ЛЕКЦ 7. Далд ба давхар функцийн тухайн уламжлал. Бүтэн дифференциал. Шүргэгч хавтгай ба хавтгайн нормалийн тэгшитгэл

$z = F(u, \upsilon)$ функцийн u, υ хувьсагчид нь $u = \varphi(x, y)$, $\upsilon = \psi(x, y)$ гэсэн хоёр хувьсагчийн функцүүд бол

$$z = F(u, \upsilon) = F(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = f(x, y)$$

гэсэн x $y-$ээс хамаарсан давхар функц болно. Энэ үед $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ тухайн уламжлалууд дараах томъёогоор илэрхийлэгдэнэ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial y} \tag{2}$$

байна.

Жишээ 0.1. $z = \sin(u\upsilon)$, $u = 2x + 3y$, $\upsilon = xy$ *бол* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$*−ийг ол.*

Бодолт: $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \upsilon\cos(u\upsilon)$, $\dfrac{\partial F}{\partial \upsilon} = u\cos(u\upsilon)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2$, $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3$, $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} = x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \upsilon\cos(u\upsilon) \cdot 2 + u\cos(u\upsilon) \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \upsilon} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \upsilon\cos(u\upsilon) \cdot 3 + u\cos(u\upsilon) \cdot x$$

Жишээ 0.2. $z = \sqrt{u}\ln(\cos\upsilon)$, $u = \dfrac{x}{y}$, $\upsilon = \sqrt{x^2 + y^2}$ *бол* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$*-ийг ол.*

Бодолт: $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{u}}\ln(\cos\upsilon)$, $\dfrac{\partial z}{\partial \upsilon} = 2\sqrt{u}\dfrac{(-\sin\upsilon)}{\cos\upsilon}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}$, $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. *Эндээс* x, y *хувьсагчуудаар нь авсан тухайн уламжлалууд нь:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{u}}\ln(\cos\upsilon) \cdot \frac{1}{y} + 2\sqrt{u}(-\operatorname{tg}\upsilon) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\ln(\cos\upsilon)}{\sqrt{u}} \cdot \frac{x}{y^2} + 2\sqrt{u}(-\operatorname{tg}\upsilon) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \textit{гарна}$$

$z = f(x, y)$ функцийн $x = x(t)$, $y = y(t)$ бол $z = f(x(t), y(t))$ гэсэн нэг хувьсагчаас хамаарсан функц болно. Тэгвэл

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \tag{3}$$

байна.

Жишээ 0.3. $z = x^2 y, \;\; x = t^2, \;\; y = t^3$ *бол* $\dfrac{dz}{dt}$*−г ол.*

Бодолт:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 2xy \cdot 2t + x^2 \cdot 3t^2 = 2t^5 \cdot 2t + t^4 \cdot 3t^2 = 7t^6$$

y функц нь $F(x, y) = 0$ тэгшитгэлээр тодорхойлогдсон далд функц бол түүний уламжлал

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \tag{4}$$

томъёогоор тодорхойлогдоно.

Жишээ 0.4. $x^3 + y^2 x - 3 = 0$ *тэгшитгэлээр өгөгдсөн* $y(x)$ *далд функцийн уламжлалыг ол.*

Бодолт: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \;\; \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xy$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{3x^2 + y^2}{2xy}$$

Жишээ 0.5. $y^2 \cos x + \ln(y^2 + 7xy) = 0$ *тэгшитгэлээр өгөгдсөн* $y(x)$ *далд функцийн уламжлалыг ол.*

Бодолт: $y' = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\dfrac{-y^2 \sin x + \frac{7y}{y^2+7xy}}{2y \cos x + \frac{2y+7x}{y^2+7xy}}$

Хэрэв $z = F(x, y)$, y нь x−ээс хамаарсан $y = y(x)$ дифференциалчлагдах функц бол

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \tag{5}$$

байна.

Жишээ 0.6. $z = 2y^2 x + 7x^2 y, \;\; y = x^2$ *бол* $\dfrac{dz}{dx}$*−г ол.*

Бодолт: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y^2 + 14xy, \;\; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4yx + 7x^2, \;\; \dfrac{dy}{dx} = 2x$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2y^2 + 14xy + (4yx + 7x^2)2x = 10x^4 + 28x^3$$

$z = f(x, y)$ функцийн бүтэн өөрчлөлт болон бүтэн дифференциал нь

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{6}$$

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \tag{7}$$

томъёогоор тодорхойлогдоно.

Жишээ 0.7. $z=\ln(\cos(xy)+a^{\sin(xy)})$ *функцийн тухайн дифференциал болон бүтэн дифференциалыг ол.*

Бодолт:

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}dx=\frac{y(-\sin(xy)+\cos(xy)a^{\sin(xy)}\ln a)}{\cos(xy)+a^{\sin(xy)}}dx$$

$$d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{x(-\sin(xy)+\cos(xy)a^{\sin(xy)}\ln a)}{\cos(xy)+a^{\sin(xy)}}dy$$

$$dz=\frac{-\sin(xy)+\cos(xy)a^{\sin(xy)}\ln a}{\cos(xy)+a^{\sin(xy)}}(ydx+xdy)$$

Жишээ 0.8. $w=\ln^2(x^2+y^2+z^2)$ *функцийн бүтэн дифференциалыг ол.*

Бодолт:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{2\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{2\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz=\frac{4\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}(xdx+ydy+zdz)$$

Функцийн бүтэн дифференциалыг ашиглаж функцийн утгыг ойролцоогоор боддог томъёо нь дараах хэлбэртэй

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \tag{8}$$

байна.

Жишээ 0.9. $(1.02)^3\cdot(0.97)^3$ *ойролцоо утгыг ол.*

Бодолт: $z=(xy)^3$, $(1.02)^3\cdot(0.97)^3=(1+0.02)^3+(1-0.03)^3 \Longrightarrow$

$$x=1,\ \ y=1,\quad \Delta x=0.02,\ \ \Delta y=-0.03$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=(3x^2y^3\Delta x+3x^3y^2\Delta y)\Big|_{\substack{x=1\\y=1\\\Delta x=0.02\\\Delta y=-0.03}}=-0.03$$

$$z(1,1)=1,\quad (1.02)^3\cdot(0.97)^3\approx 1-0.03=0.97$$

Гадаргуугийн M_o цэгийг дайран гарсан бүх муруйнуудын уг цэг дээрхи бүх боломжит шүргэгчүүдийг агуулсан хавтгайг гадаргуугийн M_o цэг дээрхи шүргэгч хавтгай гэнэ. M_o цэгийг дайрсан бөгөөд шүргэгч хавтгайд перпендикуляр шулууныг өгөгдсөн цэг дээрх гадаргуугийн нормаль гэнэ.

Хэрэв гадаргуу $z=f(x,y)$ гэсэн ил тэгшитгэлээр өгөгдсөн бөгөөд $f(x,y)$ дифференциалчлагдах функц бол гадаргуугийн $M_o(x_o,y_o,z_o)$ цэг дээрхи шүргэгч хавтгайн тэгшитгэл нь

$$z-z_o=f'_x(x_o,y_o)(x-x_o)+f'_y(x_o,y_o)(y-y_o) \tag{9}$$

хэлбэртэй байна. Үүнд $z_o=f(x_o,y_o)$. Гадаргуугийн нормалийн тэгшитгэл

$$\frac{x-x_o}{f'_x(x_o,y_o)}=\frac{y-y_o}{f'_y(x_o,y_o)}=\frac{z-z_o}{-1} \tag{10}$$

тэгшитгэлтэй байна.

Хэрэв гадаргуу $F(x, y, z) = 0$ гэсэн далд тэгшитгэлээр өгөгдсөн бол шүргэгч хавтгай ба нормаль шулууны тэгшитгэл нь

$$F'_x(x_o, y_o, z_o)(x - x_o) + F'_y(x_o, y_o, z_o)(y - y_o) + F'_z(x_o, y_o, z_o)(z - z_o) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{x - x_o}{F'_x(x_o, y_o, z_o)} = \frac{y - y_o}{F'_y(x_o, y_o, z_o)} = \frac{z - z_o}{F'_z(x_o, y_o, z_o)} \tag{12}$$

томъёонуудаар илэрхийлэгдэнэ.

Жишээ 0.10. $x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 6 = 0$ *гадаргуугийн* $M_o(1, 2, -1)$ *цэгт татсан шүргэгч хавтгай ба нормаль шулууны тэгшитгэлүүдийг бич.*

Бодолт: *Энд (7.12) ба (7.13) томъёог ашиглавал*

$$F'_x(x_o, y_o, z_o) = (3x^2 + yz)\big|_{M_o} = 1$$

$$F'_y(x_o, y_o, z_o) = (3y^2 + xz)\big|_{M_o} = 11$$

$$F'_z(x_o, y_o, z_o) = (3z^2 + xy)\big|_{M_o} = 5$$

шүргэгч хавтгайн тэгшитгэл нь

$$x - 1 + 11(y - 2) + 5(z + 2) = 0 \implies x + 11y + 5z - 13 = 0$$

нормаль шулууны тэгшитгэл нь

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5}$$

гарна.