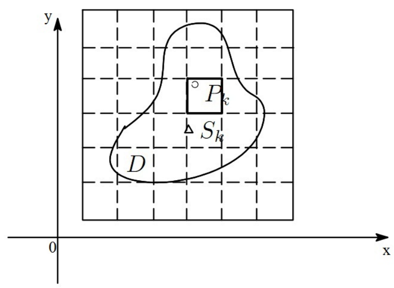
ЛЕКЦ 9. Хоёрлосон интеграл

Хоёрлосон интегралын тодорхойлолт, чанарууд

Oxy хавтгайн битүү D муж дээр тасралтгүй функц $z = f(x, y)$ тодорхойлогдсон байг. D мужийг дурын аргаар $s_1, s_2, ..., s_n$ гэсэн n хэсэгт хувааж (зураг 1.1), тэдгээрийн талбайг $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$ гэж тэмдэглэе. $P_k(x_k, y_k) \in s_k$ цэгүүдийг авч $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k$ интеграл нийлбэрийг зохиоё. s_k хэсгийн диаметрийг d_k гэе.



Зураг 1

Тодорхойлолт 0.1. *Хэрэв* $\max d_k \to 0$ *үед интеграл нийлбэр* S_n, D *мужийг хуваасан арга болон* $P_k(x_k, y_k)$ *цэгийн сонголтоос үл хамаарч төгсгөлөг хязгаартай бол түүнийг* $z = f(x, y)$ *функцийн* D *муж дээрх хоёрлосон интеграл гэнэ.*

Хоёрлосон интегралыг

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

гэж тэмдэглэнэ.

Тодорхойлолт ёсоор

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k \tag{1}$$

болно.

Чанарууд:

1. $\iint\limits_D kf(x, y)dxdy = k\iint\limits_D f(x, y)dxdy$

2. $\iint\limits_D [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]dxdy = \iint\limits_D f_1(x, y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x, y)dxdy$

3. $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy$
   $D = D_1 \cup D_2$ (D_1 ба D_2 нь дотоод ерөнхий цэггүй мужууд)

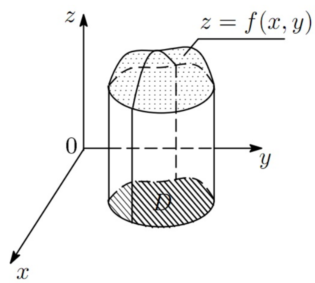
4. D мужийн дурын цэгт $f(x, y) \geq 0$ бол $\iint\limits_D f(x, y)dxdy \geq 0$

5. D мужийн дурын цэгт $f_1(x,y) \le f_2(x,y)$ бол

$$\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \le \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$$

6. Хэрэв өгсөн муж дээр $z = f(x,y) = 1$ бол $\iint\limits_D ds = S$, $\quad S$-уг мужийн талбай

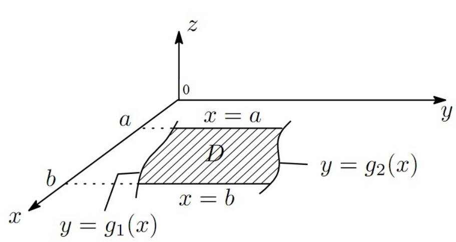
7. Хоёрлосон интегралын геометр утга нь дээрээсээ $z = f(x,y)$ тэгшитгэл бүхий S гадар-



Зураг 1:

гуугаар, доороосоо xOy хавтгайн битүү D мужаар, хажуу талаасаа D мужийн хөвөөгөөр чиглүүлэгч хийсэн Oz-тэй параллель байгуулагч бүхий цилиндр биеийн эзэлхүүн юм. (зураг 1.2)

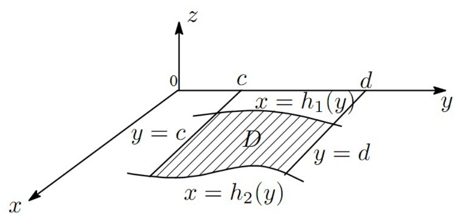
Хоёрлосон интегралыг бодох
Хоёрлосон интегралыг дараалсан хоёр тодорхой интеграл руу шилжүүлж бодно.



Зураг 2:

Хэрэв $g_1(x) \le g_2(x)$ функцүүд $[a,b]$ хэрчим дээр тодорхойлогдоод D муж нь $y = g_1(x),\ y = g_2(x),\ x = a,\ x = b$ шугамуудаар хүрээлэгдсэн (зураг 1.3) бол хоёрлосон интегралыг дараах дараалсан хоёр тодорхой интегралд шилжүүлж бодно.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right] dx \tag{2}$$

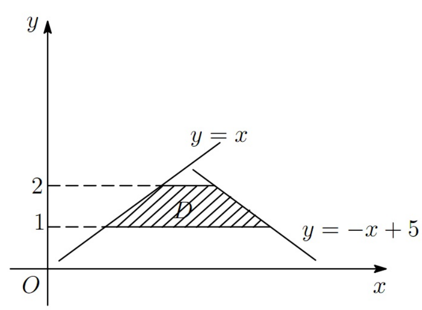


Зураг 3:

Эхлээд дотор талын тодорхой интегралыг y-ээр интегралчлан бодоод гарах үр дүнгээс $[a, b]$ завсарт x-ээр тодорхой интеграл бодно. Доторх интеграл бодох үед x-ийг тогтмол гэж үзнэ. үүнтэй нэг адилаар, хэрэв D муж $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$, $y = c$, $y = d$ тэгшитгэлтэй шугамуудаар хүрээлэгдсэн (зураг 1.4) бөгөөд $h_1(y) \leq h_2(y)$ функцүүд $[c, d]$ хэрчим дээр тасралтгүй бол дараах томъёогоор хоёрлосон интегралыг бодно.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right] dy \tag{3}$$

Жишээ 0.1. $\iint\limits_D e^{x+3y}dxdy \qquad D: y = x,\ y = -x+5,\ y = 1,\ y = 2$ шугамуудаар хүрээлэгдсэн муж (зураг 1.5)



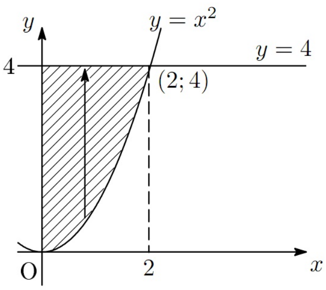
Зураг 5

Бодолт: $x = y,\ x = -y+5,\ 1 \leq y \leq 2$

$$\iint\limits_D e^{x+3y}dxdy = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_y^{5-y} e^{x+3y}dx \right) dy = \int\limits_1^2 e^{x+3y}\Big|_y^{5-y} dy = \int\limits_1^2 (e^{5+2y} - e^{4y})dy$$

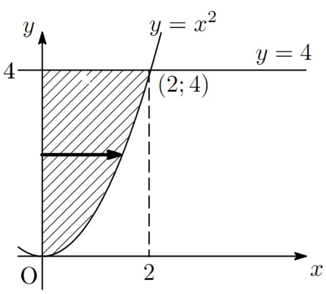
$$= \left[\frac{1}{2}e^{5+2y} - \frac{1}{4}e^{4y} \right]_1^2 = \frac{e^9}{2} - \frac{e^8}{4} - \frac{e^7}{2} + \frac{e^4}{4} \approx 2771.64$$

Жишээ 0.2. $\iint\limits_{(D)} x \cdot e^{y^2}dxdy \qquad D: y = x^2,\ x = 0,\ y = 4$ шугамуудаар хүрээлэгдсэн муж (зураг 1.6)



Зураг 6

Бодолт: $0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4$ $\quad \iint\limits_{(D)} x \cdot e^{y^2} dxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x^2}^4 x \cdot e^{y^2} dy \right) dx$ Доторх интегралыг y-ээр бодоход төвөгтэй тул интегралчлах хувьсагчийн эрэмбийг сольж бодъё. (зураг 1.7)



Зураг 4:

$$0 \le y \le 4,\ x = \sqrt{y} \quad \text{тул} \quad 0 \le x \le \sqrt{y}$$

$$\iint\limits_{(D)} x \cdot e^{y^2} dxdy = \int\limits_0^4 \left(\int\limits_0^{\sqrt{y}} x e^{y^2} dx \right) dy = \int\limits_0^4 \frac{x^2}{2} e^{y^2} \Big|_0^{\sqrt{y}} dy = \int\limits_0^4 \frac{1}{2} y e^{y^2} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^4 e^{y^2} dy^2 = \frac{1}{4} e^{y^2} \Big|_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1)$$

Хоёрлосон интегралд хувьсагчийг солих

$\iint\limits_D f(x, y)dxdy$-ыг бодохын тулд $M(x, y) \in D$ цэг бүрийг $O'uv$ систем дэх D' мужийн (u, v) цэгтэй $x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v)$ томъёогоор харгалзуулъя. $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ функцүүд D' мужид тухайн уламжлалуудынхаа хамт тасралтгүй байхаас гадна, дараах тодорхойлогч

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

байвал

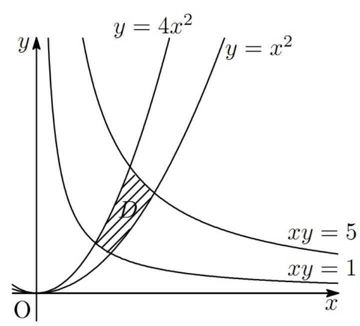
$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D')} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\cdot|J(u,v)|dudv \tag{5}$$

биелнэ. Тодорхойлогч $J(u,v)$-ийг хувиргалтын Якобын тодорхойлогч (Якобион) гэж нэрлэнэ. $J(u,v)$ тодорхойлогчийг $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ гэж тэмдэглэдэг.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1 \tag{6}$$

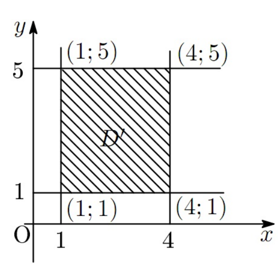
байдаг.

Жишээ 0.3. $\iint\limits_{D} xydxdy \qquad D:\ y=4x^2,\ y=x^2,\ xy=5,\ xy=1$ шугамуудаар хүрээлэгдсэн муж (зураг 1.8)



Зураг 8

Бодолт: $u = \dfrac{y}{x^2},\ v = xy$ гэвэл D мужийн хөвөөний шугамуудад $u=1,\ u=4,\ v=5,\ v=1$ шугамууд харгалзана. (зураг 1.9)



Зураг 9

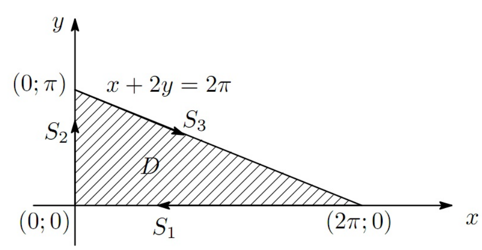
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{2y}{x^2} & \dfrac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^2}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{-\frac{3y}{x^2}} = -\frac{x^2}{3y} = -\frac{1}{3u}$$

$$\iint\limits_{(D)} xydxdy = \iint\limits_{(D')} v \cdot |J(u,v)|dudv = \iint\limits_{(D')} v \left|-\frac{1}{3u}\right| dudv = \frac{1}{3}\int\limits_{1}^{4} du \int\limits_{1}^{5} \frac{v}{u}dv$$

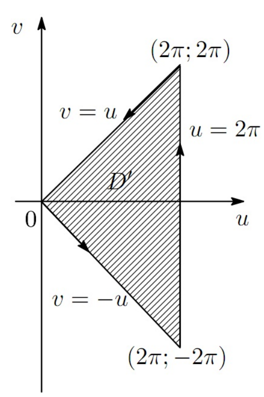
$$= \frac{1}{3}\int\limits_{1}^{4} \frac{v^2}{2u}\Big|_1^5 du = \frac{1}{6}\int\limits_{1}^{4} \frac{25-1}{u}du = 4\ln u|_1^4 = 4\ln 4$$

Жишээ 0.4. $\iint\limits_{(D)} \sin(x+2y)\cdot\cos(x-2y)dxdy$ $\quad D$ мужийг зураг 1.10 дээр үзүүлэв.



Зураг 10

Бодолт: $u = x + 2y,\ v = x - 2y$ гэж тэмдэглэе. Энэ тэгшитгэлүүд нь D мужийг uv хавтгайн D' мужид буулгана. (зураг 1.11)



Зураг 5:

S_1 : тал дээр $y = 0$ тул $u = x,\ v = x$ буюу $u = v$ байх юм. S_1-ийн $(2\pi; 0)$ цэгээс $(0; 0)$-д шилжих үед $v = u$ хэрчмийн $(2\pi; 2\pi)$ цэгээс $(0; 0)$ цэг хүртэлх цэгүүд харгалзана.

S_2 : тал дээр $x = 0$ тул $u = 2y,\ v = -2y$ буюу $v = -u$ байна. S_2-ийн $(0; 0)$ цэгээс $(0; \pi)$ цэгт шилжихэд $v = -u$ хэрчмийн $(0; 0)$-оос $(2\pi; -2\pi)$ цэг хүртэлх цэгүүд тус тус харгалзана.

S_3 : $x + 2y = 2\pi,\ u = 2\pi$ $(0; \pi)$ цэгээс $(2\pi; 0)$ цэгт шилжихэд $u = 2\pi$ хэрчмийн $(2\pi; -2\pi)$ цэгээс $(2\pi; 2\pi)$ цэг хүртэлх шилжилт харгалзах юм. $x = \dfrac{1}{2}(u+v),\ y = \dfrac{1}{4}(u-v)$ байх тул

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$\iint\limits_{(D)} \sin(x+2y)\cdot\cos(x-2y)dxdy = \iint\limits_{(D')} \sin u\cdot\cos v\cdot\left|-\frac{1}{4}\right|dudv =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-u}^{u} \sin u\cdot\cos v dvdu = \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin u\cdot\sin v\Bigg|_{-u}^{u} du = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 udu =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos 2u)du = \frac{1}{4}\left[u-\frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

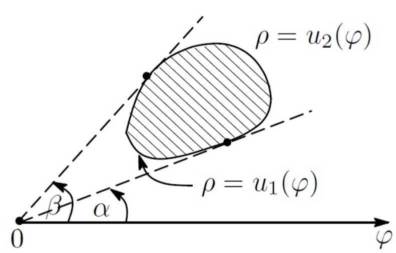
Хоёрлосон интегралыг туйлын координатын системд бодох

Цэгийн тэгш өнцөгт ба туйлын координатын хоорондын холбоо $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ 0\le\rho<\infty,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ байх учир

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \tag{7}$$

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)ds = \iint\limits_{(D')} f[\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi]\cdot|J(\rho,\varphi)|d\varphi d\rho \tag{8}$$

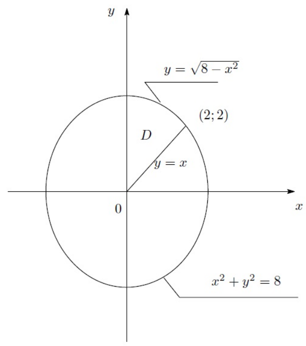
Хэрэв D' муж нь $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta,\ (\alpha<\beta),\ \rho=u_1(\varphi),\ \rho=u_2(\varphi)$ шугамуудаар хязгаарлагдсан бол (зураг 1.12)



Зураг 6:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D')} F(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{u_1(\varphi)}^{u_2(\varphi)}F(\rho,\varphi)\rho d\rho \tag{9}$$

Жишээ 0.5. $\displaystyle\int\limits_0^2\int\limits_x^{\sqrt{8-x}}\frac{dxdy}{5+x^2+y^2}$ интегралыг туйлын координатын системд бод.



Зураг 7:

Бодолт: $x \le y \le \sqrt{8-x},\ 0 \le x \le 2$ гэж өгөгдсөн учир эндээс $x^2+y^2=8$ (зураг 1.13) буюу $\rho=\sqrt{8}$, $0 \le \rho \le \sqrt{8}$, $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{5+x^2+y^2} = \frac{1}{5+\rho^2}$, $|J|=\rho$ байна.

$$\int\limits_0^2 \int\limits_x^{\sqrt{8-x}} \frac{1}{5+x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5+\rho^2}\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\sqrt{8}} \frac{\rho d\rho}{5+\rho^2} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(5+\rho^2)\Big|_0^{\sqrt{8}} d\varphi = \frac{1}{2}(\ln 13 - \ln 5)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2}(\ln 13 - \ln 5)(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8}\ln\frac{13}{5}$$