ЛЕКЦ 6. Векторуудын скаляр үржвэр, түүний механик утга. Чиглүүлэгч косинусууд. Вектор үржвэр, түүний механик ба геометр утга. Холимог үржвэр, түүний геометр утга. Векторууд компланар байх нөхцөл.

Багш С. Уранчимэг

2021 он

1. Векторуудын скаляр үржвэр, түүний механик утга.
2. Чиглүүлэгч косинусууд.
3. Вектор үржвэр, түүний механик ба геометр утга.
4. Холимог үржвэр, түүний геометр утга.
5. Векторууд компланар байх нөхцөл.

$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ векторууд авъя.

Тодорхойлолт

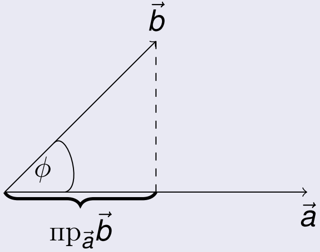
$\vec{a}, \vec{b}$ векторуудын уртыг тэдгээрийн хоорондох өнцгийн косинусаар үржүүлсэн үржвэртэй тэнцүү тоог $\vec{a}, \vec{b}$ векторуудын скаляр үржвэр гээд $(\vec{a}, \vec{b})$ эсвэл $\vec{a}\vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi \qquad \phi = \vec{a}\,\widehat{}\,\vec{b}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Хэрэв $\phi = \vec{a}\,\widehat{}\,\vec{b}$ өнцөг $\left.\begin{array}{c}\text{хурц}\\ \text{тэгш}\\ \text{мохоо}\end{array}\right\rangle$ бол $\begin{array}{l}(\vec{a}, \vec{b}) > 0\\ (\vec{a}, \vec{b}) = 0\\ (\vec{a}, \vec{b}) < 0\end{array}$ байна.

- Чанар
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
- $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b})$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
- $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$

Скаляр үржвэрийг проекц ашиглан бичье.



$$\cos\phi = \frac{\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$$

Жишээ (1.)

$|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4,\ \vec{a} \widehat{\ } \vec{b} = \frac{2\pi}{3}$ бол $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b})$-г ол.

$(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 =$

$= 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} - 4 \cdot 16 = -61$

Жишээ (2.)

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ хувьд дараах скаляр үржвэрийг ол.

$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0$$

$$(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1$$

Координатаар өгөгдсөн $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ векторуудын скаляр үржвэрийг ол.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2 + y_1y_2$$

$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ хувьд төсөөтэйгээр:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\cos\phi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

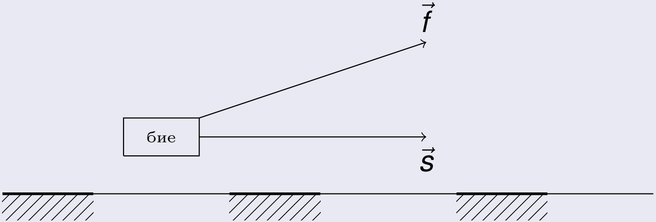
$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

Жишээ (3.)

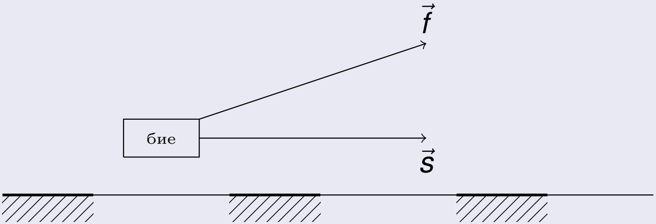
$\vec{a} = \{4, -2, -4\}$, $\vec{b} = \{6, -3, 2\}$ векторуудын скаляр үржвэрийг ол.

$$\vec{a}\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 24 + 6 - 8 = 22$$

Бие $\vec{f}$ хүчний үйлчлэлээр $\vec{s}$ чиглэлд хөдлөхөд хийгдэх ажлыг ол.

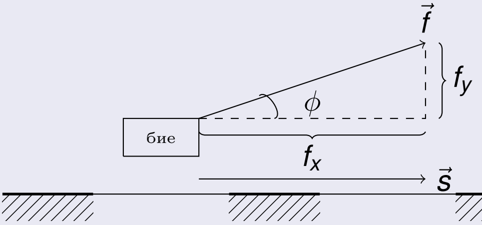


Бие $\vec{f}$ хүчний үйлчлэлээр $\vec{s}$ чиглэлд хөдлөхөд хийгдэх ажлыг ол.



Биеийн шилжсэн зай $|\vec{s}|$ -ыг $\vec{f}$ векторын шилжсэн чиглэлийн дагуух компонентийн хэмжээгээр үржүүлж ажлыг олно.

Бие $\vec{f}$ хүчний үйлчлэлээр $\vec{s}$ чиглэлд хөдлөхөд хийгдэх ажлыг ол.



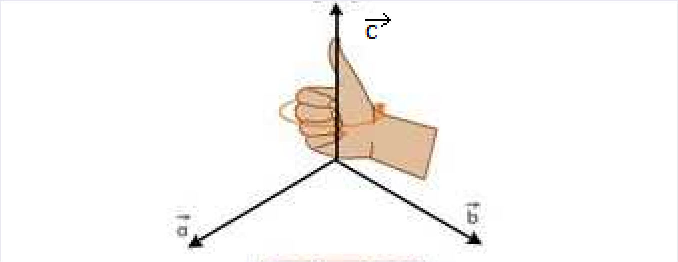
$$\vec{f} = f_x \cdot \vec{i} + f_y \cdot \vec{j}$$

$$\cos\phi = \frac{f_x}{|\vec{f}|}$$

$$A = |\vec{s}| \cdot |f_x| = |\vec{s}| \cdot |\vec{f}| \cos\phi = (\vec{s}, \vec{f})$$

Тодорхойлолт

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторуудыг нэг эхтэй байрлуулаад $\vec{c}$ векторын төгсгөлөөс $\vec{a}$-аас $\vec{b}$ -руу шилжих бага эргэлт цагийн зүүний эсрэг (дагуу) байвал $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторуудыг баруун (зүүн) гуравт гэнэ.



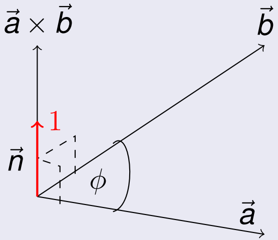
Баруун гуравт

Тодорхойлолт

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ векторуудын хувьд

$$\vec{a} \times \vec{b} = (|\vec{a}||\vec{b}| \sin \phi)\vec{n}$$

томьёогоор тодорхойлогдох векторыг тэдгээрийн вектор үржвэр гэнэ. Энд $\vec{a} \widehat{\ } \vec{b} = \phi$ ба $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ баруун гуравт, $\vec{n}$ нь $\vec{a}, \vec{b}$ векторуудын хавтгайд $\perp$, нэгж вектор.



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \phi$$

- Чанар
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b}$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

Жишээ (4.)

$|\vec{a}| = 3, \ |\vec{b}| = 4, \ \vec{a}\widehat{\ }\vec{b} = \frac{\pi}{6}$ бол $|\vec{a} \times \vec{b}| = ?$
Бодолт.

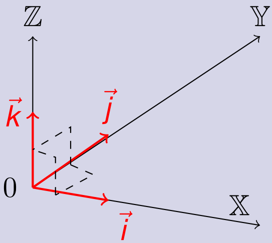
$|\vec{a} \times \vec{b}| = 3 \cdot 4 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 6$

Жишээ (5.)

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ хувьд дараах вектор үржвэрийг ол.

$$[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = 0$$

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k} \qquad [\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j} \qquad [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$$



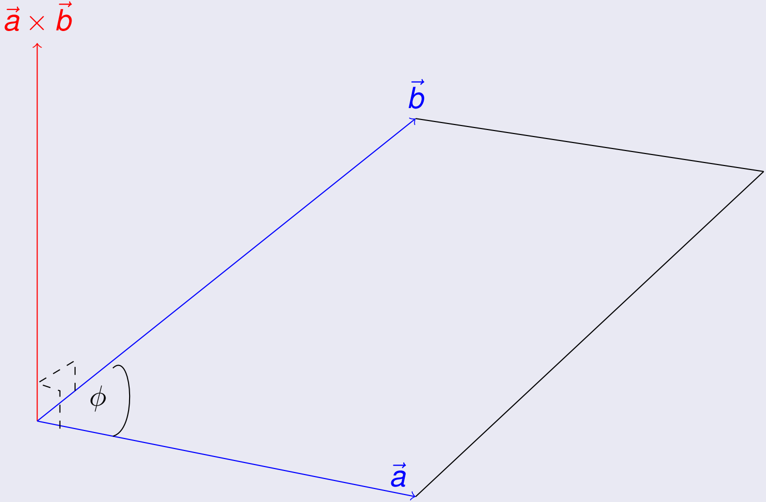
Координатаар өгөгдсөн

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

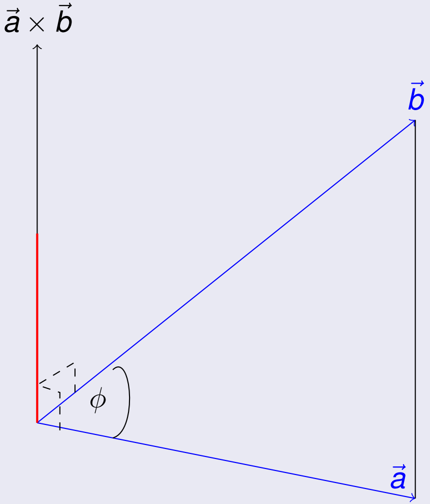
векторуудын вектор үржвэрийг ол.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

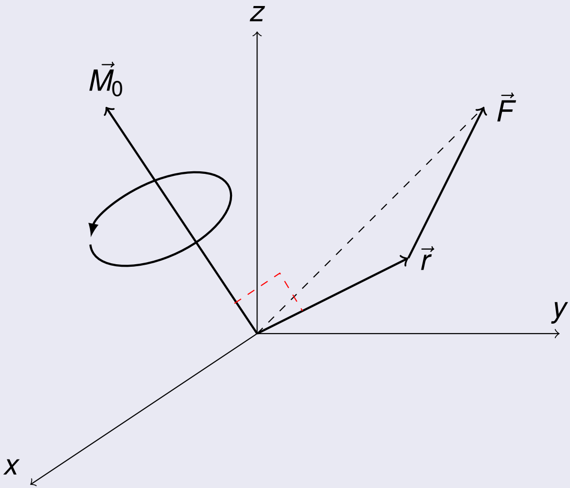
Параллелограммын талбай: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$



Гурвалжны талбай: $S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$



Хүчний момент: $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$



Жишээ (6.)

$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ векторуудаар байгуулагдсан параллелограммын талбайг ол.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{49 + 4 + 25} = \sqrt{78}$$

Тодорхойлолт

$\vec{a} \times \vec{b}$ векторыг $\vec{c}$ -ээр скаляр үржихэд гарах тоог векторуудын холимог үржвэр гээд $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ гэж тэмдэглэнэ.

- Чанар

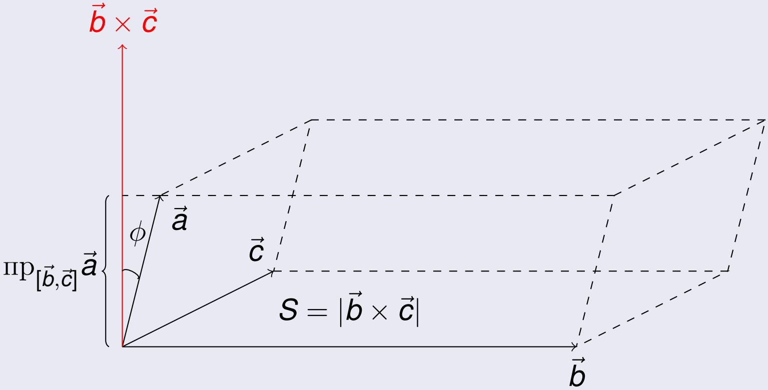
1. Хэрэв $\begin{array}{l} (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) > 0 \\ (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0 \\ (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) < 0 \end{array}$ бол $\begin{array}{c} \text{баруун гуравт} \\ \text{компланар} \\ \text{зүүн гуравт} \end{array}$
2. $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c} \times \vec{a}, \vec{b})$
3. $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b} \times \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a} \times \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c} \times \vec{b}, \vec{a})$
4. $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b})$
5. $\vec{a}\vec{b}(\vec{c_1} + \vec{c_2}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c_1} + \vec{a}\vec{b}\vec{c_2}$
6. $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c}) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

векторуудын холимог үржвэрийг олъё.

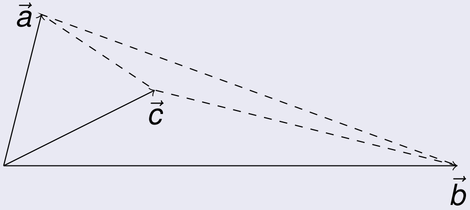
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Компланар биш 3-н вектороор байгуулагдсан параллелопипедийн эзлэхүүнийг ол.



$$V = S\cdot h = |\vec{b}\times\vec{c}|\cdot \text{пр}_{[\vec{b},\vec{c}]}\vec{a} = |\vec{b}\times\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cos\phi = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

Компланар биш 3-н вектороор байгуулагдсан тэтраэдрийн эзлэхүүнийг ол.



$$V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

Жишээ (7.)

$A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$ оройтой тэтраэдрийн эзлэхүүнийг ол.

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}\quad \vec{AC}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\quad \vec{AD}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}3&1&2\\6&3&2\\3&-2&2\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1&1&1\\2&3&1\\1&-2&1\end{matrix}\right\|=|-3|=3$$

Теорем

Хэрэв $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ бол $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ векторууд компланар байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторуудын холимог үржвэр тэг байх юм.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

векторууд компланар $\iff$ векторуудын холимог үржвэр тэг байна.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$