ЛЕКЦ 10. Гурвалсан интеграл

Гурвалсан интегралын тодорхойлолт, чанар Огторгуйн битүү T муж дээр тасралтгүй функц $u = f(x, y, z)$ өгөгдсөн байг. T мужийг дурын аргаар $T_1, T_2, \ldots, T_n$ гэсэн n хэсэгт хуваая. Эдгээрийн диаметрийг $d_1, d_2, \ldots, d_n$, эзэлхүүнийг $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$ гэж тэмдэглэе. Хэсэг бүрээс $P_k(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ цэг авч

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot \Delta v_k \tag{1}$$

нийлбэрийн зохиоё. үүнийг $u = f(x, y, z)$ функцийн T муж дээрх интеграл нийлбэр гэж нэрлэнэ.

Тодорхойлолт 0.1. *Хэрэв $\max d_k \to 0$ үед интеграл нийлбэр (1) нь T мужийг хуваасан арга болон хэсэг тус бүрээс P_k цэгийг хэрхэн сонгож авснаас үл хамаарч төгсгөлөг хязгаартай байвал, уг хязгаарыг $u = f(x, y, z)$ функцээс огторгуйн T мужаар авсан гурвалсан интеграл гэж нэрлээд*

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dv$$

гэж тэмдэглэнэ.

Иймд энэ тодорхойлолтоор

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dv = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta v_k \tag{2}$$

болно. Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын системд

$$dv = dxdydz \tag{3}$$

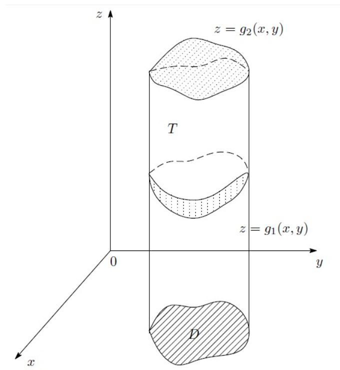
байна. Хоёрлосон интегралын бүх чанаруудтай адил төстэй чанарууд гурвалсан интегралд биелнэ. Хэрэв $f(x, y, z) \geq 0$ бол $\iiint\limits_T f(x, y, z)dv$ нь $\gamma = f(x, y, z)$ нягт бүхий T биеийн масстай тэнцүү байна.

Гурвалсан интегралыг бодох

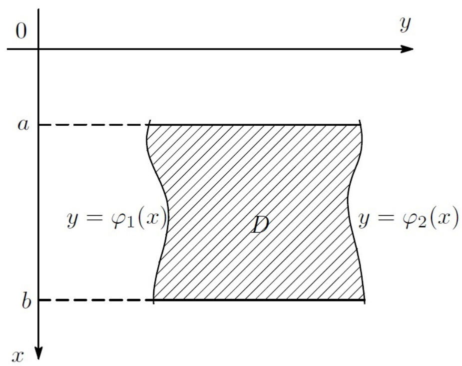
Гурвалсан интегралыг дараалсан гурван тодорхой интеграл руу шилжүүлж бодно. Хэрэв T муж дээрээсээ $z = g_2(x, y)$ гадаргуугаар, доороосоо $z = g_1(x, y)$ гадаргуугаар ($g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$) хүрээлэгдсэн ба хажуу талаасаа Oxy хавтгайтай D мужаар огтлолцох шулуун цилиндрээр хүрээлэгдсэн (зураг 2.1) бол

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy$$

байдлаар тодорхой интеграл ба хоёрлосон интеграл бодоход шилжүүлж болно. Хэрэв D нь (зураг 2.2) $y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),\ (\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x))$ тэгшитгэлүүд бүхий тасралтгүй муруйнууд



Зураг 1:



Зураг 2:

болон $x = a,\ x = b,\ (a < b)$ шулуунуудаар хязгаарлагдсан бол дээрх хоёрлосон интегралыг дараалсан хоёр тодорхой интегралд шилжүүлж болно. Иймд

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \tag{4}$$

байдлаар дараалсан гурван тодорхой интеграл бодоход шилжинэ. Интегралчлах хувьсагчийн эрэмбийг $3! = 6$ янзаар сольж сонгож болно.

Гурвалсан интегралд хувьсагчийг солих

$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$-ыг бодохын тулд x, y, z хувьсагчуудыг дараах тухайн уламжлалуудынхаа хамт тасралтгүй функцүүдээр орлуулъя.

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w) \tag{5}$$

Хэрэв энэ функцүүд нь $Oxyz$ координатын систем бүхий огторгуйн T мужийн цэгүүд ба $O'uvw$ координатын систем тогтоосон огторгуйн T' мужийн цэгүүдийн хооронд харилцан нэг утгатай харгалзаа тогтоохоос гадна дараах тодорхойлогч тэгтэй тэнцүү биш

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6}$$

байвал

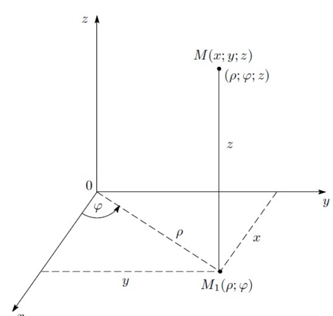
$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \cdot |J| \cdot dudvdw \tag{7}$$

байна. Энд эзэлхүүний элемент $dv = |J| \cdot dv' = |J| \cdot dudvdw$ байна. Энэ нь гурвалсан интегралд хувьсагчийг сольж интегралчлах томъёо болно.
(6) функциональ тодорхойлогчийг $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ гэж тэмдэглэх ба Якобийн тодорхойлогч гэж нэрлэнэ.

Тэмдэглэл: Немцийн математикч К.Г.Якоби (1804-1851) нь тооны онол, шугаман алгебр, вариацийн тоолол, дифференциал тэгшитгэлийн болон бусад салбарт өргөн судалгаа хийсэн байна.

Цилиндр координатын систем

Тэгш өнцөгт координатын системд $M(x,y,z)$ цэг авъя. M цэгийн xoy хавтгай дахь проекц M_1 цэг байг. Түүний туйлын координатыг $M_1(\rho,\varphi)$ гэж тэмдэглэе. (зураг 2.3)

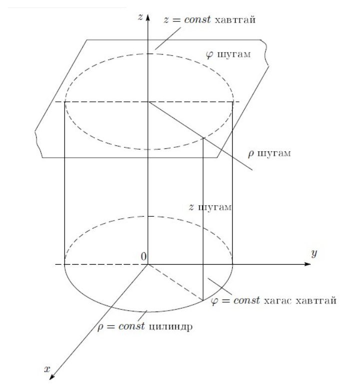


Зураг 3:

Огторгуйн дурын M цэгийн байрлалыг түүний цилиндр координат гэж нэрлэх тодорхой дэс дараалалтай авсан ρ, φ, z гурван тоогоор нэгэн утгатай тодорхойлж болно. Цэгийн цилиндр координат бүрийн хувирах муж

$$0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

байна. Хэрэв $z = const$ бол цэгүүд Oz тэнхлэгт перпендикуляр бөгөөд xoy-тэй параллель хавтгайд оршино. $\rho = const$ гэвэл цэгүүд Oz тэнхлэг бүхий цилиндр гадаргуунууд дээр оршино. $\varphi = const$ гэвэл Oz тэнхлэгээр дайрсан хагас хавтгайн цэгүүдийг өгнө. Эдгээрийг цилиндр координатын системийн гадаргуунууд гэнэ. M цэгийн цилиндр координатыг $M(\rho, \varphi, z)$ (зураг 2.4) гэж тэмдэглэнэ.



Зураг 4:

Цэгийн тэгш өнцөгт координат ба цилиндр координатын хооронд дараах холбоо байдаг.

$$\text{Эндээс}\qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \tag{9}$$

байна.

Жишээ 0.1. $A(8; \dfrac{\pi}{3}; 7)$ цилиндр координатаар, цэгийн тэгш өнцөгт координатыг ол.

Бодолт: $x = 8\cos\dfrac{\pi}{3} = 8\cdot\dfrac{1}{2} = 4, \quad y = 8\sin\dfrac{\pi}{3} = 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}, \quad z = 7$ Иймд $A(4; 4\sqrt{3}; 7)$

Жишээ 0.2. $B(-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 1)$ цэгийн цилиндр координатыг ол.

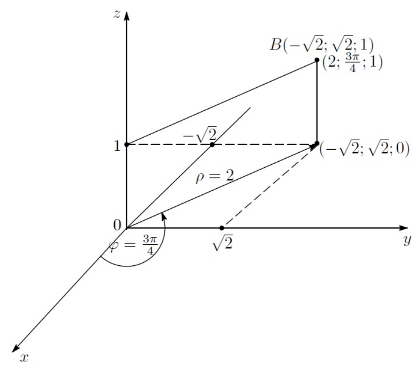
Бодолт: $\rho^2 = (-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4, \quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1, \quad z = 1$ Хэрэв $\rho = 2$ гэвэл $x < 0,\ y > 0$ байх ёстой тул $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ байх юм. Иймд $B(2; \dfrac{3\pi}{4}; 1)$ байна. (зураг 2.5)

Тэгш өнцөгт координатын системд өгсөн гурвалсан интегралыг цилиндр координатын системд шилжүүлж бодъё.

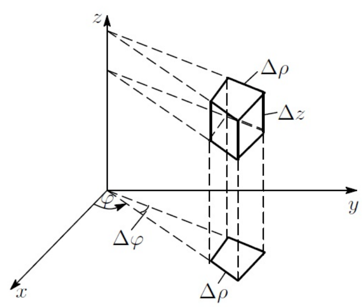
$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \tag{10}$$

цилиндр координатад эзэлхүүний элемент $dV = |J|dV' = \rho d\rho d\varphi dz$ байна. (зураг 2.6)

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_D F(\rho,\varphi,z)\cdot|J|\cdot d\rho d\varphi dz =$$



Зураг 5:



Зураг 6:

$$= \iint\limits_{(R)} \left[\int\limits_{f_1(\rho,\varphi)}^{f_2(\rho,\varphi)} \rho F(\rho,\varphi,z)dz \right] d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{g_1(\varphi)}^{g_2\varphi} \rho d\rho \int\limits_{f_1(\rho,\varphi)}^{f_2(\rho,\varphi)} F(\rho,\varphi,z)dz \qquad (11)$$

(зураг 2.7)-оос үз

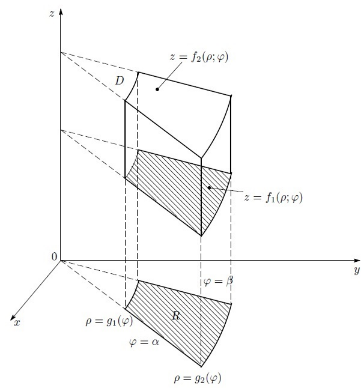
Цилиндр координатын шугамууд нь:

а) Oz тэнхлэгтэй параллель шулуун шугам буюу z шугам

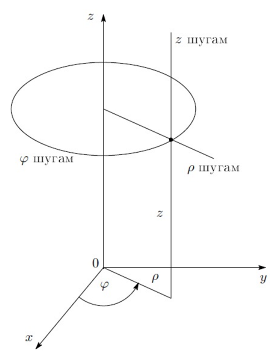
б) Oz тэнхлэг дээр төвтэй, xoy хавтгайтай параллель хавтгайд орших тойрог буюу φ шугам

в) xoy хавтгайд параллелиар, Oz тэнхлэгийн дурын цэгээс татсан цацраг буюу ρ шугам зэргээс бүрдэнэ. (зураг 2.8)

Жишээ 0.3. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ гадаргуугийн нэгдүгээр октантад орших хэсэг, $z=1,\ x=0,\ y=0$ хавтайгуунаар тус тус хязгаарлагдсан биеийн цэгүүдэд массын тархалтын нягт $\gamma(\rho,\varphi,z)$ бол масс ба хүндийн төвийг тодорхойл.



Зураг 7:



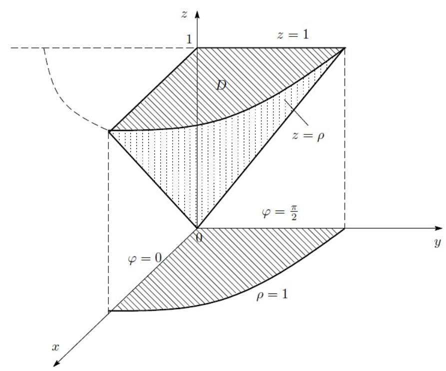
Зураг 8:

Бодолт: Цилиндр координатын системд бодъё. (зураг 2.9) $z = \sqrt{x^2+y^2}$ нь z тэгш хэмийн тэнхлэг бүхий дугуй конус юм. Энэ тэгшитгэл цилиндр координатын системд $z = \rho$ болно.

$$T: \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le 1, \quad \rho \le z \le 1, \quad \gamma(\rho, \varphi, z) = \rho$$

$$m = \iiint\limits_T \rho dv = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \int\limits_\rho^1 \rho(\rho d\rho d\varphi dz) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 z \Big|_\rho^1 d\rho$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{\pi}{24}$$



Зураг 9:

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\rho dv = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 z\rho^2 dz d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^1 d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 (\rho^2 - \rho^4) d\rho = \frac{\pi}{30}$$

$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$ тул

$$M_{xz} = \iiint\limits_T \rho^2 \sin\varphi dv = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \int\limits_\rho^1 \rho^3 \sin\varphi dz d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \rho^3 z \sin\varphi \Bigg|_\rho^1 d\rho d\varphi$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^1 (\rho^3 - \rho^4) d\rho = \frac{1}{20}$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_T \rho^2 \cos\varphi dv = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^1 \int\limits_\rho^1 \rho^3 \cos\varphi dz d\rho d\varphi = \frac{1}{20}$$

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38; \quad y_0 = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38;$$

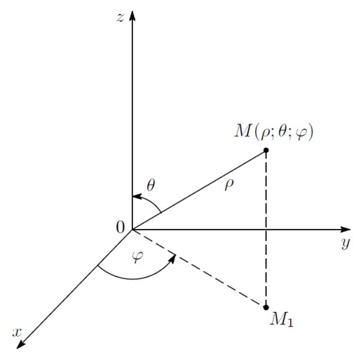
$$z_0 = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi/30}{\pi/24} = \frac{4}{5} = 0.8; \quad M_0(0.38; 0.38; 0.8)$$

Бөмбөрцөг координатын систем Бөмбөрцөг координатад огторгуйн M цэгийн байрлалыг тодорхойлохдоо:

1) Координатын эхнээс энэ цэг хүртэлх зайг нэгдүгээр координатаар өгнө.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (\rho \geq 0)$$

2) Цэгийн хоёрдугаар координатаар Oz тэнхлэг ба OM хэрчмийн хоорондох өнцгийг авна. Энэ нь $(0 \leq \theta \leq \pi)$ завсарт хувирна. Oz тэнхлэгээс эхлэн тоолно. (зураг 2.10)



Зураг 10:

3) M цэгийг xoy хавтгайд проекцлон M_1 цэг олж, OM_1 хэрчмийн Ox тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгийг M цэгийн гуравдугаар координатаар авна. Энэ өнцгийг Ox тэнхлэгээс эхлэн цагийн зүүний эргэлтийн эсрэг чиглэлд тоолох ба $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ завсарт хувирна.

Цэгийн бөмбөрцөг координатыг $M(\rho, \theta, \varphi)$ гэж тэмдэглэнэ.
M цэгийн тэгш өнцөгт координат ба бөмбөрцөг координатын хоорондоын холбоог дараах томъёо үзүүлнэ.

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases} \tag{12}$$

Эндээс $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ томъёо гарна. Тэгш өнцөгт координатын системээс бөмбөрцөг координатын системд шилжих шилжилтийн Якобианыг олвол:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\theta$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\theta \tag{13}$$

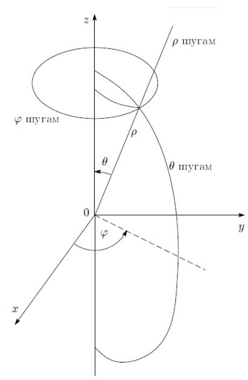
байна.

Санамж: Хэрэв xOz хавтгайд анхны меридиан оршино гэвэл φ өнцөг нь уртрагийг, θ өнцөг нь M цэгийн өргөргийн 90° хүртэлх гүйцээлтийг тус тус харгалзуулан үзүүлнэ. Бөмбөрцөг координатын шугамууд нь:

а) Координатын эхнээс татсан цацраг буюу ρ шугам

б) Координатын эхэнд төвтэй, Oz тэнхлэгийн хоёр цэгийг холбосон хагас тойрог буюу θ шугам

в) xoy хавтгайтай параллель хавтгайд орших, Oz тэнхлэг дээр төвтэй тойрог буюу φ шугам зэргээс бүрдэнэ. (зураг 2.11)



Зураг 11:

Жишээ 0.4. Цэгийн өгөгдсөн $A(6;\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3})$ бөмбөрцөг координатаар түүний цилиндр ба тэгш өнцөгт координатыг тодорхойл.

Бодолт: $\rho = 6,\ \theta = \dfrac{\pi}{4},\ \varphi = \dfrac{\pi}{3}$ тул

a) $x = 6\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3} = 6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $y = 6\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3} = 6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$, $z = 6\cos\dfrac{\pi}{4} = 6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, $A\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\dfrac{3\sqrt{6}}{2};3\sqrt{2}\right)$

b) $z = 6\cos\dfrac{\pi}{4} = 6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $r = 6\sin\dfrac{\pi}{4} = 6\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$; $A\left(r;\varphi;z\right) = A\left(3\sqrt{2};\dfrac{\pi}{3};3\sqrt{2}\right)$