ЛЕКЦ 8.Хоёрдугаар эрэмбийн муруйнууд, тэдгээрийг хялбарчлах.

Багш С. Уранчимэг

2021 он

1. II эрэмбийн муруй.
2. Эллипс.
3. Гипербол.
4. Парабол.

Координат нь

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad (1)$$

хоёр хувьсагчийн хоёр зэргийн алгебрийн тэгшитгэлийн шийд байх хавтгайн цэгүүдийн олонлогийг II эрэмбийн муруй гэнэ. (1) коэффициентуудын утгаас хамаарч дараах хялбар хэлбэрийн тэгшитгэлүүдийн нэгд шилжинэ.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{эллипс}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{гипербол}$$

$$y^2 = 2px \quad \text{парабол}$$

Хэрэв $B^2 - 4AC < 0$ бол эллипс,

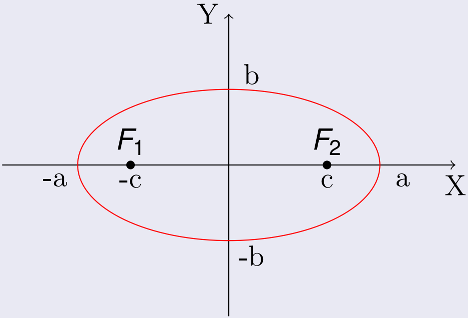
тухайн тохиолдолд $A = C$, $B = 0$ бол тойрог.

Хэрэв $B^2 - 4AC = 0$ бол парабол.

Хэрэв $B^2 - 4AC > 0$ бол гипербол.

Тодорхойлолт

Фокус гэж нэрлэгдэх бэхлэгдсэн хоёр цэг хүртэлх зайнуудын нийлбэр тогтмол тоо байх хавтгайн бүх цэгийн олонлогийг эллипс гэнэ.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Эллипсийн фокусуудын хоорондох зайг их тэнхлэгт харьцуулсан харьцааг түүний эксцентриситет гээд ε үсгээр тэмдэглэе.

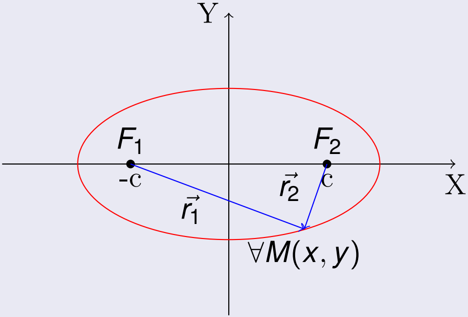
$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

$a > c$ тул ямар ч эксценриситет $\varepsilon < 1$ байна.

$$\varepsilon \to 0 \implies a \sim b$$

$$\varepsilon \to 1 \implies \text{зуйван}$$

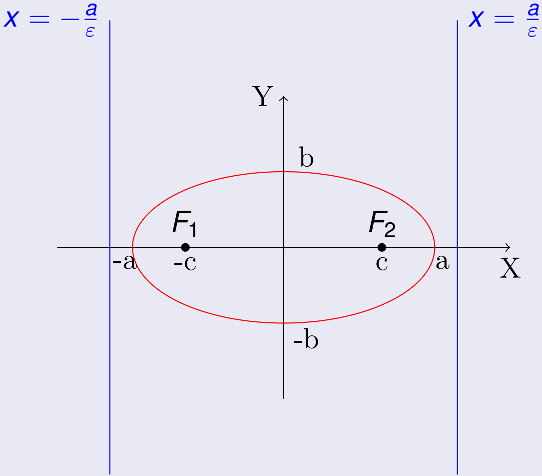
Фокусын радиус вектор: $\vec{r_1}, \vec{r_2}$



$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon \cdot x \\ r_2 = a - \varepsilon \cdot x \end{cases}$$

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$$

хоёр шулууныг эллипсийн зүүн, баруун директрис гэнэ.



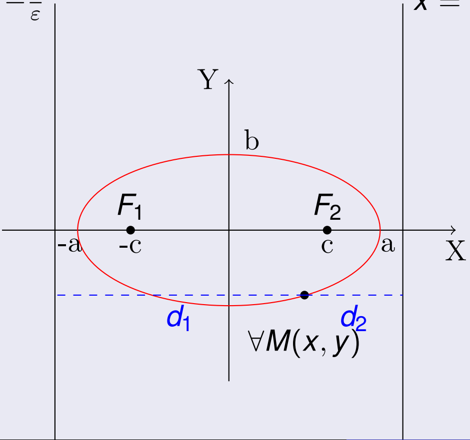
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Теорем

$$\varepsilon = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$$

$x = -\frac{a}{\varepsilon}$ $x = \frac{a}{\varepsilon}$

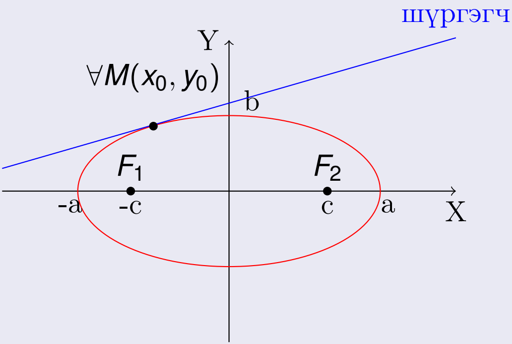


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Эллипсийн шүргэгчийн тэгшитгэл.

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Эллипсийн параметрт тэгшитгэл:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

Жишээ (1.)

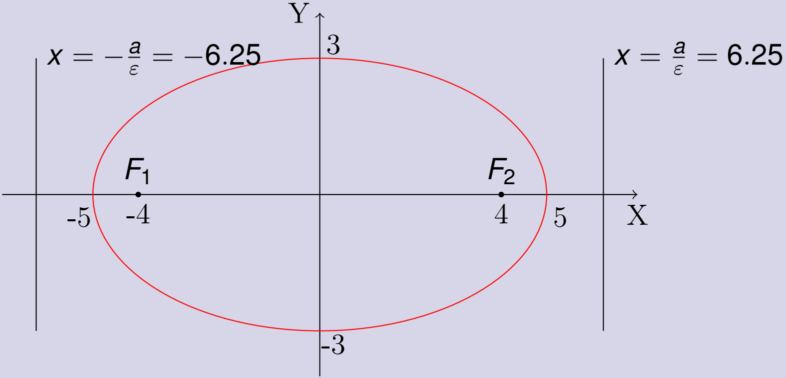
$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

графикийг байгуул.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

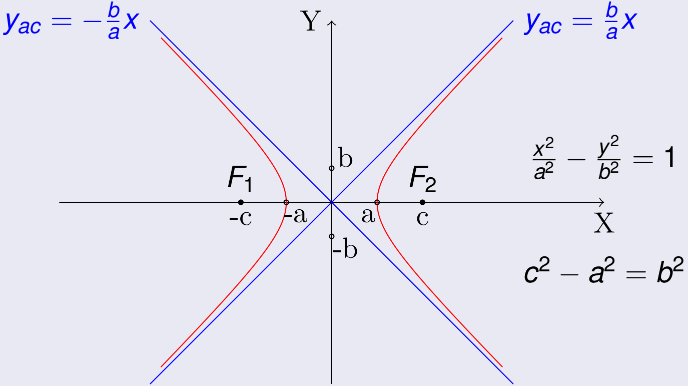
$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \implies c = \pm 4$$

Жишээ (1.)


Y
X
3
-3
-5
-4
4
5
F_1
F_2
$x = -\frac{a}{\varepsilon} = -6.25$
$x = \frac{a}{\varepsilon} = 6.25$

Тодорхойлолт

Фокус гэж нэрлэгдэх бэхлэгдсэн хоёр цэг хүртэлх зайнуудын ялгавар тогтмол тоо байх хавтгайн цэгүүдийн олонлогийг гипербол гэнэ.



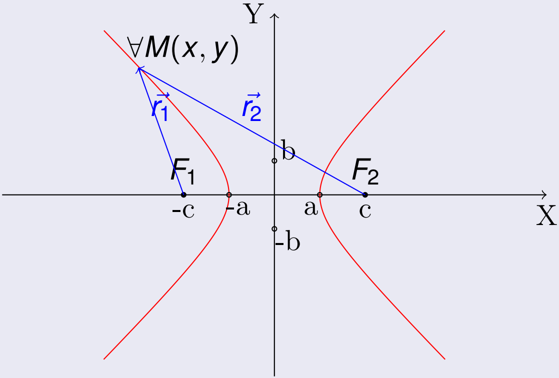
Фокусуудын хоорондох зайг бодит тэнхлэгт харьцуулсан харьцааг түүний эксцентриситет гээд ε үсгээр тэмдэглэе.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

$a < c$ тул ямар ч эксценриситет $\varepsilon > 1$ байна.

$$\text{адил хажуут} \iff a = b$$

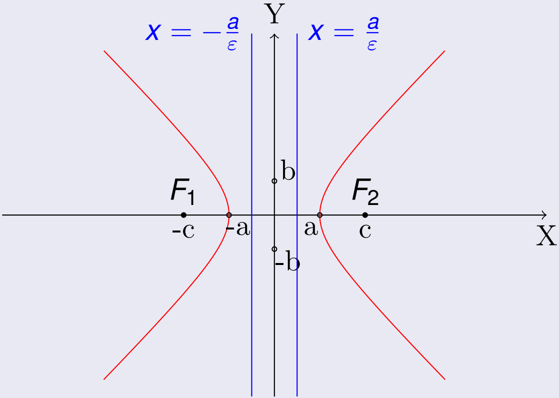
Фокусын радиус вектор: $\vec{r_1}, \vec{r_2}$



$$\begin{cases} x > 0 \\ r_1 = a + \varepsilon \cdot x \\ r_2 = -a + \varepsilon \cdot x \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ r_1 = -a - \varepsilon \cdot x \\ r_2 = a - \varepsilon \cdot x \end{cases}$$

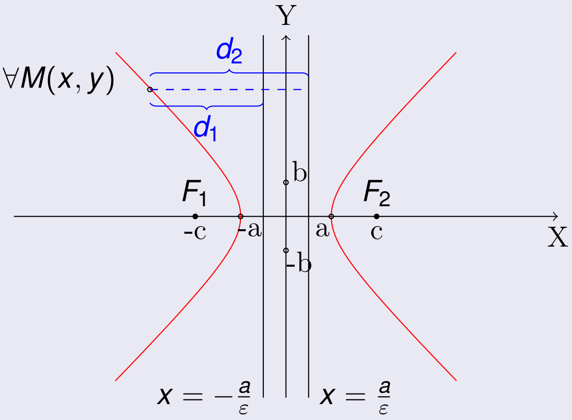
$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$$

хоёр шулууныг гиперболын баруун, зүүн директрис гэнэ.



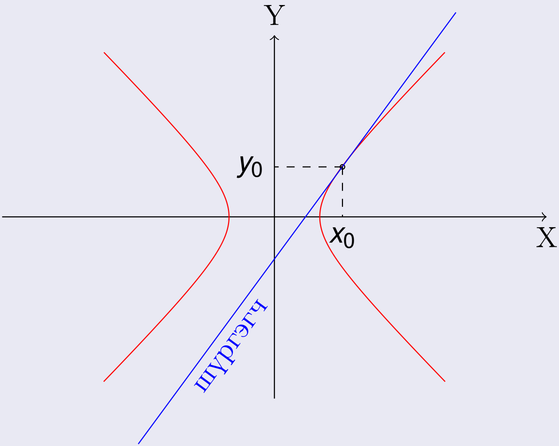
Теорем

$$\varepsilon = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$$



Гиперболын шүргэгчийн тэгшитгэл.

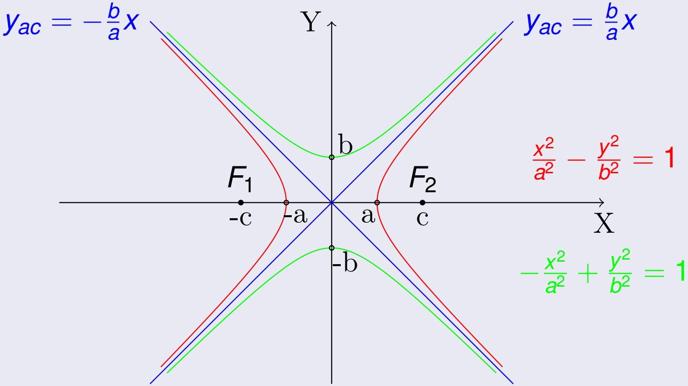
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$



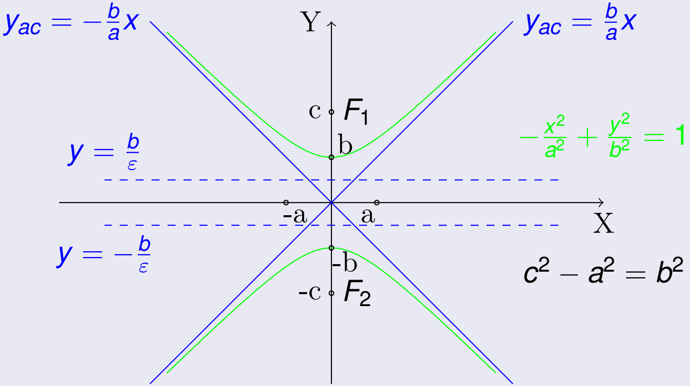
Гиперболын параметрт тэгшитгэл:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{cost} \\ y = b \tan t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Хосмог гипербол.



Хосмог гипербол.



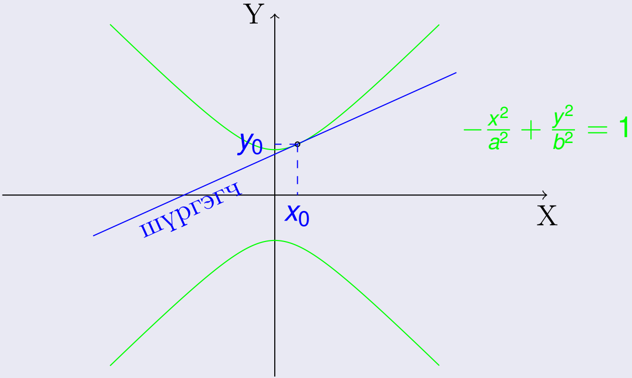
$$\varepsilon = \frac{c}{b}$$

бодит тэнхлэг: $2b$
хуурмаг тэнхлэг: $2a$
Хосмог гиперболын параметрт тэгшитгэл:

$$\begin{cases} x = b\tan t \\ y = -\frac{a}{cost} \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Хосмог гиперболын шүргэгчийн тэгшитгэл.

$$-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$



Жишээ (2.)

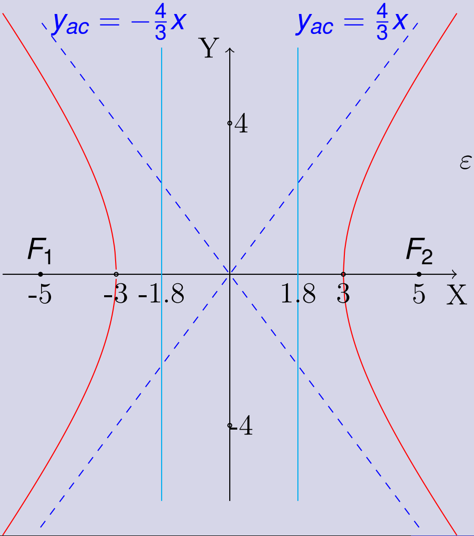
$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

графикийг байгуул.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$c^2 = b^2 + a^2 = 16 + 9 = 25 \implies c = \pm 5$$

Жишээ (2.)



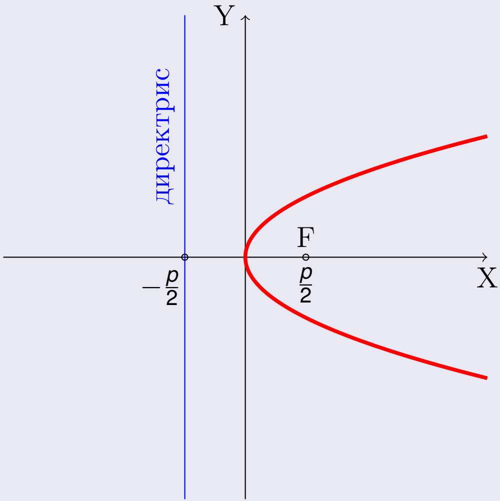
$\varepsilon = \frac{5}{3}$

Тодорхойлолт

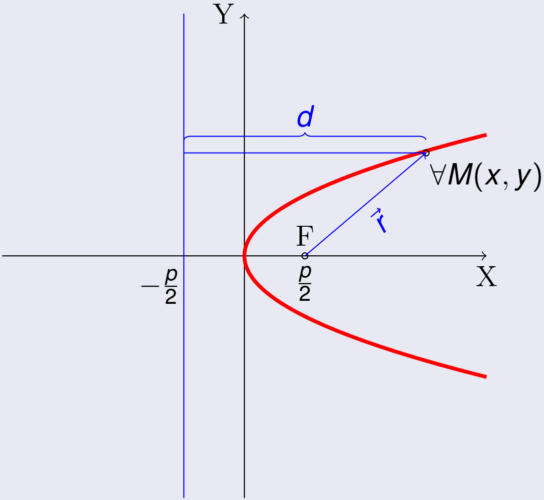
Фокус гэж нэрлэгдэх бэхлэгдсэн цэг болон директрис хэмээх өгсөн шулуунаас ижил зайтай орших цэгүүдийн олонлогийг парабол гэнэ.

Фокусаас директрис хүртэлх зайг p гээд параболын параметр гэнэ.

$$y^2 = 2px$$

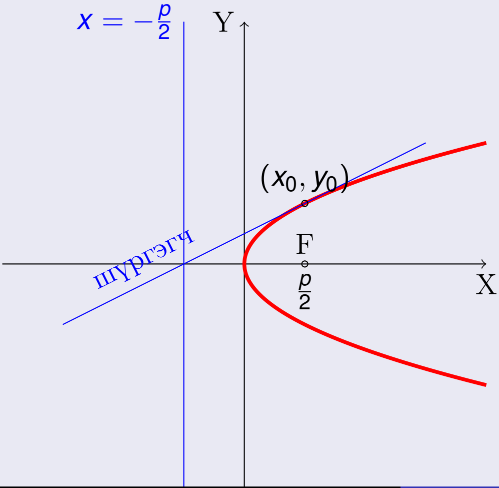


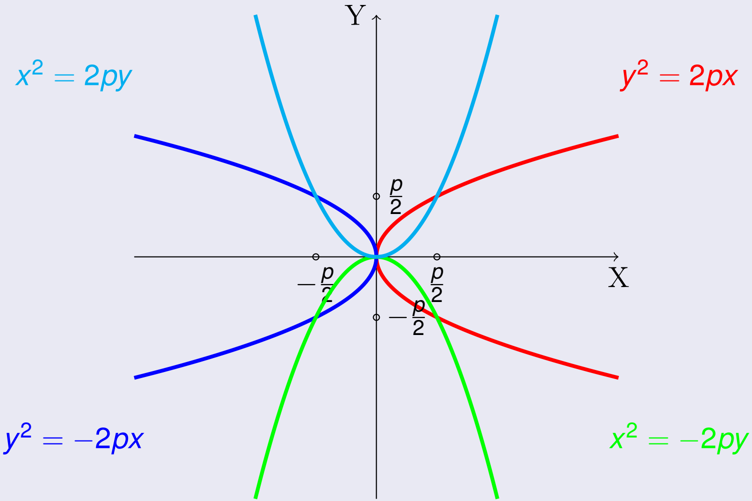
$$\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$$



Шүргэгчийн тэгшитгэл.

$$yy_0 = p(x + x_0)$$




Y
X
$x^2 = 2py$
$y^2 = 2px$
$y^2 = -2px$
$x^2 = -2py$
$\frac{p}{2}$
$-\frac{p}{2}$
$\frac{p}{2}$
$-\frac{p}{2}$

Жишээ (3.)

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t^2 \\ -2 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

графикийг байгуул.

$$t = \frac{x}{2} \implies y = \frac{3}{4}x^2$$

$$p = \frac{3}{8} \implies F(0, \frac{3}{16})$$

Жишээ (3.)