ЛЕКЦ 5: Хоёрдугаар эрэмбийн гадаргуунууд, ангилал

Тодорхойлолт 0.1. *R^3 огторгуйд $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ тэгшитгэлийг координатууд нь хангах огторгуйн цэгүүдийн олонлогийг хоёрдугаар эрэмбийн гадаргуунууд гэнэ.*

Энэ хоёрдугаар эрэмбийн гадаргуугийн ерөнхий тэгшитгэлээс үндсэн хоёрдугаар эрэмбийн гадаргуунуудын хялбар тэгшитгэлүүдийг авч үзье.

1. Эллипсоид
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
2. Нэг хөндийт гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
3. Хоёр хөндийт гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
4. Эллипслэг конус
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$
5. Эллипслэг параболоид
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$
6. Гиперболлог параболоид
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

Эдгээр үндсэн 6 гадаргуугийн хэлбэрийг огтлолын аргаар судлая. Үүний тулд гадаргууг хавтгайгаар огтлоход үүсэх шугамыг авч үзнэ.

1. Эллипсоид

   Эллипсоидын тэгшитгэлд x, y, z квадрат зэрэгтэй орсон учир $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ координатын хавтгайнуудын хувьд эллипсоид тэгш хэмтэй гадаргуу байна.

   $x = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

   $y = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$z = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

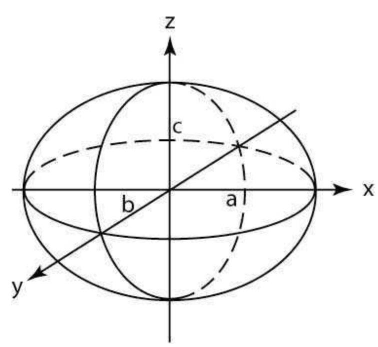
Эллипсүүд координатын хавтгайнууд дээр үүснэ. Мөн $x = h, \; y = h, \; z = h$ хавтгайнуудаар огтлоход эдгээр хавтгайнууд дээр дараах тэгшитгэлүүдээр тодорхойлогдох эллипсүүд үүснэ.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = h \end{cases}$$

Эдгээрээс үндэслэн эллипсоидыг зурвал (Зураг 1) болно.



Зураг 1: Эллипсоид

2. Нэг хөндийт гиперболоид

$x = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ гипербол

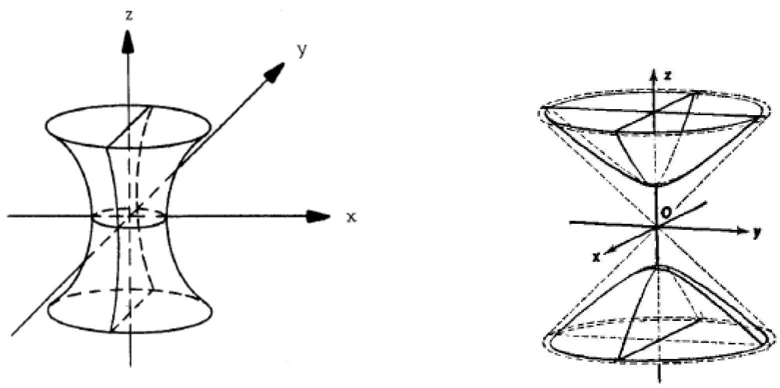
$y = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ гипербол

$z = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ эллипс үүснэ.

$z = h$ хавтгайгаар огтлоход

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ \qquad\qquad\quad z = h \end{cases}$$

Эдгээрээс үндэслэн нэг хөндийт гиперболоидыг зурвал (Зураг 2(а)) болно.



Зураг 2: Нэг (а) ба хоёр (б) хөндийт гиперболоид

3. Хоёр хөндийт гиперболоид

$y = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ гипербол

$z = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ гипербол

$x = h$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = h \end{cases}$ эллипс

үүснэ. (Зураг 2(б))

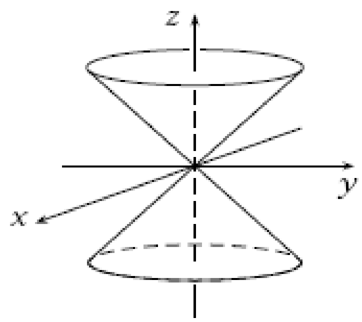
4. Эллипслэг конус

$x = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ огтлолцсон шулуунууд

$y = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ огтлолцсон шулуунууд

$z = h$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ z = h \end{cases}$ эллипс

үүснэ. (Зураг 3)



Зураг 3: Эллипслэг конус

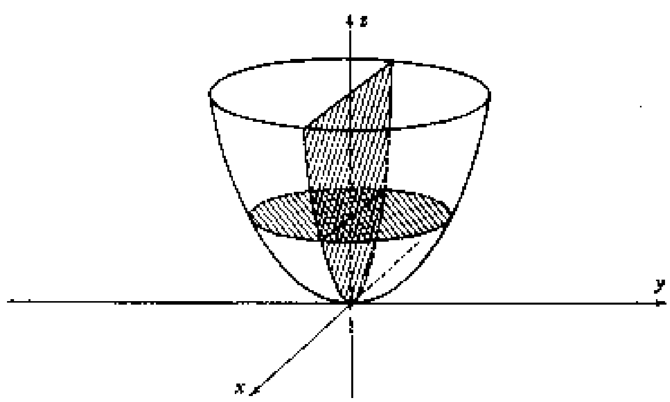
5. Эллипслэг параболоид

   $x = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} y^2 = 2pb^2 z \\ x = 0 \end{cases}$ парабол

   $y = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} x^2 = 2pa^2 z \\ y = 0 \end{cases}$ парабол

   $z = h$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz \\ z = h \end{cases}$ эллипс

   үүснэ. (Зураг 4)



Зураг 4: Эллипслэг параболоид

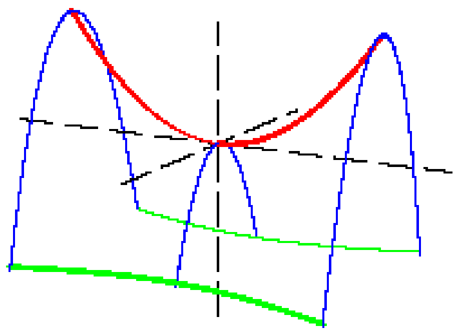
6. Гиперболлог параболоид

   $x = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} y^2 = -2pb^2 z \\ x = 0 \end{cases}$ парабол

   $y = 0$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} x^2 = 2pa^2 z \\ y = 0 \end{cases}$ парабол

$z = h$ хавтгайгаар огтлоход $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz \\ z = h \end{cases}$ гипербол

үүснэ. (Зураг 5)



Зураг 5: Гиперболлог параболоид

Шугамлаг гадаргуунууд

Шулуун шугамуудаас тогтсон гадаргууг **шугамлаг гадаргуу** гэнэ. Ийм гадаргууд цилиндр, конус, нэг хөндийт гиперболоид, гиперболлог параболууд багтдаг.

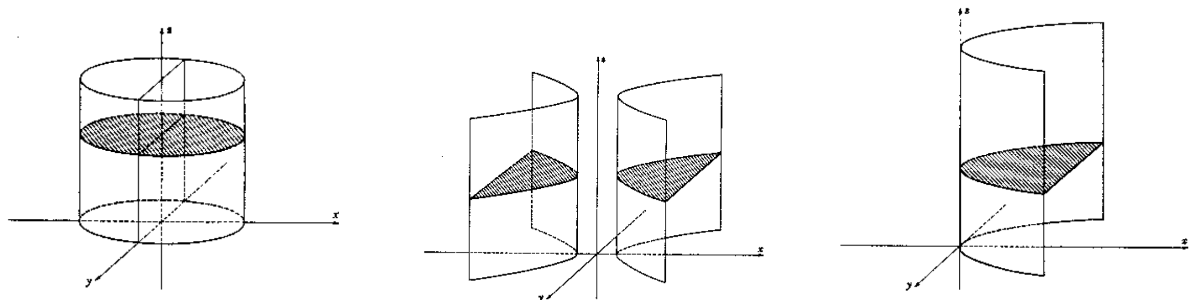
Тодорхойлолт 0.2. *Өгөгдсөн L шугамыг огтолсон, өгөгдсөн l шулуунтай параллель шулуунуудаас тогтсон гадаргууг цилиндр гадаргуу гэнэ.*

L шугамыг цилиндр гадаргуугийн чиглүүлэгч, l шулуунтай параллель шулуунуудыг цилиндр гадаргуугийн байгуулагчид гэж нэрлэдэг. Oxy хавтгай дээр L шугамын тэгшитгэл $F(x, y)$ гэж үзье. Цилиндрийн байгуулагчид Ozтэнхлэгтэй параллель байг.

Энэ гадаргуу дээр дурын $M(x, y, z)$ цэгийг авч түүнийг дайруулан Oz-тэй параллель шулуун татъя. Энэ шулууны L-тэй огтлолцсон цэгийг N гэе. $N \in L$ тул $F(x, y) = 0$ учир $M(x, y, z)$ цэгийн координат энэ тэгшитгэлийг хангана. Гадаргуу дээр үл орших цэгийн координат энэ тэгшитгэлийг хангахгүй тул $F(x, y) = 0$ тэгшитгэл цилиндр гадаргуугийн тэгшитгэл болно.

Жишээ 0.1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *тэгшитгэлээр тодорхойлогдох цилиндр гадаргуу нь Oz тэнхлэгтэй параллель байгуулагчтай,* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *тэгшитгэлээр тодорхойлогдох чиглүүлэгчтэй байна. Энэ гадаргууг эллипслэг цилиндр гэнэ. (Зураг 6-а)*

Жишээ 0.2. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *тэгшитгэлээр тодорхойлогдох гадаргууг гиперболлог цилиндр гэнэ. Чиглүүлэгч нь Oxy хавтгай дээрх* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *тэгшитгэлээр тодорхойлогдох гипербол, байгуулагч нь Oz-тэй параллель байна. (Зураг 6-б)*



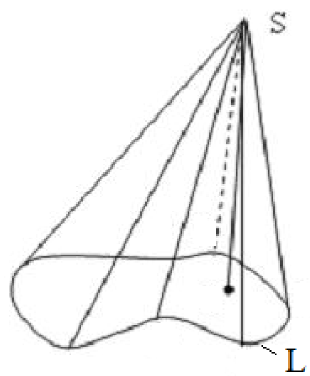
Зураг 6:

Жишээ 0.3. *$y^2 = 2px$ тэгшитгэлээр тодорхойлогдох гадаргууг параболлог цилиндр гэнэ. (Зураг 6-в)*

Конус гадаргуу

Тодорхойлолт 0.3. *Өгөгдсөн L шугамыг огтолсон, өгөгдсөн S цэгийг дайрч гарсан шулуунуудаас тогтсон гадаргууг конус гадаргуу гэнэ.*

L шугамыг конус гадаргуугийн чиглүүлэгч, S цэгийг оройн цэг гэнэ. Гадаргууг үүсгэж байгаа шулуунуудыг байгуулагчид гэнэ. (Зураг 7)



Зураг 7:

Жишээ 0.4. *Координатын эх дээр оройтой $\begin{cases} Z = c \\ \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ чиглүүлэгчтэй конусын тэгшитгэл бич.*

Бодолт: *$M(x, y, z)$ конус гадаргуугийн дурын цэг байг. OM байгуулагчийн чиглүүлэгчтэй огтлолцсон цэгийг N гэж тэмдэглэе. $N(X, Y, c)$ болно. ON шулууны тэгшитгэл $\dfrac{x-0}{X-0} = \dfrac{y-0}{Y-0} = \dfrac{z-0}{Z-0}$ буюу $\dfrac{x}{X} = \dfrac{y}{Y} = \dfrac{z}{Z}$ болно.*

Эндээс $X = \dfrac{xc}{z}$, $Y = \dfrac{yc}{z}$ болно.

Үүнийг эллипсийн тэгшитгэлд орлуулбал $\dfrac{c^2x^2}{a^2z^2}+\dfrac{c^2y^2}{b^2z^2}=1$ буюу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^1}=0$ болно. Энэ нь бидний мэдэх эллипслэг конусыг тэгшитгэл болно.