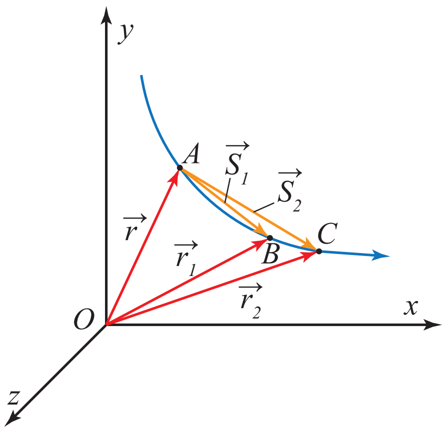
Семинар 1

Кинематик

1.1 Томъёо ба тодорхойлолтууд

Кинематик нь механик хөдөлгөөнийг цаг хугацаа орон зайн хувьд геометр талаас нь судлах механикийн бүлэг юм. Биеийн явж өнгөрсөн ба явах цэгүүдийг холбоход үүсэх муруй шугамыг траектор гэнэ.
Зураг 1.1 дээр бие $A \to B \to C$ цэгүүдийг дамжин өнгөрч байна гэвэл координатын



Зураг 1.1

эхээс тухайн цэгийн байрлал хүртэлх $\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ векторууд нь радиус векторууд, анхны байрлалаас эцсийн байрлалруу татсан $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ векторууд нь шилжилтийн векторууд юм. Нэгж хугацаанд биеийн туулах замыг хурд гэнэ.

$$\upsilon_{\text{д}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{1.1}$$

Жигд хөдөлгөөний үед энэхүү дундаж хурд нь траекторын цэг бүр дээрх хурдны утгатайгаа адилхан байна. Хурд нь хувьсах үед траекторын цэг бүр дээр хурд өөр өөр байх учир эгшин зуурын хурдыг дараах байдлаар тодорхойлно.

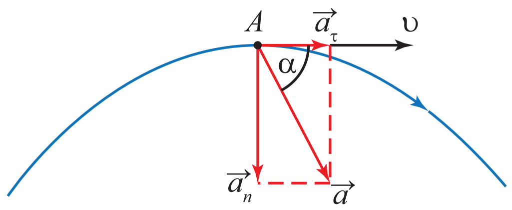
$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{S}}{dt}; \quad \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.2}$$

энд dt –өчүүхэн бага хугацаанд биеийн шилжилтийн өөрчлөлт $d\vec{S}$ ба радиус векторын өөрчлөлт $d\vec{r}$-үүд нь ижилхэн (Зураг 1.1 $\vec{BC}$) бөгөөд хэмжээ нь тухайн эгшинд биеийн явсан зам dS –тэй тэнцүү болно. (1.2) нь эгшин зуурын хурд нь шилжилт буюу радиус

вектороэс хугацаагаар авсан уламжлалаар тодорхойлогдохыг харуулж байна.
Нэгж хугацаан дахь хурдны өөрчлөлтийг хурдатгал гэх бөгөөд энэ нь хурднаас хугацаагаар авсан уламжлалаар тодорхойлогдоно.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \tag{1.3}$$

Хурдны хэмжээний өөрчлөлтөөр үүсэх хурдатгалыг тангенциал хурдатгал (a_τ) гэх ба энэ хурдатгал нь траекторын шүргэгчийн дагуу чиглэнэ. Тангенциал хурдатгал нь хурдсах хөдөлгөөнд хурдны дагуу, удаашрах хөдөлгөөнд хурдны эсрэг чиглэж байдаг. Хурдны чиглэлийн өөрчлөлтөөс (муруй замаар хөдлөх үед) болж үүсэх хурдатгалыг нормаль хурдатгал буюу төвд тэмүүлэх хурдатгал (a_n) гэнэ. Нормаль хурдатгал нь траекторын муруйлтын радиусын эсрэг буюу шүргэгчид перпендикуляр чиглэнэ. (Зураг 1.2)
Бүрэн хурдатгал



Зураг 1.2

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \tag{1.4}$$

Бүрэн хурдатгалын хэмжээ

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{1.5}$$

Тангенциал хурдатгал

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \tag{1.6}$$

Нормаль хурдатгал

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} \tag{1.7}$$

энд υ нь шугаман хурд буюу хурдны хэмжээ, R нь траекторын муруйлтын радиус болно.
Хурдны өөрчлөлт

$$\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \int_0^t \vec{a} \cdot dt \tag{1.8}$$

Шилжилт

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{\upsilon} \cdot dt \tag{1.9}$$

Дээрх хэмжигдэхүүнүүдийг проекцуудаар нь задалбал:

$$\vec{S}(S_x, S_y, S_z), \quad \vec{r}(r_x, r_y, r_z), \quad \vec{\upsilon}(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z), \quad \vec{a}(a_x, a_y, a_z)$$

x тэнхлэг дээрх проекц буюу байгуулагч нь:

$$S_x = x - x_0, \quad r_x = x, \quad \upsilon_x = \frac{dS_x}{dt}, \quad \upsilon_x = \frac{dx}{dt} \tag{1.10}$$

Хурдатгалын x тэнхлэг дээрх байгуулагч нь:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_x = \frac{d^2S_x}{dt^2} \tag{1.11}$$

y, z тэнхлэгүүд дээрх проекцуудын хувьд (1.10), (1.11) илэрхийлэлүүдийг x –ийг y болон z –ээр сольж бичихэд гарна. Эргэх хөдөлгөөний үед эргэлтийн өнцөг нь

$$\varphi = \frac{l}{R} \tag{1.12}$$

$l = \varphi \cdot R$ эргэсэн нумын урт, эргэлтийн өнцгийн векторын чиглэл нь эргэлтийн хавтгайд перпендикуляр зөв шургийн давших чиглэлээр тодорхойлогдоно. Өнцөг хурд:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \tag{1.13}$$

Өнцөг хурдатгал:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{1.14}$$

Хурд, хурдатгалууд нь өнцөг хурд ба өнцөг хурдатгалаар дараах байдлаар илэрхийлэгдэнэ.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad \text{хэмжээ нь} \quad v = \omega \cdot R \cdot \sin\alpha \tag{1.15}$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{R} \quad \text{хэмжээ нь} \quad a_\tau = \varepsilon \cdot R \cdot \sin\alpha \tag{1.16}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{R}]\text{хэмжээ нь} \quad a_n = \omega^2 \cdot R \cdot \sin\alpha \tag{1.17}$$

Энд $\vec{R}$ нь эргэлтийн тэнхлэгээс татсан радиус вектор байна. Вектор үржвэрийн чиглэл нь үржигдэхүүн векторуудэд перпендикуляраар нэгдүгээр үржигдэхүүнээс хоёрдугаар үржигдэхүүнрүү эргэх бага эргэлтийн өнцгийн хувьд зөв шургийн давших чиглэлээр тодорхойлогдоно. Хэмжээ нь тэдгээрийн хэмжээнүүдийн үржвэрийг хоорондох өнцгийн синусээр үржүүлсэнтэй тэнцэнэ. $\vec{R}$ –радиус векторууд нь муруйлтын радиус вектор байвал $\alpha = 90^o$ болно.
Энэ үед

$$v = \omega \cdot R \quad \omega = \frac{v}{R} \tag{1.18}$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R \quad \varepsilon = \frac{a_\tau}{R} \tag{1.19}$$

$$a_n = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R} \tag{1.20}$$

1.2 Жишээ бодлого

Жишээ 1.1

Хүндийн хүчний оронд хэвтээ чигт 60^0 өнцөг үүсгэж, 20м/с хурдтай шидэгдсэн бие t=2с хугацааны дараа

(a) Хаана байх вэ?

(b) Ямар хурдтай байх вэ?

(c) Биеийн хөөрөх өндөр болон унах зайг ол.

(d) Тухайн эгшин дэх нормаль болон тангенциал хурдатгалыг ол.

(e) Муруйлтын радиус, өнцөг хурд, өнцөг хурдатгалыг ол.

Бодолт:

(a) Хүндийн хүчний оронд чөлөөтэй шидэгдсэн бие нь $\vec{a} = \vec{g}$ тогтмол хурдатгалтай хөдлөх учир жигд хувьсах хөдөлгөөн (ЖХХ) юм.
$\vec{a} = const$ буюу жигд хувьсах хөдөлгөөний тэгшитгэлийг гаргая.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.21}$$

Эндээс хурдны дифференциалыг олж $d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt$ интегралчилбал
$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a} \cdot dt \Rightarrow \vec{v}\ |_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} = \vec{a} \cdot t|_0^t \Rightarrow \vec{v} - \vec{v_0} = \vec{a} \cdot t$

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a} \cdot t \tag{1.22}$$

болж хурд хугацаанаас хамаарах хууль нь тодорхойлогдлоо.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{1.23}$$

$$d\vec{S} = \vec{v} \cdot dt$$

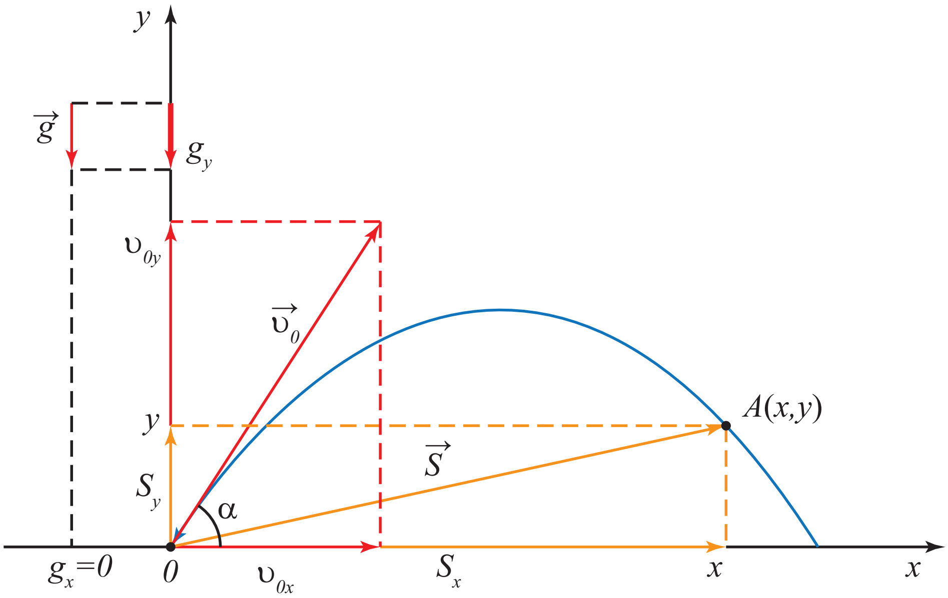
$\int_0^{\vec{S}} d\vec{S} = \int_0^t \vec{v} \cdot dt$ энд $\vec{v}$-д 1.22 -г орлуулбал
$\vec{S}|_0^{\vec{S}} = \int_0^t (\vec{v_0} + \vec{a} \cdot t) \cdot dt \Rightarrow \vec{S} = \left(\vec{v_0} \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2}\right)|_0^t$

$$\vec{S} = \vec{v_0} \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2} \tag{1.24}$$

ЖХ хөдөлгөөний шилжилтийн тэгшитгэл
Бодлогын нөхцөлөөр $\vec{a} = \vec{g}$ учир

$$\vec{S} = \vec{v_0} \cdot t + \frac{\vec{g} \cdot t^2}{2} \tag{1.25}$$

босоо тэнхлэгийг y, хэвтээ тэнхлэгийг x гээд 1.25-г x ба y тэнхлэг дээр проекцолбол: (Зураг 1.3) $\begin{cases} S_x = v_{0x} \cdot t + \frac{g_x t^2}{2} \\ S_y = v_{0y} \cdot t + \frac{g_y t^2}{2} \end{cases}$



Зураг 1.3

1.3-р зургаас проекцийн утгуудыг олж тавибал.

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 \cdot cos\alpha \cdot t + \frac{0 \cdot t^2}{2} \\ y = \upsilon_0 \cdot sin\alpha \cdot t + \frac{-g \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 \cdot cos\alpha \cdot t \\ y = \upsilon_0 \cdot sin\alpha \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases} \tag{1.26}$$

бодлогын нөхцөлөөр $\upsilon_0 = 20\text{м/с}$, $\alpha = 60^0$, $t = 2c$, $g = 9.81\text{м/с}^2 \approx 10\text{м/с}^2$ учир орлуулан 1.26-г бодвол:

$$\begin{cases} x = 20\text{м/с} \cdot cos60^0 \cdot 2c = 20\text{м} \\ y = 20\text{м/с} \cdot sin60^0 \cdot 2c - \frac{10\text{м/с}^2 \cdot (2c)^2}{2} = 14\text{м} \end{cases}$$

(b) Биеийн хурд хөдөлгөөний явцад 1.22 томъёоноос $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon_0} + \vec{g} \cdot t$ хуулиар хувьсах учир энэхүү тэгшитгэлийг x, y тэнхлэгүүд дээр проекцлох эсвэл 1.26 томъёоноос $\begin{cases} \upsilon_x = \frac{dx}{dt} \\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt} \end{cases}$ уламжлалуудыг авбал

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 \cdot cos\alpha \\ \upsilon_y = \upsilon_0 \cdot sin\alpha - gt \end{cases} \tag{1.27}$$

болно.
$\upsilon_x = \upsilon_0 cos\alpha = 20\text{м/с} \cdot cos60^0 = 10\text{м/с}$ хурдны хэвтээ байгуулагч
$\upsilon_y = \upsilon_0 sin\alpha - gt = 20\text{м/с} \cdot sin60^0 - 10\text{м/с} \cdot 2c = -3\text{м/с}$ хурдны босоо байгуулагч
$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(10 \cdot \text{м/с})^2 + (-3 \cdot \text{м/с})^2} = 10.4\text{м/с}$ шугаман хурд
Энд $\upsilon_y = -3\text{м/с} < 0$ байгаа нь хамгийн их хөөрөлтийн цэгээ өнгөрч уруудаж яваа буюу y босоо тэнхлэг дээрх хурдны проекцийн чиглэл доош чиглэсэн болохыг харуулж байна.

(c) Бие хамгийн их өндөрт хөөрөх үед хурдны y тэнхлэг дээрх проекц $\upsilon_y = 0$ болно. $\upsilon_y = \upsilon_0 sin\alpha - gt = 0 \Rightarrow$

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 sin\alpha}{g} \tag{1.28}$$

t_1 хамгийн их өндөрт хөөрөх хугацаа. 1.26-гийн 2-р тэгшитгэлд 1.28-г тавибал $h_{max} = y = \upsilon_0 sin\alpha \cdot \frac{\upsilon_0 sin\alpha}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{\upsilon_0^2 \cdot sin^2\alpha}{g^2} \Rightarrow$

$$h_{max} = \frac{\upsilon_0^2 sin^2\alpha}{2 \cdot g} \tag{1.29}$$

максимум хөөрөх өндөр $h_{max} = \frac{(20\text{м}/c)^2 \cdot sin^2 60^0}{2 \cdot 10\text{м}/\text{с}^2} = 15\text{м}$

Эргэж газарт тусах үед $y = 0$ болох учир 1.26-аас $y = \upsilon_0 sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0 \Rightarrow$ $t\left(\upsilon_0 sin\alpha - \frac{gt}{2}\right) = 0$

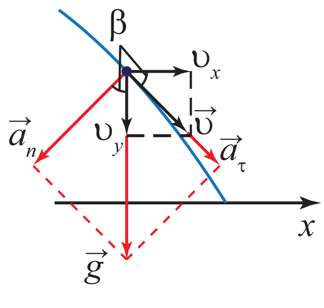
$$t_2 = \frac{2\upsilon_0 sin\alpha}{g} \tag{1.30}$$

t_2 нисэлтийн хугацаа. Үүнийг ашиглан унах зайг олбол:
$l_0 = x = \upsilon_0 cos\alpha \cdot t_2 = \frac{2 \cdot \upsilon_0^2 \cdot cos\alpha \cdot sin\alpha}{g} \Rightarrow$

$$l_0 = \frac{\upsilon_0^2 \cdot sin2\alpha}{g} \tag{1.31}$$

$$l_0 = \frac{(20\text{м}/c)^2 \cdot sin120^0}{10\text{м}/c^2} = 34.6\text{м}$$

(d) Чөлөөтэй шидэгдсэн биеийн бүрэн хурдатгал траекторын бүх цэг дээр тогтмол $\vec{g}$ учир тангенциал болон нормаль хурдатгалуудыг траекторын шүргэгч буюу хурдны чиглэл, түүнд перпендикуляр тэнхлэгүүд дээр проекцлон олно. $\vec{\upsilon}$ хурдны хэвтээ тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгийг β гэе. (Зураг 1.4)
Нормаль ба тангенциал хурдатгалууд нь



Зураг 1.4

$$\begin{cases} a_n = g \cdot cos\beta \\ a_\tau = g \cdot sin\beta \end{cases} \quad \text{энд} \quad \begin{cases} cos\beta = \frac{|\upsilon_x|}{\upsilon} \\ sin\beta = \frac{|\upsilon_y|}{\upsilon} \end{cases}$$

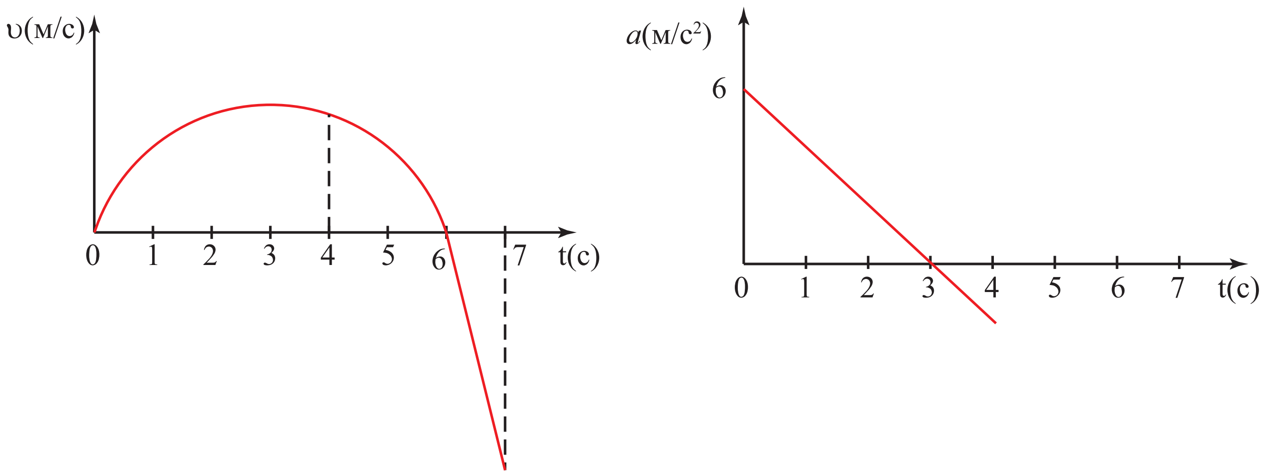
$a_n = \frac{g \cdot |\upsilon_x|}{\upsilon} = \frac{10\text{м}/\text{с}^2 \cdot 10\text{м}/\text{с}}{10.4\text{м}/\text{с}} = 9.6\text{м}/\text{с}^2$

$a_\tau = \frac{g \cdot |\upsilon_y|}{\upsilon} = \frac{10\text{м}/\text{с}^2 \cdot 3\text{м}/\text{с}}{10.4\text{м}/\text{с}} = 2.88\text{м}/\text{с}^2$
байна.

(e) Муруй траектороор хөдлөх хөдөлгөөнийг тухайн эгшинд эргэх хөдөлгөөн хийж байна гэж үзэж болно. Энэ үед $a_n = \frac{v^2}{R}$
Эндээс траекторын муруйлтын радиус $R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{109\text{м}^2/c^2}{9.6\text{м}/c^2} = 11.3\text{м}$
Өнцөг хурд $\omega = \frac{v}{R} = \frac{10.4\text{м/с}}{11.35\text{м}} = 0.92c^{-1}$
Өнцөг хурдатгал нь $\varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{2.88\text{м}/c^2}{11.35\text{м}} = 0.25c^{-2}$ болж байна.

Жишээ 1.2

Шулуун замаар $a = 6(\text{м}/c^2) - 2(\text{м}/c^3)t$ хуулиар хувьсах хурдатгалтай хөдөлж эхэлсэн биеийн 9 секундын хугацаанд туулсан зам, шилжилтийн хэмжээг ол.
Бодолт: $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t a \cdot dt$
$v|_0^v = \int_0^t (6-2t)dt \Rightarrow v = \left(6t - 2\frac{t^2}{2}\right)|_0^t = 6t - t^2$ хурд хугацаанаас хамаарах хамаарлын графикийг байгуулбал:(Зураг 1.5)
Графикаас хурд нь (0с, 6с) хугацаанд эерэг утга авч байгаа учир давших хөдөлгөөн



Зураг 1.5

үргэлжилсээр байх болно. Харин 6с-ээс цааш буцаж хөдөлж эхэлнэ. Шилжилт нь:

$$|\vec{S}| = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t (6t - t^2)dt = 6\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$$

$$t = 9c \Rightarrow |\vec{S}| = 3 \cdot 9^2 - \frac{9^3}{3} = 3 \cdot 81 - 3 \cdot 81 = 0$$

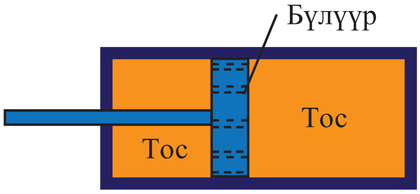
буцаж байрандаа ирж байна. Иймд
$S = 2 \cdot \int_0^6 vdt = 2 \cdot \int_0^6 (6t - t^2)dt = 2 \cdot (3t^2 - \frac{t^3}{3})|_0^6 = 72\text{м}$

Жишээ 1.3

Тайвшруулагч механизм (амортизатор) –ыг зарим буунд цилиндрт бэхлэгдсэн гол төмөр бүхий бүлүүрээр хийж тийрэлтийн хүчийг багасгах зорилгоор ашигладаг. (Зураг 1.6) Гол төмрийн түлхэлтээр сүвэрхэг бүлүүр нь буунд бэхлээтэй тосоор дүүргэгдсэн цилиндр дотор хөдлөх бөгөөд анхны хурд нь v_0. Тосны зүгээс бүлүүрийн хурданд пропорциональ хүч үйлчилснээр бүлүүрийг удаашруулна. Хурдатгал нь $a = -kv$ байна. Тэгвэл

(a) Гол төмөрийн хурд v, хугацаа t –ээс хамаарах хамаарал,

(b) Бүлүүрийн координат x нь хугацаа t –ээс хамаарах хамаарал,



Зураг 1.6

(c) Булуурийн хурд v координат x –ээс хамаарах хамаарлуудыг олж графикуудыг байгуул.

Бодолт:

(a) $a = \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -kdt \Rightarrow \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int\limits_{0}^{t} dt$

$\ln\frac{v}{v_0} = -kt \Rightarrow v = v_0 \cdot e^{-kt}$ (Зураг 1.7 a)

(b) $v = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot e^{-kt} \to dx = v_0 \cdot e^{-kt} \cdot dt$

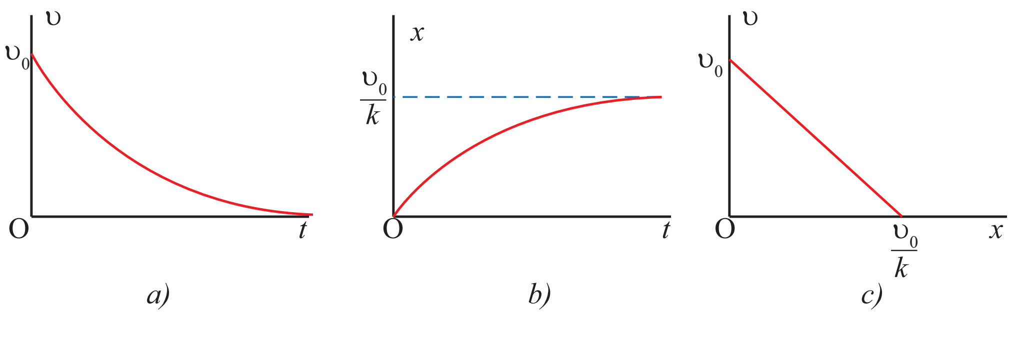
$\int\limits_{0}^{x} dx = v_0 \int\limits_{0}^{t} e^{-kt}dt \to x = -\frac{v_0}{k}e^{-kt}|_0^t = -\frac{v_0}{k}(e^{-kt} - 1)$

$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$ (Зураг 1.7 b)

(c) $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx/v} \Rightarrow -kv = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow dv = -kdx$

$\int\limits_{v_0}^{v} dv = -k\int\limits_{0}^{x} dx \Rightarrow v - v_0 = -kx \Rightarrow v = v_0 - kx$ (Зураг 1.7 c)

c –ийг зөв эсэхийг өөр аргаар шалгая. a –аас харвал $e^{-kt} = \frac{v}{v_0}$ энэ томъёог b -ийн хариунд орлуулбал $x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k}(1 - \frac{v}{v_0}) \to v = v_0 - kx$ болж хариу нь ижилхэн байна.



Зураг 1.7

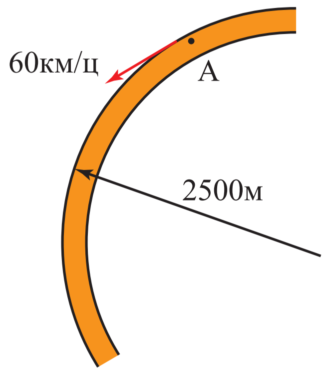
Жишээ 1.4

Машинтай хүн замын 2500 м радиустай муруйсан хэсгээр 60 км/ц хурдтай явж байв.(Зураг 1.8) Жолооч тоормослон хурдаа жигд бууруулж 8 с –ийн дараа хурд 45 км/ц болсон гэж үзээд тормозлож эхлэх үеийн хурдатгалыг ол.

Бодолт:

Хурдаа м/с нэгжтэй болгоё.

$$60\ \frac{\text{км}}{\text{ц}} = \frac{60000\ \text{м}}{3600\ \text{с}} = 16.67\ \text{м/с}$$



Зураг 1.8

$$45\ \frac{\text{км}}{\text{ц}} = \frac{45000\ \text{м}}{3600\ \text{с}} = 12.5\ \text{м/с}$$

Машин жигд удаашırсан гэвэл хурдатгалын тангенциал утга a_τ

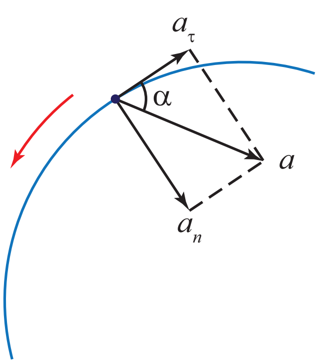
$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12.5\ \text{м/с} - 16.67\ \text{м/с}}{8\ \text{с}} = -0.52\ \text{м/с}^2$$

Хурдатгалын нормал утга

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(16.67\ \text{м/с})^2}{2500\ \text{м}} = 0.11\ \text{м/с}^2$$

Бүрэн хурдатгал (Зураг 1.9)

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 0.55\text{м/с}^2$$



Зураг 1.9