce que:

$$E = \sqrt{V_L^2 + V_R^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{V_L}{V_R}$$

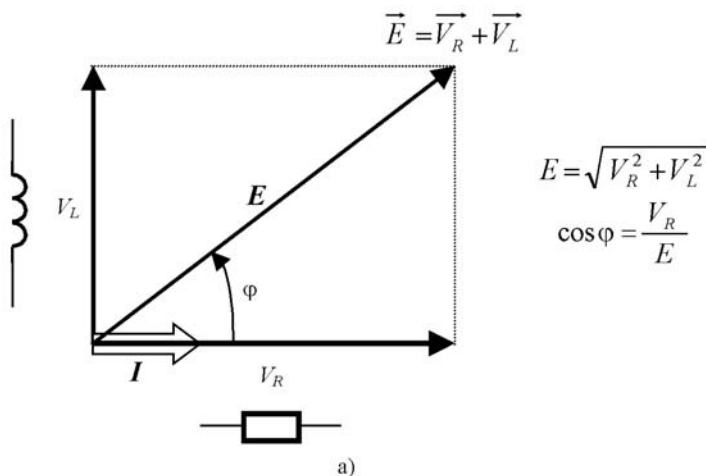
Como se puede observar gráficamente, el efecto de la resistencia hace que el ángulo de desfase ( $\varphi$ ) disminuya proporcionalmente al valor de  $V_R$ ; cuanto mayor sea  $V_R$  menor es el ángulo (fig.3.4b). Esto es obvio porque cuanto mayor sea  $R$  en comparación con  $X_L$  más resistivo se hace el circuito.

### 3.1.1 Impedancia

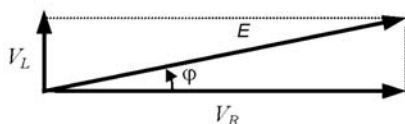
Este es un concepto de suma importancia en la técnica eléctrica y electrónica en general; aparece en los altavoces, amplificadores, generadores, antenas, electrotecnia, etc.

De una forma genérica, *impedancia* es el efecto resistivo total resultante de resistencia óhmica ( $R$ ) y de reactancia ( $X$ ). Se representa por  $Z$  y se mide en ohmios ( $\Omega$ ). Si entre dos puntos de un circuito se encuentran diversos componentes, resistivos, inductivos y capacitivos, la oposición que presenta al paso de la corriente dicho conjunto de componentes a una cierta frecuencia es una impedancia ( $Z$ ). Y no se trata de una simple suma aritmética de resistencia ( $R$ ) y de reactancia ( $X$ ); sino que es una suma vectorial, lo cual se desarrolla a continuación. Por ejemplo, en el circuito R-L (fig.3.5), si  $Z$  es el conjunto óhmico total resultante, la intensidad que circulará por el circuito vendrá dada por :

$$I = \frac{E}{Z}$$



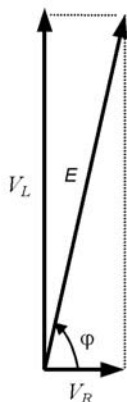
**La R es mucho mayor que la  $X_L$**



La tensión en la R es mucho mayor que la tensión en la L; el circuito es poco inductivo (es más bien resistivo):

- Desfase muy bajo ( $\varphi \rightarrow 0^\circ$ ); alto factor de potencia ( $\cos \varphi \rightarrow 1$ ).
- Casi no hay potencia reactiva (Q); la potencia activa (P) es casi igual a la potencia aparente (S):  $P = V_R I \rightarrow S = E \cdot I$

**La  $X_L$  es mucho mayor que la R**



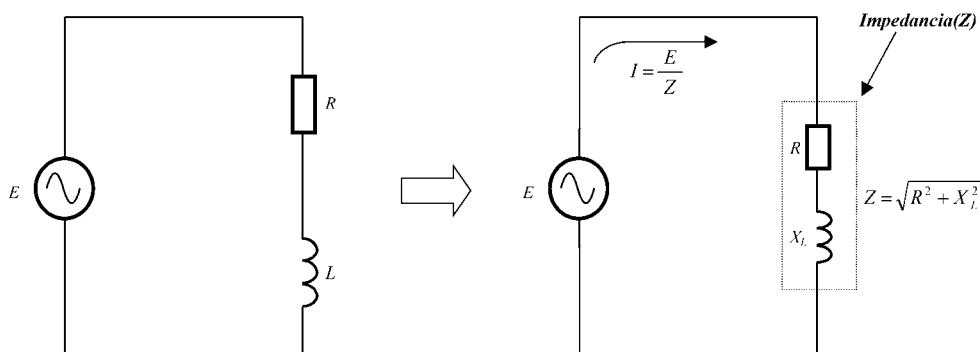
La tensión en la bobina es mucho mayor que la tensión en la resistencia; el circuito es fuertemente inductivo:

- Desfase muy elevado ( $\varphi \rightarrow 90^\circ$ ); bajo factor de potencia ( $\cos \varphi \rightarrow 0$ ).
- Casi no hay potencia activa (P); la potencia reactiva (Q) es casi igual a la potencia aparente (S):  $Q = V_L I \rightarrow S = E \cdot I$

b)

**Figura 3.4.** a) La suma vectorial de las tensiones en la bobina y en la resistencia da lugar a la tensión aplicada (la del generador). b) Características del circuito cuando la resistencia es mucho mayor o menor que la reactancia.





**Figura 3.5.** representación de una impedancia ( $Z$ ); suma vectorial de los efectos resistivo e inductivo.

Y las tensiones en la resistencia y en la bobina, serán:

$$V_R = R I \quad V_L = X_L I$$

Y como que  $V_L = X_L I$ ,  $V_R = R I$  y  $E = Z I$ , dividiendo todo por  $I$  se deduce lo que se conoce por *triángulo de impedancia* (fig.3.6a). Que, en este circuito, se obtiene:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

De donde se deduce, asimismo el ángulo de desfase:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{V_L}{V_R} = \tan^{-1} \frac{X_L}{R}$$

que también se puede obtener por:

$$\begin{aligned} \varphi &= \cos^{-1} \frac{V_R}{E} = \cos^{-1} \frac{R}{Z} \\ \varphi &= \sin^{-1} \frac{V_L}{E} = \sin^{-1} \frac{X_L}{Z} \end{aligned}$$

### Ejemplo 3.1:

Si los valores de los componentes son  $R = 1 \text{ k } \Omega$  y  $L = 250 \text{ mH}$ , a la frecuencia de 500 Hz el valor de la impedancia es:

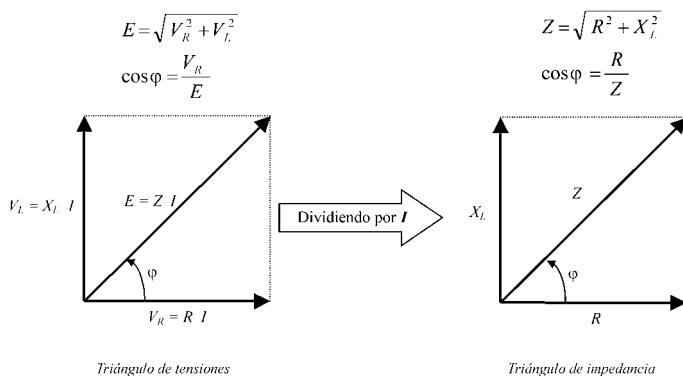
Como el valor de la reactancia es:  $X_L = 2\pi fL = 6,283 \times 500 \times 0,250 = 785,4 \Omega$ , se tiene:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{1000^2 + 785,4^2} = 1271,5 \Omega$$

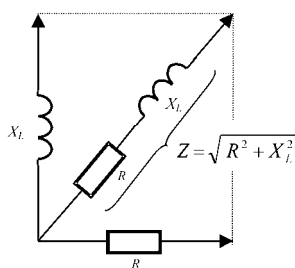
Como se observa, es un valor que no es la resultante de la suma aritmética de la reactancia y la reactancia.

Una representación muy ilustrativa del triángulo de impedancia se muestra en la figura 3.6b. En la forma compleja la impedancia quedaría expresada por (fig.3.6c):

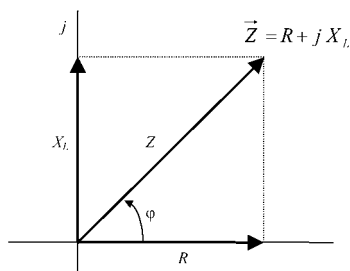
$$Z = R + j X_L$$



a)



b)

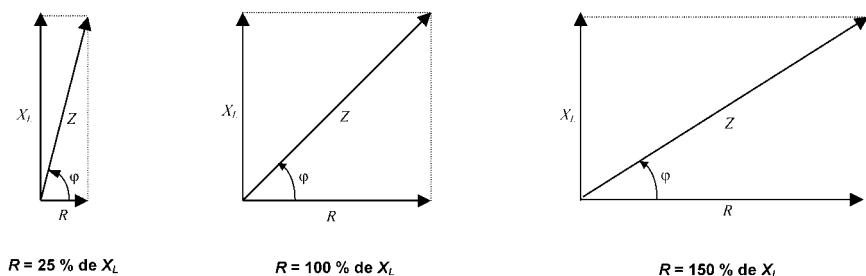


c)

**Figura 3.6.** a) Dividiendo por la intensidad ( $I$ ) cada valor del triángulo de tensiones se obtiene el triángulo de impedancia. b) Forma singular; didáctica, de ilustrar el triángulo de impedancia del circuito R-L. c) representación en la notación compleja del triángulo de impedancia.

Puesto que la impedancia depende de la  $X_L$  su valor no es constante, varía con la frecuencia. En la figura 3.7 se representa dicha variación para un valor constante de  $R$  y de  $X_L$ .

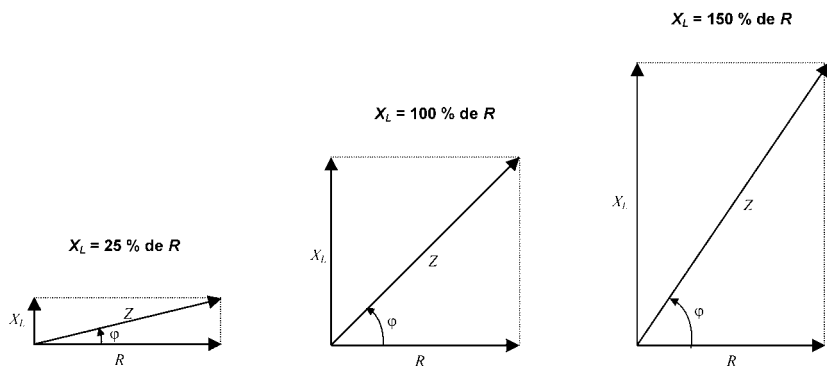
*Variación de la  $Z$  cuando la  $R$  varía ( $X_L$  constante)*



Cuando la  $R$  aumenta se hace mayor la  $Z$  y disminuye el ángulo ( $\phi$ ); el circuito se hace más resistivo.

a)

*Variación de la  $Z$  cuando la  $X_L$  varía ( $R$  constante)*



Cuando la  $X_L$  aumenta se hace mayor la  $Z$  y el ángulo ( $\phi$ ); el circuito se hace más inductivo.

b)

**Figura 3.7.** a) Representación vectorial de cómo varía la impedancia cuando la resistencia varía y permanece constante la reactancia. b) Representación vectorial de cómo varía la impedancia cuando la reactancia varía y permanece constante la resistencia.

### 3.1.2 Potencia

Aplicando los conceptos de potencia ya explicados, en el circuito R-L de la figura 3.1, tenemos lo siguiente:

Como ya se sabe, la intensidad viene dada por:  $I = \frac{E}{Z}$

La potencia activa es únicamente la disipada en la resistencia (en forma de calor):

$$\text{Potencia activa (P)} = V_R I = R I^2 = \frac{V_R^2}{R}$$

Y que se puede obtener también por:  $P = E I \cos \varphi$

La potencia reactiva, es la potencia desarrollada únicamente en la bobina:

$$\text{Potencia reactiva (Q)} = V_L I = X_L I^2 = \frac{V_L^2}{X_L}$$

Y que se puede obtener también por:  $Q = E I \sin \varphi$

La potencia aparente, obviamente, es:

$$\text{Potencia aparente (S)} = E I = I^2 Z = \frac{E^2}{Z}$$

Como se deduce del diagrama vectorial de tensiones del circuito (fig.3.8a), el factor de potencia viene dado por  $\cos \varphi = \frac{V_R}{E}$ ; es el coseno del ángulo, siendo dicho ángulo el desfase de la corriente con respecto la tensión del generador.

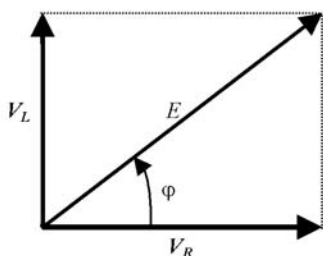
Y queda claro que cuanto menor sea el desfase más se aproximará la potencia activa a la potencia aparente. Estas cuestiones quedan más aclaradas mediante los dos gráficos vectoriales que se muestran en la figura 3.8b, uno con un ángulo casi cero y el otro con un ángulo casi de 90°.

Y, como se puede comprender fácilmente, partiendo del triángulo de tensiones se puede obtener el triángulo de potencia (fig.3.9); basta multiplicar los valores de  $V_L$ ,  $V_R$  y  $E$  por la intensidad ( $I$ ). Sale al revés del obtenido en la figura 1.19 porque, en este caso, se ha tomado la intensidad como referencia. Y se obtiene el mismo resultado si desarrollamos según se ha hecho en el apartado 1.5.4 pero con la intensidad como referencia, como se muestra en la figura 3.10a. En este caso es la tensión del generador la que se descompone en dos componentes; una en fase con la intensidad (componente activa de la tensión) y otra desfasada 90° (componente reactiva de la tensión). Y de esto, aplicando pitágoras, se obtiene el desarrollo del triángulo de potencias (fig.3.10b).

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = V I$$

$$S = \sqrt{\underbrace{(VI)^2 \cos^2 \varphi}_{P^2} + \underbrace{(VI)^2 \sin^2 \varphi}_{Q^2}} = \sqrt{(VI)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \sqrt{(VI)^2} = VI$$

Esta forma de representación del triángulo de potencias es la más extendida.

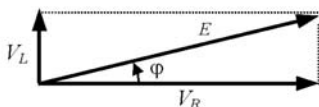


$$\begin{aligned} \text{Potencia activa} &= V_R I \\ \text{Potencia aparente} &= EI \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Factor de potencia} &= \frac{\text{potencia activa}}{\text{potencia aparente}} = \\ &= \frac{V_R I}{EI} = \frac{V_R}{E} = \cos \varphi \end{aligned}$$

a)

### Poco desfase ( $\varphi \rightarrow 0^\circ$ )

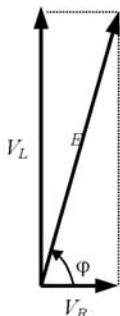


$$V_R \approx E \Rightarrow \cos \varphi \approx 1$$

La tensión en la resistencia ( $V_R$ ) es mucho mayor que la tensión en la bobina ( $V_L$ ); el circuito es poco inductivo (es más bien resistivo):

- Desfase muy bajo ( $\varphi \rightarrow 0^\circ$ ); alto factor de potencia ( $\cos \varphi \rightarrow 1$ ).
- Casi no hay potencia reactiva ( $Q$ ); la potencia activa ( $P$ ) es casi igual a la potencia aparente ( $S$ ):  $P = V_R I \approx S = EI$

### Mucho desfase ( $\varphi \rightarrow 90^\circ$ )



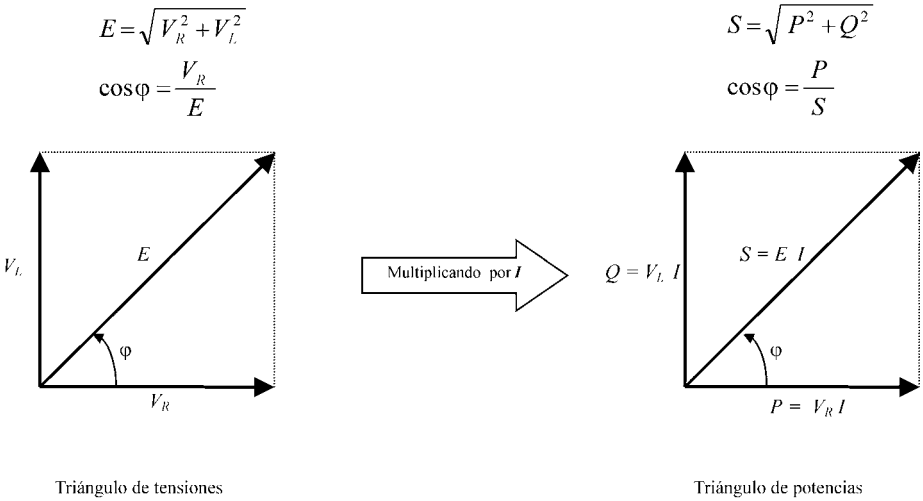
$$V_L \approx E \Rightarrow \cos \varphi \approx 0$$

La tensión en la bobina ( $V_L$ ) es mucho mayor que la tensión en la resistencia ( $V_R$ ); el circuito es fuertemente inductivo:

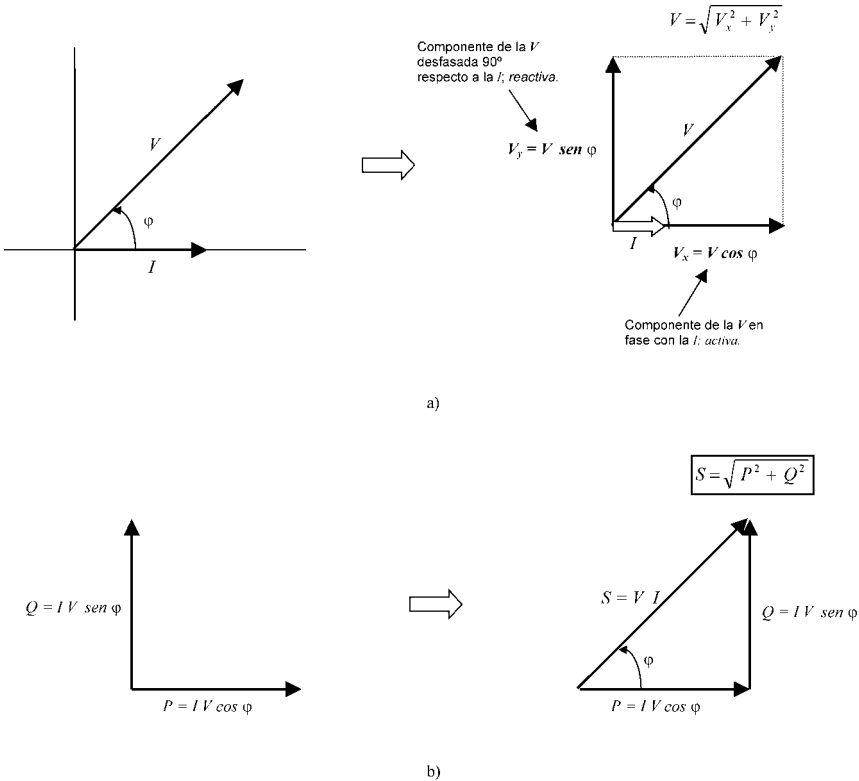
- Desfase muy elevado ( $\varphi \rightarrow 90^\circ$ ); bajo factor de potencia ( $\cos \varphi \rightarrow 0$ ).
- Casi no hay potencia activa ( $P$ ); la potencia reactiva ( $Q$ ) es casi igual a la potencia aparente ( $S$ ):  $Q = V_L I \approx S = EI$

b)

**Figura 3.8.** a) Determinación del factor de potencia en base al triángulo de tensiones. b) Características sobre la potencia en función del desfase.



**Figura 3.9.** Multiplicando por la intensidad ( $I$ ) cada valor del triángulo de tensiones se obtiene el triángulo de potencias.



**Figura 3.10.** a) Desarrollo de las componentes activa y reactiva de la tensión. b) El triángulo de potencias es la suma vectorial de la potencia activa y la potencia reactiva.

### 3.1.3 Ejercicio de ejemplo análisis

Dado el circuito R-L de la figura 3.11, hallaremos el triángulo de tensiones y de potencias.

El primer paso consiste en hallar el valor de la impedancia, o sea, la  $Z$ :

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi \times 50 \times 4 = 1256,6 \, \Omega \quad \Rightarrow \quad Z_T = \sqrt{820^2 + 1256,6^2} = 1500,5 \, \Omega$$

Así, el valor de la intensidad que se obtiene es:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{220}{1500,5} = 0,146 \, A$$

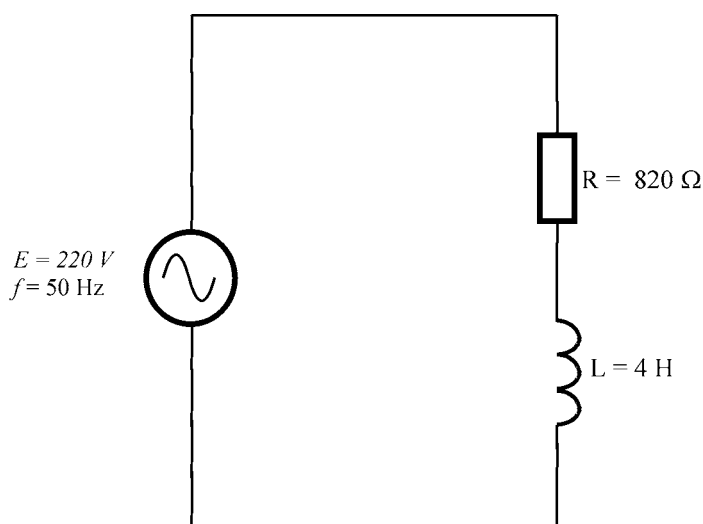
Las tensiones en la resistencia y en la bobina son, pues:

$$V_R = I R = 0,146 \times 820 \approx 120 \, V$$

$$V_L = I X_L = 0,146 \times 1256,6 \approx 183,4 \, V$$

Y, puesto que se trata de un circuito inductivo, la intensidad circulará retrasada con respecto a la tensión del generador un ángulo de:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{V_L}{V_R} = \tan^{-1} \frac{183,4}{120,2} \approx 56,8^\circ$$



**Figura 3.11.** Circuito R - L práctico.

En cuanto a las potencias, tenemos:

$$\cos \varphi = \cos 56,8^\circ \approx 0,547$$

$$S = E I = 220 \times 0,146 \approx 32 \text{ VA}$$

$$P = S \cos \varphi = 32,5 \times 0,547 \approx 17,5 \text{ W}$$

$$Q = S \sin \varphi = 32,5 \times \sin 56,8^\circ \approx 26,8 \text{ VAR}$$

Y, como debe ser, se cumple que la potencia activa ( $P$ ) es la desarrollada en la resistencia y la potencia reactiva ( $Q$ ) la desarrollada en la bobina:

$$P = I^2 R = 0,146^2 \times 820 \approx 17,5 \text{ W}$$

$$Q = V_L I = 184,2 \times 0,146 \approx 26,8 \text{ VAR}$$

El triángulo de tensiones y de potencias correspondiente se representan en la figura 3.12a. Obsérvese cómo si efectúa una suma aritmética de las tensiones en la resistencia y en la bobina el resultado da un valor de tensión diferente a la del generador:  $V_R + V_L = 120 \text{ V} + 183,4 = 303,4 \text{ V}$ . El resultado correcto se obtiene haciendo una suma vectorial, ya que en este caso si se tiene en cuenta el desfase de

$$\text{las ondas: } E = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} = \sqrt{120^2 + 183,4^2} \approx 220 \text{ V}$$

Esto se puede comprender mejor analizando el diagrama de ondas que se muestra en la figura 3.12b.

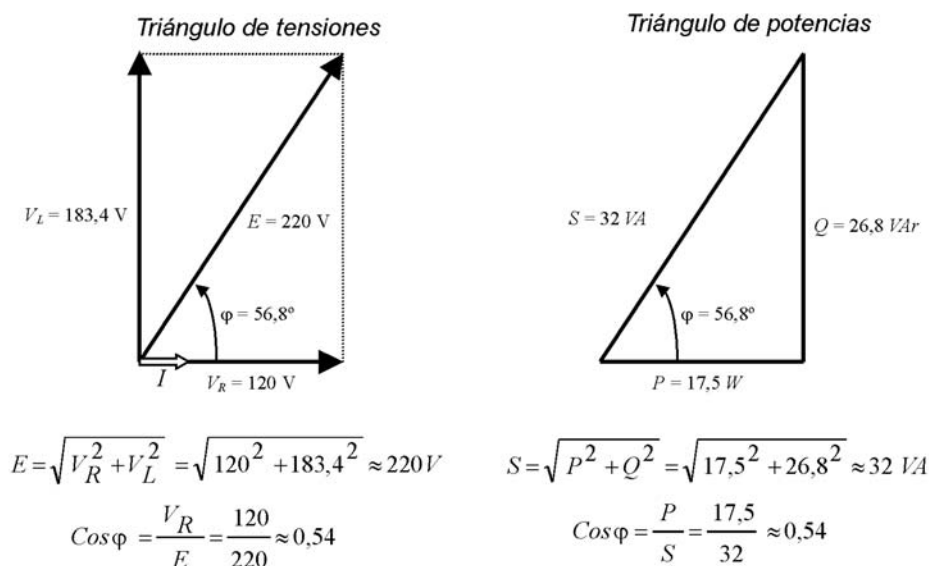
## 3.2 CIRCUITO SERIE R-C

Son circuitos R-C los que se basan en capacidad ( $C$ ) y resistencia ( $R$ ); en la práctica, circuitos con condensadores y resistencias. Un circuito serie R-C básico es como se muestra en la figura 3.13a.

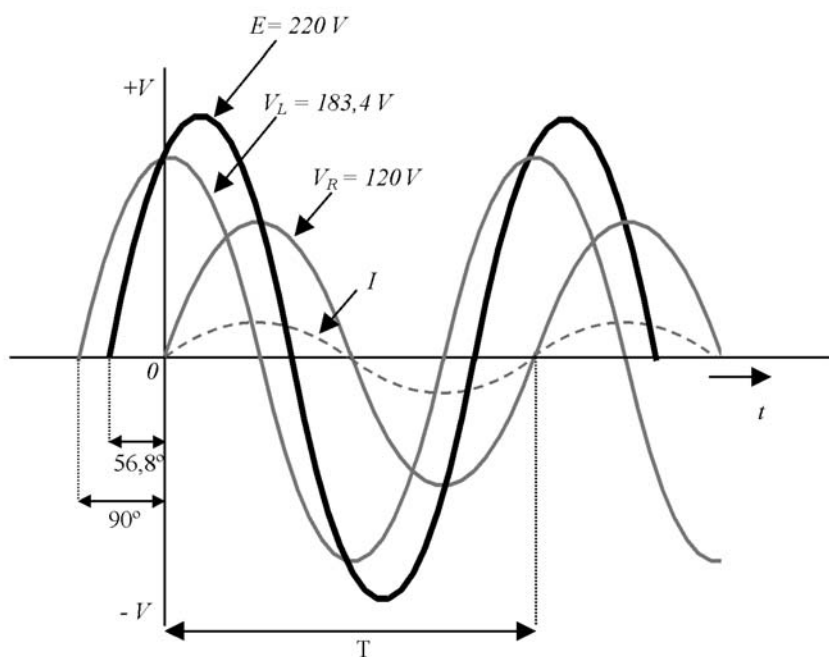
Al igual que ocurre con el circuito R-L, el efecto de la resistencia hace que el típico desfase de  $90^\circ$  que introduce el condensador se haga menor y, además, que aparezca una potencia activa (que es la disipada en la resistencia). Cuanto mayor sea el valor de la resistencia en comparación con el de la reactancia del condensador menos capacitivo será el circuito y menor será el desfase.

Al ser un circuito de tipo serie, la intensidad que circulará será la misma en la resistencia y en el condensador. La onda de tensión en la resistencia, como es obvio, estará en fase con la onda de la intensidad. Pero esto no es así en el condensador, ya que, como se sabe, la intensidad se adelanta  $90^\circ$  con respecto a su tensión; esto hace que la onda de tensión en los terminales del condensador vaya retrasada  $90^\circ$  con respecto a la intensidad que circula por el circuito, como se representa en la figura 3.13b. Por otra parte, por Kirchhoff, se tiene que cumplir que la suma de la tensión en la resistencia y en el condensador debe dar el valor de la tensión del generador; es decir, la suma de los valores instantáneos de las ondas de tensión en dichos



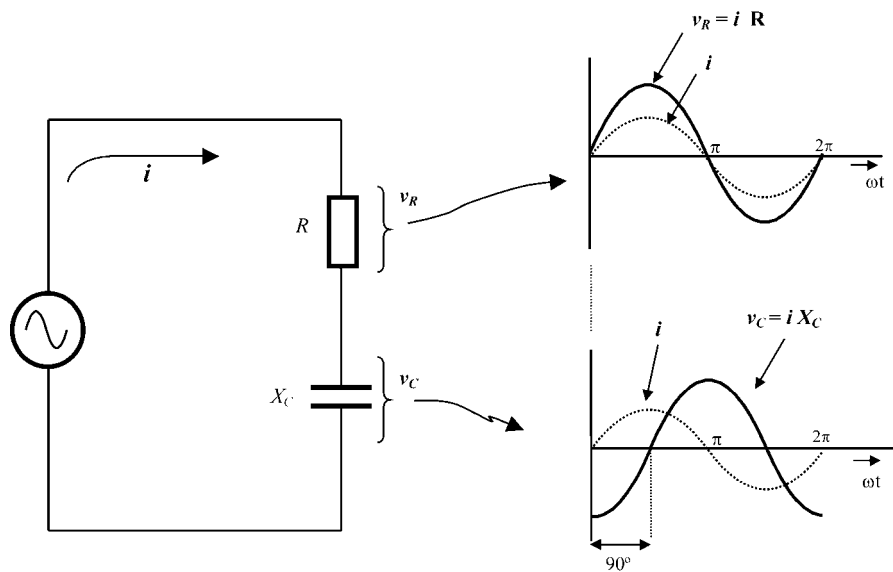


a)

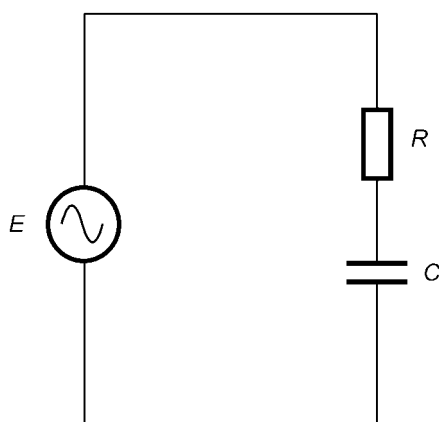


b)

**Figura 3.12.** Resultados del análisis del circuito de la figura 3.11: a) Triángulo de tensiones y de potencia. b) Diagrama de ondas.



b)



a)

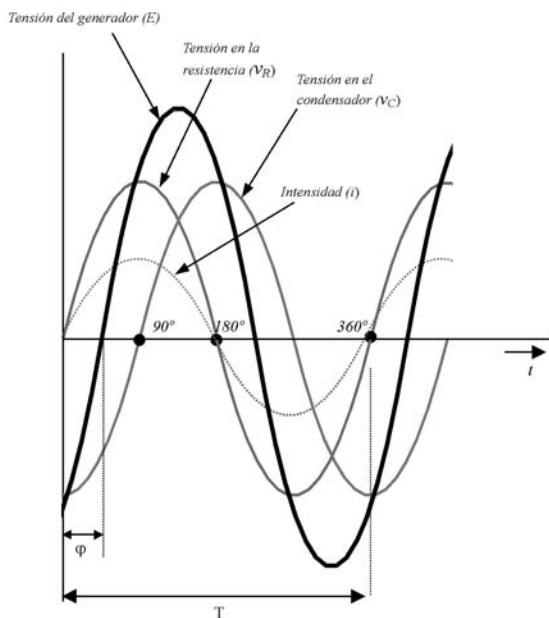
**Figura 3.13.** a) Circuito R - C básico. b) Ondas en los componentes.

componentes debe dar lugar a la onda de tensión del generador. Un ejemplo gráfico se representa en la figura 3.14a; se han tomado las tensiones de la resistencia y el condensador del mismo valor, y su suma da la onda de tensión del generador.

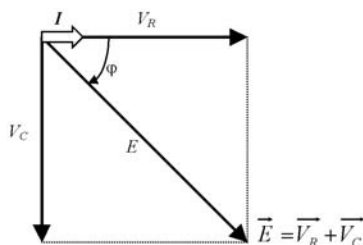
Cuando se tienen señales desfasadas, como ya se sabe, las operaciones a efectuar deben ser vectoriales. Tomando la intensidad como vector de referencia aparece el diagrama vectorial de tensiones del circuito (fig.3.14b), de donde se deduce que:

$$E = \sqrt{V_C^2 + V_R^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{V_C}{V_R}$$



a)



b)

**Figura 3.14.** a) Diagrama de ondas del circuito R-C básico; la suma de las ondas en la resistencia y en condensador tiene por resultante la onda de la tensión aplicada (generador). b) Representación vectorial de las tensiones.

Como se puede deducir gráficamente, el efecto de la resistencia hace que el ángulo de desfase ( $\phi$ ) disminuya proporcionalmente al valor de  $V_R$ ; cuanto mayor sea  $V_R$  menor será el ángulo  $\phi$ . Análogamente, cuanto mayor sea  $V_C$  mayor será el desfase, debido a que aumenta el efecto capacitivo.

### 3.2.1 Impedancia

La intensidad que circulará por el circuito, por ley de Ohm, vendrá dada por :

$$I = \frac{E}{Z}$$

Y las tensiones en la resistencia y en el condensador, serán:

$$V_R = R I \quad V_C = X_C I$$

Partiendo del triángulo de tensiones (fig.3.14b), como que  $V_C = X_C I$ ,  $V_R = R I$  y  $E = Z I$ , dividiendo por  $I$  se deduce el *triángulo de impedancia* (fig.3.15a),obteniéndose:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

De donde se deduce asimismo el ángulo de desfase:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{V_C}{V_R} = \tan^{-1} \frac{X_C}{R}$$

que también se puede obtener por:

$$\phi = \cos^{-1} \frac{V_R}{E} = \cos^{-1} \frac{R}{Z}$$

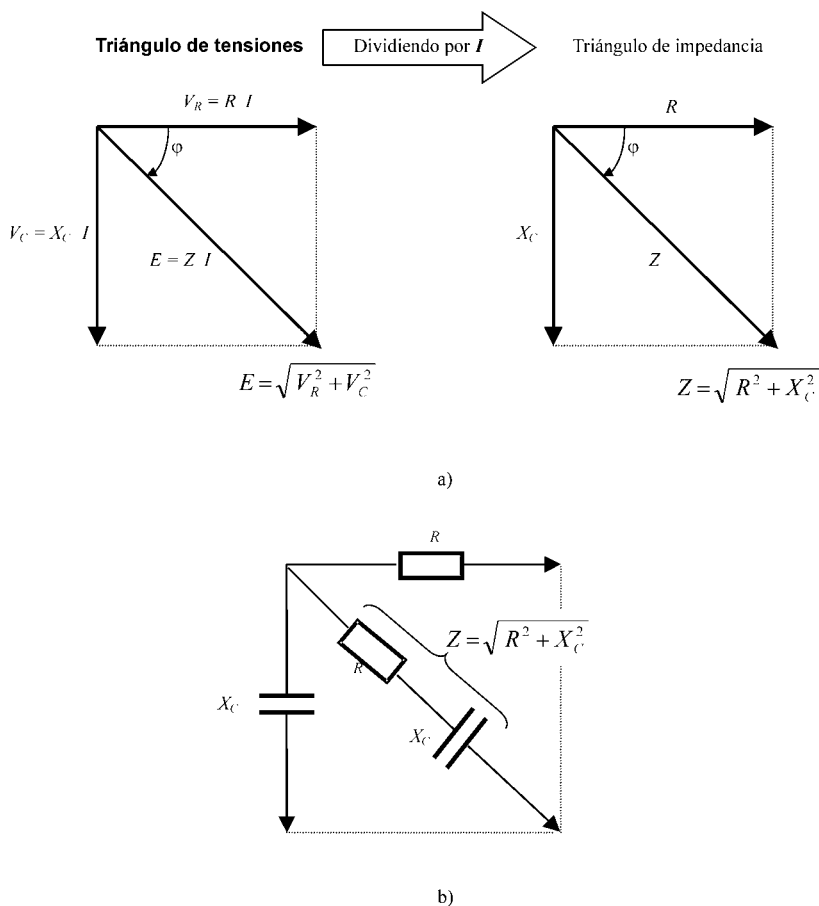
$$\phi = \sin^{-1} \frac{V_C}{E} = \sin^{-1} \frac{X_C}{Z}$$

Una representación muy ilustrativa del triángulo de la  $Z$  se muestra en la figura 3.15b.

### 3.2.2 Potencia

La potencia activa corresponde a la disipada en la resistencia (en forma de calor):

$$\text{Potencia activa (P)} = V_R I = R I^2 = \frac{V_R^2}{R}$$



**Figura 3.15.** a) Dividiendo por la intensidad ( $I$ ) cada valor del triángulo de tensiones se obtiene el triángulo de impedancia. b) Forma singular, didáctica, de ilustrar el triángulo de impedancia del circuito R-C.

Y que se puede obtener también por:  $P = E I \cos \phi$

La potencia reactiva, es la desarrollada en el condensador:

$$\text{Potencia reactiva}(Q) = V_C I = X_C I^2 = \frac{V_C^2}{X_C}$$

Y que se puede obtener también por:  $Q = E I \sin \phi$

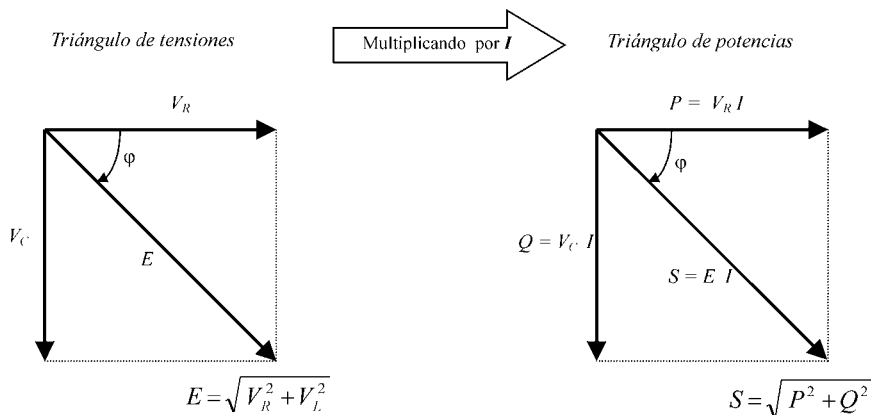
Y la potencia aparente, obviamente, es:

$$\text{Potencia aparente}(S) = E I = I^2 Z = \frac{E^2}{Z}$$

Y, como se puede comprender fácilmente, partiendo del triángulo de tensiones se puede obtener el triángulo de potencia; basta multiplicar los valores de  $V_C$ ,  $V_R$  y  $E$  por la intensidad ( $I$ ), como se muestra en la figura 3.16. Y se cumple:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = V I$$

$$S = \sqrt{\underbrace{(V I)^2 \cos^2 \varphi}_{P^2} + \underbrace{(V I)^2 \sin^2 \varphi}_{Q^2}} = \sqrt{(V I)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \sqrt{(V I)^2} = V I$$



**Figura 3.16.** Multiplicando por la intensidad ( $I$ ) cada valor del triángulo de tensiones se obtiene el triángulo de potencias.

### 3.2.3 Ejemplo de ejercicio de análisis

Dado un circuito R-C con los valores  $R = 1 \text{ K}$  y  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ , al cual se le aplica la tensión de la red, o sea,  $220 \text{ V}$  a  $50 \text{ Hz}$ , (fig.3.17a) hallaremos el triángulo de tensiones y de potencias.

El primer lugar, calculamos el valor de la impedancia:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 10^{-6}} = 3183 \Omega \Rightarrow Z_T = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{1000^2 + 3183^2} = 3336,5 \Omega$$

Siendo, pues, el valor de la intensidad:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{220}{3336,5} = 0,066 \text{ A}$$

Y las tensiones en la resistencia y en el condensador son:

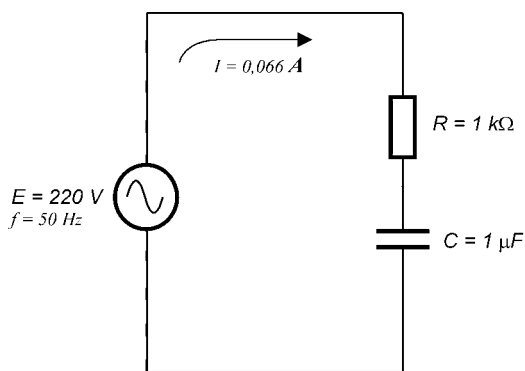
$$V_R = I R = 0,066 \times 1000 = 66 \text{ V}$$

$$V_C = I X_C = 0,066 \times 3183 = 210 \text{ V}$$

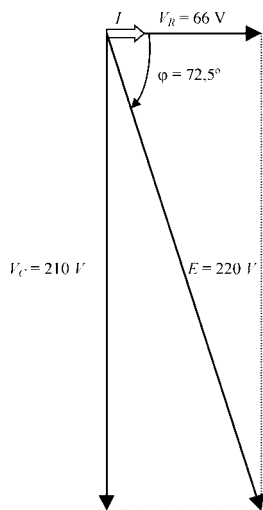
Y, puesto que se trata de un circuito capacitivo, la intensidad circulará adelantada con respecto a la tensión del generador un ángulo de:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{V_C}{V_R} = \tan^{-1} \frac{210}{66} = 72,5^\circ$$

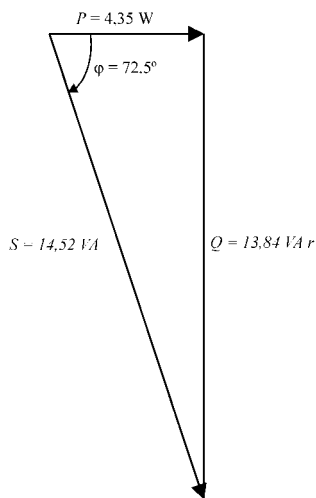
Se obtiene así el triángulo de tensiones de la figura 2.17b.



a)



b)



c)

**Figura 3.17.** a) Circuito R-C práctico. b) Triángulo de tensiones. c) Triángulo de potencias.

Obsérvese cómo si efectúa una suma aritmética de las tensiones en la resistencia y en el condensador el resultado da un valor de que no coincide con la tensión del generador:  $V_R + V_L = 66 \text{ V} + 210 = 276 \text{ V}$ . Para obtener el resultado correcto, como ya se sabe, se tiene que hacer una suma vectorial, ya que en este caso si se tiene en cuenta el desfase de las ondas:  $E = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} = \sqrt{66^2 + 210^2} = 220 \text{ V}$

En cuanto a las potencias, tenemos:

$$\cos \varphi = \cos 72,5^\circ = 0,3$$

$$S = E I = 220 \times 0,066 = 14,52 \text{ VA}$$

$$P = S \cos \varphi = 14,52 \times 0,3 = 4,35 \text{ W}$$

$$Q = S \sin \varphi = 14,52 \times \sin 72,5^\circ = 13,84 \text{ VAR}$$

Y se cumple que la potencia activa (P) es la desarrollada en la resistencia y la potencia reactiva (Q) la desarrollada en el condensador:

$$P = I^2 R = 0,066^2 \times 1000 = 4,35 \text{ W}$$

$$Q = V_C I = 210 \times 0,066 = 13,84 \text{ VAR}$$

Se obtienen así el triángulo de potencias que se representa en la figura 3.17c.

### 3.3 CIRCUITO SERIE R-L-C

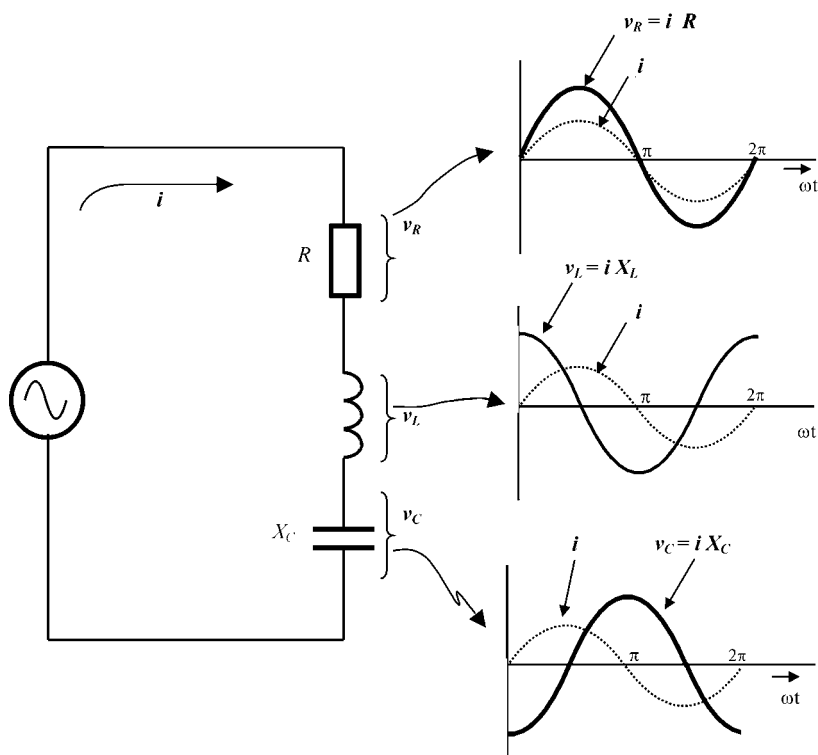
Se denominan circuitos R-L-C aquellos en los cuales se tienen en cuenta el efecto resistivo, inductivo y capacitivo a la vez. En la práctica, son circuitos donde hay resistencias (R), bobinas (L) y condensadores (C), que son los más reales. Como se sabe, los componentes no son ideales y por ello en los circuitos siempre aparece un más o menos efecto resistivo (R), inductivo (L) y capacitivo (C), aunque algunos de dichos efectos pueden ser ínfimos y otros muy destacables; de ahí que aparezcan las denominaciones de circuitos R - L, R - C y R - L - C.

#### 3.3.1 Principios básicos generales

El circuito serie R-L-C básico es como se muestra en la figura 3.18. Se trata de un generador de c.a. alimentando a un circuito serie compuesto por una resistencia, una bobina y un condensador.

Al ser un circuito serie, la intensidad es común a los tres componentes. Tomando como referencia la intensidad ( $i$ ), la tensión en la resistencia ( $v_R$ ) irá en fase, la tensión en la bobina irá adelantada  $90^\circ$  y la tensión en el condensador ( $v_C$ ) irá retrasada  $90^\circ$ .





**Figura 3.18.** Ondas en los componentes del circuito R-L-C básico.

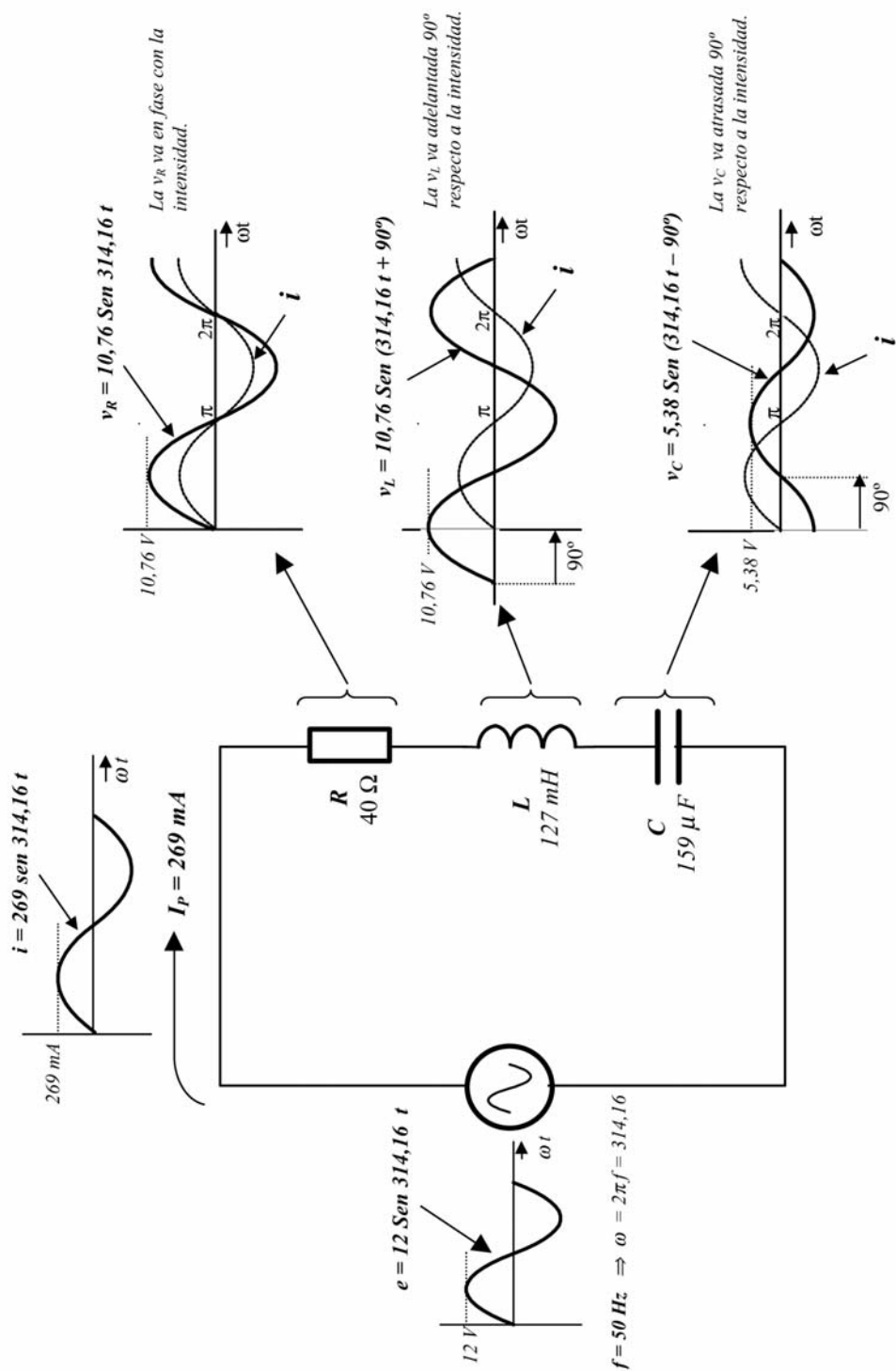
En estos circuitos, al aparecer dos tipos de reactancias ( $X_L$  y  $X_C$ ), aparecen también dos tipos de potencias reactivas ( $Q_L$  y  $Q_C$ ).

Por otra parte, por *Kirchhoff*, se tiene que cumplir que la suma de las tensiones en los tres componentes debe dar el valor de la tensión del generador; o sea, la suma de las ondas de tensión de los componentes debe dar lugar a una onda de tensión que es la del generador.

En la figura 3.19 se representa un ejemplo de circuito R-L-C práctico en el cual se representan los valores de las ondas de tensión de los componentes. Y se puede observar cómo, en referencia a la onda de intensidad ( $i$ ), la onda de tensión en la resistencia ( $v_R$ ) va en fase, la onda de tensión en la bobina ( $v_L$ ) va adelantada  $90^\circ$  y la onda de tensión en el condensador ( $v_C$ ) va retrasada  $90^\circ$ . En la figura 3.20 se representa asimismo un gráfico de ondas en el cual se puede observar que se cumple la ley de *Kirchhoff*; la suma de las ondas de tensión de los componentes ( $v_R$ ,  $v_L$  y  $v_C$ ) da lugar a otra onda de tensión resultante que es la del generador ( $E$ ).

En este circuito predomina el efecto inductivo ya que la onda de la intensidad ( $i$ ) va retrasada  $26,5^\circ$  con respecto a la onda de tensión del generador ( $E$ ).

Desarrollando vectorialmente, utilizando valores de pico para que los valores de los vectores correspondan con los de las ondas (fig.3.19), tenemos los resultados que se muestran en la figura 3.21.



**Figura 3.19.** Ejemplo didáctico de un circuito R-L-C práctico, detallando las ondas en cada componente.

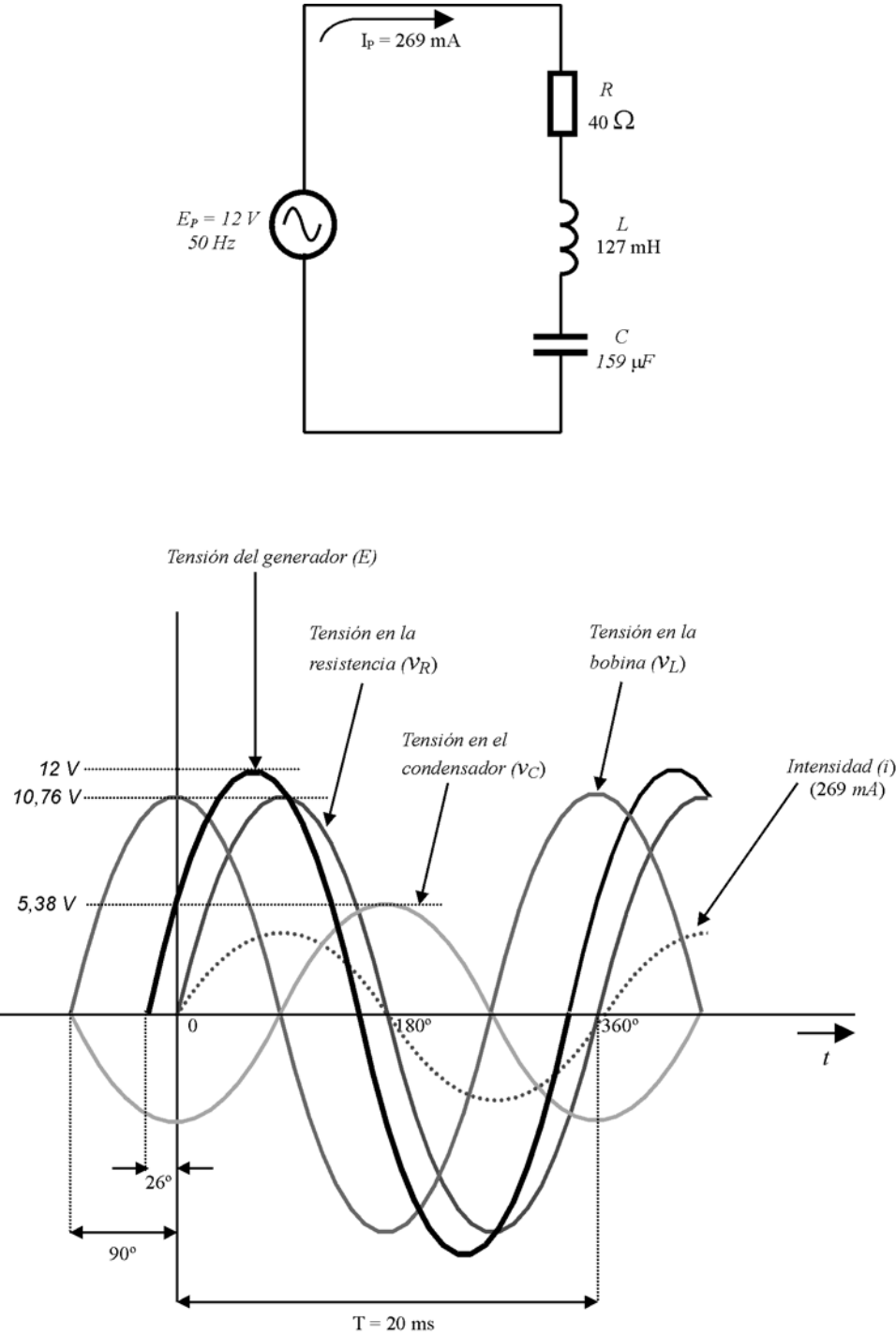
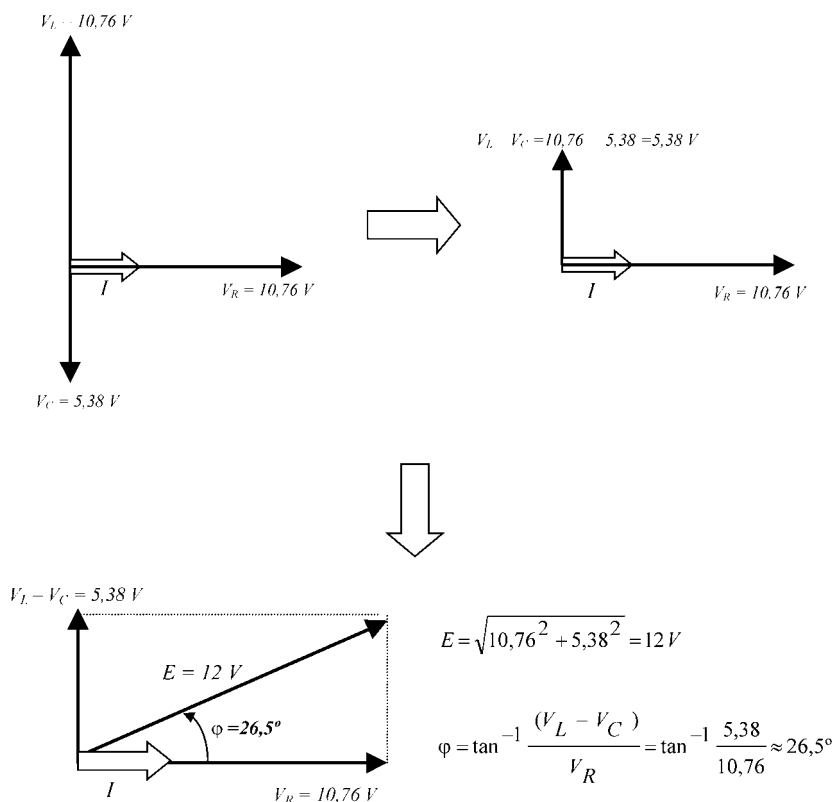


Figura 3.20. Diagrama de ondas del circuito R-L-C .



La intensidad ( $I$ ) va atrasada  $26,5^\circ$  con respecto a la tensión del generador ( $E$ ); el circuito es inductivo.

**Figura 3.21.** Desarrollo del triángulo de tensiones del circuito R-L-C de la figura 3.19.

También se puede hallar el resultado por medio del cálculo por números complejos, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 E &= V_R \angle 0^\circ + V_L \angle 90^\circ + V_C \angle -90^\circ = V_R + jV_L - jV_C \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 &\quad (V_R + j0) \quad (0 + jV_L) \quad (0 - jV_C)
 \end{aligned}$$

Se obtiene pues:

$$E = V_R + jV_L - jV_C = V_R + j(V_L - V_C) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned}
 E &= \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{10,76^2 + (10,76 - 5,38)^2} = 12 \text{ V} \\
 \phi &= \tan^{-1} \frac{V_L - V_C}{V_R} = \tan^{-1} \frac{10,76 - 5,38}{5,38} \approx 26,5^\circ
 \end{aligned} \right\} E = 12 \text{ V} \angle 26,5^\circ$$

Como se puede comprobar, el valor resultante obtenido de forma matemática es el mismo que el obtenido mediante el gráfico de ondas (fig.3.20) y de forma vectorial (fig.3.21); en cualquier caso, se cumple *Kirchhoff*.

En general, en los circuitos de este tipo, aparecerá siempre una resta entre los valores de tensión del condensador y de la bobina. Ya que, como se puede observar en el diagrama de ondas (fig.3.20), las ondas de tensión en la bobina y en el condensador son en todo instante opuestas; o sea, cuando en una de ellas la polaridad es positiva en la otra es negativa. Téngase en cuenta que la onda de tensión en el condensador ( $v_C$ ) va retrasada  $90^\circ$  con respecto a la onda de intensidad, mientras que la onda de tensión en la bobina ( $v_L$ ) adelanta a la onda de intensidad  $90^\circ$ .

### 3.3.2 Ejemplo de cálculo

En base a lo explicado anteriormente, a continuación se muestra un ejemplo de cálculo del circuito de la figura 3.19. Y, obviamente, deberán aparecer los valores de que se muestran en dicha figura.

Cálculo de las reactancias:

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 50 \times 0,127 \approx 40 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 159 \cdot 10^{-6}} = 20 \, \Omega$$

En principio, al ser la reactancia inductiva mayor que la capacitiva (concretamente el doble), el circuito será de carácter inductivo; la intensidad que circulará por el circuito irá atrasada un cierto ángulo  $\phi$  con respecto a la tensión del generador (E).

La impedancia es, pues:

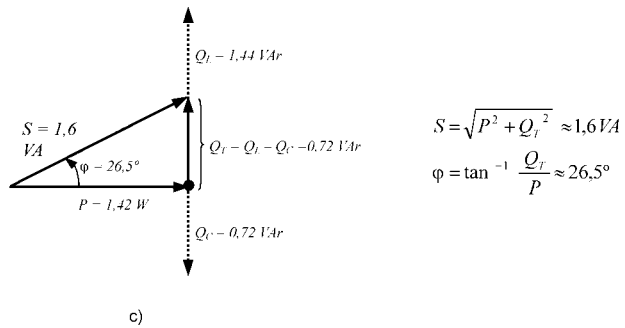
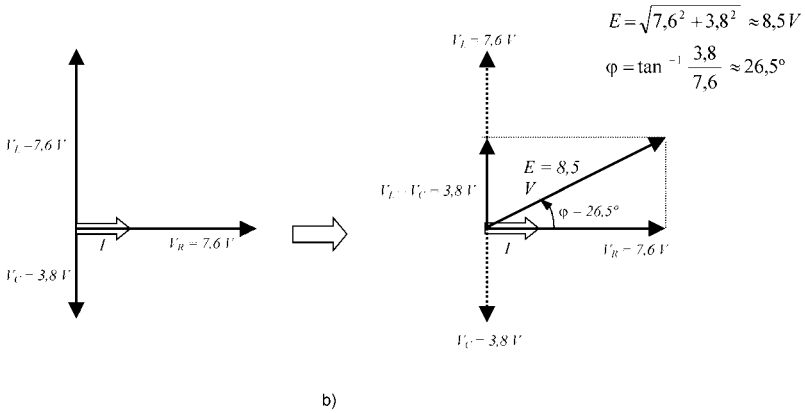
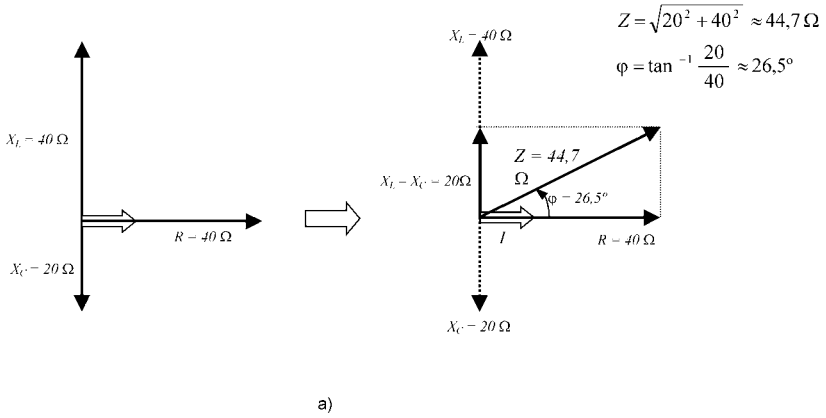
$$\left. \begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{40^2 + (40 - 20)^2} = 44,7 \, \Omega \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R} = \tan^{-1} \frac{40 - 20}{40} \approx 26,5^\circ \end{aligned} \right\} Z = 44,7 \angle 26,5^\circ$$

En la figura 3.22a se muestra el triángulo de impedancia.

Valor (eficaz) de la intensidad que circulará por el circuito:

Como la tensión del generador (E) que se muestra en la figura 3.19 tiene un valor de pico de 12 V, su valor eficaz es:  $E = 12 / \sqrt{2} \approx 8,48$  V. Tenemos así:

$$I = \frac{\frac{E_p}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{Z \angle \phi} = \frac{\frac{12}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{44,7 \angle 26,5^\circ} \approx 0,19 \angle -26,5^\circ$$



**Figura 3.22.** Resultados del cálculo del circuito de la figura 3.19: a) Triángulo de impedancia. b) Triángulo de tensiones. c) Triángulo de potencias.

El valor eficaz de la intensidad que recorre el circuito es pues de  $0,19\text{ A}$ , y circula con un desfase en retraso de  $26,5^\circ$ . Y, obviamente, su valor de pico es:  $I_p = \sqrt{2} I = \sqrt{2} \times 0,19 \approx 0,269\text{ A}$ , que se corresponde con el valor de pico de la onda de intensidad que se muestra en la figura 3.19.

Recuérdese que normalmente en los cálculos se debe de operar con los valores eficaces de las tensiones y las corrientes, aunque en algunos casos, por cuestiones de didácticas, se utilicen los valores de pico (que deben quedar claramente indicados).

El cálculo de las tensiones (valor eficaz) en los componentes, teniendo en cuenta los desfases es:

$$\begin{aligned} V_R &= I \angle \varphi \times R \angle 0^\circ = 0,19 \angle -26,5^\circ \times 40 \angle 0^\circ = 7,6\text{ V} \angle -26,5^\circ \\ V_C &= I \angle \varphi \times X_C \angle -90^\circ = 0,19 \angle -26,5^\circ \times 20 \angle -90^\circ = 3,8\text{ V} \angle -116,5^\circ \\ V_L &= I \angle \varphi \times X_L \angle 90^\circ = 0,19 \angle -26,5^\circ \times 40 \angle 90^\circ = 7,6\text{ V} \angle 63,5^\circ \end{aligned}$$

Que expresadas en su valor instantáneo:

$$\begin{aligned} v_R &= 7,6 \sqrt{2} \sin(314,16 t - 26,5^\circ) = 10,76 \sin(314,16 t - 26,5^\circ) \\ v_C &= 3,8 \sqrt{2} \sin(314,16 t - 116,5^\circ) = 5,38 \sin(314,16 t - 116,5^\circ) \\ v_L &= 7,6 \sqrt{2} \sin(314,16 t + 63,5^\circ) = 10,76 \sin(314,16 t + 63,5^\circ) \end{aligned}$$

Obsérvese cómo aparecen los valores de pico de las ondas representadas en la figuras 3.19. Los valores de los ángulos que aparecen en las fórmulas indican el desfase con respecto a la tensión del generador (E). Valores negativos significan retrasos y valores positivos adelantos. Así, el valor  $-26,5^\circ$  que aparece en la expresión de la tensión en la resistencia ( $V_R$ ) indica que dicha tensión va retrasada  $26,5^\circ$  con respecto a la tensión del generador. Y en el caso de la bobina ( $V_L$ ), el valor  $63,5^\circ$  indica que su tensión va adelantada  $63,5^\circ$ .

El triángulo de tensiones del circuito se representa en figura 3.22b, en el cual se pueden deducir los ángulos de desfase que aparecen en las fórmulas anteriores. Por ejemplo, el ángulo que hay entre el vector de la tensión de la bobina ( $V_L$ ) y el vector de la tensión del generador (E) está claro que es de  $90^\circ - 26,5^\circ = 63,5^\circ$ , que es el valor de ángulo que aparece en las expresiones matemáticas anteriores. Asimismo, el ángulo que hay entre el vector de la tensión del condensador ( $V_C$ ) y el vector de la tensión del generador (E) es de  $90^\circ + 26,5^\circ = 116,5^\circ$ .

### Cálculo de las potencias:

Primeramente, se recuerda que la potencia activa (P) es únicamente la disipada en los componentes resistivos. O sea, se tiene que cumplir que:

$$P = E I \cos \varphi = I V_R = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

### Ejemplo 3.2:

Puesto que:  $\cos \varphi = \cos 26,5^\circ = 0,89 \Rightarrow P = E I \cos \varphi = 8,48 \times 0,19 \times 0,89 = 1,44\text{ W}$

Lo cual coincide con el valor de la potencia disipada en la resistencia:

$$P_R = I^2 R = 0,19^2 \times 40 = 1,44 \text{ W}$$

Y el valor total de la potencia reactiva será:

$$Q_{Tot} = E I \sin \varphi = 8,48 \times 0,19 \times \sin 26,5^\circ = 0,72 \text{ VAR}$$

Y este valor debe coincidir con la diferencia entre las potencias reactivas inductiva y capacitiva:

$$\left. \begin{array}{l} Q_L = I^2 X_L = 0,19^2 \times 40 = 1,44 \text{ VAR} \\ Q_C = I^2 X_C = 0,19^2 \times 20 = 0,72 \text{ VAR} \end{array} \right\} \mapsto Q_{Tot} = Q_L - Q_C = 1,44 - 0,72 = 0,72 \text{ VAR}$$

Esto es así debido a que los efectos capacitivos e inductivo se contrarrestan entre sí (de hecho, las ondas de tensión en la bobina y en el condensador van en oposición).

El triángulo de potencias del circuito es pues el representado en la figura 3.22c.

Dependiendo de los valores de  $R$ ,  $C$  y  $L$  el circuito puede resultar *inductivo*, *capacitivo* o *resistivo*. El caso de *resistivo* tiene especial importancia, y se da cuando los valores de  $L$  y  $C$  resultan de igual magnitud; cuando esto es así se dice que el circuito entra en *resonancia*.

### 3.3.3 Circuito R- L- C de carácter Inductivo

Cuando el valor de la reactancia inductiva es mayor que el de la capacitiva o, en general, predomina el efecto reactivo de la bobina, se dice que el circuito es de *carácter inductivo*. En este caso la intensidad circula con un cierto desfase en retraso con respecto a la tensión del generador. La magnitud del desfase, como es obvio, dependerá de los valores de los componentes. Así es precisamente el circuito analizado anteriormente (fig.3.19); de carácter inductivo.

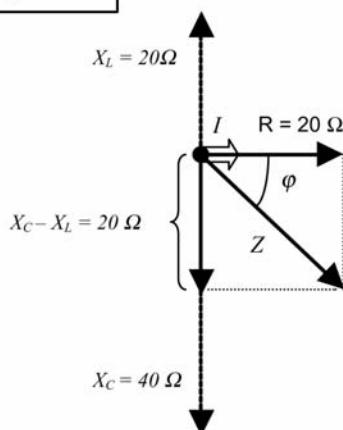
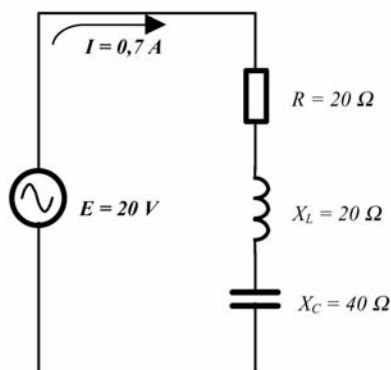
### 3.3.4 Circuito R- L- C de carácter capacitivo

Si la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva, el efecto predominante es el reactivo del condensador; se dice entonces que el circuito es de *carácter capacitivo*. En este caso la intensidad circula a través del circuito con un cierto desfase en adelanto con respecto a la tensión del generador. Un ejemplo gráfico de un circuito de este tipo se muestra en la figura 3.23.

En cualquier caso, lo cual se puede inferir y observar trazando un diagrama vectorial, si el valor de la resistencia es muy grande en comparación con las reactancias, a efectos prácticos, se puede considerar el circuito de carácter resistivo, ya que el desfase puede ser tan bajo que se puede despreciar.



Circuito capacitivo  
 $X_C > X_L$



$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2} = 28,28\ \Omega$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{X_C - X_L}{R} = 45^\circ$$

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{20}{28,28} = 0,7\text{ A}$$

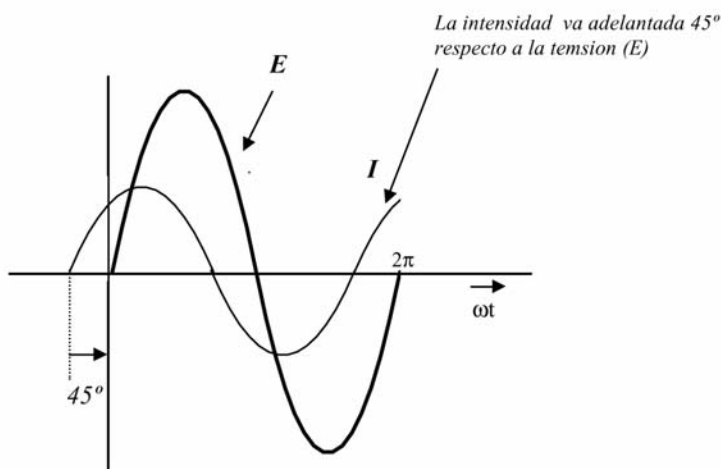


Figura 3.23. Circuito R-L-C de carácter capacitivo.

## 3.4 RESONANCIA EN EL CIRCUITO SERIE

La resonancia es un efecto de especial relevancia que se puede dar en los circuitos que contengan condensadores y bobinas, y que tiene una gran importancia en los circuitos de comunicaciones en general. Por ejemplo, en todos los aparatos de radio y TV se aprovecha dicha característica en los circuitos de sintonización de emisoras.

### 2.4.1 Principios básicos

Como se sabe, el valor de la reactancia de las bobinas y los condensadores varía con la frecuencia. Esto significa que el valor de la impedancia, y en consecuencia la intensidad a través del circuito, también varía en función de la frecuencia. Y, como se sabe, la reactancia inductiva ( $X_L$ ) varía de forma inversa a como lo hace la reactancia capacitiva ( $X_C$ ); o sea, cuando la frecuencia aumenta disminuye la  $X_C$  y aumenta la  $X_L$ . Y al revés ocurre cuando disminuye la frecuencia. Esto indica, pues, que a frecuencias elevadas el condensador presenta poca oposición, deja pasar la corriente con facilidad, pero en cambio la bobina ofrece alta oposición.

Existe un valor de frecuencia en la cual el valor de la reactancia inductiva es igual al de la reactancia capacitiva ( $X_L = X_C$ ); a esta frecuencia se denomina *frecuencia de resonancia*. A esta frecuencia, puesto que dichas reactancias tienen diferente signo, se produce un efecto de oposición entre ellas que da lugar a que el efecto total de reactancia sea nulo.

El valor de la frecuencia de resonancia se puede hallar de la siguiente manera:

$$X_L = X_C \Rightarrow 2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$

Despejando  $f$  tenemos:

$$2\pi f^2 L = \frac{1}{2\pi C} \Rightarrow f^2 = \frac{\frac{1}{2\pi C}}{2\pi L} = \frac{1}{(2\pi)^2 CL} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2 CL}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 CL}}$$

Se obtiene así la fórmula de la frecuencia de resonancia:

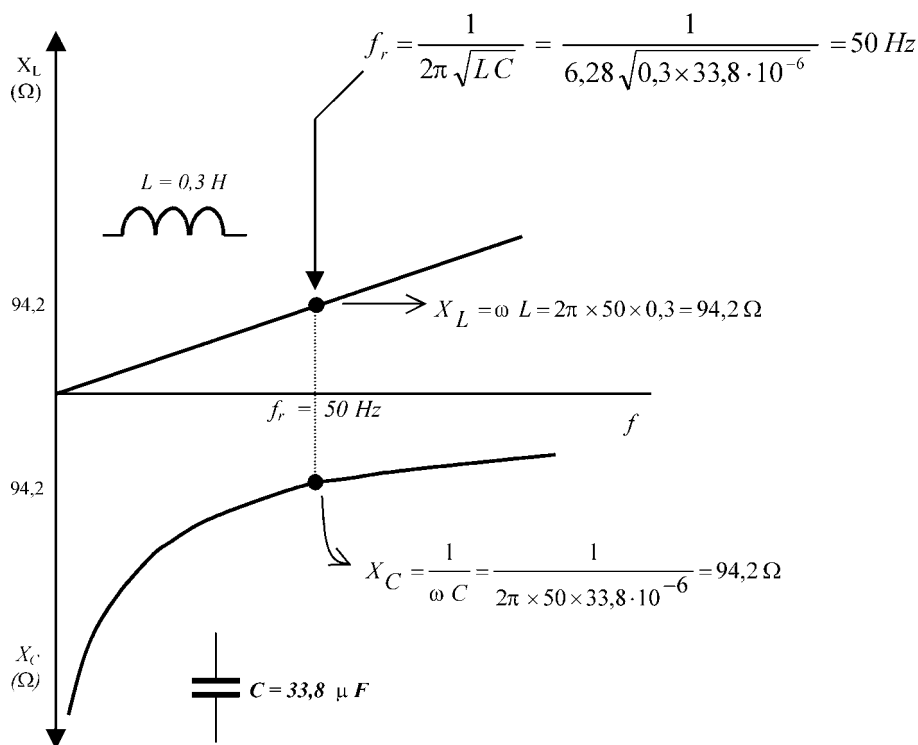
$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

En la figura 3.24 se muestra un gráfico ilustrativo de esto.

### Ejemplo 3.3:

En el circuito de la figura 3.20 la frecuencia de resonancia es:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28 \times \sqrt{0,127 \times 159 \cdot 10^{-6}}} = 35,4 \text{ Hz}$$



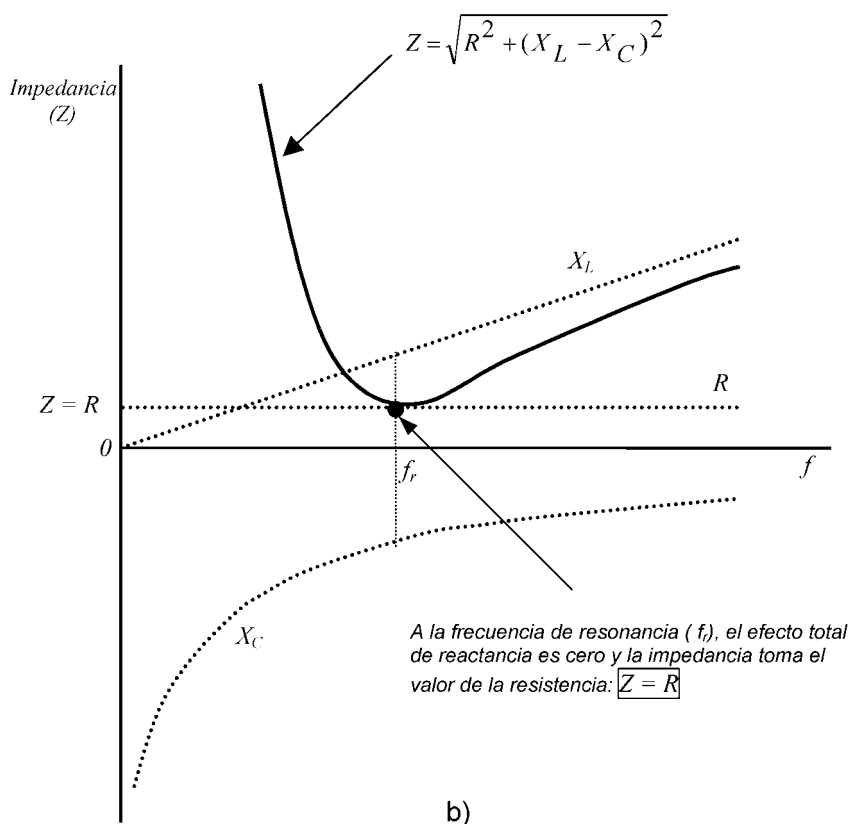
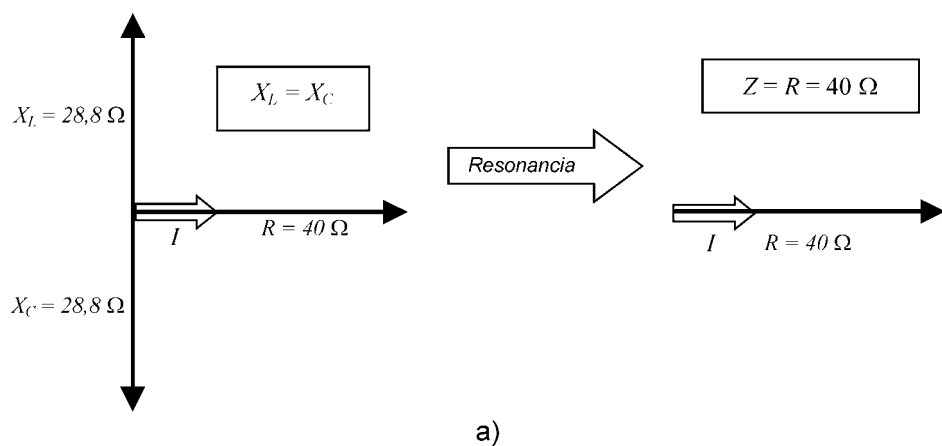
**Figura 3.24.** Representación de cómo varía la reactancia inductiva y la capacitiva en función de la frecuencia. Existe una frecuencia en la cual sus valores son iguales; es la frecuencia de resonancia.

Y a esta frecuencia el valor de las reactancias es igual, como se comprueba:

$$f = 35,4 \text{ Hz} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{6,28 \times 35,4 \times 159 \cdot 10^{-6}} = 28,2 \Omega \\ X_L = 2\pi f L = 6,28 \times 35,4 \times 0,127 = 28,2 \Omega \end{array} \right.$$

Así, pues, a dicha frecuencia el diagrama vectorial resultante del circuito es según se muestra en la figura 3.25a. Las reactancias se anulan entre sí, al considerarse vectores en oposición, y únicamente queda el valor de la resistencia; el circuito pasa a ser pues de tipo resistivo, siendo la impedancia total igual al valor de la resistencia. Esto se representa gráficamente en la figura 3.25b; se muestra la variación de la impedancia ( $Z$ ) en función de la frecuencia, así como las curvas de variación de  $X_L$  y  $X_C$ . Se observa cómo a una cierta frecuencia, la de resonancia ( $f_r$ ),  $X_L$  toma el mismo valor que  $X_C$ ; al anularse sus efectos, el valor de la impedancia se hace igual al de la resistencia:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$$



**Figura 3.25.** a) En el circuito R-L-C, a la frecuencia de resonancia, el valor de la impedancia resulta igual al de la resistencia. b) Curva de variación de la impedancia en función de la frecuencia.

La intensidad circula sin desfase alguno, siendo por tanto  $\cos \varphi = 1$ .

Así, pues, cuando la frecuencia del generador coincide con la de resonancia del circuito, se cumple:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z=R \Rightarrow I = \frac{E}{R} \\ \varphi=0^\circ \Rightarrow \cos \varphi=1 \\ Q_T=Q_L-Q_C=0 \Rightarrow S=\sqrt{P^2+Q_T^2}=P \end{array} \right.$$

### 3.4.2 Ejemplo de ejercicio

Supongamos el circuito serie de la figura 3.26a. Dado sus valores, la frecuencia de resonancia es:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6,28 \times \sqrt{0,13 \times 3 \cdot 10^{-6}}} = 254,85 \text{ Hz}$$

Y a esta frecuencia el valor de las reactancias debe ser igual, como se comprueba:

$$f = 254,85 \text{ Hz} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{6,28 \times 254,85 \times 3 \cdot 10^{-6}} = 208,16 \Omega \\ X_L = 2\pi f L = 6,28 \times 254,85 \times 0,13 = 208,16 \Omega \end{array} \right.$$

El valor de la impedancia, a la frecuencia de resonancia, será por tanto igual al valor de la resistencia:

$$Z = R = 40 \Omega$$

Y esto hará que por el circuito circule una intensidad de valor:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ A}$$

El triángulo de tensiones del circuito se representa en la figura 3.26b:

$$\begin{aligned} V_L &= I X_L = 0,5 \times 208,16 = 104 \text{ V} \\ V_C &= I X_C = 0,5 \times 208,16 = 104 \text{ V} \\ V_R &= I R = 0,5 \times 40 = 20 \text{ V} \end{aligned}$$

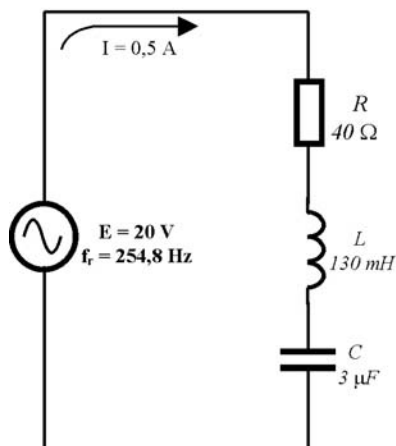
¡Obsérvese el hecho relevante de que las tensiones en el condensador y en la bobina son de 104 V, mucho más elevadas que la del generador (20 V)! Pero, como se muestra en el diagrama de ondas de la figura 3.26c, dichas tensiones se encuentran en contrafase y su resultante es igual cero.

## Circuito en resonancia

$$f = 254,8 \text{ Hz} \Rightarrow X_L = X_C = 208,16 \, \Omega$$

$$Z = R = 40 \, \Omega$$

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ A}$$



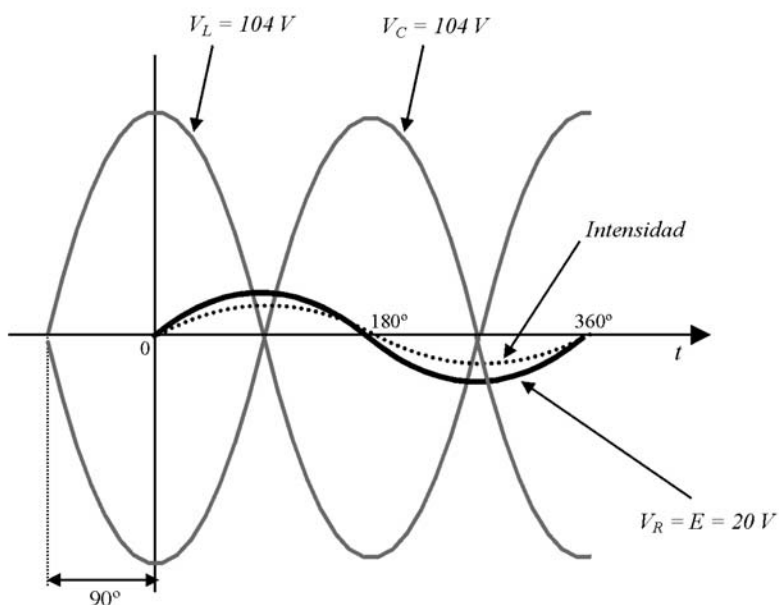
a)

$$V_L = 104 \text{ V}$$

$$V_R = 20 \text{ V}$$

$$V_C = 104 \text{ V}$$

b)



c)

**Figura 3.26.** a) Circuito R-L-C al cual se le aplica una frecuencia que es la de resonancia del circuito ( $f = 254,8 \text{ Hz}$ ). b) Diagrama de las tensiones que aparecen en los componentes. c) Diagrama de ondas.

Este efecto, *sobretensiones*, es una característica propia de los circuitos que contengan bobinas y condensadores, en especial cuando entra en resonancia.

Debido a que a la frecuencia de resonancia el valor resultante de la  $Z$  puede ser muy bajo ( $Z = R$ ), el valor de la intensidad toma su valor máximo ( $I = E/R$ ) que puede ser más o menos elevado, pudiendo esto dar lugar a valores de tensión en la bobina y condensador de extraño elevado valor (*sobretensiones*). Aunque al ser tensiones en contrafase, su resultante es igual a cero. Ello es debido a los efectos reactivos de la bobina y el condensador, lo cual da lugar a un trasiego de potencia reactiva entre el condensador y la bobina. De hecho, los valores máximos de energía almacenados por la bobina y por el condensador resultan iguales:

$$\text{Energía en la bobina: } W_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \times 0,13 \times 0,5^2 = 0,01625 \text{ Julios}$$

$$\text{Energía en el condensador: } W_C = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \times 3 \cdot 10^{-6} \times 104^2 = 0,01625 \text{ Julios}$$

Así, en resumen, lo que sucede es un trasiego de energía reactiva entre la bobina y el condensador, de manera que cuando el condensador se descarga la bobina almacena energía y viceversa. El generador únicamente suministra la potencia activa que es disipada en la resistencia.

El cálculo de las potencias nos da lo siguiente:

Como que el desfase es  $0^\circ$ ,  $\cos \varphi = 1$ . Por tanto:

$$P = E I \cos \varphi = 20 \times 0,5 \times 1 = 10 \text{ W}$$

Y, obviamente, coincide con la potencia aparente:  $S = E I = 20 \times 0,5 = 10 \text{ VA}$

Esto significa que la potencia reactiva total resultante es igual a cero:

$$Q_T = E I \sin \varphi = 20 \times 0,5 \times \sin 0^\circ = 0 \text{ VAR}$$

Por ello, se tiene que:  $S = \sqrt{P^2 + Q_T^2} = P$

El cálculo directo de la potencia reactiva en la bobina y condensador nos da:

$$Q_L = I^2 X_L = 0,5^2 \times 208,16 = 52 \text{ VAR}$$

$$Q_C = I^2 X_C = 0,5^2 \times 208,16 = 52 \text{ VAR}$$

Son valores de igual magnitud, potencias eléctricas originadas por las continuadas cargas y descargas de dichos componentes, cuyos efectos se encuentran en oposición y se anulan entre sí, siendo el efecto total resultante igual a cero:

$$Q_T = Q_L - Q_C = 52 - 52 = 0 \text{ VAR}$$

La única potencia activa en el circuito es la disipada en la resistencia, cuyo valor coincide con el de la potencia total activa hallada anteriormente:

$$P = I^2 R = 0,5^2 \times 40 = 10 \text{ W}$$

El efecto de resonancia tiene aplicación en general en los circuitos de comunicaciones (radio, TV, etc.) como filtro de frecuencias. Si los valores de  $L$  y  $C$  se calculan a una cierta frecuencia, el circuito sólo permitirá el paso a las señales que se reciban por la antena que se encuentren a dicha frecuencia. Y si la bobina o el condensador son ajustables, entonces se puede hacer un ajuste (*sintonización*) sobre las frecuencias que interesen.

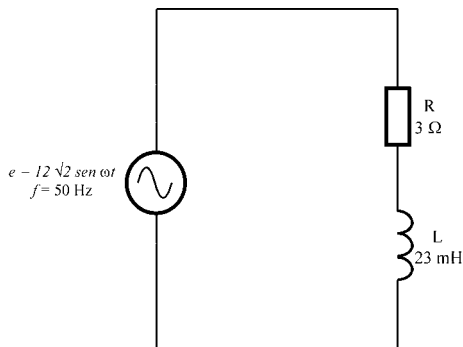
Por otra parte, en la industria, el efecto de resonancia puede resultar no deseado; ya que pueden aparecer sobretensiones en los componentes si ciertas frecuencias armónicas de la red eléctrica coinciden con la frecuencia de resonancia de equipos donde hallan bobinas y condensadores.

## 3.5. EJERCICIOS DESARROLLADOS

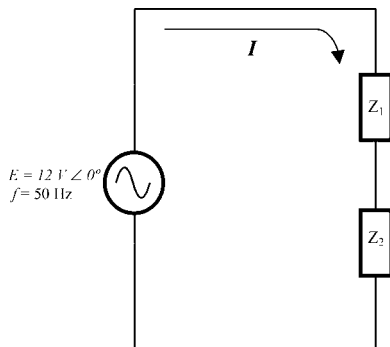
### 3.5.1 Circuito serie R-L

En este caso se utilizará también en el análisis el cálculo mediante números complejos, ya que es conveniente introducirse en este método de cálculo.

Sea el circuito serie  $R - L$  de la figura 3.27a; una bobina de  $23 \text{ mH}$  en serie con una resistencia de  $3 \Omega$ , al cual se le aplica una tensión alterna senoidal de  $12$  voltios eficaces ( $E = 12 \text{ V}$ ) con una frecuencia de  $50 \text{ Hz}$ .



a)



b)

**Figura 3.27.** a) Circuito práctico R-L. b) Representación del circuito viendo cada componente como una impedancia.

Para una mejor estructuración y comodidad de análisis, cada componente se puede ver como un bloque de impedancia ( $Z$ ) (fig.3.27b). Así, tenemos que la resistencia y la reactancia se representan como  $Z_1$  y  $Z_2$ :

$$R \Rightarrow Z_1 = R + j 0 = R \angle 0^\circ$$

$$X_L \Rightarrow Z_2 = 0 + j X_L = X_L \angle 90^\circ$$



Y, al igual que en los circuitos de corriente continua, se tiene que:  $Z_T = Z_1 + Z_2$

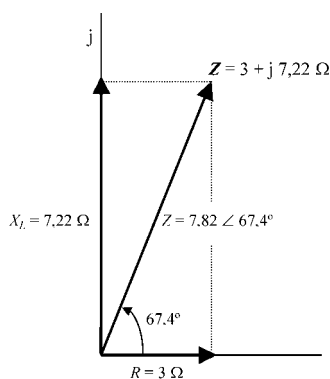
El desarrollo para hallar  $Z_T$  es:

$$X_L = 2\pi f L = 2 \times 50 \times 0,023 = 7,22 \, \Omega$$

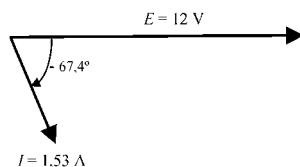
$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = R + j 0 = 3 + j 0 \\ Z_2 = 0 + j X_L = 0 + j 7,22 \end{array} \right\} \Rightarrow Z_T = (3 + j 0) + (0 + j 7,22) = 3 + j 7,22 \quad \text{Forma binómica:}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_T = \sqrt{3^2 + 7,22^2} = 7,82 \, \Omega \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{7,22}{3} = 67,4^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow Z_T = 7,82 \angle 67,4^\circ \quad \text{Forma polar:}$$

Se puede construir así lo que se llama *triángulo impedancia* (fig.3.28a); una representación gráfica de la suma vectorial de la resistencia ( $R$ ) con la reactancia ( $X_L$ ).



a)



b)

**Figura 3.28.** a) Triángulo de impedancia del circuito de la figura 3.27. b) La intensidad circula retrasada  $67,4^\circ$  respecto a la tensión del generador.

Aplicando la ley de ohm tenemos el valor de la intensidad:

$$I = \frac{E}{Z_T} = \frac{12 \angle 0^\circ}{7,82 \angle 67,4^\circ} = 1,53 \, A \angle -67,4^\circ$$

Esto indica que la intensidad tiene un valor eficaz de  $1,53 \, A$  y va atrasada  $67,4^\circ$

con respecto a la tensión del generador (fig.3.28b). Expresada en función del tiempo, es:

$$i = 1,53 \sqrt{2} \operatorname{sen}(\omega t - 67,4^\circ) = 2,17 \operatorname{sen}(314,16 t - 67,4^\circ)$$

Tensión en la resistencia:

$$V_R = I R = 1,53 \angle -67,4^\circ \times 3 \angle 0^\circ = 4,6 \text{ V} \angle -67,4^\circ$$

Obsérvese cómo aparece el mismo desfase que la intensidad, lo cual es indicativo de que la tensión en la resistencia va en fase con la intensidad. Expresada en el dominio del tiempo, es:

$$v_R = 4,6 \sqrt{2} \operatorname{sen}(\omega t - 67,4^\circ) = 6,5 \operatorname{sen}(314,16 t - 67,4^\circ)$$

Tensión en la bobina:

$$V_L = I X_L = 1,53 \angle -67,4^\circ \times 7,22 \angle 90^\circ = 11,04 \text{ V} \angle 22,6^\circ$$

Se cumple que la tensión en la bobina va adelantada  $90^\circ$  respecto a la intensidad, ya que la diferencia de fase es:  $22,6 - (-67,4) = 90^\circ$ . Si la expresamos en función del tiempo, tenemos:

$$v_L = 11,4 \sqrt{2} \operatorname{sen}(\omega t + 22,6^\circ) = 15,61 \operatorname{sen}(314,16 t + 22,6^\circ)$$

En la figura 3.29a se muestra el diagrama vectorial de tensiones del circuito. Se ha tomado como referencia a la tensión del generador ( $E$ ). Y, como debe ser, por *Kirchhoff*, se cumple que la suma (vectorial) de las tensiones es igual a la tensión del

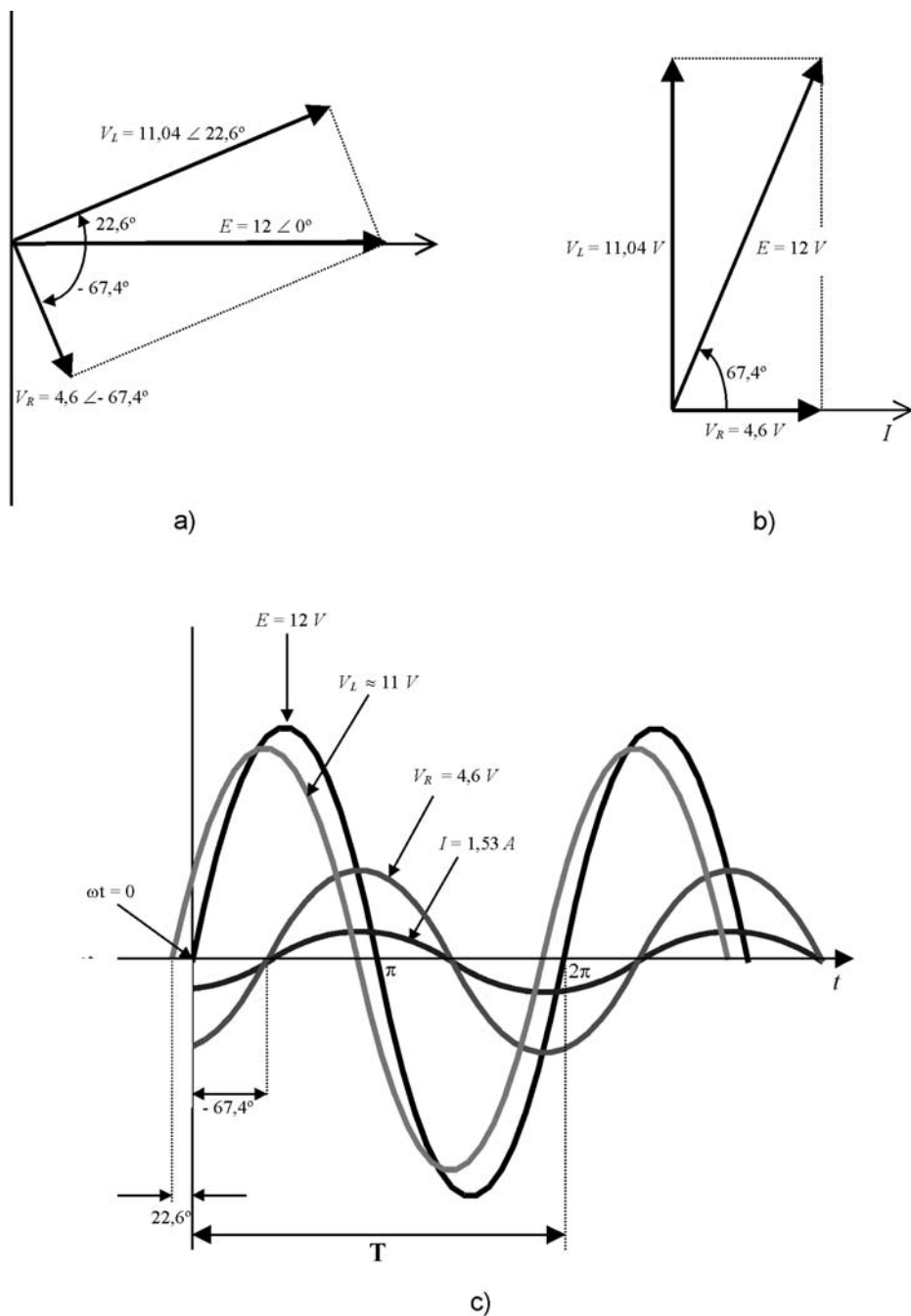
generador:  $E = V_R + jV_L \Rightarrow E = \sqrt{4,6^2 + 11,04^2} \approx 12 \text{ V}$

La otra forma de representación del diagrama vectorial de tensiones, muy utilizada, es como se muestra en la figura 3.29b; en este caso, se toma como referencia a la intensidad. En el diagrama de ondas (fig.3.29c), se pueden observar los desfases relativos entre las ondas.

## Cálculo de las potencias:

La potencia activa, en este caso, queda determinada por la potencia disipada en la resistencia. Por tanto, viene dada por cualquiera de las fórmulas:

$$P = V_R I_R = I_R^2 R = \frac{V_R^2}{R}$$



**Figura 3.29.** Representación del triángulo de tensiones del circuito de la figura 3.27: a) tomando como referencia la tensión del generador ( $E$ ); b) tomando como referencia la intensidad ( $I$ ). c) Diagrama de las ondas del circuito.

**Ejemplo:**

$$P = I^2 R = 1,53^2 \times 3 = 7 \text{ W}$$

Como hemos visto anteriormente, el ángulo de desfase ( $\varphi$ ) de la intensidad respecto a la tensión del generador es  $67,4^\circ$ . El factor de potencia de este circuito es, pues:

$$\cos \varphi = \cos 67,4^\circ = 0,38$$

Es un circuito bastante inductivo, que se aleja mucho del factor de potencia deseable en los aparatos eléctricos reales ( $\cos \varphi \approx 0,9$ ).

Como la potencia reactiva es la desarrollada en la bobina, su valor viene dado por cualquiera de las conocidas fórmulas:

$$Q = V_L I_L = I_L^2 X_L = \frac{V_L^2}{X_L}$$

Por ejemplo:

$$Q = I_L^2 X_L = 1,53^2 \times 7,22 = 16,9 \text{ VAR}$$

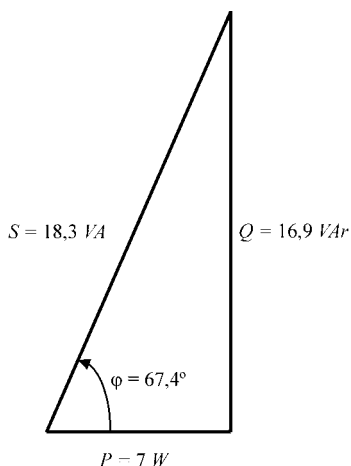
El valor de la potencia aparente, como ya se habrá deducido, es:

$$S = E I = 12 \times 1,53 = 18,36 \text{ VA}$$

Y, como debe ser, se verifica que la suma vectorial de la potencia activa y la reactiva es igual a la aparente:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{7^2 + 16,8^2} = 18,36 \text{ VA}$$

El triángulo de potencias resultante se representa en la figura 3.30.



$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{7^2 + 16,9^2} = 18,36 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{Q} = \frac{7}{16,9} = 0,38$$

**Figura 3.30.** Triángulo de potencias del circuito de la figura 3.27.

### 3.5.2 Circuito serie R-C

Aplicando el cálculo por complejos, hallaremos el triángulo de tensiones y de potencias del circuito de la figura 3.17a.

Como el valor de la reactancia del condensador es:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 1 \cdot 10^{-6}} = 3183 \Omega$$

la impedancia se puede expresar por:

$$Z = R - j X_C = 1000 - j 3183$$

Que en la forma polar es:

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{1000^2 + 3183^2} = 3336,5 \Omega \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{-X_C}{R} = \tan^{-1} \frac{-3183}{1000} = -72,5^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z = 3336,5 \angle -72,5^\circ$$

Aplicado la ley de Ohm obtenemos el valor de la intensidad:

$$I = \frac{220 \angle 0^\circ}{3336,5 \angle -72,5^\circ} = 0,066 \angle 72,5^\circ$$

que circula con un adelanto de  $72,5^\circ$  con respecto a la tensión del generador (220 V).

Y las tensiones en la resistencia y el condensador son:

$$V_R = R \angle 0^\circ \cdot I \angle \varphi = 1000 \angle 0^\circ \times 0,066 \angle 72,5^\circ = 66 V \angle 72,5^\circ$$

Dicha tensión está en fase con la intensidad, ya que tienen el mismo ángulo ( $72,5^\circ$ ).

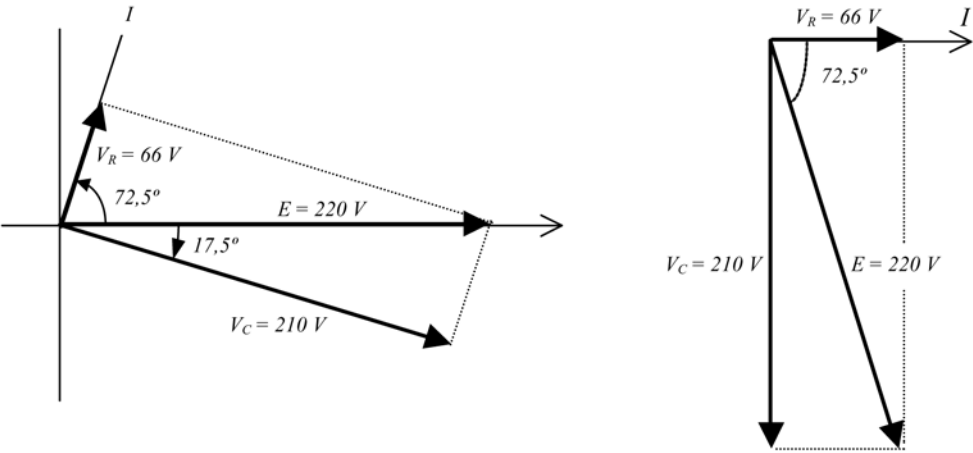
$$V_C = X_C \angle -90^\circ \times I \angle \varphi = 3183 \angle -90^\circ \times 0,066 \angle 72,5^\circ = 210 V \angle -17,5^\circ$$

En cambio, la tensión en el condensador va retrasada  $17,5^\circ$  con respecto a la tensión del generador; lo cual equivale a  $90^\circ$  con respecto a la intensidad. El triángulo de tensiones se representa en la figura 3.31a.

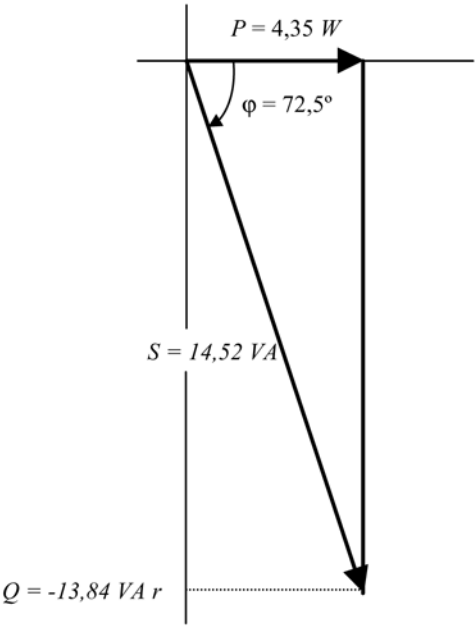
En cuanto a las potencias, tenemos:

$$\begin{aligned} S &= E \cdot I = 220 \times 0,066 = 14,5 \text{ VA} \\ P &= S \cos \varphi = 14,5 \times \cos 72,5^\circ = 4,3 \text{ W} \\ Q &= S \sin \varphi = 14,5 \times \sin 72,5^\circ = 13,8 \text{ VAR} \end{aligned}$$

El triángulo de potencias se representa en la figura 3.31b.



a)



b)

**Figura 3.31.** Representación del triángulo de tensiones del circuito de la figura 3.17: a) tomando como referencia la tensión del generador ( $E$ ); b) tomando como referencia la intensidad ( $I$ ). c) Triángulo de potencias.

### 3.5.3 Circuito serie R - L - C

Dado un circuito serie con los valores:

$$R = 500 \, \Omega$$

$$L = 0,5 \, H$$

$$C = 0,2 \, \mu F$$

$$E = 50 \, V \quad f = 1 \, kHz$$

calcularemos:

- La intensidad, con su desfase, que circulará por el circuito
- Las tensiones en los componentes
- El triángulo de potencias
- La frecuencia de resonancia y la intensidad a dicha frecuencia

**Desarrollo:**

- Para hallar la intensidad calcularemos primeramente la impedancia:

$$X_L = \omega L = 6,283 \times 1000 \times 0,5 = 3141,5 \, \Omega \Rightarrow j X_L = j 3141,5$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{6,283 \times 1000 \times 0,2 \cdot 10^{-6}} = 795,8 \, \Omega \Rightarrow -j X_C = -j 795,8$$

$$Z = R + j X_L - j X_C = 500 + j 3141,5 - j 795,8 = 500 + j 2345,7$$

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sqrt{500^2 + 2345,7^2} = 2398,4 \, \Omega \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{2345,7}{500} = 77,9^\circ \end{aligned} \right\} \hookrightarrow Z = 2398,4 \angle 77,9^\circ$$

El valor de la intensidad, es:

$$I = \frac{50 \angle 0^\circ}{2398,4 \angle 77,9^\circ} = 0,02 \angle -77,9^\circ$$

Y circula con un retraso  $77,9^\circ$  respecto a la tensión del generador.

- Las tensiones en los componentes son:

$$V_R = R \angle 0^\circ \cdot I \angle \varphi = 500 \angle 0^\circ \times 0,02 \angle -77,9^\circ = 10 \, V \angle -77,9^\circ$$

$$V_L = X_L \angle 90^\circ \times I \angle \varphi = 3141,5 \angle 90^\circ \times 0,02 \angle -77,9^\circ = 62,8 \, V \angle 12,1^\circ$$

$$V_C = X_C \angle -90^\circ \times I \angle \varphi = 795,8 \angle -90^\circ \times 0,02 \angle -77,9^\circ = 15,9 \, V \angle -167,9^\circ$$

c) Los datos del triángulo de potencias son:

$$S = E \cdot I^* = 50 \times 0,02 \angle 77,9^\circ = 1 \text{ VA } \angle 77,9^\circ$$

$$P = S \cos \varphi = 1 \times \cos 77,9^\circ = 0,209 \text{ W}$$

$$Q = S \sin \varphi = 1 \times \sin 77,9^\circ = 0,977 \text{ VAR}$$

Y se cumple que:

$$S = P + j Q = 0,209 + j 0,977$$

d) La frecuencia de resonancia del circuito será:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{6,283 \times \sqrt{0,5 \times 0,2 \cdot 10^{-6}}} = 503,5 \text{ Hz}$$

Como a dicha frecuencia el valor de la impedancia se reduce al valor de la resistencia óhmica que tenga el circuito, se tiene:

$$I_r = \frac{E}{R} = \frac{50}{500} = 0,1 \text{ A } \angle 0^\circ$$

### 3.5.4 Aplicación práctica del circuito serie R- C: Encendido de una bombilla con 125 V mediante la red de 220 V.

Se explica a continuación el desarrollo de un ejemplo de aplicación práctica del circuito R-C. Se trata de encender una bombilla de 125 V (como podría ser otro dispositivo) mediante la red de 220 V, obteniendo la caída de tensión mediante un condensador conectado en serie con la bombilla.

Esta forma de alimentar dispositivos (con una tensión mayor a la nominal) haciendo que se produzca una caída de la tensión sobrante es muy usual poniendo una resistencia en serie con la carga; pero se disipa una potencia eléctrica (activa) que puede ser muy notable, además de la correspondiente generación de calor. Si en vez de poner una resistencia se pone un condensador, aprovechando el efecto de reactancia ( $X_C$ ) se puede obtener también una caída de tensión sin desperdicio de potencia activa, ya que el condensador es un dispositivo que no consume potencia activa; eso sí, en contrapartida se genera una cierta potencia reactiva.

El ejemplo de circuito práctico se muestra en la figura 3.32. Mediante el condensador se tiene que conseguir que la bombilla reciba sólo su tensión nominal, o sea, 125 V. Esto significa que en el condensador se tiene que producir una caída de tensión que será la diferencia que hay entre los 220 V de entrada y los 125 V de la bombilla:

$$\text{Caída de tensión en el condensador} = 220 \text{ V} - 125 \text{ V} = 95 \text{ V}$$

Y para que en la bombilla se desarrolle una potencia de 40 W, la intensidad que deberá circular es:



$$I = \frac{P}{V} = \frac{40}{125} = 0,32 \text{ A}$$

Se deduce pues que la resistencia del filamento (en caliente), cuando la bombilla está encendida deberá ser:

$$R_{fil} = \frac{V}{I} = \frac{125}{0,32} = 390,6 \Omega$$

Se trata ahora de saber el valor que deberá tener la reactancia del condensador ( $X_C$ ) para hallar el valor de su capacidad ( $C$ ). Esto lo obtendremos por medio de la conocida fórmula de la impedancia del circuito serie:  $Z_T = \sqrt{R_f^2 + X_C^2}$ . Puesto que el valor (módulo) de la impedancia total del circuito se puede saber por simple aplicación de la ley de Ohm:

$$Z_T = \frac{V}{I} = \frac{220}{0,32} = 687,5 \Omega$$

El valor de la reactancia se deduce que es:

$$Z_T = \sqrt{R_f^2 + X_C^2} \Rightarrow X_C = \sqrt{Z_T^2 - R_f^2} = \sqrt{687,5^2 - 390,6^2} = 565,76 \Omega$$

Y en consecuencia el valor de la capacidad se obtiene que es:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{6,28 \times 50 \times 565,76} \approx 5,6 \mu\text{F}$$

Así, el condensador deberá tener una capacidad de unos  $5,6 \mu\text{F}$  y tiene que soportar la tensión de los  $220 \text{ V}$  de la red.

En cuanto a la cuestión de las potencias, tenemos lo siguiente:

De la expresión de la impedancia en la notación compleja se obtiene que el ángulo de desfase es de:

$$Z_T = R_f - j X_C \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \frac{-X_C}{R_f} = \tan^{-1} \frac{-565,76}{390,6} \approx -55,4^\circ$$

La intensidad se puede expresar, pues, teniendo en cuenta su desfase de la manera:

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{220 \angle 0^\circ}{687,5 \angle -55,4^\circ} = 0,32 \text{ A} \angle 55,4^\circ$$

Lo cual indica que el valor de la intensidad es de  $0,32 \text{ A}$  y circula adelantada  $55,4^\circ$  con respecto a la tensión de  $220 \text{ V}$  (fig.3.33a).

Y el factor de potencia del circuito es pues de:

$$\cos \varphi = \cos 55,4^\circ = 0,567$$

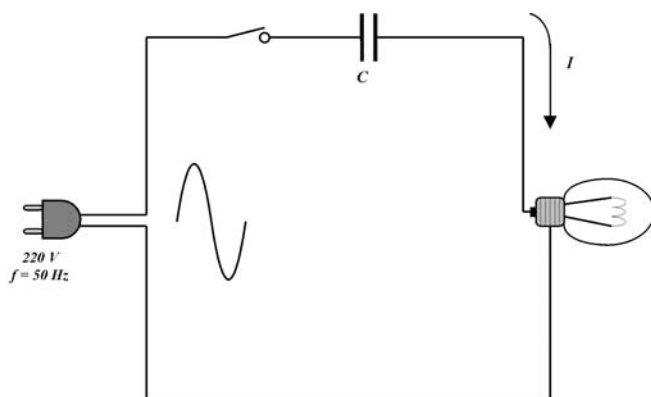


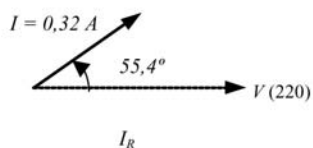
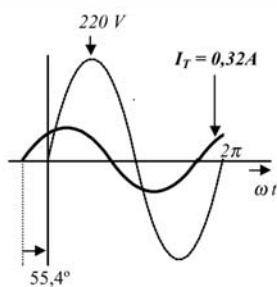
Figura 3.32.

Resultando así las siguientes de potencias (fig.3.33b):

$$S = I V = 0,32 \times 220 = 70,4 \text{ VA}$$

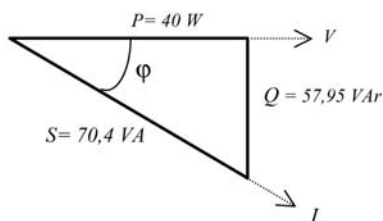
$$P = S \cos \varphi = 70,4 \times 0,567 = 40 \text{ W}$$

$$Q = S \sin \varphi = 70,4 \times \text{Sen } 55,4^\circ = 57,95 \text{ VAr}$$



a)

Potencia reactiva en retraso; circuito inductivo



b)

Figura 3.33.

La potencia realmente gastada, la activa ( $P$ ) coincide con los 40 W de la bombilla. Pero, debido a la potencia reactiva que introduce el condensador, la intensidad que tiene que circular por el circuito es de 0,32 A; en cambio, de no existir los 57,95 VA de potencia reactiva, los 40 W con 220 V se obtienen con una intensidad de sólo:

$I_a = \frac{40}{220} = 0,181 \text{ A}$ , que es la intensidad activa. Existe pues una intensidad reactiva

de  $I_r = \frac{57,95}{220} = 0,263 \text{ A}$ , que junto con la intensidad activa dan lugar al total de la

intensidad:

$$I_T = \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = \sqrt{0,181^2 + 0,263^2} \cong 0,32 \text{ A}$$

### 3.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

- 3.1** *A un circuito compuesto por una resistencia de 10  $\Omega$  en serie con un condensador de 20  $\mu\text{F}$  se le aplica una tensión de  $V_p = 300 \text{ V}$  y  $f = 500 \text{ Hz}$ . Calcular:*
- La intensidad*
  - La tensión en cada componente*
  - La potencia consumida*
- 3.2** *Si al circuito del ejercicio anterior se le aplica una tensión cuya expresión analítica es  $v = 500 \sin 2500 t$ , hallar la expresión analítica de la intensidad.*
- 3.3** *Se tiene una bobina cuya inductancia es de 2 H y su resistencia del hilo de 30  $\Omega$ . Calcular la potencia que consumirá la bobina cuando se le aplica la tensión de la red eléctrica (220 V,  $f = 50 \text{ Hz}$ ).*
- 3.4** *Se tiene un circuito serie R-L-C con  $L = 25 \text{ mH}$  y  $C = 50 \mu\text{F}$ . Se sabe que cuando se alimenta con la red de 220 V 50 Hz la intensidad va adelantada  $63,3^\circ$  respecto a la tensión de la red. Calcular:*
- El valor de la resistencia*
  - Las caídas de tensión en cada componente*
  - La frecuencia de resonancia*
- 3.5** *Hallar el valor del condensador para que un circuito serie con  $L = 20 \text{ mH}$  y  $R = 5 \Omega$  entre en resonancia a la frecuencia de 10 kHz.*

## Capítulo 4

# Circuitos paralelo R-L-C: Principios básicos, resonancia, compensación de potencia reactiva

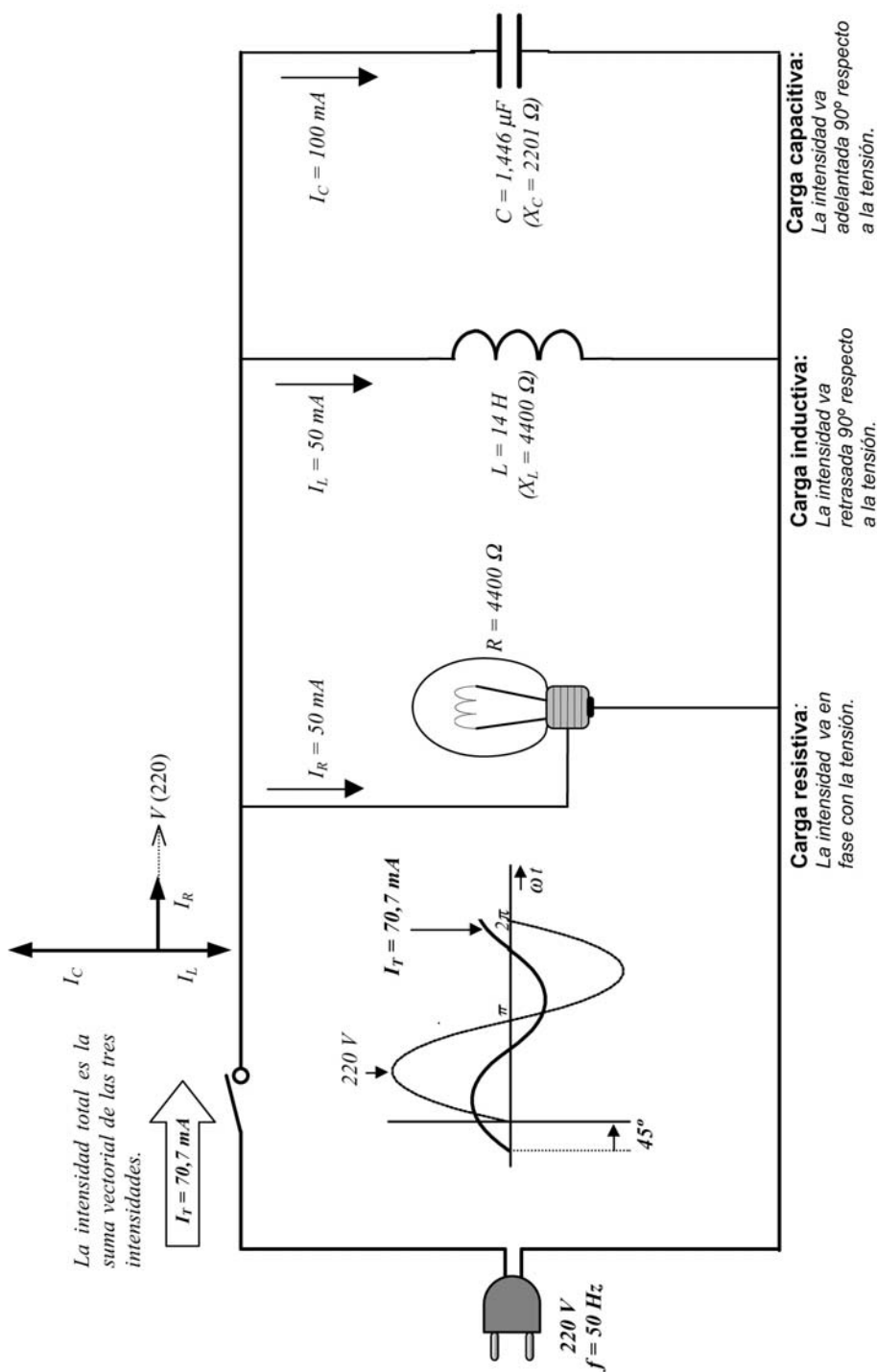
### 4.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se han visto los circuitos  $R-L-C$  de tipo serie, apareciendo una serie de características relativas al desfase y la potencia, así como un efecto muy importante (en especial, en los aparatos de comunicaciones – Radio - TV) llamado *resonancia*. Pues todas estas cuestiones aparecen también cuando los componentes son conectados en modo paralelo, que es cómo quedan conectados a la red eléctrica todos los aparatos eléctricos y electrónicos en una casa o industria. Algunos de ellos son cargas resistivas (estufa eléctrica) y otros son cargas inductivas (motor ascensor), incluso pueden aparecer cargas mixtas como son los fluorescentes (tiene filamentos, una reactancia inductiva y, además, pueden llevar también un condensador).

De la misma manera que hemos analizado los circuitos con resistencia, inductancia y capacidad en conexión serie también se pueden analizar en conexión paralelo.

En principio no hay que olvidarse que en los circuitos paralelo todos los componentes (o aparatos) se encuentran conectados a la misma tensión, la de alimentación; la tensión entre los terminales de cada una de las ramas del montaje paralelo es la misma. Esto es algo que se puede evidenciar simplemente pensando en cómo están conectados todos nuestros aparatos eléctricos y electrónicos a la red eléctrica; todos ellos se conectan a enchufes mediante los cuales reciben la tensión de la red eléctrica. En cuanto a la intensidad que circulará por cada componente receptor, depende de sus características de resistencia y reactancia, es decir, de su impedancia ( $Z$ ). Y dicha intensidad podrá circular en fase o desfasada  $90^\circ$  según se trate de una carga puramente resistiva o reactiva. Y la intensidad total, la que entregara el generador, será la suma (vectorial) de todas las intensidades, la cual podrá circular con un cierto desfase (en adelanto o retraso) con respecto a la tensión del generador debido a los efectos reactivos de las bobinas y condensadores.

En la figura 4.1 se muestra un ejemplo práctico de circuito paralelo, en el cual existen una carga resistiva, otra capacitiva y otra inductiva. Obviamente, todos los componentes tienen la misma tensión, la de la red (220 V); pero las intensidades



**Figura 4.1.** Ejemplo de un montaje práctico paralelo R-L-C, con los valores de las intensidades. Debido a los efectos de la bobina (inductivo) y el condensador (capacitivo) la intensidad que entrega la red eléctrica (70,7 mA) circula adelantada  $45^\circ$  con respecto a la tensión (220 V).

dependen de la carga. Y la intensidad total ( $I_T$ ) es la suma (vectorial) de las intensidades de cada rama. Más adelante se calculará este circuito, y así se razonaran mejor los datos que aparecen.

### 4.1.1 Generalidades sobre suma de intensidades y potencias

En principio, y de cara a circuitos donde pueden haber diferentes receptores conectados en paralelo, cuyo caso es el más normal en la práctica, es conveniente tener en cuenta el siguiente resumen de conceptos:

- Al conectar varios componentes receptores a un mismo generador en montaje paralelo, todos recibirán la misma tensión; la del generador (la red eléctrica de 220 V, por ejemplo).
- La intensidad total activa será la suma de todas las intensidades activas:

$$I_{a(total)} = I_{a1} + I_{a2} + \dots I_{an}$$

- La intensidad total reactiva será la suma de todas las intensidades reactivas:

$$I_{r(total)} = I_{r1} + I_{r2} + \dots I_{rn}$$

- La intensidad total, la que sale del generador, es la suma vectorial de la intensidad total activa ( $I_{a(total)}$ ) y de la intensidad total reactiva ( $I_{r(total)}$ ):

Modulo:

$$I_T = \sqrt{I_{a(total)}^2 + I_{r(total)}^2}$$

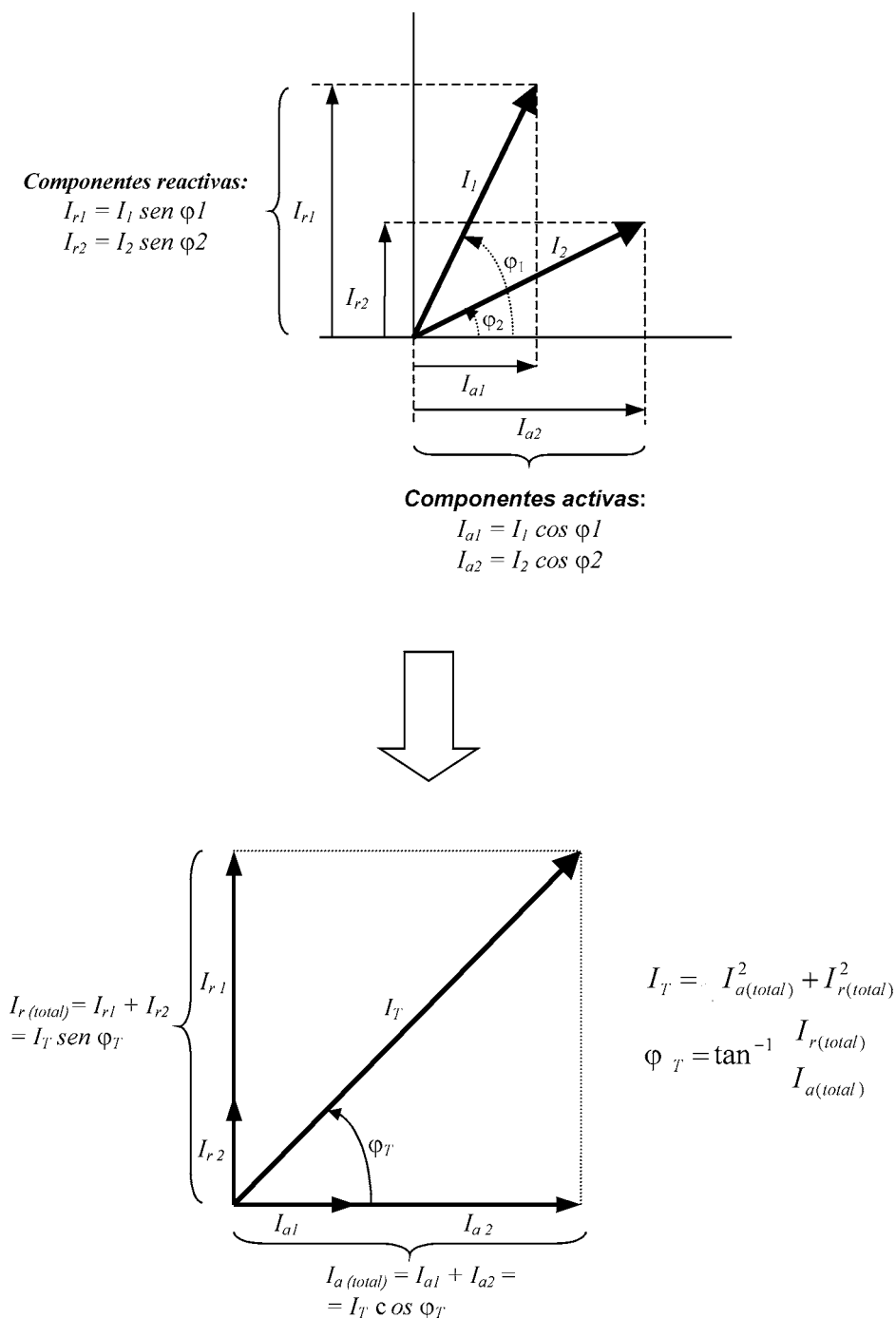
Desfase:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{I_{r(total)}}{I_{a(total)}}$$

Una representación gráfica de estos conceptos se muestra en la figura 4.2.

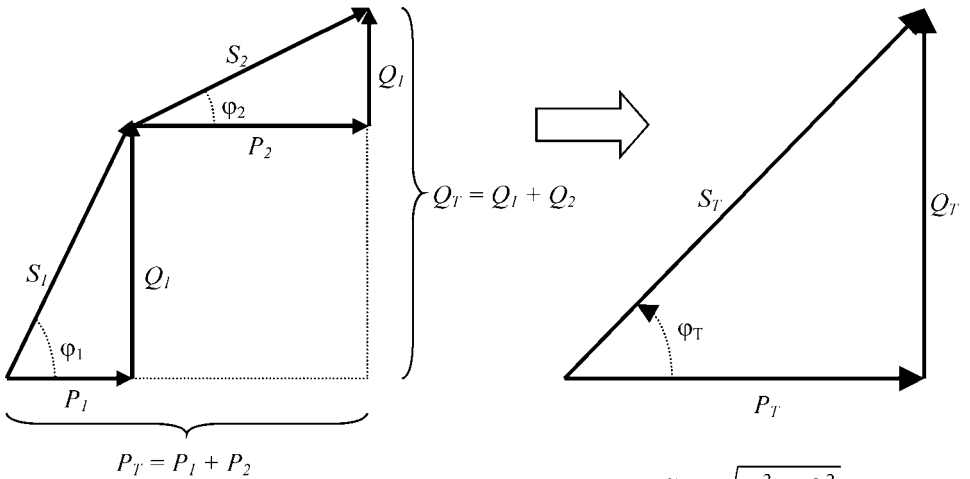
- El valor de la impedancia total, por aplicación de la ley de *Ohm*, es:

$$Z_{total} = \frac{V_G}{I_T} = \frac{V_G}{\sqrt{I_{a(total)}^2 + I_{r(total)}^2}}$$



**Figura 4.2.** La suma de las intensidades activas y reactivas da lugar a las intensidades totales activa y reactiva respectivamente.

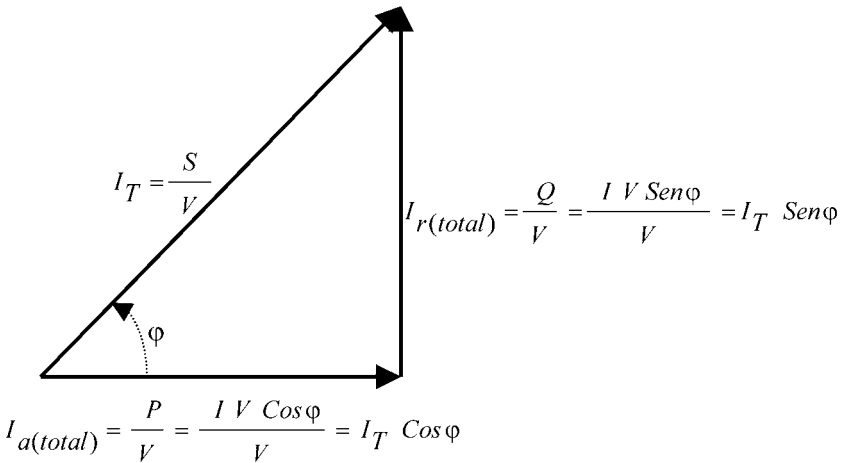
- El triángulo de potencias total resultante se obtiene sumando los triángulos de potencia parciales (fig.4.3a), de lo que se deduce lo siguiente:



a)

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$

$$\cos \varphi_T = \frac{P_T}{S_T}$$



b)

**Figura 4.3. a)** La suma de varios triángulos de potencia (en este caso, dos) da lugar a un triángulo de potencias total. **b)** Deducción de las intensidades en un triángulo de potencias.



- La potencia activa total es la suma de todas las potencias activas:

$$P_{total} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

- La potencia reactiva total es la suma de todas las potencias reactivas:

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

- La potencia total aparente es la suma vectorial de las potencias activa total y reactiva total:

$$S_{total} = \sqrt{P_{total}^2 + Q_{total}^2}$$

- El factor de potencia resultante es:

$$\cos \phi_T = \frac{P_{total}}{S_{total}}$$

De los valores del triángulo de potencias se pueden hallar también los valores de las intensidades, como se muestra en la figura 4.3b.

## 4.2 CIRCUITO PARALELO R-C

Un condensador conectado en paralelo con una resistencia da lugar a un circuito R-C paralelo básico (fig.4.4a). Mediante su análisis deduciremos la fórmula de la impedancia y del desfase.

En principio, y como se deduce por Kirchhoff, la suma de las intensidades  $I_R$  y  $I_C$  es igual a la intensidad que entrega el generador ( $I_T$ ); pero dicha suma es vectorial, ya que, como es sabido, entre dichas intensidades existe un desfase de  $90^\circ$ . Se obtiene pues el diagrama vectorial de la figura 4.4b. Y, en resumen tenemos que:

Todos los componentes tienen la misma tensión (que es la de la alimentación):

$$V_R = V_C = E$$

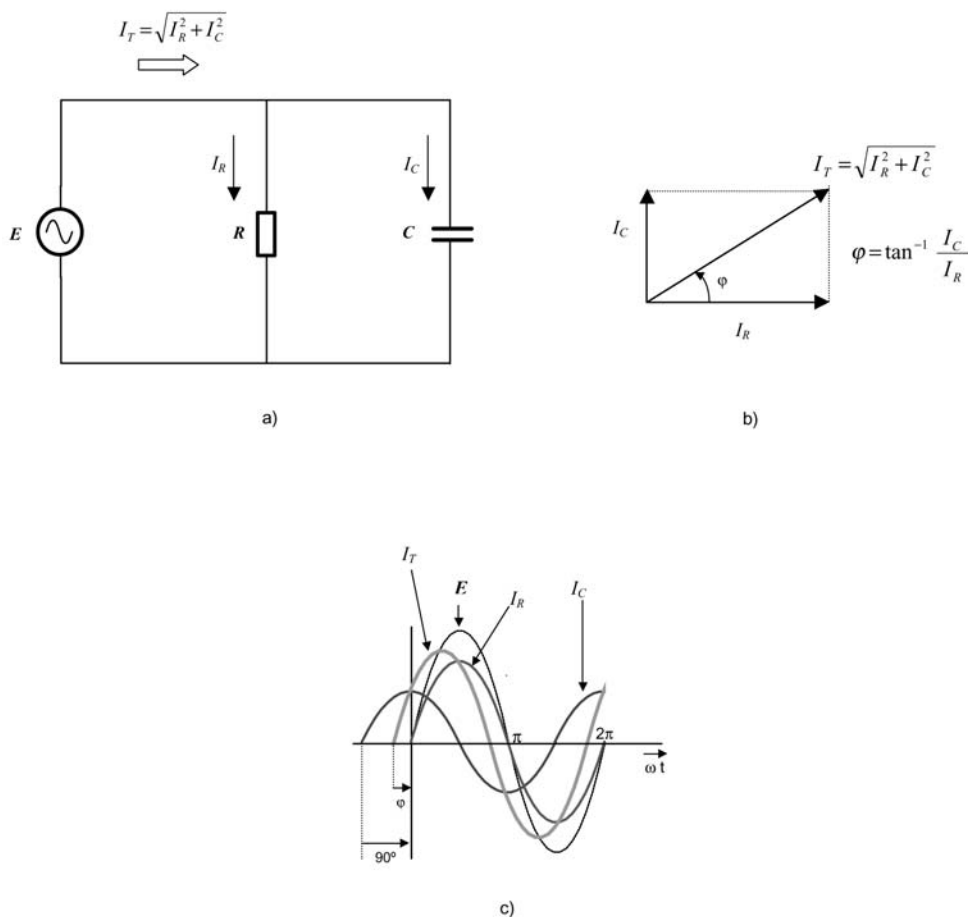
Valor de las intensidades:

$$I_R = \frac{E}{R} \quad I_C = \frac{E}{X_C}$$

Intensidad total, con su desfase:

$$I_T = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{I_C}{I_R}$$



**Figura 4.4.** a) Circuito básico paralelo R-C. b) Triángulo de intensidades. c) Diagrama de ondas del circuito.

Una representación de las ondas del circuito se muestra en la figura 4.4c. Como se puede observar, con respecto a la tensión del generador ( $E$ ), la onda de  $I_R$  va en fase y la onda  $I_C$  va adelantada  $90^\circ$ . Y la suma de dichas intensidades da lugar a una resultante que es la intensidad total (la que sale del generador), cuyo valor es

$$I_T = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}, \text{ la cual circula con un desfase que viene dado por } \varphi = \tan^{-1} \frac{I_C}{I_R}.$$

Aunque la capacidad hace aumentar la intensidad que debe entregar el generador, y por tanto circulará por los cables de la alimentación, sólo se produce un consumo de potencia en la resistencia (*potencia activa*); como ya se sabe, la energía almacenada en el condensador es devuelta al generador (*potencia reactiva*). Pero esto hace que los cables que suministran corriente a circuitos de este tipo tengan que ser de mayor sección a la que deberían tener de no haber condensador.

En cuanto a la impedancia total del circuito, aplicando la ley de Ohm, se obtiene:

$$Z = \frac{E}{I_T} = \frac{E}{\sqrt{I_R^2 + I_C^2}}$$

Y como que  $I_R = \frac{E}{R}$   $I_C = \frac{E}{X_C}$ , desarrollando se puede obtener una fórmula

que nos da la impedancia en función únicamente de los valores de resistencia y de reactancia:

$$I_T = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{\left(\frac{E}{R}\right)^2 + \left(\frac{E}{X_C}\right)^2} = \sqrt{\frac{E^2}{R^2} + \frac{E^2}{X_C^2}} = \sqrt{E^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}\right)} \Rightarrow$$

$$I_T = E \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}} \Rightarrow \frac{I_T}{E} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}$$

Y como que  $Z = \frac{E}{I_T}$ , haciendo la inversa se obtiene que:

$$\frac{I_T}{E} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}} \Rightarrow \frac{E}{I_T} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}}}$$

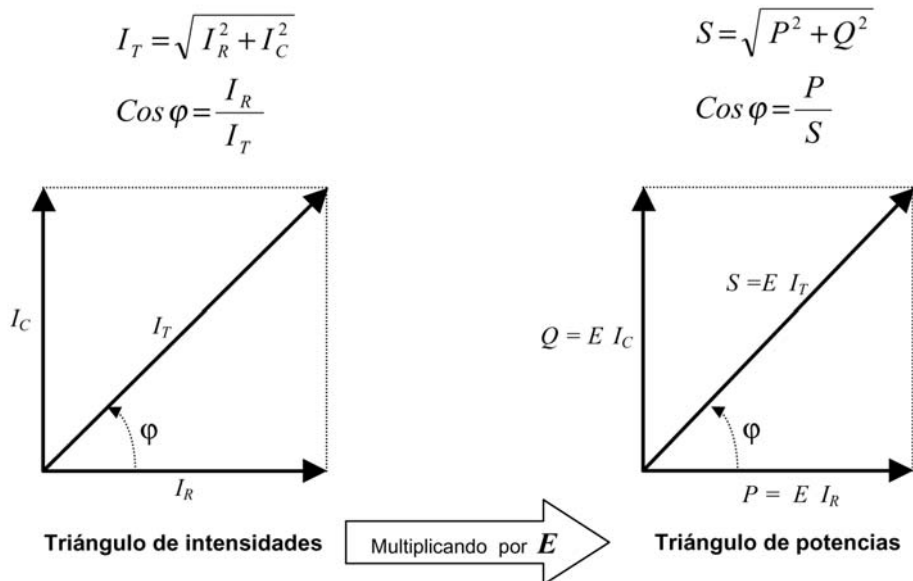
Y el ángulo de desfase, viene dado por:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{I_C}{I_R} = \tan^{-1} \frac{\frac{E}{X_C}}{\frac{E}{R}} \Rightarrow \boxed{\varphi = \tan^{-1} \frac{R}{X_C}}$$

En cuanto a las potencias, multiplicando cada lado del triángulo de intensidades por la tensión ( $E$ ) se obtiene el triángulo de potencias, como se muestra en la figura 4.5.

### 4.2.1 Susceptancia y admitancia

Relacionados con los circuitos de tipo paralelo, aparecen los conceptos de *susceptancia* y *admitancia*, mediante los cuales se pueden simplificar circuitos, conceptos y cálculos.



**Figura 4.5.** Del triángulo de intensidades se puede deducir el triángulo de potencias.

Es algo equivalente a la *conductancia* ( $G$ ) en el caso de las resistencias:  $G = \frac{1}{R}$

y también se mide en *simens* (s). Se recuerda que la conductancia es el inverso de la resistencia; o sea, es indicativo de la mayor o menor facilidad a dejar circular la corriente. Cuanto menor sea la resistencia, mayor será por tanto la conductancia.

**Susceptancia ( $B$ ):** Es el inverso de la reactancia, o sea, nos indica en que medida es “susceptible” la reactancia a permitir el flujo de corriente a través de ella. Cuanto mayor sea la susceptancia, mayor será la intensidad.

$$\text{Susceptancia inductiva} \Rightarrow B_L = \frac{1}{X_L}$$

$$\text{Susceptancia capacitiva} \Rightarrow B_C = \frac{1}{X_C}$$

**Admitancia ( $Y$ ):** Es el inverso de la impedancia; a mayor admitancia, mayor podrá ser la intensidad. Su expresión es:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

En los circuitos de tipo paralelo, la admitancia total viene dada por la suma de todas las admitancias:

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n$$

Cada admitancia contribuye a facilitar la corriente total, o sea, a disminuir la resistencia. Esta expresión es equivalente a:

$$Y_T = \frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

Y de aquí se deduce también la fórmula de la impedancia total del circuito paralelo:

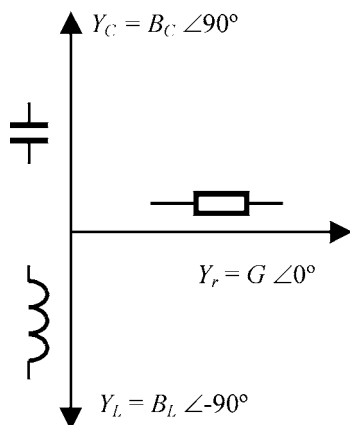
$$Z_T = \frac{1}{Y_T} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n}}$$

De hecho, las resistencias (R) y las reactancias (X) también se pueden ver como impedancias a las que les falta una componente. Por ejemplo, la impedancia de una resistencia ( $Z_R$ ) pura no tiene reactancia ( $X = 0$ ), es:  $Z_R = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + 0} = R$ . Y la impedancia de una reactancia pura, no tiene resistencia óhmica ( $R = 0$ ) es:  $Z_X = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{0 + X^2} = X$ . Y esto también se puede aplicar, por tanto, al caso de las admitancias. De esta manera, y teniendo en cuenta los ángulos de desfase de los componentes (fig.4.6.), aparece:

$$\text{Conductancia} \Rightarrow \vec{Y}_R = G \angle 0^\circ = \frac{1}{R \angle 0^\circ} = \frac{1}{R} \angle 0^\circ$$

$$\text{Susceptancia inductiva} \Rightarrow \vec{Y}_L = B_L \angle -90^\circ = \frac{1}{X_L \angle 90^\circ} = \frac{1}{X_L} \angle -90^\circ = -j \frac{1}{X_L}$$

$$\text{Susceptancia capacitiva} \Rightarrow \vec{Y}_C = B_C \angle 90^\circ = \frac{1}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{1}{X_C} \angle 90^\circ = j \frac{1}{X_C}$$



**Figura 4.6.** Diagrama de admitancias de los componentes básicos.

Los ángulos asociados a cada componente deben tenerse en cuenta en las operaciones; o sea, las sumas deben ser vectoriales.

Y del valor de las admitancias, como se deduce, también se pueden hallar los valores de las intensidades. Como que:  $I_R = \frac{E}{R} = \frac{1}{R} E$  y por otra parte:  $Y_R = \frac{1}{R}$ , se deduce que multiplicando la admitancia por la tensión se obtiene la intensidad. O sea, que:

$$I_R = Y_R \cdot E$$

$$I_C = Y_C \cdot E$$

$$I_L = Y_L \cdot E$$

$$I_T = Y_T \cdot E$$

Partiendo del concepto de la admitancia, se puede desarrollar también la fórmula de la impedancia de los circuitos, que en el caso del circuito que nos ocupa, el R-C, se tiene:

La admitancia total es la suma vectorial de las admitancias de los componentes:

$$\vec{Y}_T = \vec{Y}_R + \vec{Y}_C$$

Siendo su módulo:

$$\vec{Y}_T = \vec{Y}_R + \vec{Y}_C \Rightarrow Y_T = \sqrt{Y_R^2 + Y_C^2}$$

Y puesto que  $Y_R = \frac{1}{R}$  y  $Y_C = \frac{1}{X_C}$ , se tiene que:

$$Y_T = \sqrt{Y_R^2 + Y_C^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2}$$

Y al ser la impedancia el inverso de la admitancia, se obtiene finalmente la fórmula que nos da el valor (módulo) de la impedancia:

$$Z = \frac{1}{Y_T} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}}$$

Que es la misma expresión que la desarrollada anteriormente en base a las intensidades del circuito.

Utilizando la notación compleja, el desarrollo es:

$$\vec{Y}_T = \vec{Y}_R + \vec{Y}_C \Rightarrow \vec{Y}_T = \frac{1}{R \angle 0^\circ} + \frac{1}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{1}{R} + j \frac{1}{X_C}$$

Lo cual nos da el valor (módulo):

$$Y_T = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2} \Rightarrow Z = \frac{1}{Y_T} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2}}$$

O sea, se obtiene el mismo resultado.

## 4.2.2 Ejemplo de ejercicio de cálculo de un circuito R-C

Supongamos el circuito R-C paralelo que se muestra en la figura 4.7a. El cálculo de sus valores básicos es:

Intensidad en la resistencia:

$$I_R = \frac{E}{R} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$$

Intensidad en el condensador:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 200 \times 50 \cdot 10^{-6}} = 15,9 \Omega \Rightarrow I_C = \frac{E}{X_C} = \frac{20}{15,9} = 1,25 \text{ A}$$

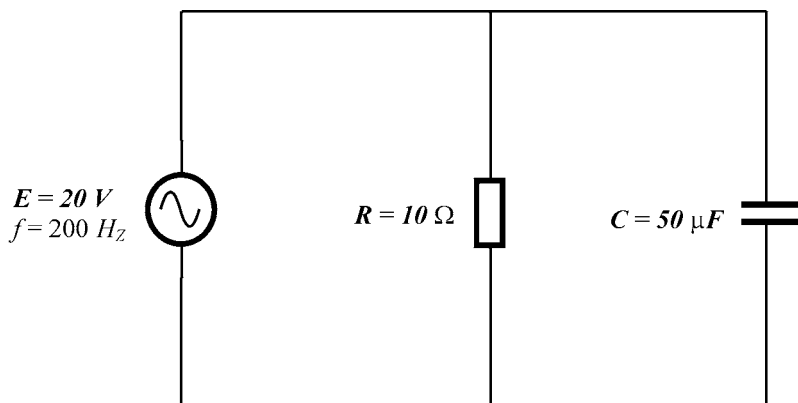
La intensidad total, la que sale del generador, y su desfase será pues:

$$\left. \begin{aligned} I_T &= \sqrt{2^2 + 1,25^2} = 2,36 \text{ A} \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{I_C}{I_R} = \tan^{-1} \frac{1,25}{2} = 32,1^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{I_T = 2,36 \text{ A} \angle 32,1^\circ}$$

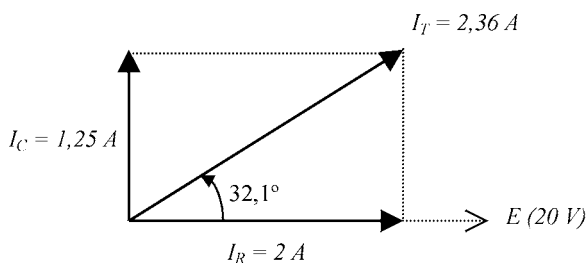
Expresión polar:

Su valor es de 2,36 A y circula adelantada 32,1° respecto a la tensión; obviamente, es un circuito capacitivo (fig.4.7b).

La impedancia, en su forma polar, es:



a)



b)

**Figura 4.7.** a) Circuito paralelo R-C práctico. b) Triángulo de intensidades (la tensión,  $E = 20\text{ V}$ , se toma como vector referencia).

$$Z = \frac{E \angle 0^\circ}{I_T \angle 32,1^\circ} = \frac{20}{2,36 \angle 32,1^\circ} = 8,5\ \Omega \angle -32,1^\circ$$

También se puede hallar su valor (módulo) y argumento (ángulo) conociendo sólo los valores de resistencia y reactancia, aplicando directamente las fórmulas:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{X_C^2} + \frac{1}{R^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{15,9^2} + \frac{1}{10^2}}} = 8,5\ \Omega$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{R}{X_C} = \tan^{-1} \frac{10}{15,9} = 32,1^\circ$$



En cuanto a las potencias, tenemos:

$$\text{Potencia reactiva } (Q) = E I_C = 20 \times 1,25 = 25 \text{ VAr}$$

$$\text{Potencia activa } (P) = E I_R = 20 \times 2 = 40 \text{ W}$$

$$\text{Potencia aparente } (S) = E I_T = 20 \times 2,36 = 47,2 \text{ VA}$$

$$\text{Factor de potencia} \Rightarrow \cos \varphi = \cos 32,1^\circ = 0,847$$

Y, que de otra forma, se obtienen los mismos resultados:

$$Q = S \sen \varphi = 47,2 \sen 32,1^\circ = 25 \text{ VAr}$$

$$P = S \cos \varphi = 47,2 \cos 32,1^\circ = 40 \text{ W}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{40^2 + 25^2} = 47,2 \text{ VA}$$

### 4.2.3 Ejemplo de aplicación de las admitancias

En el caso del presente circuito (fig.4.7a), el valor (módulo) de las admitancias es:

$$Y_R = \frac{1}{R} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ s}$$

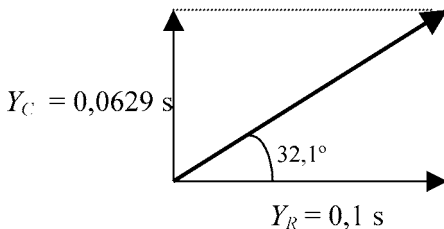
$$Y_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{15,9} \approx 0,0629 \text{ s}$$

Y su suma vectorial da una admitancia total (fig.4.8):

$$\vec{Y}_T = \vec{Y}_R + \vec{Y}_C \Rightarrow Y = \sqrt{Y_R^2 + Y_C^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,0629^2} = 0,118 \text{ s}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{Y_C}{Y_R} = \tan^{-1} \frac{0,0629}{0,1} = 32,1^\circ$$

$$Y_T = \sqrt{Y_R^2 + Y_C^2} = 0,118 \text{ s}$$



**Figura 4.8.** Triángulo de admitancias del circuito anterior.

Y del valor de la admitancia se obtiene el valor total de la impedancia:

$$Z_T = \frac{1}{Y_T \angle \varphi} = \frac{1}{0,118 \angle 32,1^\circ} = 8,5 \Omega \angle -32,1^\circ$$

Y del valor de las admitancias también se pueden hallar las intensidades:

$$I_R = E \cdot Y_R \angle 0^\circ = 20 \angle 0^\circ \times 0,1 \angle 0^\circ = 2 \text{ A } \angle 0^\circ$$

$$I_C = E \cdot Y_C \angle 90^\circ = 20 \angle 0^\circ \times 0,0629 \angle 90^\circ = 1,25 \text{ A } \angle 90^\circ$$

$$I_T = E Y_T \angle 32,1^\circ = 20 \angle 0^\circ \times 0,118 \angle 32,1^\circ = 2,36 \text{ A } \angle 32,1^\circ$$

Como se comprueba aparecen los mismos resultados que en los cálculos anteriores.

Aunque, como se puede ir comprendiendo ya, su interés práctico, así como el cálculo por complejos en general (*j*), toma especial importancia en los circuitos que empiezan a revestir una cierta complejidad. En casos sencillos, puede resultar más sencillo y simplificado el cálculo sin tener en cuenta estas cuestiones, que es la forma cómo se va presentando la materia en este libro.

### 4.3 CIRCUITO PARALELO R-L

En el circuito paralelo R-L (fig.4.9a) todo es similar al circuito R-C; basta sustituir el condensador por la bobina. Por ello, en este caso, no es necesario extender tanto su teoría.

La suma vectorial de las intensidades  $I_R$  y  $I_L$  es la intensidad que entrega el generador ( $I_T$ ); se obtiene pues el diagrama vectorial de la figura 4.9b. Y, en resumen tenemos que:

Valor de las intensidades:

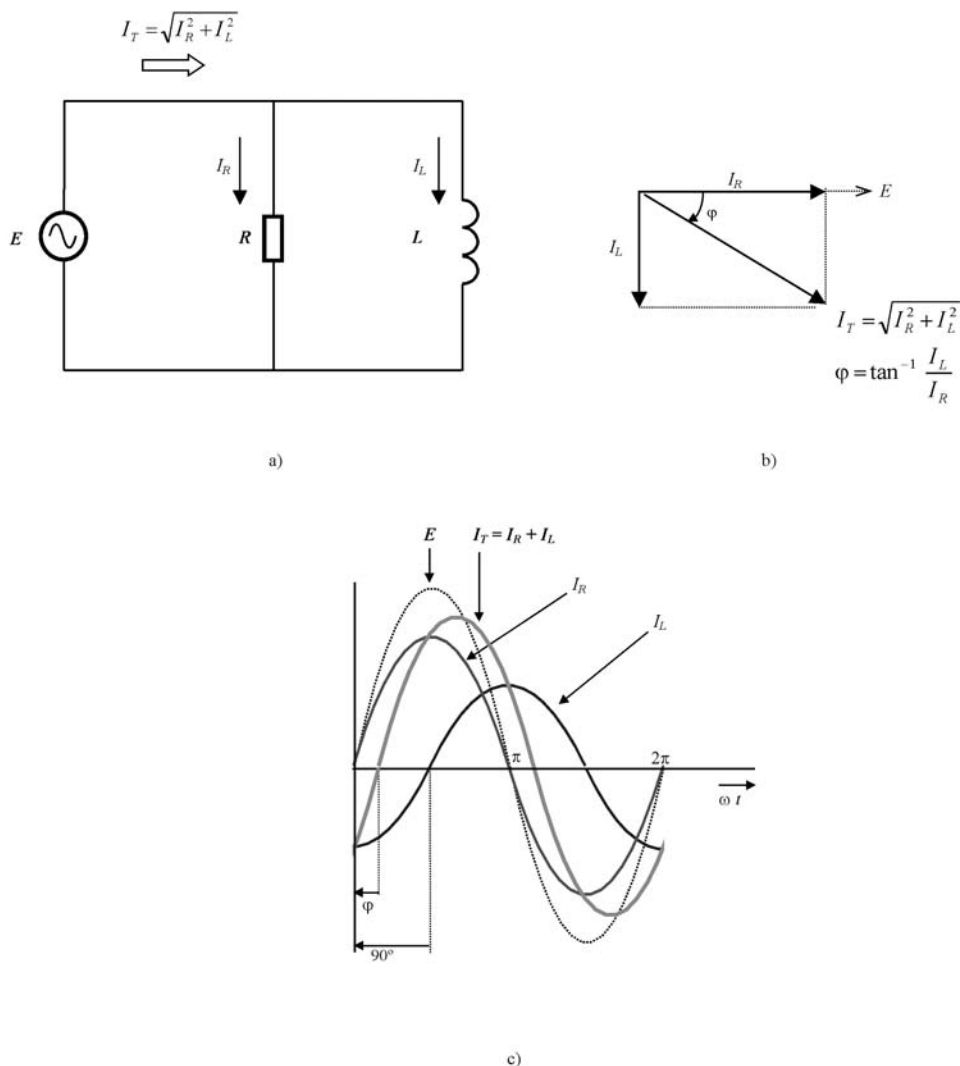
$$I_R = \frac{E}{R} \quad I_L = \frac{E}{X_L}$$

Intensidad total con su desfase:

$$\boxed{I_T = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{I_L}{I_R}}$$

Una representación de las ondas del circuito se muestra en la figura 4.9c. Como se puede observar, con respecto a la tensión del generador ( $E$ ), la onda de  $I_R$  va en fase y la onda  $I_L$  va retrasada  $90^\circ$ . Y la suma de dichas intensidades da lugar a una resultante,  $I_T$ , que es la intensidad total (la que sale del generador), cuyo valor es

$$I_T = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}, \text{ la cual circula con un desfase que viene dado por } \varphi = \tan^{-1} \frac{I_L}{I_R}.$$



**Figura 4.9.** a) Circuito paralelo R-L básico. b) Triángulo de intensidades. c) Diagrama de ondas.

Al igual que ocurre con el circuito R-C, aunque la inductancia hace aumentar la intensidad que sale del generador, sólo se produce un consumo de potencia en la resistencia (*potencia activa*)

En cuanto a la impedancia total del circuito, aplicando la ley de Ohm, se obtiene:

$$Z = \frac{E}{I_T} = \frac{E}{\sqrt{I_R^2 + I_L^2}}$$

Y como que  $I_R = \frac{E}{R}$   $I_L = \frac{E}{X_L}$ , haciendo el mismo desarrollo que el caso

del circuito R-C, se obtiene el valor de la impedancia en función únicamente de los valores de resistencia y de reactancia:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{R}{X_L}$$

Otra forma de hallar la impedancia total es basándonos en la típica fórmula de las resistencias en paralelo. Que, en este caso, se tiene que expresar teniendo en cuenta los desfases de los componentes. Así, en el caso que nos ocupa, aplicando la notación compleja, aparece:

$$Z_T = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L}} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L}$$

Expresada en su forma polar, es:

$$Z_T = \frac{R X_L \angle 90^\circ}{\sqrt{R^2 + X_L^2} \angle \tan^{-1} \frac{X_L}{R}}$$

Por ejemplo, para  $R = 10 \, \Omega$  y  $X_L = 16 \, \Omega$ , se obtiene:

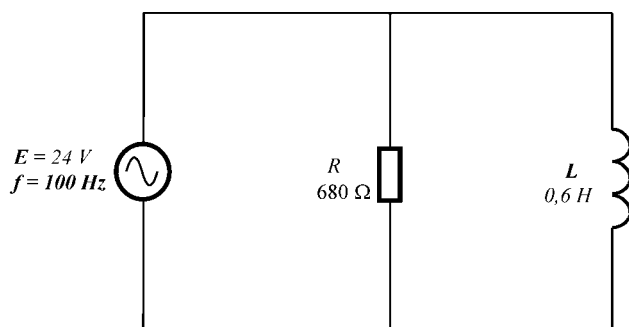
$$Z_T = \frac{10 \times 16 \angle 90^\circ}{\sqrt{10^2 + 16^2} \angle \tan^{-1} \frac{16}{10}} = \frac{160 \angle 90^\circ}{18,86 \angle 58^\circ} \approx 8,5 \, \Omega \angle 32^\circ$$

### 4.3.1 Ejemplo de ejercicio de cálculo de un circuito R-L

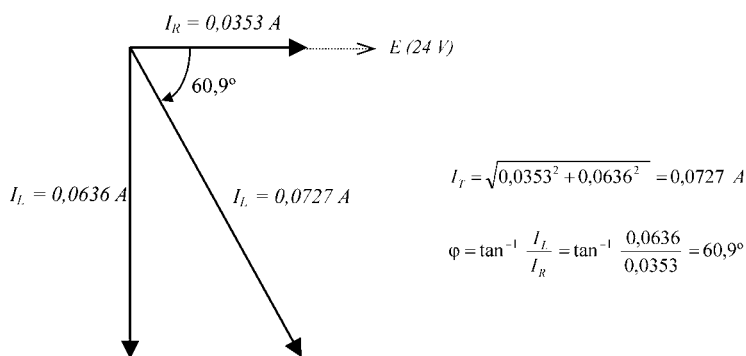
Dado el circuito paralelo R-L de la figura 4.10a, mediante un cálculo de forma simplificada (sin aplicar *admitancias* ni notación compleja) se obtienen los siguientes valores:

Intensidad en la resistencia:

$$I_R = \frac{E}{R} = \frac{24}{680} = 0,0353 \text{ A}$$



a)



b)

**Figura 4.10.** a) Circuito práctico paralelo R-L. b) Triángulo de intensidades.

Intensidad en la bobina:

$$X_L = 2\pi f L = 6,283 \times 100 \times 0,6 = 377 \Omega \Rightarrow I_L = \frac{E}{X_L} = \frac{24}{377} = 0,0636 \text{ A}$$

La intensidad total, la que sale del generador, y su desfase será pues:

$$I_T = \sqrt{0,0353^2 + 0,0636^2} = 0,0727 \text{ A}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{I_L}{I_R} = \tan^{-1} \frac{0,0636}{0,0353} = 60,9^\circ$$

La intensidad es  $0,0727 \text{ A} = 72,7 \text{ mA}$  y, al ser un circuito inductivo, circula retrasada ( $60,9^\circ$ ) respecto a la tensión (fig.4.10b).

El módulo de la impedancia es, pues:

$$Z = \frac{E}{I_T} = \frac{24}{0,0727} = 330 \Omega$$

En cuanto a las potencias, tenemos:

$$\text{Potencia reactiva } (Q) = E I_L = 24 \times 0,0636 = 1,52 \text{ VAr}$$

$$\text{Potencia activa } (P) = E I_R = 24 \times 0,0353 = 0,847 \text{ W}$$

$$\text{Potencia aparente } (S) = E I_T = 24 \times 0,0727 = 1,745 \text{ VA}$$

$$\text{Factor de potencia} \Rightarrow \cos \varphi = \cos 32,1^\circ = 0,486$$

## 4.4 CIRCUITOS PARALELO R-L-C

Son circuitos en los cuales aparecen las tres componentes; resistencia (R), inductancia (L) y capacidad (C). Es el caso del circuito de la figura 4.11a. Cada componente da lugar a una intensidad:

$$I_R = \frac{E}{R}, \quad I_C = \frac{E}{X_C}, \quad I_L = \frac{E}{X_L}$$

Y la suma vectorial de estas tres intensidades da la intensidad total (la que sale del generador), siendo su módulo:

$$I_T = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

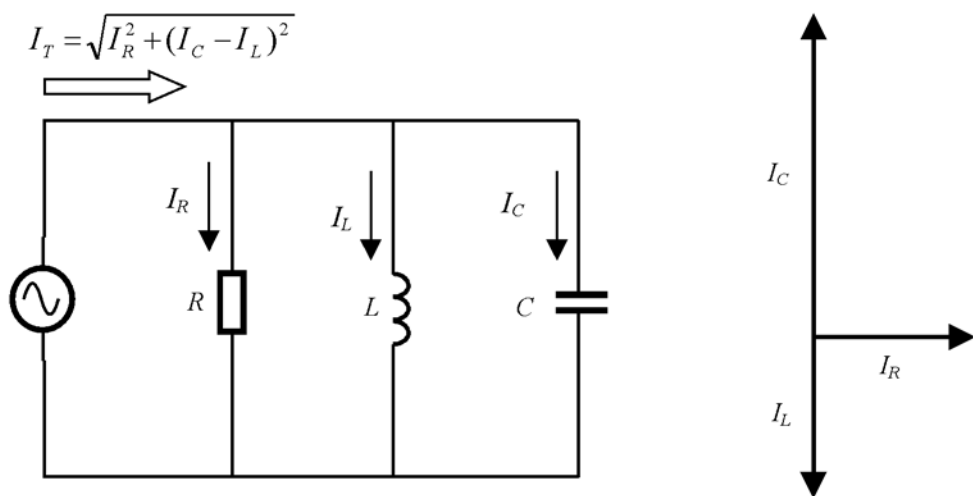
En este ejemplo se supone que la  $I_C$  es mayor que la  $I_L$ ; pero no importa si la resta se hace al revés, o sea:  $I_L - I_C$ ; el valor saldría negativo, pero el resultado sería el mismo, porque al elevar al cuadrado un número negativo su resultado es positivo.

Una representación gráfica de la suma de ondas se muestra en la figura 4.11b; la onda resultante ( $I_T$ ) es la suma de las ondas  $I_R$ ,  $I_C$  y  $I_L$ . Y, como ya es obvio, las ondas de intensidad del condensador y de la bobina van en contrafase (sus desfases son opuestos; cuando una onda sube la otra baja); esto en los diagramas vectoriales es lo que da lugar a una resta entre los vectores intensidad de la bobina y del condensador.

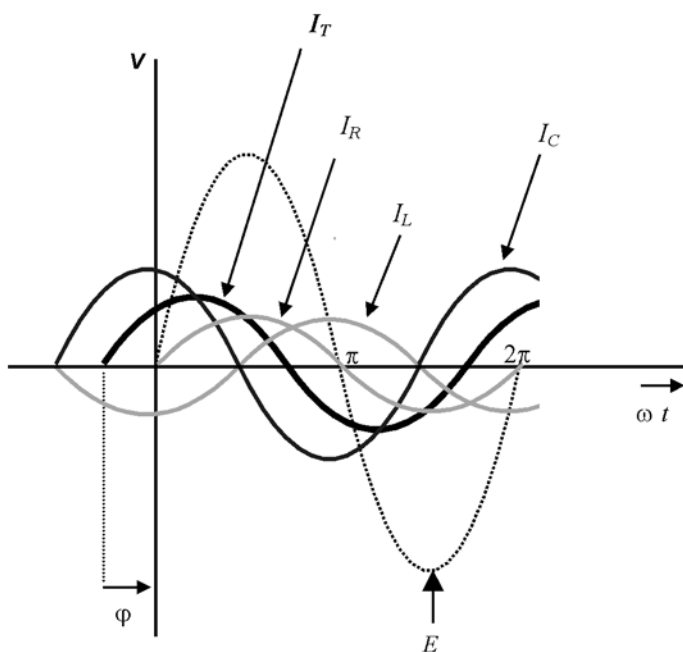
Dependiendo de los valores de los componentes, el circuito puede resultar de carácter inductivo, capacitivo e incluso resistivo, como vamos a ver.

### 4.4.1 Circuito de carácter capacitivo

Ateniéndonos a los valores de la capacidad y de la inductancia, se tiene lo siguiente: Si la intensidad del condensador es mayor que la de la bobina, predomina el efecto capacitivo y en consecuencia la intensidad total circula adelantada respecto a la tensión. Aparece así el diagrama vectorial de la figura 4.12a.



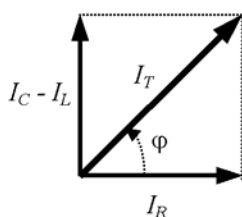
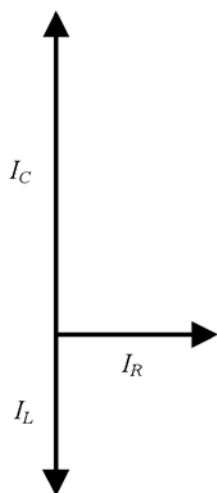
a)



b)

**Figura 4.11.** a) Circuito paralelo R-L-C básico y su diagrama de intensidades.  
b) Diagrama de ondas.

**Circuito capacitivo; la  $I_T$  va adelantada**

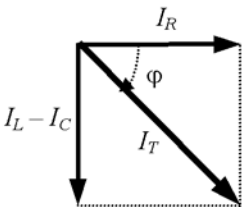
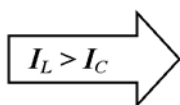
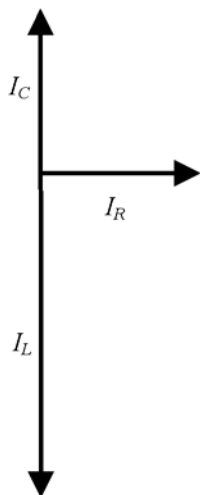


$$I_T = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{I_C - I_L}{I_R}$$

a)

**Circuito inductivo; la  $I_T$  va retrasada**



$$I_T = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{I_L - I_C}{I_R}$$

b)

**Figura 4.12.** a) El circuito paralelo R-L-C resulta de carácter capacitivo si la intensidad en el condensador es mayor que la de la bobina ( $I_C > I_L$ ). b) En caso contrario ( $I_L > I_C$ ), el circuito resulta de carácter inductivo.



## 4.4.2 Circuito de carácter inductivo

Y si la intensidad en la bobina es mayor que la del condensador, entonces predomina el efecto inductivo y la intensidad total circulará retrasada respecto a la tensión (fig.4.12b).

En cualquier caso, como es fácil comprender, si los valores de  $I_L$  y  $I_C$  son muy pequeños en comparación con la intensidad en la resistencia ( $I_R$ ), los desfases resultan muy pequeños y el circuito se puede considerar de tipo resistivo.

## 4.4.3 Impedancia

Al igual que en los circuitos anteriores, también podemos deducir aquí una fórmula que nos de el valor de la impedancia en función únicamente de los valores de R, L y C. Partiendo de la fórmula que nos da el valor (módulo) de la intensidad total:

$$I_T = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

$$\text{puesto que: } I_T = \frac{E}{Z}, \quad I_R = \frac{E}{R}, \quad I_C = \frac{E}{X_C}, \quad I_L = \frac{E}{X_L}$$

Se puede poner:

$$I_T = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \Rightarrow \frac{E}{Z} = \sqrt{\left(\frac{E}{R}\right)^2 + \left(\frac{E}{X_C} - \frac{E}{X_L}\right)^2}$$

Simplificando esta última fórmula se obtiene el valor (módulo) de la impedancia:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}}$$

Y en cuanto al desfase:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{I_C - I_L}{I_R} = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}$$

Y se pueden llegar a los mismo resultados hallando la admitancia total. Aplicando la notación compleja, podemos se puede poner:

$$\begin{aligned}\vec{Y}_T &= \frac{1}{R \angle 0^\circ} + \frac{1}{X_L \angle 90^\circ} + \frac{1}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{1}{R} \angle 0^\circ + \frac{1}{X_L} \angle -90^\circ + \frac{1}{X_C} \angle 90^\circ = \\ &= \frac{1}{R} - j \frac{1}{X_L} + j \frac{1}{X_C} = \frac{1}{R} + j \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)\end{aligned}$$

Y como el módulo de esta última expresión es:

$$Y_T = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \quad \text{y por otra parte : } Z_T = \frac{1}{Y_T}, \text{ se tiene:}$$

$$Z_T = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}$$

#### 4.4.4 Ejemplo de ejercicio de cálculo de un circuito R-L-C

Veamos un análisis del circuito práctico que se ilustra en la figura 4.1, que representado de una forma más simple equivale al circuito mostrado en la figura 4.13a. En este caso, aplicaremos la notación compleja. En primer lugar, pues, se tienen que tener en cuenta las siguientes cuestiones de representación que se muestran en la figura 4.14. Un valor, normalmente de reactancia, multiplicado por el operador  $j$  hace que dicho valor gire un ángulo de  $90^\circ$  en el sentido trigonométrico positivo (antihorario). Y si se multiplica por  $-j$ , entonces son  $90^\circ$  pero en sentido inverso.

Según los valores del circuito (fig. 4.13a), el valor de las reactancias es:

$$X_L = 2\pi f L \approx 6,283 \times 50 \times 14 \approx 4398 \, \Omega$$

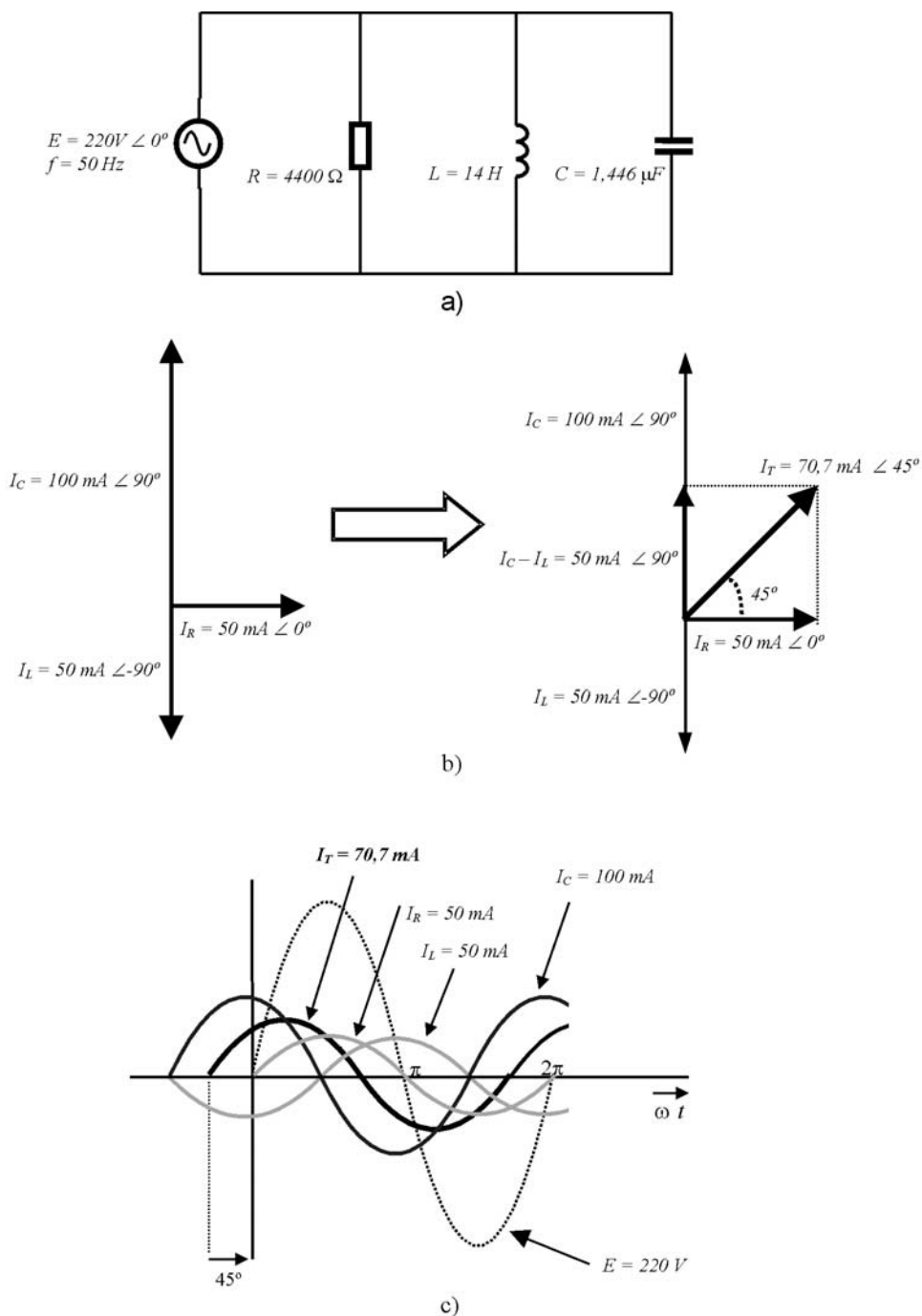
$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \approx \frac{1}{6,283 \times 50 \times 1,446 \cdot 10^{-6}} \approx 2201 \, \Omega$$

Y las intensidades serán pues:

$$I_R = \frac{E \angle 0^\circ}{R \angle 0^\circ} = \frac{220 \angle 0^\circ}{4400 \angle 0^\circ} = 0,05 \, A \angle 0^\circ = 0,05 + j0$$

$$I_L = \frac{E \angle 0^\circ}{X_L \angle 90^\circ} = \frac{220 \angle 0^\circ}{4398 \angle 90^\circ} = 0,05 \, A \angle -90^\circ = 0 - j0,05$$

$$I_C = \frac{E \angle 0^\circ}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{220 \angle 0^\circ}{2201 \angle -90^\circ} \approx 0,1 \, A \angle 90^\circ = 0 + j0,1$$



**Figura 4.13.** a) Circuito práctico paralelo R-L-C. b) Diagrama vectorial de intensidades y su resultante. c) Diagrama de ondas.

Y la suma de dichas intensidades, por *Kirchhoff*, será la intensidad total (fig.4.13b). Expresando dichas intensidades en la forma binómica, para poder sumarlas, tenemos:

$$\overline{I_T} = \overline{I_R} + \overline{I_L} + \overline{I_C} \Rightarrow I_T = (0,05 + j0) + (0 - j0,05) + (0 + j0,1) = 0,05 + j0,1 - j0,05 = 0,05 + j0,05$$

De hecho, toda esta expresión equivale a poner simplemente:

$$I_T = I_R + jI_C - jI_L = I_R + j(I_C - I_L)$$

Lo cual nos da:

Módulo:

$$I_T = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{0,05^2 + (0,05)^2} = 0,0707 \text{ A}$$

Argumento:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{I_C - I_L}{I_R} = \tan^{-1} \frac{0,05}{0,05} = 45^\circ$$

Siendo la impedancia total por tanto:

$$Z = \frac{220 \text{ V } \angle 0^\circ}{0,0707 \angle 45^\circ} = 3111,7 \ \Omega \angle -45^\circ$$

El diagrama de las ondas del circuito se puede analizar en la figura 4.13c.

Una representación práctica muy sugestiva del circuito se muestra en la figura 4.15.

## Desarrollo aplicando admitancias:

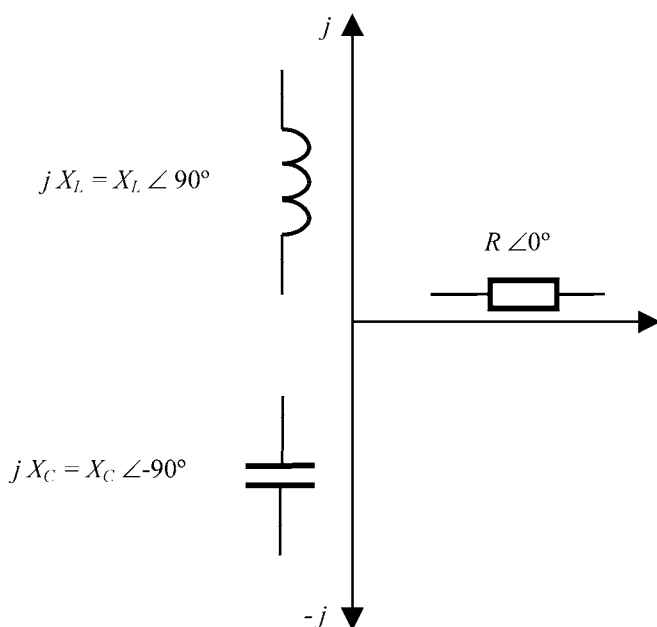
A continuación, a modo de ejemplo, se hace el desarrollo aplicando admitancias.

En primer lugar, se representa el circuito en cuestión sustituyendo cada componente por su correspondiente admitancia (fig.4.16a). Se obtienen los siguientes valores de admitancia:

$$Y_R = \frac{1}{R \angle 0^\circ} = \frac{1}{4400 \angle 0^\circ} = 227,2 \cdot 10^{-6} \text{ s } \angle 0^\circ = 227,2 \cdot 10^{-6} + j0$$

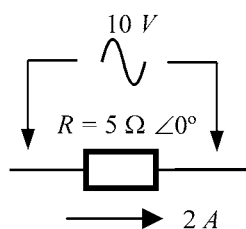
$$Y_L = \frac{1}{X_L \angle 90^\circ} = \frac{1}{4398 \angle 90^\circ} = 227,3 \cdot 10^{-6} \text{ s } \angle -90^\circ = 0 - j227,3 \cdot 10^{-6}$$

$$Y_C = \frac{1}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{1}{2201 \angle -90^\circ} = 454 \cdot 10^{-6} \text{ s } \angle 90^\circ = 0 + j454 \cdot 10^{-6}$$



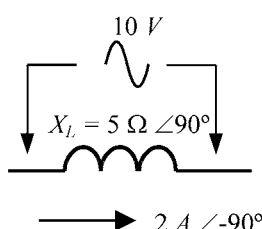
a)

## Ejemplos de cálculo:

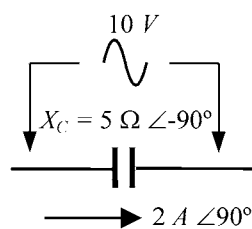


Intensidad en fase

$$I = \frac{10}{5 \angle 0^\circ} = 2\text{ A} \angle 0^\circ$$

Intensidad retrasada  $90^\circ$ 

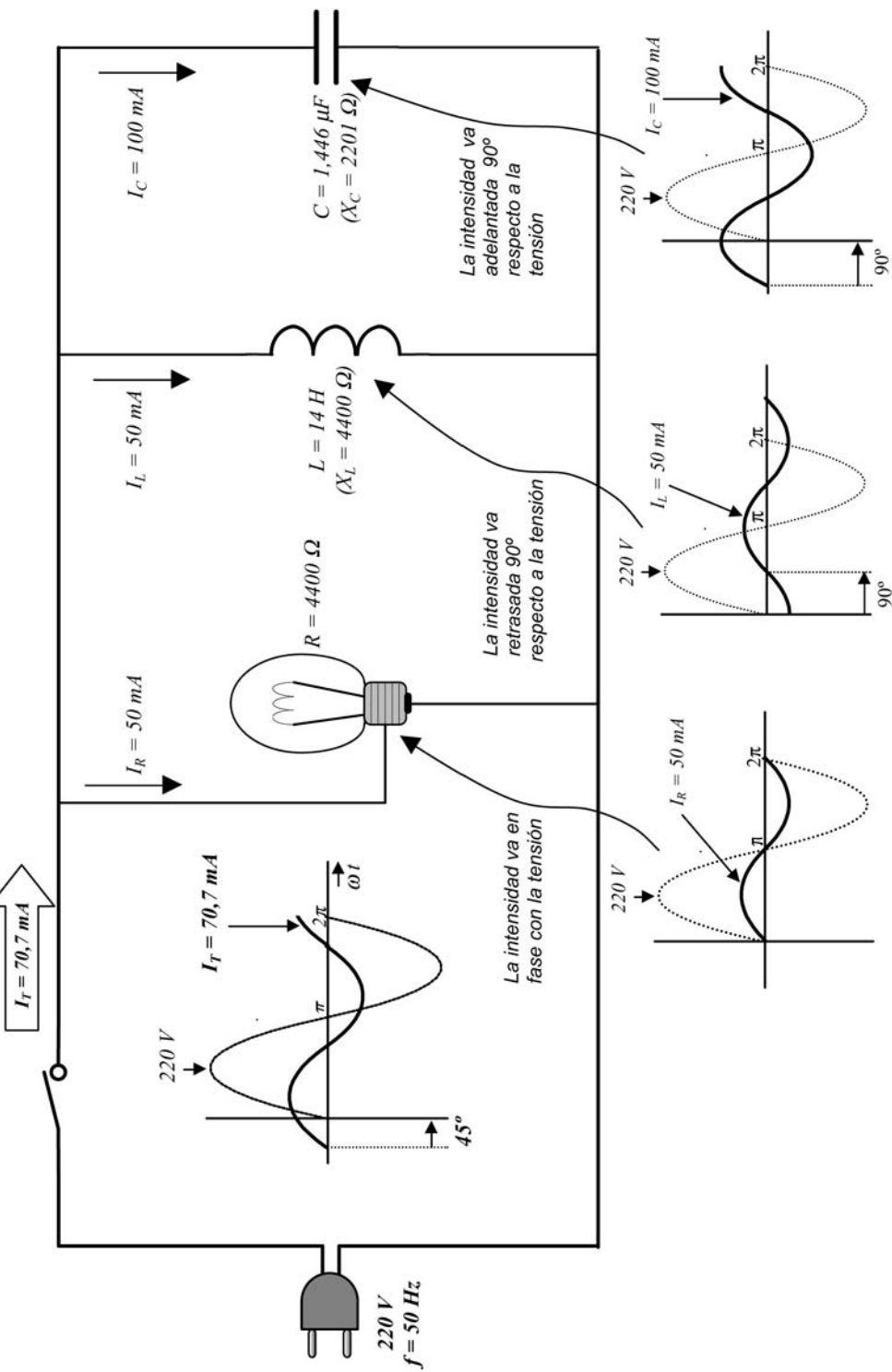
$$I = \frac{10}{5 \angle 90^\circ} = 2\text{ A} \angle -90^\circ$$

Intensidad adelantada  $90^\circ$ 

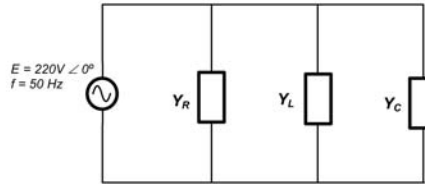
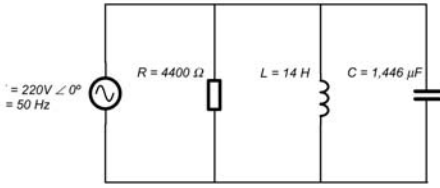
$$I = \frac{10}{5 \angle -90^\circ} = 2\text{ A} \angle 90^\circ$$

b)

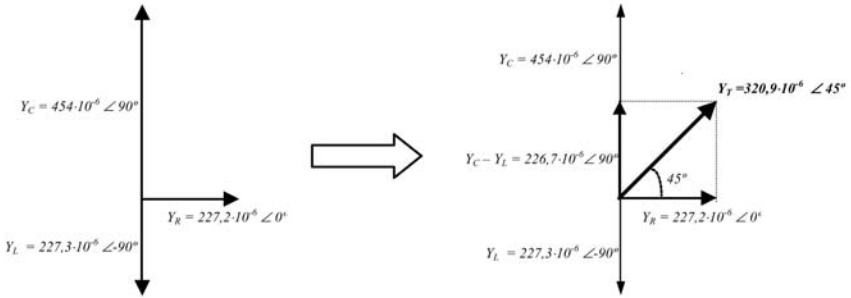
**Figura 4.14.** a) Representación de los componentes básicos ( $R, L, C$ ) según la notación compleja. b) Ejemplos prácticos de utilización de dicha notación.



**Figura 4.15.** Circuito práctico R-L-C con el resultado de los valores calculados y diagramas de ondas en cada componente. La intensidad, total, la que entrega la red al circuito es de 70,7 mA y circula adelantada 45° respecto a la tensión (220 V); el circuito es de



a)



b)

**Figura 4.16.** a) Circuito práctico paralelo R-L-C y su representación en admitancias. b) Diagrama vectorial de intensidades y su resultante.

El valor total de impedancia se puede obtener por:  $Z_T = \frac{1}{Y_T}$

Siendo:  $\vec{Y_T} = \vec{Y_R} + \vec{Y_L} + \vec{Y_C}$

Como la suma sólo se puede hacer mediante la notación binómica, aparece:

$$\vec{Y_T} = (227,2 \cdot 10^{-6} + j0) + (0 - j227,3 \cdot 10^{-6}) + (0 + j454 \cdot 10^{-6}) = 227,2 \cdot 10^{-6} + j226,7 \cdot 10^{-6}$$

Cuyo resultado da (fig.4.16b):

$$Y_T = \sqrt{(227,2 \cdot 10^{-6})^2 + (226,7 \cdot 10^{-6})^2} = 320,9 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{226,7 \cdot 10^{-6}}{227,2 \cdot 10^{-6}} = 45^\circ$$

La impedancia es por tanto:

$$\vec{Z_T} = \frac{1}{\vec{Y_T}} = \frac{1}{320,9 \cdot 10^{-6} \angle 45^\circ} = 3116,2 \Omega \angle -45^\circ$$

Las intensidades en los componentes se pueden obtener de la manera:

$$\overline{I_R} = E \cdot Y_R \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ \times 227,2 \cdot 10^{-6} \angle 0^\circ = 0,05 \text{ A } \angle 0^\circ$$

$$I_L = E \cdot Y_L \angle -90^\circ = 220 \angle 0^\circ \times 227,3 \cdot 10^{-6} \angle -90^\circ = 0,05 \text{ A } \angle -90^\circ$$

$$I_C = E \cdot Y_C \angle 90^\circ = 220 \angle 0^\circ \times 454 \cdot 10^{-6} \angle 90^\circ = 0,1 \text{ A } \angle 90^\circ$$

$$I_T = E \cdot Y_T \angle 45^\circ = 220 \angle 0^\circ \times 320,9 \cdot 10^{-6} \angle 45^\circ = 0,07 \text{ A } \angle 45^\circ$$

Como se comprueba, se obtienen los mismos resultados que antes. Esto es pues otra alternativa a utilizar en el cálculo de los circuitos.

## Potencias:

En cuanto a las potencias, tenemos:

Como el ángulo de desfase de la intensidad es de  $45^\circ$  (en adelante), el factor de potencia del circuito es:

$$\text{Factor de potencia} \Rightarrow \cos \varphi = \cos 45^\circ = 0,707$$

Y las potencias son:

$$S = E I = 220 \times 0,0707 = 15,55 \text{ VA}$$

$$P = S \cos \varphi = 15,55 \times \cos 45^\circ = 11 \text{ W}$$

$$Q = S \sin \varphi = 15,55 \times \sin 45^\circ = 11 \text{ VAR}$$

En este ejemplo aparecen los mismos valores de  $P$  y  $Q$  debido a que  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0,707$ .

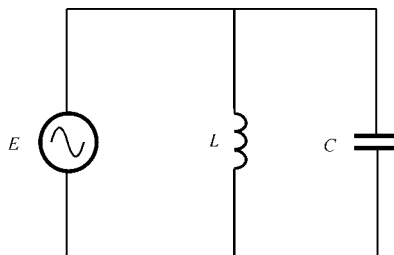
## 4.5 RESONANCIA EN EL CIRCUITO PARALELO

Al igual que pasa con los circuitos de tipo serie, en el montaje paralelo también aparece la característica denominada *resonancia*; que, en el supuesto de un circuito básico ideal (fig.4.17), se da a la frecuencia en la cual los valores de la reactancia inductiva y capacitiva resultan iguales ( $X_L = X_C$ ).

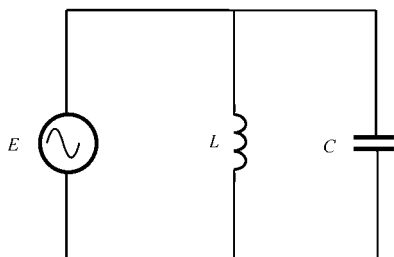
Aunque el concepto de la resonancia se puede ver de una forma más amplia y técnica, en general, se entiende que a dicha frecuencia la impedancia del circuito toma su valor máximo (puede llegar a infinito, en teoría).

Como se sabe, la  $X_C$  y la  $X_L$  varían de forma inversa en función de la frecuencia; a frecuencias bajas, la  $X_C$  tiene un valor alto y la  $X_L$  un valor bajo, y al contrario ocurre para frecuencias altas. Y a una cierta frecuencia ambas reactancias resul-





a)



En resonancia, al ser  $X_L = X_C$ , el valor de la impedancia resulta (en teoría) infinito:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{L C}} \Rightarrow Z = \frac{X_L X_C}{X_L - X_C} = \frac{X_L X_C}{0} = \infty$$

b)

**Figura 4.17.** a) Circuito paralelo básico L-C. b) A la frecuencia de resonancia su impedancia (teórica) es infinita.

tan del mismo valor; es la *frecuencia de resonancia*. A dicha frecuencia, el circuito no resulta ni inductivo ni capacitivo; se comporta de tipo resistivo, donde la resistencia puede estar determinada por el hilo de la bobina o bien por alguna otra resistencia que se encuentre en el circuito.

En resonancia, en teoría (considerando los componentes ideales), puesto que los vectores  $I_L$  y  $I_C$  tienen el mismo valor y son de carácter opuesto, su resultante es cero. La intensidad total (la que sale del generador) queda determinada pues únicamente por el valor de la resistencia total del circuito; por ello el circuito pasa así a ser totalmente resistivo, resultando así un desfase de  $0^\circ$  y en consecuencia un factor de potencia de 1 ( $\cos 0^\circ = 1$ ). Así, como se deduce, a dicha frecuencia la impedancia total resultará máxima, pudiendo alcanzar valores muy elevados (en teoría, hasta infinito), y por ello la intensidad que entrega el generador se reduce al mínimo (en teoría cero). No obstante, aunque por el circuito la intensidad sea nula, si existe una circulación de corriente entre el condensador y la bobina, debido a una transferencia de energía que se establece entre ambos. La carga almacenada en el condensador es transferida a la bobina, y ésta la devuelve (debido a la f.e.m.) de nuevo al condensador, y así sucesivamente; es una potencia reactiva. Este proceso se extingue cuando se corta la alimentación, debido a pérdidas de energía que se dan en el circuito (en especial, por la potencia perdida en la resistencia del hilo de la bobina). Un

circuito así también recibe el nombre de *circuito tanque* y, en general, *circuito oscilante*, y resulta de especial interés en los circuitos de comunicaciones por radio.

Puesto que para que en un circuito básico (fig.4.17a) se de el caso de la resonancia, los valores de  $X_L$  y  $X_C$  deben ser iguales, se tiene:  $X_L = X_C \Rightarrow 2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$

Y de ésta expresión se deduce la fórmula que nos da el valor de la frecuencia a la cual el circuito entra en resonancia:

$$2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow (2\pi f L)(2\pi f C) = 1 \Rightarrow 4\pi^2 f^2 L C = 1$$

Despejando el valor de la frecuencia,  $f$ , tenemos:

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2 L C} \Rightarrow f = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 L C}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi \sqrt{L C}}}$$

Es la misma fórmula que en el caso del circuito serie, ya que el principio es el mismo.

En cuanto a la impedancia, en el caso del circuito L-C teórico, suponiendo que no hay ninguna resistencia, aplicando la formula del circuito paralelo teniendo en cuenta la notación compleja, tenemos:

$$Z = \frac{(j X_L) (-j X_C)}{j X_L - j X_C} = \frac{-j^2 X_L X_C}{j(X_L - X_C)} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{X_L X_C}{X_L - X_C}}$$

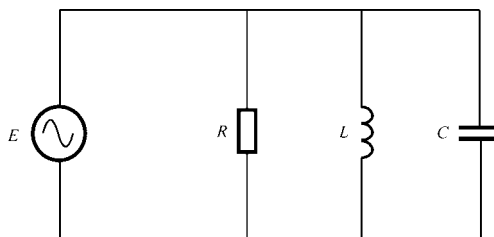
Queda claro, según la fórmula, que a la frecuencia de resonancia, puesto que las dos reactancias toman el mismo valor el denominador vale cero ( $X_L - X_C = 0$ ), y el valor de la  $Z$  se hace infinito (fig.4.17b). Pero esto es sólo en la teoría, en la práctica todas las bobinas tienen cierto valor resistivo debido al hilo con que se hacen y esto hace que su desfase teórico de  $90^\circ$  sea algo menor, por lo cual no se produce un efecto total de anulación con el efecto del condensador.

Si al circuito L-C básico se le pone una resistencia en paralelo, como ya se ha visto en apartados anteriores, la fórmula de la impedancia se puede expresar como:

$$Z_T = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}$$

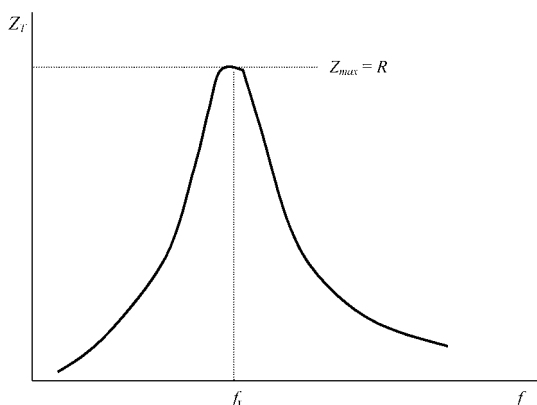
Y a la frecuencia de resonancia el valor de la impedancia es igual al de la resistencia (fig.4.18):

$$Z_T = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2}} = R$$



A la frecuencia de resonancia, el valor total de impedancia resulta máximo:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (X_C = X_L) \quad \Rightarrow \quad Z_T = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2}} = R$$



**Figura 4.18.** Impedancia del circuito paralelo R-L-C.

Y si no hubiera resistencia en paralelo, suponiendo los componentes ideales, la impedancia resulta en teoría infinito:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (X_C = X_L) \quad \Rightarrow \quad Z_T = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Por otra parte, obsérvese que esta fórmula de la Z se puede expresar también de la forma que se ha puesto al principio:

$$Z_T = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}} = \frac{1}{\frac{X_L - X_C}{X_C X_L}} = \frac{X_C X_L}{X_L - X_C}$$

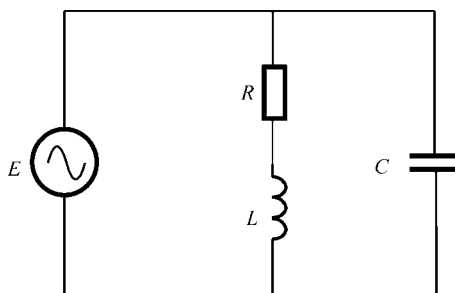
En el caso más práctico y real, que es considerar la resistencia del hilo de la bobina (fig.4.19), según el siguiente desarrollo se obtiene:

$$Z_T = \frac{(R + j\omega L) \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{(R + j\omega L) + \left(j\frac{-1}{\omega C}\right)} = \frac{(R + jX_L) (-jX_C)}{(R + jX_L) + (-jX_C)} = \frac{-jX_C R - j^2 X_L X_C}{(R + jX_L) - jX_C} =$$

$$= \frac{-jX_C R + X_L X_C}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{X_C (-jR + X_L)}{R + j(X_L - X_C)} \Rightarrow Z_T = \frac{X_C \sqrt{R^2 + X_L^2}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

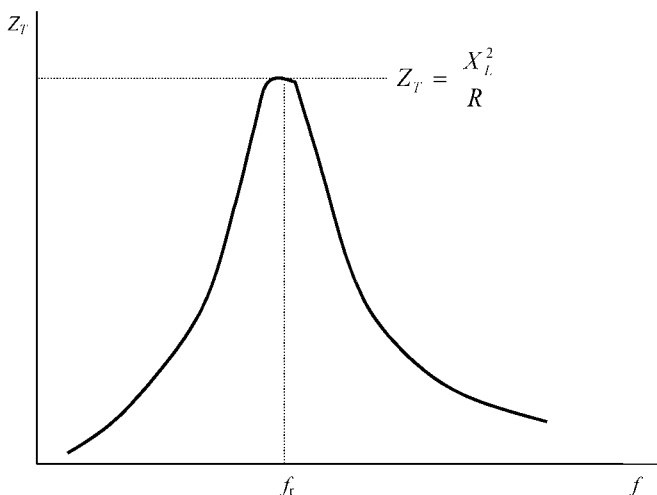
Y a la frecuencia de resonancia, al ser  $X_L - X_C = 0$ , se tiene:

$$Z_T = \frac{X_C \sqrt{R^2 + X_L^2}}{R}$$



En resonancia la impedancia es:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{L C}} \Rightarrow Z_T \approx \frac{X_L^2}{R}$$



**Figura 4.19.** Impedancia del circuito paralelo L-C considerando la resistencia ohmica de la bobina.

que, puesto que  $X_C = X_L$ , se puede poner en la fórmula una sola de las reacciones; o sea, que se puede expresar también por:

$$Z_T = \frac{X_L \sqrt{R^2 + X_L^2}}{R} = \frac{X_L}{R} \sqrt{X_L^2 + R}$$

Y, para simplificar, si despreciamos el valor de R en el radical  $\sqrt{X_L^2 + R}$ , dado que normalmente R siempre será mucho más bajo que  $X_L^2$ , se obtiene finalmente (fig.4.19):

$$Z_T = \frac{X_L}{R} \sqrt{X_L^2 + R} = \frac{X_L}{R} \sqrt{X_L^2 + 0} = \frac{X_L}{R} X_L \Rightarrow \boxed{Z_T = \frac{X_L^2}{R}}$$

Mediante otra forma de desarrollo se obtiene también otra fórmula simplificada, muy útil en la práctica, que nos da un valor muy aproximado de la impedancia:  $Z_T \approx \frac{L}{C R}$

#### Ejemplo 4.1:

Si en el circuito de la figura 4.19 los valores son:  $L = 20 \text{ mH}$ ,  $C = 8,2 \text{ nF}$  y  $R = 2 \Omega$ , tendremos:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{L C}} = \frac{1}{6,28 \times \sqrt{20 \cdot 10^{-3} \times 8,2 \cdot 10^{-9}}} = 12.434,2 \text{ Hz} \approx 12,4 \text{ kHz}$$

Como que:  $X_L = 2\pi f L = 6,28 \times 12.434,2 \times 0,02 = 1561,73 \Omega$ , la impedancia a dicha frecuencia será:

$$Z_T = \frac{X_L^2}{R} = \frac{1561,73^2}{2} = 1.219.500,3 \Omega \approx 1219,5 \text{ k}\Omega$$

que también se puede obtener, de forma muy aproximada, por:

$$Z_T \approx \frac{L}{C R} = \frac{0,02}{8,2 \cdot 10^{-9} \times 2} = 1.219.512,19 \approx 1219,5 \text{ k}\Omega$$

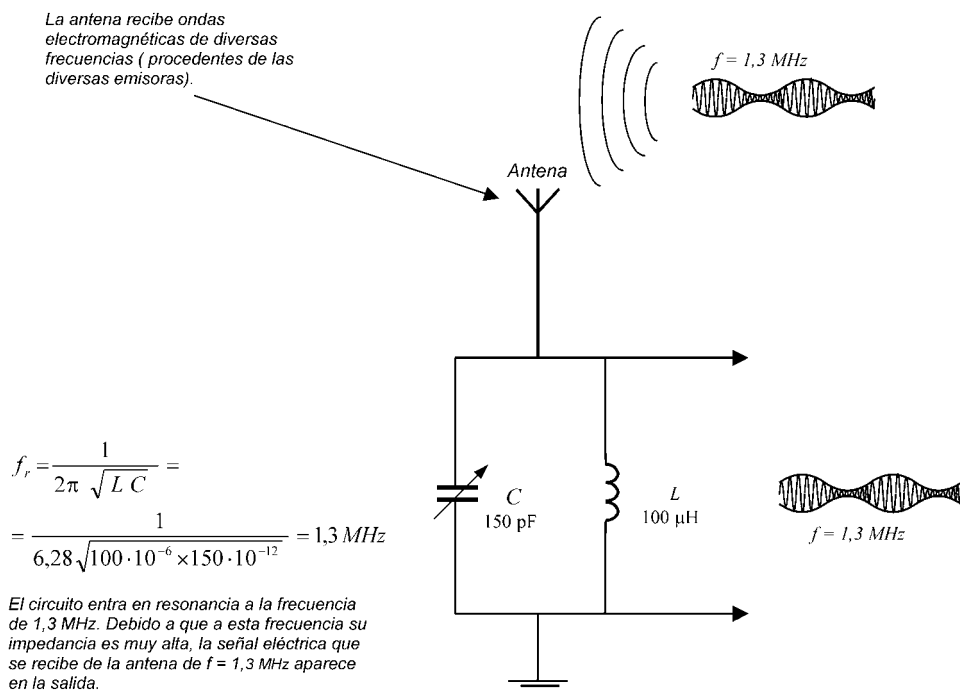
Una observación a tener en cuenta es que si, en serie con la bobina o con el condensador, existen valores de resistencia considerables, bien porque en el circuito se ponen resistencias o debido al mismo hilo de la bobina, los resultados pueden diferir más o menos de los que nos dan las fórmulas básicas. En circuitos así se requiere un estudio más avanzado, y aparecen fórmulas que presentan diferencias a las básicas. Aunque a un nivel básico, totalmente aceptable en la práctica, el concepto de resonancia se asocia con  $X_L = X_C$ , en estudios más avanzados se considera que se da el efecto de resonancia cuando la susceptancia total del circuito es nula; y si

se analizan los circuitos en base a dicho concepto, en las fórmulas aparecen también los efectos resistivos que pueden haber en serie con la bobina y con el condensador.

Una aplicación de muy elevada importancia del efecto de resonancia se da en los aparatos de comunicaciones de radio y TV. Por ejemplo, en ello se basa el circuito de sintonización de las emisoras en los aparatos de radio. Las ondas electromagnéticas que se reciben por la antena son aplicadas a un circuito L-C de tipo paralelo, de manera que sólo la frecuencia de la emisora que coincida con la frecuencia de resonancia del circuito es obtenida para que pueda pasar a los demás circuitos (para su amplificación, demodulación, etc.). En la figura 4.20 se muestra una ilustración sobre esta muy importante aplicación. Con los valores que se indican, resulta una frecuencia de resonancia de 1,3 MHz; si la antena capta una emisora que emita a dicha frecuencia, dicha señal se dispondrá a la salida y, después de ser debidamente tratada, podrá escucharse mediante el altavoz.

Puesto que el circuito presenta una impedancia baja a las frecuencias que estén por debajo y por encima de la de resonancia, las señales captadas por la antena que no coincidan con la frecuencia de resonancia quedarán muy atenuadas (se podría decir que son derivadas a masa) y no se dispondrán a la salida.

Para poder captar las diferentes frecuencias de las emisoras se hace que el condensador sea de tipo variable; de hecho, cuando actuamos sobre el mando de sintonía



**Figura 4.20.** Ejemplo de aplicación práctica del circuito paralelo L-C. Es un circuito resonante, cuya base se encuentra en las etapas de sintonización de emisoras en los aparatos de comunicaciones por ondas electromagnéticas.

nización de las emisoras lo que hacemos es precisamente variar dicha capacidad, lo cual hace que varíe la frecuencia de resonancia y se puedan recibir así las diferentes emisoras. La variación de capacidad, en su forma clásica, se basa en un procedimiento mecánico que hace que, mediante un mando de eje, se muevan unas plaquitas; es lo que se conoce por condensador variable *tandem*. Más modernamente, dicha capacidad se varía utilizando unos diodos denominados *varicap*; variando su tensión (inversa) se varía la capacidad. De esta manera se hace un control de la frecuencia de resonancia por medio de una tensión, lo cual, entre otras mejoras, ha permitido los controles de sintonización automáticos, memorización de emisoras, etc.

De hecho, en el ambiente normal se encuentra una gran diversidad de frecuencias, procedentes de todo tipo emisores (radio, TV, móviles, etc.), que las antenas pueden llegar a captar y entregar así un nivel de señal eléctrica (muy débil,  $\mu\text{V}$ ) hacia los circuitos de los receptores; la función de la antena es transformar las ondas electromagnéticas captadas en una señal eléctrica para pueda ser tratada por los circuitos electrónicos de los receptores.

## 4.6 FACTOR Q

En principio hay que saber que el desfase de  $90^\circ$  que tanto aparece en los textos sobre la bobina sólo toma dicho valor si no tiene ninguna resistencia ohmica, lo cual sólo se cumple en la teoría, ya que todas tienen un cierto valor resistivo debido al hilo con que están formadas. El efecto de la resistencia del hilo se comporta como una resistencia en serie y hace que dicho desfase sea menor (cuanto mayor sea la resistencia menor es el desfase). Así, en la práctica, las bobinas se pueden considerar como un circuito serie R-L, en el cual, como ya se sabe, el desfase viene dado

por:  $\varphi = \tan^{-1} \frac{X_L}{R}$ . Y esta fórmula nos dice que el desfase de los  $90^\circ$  sólo se cumple si no tiene ninguna resistencia ( $R = 0 \Omega$ ), bobina ideal. Y como las bobinas prácticas siempre tienen un más o menos valor de resistencia, el desfase práctico siempre resulta menor de  $90^\circ$ . Y esto puede hacer que, en los montajes prácticos con bobinas y condensadores, los resultados prácticos difieran algo de los resultados teóricos. Un caso muy claro se da en los circuitos paralelo a la frecuencia de resonancia; al ser el desfase de la bobina algo menor de  $90^\circ$ , no se puede dar el caso de anulación total de la intensidad ( $I_T = 0$ ), y por ello la impedancia no toma un valor infinito en resonancia.

Se puede decir pues que la bobina es de mayor calidad cuanto mayor es su reactancia con relación a su resistencia ohmica, a una frecuencia considerada. Este concepto se denomina *factor de calidad* de la bobina y se expresa por:

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{2\pi f L}{R}$$

Debido a que  $X_L$  aumenta con la frecuencia, el factor Q también lo hace de la misma manera. Por ello el Q se considera a ciertas frecuencias, que son las de trabajo. Siendo un caso de especial relevancia el de la resonancia. Y, aunque dicho sea

de paso, existe un fenómeno que se da a altas frecuencias denominado *efecto pelicular*, que hace que, a frecuencias elevadas, la resistencia puramente ohmica de los conductores aumente con la frecuencia (debido a que la señal tiende a circular solo por la superficie del conductor). Es por ello que a partir de ciertas frecuencias elevadas el factor Q deja de aumentar, debido a que el aumento de  $X_L$  se ve compensado por el aumento de R. Los fabricantes proporcionan datos sobre el Q de las bobinas, y los dan para ciertas frecuencias.

En la práctica se considera que para que se den las condiciones de resonancia en el circuito paralelo a la frecuencia  $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ , el factor Q debe ser mayor de 10, lo cual se satisface en la mayoría de situaciones prácticas.

En base al valor Q, podemos expresar también algunas fórmulas. Una muy utilizada es la de impedancia en el circuito paralelo, cuando se considera la resistencia en serie con la bobina (fig.3.19). Según se explico anteriormente, la fórmula de la impedancia en dicho circuito es:  $Z_T = \frac{X_L^2}{R}$ . Pues bien, si en dicha expresión aplicamos la triquiñuela de multiplicar numerador y denominador por R, se obtiene:

$$Z_T = \frac{X_L^2}{R} = \frac{X_L^2 R}{R \cdot R} = \frac{X_L^2}{R^2} R = \left( \frac{X_L}{R} \right)^2 R$$

Y como que  $Q = \frac{X_L}{R}$ , se obtiene así:

$$\boxed{Z_T = Q^2 R}$$

Es una fórmula sencilla, bastante popular, que nos da el valor de la impedancia en los circuitos paralelos de tipo práctico, como el de la figura 4.19.

#### Ejemplo 4.2:

Con los valores del ejemplo que se vio anteriormente ( $L = 20 \text{ mH}$ ,  $C = 8,2 \text{ nF}$  y  $R = 2 \text{ } \Omega$ ), según esta nueva fórmula tendremos:

Puesto que a la frecuencia de resonancia ( $f = 12.434,2 \text{ Hz}$ ) la reactancia es:

$$X_L = 2\pi f L = 6,28 \times 12.434,2 \times 0,02 = 1561,73 \text{ } \Omega$$

el factor Q valdrá:

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{1561,73}{2} = 780,865$$

Siendo así la impedancia:

$$Z_T = Q^2 R = 780,865^2 \times 2 \approx 1.219.500,3 \text{ } \Omega \approx 1219,5 \text{ k}\Omega$$



De hecho, el concepto de factor de calidad ( $Q$ ) es muy amplio, siendo utilizado también como indicativo global de calidad en circuitos basados en circuitos resonantes.

## 4.7 COMPENSACIÓN DE LA POTENCIA REACTIVA

Como se sabe, en general, en los circuitos de corriente alterna donde hallan componentes reactivos como son los condensadores y las bobinas aparece el concepto de potencia reactiva. Y ello da lugar a una circulación de intensidad reactiva por las líneas cuya energía no es aprovechada por la carga (receptor), que es debida al efecto reactivo (carga-descarga) de los componentes reactivos. Debido a ello puede ser necesario sobredimensionar las líneas, ya que al haber potencia reactiva la intensidad total que tiene que circular por las líneas es mayor a la que circularía de no haber. En la práctica, y especialmente en la industria, la potencia reactiva es originada por la maquinaria que lleva motores de alterna; por ello, puesto que dichos motores se basan en bobinados, la intensidad por las líneas circula retrasada un cierto ángulo respecto a la tensión de la red. A esto se suele denominar *potencia reactiva en retraso*, y es el caso real ya que en la industria hay mucha maquinaria con motores de alterna. De hecho, este caso también se da en el ambiente doméstico, aunque en mucho menor grado, debido a los motores del frigorífico y lavadora, fluorescentes, etc., aunque el efecto más notable es del motor del ascensor (debido a su potencia). Los condensadores también dan lugar a potencia reactiva, pero como normalmente no hay aparatos basados en condensadores tampoco aparece una *potencia reactiva en adelanto*. Lo que si ocurre es que, debido al carácter opuesto que tiene la potencia reactiva de los condensadores con respecto a la de las bobinas, mediante la debida conexión de condensadores se logra la compensación de la potencia reactiva en retraso que producen los aparatos eléctricos basados en bobinas.

Pues bien, debido a que la potencia reactiva obliga a un mayor transporte de energía, las compañías de suministro de electricidad han establecido unas normas, con el fin de incentivar su corrección, que pueden proporcionar una penalización o bonificación sobre el coste de la factura en función del factor de potencia ( $\cos \varphi$ ); si el factor de potencia está por debajo de 0,9 se aumenta el coste de la factura aplicando un coeficiente de recargo ( $Kr$ ) que puede llegar al 47% ( $\cos \varphi < 0,5$ ). En cambio, si el consumidor logra mejorar el factor de potencia por encima de 0,9 ( $\cos \varphi > 0,9$ ) se aplica una bonificación que puede llegar al 4% ( $\cos \varphi = 1$ ). Por medio de los contadores de energía, la compañía sabe la potencia activa consumida ( $kWh$ ) y también la magnitud de potencia reactiva ( $kVarh$ ). Y de estos datos hallan el factor de potencia:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

**Ejemplo 4.3:**

Si en el recibo de factura aparecen una potencia activa  $P = 3540 \text{ kWh}$  y una reactiva de  $Q = 3950 \text{ kVarh}$ , el factor de potencia de la instalación es:

$$\cos \varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{3540}{\sqrt{3540^2 + 3950^2}} = 0,667$$

En este caso, se le aplicaría un coeficiente de recargo (alrededor de un 17%) sobre el coste total de la potencia consumida.

Como ya se sabe, la potencia total de un sistema eléctrico se puede representar mediante el triángulo de potencias, del cual se obtiene el denominado factor de potencia ( $\cos \varphi$ ) que viene a indicar el “rendimiento eléctrico” del sistema.

$$\cos \varphi = \frac{\text{Potencia activa}}{\text{Potencia aparente}} = \frac{P}{S}$$

$\cos \varphi = 0 \Rightarrow$  El desfase es  $\varphi = 90^\circ$ . No hay potencia activa; toda la potencia que entrega la red es tipo reactiva.

$\cos \varphi = 1 \Rightarrow$  El desfase es  $\varphi = 0^\circ$ . No hay potencia reactiva; toda la potencia que entrega la red es de tipo activa.

Pues entre estos dos casos teóricos se encuentran todos los casos prácticos.

Por ejemplo, un caso real puede ser  $\cos \varphi = 0,9$  (la intensidad circula con un desfase de  $\cos^{-1} 0,9 = 25,8^\circ$ ). Así, si la tensión de red es de  $220 \text{ V}$  y circula una intensidad total de  $10 \text{ A}$ , tenemos:

$$\text{Potencia aparente } (S) = V I = 220 \times 10 = 2200 \text{ VA}$$

$$\text{Potencia activa } (P) = V I \cos \varphi = 220 \times 10 \times 0,9 = 1980 \text{ W}$$

$$\text{Potencia reactiva } (Q) = V I \sin \varphi = 220 \times 10 \times \sin 25,8^\circ = 957,5 \text{ Var}$$

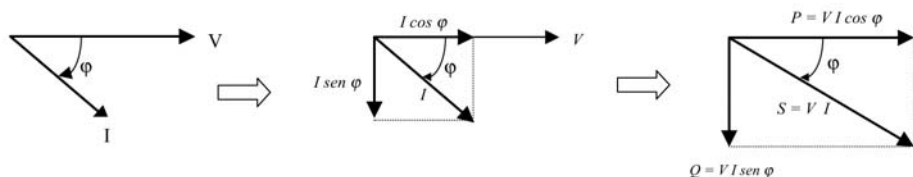
Por simple observación del  $\cos \varphi$  se puede intuir en que medida la potencia total aparente ( $S = V I$ ) es aprovechada en potencia activa, o sea, en forma de trabajo.

Por otra parte, también aparece la cuestión del sentido de la potencia reactiva. Normalmente se considera lo siguiente:

- **Intensidad retrasada** (circuitos de carácter inductivo)  $\Rightarrow$  **Potencia reactiva en retraso.**
- **Intensidad adelantada** (circuitos de carácter capacitivo)  $\Rightarrow$  **Potencia reactiva en adelanto.**

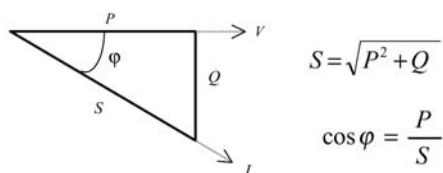
Y como se ha visto en el análisis de los circuitos serie y paralelo, los diagramas de potencia pueden salirnos con diferente posición. Así, para generalizar, considerando la tensión de la red como vector de referencia nos aparecen los diagramas de las figuras 4.21 y 4.22. Y éstos son los que se deben tomar como base independientemente del tipo de circuito. Los circuitos se tienen que ver como una caja cerrada

Intensidad retrasada; circuito inductivo



a)

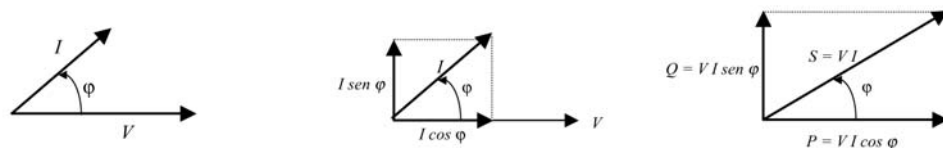
Potencia reactiva en retraso; circuito inductivo



b)

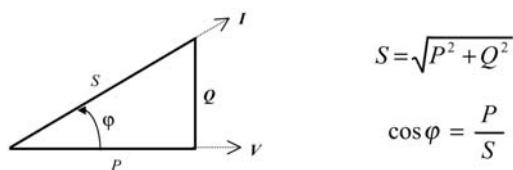
**Figura 4.21.** a) Diagrama vectorial tensión-intensidad en un circuito inductivo, considerando la tensión (del generador) como referencia, y descomposición de la intensidad en sus componentes activa y reactiva para hallar las potencias. b) Triángulo de potencias obtenido.

Intensidad adelantada; circuito capacitivo



a)

Potencia reactiva en adelante; circuito capacitivo



b)

**Figura 4.22.** a) Diagrama vectorial tensión-intensidad en un circuito capacitivo, considerando la tensión (del generador) como referencia, a partir del cual se deduce el triángulo de potencias (b).

(donde hay componentes R-L-C), cuya intensidad de alimentación (que reciben del generador – la red) puede ir retrasada o adelantada según el circuito sea predominantemente inductivo o capacitivo. Y, en la práctica, los circuitos con que normalmente nos encontramos son de tipo inductivo (debido a los motores de alterna, transformadores, etc.).

### 4.7.1 Cálculo de los condensadores de compensación

Compensar la potencia reactiva significa mejorar el factor de potencia, o sea, lograr que  $\cos \varphi$  se aproxime lo máximo a 1. Y ello se basa en conectar un condensador en paralelo con la carga inductiva, de manera que absorba la energía reactiva de la carga. De esta forma, el trasiego de energía reactiva se produce entre la carga y el condensador, y no circula hacia la red eléctrica (fig.4.23 y 4.24); de esta manera por las líneas de la red idealmente sólo circularía la intensidad activa. De hecho, esto es formar un circuito resonante, siendo C la capacidad del condensador y L la inductancia de la carga inductiva (bobinados del motor, por ejemplo). Así, se puede decir que la compensación de reactiva se basa en una aplicación industrial del circuito resonante. Para lograr esto el valor de la capacidad debe ser tal que desarrolle una potencia reactiva (en adelanto) igual a la potencia reactiva de la instalación (en retraso). Así, pues, es cuestión de calcular un condensador con la capacidad adecuada, y que pueda soportar la energía reactiva necesaria.

#### Ejemplo 4.4:

Supongamos que tenemos una instalación eléctrica con un motor conectado a 220 V y que consume una potencia de 1,2 kW, siendo  $\cos \varphi = 0,8$ . Si queremos mejorar el factor de potencia a  $\cos \varphi = 1$ , la capacidad del condensador deberá ser:

Primeramente se tiene que hallar la potencia reactiva:

$$\cos^{-1} 0,8 = 36,8^\circ \Rightarrow Q = P \operatorname{tg} \varphi = 1200 \times \operatorname{tg} 36,8^\circ = 897,7 \text{ VAR}$$

Y esta es la potencia reactiva que deberá desarrollar el condensador. Por tanto, su  $X_L$  deberá ser:

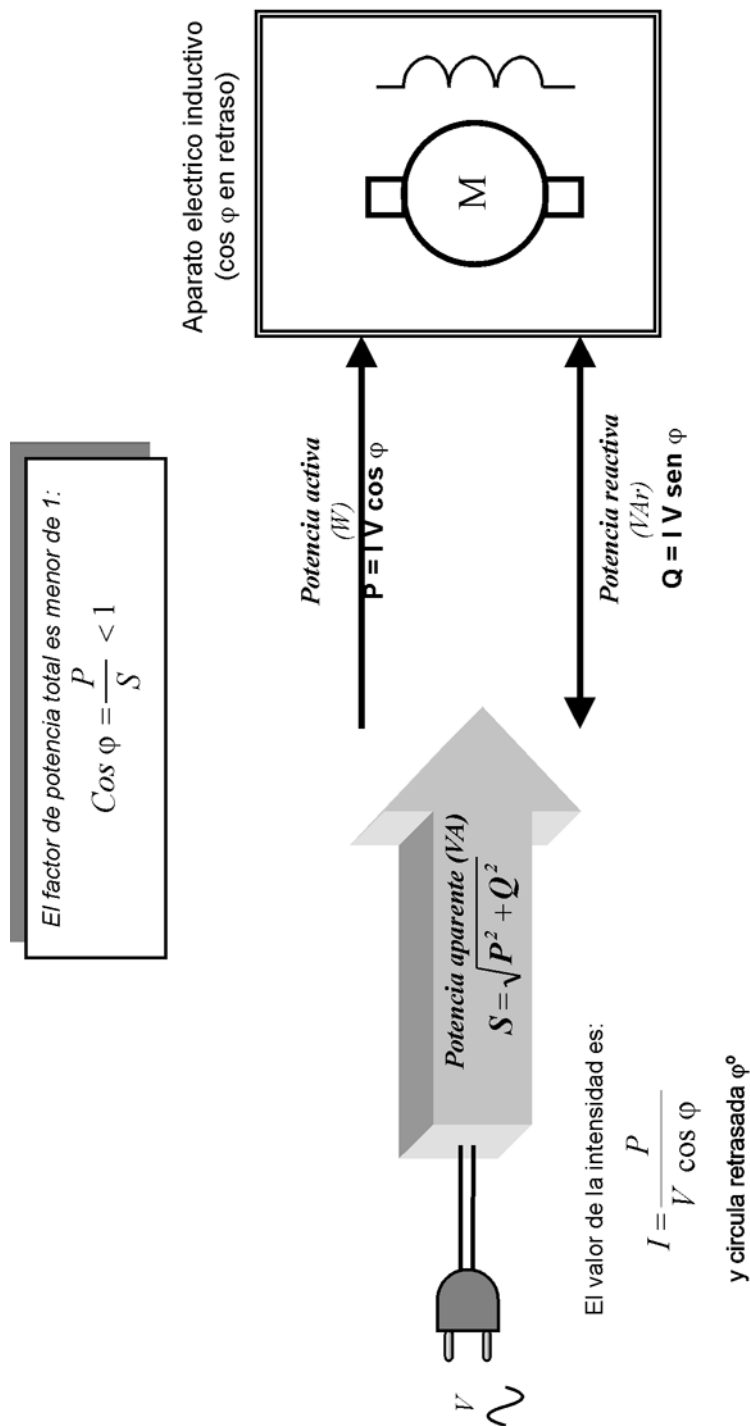
$$Q = \frac{V^2}{X_C} \Rightarrow X_C = \frac{V^2}{Q} = \frac{220^2}{897,7} = 53,9 \Omega$$

El valor de la capacidad que se obtiene así es:

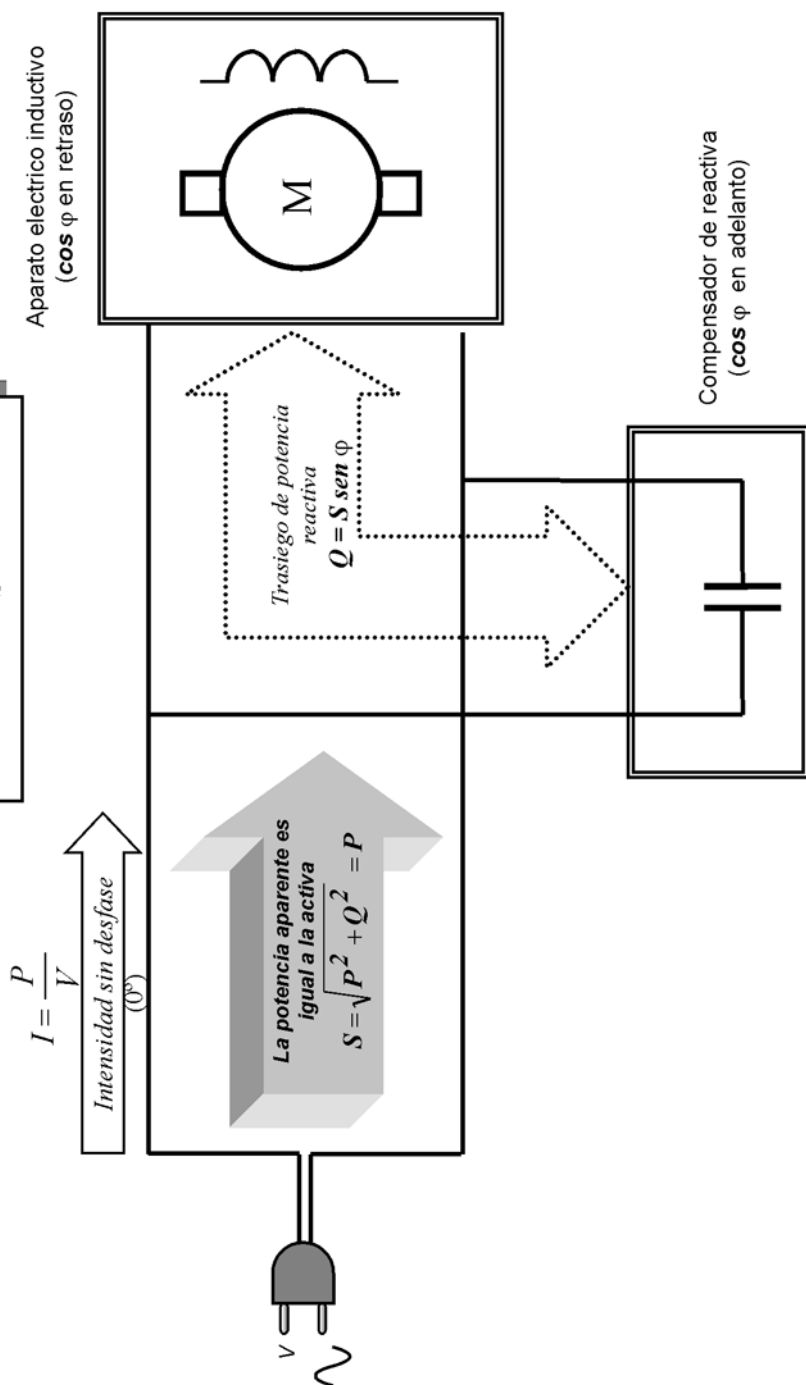
$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{6,28 \times 50 \times 53,9} = 59 \cdot 10^{-6} = 59 \mu\text{F}$$

Además, tiene que poder soportar la tensión de la red de 220 V.

Mediante este método intuitivo se puede calcular el condensador de compen-



**Figura 4.23.** En un aparato eléctrico inductivo con factor de potencia menor que 1, la red eléctrica entrega al aparato una potencia ( $S$ ) que se descompone en una componente activa ( $P$ ) y en una componente reactiva ( $Q$ ). La componente reactiva, consecuencia de la f.c.e.m. que genera el aparato, transita entre el aparato y la red, haciendo que la intensidad por la línea sea mayor a la necesaria.



**Figura 4.24.** Caso de la figura anterior, utilizando un condensador para la compensación de la potencia reactiva. De esta manera, se reduce la intensidad por la línea debido a que la potencia reactiva transita entre el aparato y el condensador. La red entrega al aparato, en un caso ideal, una potencia total que es igual a la activa.

sación, donde la potencia reactiva en el condensador, en general, debe ser la diferencia entre la reactiva sin compensar y la reactiva total que interese. Por ejemplo, si en el caso anterior sólo se quiere llegar a  $\cos \varphi = 0,92$  entonces la potencia en el condensador debería ser:

$$\text{Sin compensar: } \cos^{-1} 0,8 = 36,8^\circ \Rightarrow Q = P \operatorname{tg} \varphi_1 = 1200 \times \operatorname{tg} 36,8^\circ = 897,7 \text{ VAR}$$

$$\text{Compensada: } \cos^{-1} 0,92 = 23^\circ \Rightarrow Q = P \operatorname{tg} \varphi_2 = 1200 \times \operatorname{tg} 23^\circ = 509,37 \text{ VAR}$$

$$\text{Potencia en el condensador: } Q_C = 897,7 - 509,37 = 388,3 \text{ VAR}$$

Y en general, se deduce la fórmula:

$$Q_C = P (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)$$

En la práctica, en las instalaciones industriales el proceso puede no ser tan sencillo, no se reduce al cálculo de un solo condensador; se utilizan hasta programas de ordenador para el cálculo de los sistemas de compensación de reactiva, algunos de los cuales pueden llevar hasta sistemas de automatismos que van adaptando la capacidad necesaria en función de las variaciones de la carga. En general se utiliza una fórmula, que es en la que se basan los programas de ordenador, cuyo desarrollo se muestra a continuación.

Supongamos el triángulo de potencias de la figura 4.25a. Si queremos mejorar el  $\cos \varphi$  se tiene que reducir la potencia reactiva ( $Q$ ), lo cual se logra sumando al triángulo de potencias el vector de potencia reactiva que se tiene que desarrollar en el condensador,  $Q_C$  (fig.4.25b).

De esta manera, como la reactiva del condensador ( $Q_C$ ) se encuentra en oposición con la reactiva inductiva ( $Q_L$ ), el total de reactiva es:  $Q_L - Q_C = Q_2$ . Y, como se deduce, cuanto más se acerque el valor de  $Q_C$  al de  $Q_L$  menor será el ángulo  $\varphi$  y más se aproximará la potencia aparente ( $S$ ) a la potencia activa ( $P$ ). Así, en dicho triángulo tenemos:

$P$  = potencia activa

$Q_L$  = potencia reactiva sin compensar

$Q_2$  = potencia reactiva compensada

$Q_C$  = potencia reactiva en el condensador

$S_1$  = potencia aparente sin compensar

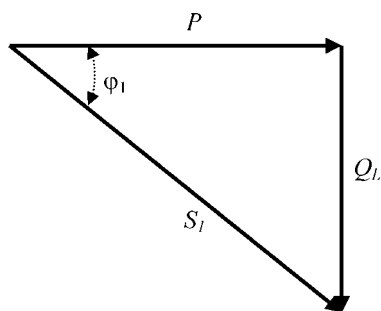
$S_2$  = potencia aparente compensada

$\varphi_1$  = desfase sin compensar

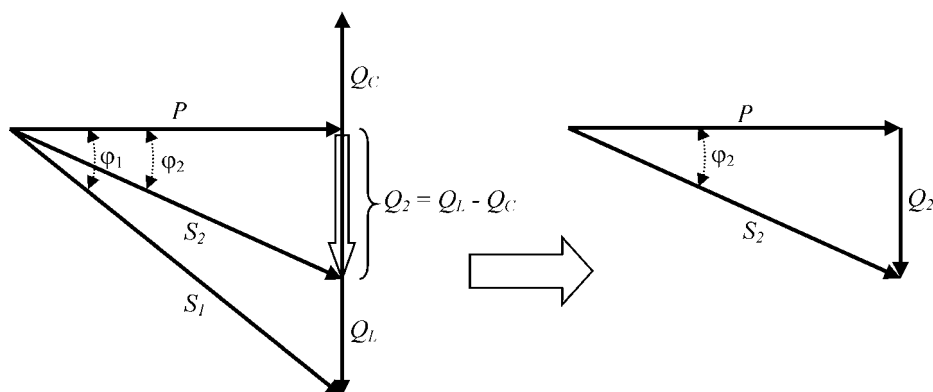
$\varphi_2$  = desfase con compensado

Aplicando conceptos básicos de trigonometría, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{Q_L}{P} \Rightarrow Q_L = P \operatorname{tg} \varphi_1 \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{Q_2}{P} \Rightarrow Q_2 = P \operatorname{tg} \varphi_2 \end{aligned} \right\} Q_C = Q_L - Q_2 = P \operatorname{tg} \varphi_1 - P \operatorname{tg} \varphi_2 = P (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)$$



a)



b)

**Figura 4.25.** a) Triángulo de potencias para mejorar el factor de potencia ( $\cos \varphi$ ). b) Al sumarle a dicho triángulo el vector de potencia reactiva del condensador ( $Q_C$ ), puesto que está en oposición con la potencia reactiva inductiva ( $Q_L$ ), se produce una resta entre ambos y da lugar a un triángulo de potencias con menor potencia reactiva; se ha mejorado el  $\cos \varphi$ .

Como se ve, aparece la fórmula que intuitivamente anteriormente se dedujo.

Y por otra parte, como la potencia reactiva en el condensador es:  $Q_C = \frac{V^2}{X_C}$ , se tiene:

$$\frac{V^2}{X_C} = P (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)$$



Y puesto que  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ :

$$\frac{V^2}{\frac{1}{\omega C}} = P (tg \varphi_1 - tg \varphi_2) \Rightarrow V^2 \omega C = P (tg \varphi_1 - tg \varphi_2)$$

Se obtiene así:

$$C = \frac{P (tg \varphi_1 - tg \varphi_2)}{V^2 \omega}$$

#### Ejemplo 4.5:

Si tenemos una instalación conectada a la red 220 V 50 Hz cuya potencia activa es de 1200 W y su factor de potencia es  $\cos \varphi = 0,6$ , para mejorar el factor de potencia a  $\cos \varphi = 0,9$  la capacidad del condensador deberá ser:

$$\varphi_1 = \cos^{-1} 0,6 = 53^\circ$$

$$\varphi_2 = \cos^{-1} 0,9 = 26^\circ$$

$$C = \frac{P (tg \varphi_1 - tg \varphi_2)}{V^2 \omega} = \frac{1200 \times (tg 53^\circ - tg 26^\circ)}{220^2 \times (6,28 \times 50)} = 66,2 \cdot 10^{-6} = 66,2 \mu F$$

La intensidad total que entrega la red eléctrica a la instalación, con el condensador de compensación es:

$$\text{Como la potencia total aparente es: } S_T = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{1200}{0,9} = 1333,3 \text{ VA}$$

$$I_T = \frac{S_T}{V} = \frac{1333,3}{220} = 6 \text{ A}$$

En cambio, sin el condensador la intensidad sería:

$$S_T = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{1200}{0,6} = 2000 \text{ VA} \Rightarrow I_T = \frac{S_T}{V} = \frac{2000}{220} = 9 \text{ A}$$

## 4.8 EJERCICIOS DESARROLLADOS

### 4.8.1 Montaje paralelo de un motor y una resistencia calefactora

Supongamos el siguiente circuito práctico que se muestra en la figura 4.26. Se compone de una estufa eléctrica de 2 kW y un motor monofásico de inducción de 0,75 kW conectados a la red eléctrica de 220 V. Es un montaje cuya base se puede encontrar en una lavadora o en algunas estufas eléctricas (mediante el motor se saca aire caliente). El motor se considera una carga inductiva cuya potencia activa es de 0,75 kW, con un factor de potencia  $\cos \varphi = 0,8$  y con un rendimiento ideal de  $\eta = 1$ .

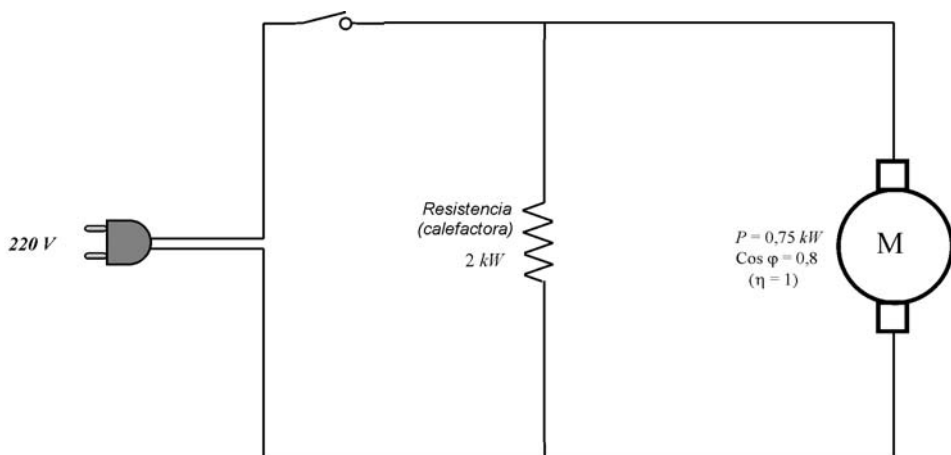
Calcularemos:

1. La potencia activa total del montaje
2. La intensidad total que entrega el generador (la red eléctrica) al montaje.
3. El factor de potencia total
4. Las intensidades parciales

1. En principio, como el rendimiento del motor es del 100 % ( $\eta = 1$ ), la potencia de consumo son los 0,75 kW. Y puesto que la potencia activa total es igual a la suma de las potencias activas parciales, tenemos:

$$P_{total} = P_{estufa} + P_{motor} = 2 \text{ kW} + 0,75 \text{ kW} = 2,75 \text{ kW} = 2750 \text{ W}$$

2. La intensidad total, la que entregará la red eléctrica al montaje, puesto que la potencia total aparente es  $S_T = E \cdot I_T$ , ésta se puede calcular por:  $I_T = \frac{S_T}{E}$ . Y para



**Figura 4.26.** Circuito a calcular.

ello se tiene que conocer el valor total de la potencia aparente ( $S_T$ ), así como la potencia total reactiva ( $Q_T$ ), ya que:

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$

La única potencia reactiva es la del motor, cuyo valor se deduce fácilmente de su triángulo de potencias (fig.4.27a). Como que  $\cos \varphi = 0,8 \Rightarrow \varphi = \cos^{-1} = 36,86^\circ$ :

$$Q_T = P_{motor} \cdot \operatorname{tg} \varphi = 750 \times \operatorname{tg} 36,86^\circ = 562,3 \text{ VAR}$$

Así, puesto que la potencia activa total es  $P_T = 2750 \text{ W}$ :

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{2750^2 + 562,3^2} = 2807 \text{ VA}$$

Siendo así el valor de la intensidad total:

$$I_T = \frac{S_T}{E} = \frac{2807}{220} = 12,76 \text{ A}$$

Para ayudarnos a comprender y calcular estas cosas, se representa el triángulo de potencias total del montaje (fig.4.27b); que, en cualquier caso, es la suma de los triángulos de potencia parciales. Se puede observar cómo la potencia total activa ( $P_T$ ) se corresponde con la suma de la potencia activa de la resistencia (2.000 W) y la del motor (750 W), siendo la única potencia reactiva la del motor (562 VAR).

**3.** En cuanto al factor de potencia total del montaje, por simple observación del triángulo total de potencias (fig.4.27b), se obtiene que:

$$\cos \varphi = \frac{P_T}{S_T} = \frac{2750}{2807} \approx 0,98$$

La intensidad total circula con un retraso de  $\cos^{-1} 0,98 = 11,5^\circ$  respecto a la tensión.

**4.** En cuanto a las intensidades parciales, tenemos:

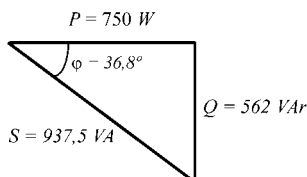
Del triángulo de potencias del motor, dividiendo cada valor por la tensión ( $E = 220 \text{ V}$ ) se obtiene su triángulo de intensidades (fig.4.28a):

$$\text{Intensidad activa} \Rightarrow I_a = \frac{P}{E} = \frac{750}{220} = 3,4 \text{ A}$$

$$\text{Intensidad reactiva} \Rightarrow I_r = \frac{Q}{E} = \frac{562}{220} = 2,55 \text{ A}$$

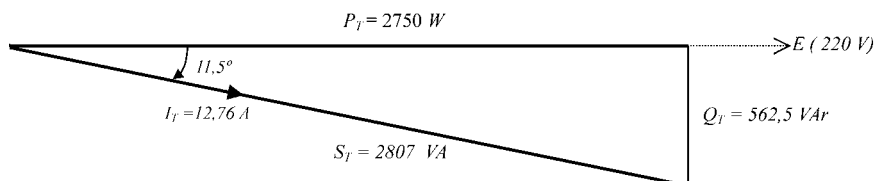
$$\text{Intensidad total} \Rightarrow I_{motor} = \frac{S}{E} = \frac{937,5}{220} = 4,26 \text{ A}$$

Triángulo de potencias del motor



a)

Triángulo total de potencias



$$\cos \varphi_{(total)} = \frac{P_T}{S_T} = \frac{2750}{2807} = 0,98$$

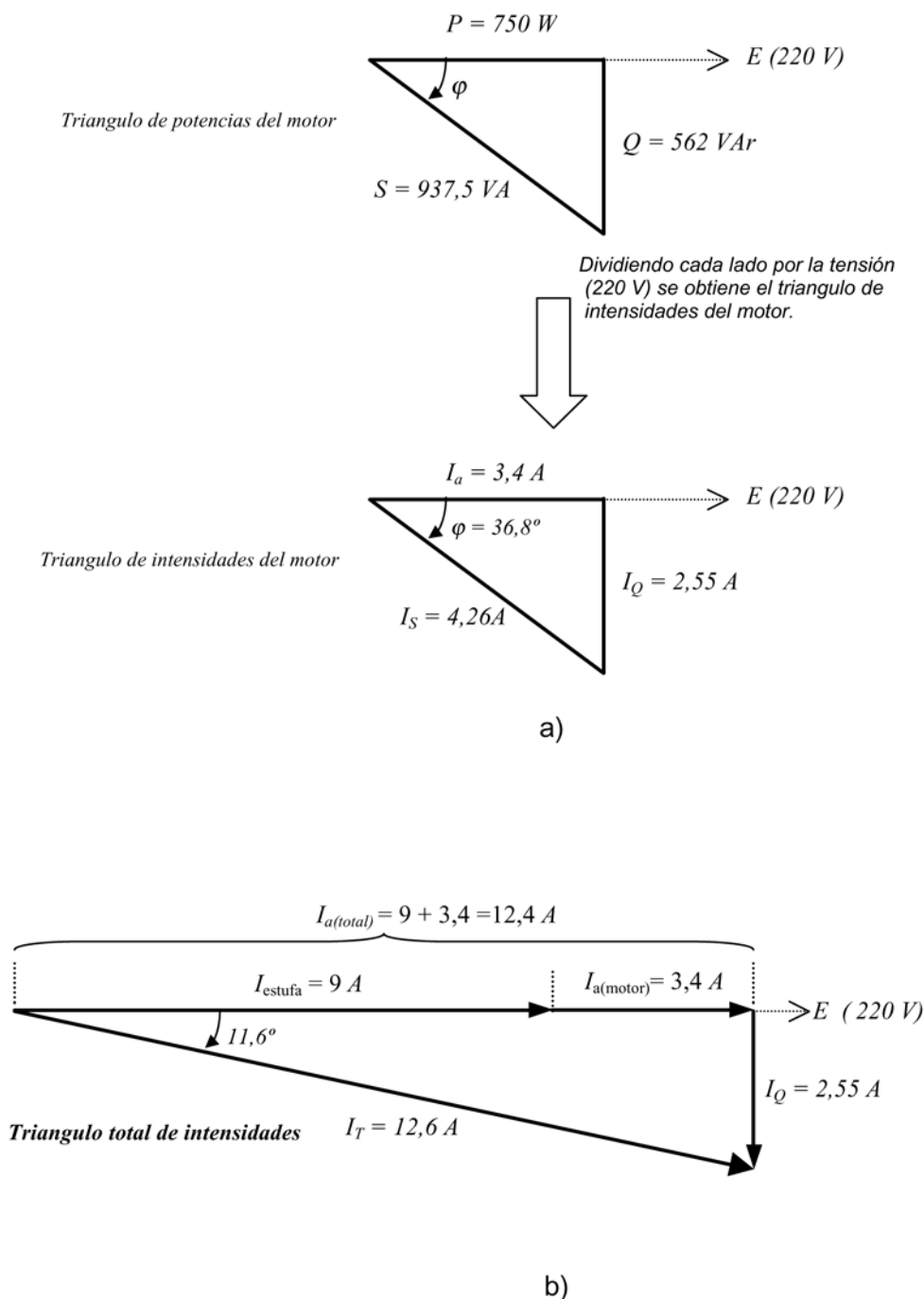
b)

**Figura 4.27.** a) Triángulo de potencias del motor.

b) Triángulo de potencias total del sistema.

La intensidad total que circula por el motor es de 4,26 A y, como se observa en el triángulo calculado (fig.3.28a), circula retrasada 36,8° con respecto a la tensión de la red, lo cual se puede expresar por:  $I_{motor} = 4,26 \text{ A} \angle -36,8^\circ$ . Y este valor viene dado por la suma vectorial de la intensidad activa y la reactiva:

$$\left. \begin{aligned} I_{motor} = I_a - j I_r = 3,4 - j 2,55 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\sqrt{3,4^2 + 2,55^2} = 4,26 \text{ A} \\ &\varphi = \tan^{-1} \frac{-2,55}{3,4} = -36,8^\circ \end{aligned}$$



**Figura 4.28.** a) Del triángulo de potencias se puede hallar el triángulo de intensidades.  
b) Triángulo total de intensidades del sistema

La intensidad por la resistencia de la estufa, que es de tipo activa, es:

$$I_{\text{estufa}} = \frac{P}{E} = \frac{2000}{220} = 9 \text{ A}$$

La intensidad total que entrega el generador, la red, se puede expresar pues:

$$I_T = 9 \angle 0^\circ + 4,26 \angle -36,8^\circ$$

Dicho valor se puede hallar por medio del triángulo total de intensidades (fig.4.28b), donde la componente de intensidad activa es la suma de intensidad activa del motor más la intensidad de la resistencia:  $I_{a(\text{total})} = I_{a(\text{resistencia})} + I_{a(\text{motor})} = 9 + 3,4 = 12,4 \text{ A}$ . Y la única componente reactiva es la del motor, que es:  $I_Q = 2,55 \text{ A}$ . Del triángulo de intensidades se deduce que el valor de la intensidad total es:

$$\left. \begin{aligned} I_T &= \sqrt{12,4^2 + 2,55^2} = 12,6 \text{ A} \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{-2,55}{12,4} \approx -11,6^\circ \end{aligned} \right\} I_T = 12,6 \text{ A} \angle -11,6^\circ$$

De forma algebraica, por complejos, también se puede hallar el mismo resultado; es cuestión de pasar a la forma binómica la expresión  $I_T = 9 \angle 0^\circ + 4,26 \angle -36,8^\circ$ , lo cual da:

$$I_T = 9 + [4,26 \cos(-36,8^\circ) + j 4,26 \sin(-36,8^\circ)] = 9 + (3,4 - j 2,55) = 12,4 - j 2,55 \Rightarrow$$

$$I_T = \sqrt{12,4^2 + 2,55^2} = 12,6$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{-2,55}{12,4} = -11,6^\circ$$

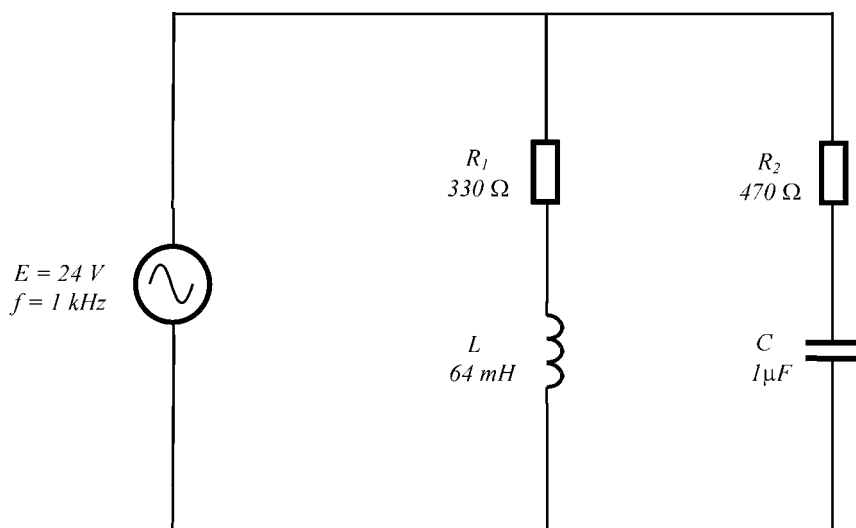
Y, en resumen, como tiene que ser, se cumple que *la intensidad total activa es la suma de las intensidades activas parciales*, y *la intensidad total reactiva es la suma de las intensidades reactivas parciales*. Siendo la intensidad total, la entregada por el generador, la suma vectorial de dichas intensidades.

## 4.8.2 Circuito serie – paralelo

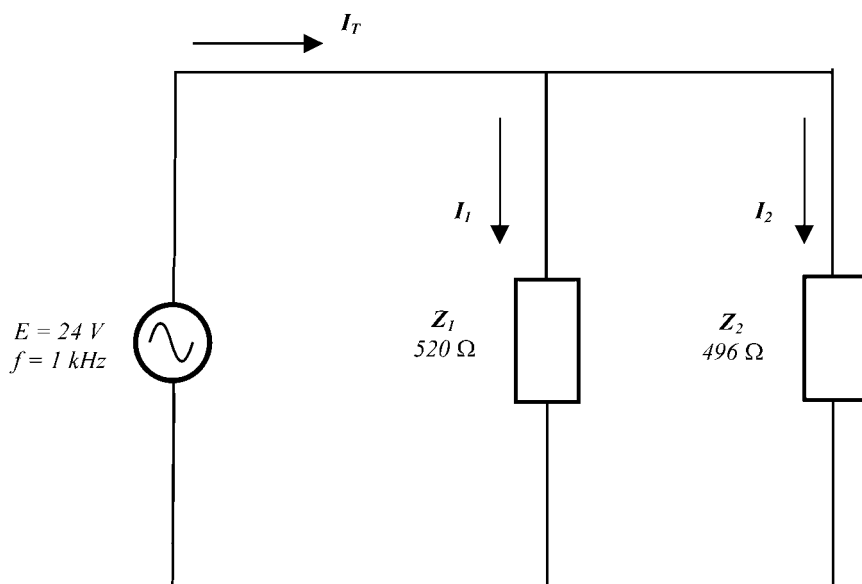
Dado el siguiente circuito (fig.4.29a) compuesto por dos ramas serie en paralelo (circuito mixto), haremos el desarrollo para calcular la impedancia e intensidad total.

El proceso de cálculo se basa en:

1. Hallar la impedancia de cada rama, con sus correspondientes desfases
2. Hallar las intensidades de cada rama
3. Sumar, vectorialmente, las intensidades de cada rama; lo cual da lugar a la intensidad total, de lo cual se deduce también la impedancia total.



a)



b)

**Figura 4.29.** a) Circuito a calcular. b) Representación en impedancias.

1. En principio, se hallan los valores de reactancia:

$$X_L = 2\pi f L = 2 \times 3,14 \times 1000 \times 0,064 \approx 402 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 1000 \times 1 \cdot 10^{-6}} \approx 159 \Omega$$

La expresión de impedancia de la rama inductiva,  $Z_1$  es:

$$Z_1 = R_1 + j X_L = 330 + j 402$$

lo cual nos da:

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = \sqrt{330^2 + 402^2} \approx 520 \Omega \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{402}{330} = 50,6^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow Z_1 = 520 \Omega \angle 50,6^\circ$$

En cuanto a la rama capacitiva,  $Z_2$ , tenemos:

$$Z_2 = R_2 - j X_C = 470 - j 159$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_2 = \sqrt{470^2 + 159^2} = 496 \Omega \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{-159}{470} = -18,7^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow Z_2 = 496 \Omega \angle -18,7^\circ$$

Se obtiene así la estructura de circuito basada en dos impedancias,  $Z_1$  y  $Z_2$ , de la figura 4.29b.

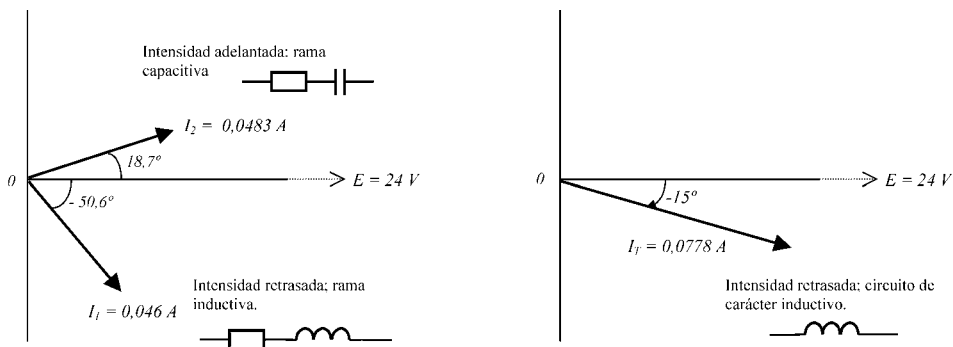
2. Conocidos los valores de las impedancias, los valores de las intensidades se deducen de forma inmediata, sin más que aplicar la ley de Ohm:

$$I_1 = \frac{E}{Z_1} = \frac{24 \angle 0^\circ}{520 \angle 50,6^\circ} = 0,046 \text{ A} \angle -50,6^\circ$$

$$I_2 = \frac{E}{Z_2} = \frac{24 \angle 0^\circ}{496 \angle -18,7^\circ} = 0,0483 \text{ A} \angle 18,7^\circ$$

Y, como tiene que ser, la intensidad en la rama inductiva aparece retrasada ( $50,6^\circ$ ) y la intensidad en la rama capacitiva va adelantada ( $18,7^\circ$ ), lo cual se representa en la figura 4.30.





**Figura 4.30.** La suma de las intensidades parciales  $I_1$  y  $I_2$  da lugar a la intensidad total  $I_T = 0,0778\text{ A} \angle 15^\circ$ .

3. Para hallar ahora la intensidad total se tiene que hacer la suma vectorial de las intensidades  $I_1$  y  $I_2$ . Como en la notación compleja las sumas sólo se pueden hacer en la forma binómica (en la forma polar no se puede), primeramente pasaremos dichas intensidades a la forma binómica, lo cual se basa en la fórmula:

$$\underbrace{r \angle \varphi}_{\text{Forma polar}} \Rightarrow \underbrace{r \cos \varphi + j r \sen \varphi}_{\text{Forma binómica}}$$

siendo  $r$  el módulo y  $\varphi$  el argumento.

$$23 \angle 60^\circ \Rightarrow 23 \cos 60^\circ + j 23 \sen 60^\circ = 11,5 + j 19,9$$

$$\text{Entonces: } 23 \angle 60^\circ = 11,5 + j 19,9$$

Así, pues, en el caso que nos ocupa, tenemos:

$$I_1 = 0,046\text{ A} \angle -50,6^\circ \Rightarrow I_1 = 0,046 \cdot \cos(-50,6^\circ) + j 0,046 \sen(-50,6^\circ) \approx 0,0292 - j 0,036$$

$$I_1 = 0,046 \angle -50,6^\circ = 0,0292 - j 0,036$$

$$I_2 = 0,0483\text{ A} \angle 18,7^\circ \Rightarrow I_2 = 0,0483 \cdot \cos 18,7^\circ + j 0,0483 \sen 18,7^\circ \approx 0,046 - j 0,0155$$

$$I_2 = 0,048 \angle 18,7^\circ = 0,046 - j 0,0155$$

Siendo la suma:

$$I_1 + I_2 = (0,0292 - j 0,036) + (0,046 + j 0,0155) = 0,0752 - j 0,02$$

O sea, que:

$$I_T = I_1 + I_2 = 0,0752 - j 0,02$$

Pasando esta última expresión a la forma polar encontramos el valor total de la intensidad, así como su desfase:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{0,0752^2 + 0,02^2} = 0,0778 \text{ A} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{-0,02}{0,0752} \approx -15^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{I_T = 0,0778 \text{ A } \angle -15^\circ}$$

El circuito resulta de carácter inductivo, ya que la intensidad total (0,0778 A), la que sale del generador, circula con un retraso de  $15^\circ$  con respecto a la tensión.

El valor de la impedancia total, es pues:

$$\boxed{Z_T = \frac{E}{I_T} = \frac{24 \angle 0^\circ}{0,0778 \angle -15^\circ} = 308,5 \Omega \angle 15^\circ}$$

Otra forma de hacer el desarrollo de cálculo para hallar estos datos es aplicando la fórmula típica del circuito paralelo:

$$\boxed{Z_T = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

Pero como los valores de las impedancias son expresiones complejas la operación no es lo fácil que parece, como vamos a ver.

Como que:

$$Z_1 = R_1 + j X_L = 330 + j 402$$

$$Z_2 = R_2 - j X_C = 470 - j 159$$

$$Z_T = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow Z_T = \frac{(330 + j 402) \cdot (470 - j 159)}{(330 + j 402) + (470 - j 159)}$$

Aunque se podría desarrollar así la fórmula para hallar el módulo y argumento de  $Z_T$ , resulta más sencillo pasar el numerador y el denominador a la forma polar y después hacer la división en forma polar, lo cual es muy simple. Así, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = 330 + j 402,12 \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{402}{330} = 50,6^\circ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \sqrt{330^2 + 402^2} = 520 \Omega \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{402}{330} = 50,6^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Z_1 = 520 \Omega \angle 50,6^\circ}$$

$$Z_2 = 470 - j159,15 \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{470^2 + 159^2} = 496 \, \Omega \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{-159}{470} = -18,7^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Z_2 = 496 \, \Omega \, \angle -18,7^\circ}$$

$$Z_1 + Z_2 = (330 + j402) + (470 - j159) = 800 + j243$$

$$Z_1 + Z_2 = 800 + j243 \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{800^2 + 243^2} = 836 \, \Omega \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{243}{800} = 16,9^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Z_1 + Z_2 = 836 \, \Omega \, \angle 16,9^\circ}$$

Y así, finalmente, haciendo una división en forma polar se obtiene el valor de  $Z_T$  y  $I_T$

$$Z_T = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(520 \angle 50,6^\circ) \times (496 \angle -18,7^\circ)}{836 \angle 16,9^\circ} = \frac{257,92 \cdot 10^3 \angle 31,9^\circ}{836 \angle 16,9^\circ} = 308,5 \, \Omega \angle 15^\circ$$

$$I_T = \frac{E}{Z_T} = \frac{24 \angle 0^\circ}{308,5 \angle 15^\circ} \approx 0,0778 \, A \angle -15^\circ$$

### 4.8.3 Compensación de reactiva

Supongamos un motor monofásico de inducción cuyas características son:

Potencia nominal ( $P_N$ ): 750 W

$\cos \varphi = 0,8$

Rendimiento ( $\eta$ ): 0,71

Primeramente hallaremos la intensidad que consume y el triángulo de potencias. Después se calculará el condensador que se debe utilizar para mejorar el factor de potencia al caso ideal de  $\cos \varphi = 1$ , y se halla, para este caso, el consumo de intensidad.

#### Desarrollo:

En primer lugar puesto que el rendimiento del motor ( $\eta$ ) es la relación entre la

potencia nominal (la disponible) y la potencia que consume (absorbida de la red), tenemos:

$$\eta = \frac{P_N}{P} \Rightarrow P = \frac{P_N}{\eta} = \frac{750}{0,71} = 1056,3 \text{ W}$$

Ello indica que, aunque la potencia nominal de dicho motor sea de 750 W su consumo es de 1056,3 W; por ello su rendimiento es:  $\eta = \frac{P_N}{P} = \frac{750}{1056,3} = 0,71$  (71 %).

La intensidad que consume es por tanto:

$$P = I V \cos \varphi \Rightarrow I = \frac{P}{V \cos \varphi} = \frac{1056,3}{220 \times 0,8} \approx 6 \text{ A}$$

La potencia aparente, o sea, los VA que entregará la red al motor será:

$$S = I V = 6 \times 220 = 1320 \text{ VA}$$

que también se puede hallar de la manera:  $S = \frac{P}{\cos \varphi}$

La potencia reactiva es:

Del factor de potencia hallamos el desfase, que es:  $\varphi = \cos^{-1} 0,8 = 36,86^\circ$ . Siendo pues el valor de la potencia reactiva:

$$Q = I V \sen \varphi = 6 \times 220 \times \sen 36,86^\circ = 790,2 \text{ VAR}$$

También se puede hallar por medio de:  $Q = P \tg \varphi = 1056,3 \times \tg 36,86^\circ = 790,2 \text{ VAR}$

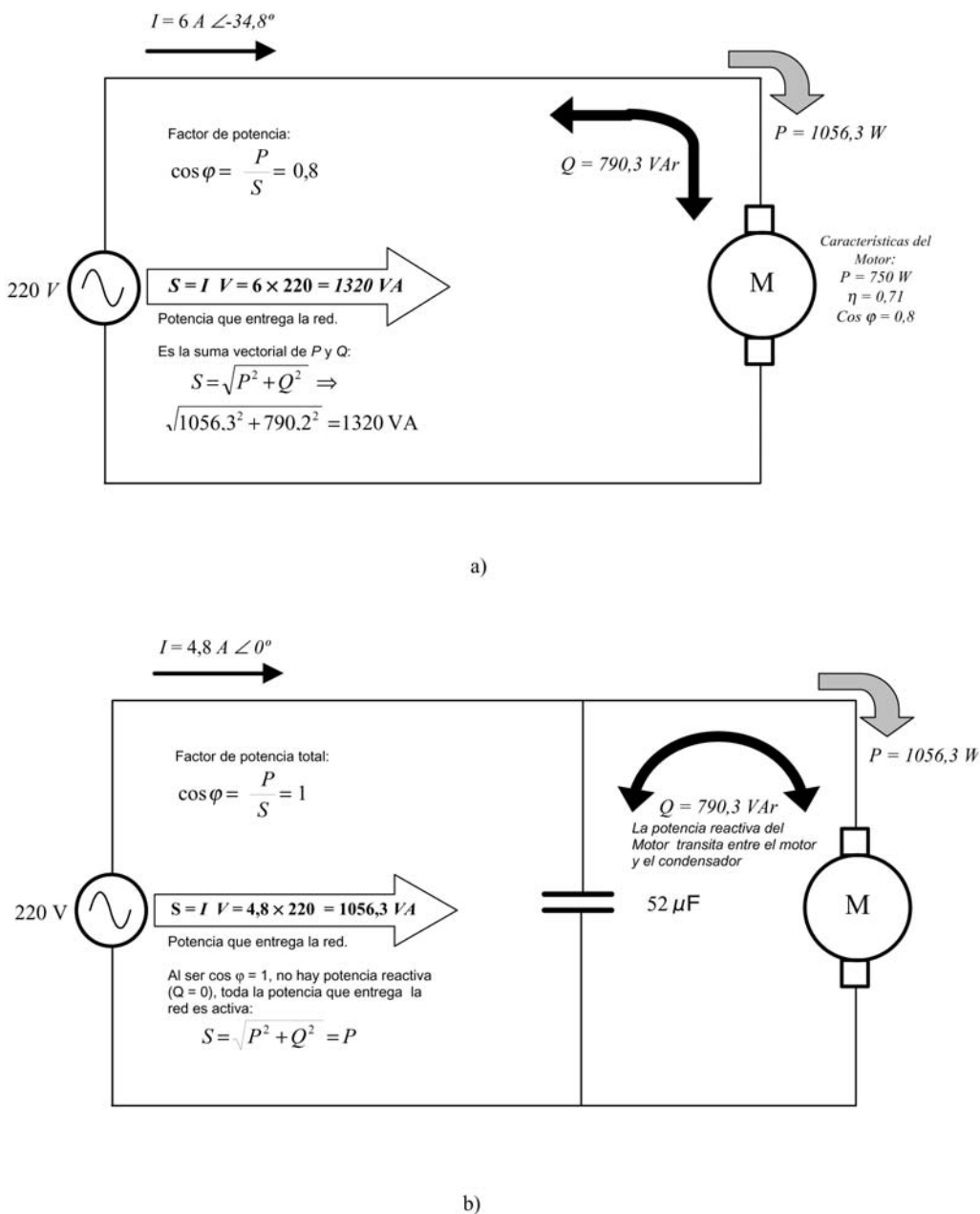
Como ya se sabe, todos estos datos están relacionados con el triángulo de potencias y la trigonometría nos permite diferentes formas de expresión de las fórmulas.

## Cálculo del condensador compensador de reactiva:

Veremos ahora cómo la intensidad de consumo se puede lograr que sea más baja, poniendo (en paralelo con el motor) un condensador. Según se explico anteriormente, la capacidad de dicho condensador se puede hallar mediante la fórmula:

$$C = \frac{P (\tg \varphi_1 - \tg \varphi_2)}{V^2 \omega}$$

Siendo  $P$  la potencia de consumo (W),  $\varphi_1$  el desfase sin compensar,  $\varphi_2$  el desfase que se obtiene al poner el condensador,  $V$  la tensión de la red y  $\omega$  la velocidad angular. En la red eléctrica, como se sabe, al ser  $f = 50 \text{ Hz}$  la velocidad angular es:



**Figura 4.31.** Carga inductiva, motor monofásico de inducción, alimentado por la red de 220 V. a) Valores de las potencias e intensidad total del sistema. b) Valores al poner el condensador de compensación de reactiva. En este caso, la intensidad de línea se ha reducido a 4,8 A debido a que la potencia reactiva que genera el motor es absorbida por el condensador.

$$\omega = 2 \pi f = 2 \times 3,14 \times 50 \approx 314,16.$$

Si se desea una compensación ideal, o sea,  $\cos \varphi = 1$ , al poner el condensador el desfase tiene que ser  $\varphi_2 = 0^\circ$ . Así, aplicando la fórmula la capacidad que se obtiene es:

$$C = \frac{P (tg \varphi_1 - tg \varphi_2)}{V^2 \omega} = \frac{1056,3 \times (tg 36,86^\circ - tg 0^\circ)}{220^2 \times 314,16} = 52 \cdot 10^{-6} F = 52 \mu F$$

Y ahora, en el caso ideal de  $\cos \varphi = 1$ , la intensidad de consumo del motor sería:

$$I = \frac{P}{V \cos \varphi} = \frac{1056,3}{220 \times 1} \approx 4,8 A$$

Con lo cual, la potencia que tiene que entregar la red también se ve reducida:

$$S = V I = 220 \times 4,8 = 1056,3 VA$$

Que, como se comprueba ésta es igual a la consumida por el motor. Al poner el condensador lo que se ha hecho es que la potencia reactiva del motor ( $Q = 790,2 VAr$ ), en vez de circular entre la red y el motor, sea absorbida por el condensador y el trasiego de la potencia reactiva se haga entre el motor y el condensador, con la cual se disminuye la intensidad de la red. En la figura 4.31 se muestra una representación del circuito con y sin el condensador.

#### 4.8.4 Cálculo del $\cos \varphi$ en función del consumo de P y Q

Por medio de los datos de consumo de potencia activa y de reactiva que aparecen en los recibos del consumo, la compañía sabe el factor de potencia de la instalación. Supongamos que en un taller el consumo de energía durante dos meses es:

*Potencia activa: 2500 kWh*

*Potencia reactiva: 1200 kVArh*

*Según estos datos el factor de potencia en ese tiempo es:*

Como que:  $\cos \varphi = \frac{P}{S}$  y  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ , se obtiene que:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{2500}{\sqrt{2500^2 + 1200^2}} = 0,9$$

## 4.9 EJERCICIOS PROPUESTOS

**4.1** Supongamos el circuito básico paralelo L-C de la figura 4.20, aplicado para la sintonización de emisoras de radio. Hallar la capacidad que deberá tener el condensador para sintonizar una emisora de 969 kHz. La bobina es de 100 mH.

**4.2** En una instalación industrial se tienen 3 motores monofásicos iguales (fig.4.32), que se alimentan con la red de 220 V 50 Hz, cuyas características son:

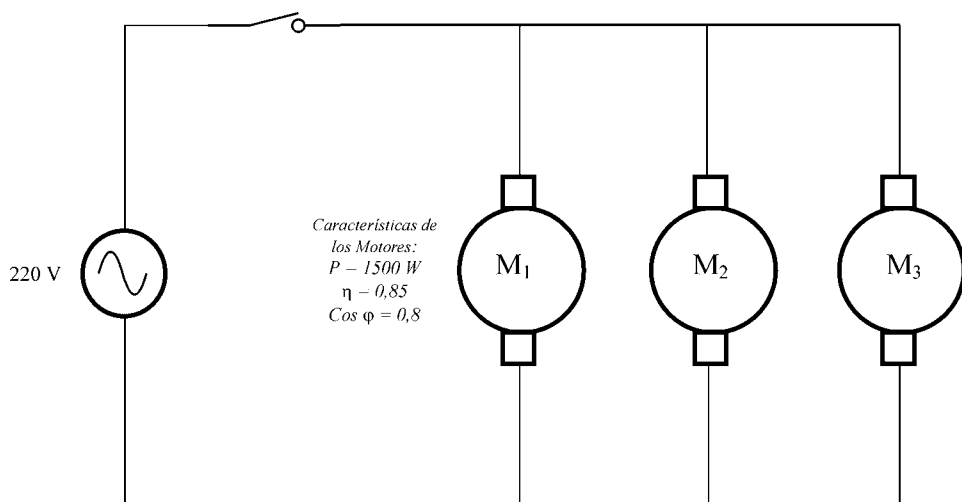
$$P = 1500 \text{ W}$$

$$\eta = 0,85$$

$$\cos \varphi = 0,8$$

Calcular:

- El triángulo de potencias de los motores y el total del sistema
- La intensidad total de consumo
- El condensador de compensación para mejorar el factor de potencia a 0,95
- La intensidad de consumo con la mejora del factor de potencia



**Figura 4.32.** Circuito a calcular. Tres motores monofásicos de iguales características conectados a la red de 220 V.

**4.3** En un taller, según el recibo que emite la compañía, el consumo de energía es:  
 Potencia activa: 12500 kWh  
 Potencia reactiva: 6200 kVarh  
 Calcular el factor de potencia de la instalación.

**4.4** Supongamos el circuito paralelo de la figura 3.19. Si los valores de los componentes son:

$$C = 4,7 \text{ nF}$$

$$L = 5 \text{ mH}$$

$$R = 2 \text{ } \Omega$$

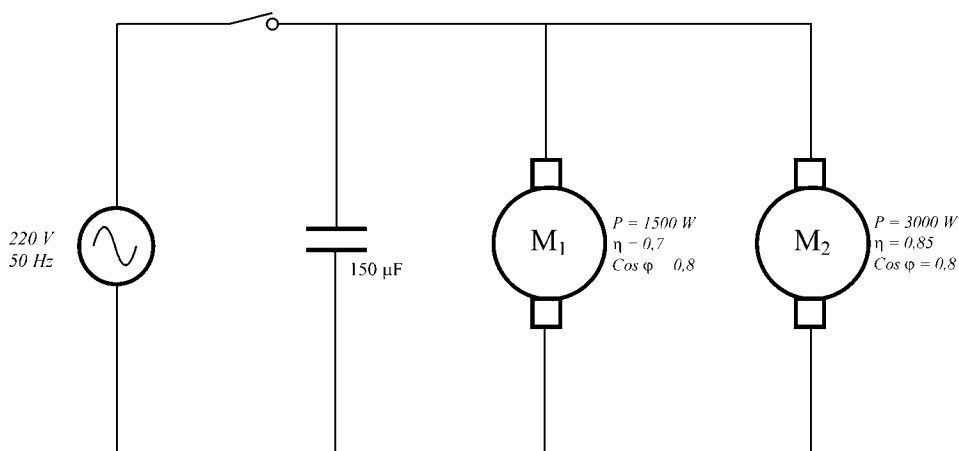
Calcular:

- La frecuencia de resonancia y el factor  $Q$
- La impedancia total del circuito a la frecuencia de resonancia

**4.5** En la instalación de una máquina se encuentran dos motores monofásicos conectados en paralelo a la red de  $220 \text{ V } 50 \text{ Hz}$ , habiendo también un condensador de compensación de reactiva de  $C = 150 \text{ } \mu\text{F}$ . El esquema y características de los motores se muestra en la figura 4.33.

Calcular:

- Las potencias activa y reactiva totales
- La potencia total aparente
- El factor de potencia del sistema
- La intensidad total de consumo



**Figura 4.33.** Circuito a calcular. Se trata de dos motores monofásicos con un condensador de compensación de reactiva conectados a la red de  $220 \text{ V}$ .





## Capítulo 5

# Introducción a la electrónica y sus componentes básicos

### 5.1 INTRODUCCIÓN

Dado las necesidades en los estudios profesionales y a la formación autodidacta a que se ven obligados los técnicos en ejercicio, así como el interés mostrado por los lectores, se ha considerado ampliar esta colección con nuevos tomos para poder así tratar todos los temas fundamentales de la electricidad y electrónica, a nivel de los estudios profesionales y necesidades de la industria.

El objetivo principal de este capítulo es proporcionar una visión global introductoria a la electrónica; una familiarización sobre los componentes electrónicos fundamentales (simbología, función que realizan y tipo de aplicación) y la física de los semiconductores. En el siguiente tomo (IV), dichos componentes serán tratados con detalle y, sobre todo, con circuitos prácticos de aplicación. En sucesivos tomos previstos se tratarán todos los demás temas interesantes de la técnica electrónica aplicada, tanto analógica y digital, como: *Transistores, circuitos integrados (chips), circuitos biestables, osciladores, filtros activos, acústica, amplificadores de sonido, tiristores, optoacopladores, circuitos de control y regulación industrial, electrónica digital, procesadores programables, etc.*

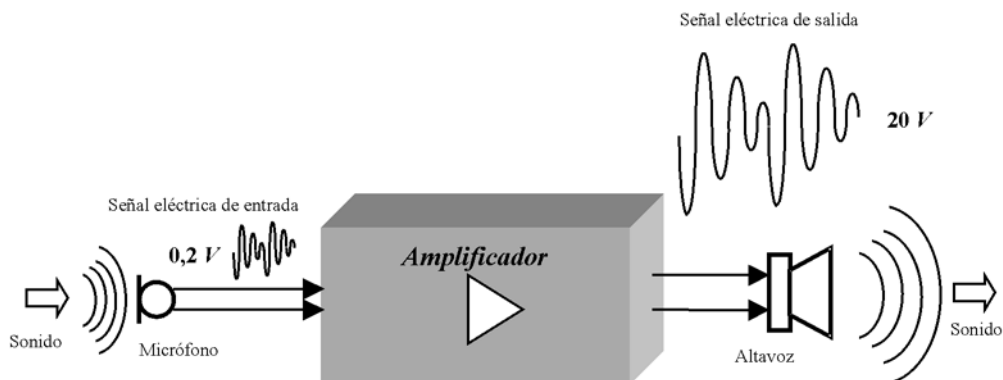
### 5.2 ¿QUE ES LA ELECTRÓNICA?

De una forma resumida y concisa, se puede decir que: *La electrónica es la ciencia o tecnología que trata sobre los componentes (o circuitos) en los cuales la conducción eléctrica es a través de materiales **semiconductores**, donde se manifiestan **efectos activos** como es la **amplificación**.*

A la definición anterior se podría añadir también *la conducción de corriente a través de válvulas de vacío (y en gases)*; aunque los componentes básicos que operan así (se conocen por *válvulas*) hace muchos años que fueron desplazados por los componentes semiconductores. No obstante, en algunas aplicaciones aun se siguen utilizando ciertos tipos de válvulas, como son los *tubos de rayos catódicos (TRC)*, que son las pantallas típicas de imagen en TV, y también se encuentran en los sistemas de emisión de radio, etc.

Adelantado conceptos, **amplificación** es *obtener, partiendo de una señal eléc-*

trica considerada de entrada (de un micrófono, de una antena...) otra idéntica en frecuencia y forma de onda pero de mayor magnitud. Este es el caso, por ejemplo, de un amplificador de sonido para megafonía (fig.5.1).



Según las amplitudes de las señales de entrada y salida, el factor de amplificación (Ganancia) es:

$$\text{Ganancia del amplificador (G)} = \frac{\text{Señal salida}}{\text{Señal de entrada}} = \frac{20}{0,2} = 100$$

**Figura 5.1.** Ejemplo de representación del concepto de Amplificación. Se trata de un amplificador de megafonía.

El micrófono capta las señales de sonido, ondas acústicas (voz, música), y las transforma en señales eléctricas. La débil señal eléctrica de entrada que proporciona el micrófono es aplicada a un amplificador (sistema electrónico), el cual produce una señal eléctrica de salida idéntica a la de entrada (en forma de onda y frecuencia) pero de una magnitud mucho mayor. La señal eléctrica de salida del amplificador, aplicada a un altavoz (que convierte la señal eléctrica en ondas de sonido), permite obtener una gran potencia sonora de la voz.

Hay que tener en cuenta que si la señal de salida apareciera con alguna modificación en su forma de onda o frecuencia (esto se conoce por *distorsión*), podría pasar que el sonido fuera desagradable y hasta que la voz pareciera diferente a la captada por el micrófono. Para que esto no suceda, la señal de salida debe conservar la frecuencia y forma de onda de entrada.

El factor de amplificación, que se conoce por *ganancia* ( $G$ ), puede ser un valor muy grande según el diseño electrónico del amplificador. En este ejemplo (fig.5.1), su valor es 100; lo cual indica que se obtiene una señal de salida 100 veces mayor que la de entrada.

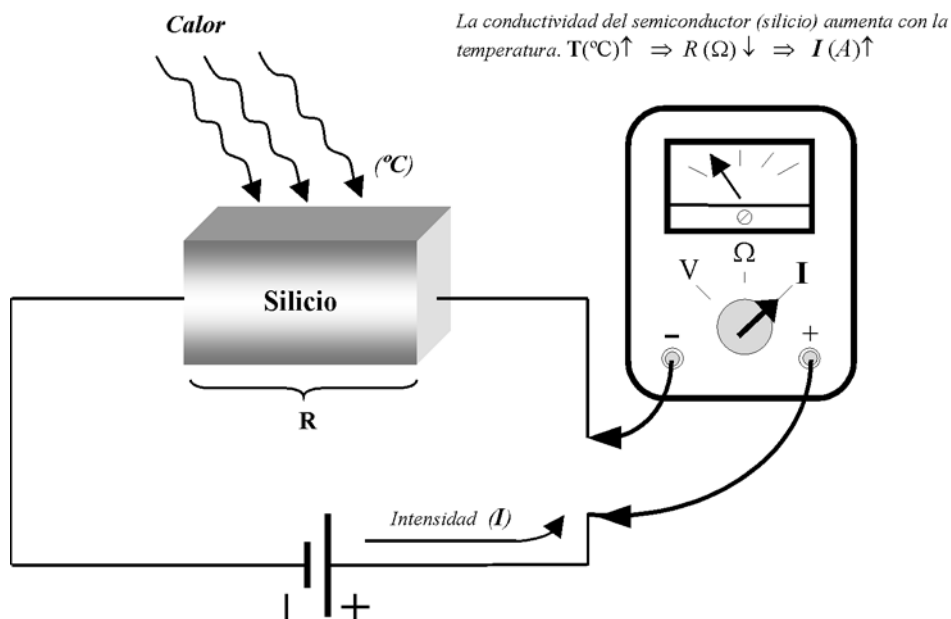
$$G = \frac{V_{\text{salida}}}{V_{\text{entrada}}} \Rightarrow V_{\text{salida}} = G \cdot V_{\text{entrada}} = 100 \times 0,2 = 20 \text{ V}$$

Así, como concepto práctico resumido y actual de electrónica se puede decir también que: *Es el estudio y aplicación de los componentes cuyo funcionamiento se basa en los semiconductores, donde aparecen circuitos con efectos de amplificación* (Amplificadores de sonido, generadores de ondas, sistemas de control, etc.).

Obsérvese, que no se considera electrónica a los dispositivos (o circuitos), donde la circulación de corriente es sólo a través de conductores (como el cobre, aluminio, plata, etc.; esto es *electricidad*).

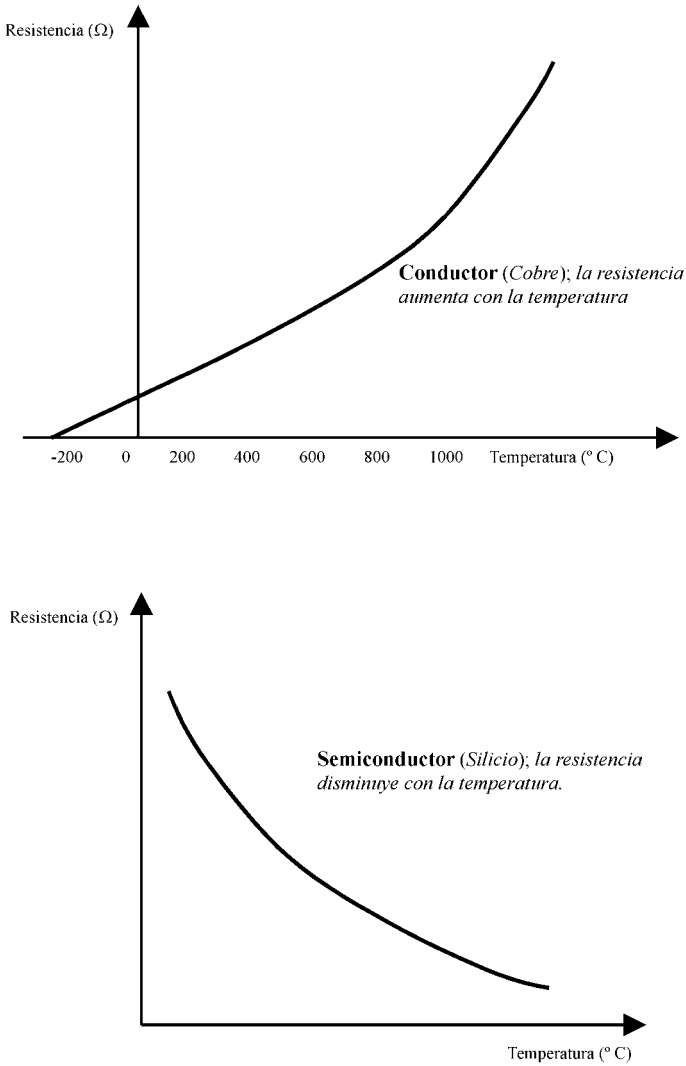
## 5.3 INTRODUCCIÓN A LOS COMPONENTES SEMICONDUCTORES

Los semiconductores, en general, son materiales cuya resistividad ( $\Omega$ ) se encuentra intermedia entre los buenos conductores y los aislantes (de ahí la denominación de **semiconductores**), con la importante peculiaridad de que su resistencia disminuye cuando aumenta la temperatura, lo cual se representa en la figura 5.2.



**Figura 5.2.** El efecto de la temperatura sobre el semiconductor hace aumentar su conductividad, de manera que aumenta la intensidad cuando se calienta.

Los átomos de este tipo de materiales se caracterizan porque tienen 4 electrones en la última capa. Aunque en su estado natural y en ciertas condiciones su resistencia es muy elevada (son más bien aislantes), a ciertas temperaturas se pueden hacer conductores, debido a que su conductividad aumenta con la temperatura, que es el inverso de lo que ocurre con los buenos conductores (aumenta la resistencia cuando se calientan) (fig. 5.3).

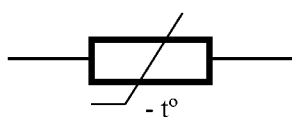


**Figura 5.3.** Variación de la resistencia en un semiconductor (Silicio) y en un conductor (cobre).

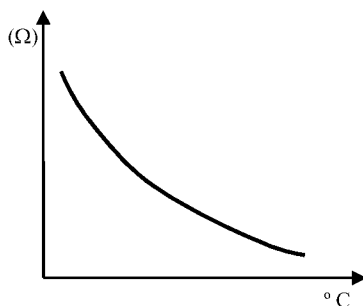
### 5.3.1 NTC-PTC (termistores)

Aprovechando la característica del efecto que tiene la temperatura sobre los semiconductores se fabrican componentes especialmente diseñados para su aplicación como sensores de temperatura. Siendo unos de los más utilizados el denominado **NTC** (*Negative Temperatura Coefficient*), que significa *coeficiente negativo de temperatura*. Es una resistencia cuyo valor ohmico disminuye cuando aumenta su temperatura, como se representa en la figura 5.4.a.

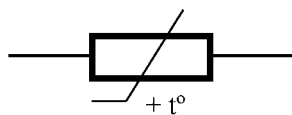
También, añadiendo al material semiconductor otros tipos de materiales, con el fin de variar sus características frente a la temperatura, se obtiene otro componente similar que actúa de forma contraria, que se denomina **PTC** (*Positive Temperature Coefficient*), lo cual significa *coeficiente positivo de temperatura*; o sea, su resistencia aumenta cuando se calienta (fig.5.4b), para lo cual se tiene que operar dentro de un cierto intervalo de temperatura (entre  $T_1$  y  $T_2$ ).



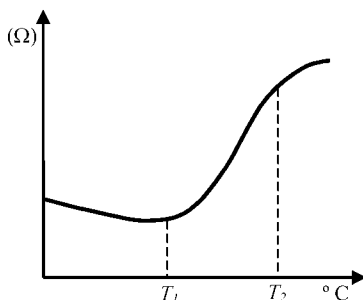
**NTC** (*Negative Temperature Coefficient*); Su resistencia disminuye al aumentar la temperatura.



a)



**PCT** (*Positive Temperature Coefficient*); Su resistencia aumenta con la temperatura.



b)

**Figura 5.4.** NTC y PCT; componentes que aprovechan la cualidad del efecto de la temperatura sobre los semiconductores.

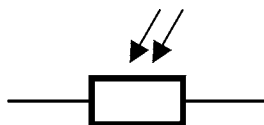
Mediante componentes de este tipo, que también se conocen por termistancias, se pueden realizar circuitos que pueden realizar ciertas funciones según la temperatura, cuya aplicación se encuentra en sistemas de control, de medida, de protección, etc. Por ejemplo, por medio de una NTC se puede detectar la temperatura del agua de los motores de los coches, cuya variación de resistencia da lugar a una variación de corriente que permite el control del instrumento indicador. Por otra parte, el PTC es utilizado en TV en el circuito desmagnetizador de la pantalla (*TRC*, tubo de rayos catódicos).

### 5.3.2 LDR (*Ligth Dependent Resistor*)

Los semiconductores también son sensibles a la luz, de manera que puede aumentar su conductividad en función de la radiación luminosa recibida, de ahí que tengamos componentes electrónicos diseñados como elementos sensores (o detectores) de luz, entre los que destacan la *fotocélula* (*LDR*), el fotodiodo y el fototransistor.

En general, los componentes electrónicos relacionados con la detección o emisión de luz forman una familia de componentes que se denomina *optoelectrónica*.

El dispositivo más básico es la *LDR* (*Ligth Dependent Resistor*), que se comporta como una resistencia cuyo valor ohmico disminuye notablemente cuanto más se ilumina (fig.5.5). Es un componente de bajo precio (como la mayoría de los componentes electrónicos), y con el cual se obtienen muy fácilmente aplicaciones de control por medio de la luz (por ejemplo, la puesta en marcha automática de las luces del coche en función de la luz ambiente).



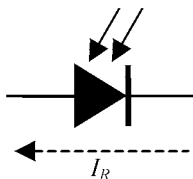
Fotocélula **LDR** (*Ligth Dependent Resistor*). Su resistencia ( $\Omega$ ) disminuye cuando aumenta la luminosidad.

**Figura 5.5.** Dispositivo que aprovecha los efectos de la luz sobre el semiconductor.

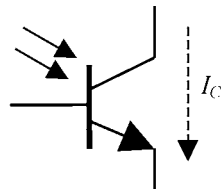
### 5.3.3 Fotodiodo y fototransistor

El *fotodiodo* es otro componente similar a la LDR. Es un tipo de diodo con una especie de ventanita-lente para recibir la luz. Cuando recibe luz, aparece una corriente (inversa), que aumenta en función de la luminosidad.

El *fototransistor* es uno de los optocomponentes más importantes; se basa en la acción del fotodiodo combinada con la función del transistor (que es un amplificador de corriente), por lo cual se obtiene un componente muy sensible a la luz. Estos dos componentes (fig.5.6) son especialmente utilizados para detectar la luz de control de los mandos a distancia en los aparatos de TV, vídeo, etc.



**Fotodiodo.** Es un sensor de luz. Circula una corriente (inversa) en función de la luminosidad.



**Fototransistor.** Se obtiene una corriente amplificada en función de la luminosidad que recibe.

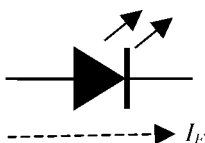
**Figura 5.6.** Componentes diseñados para detectar la luz. Su aplicación típica se encuentra en los mandos a distancia, entre otras.

Se recuerda que el objetivo principal de este capítulo es que el lector adquiera una familiarización conceptual sobre ciertos componentes electrónicos en cuanto a simbología, función que realizan y su tipo de aplicación, los cuales serán explicados en el siguiente tomo (IV) con detalle y, sobre todo, con circuitos de aplicación prácticas.

### 5.3.4 LED (*Light Emitting Diode*)

También aparece el efecto inverso a los optocomponentes anteriores; por medio de aplicación de corriente a ciertos componentes semiconductores se obtiene emisión de luz, siendo el componente más representativo de esto el **diodo emisor de luz**, que se conoce por **LED** (*Light Emitting Diode*) (fig.5.7). Este es otro de los componentes más importantes de la optoelectrónica.

La intensidad luminosa que emite el LED aumenta en función de la intensidad directa que circula por el diodo (hasta un cierto límite, a partir del cual del cual se produce una saturación; la luz empieza a cambiar de color y se avería). Se obtienen valores normales de luz con una intensidad entre unos 5 a 20 mA, siendo la tensión (caída directa) de unos 1,8 V. Este es el componente normalmente utilizado (en sustitución de las lamparitas de filamento) para indicar la puesta en marcha de los aparatos de electrónica (radio, TV, amplificadores de sonido, etc.), así como para la emisión de la luz de control en los mandos a distancia.



**LED** (*Ligh Emitting Diode*). Emite luz cuando se le hace circular corriente (polarización directa).

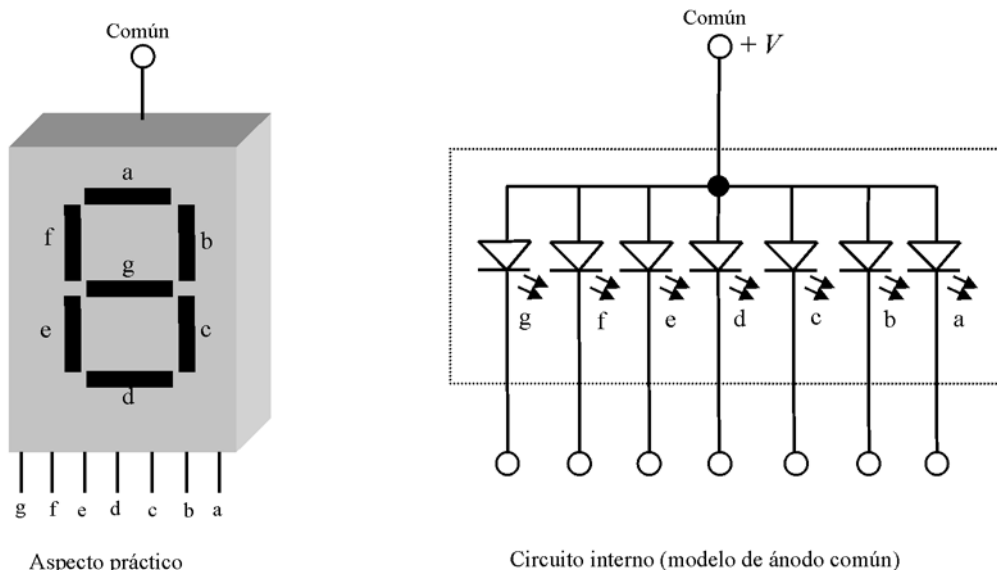
**Figura 5.7.** Componente electrónico diseñado para emitir luz. Su aplicación típica es como indicador óptico (por ejemplo, de encendido) en los aparatos electrónicos. También se encuentra en los mandos a distancia, para emitir la luz (infrarroja) de control.

#### 5.3.4.1 Displays de 7 segmentos

Asimismo, como aplicación del efecto de emisión de luz (LED) se obtienen también lo que se conoce por *displays*. En su versión básica, son una especie de pantallitas en las cuales pueden aparecer números; se conocen por displays de 7 segmentos (fig.5.8).

Este tipo de visualizadores tiene aplicación para representar valores numéricos en sistemas digitales como relojes (de sobre mesa), voltímetros, termómetros, aparatos de medida, etc.





Aspecto práctico

Circuito interno (modelo de ánodo común)

**Figura 5.8.** Visualizador de 7 segmentos (Display). Se basa en diodos LED.

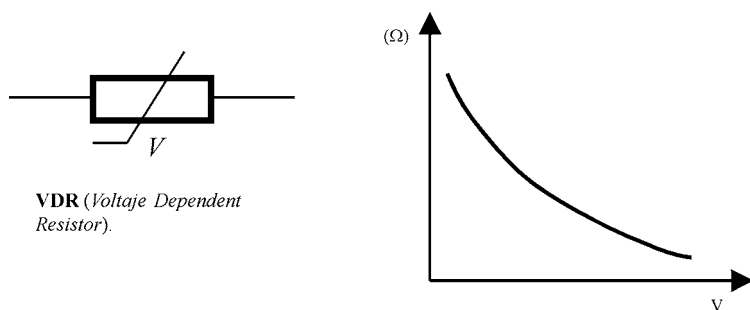
Otras versiones de visualizadores basados en diversos elementos LED dispuestos en forma matricial dan lugar pantallas de información como las que se ven en el metro, autopistas, tiendas, etc.

Todos estos componentes semiconductores relacionados con la luz son muy utilizados, por ejemplo, en los mandos a distancia, circuitos de control automático de iluminación, barreras de luz (sistemas de alarma), indicadores ópticos, letreros luminosos, etc.

### 5.3.5 VDR (Voltaje Dependent Resistor)

Otra característica a tener en cuenta en los semiconductores es que su resistividad depende también de la tensión eléctrica a que son sometidos. Por ejemplo, el bloque semiconductor de la figura 5.2 no tiene un valor resistivo constante (como si fuera una resistencia simple), si no que su valor depende también de la tensión que tenga aplicada; esta característica se denomina *resistencia dinámica*. En base a esto se fabrican unos componentes que se llaman **VDR** (*Voltaje Dependent Resistor*), en los cuales su resistencia disminuye conforme aumenta la tensión aplicada (fig.5.9). Se utilizan mucho en la industria como protectores frente a subidas de tensión. También se conocen por **Varistores**.

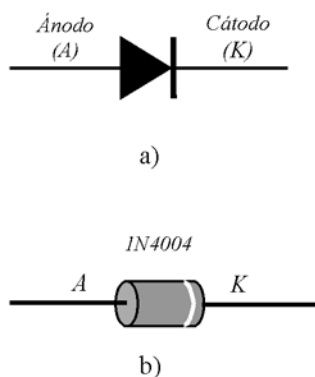
Mediante los materiales semiconductores (en especial el silicio), debidamente tratados, se fabrican todos los componentes electrónicos, entre los que destacan los *Diodos* y *Transistores*, por ser la base de todos los circuitos electrónicos, ya que en cualquier aparato de electrónica aparecen siempre dichos componentes. Veamos a continuación unos conceptos introductorias.



**Figura 5.9.** Componente cuya resistencia ( $\Omega$ ) disminuye cuando aumenta la tensión ( $V$ ) que tiene aplicada.

### 5.3.6 El diodo y el transistor bipolar

El diodo es un componente de dos patillas (fig.5.10), denominadas *ánodo* y *cátodo*, cuya función básica es permitir la circulación de corriente en un único sentido (cuando se polariza en forma directa; ánodo positivo y cátodo negativo). Su aplicación principal es como rectificador de la corriente alterna (la convierte en corriente continua). Este es el caso de lo que conoce por un diodo normal, rectificador, siendo un modelo práctico muy popular el **1N 4004** (fig.5.10).

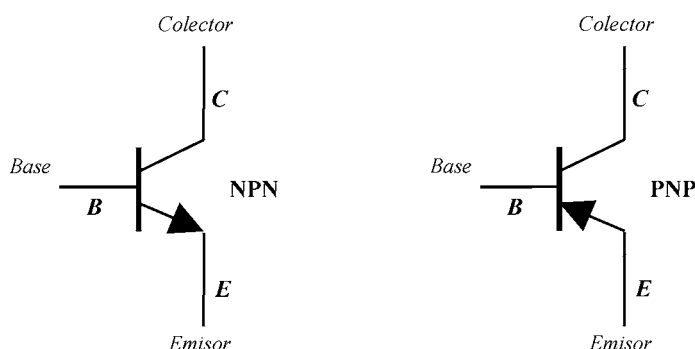


**Figura 5.10.** Diodo. a) Símbolo esquemático. b) Ejemplo de un modelo práctico de los más utilizados. Su función básica es convertir la corriente alterna en corriente continua (rectificación). Es uno de los componentes fundamentales de la electrónica.

Existen otros tipo de diodos (especiales) que, aunque también pueden realizar la función básica de rectificación, se fabrican para realizar otras funciones; es el caso, por ejemplo, del fotodiodo y del LED. Y también tenemos así el **diodo zener** (que se utiliza para estabilizar tensiones en las fuentes de alimentación), el **diodo varicap** (que se utiliza como condensador controlado por tensión, y se encuentra en los circuitos de sintonía de radio y TV), etc.

### 5.3.6.1 El Transistor bipolar

Es el componente fundamental de la electrónica, el más importante. El transistor básico (*bipolar*) tiene 3 patillas que se denominan *emisor* (E), *base* (B) y *colector* (C), cuya simbología se muestra en la figura 5.11.

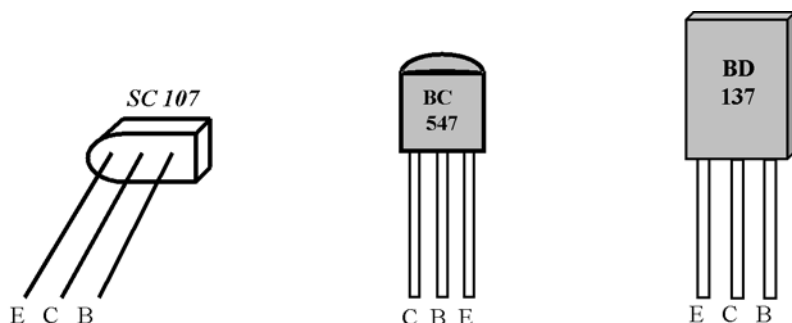


**Figura 5.11.** Simbología del transistor (bipolar); el componente fundamental de la electrónica. Su función básica es amplificar la corriente.

La función básica del transistor bipolar es *amplificar la corriente*; una débil corriente aplicada en la patilla base se obtiene a través de la patilla colector con mucha más intensidad, lo cual permite aplicaciones tales como: amplificador de sonido, amplificadores de señales de radio y TV, circuitos de control de relés, etc.

El transistor bipolar existe en dos versiones que se denominan NPN y PNP (fig.5.11), que se diferencian únicamente en la polaridad de las tensiones para su polarización. El más utilizado es del tipo NPN.

El aspecto práctico de algunos de los modelos más utilizados (NPN) se representa en la figura 5.12.

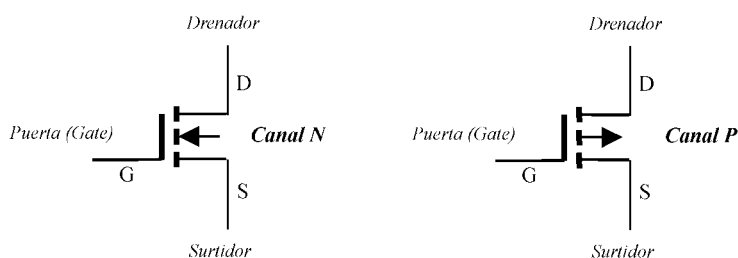


**Figura 5.12.** Aspecto práctico de algunos de los transistores (NPN) más utilizados.

El *SC 107* es un NPN de baja potencia bastante antiguo, pero que ha sido muy utilizado. El *BC 547* es un modelo similar, que en la actualidad se sigue utilizando mucho. El *BD137* es un NPN de mediana potencia, también muy utilizado.

### 5.3.6.2 Transistores de efecto de campo

Otros tipos de transistores de más avanzada tecnología (FET-MOS), que se basan en la conducción por efecto de campo eléctrico, son los normalmente utilizados por los fabricantes de circuitos integrados digitales para realizar memorias RAM, circuitos lógico-aritméticos (ALU), microprocesadores, etc. En estos transistores las patillas se denominan *Surtidor* (S), *Puerta* (G, de gate) y *Drenador* (D). Su simbología (transistores MOS) se muestra en la figura 5.13.



**Figura 5.13.** Transistores de tecnología MOS; son los normalmente utilizados en los circuitos integrados digitales. Existen modelos de potencia que se utilizan en electrónica general e industrial (fuentes de alimentación, amplificadores de sonido, control de motores, etc.)

También existen transistores MOS de potencia que se utilizan en las etapas de potencia de los equipos de sonido, fuentes de alimentación, control de motores, etc. Un ejemplo de transistor de este tipo es VN66AF (fig.5.14).



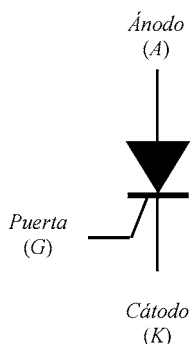
**Figura 5.14.** Aspecto práctico de un transistor MOS (canal N) de potencia; el VN66AF.

Otros componentes muy importantes, en especial, en electrónica industrial pero que también se utilizan mucho en circuitos de electrónica de consumo (fuentes de alimentación de TV, ordenadores, reguladores de luz, circuitos de flash, etc.) son los tiristores.

## 5.3.7 Tiristores

### 5.3.7.1 El tiristor SCR

El componente fundamental de esta familia de componentes se conoce por *tiristor*, aunque más exactamente es lo que se representa por **SCR**, que significa *rectificador controlado de silicio* (*Silicon Controller Rectifier*). Se comporta como un diodo rectificador normal, pero que sólo conduce cuando, además de polarizarse en forma directa, se le aplica un pequeño impulso de corriente (de pocos mA) en una patilla que se llama *puerta* (*gate*). O sea, es un componente de 3 patillas (fig.5.14), que se llaman *ánodo* (A), *cátodo* (K) y *puerta* (G).



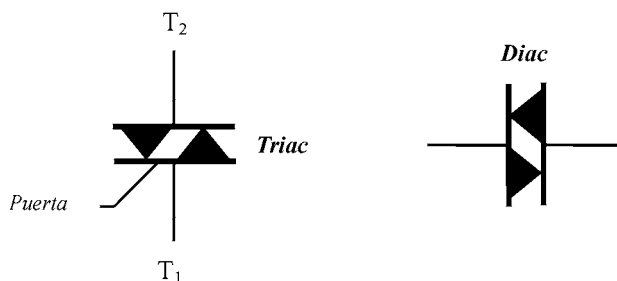
**Figura 5.14.** Símbolo del tiristor (SCR).

La función básica del **SCR** permite, entre otras, una aplicación básica que se llama *rectificador controlado* (de ahí la denominación de **SCR**); el valor de la corriente continua de salida se puede regular en función de los impulsos aplicados en la patilla puerta.

### 5.3.7.2 Triac y Diac

El **triac** es un componente similar al tiristor **SCR**, pero que permite la circulación de corriente de una forma bidireccional, lo cual lo hace especialmente interesante para el control y regulación de aparatos alimentados con corriente alterna (bombillas, motores, etc.). Con un *triac* se puede realizar por tanto la función de un relé de una forma electrónica. En la figura 5.15 se muestra su simbología. Al no

tener polaridad ya no se conservan los términos ánodo y cátodo, y sus patillas se denominan  $T_1$ ,  $T_2$  y puerta.



**Figura 5.1.5.** Simbología del Triac y del Diac.

No tiene polaridad, la corriente puede circular tanto en el sentido  $T_1$  a  $T_2$  como viceversa; se puede comportar entre  $T_1$  y  $T_2$  como si fuera un interruptor. Al igual que el SCR, para que conduzca es necesario aplicar un impulso de corriente (pocos mA) en la patilla puerta.

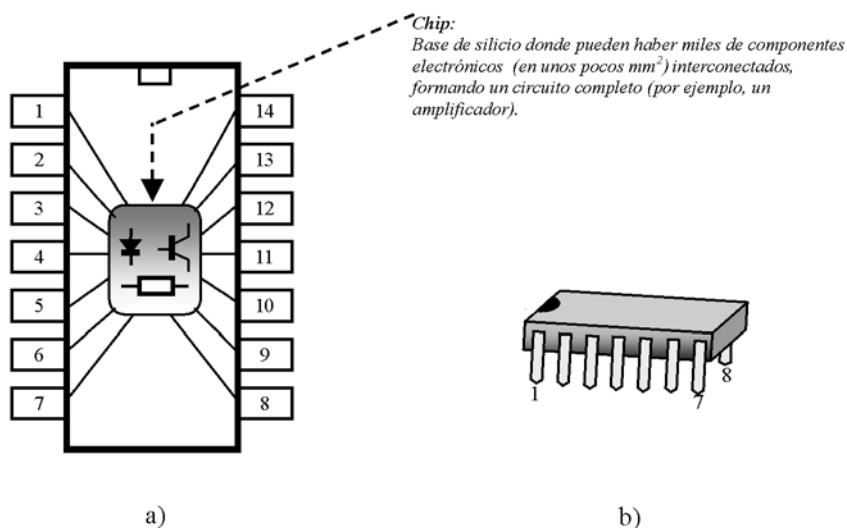
Existe un componente complementario al *triac*, que se llama **diac**, cuya simbología también se muestra en la figura 5.15. Como se puede observar, es un componente de dos patillas. La función básica que realiza es que se hace conductor (permite la circulación de corriente entre sus terminales) cuando la tensión aplicada alcanza un cierto valor (*tensión de ruptura*), que es de unos 32 V. Existen ciertas aplicaciones donde esta función es muy interesante, entre las que destacan los reguladores de luz (*dimmer*), velocidad (en máquinas de taladrar), potencia (en estufas eléctricas), etc. En estos montajes se suelen encontrar aparejados los componentes Triac y Diac. El Triac realiza la función de control de la carga (bombillas, motor, etc.) mediante los impulsos que le va aplicando el Diac a la patilla *puerta*.

### 5.3.8 Circuitos integrados (CI)

Cuando en un mismo proceso de fabricación se construyen, en especial, los componentes *resistencias*, *diodos* y *transistores* debidamente interconectados para formar circuitos completos que realizan una cierta función, aparece lo que se denomina **circuitos integrados** (CI), también conocidos por **chips** (fig.5.16). Se obtienen así circuitos integrados que son amplificadores de sonido, fuentes de tensión reguladas, circuitos de radio y TV, unidades aritméticas, memorias, etc. Las dimensiones totales de estos circuitos, *chips*, son entre unos 2 mm<sup>2</sup> (CI de baja escala de integración) y unos pocos cm<sup>2</sup> (CI de muy alta escala de integración).

El circuito integrado se construye en base a un soporte de material semiconductor (llamado *sustrato*), donde se forman todos los componentes a la vez (en el mismo proceso de fabricación) de un determinado circuito completo, por ejemplo, un amplificador de sonido.

Los primeros trabajos sobre circuitos integrados fueron obra de *J. Kilby* (de *Texas instruments*) y *R. Noyce* (de *Fairchild*) que, alrededor de 1959, diseñaron lo que se dio a conocer por circuito integrado, cuyo primer modelo comercial lo sacó *Fairchild* en 1961; un circuito *biestable*, compuesto por 4 transistores y 4 resistencias.



**Figura 5.16.** Representación esquemática (a) de un tipo de formato de circuito integrado (CI) de los más populares (DIL 14) y su aspecto práctico (b)

En la actualidad pueden integrarse hasta decenas de millones de componentes en una superficie de unos pocos centímetros, es el caso, por ejemplo, de los *microprocesadores Pentium IV*. Otros circuitos integrados muy utilizados son los amplificadores de sonido, circuitos de radio y TV, contadores digitales, memorias RAM, etc.

Se puede decir que la moderna electrónica está basada en los **chips**, que son consecuencia de los incesantes avances que se producen en la tecnología de los semiconductores, lo que a dado lugar a una minaturización espectacular de los componentes. Tiene que quedar claro, pues, que el soporte de la moderna electrónica son los materiales semiconductores (en especial, el silicio).

Y todo ello ha sido posible gracias a las investigaciones que llevaron a cabo, alrededor de 1948 (en los laboratorios *Bell* de Estados Unidos) los científicos *Bardeen*, *Brattain* y *Shockley*, que les llevó al descubrimiento del *transistor*; el componente fundamental de la electrónica.

Hasta aquí se ha procurado dar una visión introductoria a los componentes semiconductores más importantes. Mediante esta familiarización a la electrónica resultará mucho más sencillo el tratamiento con una cierta profundidad (conservando siempre el nivel técnico más apropiado de cara a la práctica) de todos los componentes y circuitos, lo cual se inicia a partir de este punto.

## 5.4 CONCEPTOS SOBRE FÍSICA DE LOS SEMICONDUCTORES

Las cuestiones teóricas básicas sobre los semiconductores, aunque no lo parezca en un principio, además de ser una cultura técnica, pueden resultar muy útiles en la práctica; por ejemplo, para deducir cómo se puede comprobar con un polímetro (*tester*) el estado de componentes como diodos, transistores, tiristores, etc.

Los razonamientos con rigor científico sobre los semiconductores, en general, no son sencillos (pueden resultar complicados de entender), pero simplificaremos las cosas enfocándolo hacia el nivel técnico-práctico que nos interesa.

### 5.4.1 Semiconductor intrínseco

Al material semiconductor natural (tal como se obtiene de la naturaleza) se le denomina *semiconductor intrínseco*. Para que resulte útil para fabricar los componentes electrónicos tiene que pasar por un proceso, que fundamentalmente consiste en añadirle otros materiales diferentes (*Boro*, *Fósforo*, *Arsénico*, etc.) para modificar su grado de conductividad.

En su forma natural, los materiales semiconductores se caracterizan porque sus átomos tienen 4 electrones en la última capa, que es un intermedio entre lo que tienen los buenos conductores y los buenos aislantes.

Se recuerda que la corriente eléctrica es la circulación de un flujo de electrones en un determinado sentido, porque abandonan sus átomos debido a ciertas fuerzas de atracción. Los electrones que dan lugar a esto son los que se encuentran en la última capa del átomo. Se puede decir que los átomos tienen tendencia a llegar a tener su última capa al completo ( $2n^2$ ) o bien conseguir, de alguna manera, que en ésta hayan 8 electrones, porque ello les da una estructura estable. Ejemplo de átomos con estructura estable son el *neón*, que tiene 8 electrones en su última capa, y el *helio* que, como su número atómico es  $Z = 2$ , sólo tiene una capa que está al completo con 2 electrones.

En los átomos con estructura estable difícilmente se desprenden electrones (es preciso mucha energía), por lo cual tienen el carácter de aislantes (no conducen la electricidad). Los átomos que no son así (estructura inestable) tienden a adquirir una estructura estable captando electrones de otro sitio o bien dejando escapar alguno de sus electrones de la última capa. Y esto se tiende a hacer siempre por la "ley del mínimo esfuerzo" (es decir, utilizándose la mínima energía). Por ejemplo, el átomo de cobre, puesto que tiene un solo electrón en la última capa, es un átomo de tipo inestable (buen conductor de la electricidad); su estructura estable la consigue simplemente desprendiéndose de dicho electrón, que es lo que dará lugar a un elemento portador de carga (y esto puede hacer que exista una corriente eléctrica). También podría adquirir la estructura estable adquiriendo 7 electrones exteriores, pero esto no lo hace porque requiere más energía (le cuesta más trabajo).

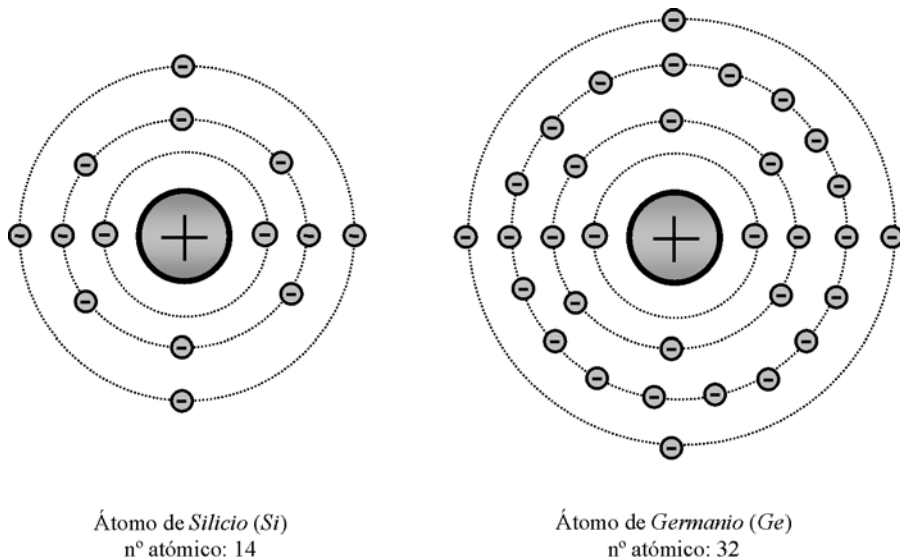
Los materiales normalmente utilizados en electrónica son el **Silicio** (*Si*), el **Germanio** (*Ge*) y el **Arseniuro de galio** (*GaAs*). De ellos, el más utilizado es el Silicio, el cual se encuentra abundantemente en la arena de playa.

El *Germanio* fue utilizado en los principios de la electrónica, pero después fue



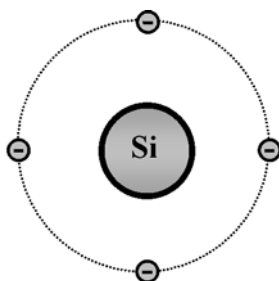
sustituido por el silicio debido a sus mejores características (en especial, frente a la temperatura). El *Arseniuro de galio* es el material normalmente utilizado para la fabricación de componentes emisores de luz (diodos LED), y también se emplea en la fabricación de modernos circuitos integrados (*microelectrónica*).

En la figura 5.17 se muestran la estructura electrónica de los átomos de *Silicio* y de *Germanio*, donde se puede observar la característica de poseer 4 electrones en la última capa.



**Figura 5.17.** Estructura de los átomos de Silicio y Germanio.

A nivel eléctrico, como ya se sabe, en la estructura atómica de los materiales debe prestarse especial atención a los electrones que hay en la última capa ya que son los que determinan el grado de conductividad del material. Por ello, muchas veces se utiliza una representación simplificada del átomo de silicio, en la que sólo se muestran los 4 electrones de la última capa (fig.5.18).

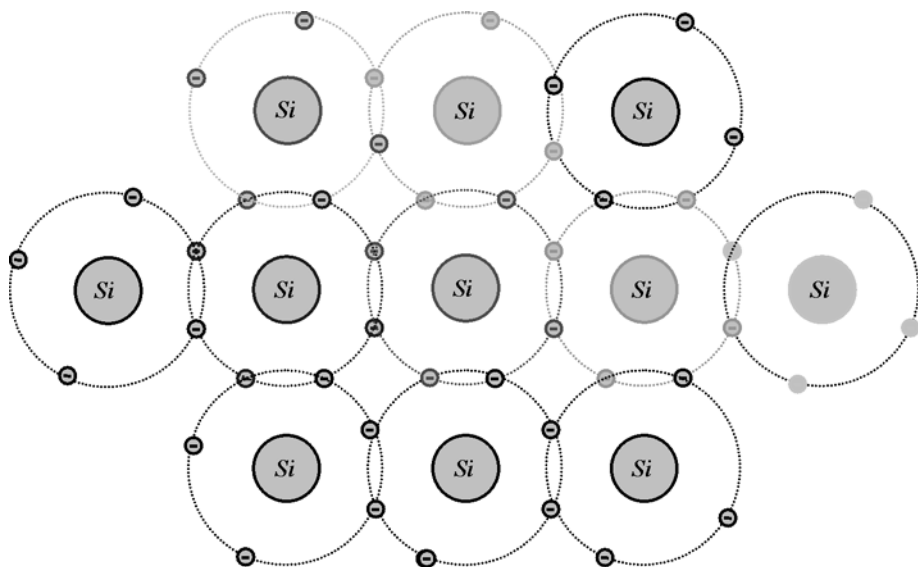


**Figura 5.18.** Representación simplificada del átomo de Silicio (Si)

El silicio, en su estado intrínseco, es un material de elevado valor resistivo ( $\Omega$ ) con la peculiaridad de que su resistencia disminuye cuando aumenta la temperatura. En según que condiciones, puede pasar de ser más o menos aislante a más o menos conductor. A temperaturas cercanas al cero absoluto ( $-273\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) se puede considerar como aislante, y a la temperatura ambiente (unos  $20^{\circ}\text{C}$ ) permite ya una cierta circulación de corriente, pero sin llegar a ser buen conductor; de dichas peculiaridades viene la denominación de semiconductor.

## 5.4.2 Enlace covalente

Los átomos del material están enlazados entre si de manera que comparten sus 4 electrones de la última capa; de esta manera consiguen tener 8 electrones en su ultima capa, para conseguir la estructura estable. Este tipo de enlace se conoce por *enlace covalente*, y se representa en la figura 5.19.



*Figura 5.19. Representación del enlace covalente.*

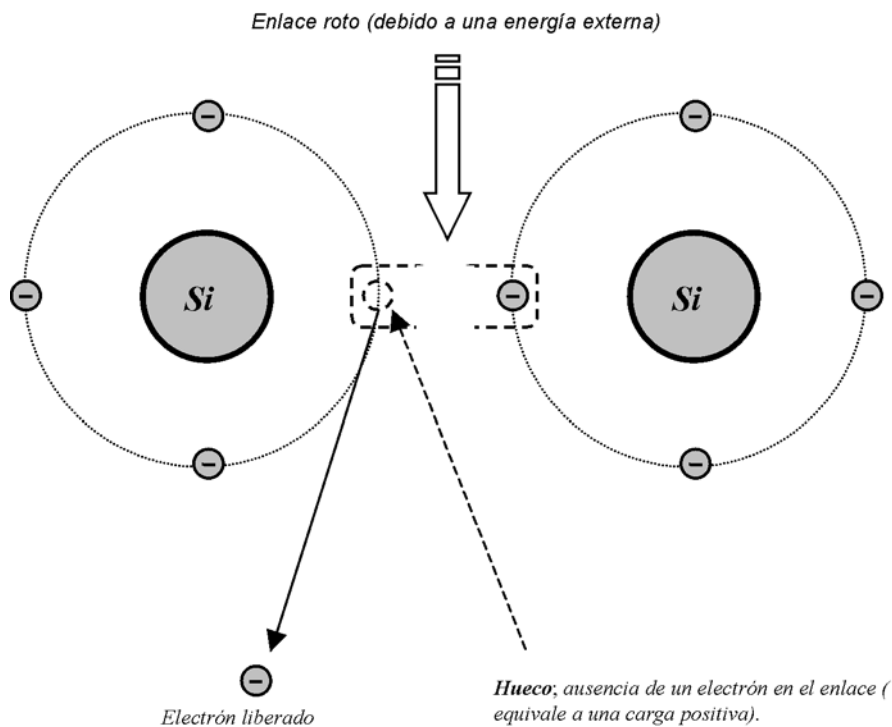
## 5.4.3 Portadores de carga: *Electrones y Huecos*

Como se sabe, para que exista una corriente eléctrica es necesario que hayan elementos portadores de carga, que normalmente son electrones. Para que exista conducción eléctrica a través de un semiconductor intrínseco es necesario pues que se rompan dichos enlaces, para que aparezcan así los elementos portadores de carga, para lo cual se requiere la aplicación de algún tipo de energía (temperatura, voltaje, etc.). Por ejemplo, a la temperatura ambiente se pueden romper ya algunos de

los enlaces y algunos electrones dejan el lugar que ocupan. En este caso, aparece un elemento portador de carga, que es el electrón; ¡pero esto da lugar también a otro tipo de portador de carga nuevo que se denomina **hueco**!, que es de polaridad contraria a la del electrón; o sea, positiva. Esto se representa en la figura 5.20.

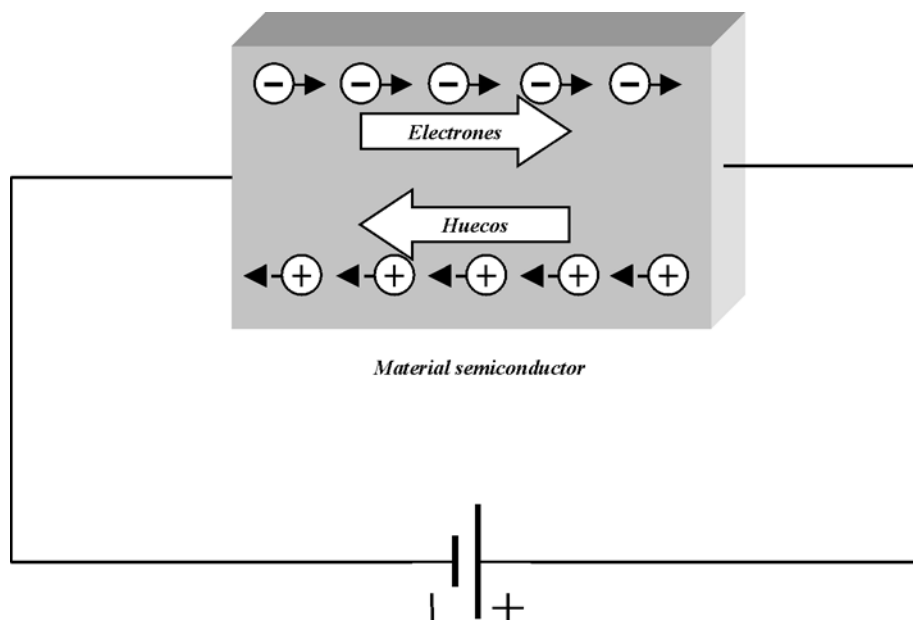
El hueco, físicamente, es la ausencia de un electrón en un enlace, pero este "vacío" representa una fuerza positiva que puede atraer a un electrón; si algún electrón libre se encuentra por las cercanías se puede encontrar atraído y ocupar ese vacío.

Pero hay que tener en cuenta que los átomos que no forman parte de ningún enlace (átomos aislados) que, por alguna circunstancia, pueden perder electrones no generan huecos (se convierten en iones positivos). No hay que olvidar este importante concepto: **Hueco, es la ausencia de un electrón en un enlace.**



**Figura 5.20.** Representación de la aparición de un hueco.

Aunque el hueco no constituye una partícula física como lo es el electrón, se reconoce su existencia porque da lugar a una corriente de cargas (positivas), **huecos**, que es en sentido contrario al de la corriente de electrones. O sea, a una corriente eléctrica de electrones le corresponde otra corriente en sentido contrario debido a los huecos que van dejando los electrones en la estructura del silicio, como se representa en la figura 5.21.



**Figura 5.21.** Representación de la circulación de los portadores de carga en un semiconductor.

Como se sabe, aunque el sentido verdadero de la corriente eléctrica es de negativo a positivo (los electrones se mueven hacia el polo positivo), existe lo que se llama *sentido convencional de la corriente*, que es en sentido contrario (positivo a negativo), siendo el normalmente utilizado en la práctica.

#### 5.4.4 Semiconductores N y P

Para que el silicio sea de utilidad para formar componentes electrónicos (por ejemplo, diodos), este es tratado mediante unos procesos físico-químicos. Esto se realiza introduciendo, de forma controlada, en la estructura del semiconductor intrínseco (esto se llama **dopado**) materiales de diferente estructura atómica, lo cual permite obtener materiales semiconductores de diferentes grados de conductividad. Así se obtienen semiconductores que se denominan **N** y **P**, que son los que luego son utilizados para fabricar los componentes electrónicos (*diodos, transistores, tiristores, circuitos integrados*, etc.).

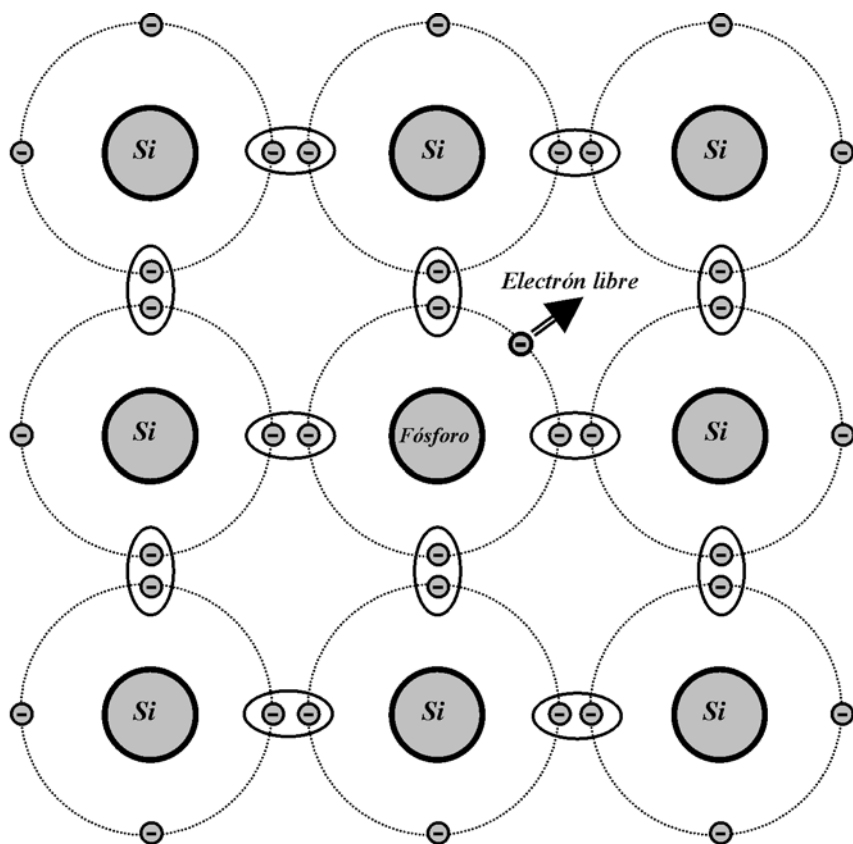
En los semiconductores N y P la conductividad es mucho mayor que en el silicio intrínseco; la corriente puede circular ya con una cierta facilidad, lo cual es debido a que, de alguna manera, se ha logrado un aumento de los elementos portadores de carga (que es lo que se necesita para que exista una corriente eléctrica).

### 5.4.1.1 Semiconductor N

En el caso del **semiconductor N**, dicho aumento de conductividad se logra añadiendo al semiconductor intrínseco material con átomos de los denominados penta-valentes (tienen 5 electrones en la última capa), por ejemplo, *fósforo*. Al combinarse el átomo de *fósforo* con los de silicio (fig.5.22), 4 de los electrones del átomo de fósforo se pueden enlazar con otros 4 electrones de los átomos del silicio, pero uno de los electrones del átomo de fósforo no se pueden enlazar y queda en lo que se llama en *estado libre*; cualquier aplicación de energía exterior (luz, temperatura, tensión) puede hacer que dicho electrón abandone su lugar, pudiendo haber así una corriente eléctrica.

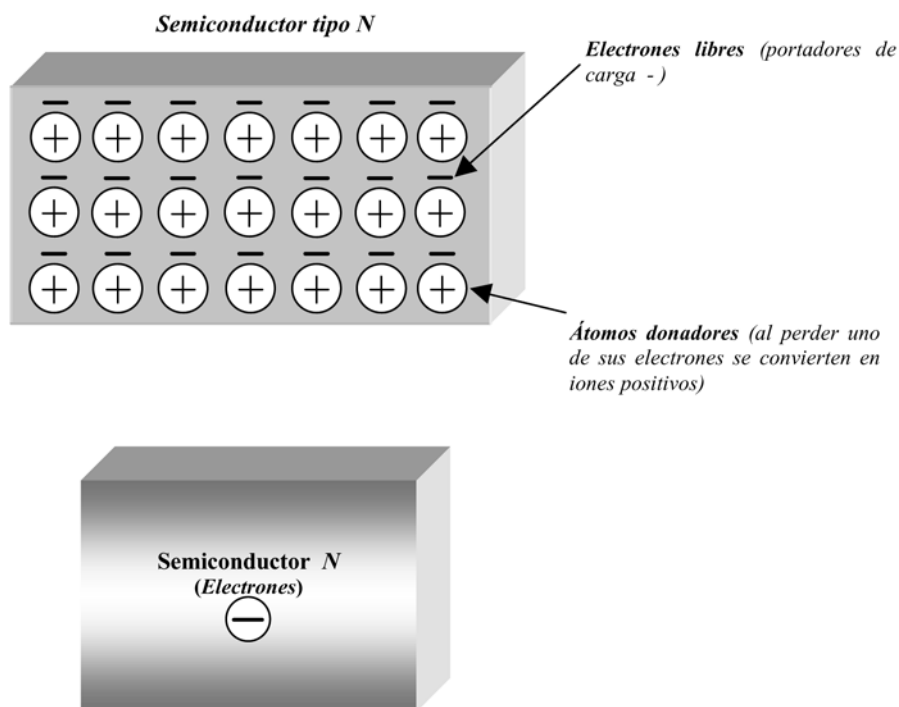
Por esta razón en el semiconductor N la conductividad es mayor que en el semiconductor intrínseco, el cual se caracteriza por ser abundante en portadores de carga electrones.

En el material semiconductor N la circulación de corriente se basa por tanto en electrones. La denominación de *N* viene de *negativo*, que es la naturaleza del portador de carga electrón.



**Figura 5.22.** Material N. Se obtiene añadiendo al semiconductor intrínseco, por ejemplo, *Fósforo* (cuyos átomos tienen 5 electrones en la última capa).

De una forma más simplificada, el material semiconductor de tipo N se puede representar como se muestra en la figura 5.23, resaltando su característica de ser abundante en electrones libres.

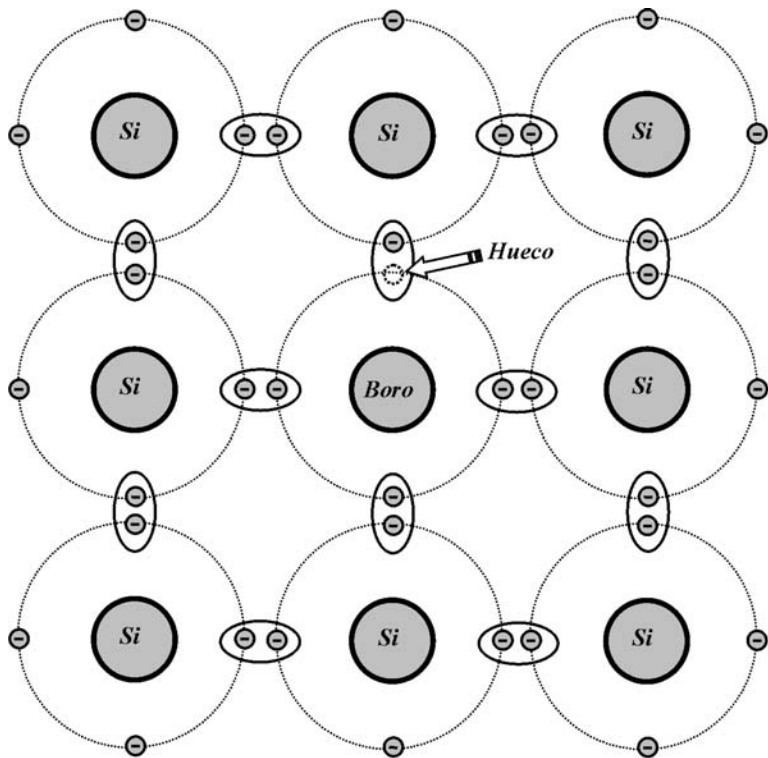


**Fig.5.23.** Representaciones simplificadas del semiconductor N, que se caracteriza por ser abundante en electrones libres (portadores de carga negativos).

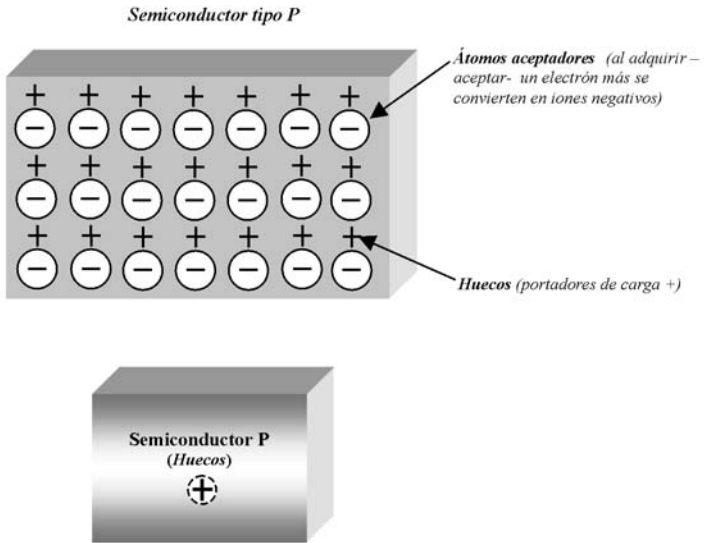
### 5.4.1.2 Semiconductor P

En el caso del **semiconductor P**, el aumento de la conductividad se consigue añadiendo al semiconductor intrínseco material con átomos que tengan 3 electrones en la última capa (trivalentes), por ejemplo, *boro (B)*. Al combinarse el *boro* con los átomos de silicio (fig.5.24), como el boro tiene 3 electrones periféricos y el silicio 4, en uno de los enlaces covalentes faltará un electrón, lo cual da lugar a un **hueco**; que, como se sabe, representa una carga positiva. A los materiales de dopado de este tipo (causan huecos) se denominan *impurezas aceptadoras*, por la cualidad de que el material resultante es aceptante de electrones.

Así, pues, el material semiconductor **P** se caracteriza por ser abundante en elementos portadores de carga positivos (de ahí lo de semiconductor **P**), que son los **huecos**, cuya representación simplificada se muestra en la figura 5.25.



**Figura 5.24.** Material P. Se obtienen añadiendo al semiconductor intrínseco, por ejemplo, Boro, cuyos átomos tienen 3 electrones en la última capa.



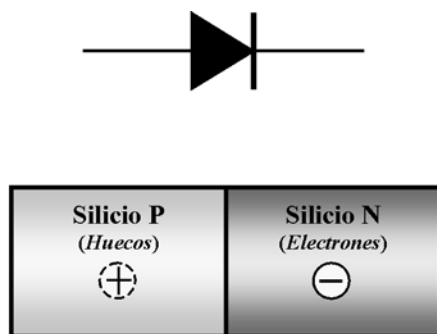
**Fig.5.25.** Representaciones simplificadas del semiconductor P, que se caracteriza por ser abundante en huecos (portadores de carga positivos).

## 5.5 LA UNIÓN PN: EL DIODO

A partir de aquí se empezarán ya a ver todos los componentes y circuitos con un mínimo de rigor, conservando siempre el nivel técnico más adecuado de cara a la práctica.

El diodo, además de haber visto una breve descripción anteriormente, ya se trató, en su aspecto práctico de aplicación fundamental (*rectificación*), en el tomo II. Pues ahora veremos ciertos aspectos básicos sobre funcionamiento interno y profundizaremos más en este importante componente.

Cuando un material semiconductor P se junta con otro de tipo N (a esto se llama *unión PN*), aparece un efecto que da lugar a uno de los componentes más importante de la electrónica: **el diodo** (fig.5.26). Sobre este aspecto se apoya la estructura de la electrónica de los semiconductores.



**Figura 5.26.** La unión de una material P con un material N da lugar al componente diodo.

En principio hay que saber que, aunque en los materiales semiconductores N y P sean abundantes los portadores de carga, dichos materiales en conjunto son de carácter electrónico neutro, ya que todos sus átomos tienen tantos electrones protones. Debido al dopado (añadido de otros materiales), en el N hay electrones sin enlazar (libres) y en el P enlaces a los que les falta un electrón (huecos), pero en conjunto la estructura eléctrica del conjunto es neutra (en el bloque de materia, siguen habiendo el mismo número de electrones como de protones).

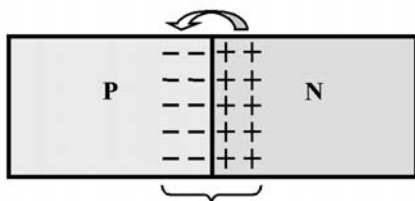
Pero al poner en contacto el material N con el P se producen unos efectos interesantes. En principio, los electrones del material N más próximos a la unión son atraídos por los huecos del material P, de manera que atraviesan la unión para llegar a ellos y poder ocupar los huecos. Esto da lugar a que en la zona de la unión N aparezca entonces una carga positiva (debido a los electrones que han salido) y en la zona P una carga negativa (debido a los electrones que ha recibido) (fig.5.27). Se puede decir que en esta primera fase del contacto se completan enlaces covalentes (parte de electrones sobrantes de la zona N pasan a llenar parte de huecos de la zona P). En dicho estado, pues, aparece una diferencia de potencial entre los extremos de la unión que se denomina **barrera de potencial**.



*Al salir electrones de N para llenar huecos de P, aparece una carga eléctrica en los límites de la unión.*



*Conforme van llegando más electrones va aumentando la carga eléctrica (hasta que se llega a un punto de estabilización)*



**Barrera de potencial**  
*Carga eléctrica que aparece entre la unión (en el silicio, unos 0,65 V)*

**Figura 5.27.** Formación de la barrera de potencial en la unión PN, al poner en contacto el material N con el material P.

Conforme van saliendo electrones de la zona N, atraídos por los huecos de la zona P, se va ampliando la barrera de potencial, de manera que llega un momento que los electrones se ven frenados por la fuerza de repulsión de la carga negativa que se forma en la zona P (que tienen que atravesar para seguir la recombinación) y entonces culmina la recombinación. Esta acumulación de cargas actúa pues como una especie de *barrera (eléctrica)* que impide que las cargas atraviesen la unión para seguir recombinándose; de ahí la denominación de *barrera de potencial*.

La barrera de potencial alcanza un valor de tensión eléctrica que está alrededor de 0,65 V (en el silicio). Este valor puede variar entre un componente y otro y también por la temperatura, y está directamente relacionado con el valor de 0,7 V típico que tanto aparece en los diodos. Esta tensión típica, como se ha dicho, varía con la temperatura, y lo hace disminuyendo unos 2,5 mV por cada °C de aumento de la temperatura. Es por ello que los diodos a veces también son utilizados como sensores de temperatura en algunas aplicaciones.

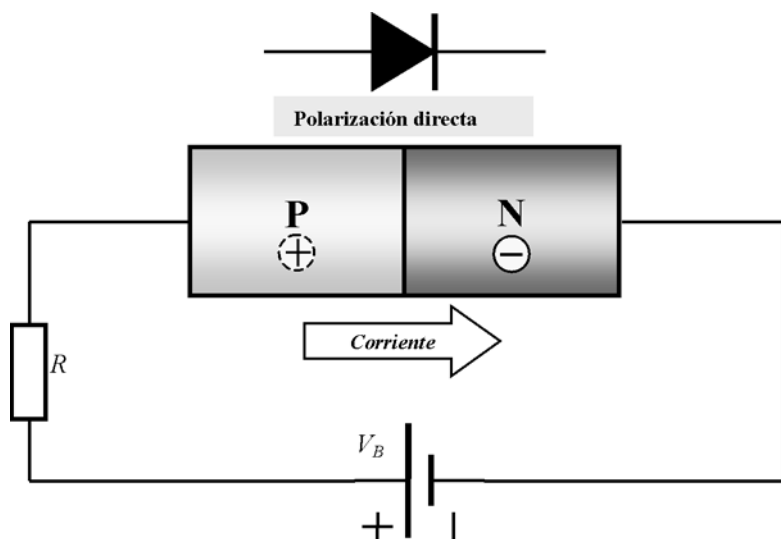
### 5.5.1 Polarización de la unión PN (*diodo*)

La polarización de la unión PN, que es un diodo, consiste en aplicar una tensión externa. Según con la polaridad con que se aplique dicha tensión, puede ocurrir que

los portadores de carga adquieran más energía y puedan atravesar la unión para seguir recombinándose, dando lugar esto a una intensidad por el circuito externo, o bien que se refuerce más la barrera de potencial y no exista circulación de corriente.

### 5.5.1.1 Polarización directa

Cuando se aplica el polo positivo al material P y polo negativo al N, se dice que la unión está en *polarización directa*; en este caso, el diodo se comporta como un conductor y se produce una circulación de corriente por el circuito (fig.5.28) en el sentido que ya sugiere el símbolo del diodo. Para que esto suceda, la tensión aplicada debe ser de unos 0,7 V, y a partir de este valor la intensidad aumenta rápidamente; para que no se deteriore el diodo tiene que haber siempre alguna resistencia en serie que para que la intensidad no supere un valor máximo (que indica el fabricante).



**Figura 5.28.** Unión PN en polarización directa; circula la corriente.

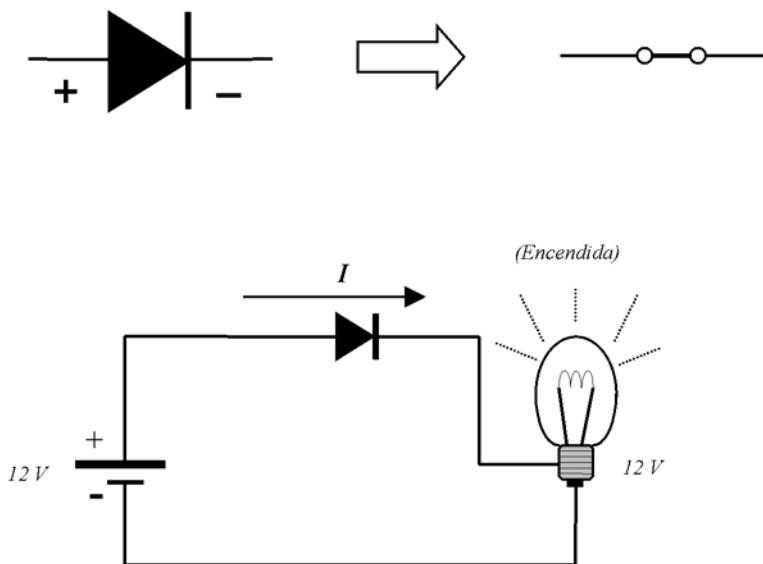
Un razonamiento con rigor científico del funcionamiento puede resultar complicado de entender pero, al nivel técnico que nos interesa, esto se puede interpretar de la manera siguiente: Suponiendo que la fuente de tensión ( $V_B$ ) tenga el valor apropiado (unos 0,7 V), el polo negativo hará que los electrones del material N adquieran más energía, debido a la fuerza de repulsión que ejerce sobre ellos (*polos iguales se repelen*), y entonces pueden atravesar la barrera de potencial y seguir llenando huecos. Por otra parte, como el polo positivo está conectado al material P, los huecos (cargas +) también se encuentran con una fuerza de repulsión que les empuja a combinarse con los electrones que le llegan del material N. A su vez, los elec-

trones que van saliendo del material N y atravesando la unión van dejando iones positivos (átomos que han perdido un electrón) que atraen electrones del polo negativo de la fuente de tensión externa y, tras atravesar la unión PN, entran en el polo positivo de la fuente; esto hace que circule una intensidad por el circuito.

De una forma más resumida, se puede decir que el polo negativo de la pila hace que los electrones de la zona N se recombinen con los huecos de la zona P, e inyecta electrones que entran por la zona N, atraviesan la unión y salen por la zona P absorbidos por el polo positivo de la fuente; de manera que se produce así una circulación de corriente por el circuito.

Así, en resumen, cuando la unión PN, un diodo, se polariza de esta manera (*forma directa*) se comporta como un conductor (fig.5.29).

**El diodo en polarización directa se comporta como un conductor**

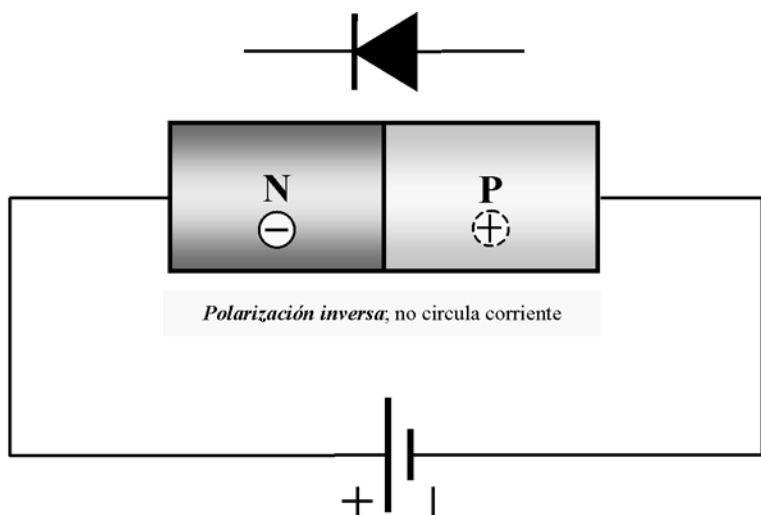


Ejemplo de circuito práctico

**Fig.5.29.** El diodo en polarización directa.

### 5.5.1.2 Polarización inversa

Cuando se aplica el polo positivo al material N y polo negativo al P, se dice que la unión está en *polarización inversa*; en este caso, el diodo no permite el paso de la corriente (fig.5.30). Pero hay que saber que si se supera un cierto valor de tensión (que el fabricante indica) entonces se produce un efecto de conducción que puede deteriorar el diodo.



**Figura 5.30.** Unión PN en polarización inversa; se comporta como un aislante (no hay circulación de corriente).

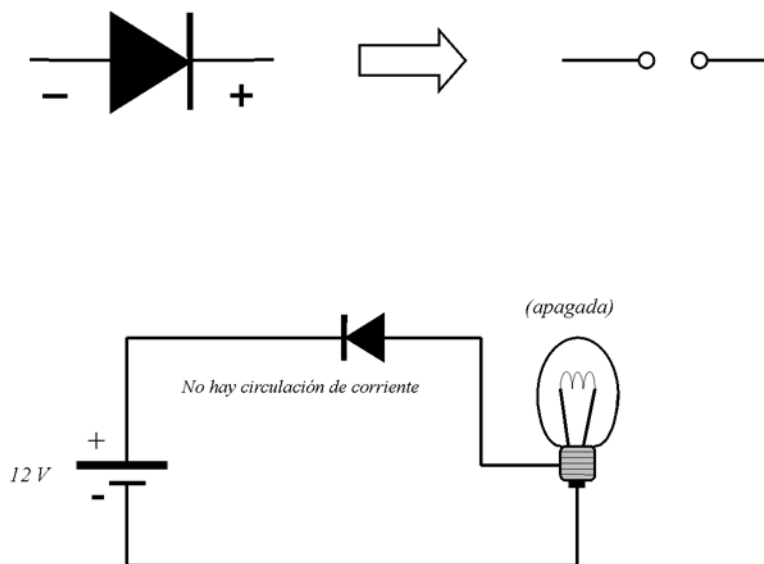
En polarización inversa, se puede decir que el polo positivo de la fuente absorbe electrones del material N y el polo negativo hace lo mismo con los huecos del material P, de manera que la barrera de potencial (fig.5.27) se ensancha y esto hace que no sea posible una circulación de corriente; en estas condiciones, la unión PN se comporta una resistencia de muy alto valor. Pero, por efectos de temperatura, si puede haber una mínima corriente, que se denomina **corriente de fugas**, pero es de un valor tan bajo ( $nA$  en el silicio) que no se tiene en cuenta. La tensión inversa casi no afecta al valor de dicha corriente, pero la temperatura sí; muy aproximadamente, la corriente de fugas dobla su valor por cada aumento de  $10^{\circ}C$  de la temperatura. Y si la tensión inversa supera ciertos valores puede aportar la suficiente energía de campo eléctrico como para que se rompan los enlaces covalentes del material y esto de lugar a un valor de corriente que provoque la destrucción de la unión PN; a este valor de tensión se denomina **tensión de ruptura**.

En resumen práctico, el diodo se comporta como un interruptor que puede estar abierto o cerrado según la polarización:

Polarización directa (conduce)  $\Rightarrow$  Interruptor cerrado (fig.5.29)  
 Polarización inversa (no conduce)  $\Rightarrow$  Interruptor abierto (fig.5.31)

Hasta aquí se ha procurado hacer una presentación que de una visión general de los componentes semiconductores más normales en electrónica, así como una mínima introducción a la teoría sobre la física de los semiconductores. A partir de este punto se seguirá en el siguiente *tomo (IV)*, que se iniciará ampliando el tema de los diodos para seguidamente tratar, con detalle y de una forma práctica, los transistores y sus aplicaciones.

**El diodo en polarización inversa se comporta como un aislante**



**Fig.5.31.** El diodo en polarización inversa.

Un resumen del contenido (estimado) de materias del *tomo IV* es:

*Características prácticas de los diodos.*

*Puentes rectificadores.*

*Tipos y características prácticas de los diodos LED.*

*Displays de 7 segmentos.*

*El diodo zener y sus aplicaciones.*

*Diodos varicap.*

*Resumen sobre circuitos rectificadores.*

*Circuitos integrados reguladores de tensión.*

*Diseño práctico de circuitos alimentadores.*

*El transistor bipolar y sus aplicaciones en audio y en circuitos de conmutación.*

*Transistores de efecto de campo (FET-MOS).*

*Circuitos integrados de tiempo (CI 555, CI 74LS121).*

*Circuitos prácticos generadores de señal y temporizadores.*

En sucesivos tomos se tratarán todos los demás componentes y sistemas de mayor interés de la electrónica aplicada, dentro las ramas de *amplificación de sonido* (audio), *electrónica industrial* y *técnicas digitales*.

# Respuestas a los ejercicios propuestos

## CAPÍTULO 1

### Ejercicio 1.1

Resistencia pura es la que no depende de la frecuencia, sólo de sus características físicas.

### Ejercicio 1.2

Al tratarse de una resistencia pura, su valor no depende de la frecuencia, y se tiene:

$$\text{a) } I_p = \frac{V_p}{R} = \frac{20}{20} = 1 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_{rms} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,414} = 0,707 \text{ A}$$

$$\text{b) } P_p = V_p I_p = 20 \times 1 = 20 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad P_{rms} = \frac{P_p}{2} = 10 \text{ W}$$

$$\text{c) Como } \omega = 2 \pi f = 2 \pi \times 1000 \approx 6283 \text{ y } I_p = 1 \text{ A:}$$

$$i = I_p \text{ sen } \omega t \approx \text{sen } 6283 t$$

### Ejercicio 1.3

Reactancia inductiva es el efecto de oposición, resistencia ( $\Omega$ ) que presenta la inductancia (bobinas) al paso de la c.a., lo cual da lugar asimismo a que la corriente circule con retraso de  $90^\circ$  con respecto a la tensión. Al venir dada por  $X_L = \omega L$ , su valor aumenta con la frecuencia.

### Ejercicio 1.4

$$X_L = \omega L = 2 \pi f L = 2 \times 3,14 \times 50 \times 3 = 942,47 \Omega$$

### Ejercicio 1.5

Reactancia capacitiva es el efecto de oposición, resistencia ( $\Omega$ ) que presenta la capacidad (condensadores) al paso de la c.a., lo cual da lugar asimismo a que la

corriente circule con adelanto de  $90^\circ$  con respecto a la tensión. Al venir dada por

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \text{ su valor disminuye con la frecuencia.}$$

### Ejercicio 1.6

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 50 \times 4,7 \cdot 10^{-6}} = 677,25 \Omega$$

### Ejercicio 1.7

$$a) X_L = \omega L = 31416 \times 2 = 62832 \Omega \Rightarrow$$

$$I_{rms} = \frac{\frac{V_p}{\sqrt{2}}}{X_L} = \frac{\frac{24}{\sqrt{2}}}{62832} = 0,00027 A = 0,27 mA$$

$$b) i = I_p \sin \omega t = 0,00027 \sqrt{2} \sin \omega t =$$

$$0,00038 \sin(31416t - 90^\circ)$$

$$c) Q = V I = \frac{24}{\sqrt{2}} \times 0,00027 = 0,00458 VAr$$

### Ejercicio 1.8

$$a) X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314,16 \times 470 \cdot 10^{-9}} = 6772,5 \Omega \Rightarrow I_p = \frac{V_p}{X_C} = \frac{170}{6772,5} = 0,025 A = 25 mA$$

$$i = 0,025 \sin(314,16t + 90^\circ)$$

$$b) I_{rms} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{0,025}{1,414} = 0,0176 A = 17,6 mA$$

$$c) Q = V I = \frac{170}{\sqrt{2}} \times 0,0176 \approx 2,1 VAr$$

### Ejercicio 1.9

a) Como la potencia aparente es  $S = VI = 220 \times 12 = 2640 VA$ , para una potencia activa de  $P = 2.200 W$  se obtiene que el factor de potencia es:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{2200}{2640} = 0,833$$

b) Conociendo el factor de potencia se halla el ángulo de desfase:

$$\cos \varphi = 0,833 \Rightarrow \varphi = \cos^{-1} 0,833 \approx 33,56^\circ$$

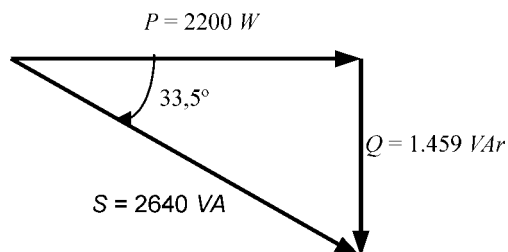
El valor de la potencia reactiva resulta ser, pues:

$$Q = V I \sen \varphi = 220 \times 12 \times \sen 33,56^\circ \approx 1459,4 \text{ VAr}$$

También se puede hallar de esta otra manera:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \Rightarrow Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{2640^2 - 2200^2} = 1459,3 \text{ VAr}$$

c) Con los datos obtenidos, el triángulo de potencias es (fig.R1.1):



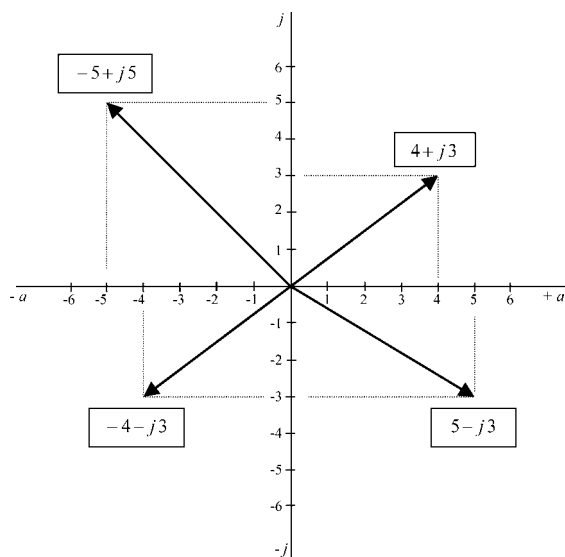
**Figura R1.1.**

## CAPÍTULO 2

### Ejercicio 2.1

La representación gráfica (plano complejo) de los números complejos es:

a)  $4 + j3$ , b)  $-5 + j5$ , c)  $-4 - j3$ , d)  $5 - j3$  es (fig.R2.1):



**Figura R2.1.**



**Ejercicio 2.2**

La conversión a la forma binómica de los vectores en forma polar de la figura 2.26 es:

a)  $5 \angle 53,1^\circ$

b)  $4 \angle -45^\circ$

$$a) \left. \begin{array}{l} 5 \cos 53,1^\circ = 3 \\ 5 \sin 53,1^\circ = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + j 4 = 5 \angle 53,1^\circ$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 4 \cos 45^\circ = 2,83 \\ 4 \sin -45^\circ = -2,83 \end{array} \right\} \Rightarrow 2,83 - j 2,83 = 4 \angle -45^\circ$$

Obsérvese que:  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$  y  $\sin -\varphi = -\sin \varphi$ .

Cuando se hace un coseno se puede prescindir del signo del ángulo porque el coseno siempre es positivo ( $\cos -\varphi = \cos \varphi$ ).

**Ejercicio 2.3**

La conversión de los siguientes números complejos a la forma polar es:

a)  $9 + j 4,1$

b)  $2,3 - j 35$

a)

$$\left. \begin{array}{l} Z = \sqrt{9^2 + 4,1^2} = \sqrt{97,81} = 9,89 \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{4,1}{9} = 24,49^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 9,89 \angle 24,49^\circ = 9 + j 4,1$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} Z = \sqrt{2,3^2 + 35^2} = \sqrt{1230,29} \cong 35,07 \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{-6}{2} \cong -86,24^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 35,07 \angle -86,24^\circ = 2,3 - j 35$$

**Ejercicio 2.4**

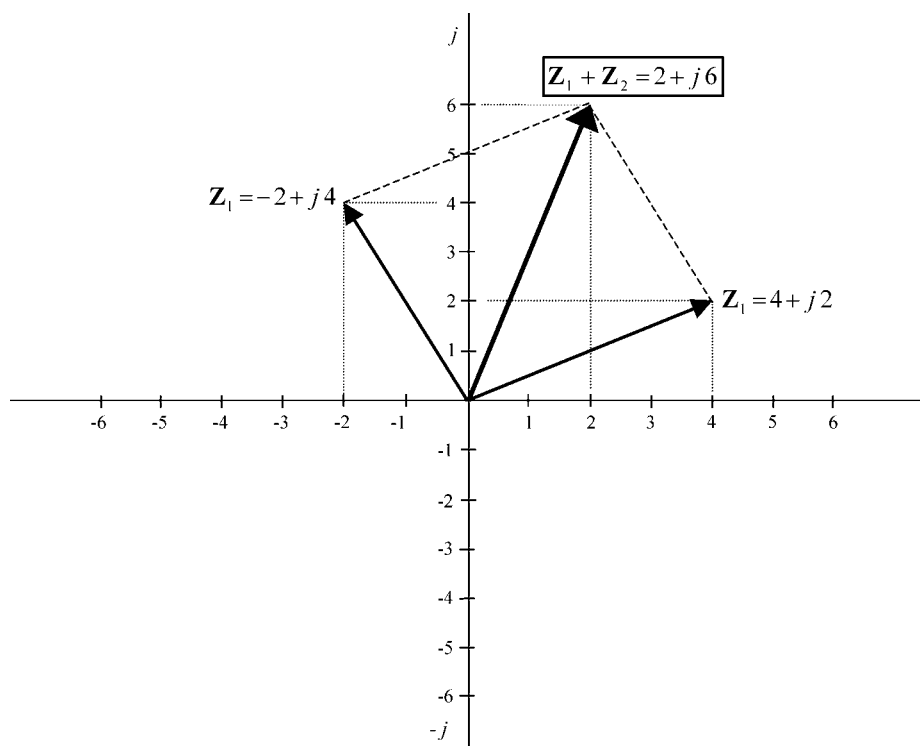
La suma de los siguientes números complejos es:

$$Z_1 = 4 + j 2$$

$$Z_2 = -2 + j 4$$

$$Z_1 + Z_2 = (4 + j 2) + (-2 + j 4) = 2 + j 6$$

Y la representación gráfica de dicha suma en el plano complejo es (fig.R2.2):



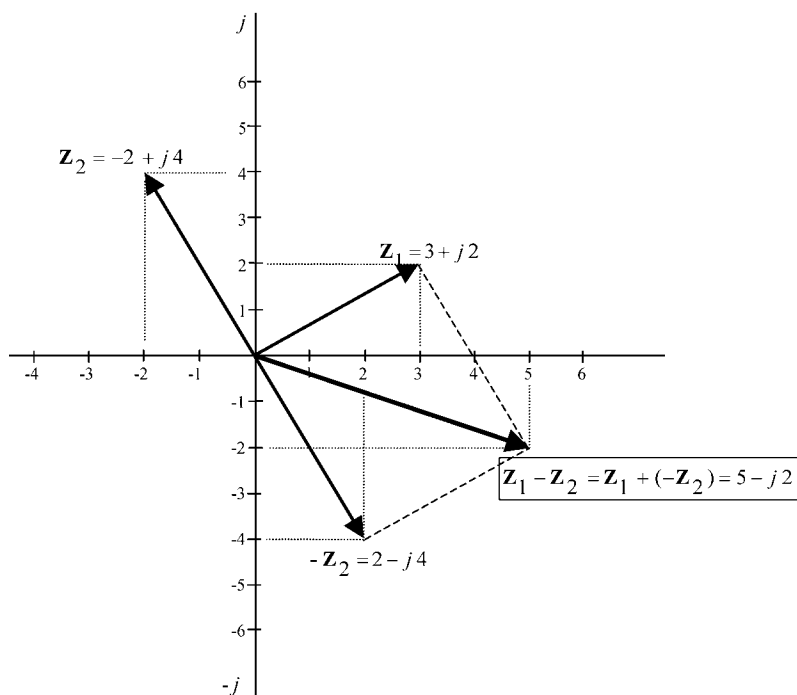
**Figura R2.2.**

### Ejercicio 2.5

El vector resta  $Z_1 - Z_2$  se obtiene de la manera:

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = 3 + j2 \\ Z_2 = -2 + j4 \end{array} \right\} \quad Z_1 - Z_2 = (3 + j2) - (-2 + j4) = 3 + 2 + j2 - j4 = \boxed{5 - j2}$$

En la figura R2.3 se representa de forma gráfica el resultado de dicha resta.



**Figura R2.3.**

### Ejercicio 2.6

En principio, representamos las intensidades en su forma polar:

$$i_1 = 32 \text{ Sen } (\omega t + 30^\circ) \Rightarrow I_T = \frac{32}{\sqrt{2}} \quad \angle 30^\circ = 22,63 \quad \angle 30^\circ$$

$$i_2 = 7 \text{ Sen } (\omega t + 90^\circ) \Rightarrow I_2 = \frac{7}{\sqrt{2}} \quad \angle 90^\circ = 4,95 \quad \angle 90^\circ$$

Y como la suma se tiene que realizar en la forma binómica, mediante la calculadora pasamos de la expresión polar a la binómica:

$$I_T = 22,63 \quad \angle 30^\circ \Rightarrow I_1 = 19,6 + j11,3$$

$$I_2 = 4,95 \quad \angle 90^\circ \Rightarrow I_2 = j4,95$$

Siendo por tanto la suma:

$$I_1 + I_2 = (19,6 + j11,3) + (j4,95) = 19,6 + j16,25$$

Que, expresada en la forma polar es:

$$I_1 + I_2 = 19,6 + j 16,25 = 25,46 \angle 39,6^\circ$$

Se trata de una intensidad (eficaz) de 25,46 A desfasada 39,6°.

### Ejercicio 2.7

a) En el caso de la resistencia, la intensidad vendrá dada por:

$$I_R = \frac{V \angle 45^\circ}{R \angle 0^\circ} = \frac{50 \angle 45^\circ}{20 \angle 0^\circ} = 2,5 A \angle 45^\circ$$

b) En el caso de la inductancia:

$$I_L = \frac{V \angle 45^\circ}{X_L \angle 90^\circ} = \frac{50 \angle 45^\circ}{50 \angle 90^\circ} = 1 A \angle -45^\circ$$

c) En el caso del condensador:

$$I_C = \frac{V \angle 45^\circ}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{50 \angle 45^\circ}{200 \angle -90^\circ} = 0,25 A \angle 135^\circ$$

### Ejercicio 2.8

a) Las expresiones

$$\begin{aligned} i_1 &= 10 \text{ Sen } (6.283 t + 45^\circ) \\ i_2 &= 20 \text{ Sen } (6.283 t + 90^\circ) \end{aligned}$$

indican que  $i_1$  es una intensidad de 10 A de pico cuya frecuencia, es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6283}{6,283} = 1.000 \text{ Hz} = 1 \text{ kHz}$$

Siendo su desfase de 45°.

En el caso de  $i_2$ , se trata de una intensidad de 20 A de pico, de igual frecuencia a la anterior, siendo su desfase 90°.

En la forma polar, las expresiones de dichas intensidades son:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 7,07 \angle 45^\circ \\ I_2 &= \frac{20}{\sqrt{2}} \angle 90^\circ = 14,14 \angle 90^\circ \end{aligned}$$

Dichas expresiones indican que la intensidad  $I_1$  tiene un valor eficaz de 7,07 A y su desfase es de  $45^\circ$ . De forma análoga,  $I_2$  es de 14,14 A eficaces desfasada  $90^\circ$ .

Puesto que la resta, sólo se puede realizar en la forma binómica, convertimos las expresiones polares en binómicas (que resulta muy sencillo mediante calculadora):

$$\begin{aligned} I_1 &= 7,07 \angle 45^\circ \Rightarrow I_1 = 5 + j 5 \\ I_2 &= 14,14 \angle 90^\circ \Rightarrow I_2 = j 14,14 \end{aligned}$$

La operación de resta nos da el siguiente resultado:

$$I_2 - I_1 = j 14,14 - (5 + j 5) = -5 + j 14,14 - j 5 = -5 + j 9,14$$

Pasando el resultado a la forma polar:

$$I_2 - I_1 = -5 + j 9,14 \Rightarrow 10,4 \angle 118,7^\circ$$

Así, la onda de intensidad resultante tiene un valor (eficaz) de 10,4 A y un desfase de  $118,7^\circ$ .

## CAPÍTULO 3

### Ejercicio 3.1

a) Como  $R = 10\Omega$  y  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 500 \times 20 \cdot 10^{-6}} = 15,92\Omega$ , la impedancia

$$\text{es: } Z = R - j X_C = 10 - j 15,9$$

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sqrt{10^2 + 15,92^2} = 18,8 \Omega \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{-15,92}{10} = -57,8^\circ \end{aligned} \right\} Z = 18,8 \angle -57,8^\circ$$

El valor de la intensidad y su desfase es:

$$I = \frac{E \angle 0^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{\left(\frac{300}{\sqrt{2}}\right) \angle 0^\circ}{18,8 \angle -57,8^\circ} = 11,28 A \angle 57,8^\circ$$

Puesto que los 300 V son de pico, se ha dividido por  $\sqrt{2}$  para obtener el valor eficaz. Así, la intensidad es de 11,28 A y va adelantada  $57,8^\circ$  respecto a la tensión.

b) El valor de las tensiones en la resistencia y condensador son:

$$V_R = R \angle 0^\circ \cdot I \angle \varphi = 10 \angle 0^\circ \times 11,28 \angle 57,8^\circ = 112,8 \text{ V} \angle 57,8^\circ$$

$$V_C = X_C \angle -90^\circ \cdot I \angle \varphi = 15,92 \angle -90^\circ \times 11,28 \angle 57,8^\circ = 179,6 \text{ V} \angle -32,2^\circ$$

c) El valor de la potencia consumida es la potencia disipada en la resistencia. O sea, pues:

$$P = I^2 R = 11,28^2 \times 10 = 1272,3 \text{ W}$$

### Ejercicio 3.2

Como que:  $e = 500 \text{ sen } 2500 t = V_p \text{ sen } \omega t \Rightarrow E_p = 500 \text{ V}$  y  $\omega = 2500$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2500 \times 20 \cdot 10^{-6}} = 20 \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sqrt{10^2 + 20^2} = 22,36 \Omega \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{-20}{10} = -63,4^\circ \end{aligned} \right\} Z = 22,36 \angle -63,4^\circ$$

La intensidad es:

$$I_p = \frac{E_p \angle 0^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{500 \angle 0^\circ}{22,36 \angle -63,4^\circ} = 22,36 \text{ A} \angle 63,4^\circ$$

Expresión analítica de la intensidad:  $i = 22,36 \text{ sen } (2500 t + 63,4^\circ)$

### Ejercicio 3.3

La potencia que consume la bobina se puede obtener por:

$$P = I^2 R$$

Siendo R la resistencia del hilo.

$$X_L = \omega L = 2\pi \times 50 \times 2 = 628,3 \Omega \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{30^2 + 628,3^2} = 629 \Omega$$

El valor de la Z es casi igual que el de la  $X_L$  porque  $X_L$  es mucho más grande que la R. El valor de la potencia consumida es:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{220}{629} = 0,35 \text{ A} \Rightarrow \boxed{P = I^2 R = 0,35^2 \times 30 = 3,67 \text{ W}}$$

## Ejercicio 3.4

a) Como los valores de las reactancias son:

$$X_L = \omega L = 2\pi \times 50 \times 0,025 = 7,85 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 50 \cdot 10^{-6}} = 63,66 \, \Omega$$

de la fórmula  $\varphi = \tan^{-1} \frac{X_C - X_L}{R}$  se halla el valor de la resistencia:

$$\operatorname{tg} 63,3^\circ = \frac{X_C - X_L}{R} \Rightarrow R = \frac{X_C - X_L}{\operatorname{tg} 63,3^\circ} = \frac{63,66 - 7,85}{1,98} = 28 \, \Omega$$

b) La expresión de la impedancia es:  $Z = R + j X_L - j X_C = 28 - j 55,81$

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sqrt{28^2 + 55,81^2} = 62,44 \, \Omega \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{-55,81}{28} = -63,3^\circ \end{aligned} \right\} \quad Z = 62,44 \angle -63,3^\circ$$

Siendo entonces el valor de la intensidad:

$$I_p = \frac{E \angle 0^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{220 \angle 0^\circ}{62,44 \angle -63,3^\circ} = 3,52 \, A \angle 63,3^\circ$$

Se obtiene que las caídas de tensión en los componentes son:

$$\left\{ \begin{aligned} V_C &= X_C \angle -90^\circ \times I \angle \varphi = 63,66 \angle -90^\circ \times 3,52 \angle 63,3^\circ = 224 \, V \angle -26,7^\circ \\ V_R &= R \angle 0^\circ \cdot I \angle \varphi = 28 \angle 0^\circ \times 3,52 \angle 63,3^\circ = 98,56 \, V \angle 63,3^\circ \\ V_L &= X_L \angle 90^\circ \times I \angle \varphi = 7,85 \angle 90^\circ \times 3,52 \angle 63,3^\circ = 27,63 \, V \angle 153,3^\circ \end{aligned} \right.$$

a) La frecuencia de resonancia del circuito es:

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{L C}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{0,025 \times 50 \cdot 10^{-6}}} = 142,3 \, Hz$$

## Ejercicio 3.5

De la fórmula de la frecuencia de resonancia se obtiene el valor del condensador:

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{L C}} \Rightarrow f_r^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 \cdot L \cdot C} \Rightarrow C = \frac{1}{(2\pi)^2 f_r^2 L}$$

$$C = \frac{1}{(2\pi)^2 \times (10^4)^2 \times 0,020} \approx 12,6 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 12,6 \text{ nF}$$

## CAPÍTULO 4

### Ejercicio 4.1

El circuito de la figura 4.20, aplicado para sintonizar emisoras de radio, si  $L = 100 \mu\text{H}$ , sintonizara una emisora de  $f = 969 \text{ kHz}$  cuando la capacidad del condensador sea de:

Despejando el valor de  $C$  en la fórmula de la resonancia:

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{L C}} \Rightarrow C = \frac{1}{(2\pi)^2 f^2 L} = \frac{1}{(6,28)^2 \times (969 \cdot 10^3) \times 100 \cdot 10^{-6}} = 270 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 270 \text{ pF}$$

### Ejercicio 4.2

a) Al ser el rendimiento de cada motor del 85 % ( $\eta = 0,85$ ) cada uno consumirá una potencia de:

$$\eta = \frac{P_N}{P} \Rightarrow P = \frac{P_N}{\eta} = \frac{1500}{0,85} = 1764,7 \text{ W}$$

Se tiene pues:

$$\text{Potencia total obtenida} \Rightarrow P_N = 3 \times 1500 = 4500 \text{ W}$$

$$\text{Potencia total absorbida} \Rightarrow P_T = 3 \times 1764,7 = 5294,1 \text{ W}$$

$$\text{Rendimiento} \Rightarrow \eta = \frac{4500}{5294,1} = 0,85 \text{ (85\%)}$$

Valores del triángulo de potencias de los motores (fig.R4.1a):

$$\cos \varphi = 0,8 \Rightarrow \varphi = \cos^{-1} \approx 36,87^\circ$$

$$\text{Potencia activa} \Rightarrow P = 1764,7 \text{ W}$$

$$\text{Potencia reactiva} \Rightarrow Q = P \operatorname{tg} \varphi = 1764,7 \times \operatorname{tg} 36,87^\circ = 1323,5 \text{ VAR}$$

$$\text{Potencia aparente} \Rightarrow S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1764,7^2 + 1323,5^2} = 2205,86 \text{ VA}$$

Valores del triángulo de total de potencias:

Partiendo de que las potencias totales activa (P) y reactiva (Q) en un sistema se

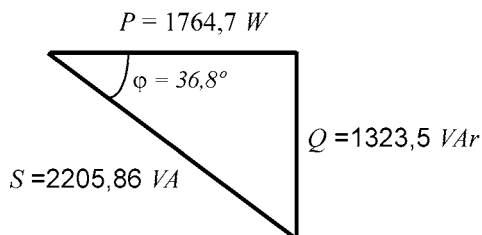


obtienen sumando todas las potencias parciales del mismo tipo (equivale a sumar los triángulos de potencias), se tiene (fig.R4.1b):

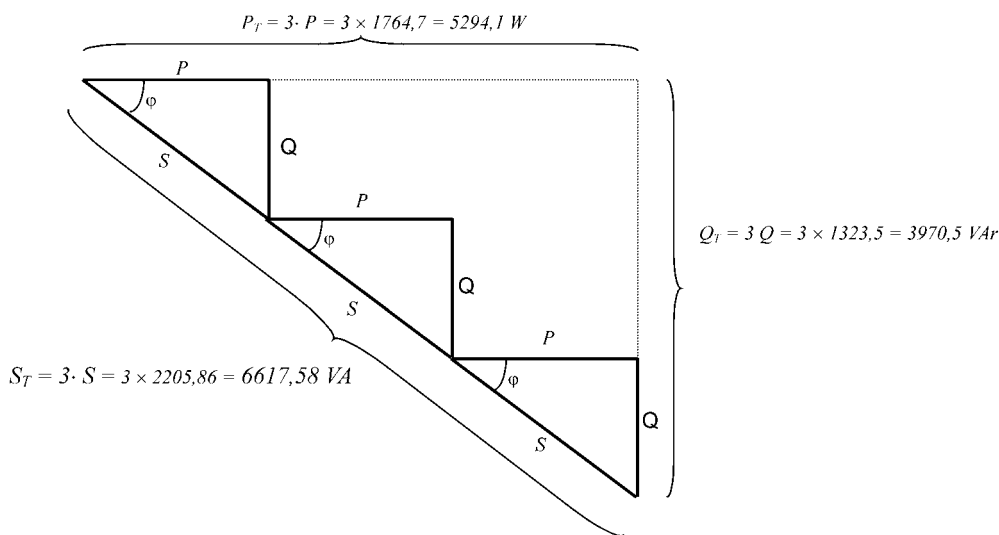
$$\text{Potencia total activa} \Rightarrow P_T = 3 P = 3 \times 1764,7 = 5294,1 \text{ W}$$

$$\text{Potencia total reactiva} \Rightarrow Q_T = 3 Q = 3 \times 1323,5 = 3970,5$$

$$\text{Potencia total aparente} \Rightarrow S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{5294,1^2 + 3970,5^2} = 6617,58 \text{ VA}$$



a)



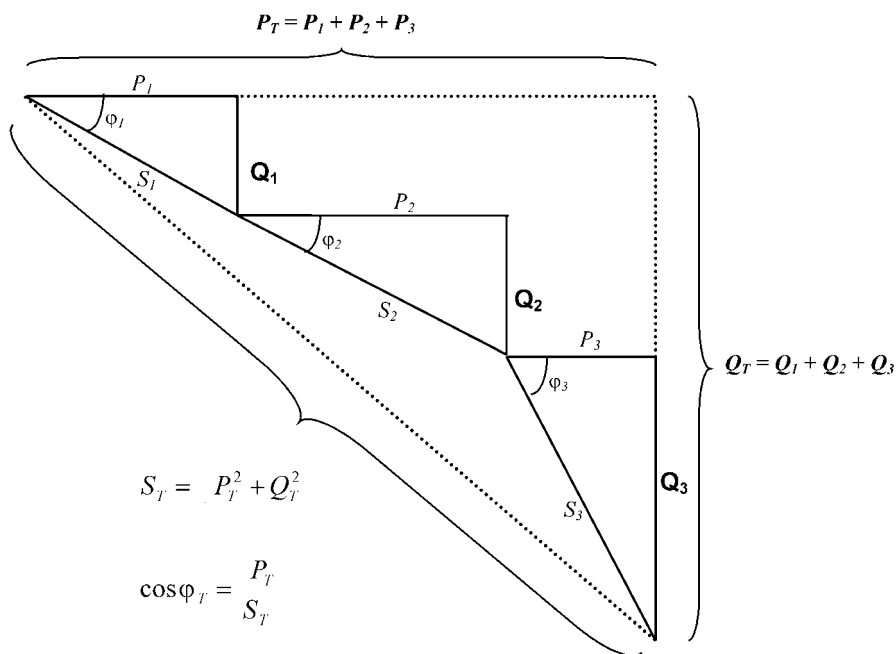
b)

**Figura R4.1.**

Y, obviamente, lo cual ya se deduce al ser los tres motores iguales, el factor de potencia total del sistema es igual al de un motor:

$$\cos \varphi = \frac{P_T}{S_T} = \frac{5294,1}{6617,58} = 0,8$$

En un caso general, donde los triángulos de potencia pueden ser diferentes, el triángulo total de potencia se desarrolla según se muestra en la figura R4.2.



**Figura R4.2.**

b) La intensidad total de consumo es:

$$I_T = \frac{S_T}{V} = \frac{6617,58}{220} = 30 \text{ A}$$

Que también se puede obtener por:  $I_T = \frac{P_T}{V \cos \varphi} = \frac{5294,1}{220 \times 0,8} = 30 \text{ A}$

c) La capacidad del condensador para mejorar el factor de potencia a 0,95 se puede obtener aplicando directamente la fórmula:

$$C = \frac{P (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)}{V^2 \omega}$$

donde:

$$P = 5294,1 \text{ W}$$

$$\varphi_1 = \cos^{-1} 0,8 = 36,87^\circ$$

$$\varphi_2 = \cos^{-1} 0,95 = 18,2^\circ$$

$$V = 220 \text{ V}$$

$$\omega = 2 \pi f \approx 6,28 \times 50 = 314 \text{ rad/s}$$

$$C = \frac{P (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)}{V^2 \omega} = \frac{5294,1 \times (\operatorname{tg} 36,87^\circ - \operatorname{tg} 18,2^\circ)}{220^2 \times 314} = 146,7 \cdot 10^{-6} = 146,7 \mu F$$

d) La intensidad de consumo del sistema con el factor de potencia mejorado es:

$$I_T = \frac{P_T}{V \cos \varphi} = \frac{5294,1}{220 \times 0,95} = 25,3 A$$

### Ejercicio 4.3

Según los datos de consumo de energía, el factor de potencia es:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{12500}{\sqrt{12500^2 + 6200^2}} = 0,9$$

### Ejercicio 4.4

a) El circuito paralelo de la figura 3.19, con los valores  $C = 4,7 \text{ nF}$  y  $L = 5 \text{ mH}$ , entrará en resonancia a la frecuencia:

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{L C}} = \frac{1}{6,28 \sqrt{5 \cdot 10^{-3} \times 4,7 \cdot 10^{-9}}} = 32847,8 \text{ Hz}$$

El factor de calidad de la bobina ( $Q$ ) se halla aplicando la fórmula:

$$Q = \frac{X_L}{R}$$

lo cual, puesto que  $X_L = \omega L = (6,28 \times 32.847,8) \times 0,005 = 1031,42 \Omega$  y  $R = 2 \Omega$ , da:

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{1031,42}{2} = 515,71$$

Este es un valor muy bueno, ya que en muchos casos prácticos ya se obtienen resultados satisfactorios para valores de  $Q \geq 10$ .

b) Al considerar el valor de  $2 \Omega$  de la resistencia en serie con la bobina, para hallar el valor de la impedancia del circuito a la frecuencia de resonancia se pueden aplicar cualquiera de las expresiones:

$$Z_T = \frac{X_L^2}{R} = Q^2 R = \frac{L}{C R}$$

En estas fórmulas se tiene en cuenta el valor resistivo que pueda haber en serie con la bobina (que puede ser el mismo hilo con que está hecha).

Aplicando la primera expresión, puesto que  $X_L = 1031,42 \, \Omega$ , tenemos:

$$Z_T = \frac{X_L^2}{R} = \frac{1031,42^2}{2} = 531.913,6 \, \Omega \approx 531,9 \, k\Omega$$

Y si aplicáramos las otras expresiones tendríamos el mismo resultado:

$$Z_T = Q^2 R = 515,71^2 \times 2 = 531.913,6 \, \Omega \approx 531,9 \, k\Omega$$

$$Z_T = \frac{L}{C R} = \frac{0,005}{4,7 \cdot 10^{-9} \times 2} = 531.914,89 \, \Omega \approx 531,9 \, k\Omega$$

### Ejercicio 4.5

Aplicaremos el principio de separación de potencias:

- *La potencia activa total ( $P_T$ ) es la suma de todas las potencias activas parciales*
- *La potencia reactiva total ( $Q_T$ ) es la suma de todas las potencias reactivas parciales*

A partir de estos datos se obtendrán los valores totales de la potencia aparente, el factor de potencia y la intensidad:

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{P_T}{S_T}$$

$$I_T = \frac{P_T}{V \cos \varphi}$$

Desarrollo:

#### a) Potencias activa y reactiva totales

##### En el motor 1:

$$\text{Potencia activa} \Rightarrow P_{M1} = \frac{P_N}{\eta} = \frac{1500}{0,7} = 2142,86 \, W$$

$$\text{Potencia reactiva} \Rightarrow \cos^{-1} 0,8 = 36,87^\circ \Rightarrow Q_{M1} = P_{M1} \, \text{tg} \varphi = 2142,86 \times \text{tg} 36,87^\circ = 1607,14 \, \text{VAr}$$

**En el motor 2:**

$$\text{Potencia activa} \Rightarrow P_{M2} = \frac{P_N}{\eta} = \frac{3000}{0,85} = 3529,41 \text{ W}$$

$$\text{Potencia reactiva} \Rightarrow \cos^{-1} 0,8 = 36,87^\circ \Rightarrow Q_{M2} = P_{M2} \operatorname{tg} \varphi = 3529,41 \times \operatorname{tg} 36,87^\circ = 2647,06 \text{ VAR}$$

**En el condensador:**

Como es obvio, la potencia activa en el condensador es cero.

Como su potencia reactiva se puede hallar por:  $Q_C = \frac{V^2}{X_C}$  y el valor de la reactancia es:  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 150 \cdot 10^{-6}} = 21,23 \, \Omega$ , se tiene:

$$\text{Potencia reactiva} \Rightarrow Q_C = \frac{V^2}{X_C} = \frac{220^2}{21,23} = 2279,79 \text{ VAR}$$

Así, pues, las potencias totales activa y reactiva son:

$$P_T = P_1 + P_2 = 2142,86 + 3529,41 = \mathbf{5672,27 \text{ W}}$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 - Q_C = 1607,14 + 2647,06 - 2279,79 = \mathbf{1974,41 \text{ VAR}} \text{ (en retraso)}$$

La potencia reactiva total resulta *en retraso* porque la potencia reactiva de tipo inductivo (la de los motores) es mayor que la potencia reactiva del condensador (que es *en adelanto*).

**b) Potencia total aparente**

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{5672,27^2 + 1974,41^2} = 6006,07 \text{ VA}$$

**b) Factor de potencia total**

$$\cos \varphi = \frac{P_T}{S_T} = \frac{5672,27}{6006,07} = 0,944$$

**b) Intensidad total de consumo**

$$I_T = \frac{P_T}{V \cos \varphi} = \frac{5672,27}{220 \times 0,944} = 27,3 \text{ A}$$

También se puede hallar por:  $I_T = \frac{S_T}{V} = \frac{6006,07}{220} = 27,3 \text{ A}$

# Índice alfabético

Amplificación .....	183
Bobina en corriente alterna, La .....	1
Cálculo de potencias .....	100, 111
Circuito	
de carácter capacitivo .....	139
de carácter inductivo .....	142
L-R-C de carácter capacitivo .....	101
L-R-C de carácter inductivo .....	101
oscilante .....	151
paralelo R-C .....	126
paralelo R-L .....	135
puramente capacitivo .....	21, 24
puramente inductivo .....	15, 18
puramente resistivo .....	8, 11
serie R-C .....	85, 114
serie R-L .....	73, 109
serie-paralelo .....	171
tanque .....	151
Circuitos	
integrados (CI) .....	195
paralelo R-L-C .....	122
paralelo R-L-C .....	139
serie R-L-C .....	93, 116
Compensación	
de la potencia reactiva .....	158
de potencia reactiva .....	26
Componentes semiconductores .....	185
Condensador .....	6, 7
variable <i>tandem</i> .....	156
Conjugado de un complejo .....	62
Diodo <i>zener</i> .....	191
Diodos <i>varicap</i> .....	156
División en la forma Binómica .....	62
Dopado .....	201
Efecto pelicular .....	157

El diodo .....	205
Enlace covalente.....	199
Expresión analítica de la corriente alterna.....	17
Factor	
de calidad de la bobina .....	156
de potencia .....	29
Factor Q.....	156
Fenómeno de la autoinducción .....	5
Fórmula	
de Faraday .....	5
Fórmula	
de la reactancia .....	5
Fotodiodo .....	188
Fototransmisor.....	188
Frecuencia de resonancia .....	150
Hueco .....	200
Impedancia.....	6, 76, 89, 142
La unión PN .....	205
LDR .....	188
LED .....	189
Ley de Kirchhoff .....	94
Multiplicación	
en la forma Binómica .....	61
en la forma Polar.....	61
en la forma Polar.....	65
Notación compleja .....	66
NTC-PTC (termistores).....	186
Números complejos.....	37, 41
expresión Binómica .....	44
expresión Polar.....	45
expresión Trigonométrica .....	47
resta de .....	58
suma de .....	53
Onda de potencia en el circuito inductivo .....	17
Operador J .....	38
Plano complejo.....	43
Polarización	
directa.....	207
Polarización	
inversa .....	208
Portadores de carga .....	199
Potencia.....	81, 89
activa en corriente alterna .....	27
aparente .....	28
instantánea.....	12
reactiva en corriente alterna.....	27

reactiva .....	17
Reactancia	
capacitiva.....	6
inductiva.....	4
óhmica del hilo .....	4
óhmica pura.....	1
Resistencia sensora.....	10
Resonancia	
en el circuito paralelo .....	149
Resonancia	
en el circuito serie.....	103
Semiconductor intrínseco.....	197
Semiconductores N y P .....	201
Suma de intensidades y potencia .....	123
Susceptancia y admitancia .....	128, 134, 145
Tiristor SCR .....	194
Tristores.....	194
Transistor bipolar .....	192
Transistores de efecto de campo .....	193
Triac y Diac.....	194
Valor	
de la resistencia.....	1
resistivo .....	1
VDR .....	190