1 ФУРЬЕГИЙН ЦУВАА

Тодорхойлолт 5.1 $f(x)$ функц нь $[-\pi,\pi]$ хэрчим дээр интегралчлагдах функц бол

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

тригонометрийн цувааг $f(x)$ функцийн Фурьегийн цуваа, $a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3...$ тогтмол тоонуудыг Фурьегийн цувааны коэффициентүүд гэнэ.

Фурьегийн цувааны коэффициентүүдийг дараах томьёогоор тодорхойлно.

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \\ a_k=\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos kxdx \\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin kxdx \end{cases}$$

Теорем 5.1 Хэрэв 2π үетэй $f(x)$ функц $(-\pi,\pi)$ завсар дээр зааглагдсан бөгөөд

a) $f(x)$ функц тасралтгүй, эсвэл төгсгөлөг тооны зөвхөн 1-р төрлийн тасралтын цэгүүдтэй

b) $(-\pi,\pi)$ хэрчмийг хуваасан хэрчим тус бүр дээр $f(x)$ функц эсвэл үл өсөх, эсвэл үл буурах байхаар төгсгөлөг тооны хэрчмүүдэд хувааж болдог байвал $f(x)$ функцийн Фурьегийн цуваа $(-\pi,\pi)$ хэрчмийн цэг бүр дээр нийлнэ. Тасралтгүй цэг бүр дээрх нийлбэр нь тэр цэг дээрх $f(x)$ функцийн утгатай тэнцүү тасралтын цэг дээрх нийлбэрийн утга нь тэр цэг дээрх $f(x)$ функцийн баруун зүүн өрөөсгөл хязгааруудын арифметикийн дундажтай тэнцүү байна.

Жишээ 5.1 $[-\pi,\pi]$ завсар дээр $f(x)=x$ томьёогоор өгөгдсөн, 2π үетэй, $f(x)$ функцийг Фурьегийн цуваанд задал.

Бодолт: Энэ функц Дирихлейн нөхцлийг хангах нь илэрхий.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\left[\left.x\frac{\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right]=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\left[\left.-x\frac{\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\pi\cdot\frac{\cos k\pi}{k}-\pi\cdot\frac{\cos k\pi}{k}\right)=(-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{k}$$

Иймд:

$$f(x) = 2 \cdot \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - ... + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sin kx}{k} + ... \right]$$

$k\pi \ (k = \pm1, \pm3...)$ хэлбэрийн 1-р төрлийн тасралтын цэгүүд дээр цувааны нийлбэр нь

$$S(x) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

байна. Өөрөөр хэлбэл, тасралтын цэг дээрх нийлбэрийн утга нь тэр цэг дээрх $f(x)$ функцийн баруун зүүн өрөөсгөл хязгааруудын арифметикийн дундажтай тэнцүү байна. Эндээс $S(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = (2k+1)\pi \end{cases}$

Жишээ 5.2 $[0; 2\pi]$ завсар дээр $f(x) = x$ томьёогоор өгөгдсөн, 2π үетэй, $f(x)$ функцийг Фурьегийн цуваанд задал.

Бодолт: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left(x \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin kx}{k} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos kx}{k^2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos 2k\pi}{k^2} - 1 \right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left(-x \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos kx}{k} dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{-2\pi}{k} \right) = -\frac{2}{k}$$

Иймд:

$$f(x) = \pi - \frac{2}{1} \cdot \sin x - \frac{2}{2} \cdot \sin 2x - \frac{2}{3} \cdot \sin 3x - \frac{2}{4} \cdot \sin 4x - ...$$

болно. $x = 2k\pi$ цэгүүд дээр $S(x) = \dfrac{f(2\pi - 0) + f(2\pi + 0)}{2} = \dfrac{2\pi + 0}{2} = \pi$ байна.

Жишээ 5.3 $[-\pi; \pi]$ завсар дээр $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ томьёогоор өгөгдсөн, 2π үетэй, $f(x)$ функцийг Фурьегийн цуваанд задал.

Бодолт: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{0} 0 dx + \int\limits_0^{\pi} x dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos kx dx + \int\limits_0^{\pi} x \cos kx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} x \sin kx \Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k} dx \right) = \frac{1}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) = \frac{1}{\pi k^2} ((-1)^k - 1)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin kx dx + \int\limits_{0}^{\pi} x\sin kx dx\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}x\cos kx\,|_0^\pi + \frac{1}{k}\int\limits_0^\pi \cos kx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{k}\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx\right)\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos k\pi + \frac{1}{k^2}\sin k\pi - (0+0)\right) = -\frac{1}{k}\cos k\pi = -\frac{1}{k}(-1)^k = \frac{1}{k}(-1)^{k+1}$$

Иймд:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) + \left(0 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) +$$

$$+ \left(0 - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + \left(-\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) + ... =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ...\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right)$$

$x = 0$ цэг өгөгдсөн функцийн тасралтгүйн цэг юм. Өөрөөр хэлбэл, тасралтгүйн цэг бүр дээрх нийлбэр нь тэр цэг дээрх $f(x)$ функцийн утгатай тэнцүү

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...) \quad \text{буюу} \quad \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...$$

5.2 Тэгш ба сондгой функцуудыг Фурьегийн цуваанд задлах

Хэрэв $y = f(x)$ тэгш функц бөгөөд $[-a; a]$ хэрчим дээр интегралчлагдах бол

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$$

байна.

Хэрэв $y = f(x)$ сондгой функц бөгөөд $[-a; a]$ хэрчим дээр интегралчлагдах бол

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

байна.

1. $f(x)$ тэгш функц Фурьегийн цуваанд задардаг байг. Өмнөх чанар ёсоор

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi f(x)dx \\ a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi f(x)\cos kx dx \\ b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi f(x)\sin kx dx = 0 \end{cases}$$

Иймд тэгш функц нь зөвхөн косинус функцүүдээр Фурьегийн цуваанд задарна.

2. $f(x)$ сондгой функц Фурьегийн цуваанд задарсан байг.

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = 0 \\ a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos kxdx = 0 \\ b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin kxdx \end{cases}$$

Иймд сондгой функц нь зөвхөн синус функцүүдээр Фурьегийн цуваанд задарна.

Жишээ 5.4 $f(x) = |x|$ функцийг $-\pi \le x \le \pi$ завсарт Фурьегийн цуваанд задал.

Бодолт: $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ буюу тэгш функц учраас $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos kxdx = \frac{2}{\pi}\frac{x}{k}\sin kx\bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi}\sin kxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2}\cos kx\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

байна. Иймд

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ...\right)$$

Жишээ 5.5 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ функцийг Фурьегийн цуваанд задал.

Бодолт: Энэ функц сондгой функц тул $a_0 = 0, \quad a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin kxdx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)\bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\cdot(1 - \cos k\pi) = \frac{2}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right)$$

Иймд:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + ...$$