



ШИНЖЛЭХ УХААН ТЕХНОЛОГИЙН ИХ СУРГУУЛЬ  
ХЭРЭГЛЭЭНИЙ ШИНЖЛЭХ УХААНЫ СУРГУУЛЬ  
ФИЗИКИЙН ТЭНХИМ

# S.PH101 Физик 1



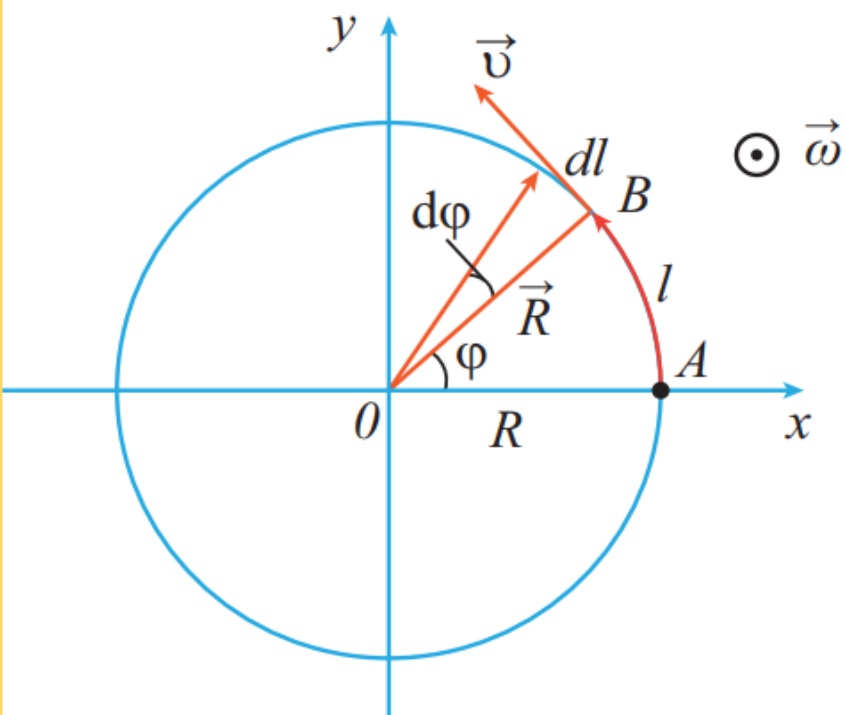
Лекц 2



# Эргэх хөдөлгөөн

Материал цэг мурий траектороор хөдөлж байвал траекторын багахан хэсгийг тойргоор хөдлөх хөдөлгөөн гэж үзэж болно. Траекторын тухайн хэсэгт харгалзах тойргийн радиусыг **мурийлтын радиус** гэдэг.

$R$  радиустай тойргоор жигд эргэх материал цэгийн хөдөлгөөнийг авч үзье. Эргэлтийн өнцөг нь тойргийн нумын уртыг радиусад нь харьцуулсантай тэнцүү байна (1.1 р зураг).



$$\varphi = \frac{l}{R}$$

Тойргоор эргэх хөдөлгөөний хувьд  $l$  нь зам учир хурд нь  $v = \frac{l}{t}$  аас  $l$  -ийг орлуулбал нь өнцөг хурд болно.

$$v = \frac{\varphi}{t} R = \omega R$$

Тухайн эгшинд өнцөг хурдыг олбол

$$\omega = \lim \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

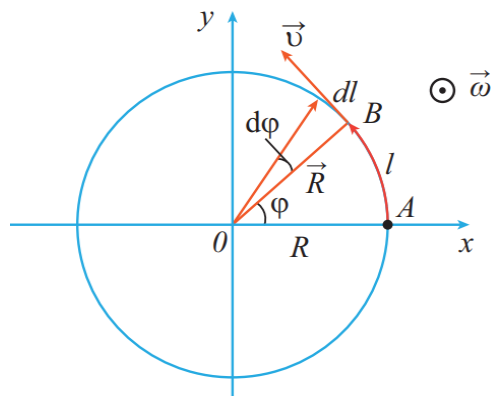
Эргэх өнцгөөс хугацаагаар авсан уламжлал нь өнцөг хурд болно.

# Эргэх хөдөлгөөн

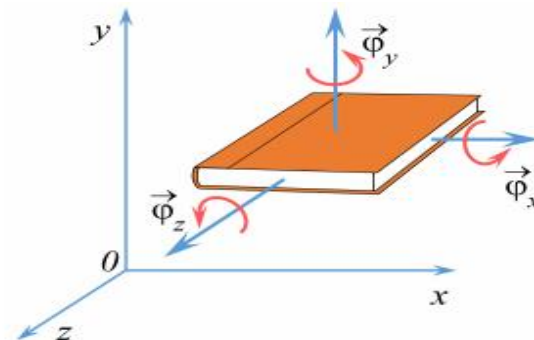
Эргэлтийн өнцгийг чиглэлтэй авснаар эргэлтийн өнцгийн вектор нь эргэлтийн тэнхлэгийн дагуу, эргэлтээр (баруун шураг) зөв шургийн давших чиглэл рүү чиглэнэ.



Зураг 1.2. Баруун шургийн эргэлтийн өнцөг вектор



(Зураг 1.2) ба (Зураг 1.3) р зурагт эргэлтийн өнцөг А аас В рүү буюу цагийн зүүний эсрэг эргэх үед шураг хуудасны хавтгайд перпендикуляраар нааш чиглэн давших учир  $\vec{\phi}$  нь эгц нааш чиглэнэ. Эсрэг тохиолдолд цагийн зүүний дагуу эргүүлбэл эргэлтийн өнцгийн вектор цааш чиглэнэ.



Зураг 1.3. Эргэлтийн өнцгийн векторууд

Зурагт номны  $x$ ;  $y$ ;  $z$  тэнхлэгүүдтэй параллель тэнхлэгүүдийг тойрон эргүүлэхэд харгалзах эргэлтийн өнцгийн векторуудыг дүрслэн харуулав. Дурын чиглэлийг тойрон эргэх бол эргэлтийн өнцгийн вектор нь  $\vec{\phi}_x, \vec{\phi}_y, \vec{\phi}_z$  эргэлтийн өнцгүүдийн нийлбэрээр тодорхойлогдоно.

$$\vec{\phi} = \phi_x \vec{i} + \phi_y \vec{j} + \phi_z \vec{k}$$

Өнцөг хурдны векторын чиглэл эргэлтийн өнцгийн вектортой ижилхэн байна.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$



# Эргэх хөдөлгөөн

Хурдсах болон удаашран эргэх хөдөлгөөний үед өнцөг хурдатгал үүснэ. Өнцөг хурдатгал нь нэгж хугацаандахь өнцөг хурдны өөрчлөлт буюу өнцөг хурднаас хугацаагаар авсан уламжлалтай тэнцүү байна.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Өнцөг хурдатгал нь проекцуудын хувьд дараах байдлаар илэрхийлэгдэнэ.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d^2\varphi_x}{dt^2} = \ddot{\varphi}_x \\ \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d^2\varphi_y}{dt^2} = \ddot{\varphi}_y \\ \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi_z}{dt^2} = \ddot{\varphi}_z \end{cases}$$

Тойргоор эргэх материал цэгийн шугаман хурд ба өнцөг хурдны харилцан хамаарлыг олъё.

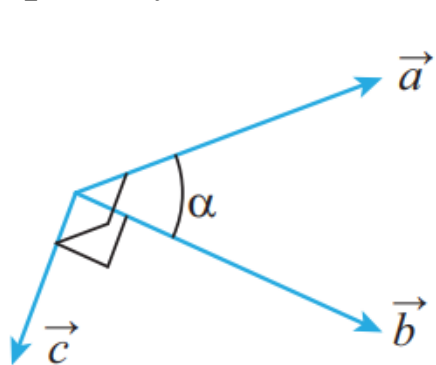
Үүний тулд бидэнд вектор үржвэрийн тодорхойлогчийг санах шаардлагатай (1.4 р зураг).



# Эргэх хөдөлгөөн

Тойргоор эргэх материал цэгийн шугаман хурд ба өнцөг хурдны харилцан хамаарлыг олъё.

Үүний тулд бидэнд вектор үржвэрийн тодорхойлогчийг санах шаардлагатай (1.4 р зураг).



Зураг 1.4. Вектор үржвэр

Огторгуйд байрлах  $\vec{a}$  ба  $\vec{b}$  векторууд хоорондоо  $\alpha$  -өнцөг үүсгэсэн байг.  $\vec{a}$  векторыг  $\vec{b}$  вектороор вектор үржүүлбэл үүсгэх  $\vec{c}$  вектор нь  $\vec{a}$  ба  $\vec{b}$  векторт хоёуланд нь перпендикуляраар чиглэнэ. Энэ нь  $\vec{a}$  ба  $\vec{b}$  векторын орших хавтгайн нормаль вектор байна.  $\vec{c}$  вектор нь  $\vec{a}$  вектороос  $\vec{b}$  вектор руу эргүүлэх бага эргэлтийн өнцгийн вектортой ижилхэн чиглэлтэй байна. Харин хэмжээ нь

$$|\vec{c}| = c = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Харин  $\vec{c}$  векторыг  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ - векторын байгуулагчаар шууд тодорхойлбол.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

$\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$  векторын байгуулагчдыг олбол

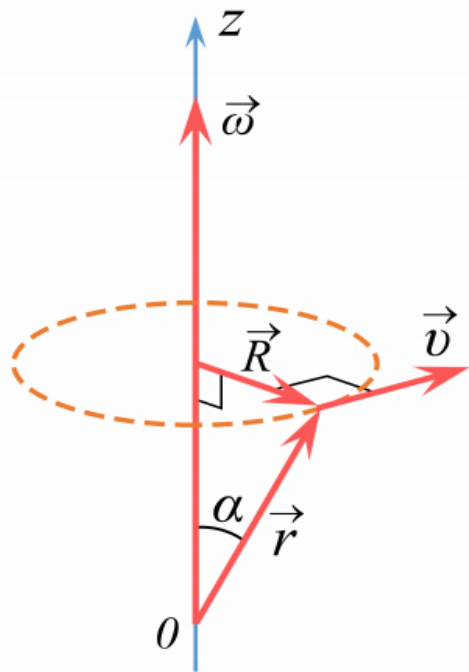
$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = a_x b_z - a_z b_x$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$



# Эргэх хөдөлгөөн



Одоо шугаман хурдны  $\vec{v}$  векторыг 1.5 р зурагт дүрсэлснээс тодорхойлбол.  $\vec{v}$  вектор  $\vec{R}$  вектор ба  $\vec{\omega}$  вектор перпендикуляр учир

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

1.5 р зурагт  $\vec{\omega} \perp \vec{R}$  учир хурдны модуль нь  $v = \omega \cdot R$  болно.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{Энэ үед хурдны хэмжээ нь } v = \omega \cdot r \sin \alpha$$

Харин  $\vec{r}$  вектор эргэлтийн хавтгай дээрээ байх үед эргэлтийн буюу траекторын мурийлтын радиус  $\vec{R}$  болно.

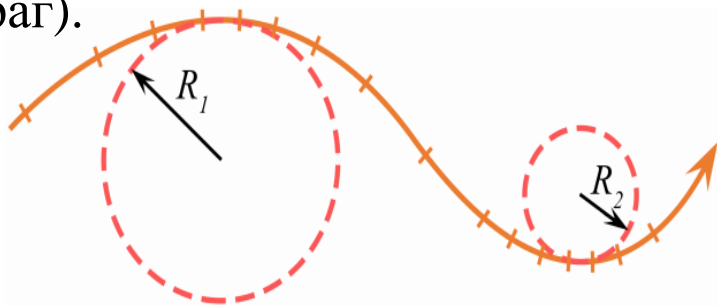
Зураг 1.5. Өнцөг хурд



# Траекторын мурийлт

Мурий траектороор хөдлөх материал цэгийн хөдөлгөөнийг авч үзье.

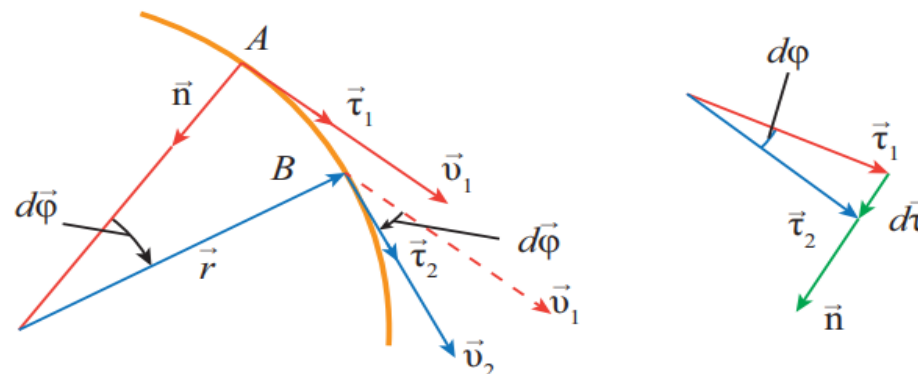
Мурийгаар хөдлөх хөдөлгөөнийг олон жижиг тойрог хэлбэрийн хөдөлгөөн мэтээр загварчлан ойлгож болно (1.6 р зураг).



Зураг 1.6. Траекторын мурийлтын радиус

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau}, \quad a_\tau = v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}$$

Ийм тойргоор эргэх хөдөлгөөнийг дахин авч үзье.



Зурагт үзүүлснээр  $\varphi$  бага өнцгөөр эргэх хөдөлгөөний үед хурдыг

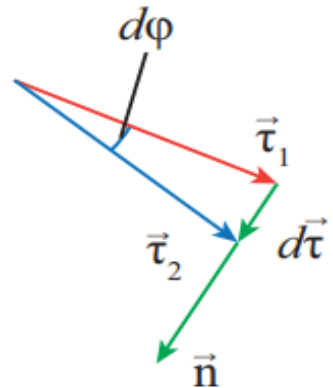
$$\vec{v} = \frac{dS}{dt} \cdot \vec{\tau} = v \cdot \vec{\tau} \quad \text{томъёоноос хурдатгалыг олвол}$$

( $\vec{\tau}$  нь хурдны чиглэлийг тодорхойлох нэгж вектор)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Энэ  $a_\tau$ -тангенциал,  $a_n$  – нормаль хурдатгалын вектор нийлбэр  $a_\tau$  хурдатгал нь хурдны хэмжээний өөрчлөлтөөр тодорхойлогдож байна. Энэ хурдатгал  $\vec{\tau}$  нэгж векторын дагуу буюу траекторын шүргэгчээр чиглэнэ. Хурдсах хөдөлгөөний үед  $a_\tau$  хурдатгал нь хурдны векторын дагуу, удаашрах хөдөлгөөний үед хурдны векторын эсрэг чиглэнэ.

# Траекторын мурийлт



Зурагт үзүүлснээр адил хажуут гурвалжны суурь болох  $d\vec{\tau}$  нь  $d\vec{\varphi}$  тэг рүү дөхөх үед  $\vec{\tau}$  буюу траекторын шүргэгчид перпендикуляраар чиглэнэ.

$\frac{d\vec{\tau}}{dt}$  -уламжлалын тухай

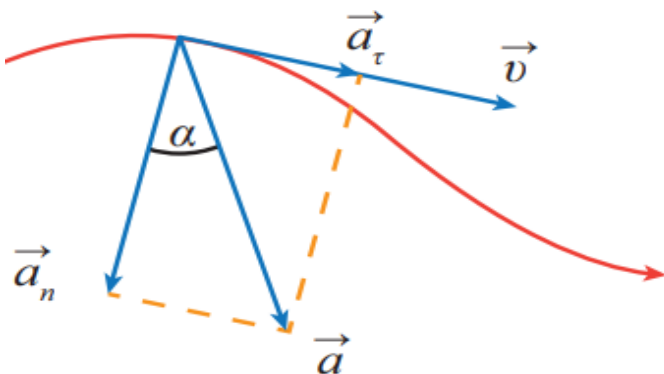
$$d\vec{\tau} = |\tau| \cdot d\varphi = d\varphi$$

$d\vec{\tau}$ - векторын чиглэлийг тодорхойлох нэгж векторыг  $d\vec{n}$ -нормаль вектор гэвэл.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \vec{n} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{n} = \omega \cdot \vec{n}$$

$\vec{v}$  ба  $\vec{\omega}$  векторуудыг ашиглан нормаль хурдатгалыг олбол

$$\vec{a}_n = v \cdot \omega \cdot \vec{n} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$



Зураг 1.8. Хурдатгал

$\vec{a}_n$  – нормаль хурдатгал нь траекторын шүргэгчид перпендикуляр буюу мурийлтын радиус векторын эсрэг чиглэнэ. Энэ хурдатгал нь траектор мурийлтаас буюу хурдны чиглэл өөрчлөгдсөнөөр үүсэж байгаа хурдатгал юм. Шулуунаар хөдлөх үед  $\vec{a}_n = 0$  байна.





# Траекторын мурийлт

Бүрэн хурдатгал нь нормаль ба тангенциал хурдатгалуудын нийлбэр байна.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$$a_n = a \cdot \cos \alpha$$

$$a_\tau = a \cdot \sin \alpha$$

$\vec{a}_n, \vec{a}_\tau$  - хурдатгалыг  $\vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$  - р илэрхийлвэл

$$\vec{a}_\tau = \frac{d}{dt}(\omega \cdot r) \vec{\tau} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r \cdot \vec{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Бүрэн хурдатгал нь:  $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$

Вектор үржвэрүүдийн дүрмээр задалж бичвэл

$$\vec{a}_\tau = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$



# Шугаман болон өнцөг хурдны хоорондын хамаарал

R мурийлтын радиустай хөдөлгөөний хувьд

$$a_{\tau} = \varepsilon \cdot R \quad a_n = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot R$$

Нормаль буюу төвд тэмүүлэх хурдатгал нь мурийлтын радиусаар дараах байдлаар илэрхийлэгдэнэ.

$$a_n = a_{\tau, \tau} = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}$$

Тухайн аль нэг цэг дээрх шугаман хурд нь

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad v = \omega r \sin \vartheta \quad \text{буюу} \quad v = \omega R$$

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + d\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$
$$a_{\tau} = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R$$

Бүрэн хурдатгал нь

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



## *Эргэлтийн үе ба давтамж*

Бие ямар нэг тогтмол өнцөг хурдтайгаар нэг бүтэн эргэх хугацааг *эргэлтийн үе* буюу улирал (T) гэнэ.

$$T = \frac{2\pi\omega}{\omega}$$

Тогтмол өнцөг хурдтай эргэх хөдөлгөөний эргэлтийн тоог *эргэлтийн давтамж* гэнэ.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$\omega = 2\pi\nu$ -тойрог давтамж



# Механик хөдөлгөөний ангилах:

Траектори		Шулуун		Муруй	
Хурд	Чиглэл	=	=	~	~
	Хэмжээ	=	~	=	~
Хөдөлгөөний төрөл		Шулуун жигд хөдөлгөөн	Шулуун хувьсах хөдөлгөөн	Муруй жигд хөдөлгөөн	Муруй хувьсах хөдөлгөөн
Хурдатгал	Нормаль хурдатгал $a_n$	$a_n = 0$	$a_n = 0$	$a_n \neq 0$	$a_n \neq 0$
	Тангенциал хурдатгал $a_\tau$	$a_\tau = 0$	$a_\tau \neq 0$	$a_\tau = 0$	$a_\tau \neq 0$
	Ерөнхий хурдатгал $\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_\tau}$	$\vec{a} = 0$	$\vec{a} = \vec{a_\tau}$	$\vec{a} = \vec{a_n}$	$\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_\tau}$
Хөдөлгөөний жишээ		Хэвтээ хавтгайгаар инерцээр үрэлтгүй хөдлөх тэрэгний хөдөлгөөн	Чөлөөт уналт Налуу хавтгайгаар бие гулсах	Тойргоор эргэх жигд хөдөлгөөн	Өнцөг үүсгэн шидэгдсэн биеийн хөдөлгөөн



## Оюутны кодын сүүлийн орон сондгой бол сондгой асуултанд, тэгш бол тэгш асуултанд физик үндэслэлтэйгээр хариулна уу.

1. Муруй замын хөдөлгөөн, Эргэлтийн өнцөг тухай ойлголт?
2. Өнцөг хурд гэж юу вэ? Өнцөг хурдны чиглэлийг яаж тодорхойлдог вэ?
3. Өнцөг хурд эргэлтийн өнцгийн чиглэл давхцах уу?
4. Өнцөг хурдатгал гэж юу вэ?
5. Тойргоор эргэх материал цэгийн шугаман хурд болон өнцөг хурдны хамаарлыг бичнэ үү
6. Хавтгайн нормаль вектор гэж юу вэ?
7. Нормаль хурдатгал хурдны ямар өөрчлөлтийг илэрхийлэх вэ?
8. Тангенциал хурдатгал хурдны ямар өөрчлөлтийг илэрхийлэх вэ?
9. Бүрэн хурдатгалыг яаж илэрхийлэх вэ?
10. Эргэлтийн үе, давтамжийн тухай
11. Тойрог давтамж гэж юу вэ?
12. Нормаль буюу төвд тэмүүлэх хурдатгалыг муруйлтын радиусаас хамааруулан хэрхэн илэрхийлэх вэ?
13. Нормаль хурдатгалын чиглэл радиус векторын чиглэлтэй давхцах уу?
14.  $3.14$  рад нь хэдэн градустай тэнцүү вэ?
15. Муруйлтын радиус, радиус вектор хоёрын ялгааг бичнэ үү.
16. Шугаман хурдатгал өнцөг хурдны хамаарлын томъёог бичнэ үү.
17. Материал цэг цагийн зүүний дагуу эргэж байвал өнцөг хурдны чиглэл хаашаа чиглэх вэ?
18. Материал цэг цагийн зүүний эсрэг эргэж байвал өнцөг хурдны чиглэл хаашаа чиглэх вэ?
19. Хурдсах хөдөлгөөний үед тангенциал хурдатгал хурдны вектортой ямар чиглэлтэй байх вэ?
20. Удаашрах хөдөлгөөний үед тангенциал хурдатгал хурдны вектортой ямар чиглэлтэй байх вэ?



Анхаарал тавьсанд баярлалаа

