1 Тэмдэг хувьсах цуваа, Функцэн цуваа, Зэрэгт цуваа, Функцийг зэрэгт цуваанд задлах

Тодорхойлолт 3.1 Гишүүд нь (a, b) завсар дээр тодорхойлогдсон функцүүд болох

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... \tag{3.1}$$

цувааг **функцэн цуваа** гэнэ.

Жишээлбэл:

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + ... + \frac{1}{n}\sin nx + ... \quad \text{гэх мэт}$$

Хэрэв $x = x_o$-г (3.1)-д орлуулбал

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_o) = u_1(x_o) + u_2(x_o) + ... + u_n(x_o) + ... \tag{3.2}$$

тоон цуваа үүсэх ба энэхүү тоон цуваа нь нийлж байвал (3.1) цувааг $x = x_o$ цэг дээр **нийлж байна** гэж хэлнэ. Функцэн цуваа нийлж байдаг цэгүүдийн олонлогийг уг цувааны **нийлэлтийн муж** гэнэ. Хэрэв (3.1) цуваа нь (a, b) завсар дээр нийлж байвал нийлбэр нь мөн энэ завсар дээр тодорхойлогдсон $f(x)$ функц байна. Функцэн цувааны нийлбэр $f(x)$ нь тус цувааны хэсгийн нийлбэрүүд гэж нэрлэгдэх

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) \tag{3.3}$$

функцэн дарааллын хязгаар гэж тодорхойлогдоно. Өөрөөр хэлбэл:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}(u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)) \tag{3.4}$$

юм.

Жишээ 3.1 $\dfrac{4-x}{7x+2} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4-x}{7x+2}\right)^2 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{4-x}{7x+2}\right)^3 + ...$ цувааны нийлэлтийг $x = 0$ ба $x = 1$ цэг дээр судал.

Бодолт: $x = 0$ үед уг цуваа

$$2 + \frac{1}{3}\cdot 2^2 + \frac{1}{5}\cdot 2^3 + \frac{1}{7}\cdot 2^4 + ...$$

тоон цуваа болно. Эндээс $u_n = \dfrac{2^n}{2n-1}$, $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{2n+1}$ болно. Иймд Даламберийн шинжүүрийг ашиглавал:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(2n+1)} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 2, \quad L > 1$$

учир цуваа сарнина. $x = 1$ цэг дээр

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^4} + ...$$

тоон цуваа үүснэ. Эндээс

$$u_n = \frac{1}{3^n(2n-1)}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(2n+1)}$$

болно.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(2n-1)}{3^{n+1}(2n+1)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{3}$$

$L=\dfrac{1}{3}<1$ учир $x=1$ цэг дээр өгөгдсөн цуваа нийлнэ.

Жишээ 3.2 $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+...+\dfrac{1}{x^{2n}}+...$ функцэн цувааны нийлэх мужийг ол.

Бодолт: Энэ цуваа $q=\dfrac{1}{x^2}$ хуваарьтай геометр прогресс болно. Геометр прогресс нь $|q|<1$ үед нийлж, $|q|\geq 1$ үед сарнидаг учир өгөгдсөн цуваа нь $\left|\dfrac{1}{x^2}\right|<1$ буюу $x^2>1$ үед нийлнэ. Өөрөөр хэлбэл, өгөгдсөн цуваа нь $|x|>1$ байх бүх цэг дээр нийлнэ. Нийлэлтийн муж нь $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ болно.

3.2 Функцэн цувааны жигд нийлэлт

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \tag{3.5}$$

гэсэн функцэн цувааны нийлбэрийг

$$f(x)=f_n(x)+r_n(x) \tag{3.6}$$

хэлбэртэй бичиж болно. Энд,

$$f_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x) \quad \text{нь}$$

$n-$**р хэсгийн нийлбэр,** $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$ нь **үлдэгдэл цуваа** болно. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ нийлдэг функцэн цувааг дараах тохиолдолд **жигд нийлж байна** гэж хэлнэ.

Тодорхойлолт 3.2 Хэрэв дурын бага $\varepsilon>0$ тоог сонгож авахад, ямар нэгэн $N,(N=N(\varepsilon))$ дугаар олдоод $n\geq N$ байх бүх n дугааруудад $|r_n(x)|<\varepsilon$ тэнцэтгэл биш биелдэг бол уг цувааг жигд нийлдэг цуваа гэнэ.

Цувааны гишүүд $u_1(x),\ u_2(x),...,u_n(x),...$ нь (a,b) завсар дээр тасралтгүй функцүүд байхад жигд нийлдэг $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ цувааны нийлбэр $f(x)$ функц нь мөн (a,b) завсар дээр тасралтгүй функц байна.

Вейерштрассын шинжүүр. Хэрэв

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

цувааны хувьд $\underset{\geq}{n}n_o:$ $|u_n(x)|\leq a_n$ байх тийм нийлдэг

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+...$$

тоон дараалал олддог бол

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

цуваа энэ завсар дээр абсолют бөгөөд **жигд нийлнэ.**

Теорем 3.1 *(Цуваag гишүүнчлэн интегралчлах.)* Хэрэв

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

цувааны гишүүд болох $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ функцүүд нь (a, b) завсар дээр тасралтгүй бөгөөд өгсөн цуваа (a, b) завсар дээр **жигд нийлдэг** ба нийлбэр нь $f(x)$ бол

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + ... + \int_a^b u_n(x)dx + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx \tag{3.7}$$

цуваа нийлэх бөгөөд нийлбэр нь $\int_a^b f(x)dx$ байна.

Теорем 3.2 *(Цуваag гишүүнчлэн дифференциалчлах)*

$$u_1(x),\ u_2(x), ..., u_n(x), ...$$

функцүүд нь (a, b) завсар дээр тасралтгүй

$$u_1'(x),\ u_2'(x), ..., u_n'(x), ...$$

уламжлалуудтай байг. Хэрэв

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots u_n'(x) ...$$

функцэн цуваа нь (a, b) завсар дээр **жигд нийлдэг,** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ цуваа (a, b) завсрын ядаж нэг цэг дээр нийлдэг бол $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ цуваа (a, b) завсар дээр жигд нийлэх ба түүнийг гишүүнчлэн дифференциалчилж болох ба дараах

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}_x' \tag{3.8}$$

тэнцэтгэл биелнэ.

Жишээ 3.3 $\sin x + \frac{1}{2^2} \sin^2 2x + \frac{1}{3^2} \sin^3 3x + ...$ цуваа $]-\infty, +\infty[$ завсар дээр жигд нийлнэ гэж батал.

Бодолт: x хувьсагчийн дурын утганд

$$\left| \frac{1}{n^2} \sin^n nx \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

биелдэг бөгөөд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$$

нь нийлдэг цуваа тул өгөгдсөн цуваа $x-$ийн дурын утганд жигд нийлнэ.

Жишээ 3.4 $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2\sqrt{2}} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{3\sqrt{3}} + ... + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{n\sqrt{n}} + ...$ цуваа гишүүнчлэн дифференциалчилж болох уу?

Бодолт: Энэ цуваа нийлдэг

$$x + \frac{x}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{3^{\frac{3}{2}}} + ... + \frac{x}{n^{\frac{3}{2}}} + ...$$

цуваатай жишье. Тэгвэл $u_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, $\upsilon_n(x) = \dfrac{x}{n^{\frac{3}{2}}}$ болно. $\alpha \to 0$ үед $\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha$ байдгийг тооцвол

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{\upsilon_n(x)} = 1$$

болж жиших шинжүүр 2 ёсоор өгөгдсөн цуваа нийлнэ. Анхны цувааны ерөнхий гишүүний уламжлал нь

$$u_n'(x) = \frac{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{1 + \frac{x^2}{n^3}} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{x^2 + n^3}$$

Иймээс цувааг гишүүнчлэн дифференциалчлахад гарах цуваа нь

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{2\sqrt{2}}{x^2+2^3} + \frac{3\sqrt{3}}{x^2+3^3} + ...$$

болно. Энэ цувааны гишүүн бүр нь абсолют хэмжээгээрээ

$$1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} + ...$$

нийлэх тоон цувааны харгалзах гишүүнээс хэтрэхгүй учир Вейерштрассын шинжүүр ёсоор $]-\infty, +\infty[$ завсар дээр жигд нийлнэ. Иймд теорем 3.2 ёсоор өгөгдсөн цувааг гишүүнчлэн дифференциалчилж болно.

Жишээ 3.5 $\cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2^2}\cos 3x + \dfrac{1}{2^3}\cos 4x + ...$ функцэн цувааг $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}\right]$ хэрчим дээр гишүүнчлэн интегралчилж болох уу?

Бодолт: Өгсөн цувааны гишүүн бүр нь абсолют хэмжээгээрээ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

геометр прогрессийн гишүүдээс хэтрэхгүй учир Вейерштрассын шинжүүр ёсоор $]-\infty, +\infty[$ завсар дээр жигд нийлнэ. Иймд өгсөн цувааг дурын $[a, b]$ хэрчим дээр гишүүнчлэн интегралчилж болох бөгөөд тухайлбал $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}\right]$ хэрчим дээр гишүүнчлэн интегралчилж болно.

3.3 Зэрэгт цуваа

Функцэн цувааны чухал тухайн тохиолдлын нэг нь зэрэгт цуваа юм.

Тодорхойлолт 3.3

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

буюу

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{3.9}$$

хэлбэрийн цуваag зэрэгт цуваа гэнэ. Энд $c_n,\ (n = 1, 2, ...)$ нь тогтмол тоон коэффициентүүд болно.

Абелийн теорем. Хэрэв

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

цуваа нь $x = x_o$ цэг дээр нийлдэг бол

$$|x-a| < |x_o - a|$$

тэнцэтгэл бишийг хангах дурын x цэг дээр абсолют нийлнэ.

Зэрэгт цуваaны нийлэлтийн муж нь $x = a$ цэг дээр төвтэй $2R$ урттай завсар байх ба завсрын дотоод цэгүүд дээр цуваа нийлж, завсрын гаднах цэгүүд дээр цуваа сарнина. Өөрөөр хэлбэл зэрэгт цуваaны нийлэлтийн муж нь

$$-R < x - a < R$$

хэлбэрийн завсар байх бөгөөд

$$|x-a| < R$$

байхад цуваа абсолют нийлж,

$$|x-a| > R$$

байхад цуваа сарнина. Зэрэгт цуваа нийлж байгаа $(-R + a, R + a)$ мужийг тус цуваaны **нийлэлтийн муж** гэх ба R тоог **нийлэлтийн радиус** гэнэ. Нийлэлтийн радиусыг олох хэд хэдэн арга байна.

1. Хэрэв $c_o, c_1, ..., c_n, ...$ коэффициентууд нь бүгд тэгээс ялгаатай бол нийлэлтийн радиус

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{3.10}$$

хязгаараар тодорхойлогдоно.

Жишээ 3.6 $(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + ...$ цуваaны нийлэлтийг судал.

Бодолт: Энд, $u_n = \frac{1}{n^2},\ u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ болно.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1$$

Иймд өгөгдсөн цуваа $-1 < x - 2 < 1$ буюу $1 < x < 3$ завсар дээр нийлнэ. Одоо энэ завсрын захын цэгүүд дээрх нийлэлтийг судлая.

а. Хэрэв $x = 3$ бол цуваа $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$ болох ба $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ...$ хэлбэрийн цуваа $p > 1$ үед нийлдэг тул уг цуваа нийлнэ.

б. Хэрэв $x = 1$ бол $-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + (-1)^n \frac{1}{n^2} + ...$ болох ба энэ цуваа нь абсолют нийлнэ. Иймээс анхны өгсөн зэргийн цуваа завсрын үзүүрийн цэгүүд дээр нийлэх бөгөөд нийлэлтийн муж нь $1 \le x \le 3$ болно.

2. Хэрэв зэрэгт цуваа

$$c_o + c_1(x-a)^p + c_2(x-a)^{2p} + ... + c_n(x-a)^{np} + ...,\ (p = 1, 2, ...) \tag{3.11}$$

хэлбэртэй байвал нийлэлтийн радиусыг

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} \tag{3.12}$$

томъёогоор олно.

Жишээ 3.7 $1+\dfrac{x^3}{10}+\dfrac{x^6}{10^2}+\dfrac{x^9}{10^3}+...$ цувааны нийлэлтийг судал.

Бодолт: Өгөгдсөн цуваа нь $q=\dfrac{x^3}{10}$ суурьтай геометр прогресс болно. $a_n=\dfrac{1}{10^{n-1}}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{10^n}$ болно.

$$R=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{10^n\cdot 10^{-1}}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}10}=\sqrt[3]{10}$$

болно. Эндээс өгөгдсөн цувааны нийлэлтийн муж нь $-\sqrt[3]{10}<x<\sqrt[3]{10}$ болно.

3. Хэрэв $c_o, c_1, ..., c_n, ...$ коэффициентууд нь нь бүгд тэгээс ялгаатай бол нийлэлтийн радиусыг

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{3.13}$$

томъёогоор олж болно.

Жишээ 3.8 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\dfrac{m+1}{2m+1}\right)^m(x-2)^{2m}$ цувааны нийлэлтийн мужийг ол.

Бодолт: Энэ цувааны коэффициентүүд нь $n=2m-1$ буюу n сондгой тоо байхад $u_n=0$, $n=2m$ буюу n нь тэгш тоо байхад $u_n=\left(\dfrac{m+1}{2m+1}\right)^m$ гэж үзэж болно. Иймд

$$R=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2m]{\left(\frac{m+1}{2m+1}\right)^m}}=\lim_{m\to\infty}\sqrt{\frac{2m+1}{m+1}}=\sqrt{2}$$

буюу нийлэлтийн завсар нь $-\sqrt{2}<x-2<\sqrt{2}$ болно. Эндээс $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$ завсар гарна.

Хэрэв $x=2\pm\sqrt{2}$-ыг анхны цуваанд орлуулбал $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\dfrac{m+1}{2m+1}\right)^m\left(\sqrt{2}\right)^{2m}$ цуваа сарнина. Иймд уг цувааны нийлэх завсар нь $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$ болно.

Ямар ч тохиолдолд функцэн цувааны нийлэх мужийг түүний гишүүдийн абсолют хэмжигдэхүүнээр зохиосон цувааид, Даламберийн болон Кошийн I шинжүүдийг хэрэглэн олох боломжтой.

Жишээ 3.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$ цувааны нийлэлтийг судал.

Бодолт: $u_n=\dfrac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$ болох ба Кошийн шинжийг ашиглавал:

$$\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{|x-1|^{n+1}}{n}\implies\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{n+1}}{n}=\begin{cases}0, & |x-1|\le 1\\ \infty, & |x-1|>1\end{cases}$$

болно. Эндээс $|x-1| \leq 1$ үед цуваа нийлнэ. Нийлэлтийн муж нь $0 \leq x \leq 2$ болно.

Жишээ 3.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$ цувааны нийлэлтийг судал.

Бодолт: $u_n = \dfrac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$, $u_{n+1} = \dfrac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n+1)!}$ ба Даламберийн шинжийг ашиглавал

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^n}{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot n!}{x^{\frac{n(n-1)}{2}}(n+1)!} = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}$$

болно. Иймээс $|x| \leq 1$ үед цуваа нийлнэ. Нийлэлтийн муж нь $-1 \leq x \leq 1$ хэрчим болно.

Жишээ 3.11 $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$, $(|x| < 1)$ цувааны нийлбэрийг ол.

Бодолт: Энэ цувааны нийлбэрийг шууд олоход төвөгтэй учир цувааг дифференциалчлах теоремыг ашиглан бодъё. Дээрх цуваа нь

$$1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

цувааг гишүүнчлэн дифференциалчлах замаар гарч ирэх бөгөөд энэ цуваа нь $|x| < 1$ тул буурах геометр прогресс байна. Буурах геометр прогрессийн нийлбэр нь $S = \dfrac{a}{1-q}$ байдгийг тооцвол

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$$

болно. Одоо анхны өгөгдсөн цувааны нийлбэрийг олохын тулд дээрх тэнцэтгэлийн хоёр талыг гишүүнчлэн дифференциалчилбал

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... = \frac{1}{(1-x)^2}$$

болно.

Жишээ 3.12 $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + ...$, $(|x| < 1)$ цувааны нийлбэрийг ол.

Бодолт: Энэ бодлогыг жишээ 3.11-г бодсонтой адилаар бодъё. Уг цувааг гишүүнчлэн дифференциалчилбал

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$$

болно. Одоо өгсөн цувааны нийлбэрийг олохын тулд дээрх цувааны хоёр талыг гишүүнчлэн интегралчилбал

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ... = -\ln(1-x)$$

болно. Энэ цуваа нь $]-1, 1[$ завсар дээр нийлнэ.

3.4 Тейлорын цуваа

Тодорхойлолт 3.4 Хэрэв $f(x)$ функц x_o цэгт төгсгөлгүй олон удаа тасралтгүй дифференциалчлагдах бол

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n + ... \tag{3.14}$$

хэлбэрийн цувааг Тейлорын томъёо гэнэ. (3.14) томъёоны баруун талын цувааг $f(x)$ функцийн Тейлорын задаргаа гэнэ. Хэрэв Тейлорын томъёонд $x_o = 0$ байвал түүнийг Маклорены томъёо (3.15) гэнэ.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \tag{3.15}$$

Зарим элементар функцүүдийн Тейлорын (Маклорены) задаргаа

1. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ..., \qquad -\infty < x < \infty$

2. $\mathrm{sh}x = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ..., \qquad -\infty < x < \infty$

3. $\mathrm{ch}x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + + \dfrac{x^6}{6!}..., \qquad -\infty < x < \infty$

4. $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{2m+1}\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \qquad -\infty < x < \infty$

5. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + ... + (-1)^{2m}\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}, \qquad -\infty < x < \infty$

6. $(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!}x + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...$

7. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + ..., \qquad -1 \le x \le 1$

8. $\mathrm{arctg}\, x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + ..., \qquad -1 \le x \le 1$

Жишээ 3.13 $f(x) = 2^x$ функцийг зэрэгт цуваанд задал.
Бодолт:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = 2^x & f(0) = 2^o = 1 \\
f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 & f'(0) = \ln 2 \\
f''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 & f''(0) = \ln^2 2 \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
f^{(n)}(x) = 2^x \cdot \ln^n 2 & f^{(n)}(0) = \ln^n 2
\end{array}$$

Энд $0 < \ln 2 < 1$ ба дурын $x-$ын хувьд $|f^{(n)}(x)| < 2^x$ байна. Өгөгдсөн функцийн $x = 0$ цэг дээр Тейлорын задаргаа нь

$$2^x = 1 + x \cdot \ln 2 + \frac{x^2 \cdot \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \cdot \ln^3 2}{3!} + ..., \qquad -\infty < x < \infty$$

Хэрвээ e^x функцийн задаргаанд $x \sim x \ln 2-$оор соливол мөн 2^x функцийн задаргаа гарна.

Жишээ 3.14 $\ln x$ функцийг $(x-1)-$ийн зэрэгт цуваанд задал.
Бодолт:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..., \qquad -1 \le x \le 1$$

задаргаанд x-г $(x-1)$-ээр соливол

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ..., \qquad 0 < x \leq 2$$

Жишээ 3.15 $\frac{1}{x}$ функцийг $(x-2)$ зэрэгт цуваанд задал.

Бодолт: $\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}}$ гэж бичиж болно. Энэ нь $b_1 = \frac{1}{2}$ эхний гишүүнтэй, $q = -\frac{(x-2)}{2}$ хуваарьтай геометр прогрессийн нийлбэрийн томъёо болно. Иймээс

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x-2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-2}{2}\right)^3 + ...$$

буюу

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot (x-2) + \frac{1}{8} \cdot (x-2)^2 - \frac{1}{16} \cdot (x-2)^3 + ...$$

болно. Энд $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$ буюу $0 < x < 4$ байна.