

МАТЕМАТИК-S.MT102 ХИЧЭЭЛИЙН СЕМИНАР-6

Олон хувьсагчийн функцийн үндсэн ойлголт. Хязгаар ба тасралтгүй байх чанар. Тухайн уламжлал ба дифференциал

Дараах функцүүдийн тодорхойлогдох мужийг олж графикийг зур.

$$\begin{array}{ll} 1. f(x, y) = \frac{1}{x+y} & 3. f(x, y, z) = \frac{e^{yz}}{z-x^2-y^2} \\ 2. f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) & 4. f(x, y, z) = \frac{2xz}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}} \end{array}$$

Дараах функцүүдийн утгын мужийг ол.

$$\begin{array}{ll} 5. f(x, y) = \sqrt{2+x-y} & 8. f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \\ 6. f(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2} & 9. f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2 - 1) \\ 7. f(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x^2}{2x^2+y^2}\right) & 10. f(x, y) = e^{2-x^2-y^2} \end{array}$$

$z = f(x, y)$ гадаргууг өгөгдсөн хавтгайтай огтлолцоход үүсэх муруйнуудыг ол.

$$\begin{array}{l} 11. f(x, y) = x^2 + y^2, x = 0, z = 1, z = 2, z = 3 \\ 12. f(x, y) = x^2 - y^2, x = 0, y = 1, z = 1, z = -1 \\ 13. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, x = 0, z = 1, z = 2, z = 3 \\ 14. f(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2}, x = 0, y = 0, z = 0, z = 1 \\ 15. f(x, y) = \sqrt{4+x^2-y^2}, x = 0, x = 1, x = -1, z = 0 \end{array}$$

Дараах функцүүдийг өгөгдсөн гадаргууд харгалзуул.

$$\begin{array}{ll} 16. f(x, y) = \cos^2 x + y^2 & 18. f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \\ 17. f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) & 19. f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \end{array}$$

Дараах функцүүдийн муруйнуудын бүлийг олж зур.

$$\begin{array}{ll} 20. f(x, y) = x^2 + 4y^2 & 23. f(x, y) = y^3 - 2x \\ 21. f(x, y) = y - 4x^2 & 24. f(x, y) = e^{y-x^3} \\ 22. f(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + y^2} & 25. f(x, y) = ye^x \end{array}$$

Дараах функцүүдийн түвшний гадаргууг зур.

$$26. f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 \quad 28. f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$27. f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \quad 29. f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$$

Дараах хязгааруудыг тодорхойлолт ашиглан бод. Үүнд:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = M.$$

$$30. \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (x + y) = a + b$$

$$31. \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (2x + 3y) = 8$$

$$32. \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) + g(x, y)] = L + M$$

$$33. \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [cf(x, y)] = cL$$

Дараах хязгааруудыг тодорхойлолт ашиглан бод.

$$34. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{x^2 y}{4x^2 - y} \quad 36. \lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, 1)} \frac{\cos xy}{y^2 + 1}$$

$$35. \lim_{(x,y) \rightarrow (2, -1)} \frac{x + y}{x^2 - 2xy} \quad 37. \lim_{(x,y) \rightarrow (-3, 0)} \frac{e^{xy}}{x^2 + y^2}$$

Дараах хязгаарууд оршихгүй гэж харуул.

$$38. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2}{x^2 + y^2} \quad 44. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2}$$

$$39. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y^2}{2x^2 - y^2} \quad 45. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(\cos y - 1)}{x^3 + y^3}$$

$$40. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy}{3y^2 - x^2} \quad 46. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$41. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2} \quad 47. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 - y^2 + z^2}$$

$$42. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{x + y^3} \quad 48. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{(x^3 + y^3 + z^3)}$$

$$43. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^3}{x^2 + 8y^6} \quad 49. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 yz}{(x^4 + y^4 + z^4)}$$

Дараах функцүүдийн тасралтгүй байх мужийг ол.

$$50. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad 54. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 4x^2 + y^2}{2x^2 + y^2}$$

$$51. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad 55. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$52. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 \sin y}{2x^2 + y^2} \quad 56. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{3x^3}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$53. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y + x^2 y^3}{x^2 + y^2} \quad 57. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Дараах хязгаарууд оршино гэж харуул.

$$\begin{aligned} 58. f(x, y) &= \sqrt{9 - x^2 - y^2} & 60. f(x, y) &= \ln 3 - x^2 + y \\ 59. f(x, y) &= \frac{x^3}{y} + \sin z & 61. f(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4} \\ 62. f(x, y, z) &= \sqrt{z - x^2 - y^2 + z^2 - 4} \end{aligned}$$

Дараах илэрхийлэлийн үнэн, худлыг тогтоож тайлбарла. $f(x, y)$ функц мужийн бүх (x, y) цэгүүд дээр тодорхойлогдсон болно.

$$\begin{aligned} 63. \text{Хэрэв } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) &= L \text{ бол } \lim_{x \rightarrow a} f(x, b) = L. \\ 64. \text{Хэрэв } \lim_{x \rightarrow a} f(x, b) &= L \text{ бол } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L. \\ 65. \text{Хэрэв } \lim_{x \rightarrow a} f(x, b) &= \lim_{y \rightarrow b} f(a, y) = L \text{ бол } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L. \\ 66. \text{Хэрэв } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= 0 \text{ бол } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(cx, y) = 0 \end{aligned}$$

Дараах функцүүдийн нэгдүгээр эрэмбийн тухайн уламжлалуудыг ол.

$$\begin{aligned} 67. f(x, y) &= x^3 - 4xy^2 + y^4 & 71. f(x, y) &= 4e^{x/y} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ 68. f(x, y) &= x^2y^3 - 3x & 72. f(x, y) &= \frac{\sin(x-y)}{y} + x^2 \operatorname{tg} y \\ 69. f(x, y) &= x^2 \sin xy - 3y^3 & 73. f(x, y) &= 3x \ln(x^2yz) + x^{y/z} \\ 70. f(x, y) &= 3e^{x^2y} - \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Дараах функцүүдийн тухайн уламжлалуудыг ол.

$$\begin{aligned} 74. f(x, y) &= x^3 - 4xy^2 + 3y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ 75. f(x, y) &= x^2y - 4x + 3 \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ 76. f(x, y) &= \ln x^4 - 3x^2y^3 + 5x \arctan y, \quad f_{xx}, f_{xy}, f_{xyy} \\ 77. f(x, y) &= e^{4x} - \sin(x+y^2) - \sqrt{xy}, \quad f_{xx}, f_{xy}, f_{yyx} \\ 78. f(x, y, z) &= \arcsin(xy) - \sin yz, \quad f_{xx}, f_{yz}, f_{xyz} \\ 79. f(x, y, z) &= xe^{2xy} - \frac{z^2}{x+y} + xz \sin(y+z), \\ &f_{xx}, f_{yz}, f_{yyzz} \\ 80. f(w, x, y, z) &= w^2 \arctan(xy) - e^{wz}, \\ &f_{ww}, f_{wxy}, f_{wxyz} \\ 81. f(w, x, y, z) &= \sqrt{xy+yz} - x^3e \sin \sqrt{w^2+z^2}, \\ &f_{xx}, f_{yy}, f_{wxyz} \end{aligned}$$