Семинар 2

Динамик, Ажил ба энерги

2.1 Томъёо ба тодорхойлолтууд

Хүч гэдэг нь харилцан үйлчлэлийн хэмжээг илэрхийлэгч хэмжигдэхүүн юм.

Ньютоны 1 –р хууль: Аливаа бие тайван байдал буюу шулуун, жигд хөдөлгөөнөө гадны хүч үйлчлэх хүртэл хадгална.

Бие тайван буюу шулуун замын жигд хөдөлгөөний төлөвөө хадгалах энэ шинж чанарыг инерцит чанар гэнэ.

Ньютоны 1 –р хууль биелэх тооллын системийг инерциал тооллын систем гэнэ.

Импульс: Биеийн импульс нь хөдөлгөөний тоо хэмжээг илэрхийлдэг бөгөөд биеийн массыг хурдаар үржүүлсэн үржвэртэй тэнцүү байна.

$$\vec{P} = m\vec{v} \tag{2.1}$$

Ньютоны 2 –р хууль: Биед үйлчилж байгаа хүч нь тэр биеийн импульсээс хугацаагаар авсан уламжлалтай тэнцүү байна.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{2.2}$$

Тогтмол масстай биед үйлчлэгч хүч нь массыг биеийн хөдөлгөөний хурдатгалаар үржүүлсэнтэй тэнцүү байна.

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.3}$$

Ньютоны 3 –р хууль: Хоёр биеийн харилцан үйлчлэлийн хүчнүүд нь хэмжээгээрээ тэнцүү чиглэлээрээ эсрэг чиглэнэ.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{2.4}$$

Биеийн ямар нэг гадаргатай шүргэлцсэний улмаас үүсэх хөдөлгөөнийг саатуулах хүчийг үрэлтийн хүч гэнэ.

Бие харьцах гадаргуутай харьцангуй тайван үед үүсэх үрэлтийн хүчийг **тайвны үрэлтийн хүч** гэнэ. Харин бие харьцах гадаргуутай харьцангуй гулсан хөдлөх үед түүний хөдөлгөөний эсрэг чиглэсэн үрэлтийн хүчийг **гулсахын үрэлтийн хүч** гэнэ.

$$F_{\text{гулсах}} = \mu \cdot N \tag{2.5}$$

Тухайн системийн массын тархалтаар тодорхойлогдох, дараах вектороор тодорхойлогдох цэгийг системийн **массын төв** гэнэ.

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{M} \cdot \int_M \vec{r} \cdot dm \tag{2.6}$$

dm –системийн жижиг хэсгийн масс, $\vec{r}$ –жижиг хэсгийн радиус вектор, M –системийн нийт масс Массын төвүүд нь $\vec{r}_i$ байх нь m_i масстай биеүдээс тогтох системийн массын төв нь:

$$\vec{R}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{M} \tag{2.7}$$

Дээрх томъёонууд нь проекцуудынхаа хувьд хүчинтэй байна.

Хувьсах масстай биеийн хөдөлгөөн

Урсан гарах хий буюу шингэний тийрэлтээр ажилладаг хөдөлгүүрийг тийрэлтэт хөдөлгүүр гэнэ.

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{u} \cdot \frac{dm}{dt} = \vec{F} \tag{2.8}$$

Дээрх тэгшитгэлийг хувьсах масстай биеийн динамикийн тэгшитгэл буюу Мещерскийн тэгшитгэл гэнэ. Мещерскийн тэгшитгэл дэх $u \cdot \frac{dm}{dt} = F_T$ хэсгийг тийрэлтийн хүч гэх бөгөөд энэ нь биеийн масс хувьсах нөхцөлтэй холбоотой.

$$v = u \cdot \ln \frac{m_0}{m} \tag{2.9}$$

(2.9) томъёог Э.Циолковскийн тэгшитгэл гэх бөгөөд пуужингийн хурд массаас хамаарлыг харуулна. Энд: v –пуужингийн хурд, m –пуужингийн масс, u –пуужингаас тийрэгдэн гарах хийн хурд, m_0 нь $v = 0$ байх үеийн масс.

Аливаа механик хөдөлгөөний өөрчлөлтийн үед харилцан үйлчилж байгаа биеүдийн хоорондын энерги солилцох буюу биеийн энерги өөрчлөгдөх процессыг тоон талаас нь тодорхойлох хэмжигдэхүүнийг ажил гэнэ.

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cdot dS \cdot \cos\alpha \tag{2.10}$$

α – бол хүчний вектор ба шилжилт хоёрын хоорондох өнцөг. Хувьсах хүчний ажил

$$A = \int_0^S \vec{F} d\vec{S} = \int_0^S F \cdot dS \cdot \cos\alpha \tag{2.11}$$

Нэгж хугацаанд хийх ажлын хэмжээг чадал гэх ба энэ нь биед үйлчлэх хүч, хурд хоёрын скаляр үржвэртэй тэнцүү байна.

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{2.12}$$

Биеийн янз бүрийн хөдөлгөөн харилцан хувирахдаа тодорхой тоо хэмжээтэй байх бөгөөд үүний хэмжүүр буюу ажил хийх чадварыг энерги гэнэ. Кинетик энерги: Биеийн хөдөлгөөнийхөө улмаас олж авах ажил хийх чадварыг кинетик энерги гэнэ.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \tag{2.13}$$

Потенциал энерги: Бие төлөв байдал буюу байрлалаасаа хамааран олж авсан ажил хийх чадварыг потенциал энерги гэнэ. Хүндийн хүчний орон дахь биеийн потенциал энерги:

$$E_{\Pi} = mgh \tag{2.14}$$

Харимхай деформацын потенциал энерги:

$$E_{\Pi} = \frac{kx^2}{2} \tag{2.15}$$

Механик дахь хадгалагдах хуулиуд

Импульс хадгалагдах хууль: Системд гаднаас харилцан үйлчлээгүй буюу үйлчлэх гадаад хүчнүүдийн нийлбэр тэгтэй тэнцүү үед, системийн нийт импульс хадгалагдана.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0, \quad \vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = const \tag{2.16}$$

Энерги хадгалагдах хууль: Энерги нь устаж үгүй болохгүй шинээр бий болдоггүй нэг хэлбэрээс нөгөө хэлбэрт шилжих хадгалагдах хэмжигдэхүүн юм. Иймд аливаа тусгаарлагдсан битүү системийн бүтэн энерги хадгалагдана.

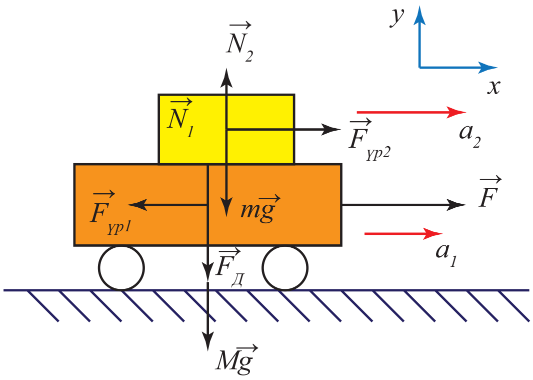
Хүндийн хүчний оронд системийн кинетик, потенциал энергийн нийлбэр тогтмол байна.

$$E_б = E_k + E_п = \frac{mv^2}{2} + mgh = const \tag{2.17}$$

2.2 Жишээ бодлого

Жишээ 2.1

M=20кг масстай тэргэнцэр хэвтээ тэгш гадаргаар $\vec{F}$ хүчний үйлчлэлээр үрэлтгүй хөдлөх ба түүн дээр m=10кг масстай ачаа байрлана. Тэргэнцэр ба ачаа хоорондын үрэлтийн коэффициент μ=0.1 Хүчний чиглэл хэвтээ гадаргатай параллель. $\vec{F}$ хүч 20Н ба 60Н байх тохиолдол бүрд тэргэнцэр ба ачааны хурдатгал, мөн тэргэнцэр ба ачаа хоорондын үрэлтийн хүч ямар байх вэ?



Зураг 2.1

Бодолт: m=10кг масстай ачааны хөдөлгөөний тэгшитгэлийг вектор хэлбэрт бичвэл: $\vec{N}_2 + \vec{F}_{үр_2} + m\vec{g} = m\vec{a}_2$

Үрэлтийн хүч $\vec{F}_{үр_2}$ нь $\vec{F}$ хүчний дагуу чиглэх ба m масстай ачаа, M масстай тэргэнцэрт даралт учруулах бөгөөд энэ хүч Ньютоны III хууль ёсоор тулгуурын хариу /реакци/ хүч N_2 – той тэнцүү. Ачааны хувьд харгалзах тэнхлэгүүд дээрх проекцоор дараах систем тэгшитгэл бичигдэнэ.

$$F_{үр2} = ma_2$$

$$N_2 - mg = 0$$

M масстай тэргэнцэрт хөдөлгөөний тэгшитгэлийг бичвэл:
$\vec{F} + \vec{N}_1 + M\vec{g} + \vec{F}_д + \vec{F}_{үр1} = M\vec{a}_1$

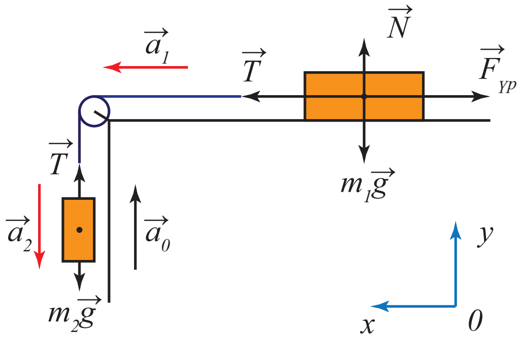
$F_{үр1}$ үрэлтийн хүч нь тэргэнцэрийн хөдөлгөөний эсрэг чиглэх ба Ньютоны III хууль ёсоор: $|\vec{F}_{үр2}| = |\vec{F}_{үр1}| = |\vec{F}_{үр.г}|$ Дээрхи хүчнүүдийг харгалзах тэнхлэгүүд дээр нь проекцлож дараах систем тэгшитгэлийг бичиж болно. $F - F_{үр1} = Ma_1$ $N_1 - F_д - Mg = 0$ Хэрэв ачаа гулсаж эхэлбэл тэдний хооронд гулсалтын үрэлтийн хүч үйлчилнэ. Энэ хүчийг $F_{үр.г} = \mu N_2$ томъёогоор олно. Харин $N_2 = mg$ учираас гулсалтын үрэлтийн хүч $F_{үр.г} = \mu mg$; $F_{үр.г} = 0.1 \cdot 10 \cdot 9.8 = 9.8$Н гэж тодорхойлогдоно. Хэрэв ачаа гулсахгүй бол тэд нэг /бүхэл, бүтэн/ бие болж хөдлөх учираас тэдний хооронд тайвны үрэлтийн хүч $F_{үр.т}$ үйлчилнэ. Энэ тохиолдолд тэргэнцэр ба ачааны хурдатгалууд тэнцүү байна. Өөрөөр хэлбэл, $a_1 = a_2 = a$ болно. Энэ тохиолдолд дараах систем тэгшитгэлийг ашиглан хурдатгал a болон тайвны үрэлтийн хүч $F_{тайв}$ – ыг олно.
$F - F_{үр.т} = Ma \quad \Rightarrow \quad F_{үр.т} = ma$
$a = \frac{F}{(M+m)} \qquad F_{үр.т} = \frac{Fm}{(M+m)}$

1. $F_1 = 20$Н байх үед $F_{үр.т} = \frac{20 \cdot 10}{30} = 6.7$Н харин хурдатгал $a = 0.67$м/с^2 гэж тодорхойлогдож байна. энэ үед $F_{үр.т} < F_{үр.г}$ учир биеүд хамт хөдлөнө.

2. Харин $F_2 = 60$Н байх үед $F_{\text{үр.т}} = \frac{60 \cdot 10}{30} = 20$Н байна. Эндээс харахад $F_2 = 60$Н байх тохиолдолд ачаа тайван байх боломжгүй байна. Энэ тохиолдолд тэргэнцэр ба ачааны хооронд $F_{\text{үр}} = 9.8$Н гулсалтын үрэлтийн хүч үйлчилнэ. Энэ үед тэргэнцэрийн хурдатгал
$$a_1 = \frac{F - F_{\text{үр.г}}}{M} = \frac{60 - 9.8}{20} = 2.51\text{м/с}^2$$
Харин ачааны хурдатгал $a_2 = \frac{F_{\text{үр.г}}}{m} = \frac{9.8}{10} = 0.98\text{м/с}^2$ гэж тодорхойлогдож байна.

Жишээ 2.2

Үрэлтгүй эргэлдэх дамар дээр тохогдсон үл сунах, жингүй утсаар хоорондоо холбогдсон $m_1 = 0.5$кг ба $m_2 = 0.6$кг масстай ачаануудын систем эгц дээшээ $a_0 = 4.9\text{м/с}^2$ хурдатгалтай хөдлөж байгаа цахилгаан шатан дотор байрлана. (Зураг **??**) Хэрэв тавцан ба m_1 ачаа хоорондын үрэлтийн коэффициент $\mu = 0.1$ бол утасны татах хүч Т ба m_2 ачааны тооллын үл хөдлөх системтэй харьцуулсан хурдатгалыг олно уу.



Зураг 2.2

Бодолт: m_1 ба m_2 ачаануудын зүгээс үйлчлэх утасны татах хүчнүүд тэнцүү, нэгэн ижил Т байна. Утас үл сунах учираас ачаануудын хурдатгал цахилгаан шаттай харьцуулахад нэгэн ижил $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$ тэнцүү байна. Тооллын үл хөдлөх системтэй харьцуулахад m_1 ба m_2 ачаануудын хөдөлгөөний тэгшитгэл

$$m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{үр}} = m_1(\vec{a}_0 + \vec{a}_1)$$

$$m_2\vec{g} + \vec{T} = m_2(\vec{a}_0 + \vec{a}_2)$$

гэж бичигдэнэ.
Харин харгалзах тэнхлэгүүд дээр нь проекци нь:
$N - m_1 g = m_1 a_0$
$T - m_2 g = m_2(a_0 - a)$
$T - F_{\text{үр}} = m_1 a$ Үрэлтийн хүч g ба a_0 хурдатгалуудаар:
$F_{\text{үр}} = \mu N$; $N = m_1(g + a_0)$; $F_{\text{үр}} = \mu m_1(g + a_0)$ гэж тодорхойлогдоно. Дээрх систем тэгшитгэлийг бодож утасны татах хүчийг олъё:

$T = \frac{m_1 m_2(g+\mu(g+a_0)+a_0)}{m_1+m_2}$
$T = \frac{m_1 m_2(1+\mu)(g+a_0)}{m_1+m_2} = \frac{0.5 \cdot 0.6(1+0.1)(9.8+4.9)}{0.5+0.6} = 4.41$Н
Харин m_2 ачааны тооллын үл хөдлөх системтэй харьцуулсан хурдатгалыг олохын тулд цахилгаан шаттай харьцуулсан хурдатгалыг тодорхойлох зайлшгүй шаардлагатай. Энэ хурдатгалыг $T - g m_2 = m_2 a_0 - m_2 a$ томъёогоор олно. Эндээс:
$a = \frac{m_2(a_0+g)-T}{m_2} = \frac{0.6(9.8+4.6)-4.41}{0.6} = 7.35\text{м/с}^2$ Тооллын үл хөдлөх системтэй харьцуулахад

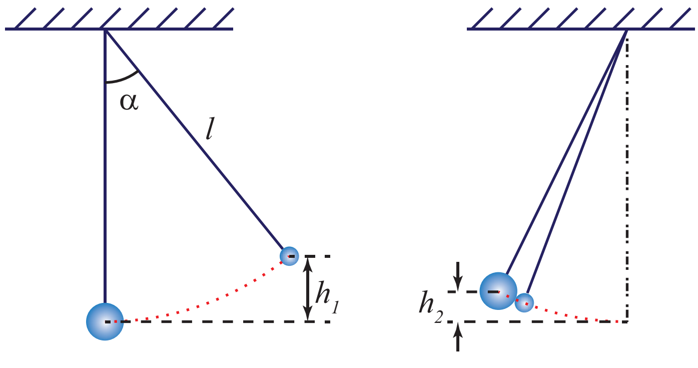
цахилгаан шат дээшээ, харин m_2 ачаа доошоо хөдлөж байгаа учраас $\vec{a}$ хурдатгалын тэмдэгийг сөрөгөөр авна. Тооллын үл хөдлөх системтэй харьцуулсан a' хурдатгал нь $\vec{a}_0$ ба $\vec{a}$ хурдатгалуудаар: $\vec{a}' = \vec{a}_0 + \vec{a}$; $\quad a' = 4.9 - 7.35 = -2.45$м/с^2 гэж тодорхойлогдож байна. Хурдатгалын хасах тэмдэг нь тооллын үл хөдлөх системтэй харьцуулахад m_2 ачаа доошоо хөдлөж байгааг илэрхийлж байна.

Жишээ 2.3

Тус бүрдээ 1.5 м утсанд нэг цэгээс дүүжлэгдсэн 9кг ба 12кг масстай ган бөмбөлөгүүд тайван байв. Харин 9кг масстай бөмбөлөгийг 37^0 өнцгөөр хазайлгаж h_1 өндөрт хүргээд тавьжээ. Хоёр бөмбөлөг харимхай биш төвийн мөргөлдөөн хийж h_2 өндөрт хүрчээ.

1. Хоёр бөмбөлөгийн хазайлтын h_2 өндрийг
2. Хоёр бөмбөлөг мөргөлдөх үеийн деформацид алдсан энергийг тус тус олно уу.

   R_1 ба $R_2 << 1$ гэж үзнэ.



Зураг 2.3

Бодолт: m_1 масстай бөмбөлөгийн хувьд энерги хадгалагдах хуулийг хэрэглэвэл: $m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$

Энэ тэгшитгэлээс v_1 хурдыг олохын тулд h_1-ийг α өнцөг ба l уртаар $\frac{l-h_1}{l} = cos\alpha$; $h_1 = l(1 - cos\alpha)$ гэж илэрхийлснээр хоёр бөмбөлөг мөргөлдөхийн өмнөх агшны m_1 масстай бөмбөлөгийн хамгийн их v_1 хурд $v_1 = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha)}$ гэж тодорхойлогдоно. Харина m_1 масстай бөмбөлөг v_1 хурдтай ирж m_2 масстай бөмбөлөгтэй харимхай биш төвийн мөргөлдөөн хийх тул импульс хадгалагдах хууль ёсоор:

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$ байх учраас хоёр бөмбөлгийн v_2 хурд
$v_2 = \frac{m v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \sqrt{2gl(1-cos\alpha)}}{m_1 + m_2}$
гэж олдоно. Мөргөлдөөний дараа ган бөмбөлөгүүд нэгэн ижил v_2 хурдтай учраас механик энерги хадгалагдах хуулийг ашиглан

$\frac{(m_1+m_2)v_2^2}{2} = (m_1 + m_2) g h_2$
тэгшитгэлээс h_2 -ыг олбол:

$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{m_1^2 2gl(1-cos\alpha)}{2g(m_1+m_2)^2} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 l(1 - cos\alpha)$ болно. Эндээс: $h_2 = \left(\frac{9}{9+12}\right)^2 \cdot 1.5(1 - cos37^0) = 0.055$ м гэж олно.

Бөмбөлөгүүдийн мөргөлдөх үеийн деформацид алдагдсан энерги нь мөргөлдөхийн өмнөх бөмбөлөгүүдийн нийт кинетик энерги ба мөргөлдөөний дараах бүх кинетик энергийн зөрүүгээр тодорхойлогддог. Мөргөлдөхийн өмнөх бөмбөлөгүүдийн нийт кинетик энерги m_1 масстай бөмбөлөгийн хамгийн их кинетик энергиэр:

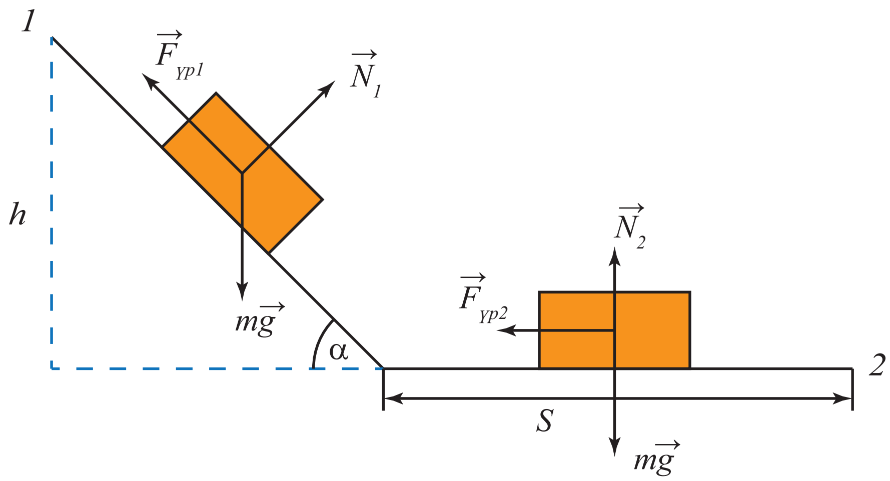
$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1}{2} 2gl(1-cos\alpha)$ гэж тодорхойлогдоно. Эндээс: $E_{k1} = 9$кг9.8Н/кг $\cdot$ 1.5м$(1-cos37^0) = 26.46$Ж

Мөргөлдөөний дараах бүх кинетик энерги v^2 хурдтай хөдлөж байгаа бөмбөлөгүүдийн нийт кинетик энергиэр: $E_{k2} = \frac{m_1+m_2}{2} v^2$ гэж тодорхойлогдоно.

Эндээс: $E_{k2} = \frac{m_1+m_2}{2}\left(\frac{m_1\sqrt{2gl(1-cos\alpha)}}{m_1+m_2}\right)^2 = 11.32$Ж Энэ хоёр энергийн зөрүүгээр деформацид зарцуулагдсан энерги: $\Delta E = E_{k1} - E_{k2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{2} v^2 = 26.46$Ж $- 11.32$Ж $=$ 15.14Ж гэж тодорхойлогдоно.

Жишээ 2.4

Бие $\alpha = 45^0$ налуу өнцөгтэй, $h = 10$ м өндөртэй налуу хавтгайгаас доошоо хэвтээ гадарга хүртэл гулсаж улмаар цааш хөдөлгөөнөө үргэлжлүүлнэ. (Зураг-**??**) Бүх замын туршид үрэлтийн коэффициент тогтмол $\mu = 0.1$ байх бол бие хэвтээ гадаргаар зогсох хүртлээ явсан замыг олно уу.



Зураг 2.4

Бодолт: Налуугаар явсан замыг S_1,тэгш хэвтээ гадаргаар явсан замыг S_2 гэж тэмдэглэе. Биеийн кинетик энергийн өөрчлөлт нь хүчний хийсэн ажлаар тодорхойлогддог учраас шилжилтийн явцад биед үйлчилсэн бүх хүчнүүдийн хийсэн ажил

$E_{K.эц} - E_{K.эх} = A$ гэж тодорхойлогдоно. Энэ ажлыг хүч тус бүрээр задалбал:

$E_{K.эц} - E_{K.эх} = A_{N_1} + A_{1_{mg}} + A_{F_{үр1}} + A_{N_2} + A_{2_{mg}} + A_{F_{үр2}}$

гэж бичигдэнэ. Зурагаас харахад хүчнүүд: $F_{үр2} = \mu mg$, $N_2 = mg$, $F_{үр1} = \mu N_1 = \mu mgcos\alpha$, $N_1 = mgcos\alpha$ гэж илэрхийлэгдэнэ. Одоо эдгээр хүчнүүдийн хийх ажлуудыг томъёолоё. N_1 ба N_2—ээр ажил хийгдэхгүй тул $A_{N_1} = A_{N_2} = 0$ байна.

Харин $A_{1mg} = mgsin\alpha \cdot S_1, \quad A_{2mg} = 0$

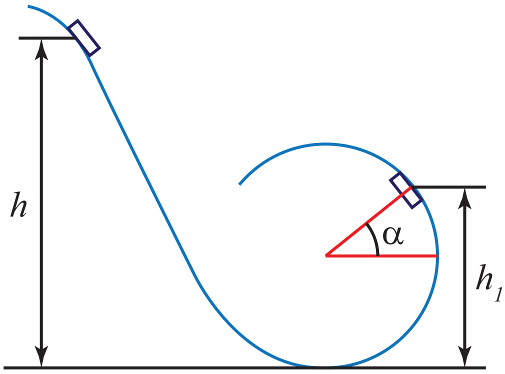
$A_{F_{үр1}} = -mg\mu cos\alpha \cdot S_1, \quad A_{F_{үр2}} = -mg\mu S_2$ гэж тус тус илэрхийлэгдэнэ. Энерги хадгалагдах хууль ёсоор дээрх 3-н ажлын нийлбэр тэгтэй тэнцүү учраас: $0 = (mgsin\alpha - mg\mu cos\alpha)S_1 - mg\mu S_2$ гэсэн тэгшитгэл бичигдэнэ. Харин S_1 замыг $S_1 = \frac{h}{sin\alpha}$ гэж хялбархан олно. Энэ хоёр томъёог ашиглан S_2 буюу S – ийг олбол:

$$S_2 = \left(\frac{sin\alpha}{\mu} - cos\alpha\right)\frac{h}{sin\alpha} = \frac{h}{\mu} - h \cdot ctg\alpha = h\left(\frac{1}{\mu} - ctg\alpha\right)$$

Эндээс: $S = 10\left(\frac{1}{0.1} - 1\right) = 90$м биеийн зогсох хүртэлээ явсан зам олдоно.

Жишээ 2.5

M масстай бие h өндөртэй налуугаас үрэлтгүйгээр гулсан бууж улмаар R радиустай цагирагаар үрэлтгүйгээр хөдөлгөөнөө үргэлжлүүлнэ. Зурагт үзүүлсэнээр масстай биеийн зүгээс α өнцгөөр тодорхойлогдох цэг дэх тулгуурт учруулах даралтын хүчийг олно уу.



Зураг 2.5

Бодолт:

Механик энерги хадгалагдах хуулийг ашиглавал: $mgh = \frac{mv^2}{2} + mgh_1$ болно. Бие цагирагаар явж h_1 өндөрт хүрсэн тул энэ өндрийг $h_1 = R(1 + sin\alpha)$ гэж олоод дээрхи томъёонд орлуулбал: $mgh = \frac{mv^2}{2} + mgR(1 + sin\alpha)$ болно.

$$mv^2 = 2mgh - 2mgR(1 + sin\alpha)$$

төвд тэмүүлэх хурдатгал олгох хүч нь: $F_{\text{тт}} = \frac{mv^2}{R} = \frac{2mgh - 2mgR(1+sin\alpha)}{R}$ гэж олно. Хүндийн хүчний төврүү чиглэсэн проекц нь. $F_{\text{хх}} = mgsin\alpha$ Одоо бид тулгуурт учруулах даралтын хүч $F_{\text{д}}$-г олох боломжтой болно. Тодруулбал:

$$F_{\text{д}} = F_{\text{тт}} - F_{\text{хх}} = \frac{mv^2}{R} - mgsin\alpha = mg\left[\frac{2(h - R(1 + sin\alpha))}{R} - sin\alpha\right]$$

гэж олдоно.

Хариу: $F = mg\left[\frac{2(h - R(1+sin\alpha))}{R} - sin\alpha\right]$