# Семинар 13

## 1 Бодлого, Дасгал

1-4. Муруй шугаман интегралыг бод.$a$. Шууд $b$. Грийний теоремыг ашигла

1. $\oint_C (x^2-y)dx + y^2dy$, $C$: $x^2+y^2=1$ цагийн зүүний эсрэг чиглэлтэй тойрог
2. $\oint_C (y^2+x)dx + (3x+2xy)dy$, $C$: $x^2+y^2=4$ цагийн зүүний эсрэг чиглэлтэй тойрог
3. $\oint_C (x^2dx - x^3dy$, $C$: квадратын $(0,0)$-оос $(0,2),(2,2),(2,0),(0,0)$ хүртэл
4. $\oint_C (y^2-2x)dx + x^2dy$, $C$: квадратын $(0,0)$-оос $(1,0),(1,1),(0,1),(0,0)$ хүртэл

5-12. Грийний теоремыг ашиглан өгөгдсөн интегралыг бод. (Муруй эерэг чиглэлтэй)

5. $\oint_C xe^{2x}dx - 3x^2ydy$, $C$: тэгш өнцөгтийн $(0,0)$-оос $(3,0),(3,2),(0,2),(0,0)$ хүртэл
6. $\oint_C ye^{2x}dx + x^2y^2dy$, $C$: тэгш өнцөгтийн $(-2,0)$-оос $(3,0),(3,2),(-2,2),(-2,0)$ хүртэл
7. $\oint_C \left(\frac{x}{x^2+1} - y\right)dx + (3x - 4\tan\frac{y}{2})dy$, $C$: $y=x^2$-ийн $(-1,1)$-оос $(1,1)$ хүртэлх, $y=2-x^2$ -ийн $(1,1)$-ээс $(-1,1)$ хүртэлх хэсэг
8. $\int_C (xy-e^{2x})dx + (2x^2-4y^2)dy$, $C$: $y=x^2$ ба $y=8-x^2=4$ цагийн зүүний дагуу чиглэлтэй
9. $\oint_C (\tan x - y^3)dx + (x^3-\sin y)dy$, $C$: $x^2+y^2=2$ тойрог
10. $\int_C (\sqrt{x^2+1} - x^2y)dx + (xy^2 - y^{\frac{5}{3}})dy$, $C$: $x^2+y^2=4$ цагийн зүүний дагуу чиглэлтэй тойрог
11. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, Энд $\mathbf{F} = \langle x^3-y, x+y^3\rangle$ болон $C: y=x^2$ ба $y=x$
12. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, Энд $\mathbf{F} = \langle y^2+3x^2y, xy+x^3\rangle$ болон $C: y=x^2$ ба $y=2x$

13-16. Вектор орны дивергенц, роторыг ол.

13. $x^2\mathbf{i} - 3xy\mathbf{j}$
14. $y^2\mathbf{i} + 4x^2y\mathbf{j}$
15. $2xz\mathbf{i} - 3y\mathbf{k}$
16. $x^2\mathbf{i} - 3xy\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

17. Хэрэв $f$ нь скаляр функц, $\mathbf{F}$ нь вектор функц бол дараах илэрхийлэл тодорхойгүй эсвэл скаляр, вектор хэмжигдэхүүн болохыг тотоо.

a. $\nabla(\nabla f)$

b. $\nabla\times(\nabla\cdot\mathbf{F})$

c. $\nabla(\nabla\times\mathbf{F})$

d. $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$

e. $\nabla\times(\nabla f)$

18-20. $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle, \mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|$ ба $f$ скаляр функц бол дараах илэрхийллийг батал.

18. $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ ба $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
19. $\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = 4r$
20. $\nabla f(r) = f' r \frac{\mathbf{r}}{r}$

## 2 Бодлого, Дасгал

1-6. Өгөгдсөн гадаргуунуудын гадаргуугийн талбайг ол.

1. $z = 4$ хавтгайгаас доош $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конусын хэсэг
2. $z = 4$ хавтгайгаас доош $z = x^2 + y^2$ параболойдын хэсэг
3. $x^2 + y^2 = 4$ цилиндрийн дотор, $3x + y + z = 6$ хавтгайн хэсэг
4. $y = x^2$ ба $y = 1$ хязгаарлагдсан мужаас дээш $x + 2y + z = 4$ хавтгайн хэсэг
5. $x^2 + y^2 = 4$ цилиндрийн дотор, $z = x^2 + y^2$ параболойдын хэсэг
6. $z = 1$ хавтгайгаас дээш $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ тал бөмбөрцгийн хэсэг

7-12. $\int_S \int g(x, y, z) dS$ хэлбэрийн гадаргуугийн интегралыг бод.

7. $\int_S \int xz dS$, $S$: $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ тэгш өнцөгтөөс дээш $z = 2x + 3y$ хавтгайн хэсэг
8. $\int_S \int (z - y^2) dS$, $S$: $z = 4$ хавтгайгаас дээш $z = x^2 + y^2$ параболойдын хэсэг
9. $\int_S \int (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} dS$, $S$: $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ доод тал бөмбөрцөг
10. $\int_S \int \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS$, $S$: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ хавтгайн хэсэг
11. $\int_S \int (x^2 + y^2 - z) dS$, $S$: $z = 1$ ба $z = 2$ хооронд орших $z = 4 - x^2 - y^2$ параболойдын хэсэг
12. $\int_S \int z dS$, $S$: $z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ тал бөмбөрцөг

13-16. $\int_S \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ урсгалыг ол.

13. $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, $S$: $xy$- хавтгайгаас дээш $z = 4 - x^2 - y^2$ параболойдын хэсэг ($\mathbf{n}$ дээш чиглэлтэй)
14. $\mathbf{F} = \langle y, -x, 1 \rangle$, $S$: $z = 4$- хавтгайгаас дээш $z = x^2 + y^2$ параболойдын хэсэг ($\mathbf{n}$ доош чиглэлтэй)
15. $\mathbf{F} = \langle y, -x, z \rangle$, $S$: $z = 3$- хавтгайгаас дээш $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ конусы хэсэг ($\mathbf{n}$ доош чиглэлтэй)
16. $\mathbf{F} = \langle 0, 1, y \rangle$, $S$: $x^2 + y^2 = 4$ дотор $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ конусы хэсэг ($\mathbf{n}$ дээш чиглэлтэй)

17-20. Гаргуугийн интегралыг бод.

17. $\int_S \int z dS$, $S$: $z$ нь $z = 1$ ба $z = 2$ хоорнд $x \geq 0$ бүхий $x^2 + y^2 = 1$ -ийн хэсэг
18. $\int_S \int yz dS$, $S$: $z$ нь $z = 1$ ба $z = 4 - y$ хоорнд $x \geq 0$ бүхий $x^2 + y^2 = 1$ -ийн хэсэг
19. $\int_S \int y^2 + z^2 dS$, $S$: $z$ нь $yz$ хавтгайн урд хэсэг дэх $x = 9 - y^2 - z^2$ параболойдын хэсэг
20. $\int_S \int y^2 + z^2 dS$, $S$: $x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$ тал бөмбөрцөг