Лекц 1

МЕХАНИК

1.1 Ерөнхий зүйл

Орчлон ертөнцийн од эрхсээс эхлээд өчүүхэн атом молекул хүртэлх бүх л орчинд механик хөдөлгөөн оршино.

Хүн төрөлхтөн орчлон ертөнцийг танин мэдэж өөрийн оюун санаандаа төсөөлөхийн тулд хөгжүүлж ирсэн шинжлэх ухааны нэг нь физикийн шинжлэх ухаан юм. Физикийн бүлэг сэдвүүдийн эхэнд судлах механик нь нэг биетэй харьцангуй нөгөө биеийн байрлалын өөрчлөлт болох механик хөдөлгөөнийг судална.

Механикийн бүлэг нь кинематик ба динамик гэсэн хоёр үндсэн бүлгээс тогтоно. Кинематик нь хөдөлгөөний шинж чанарыг геометрийн талаас нь судалдаг. Энэ бүлэгт бид хөдөлгөөний тэгшитгэл, хурд, хурдатгал тэдгээрийн хоорондын хамаарлын талаар судлан, цаашид хэрэглэх боломжийн талаар мэдлэг олж авна.

Динамик нь хөдөлгөөнийг үүсэх ба саатах шалтгааныг нь тодорхойлох замаар судалдаг. Энэ бүлэгт хөдөлгөөний хуулиудыг танин, механик системүүдийн хөдөлгөөнүүдийг шинжлэн судална.

Механикийн бүлэгт тодорхойлох жигд ба хувьсах хөдөлгөөн, эргэх хөдөлгөөний тэгшитгэлүүдийг тодорхойлон судлахын зэрэгцээ, тооллын системүүд тэдгээрийн хооронд шилжих координатын хувиргалтууд, хатуу биеийн эргэх хөдөлгөөн, хадгалагдах хуулиуд, хувьсах масстай биеийн хөдөлгөөн, инерциал бус тооллын систем, харьцангуй тусгай онол, хэлбэлзэх хөдөлгөөнүүдийг судална.

1.1.1 Орон зай

Бид цаашид хэмжих гэсэн ойлголтыг хэрэглэх бөгөөд энэ ойлголт нь ямар нэг жишиг үлгэртэй тухайн ижил төрлийн зүйлийг жишиж үзэхийг хэлнэ. Одоо орон зай цаг хугацааг хэрхэн хэмжих талаар авч үзье.

Ертөнцийн бүх матер, материалууд нь биелэг шинж чанартай байдаг. Энэ нь харах шинж чанарыг илтгэнэ. Энэ шинж чанар нь гурван хэмжээстэй харилцан перпендикуляр гурван чиглэлийн дагуух биелэг шинж чанарыг мэдсэнээр биеийн эзлэхүүний тухай төсөөллийг бүрэн авна. Аль нэг чиглэлийн дагуух биелэг шинж чанарын хэмжээг тэр биеийн шугаман хэмжээ гэнэ. Хоёр биеийн шугаман хэмжээг жишиж уртыг хэмждэг. Уртын үндсэн үлгэр нь метр бөгөөд энэхүү үлгэрийг атомын цацаргалтыг ашиглан тогтоодог.

Материйн биелэг шинж чанар нь тасралттай байдаг (дискрет). Энэ нь бие бүхэн төгсгөлөг гэсэн үг. Орчин цагийн физикийн шинжлэх ухааны төсөөлөл нь дараах маягтай байна. Орчин цагт вакуумыг материйн онцгой хэлбэр гэж үздэг. Иймд биелэг шинж чанартай, бүтцийг бүрэн тодорхойлоогүй байна.

Вакуумын талаар физикийн шинжлэх ухаанд олон янзын таамаглал бий. Үүнд

Электрон-позитроны

Протон-антипротоны гэх мэт анти бөөмийн нэгдэл гэж үздэг.
Гэвч эдгээрт бүгдэд нь цахилгаан соронзон долгионы цогц юм гэсэн ойлголт байгаа.

Орон зайг бүрдүүлэгч вакуум нь дараах шинж чанартай.

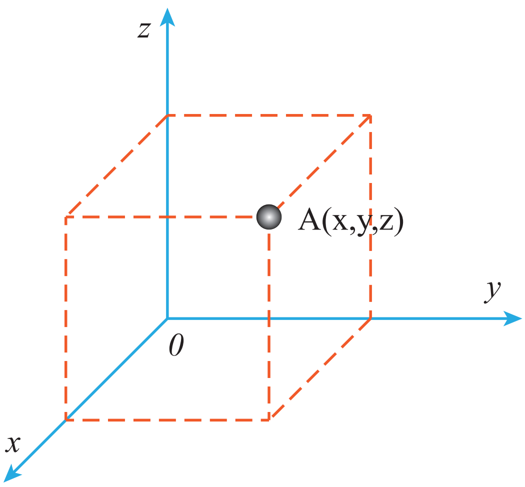
1. Нэгэн төрөл-хаана ч ижил
2. Тасралтгүй-хаана ч байгаа
3. Изотроп-бүх чиглэлд ижил
4. Вакуум дотор биелэг зүйл тавихад хоорондоо огт нөлөөлөхгүй.

Ийм вакуумын шугаман хэмжээг тодорхойлж болно. Вакуумыг биеийн хөдөлгөөнтэй харьцуулах нь зарчмын хувьд болно. Үүнээс үүдэн Ньютон абсолют хөдөлгөөн байна гэсэн. Гэвч энэ арга нь хэрэглэхэд хэцүү. Учир нь вакуумд онцгой цэг байхгүй, сэрэлд мэдрэгдэхгүй. Энэ шалтгаанаас болон абсолют хөдөлгөөний тухай ярилтгүй болж харьцангуй хөдөлгөөнийг л бид мэдэрч, судалдаг. Хөдөлгөөнийг судлахад тооллын бие авах бөгөөд тэр нь орон зайг төлөөлөн харьцуулагддаг.

Тооллын бие орон зай хоёрын хоорондын холбоог координатын системийг хэрэглэн тогтоодог. Энэ нь орон зайн бүх цэгийг хаяглах арга юм. Орон зайд хөдлөх биеийн байрлалыг төсөөлөх, илэрхийлэхэд огторгуйн тухайн цэгийг тооллын биетэй харьцангуйгаар координатуудаар тодорхойлж байгаа нь тухайн цэгийн нэр хаяг болно. Огторгуйн орон зай нь гурван хэмжээстэй учир ямар ч координатын систем авсан гурван байгуулагч буюу гурван координатаар цэгийн байрлал тодорхойлогдоно. Дараах координатын системүүдийг өргөн хэрэглэдэг.

1. Тэгш өнцөгт Декартын координатын систем (x, y, z)
2. Цилиндр координатын систем (r, φ, z)
3. Сфер (бөмбөрцөг)координатын систем (ρ, φ, θ)

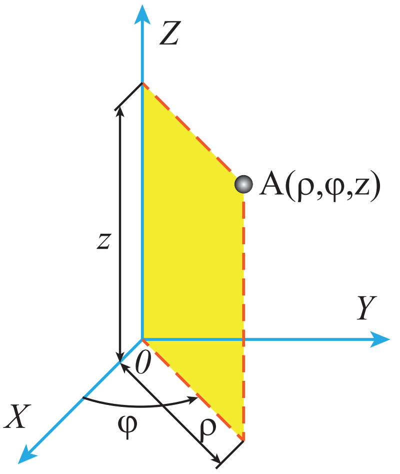
Координатын системүүдийн хоорондын шилжүүлэлтийг авч үзье.



Зураг 1.1. Тэгш өнцөгт Декартын координатын систем

A цэгийн байрлалыг түүний тэнхлэгүүд дээрх проекцын x, y, z гурван координатаар тодорхойлно (1.1 –р зураг). Цилиндр координатын системд A цэгийн байрлалыг ρ ба z зай болон ρ хэрчим x тэнхлэгтэй үүсгэх φ өнцөг тодорхойлно.

A цэг тэгш өнцөгт координатын системд $A(x, y, z)$ координаттай (1.2 –р зураг) бол цилиндр координатын системд $A(\rho, \varphi, z)$ координаттай байна гэж үзье.

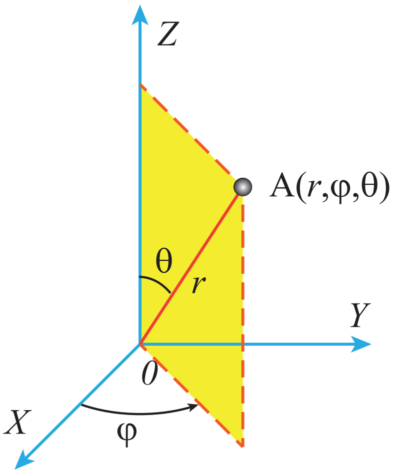


Зураг 1.2. Цилиндр координатын систем

Цилиндр координатын системээс тэгш өнцөгт координатын систем рүү шилжүүлбэл

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{1.1}$$

θ өнцөг ба түүний OXY хавтгай дээрх проекцын x тэнхлэгтэй үүсгэх φ өнцөг тодорхойлно. Харин A цэг сфер координатын системд $A(r, \varphi, \theta)$ координаттай бол тэгш өнцөгт координатын системд шилжүүлье. (1.3 –р зураг).



Зураг 1.3. Бөмбөлөг координатын систем

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1.2}$$

Координатын системүүдэд биеийн хэмжээ болон, хөдөлгөөний орон зайг тодорхойлоход өчүүхэн бага эзлэхүүний элементүүдийг тодорхойлох шаардлага тулгардаг. Тэгш өнцөгт координатын системд $(x, x+dx)$, $(y, y+dy)$, $(z, z+dz)$ мужид харгалзах эзлэхүүн нь

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \tag{1.3}$$

Цилиндр координатын системд $(\rho, \rho + d\rho)$, $(\varphi, \varphi + d\varphi)$, $(z, z + dz)$ мужид харгалзах эзлэхүүн нь

$$dV = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho \cdot dz \tag{1.4}$$

Сфер координатын системд $(r, r + dr)$, $(\varphi, \varphi + d\varphi)$, $(\theta, \theta + d\theta)$ мужид харгалзах эзлэхүүн нь

$$dV = r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr \tag{1.5}$$

Орчин үед өчүүхэн бага цөмийн орон зай болох 10^{-16}м –ээс орчлон ертөнцийн хэмжээс болох 10^{26}м $\approx 10^{10}$ гэрлийн жил хүртэлх уудам орон зайд судалгаа шинжилгээг хийж байна.

Сонирхолтой нь өчүүхэн бага мужид болон од эрхсийн уудам орон зайд бидний хэрэглэдэг Евклидийн геометрийн төсөөлөл хангалтгүй буюу биелэхгүй болдог байна.

Орчлон ертөнцийн одод, галактикийн орон зайд огторгуй мурийсан байх учир эллипслэг болон параболлог мурийлттай огторгуйн геометр ашиглан тооцоолдог байна. Эдгээр геометрийг Лобачевский Н. И., Б. Римана нар анх үүсгэн хөгжүүлсэн байна. Бидний судлах механик нь гурвалжны доторх өнцгүүдийн нийлбэр 180^0 байх Эвклидийн геометрийн хүрээнд хамрагдана.

1.1.2 Цаг хугацаа

Материйн хоёр дахь шинж чанар нь цаг хугацаанд үйл явдал үргэлжлэх явдал юм.

Бүх матер үйлийн шинж чанартай. Үйл явцын үргэлжлэх хэмжээг хугацаагаар хэмжинэ. Хугацааг хэмжихдээ үелэх үзэгдлийг ашигладаг. Үүнийг цаг гэнэ. Атомын цацрагийн давтамжийг ашиглаж цагийн эталоныг зохиодог байна. Олон улсын нэгжийн системд 1сек-ийг Цезий 133 атомын хэт нарийн төвшний хоорондох шилжилтээр цацаргах долгионы үеийг 9192631770 дахин авсантай тэнцүү хэмээн 1997 онд тогтоожээ. Орон зай, цаг хугацаа нь салшгүй холбоотой. Үүний нэг жишээ нь цагийн явцаар огторгуй нэгэн төрөл эсэхийг шалгаж болно. Өөрөөр хэлбэл огторгуй нэгэн төрөл байх нөхцөл нь нэг цагтай байх явдал юм.

Цагийн явц огторгуйн бүх цэг дээр ижил байвал энэ нь нэгэн төрөл огторгуй болдог бол цаг хугацааны үргэлжлэх хэм хэмжээ алдагдахгүй байвал хугацаа нэгэн төрөл гэнэ. Жишээлбэл өглөө цай чанах, өдөр цай чанах үзэгдэл хугацааны хувьд зөрүүгүй байгаа нь хугацаа нэгэн төрлийн шинж юм.

Тооллын системд аливаа үзэгдлийг судална. Тооллын биетэй харьцангуй тайван буюу бэхлэгдсэн координатын систем сонгон авч, хугацааг тоолох цагийг авснаар тооллын систем үүснэ.

Нэгэн төрлийн огторгуйтай, хугацаа нь нэгэн төрөл байх тооллын системийг Инерциал тооллын систем гэнэ. Инерциал тооллын систем мөн эсэхийг Ньютоны нэгдүгээр хууль биелж байгаа эсэхээр тодорхойлно.

Нэг инерциал тооллын системтэй харьцангуй тогтмол хурдтай хөдлөх тооллын системүүд бүгд инерциал тооллын систем байх болно.

Инерциал бус тооллын системүүдэд цаг хугацаа нэгэн төрөл биш байна.

1.2 Кинематик

1.2.1 Кинематик загвар

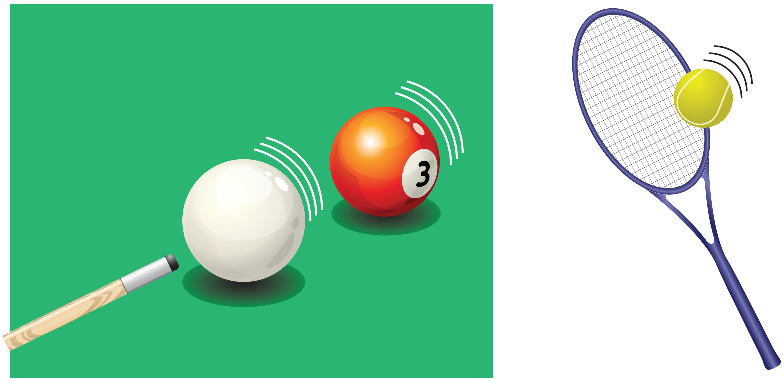
Өмнө дурдсанаар нэг биетэй харьцангуй нөгөө биеийн байрлал өөрчлөгдөхийг механик хөдөлгөөн гэнэ. Механик хөдөлгөөнийг судална гэдэг нь бие хэзээ?, хаана? байхыг тодорхойлох явдал юм. Хэзээ? гэсэн асуултанд хариулахын тулд бидэнд цаг хэрэгтэй ба хаана? гэсэн асуултад хариулахын тулд координатын систем хэрэгтэй болно. Өөрөөр хэлбэл хөдөлгөөнийг цагтай координатын системд буюу ямагт тооллын системд судална. Цаашдаа тооллын систем гэдэг үгийг дурдахгүйгээр үзэгдлийг судлах бүрдээ тодорхой тооллын систем ашигласан байгааг анзаараарай.

Кинематик нь хөдөлгөөн яагаад бий болж байгаа яагаад саатаж байгааг судлахгүй. Зөвхөн биеийн огторгуйн байрлал нь хугацаанаас хэрхэн хамаарч байгааг л судална.

Хөдөлгөөнийг судлахдаа биеийн шугаман хэмжээ l, хөдөлгөөн хийж байгаа орон зайн хэмжээ L -ээс олон дахин бага бол цэгээр төлөөлүүлэн судалдаг ($l \ll L$). Энэ тохиолдолд биеийг материал цэг гэнэ. Жишээ нь хот хооронд нислэг хийх онгоц, автомашин нь хөдөлгөөнийг цэгээр төлөөлүүлэн судалдаг.

Аливаа биеийн мөргөлдөөн харилцан үйлчлэлийн үед биеийн хэлбэр өөрчлөгдөх боловч түүний хэв гажилт (Δx) тооцохооргүй бага буюу түүний шугаман хэмжээсээс ($\Delta x \ll l$) олон дахин бага бол биеийг абсолют хатуу бие мэтээр авч үзнэ. Жишээ нь бильярдын шарикууд мөргөлдөх үед тэдгээрийг тулж байгаа хэсэг деформацлагдах боловч анзаарагдахгүй бага тул абсолют хатуу шарикууд дөнгөж тулаад ойж байгаа мэтээр загварчлан ойлгоно (1.4a –р зураг).

Харин газрын теннисний бөмбөгийг цохих үед илэрхий деформацлагдаж байгаа нь өндөр хурдны камераар ажиглахад харагдана. Иймд энэхүү бөмбөгийг абсолют хатуу бие гэж үзэж болохгүй боловч харин тоглолтын үед бөмбөгний хөдөлгөөнийг материал цэг хэмээн загварчлан ойлгож болно (1.4b –р зураг). Материал цэгийг хэмжээний хувьд тэг боловч масстай байна гэж үзнэ.



a) *b)*

Зураг 1.4. Абсолют хатуу бие ба харимхай биеийн мөргөлдөөн

1.2.2 Хөдөлгөөний тэгшитгэл

Хөдөлгөөн нь орон зайд хугацаанаас хамааран тасралтгүйгээр тодорхойлогдоно. Иймд хөдөлгөөн хийж байгаа биеийн байрлал хугацааны хувьд тасралтгүй тодорхойлогдох функцээр илэрхийлэгдэнэ.

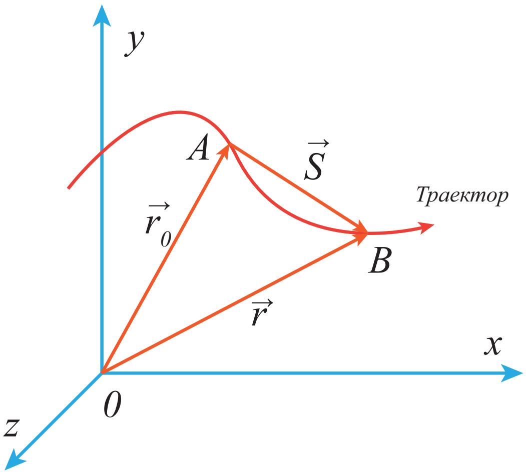
Биеийн хэзээ? хаана? байхыг математикийн хувьд нэгэн утгатай тодорхойлж чадах тэгшитгэлийг хөдөлгөөний тэгшитгэл гэнэ.

Хөдөлгөөний тэгшитгэл нь биеийн байрлал хугацааны хамаарлыг шууд ба шууд бусаар илэрхийлж байж болох юм. Жишээлбэл Ньютоны хоёрдугаар хууль нь шууд бус боловч хөдөлгөөнийг тодорхойлох учир хөдөлгөөний тэгшитгэл болно. Одоо хөдөлгөөнийг шууд илэрхийлэх гурван хэлбэрийг авч үзье.

Вектор арга

Биеийн дайрч өнгөрүүлэх цэгүүдийг холбоход үүсэх мурийг траектор нь тасралтгүй мурийг үүсгэдэг. Траекторын дагуу авсан биеийн тодорхой хугацаанд дайрч өнгөрсөн буюу дайрч өнгөрөх траекторын уртыг *зам* гэнэ. Тодорхой хугацааны завсарт биеийн хугацааны эхний агшин дахь байрлалаас төгсгөлийн агшин дахь байрлал хүртэл татсан векторыг шилжилтийн вектор гэнэ (1.5 –р зураг). Харин координатын эхээс биеийн байрлал хүртэл татсан векторыг $\vec{r}$ радиус вектор гэнэ. Хөдөлгөөний тэгшитгэл нь $\vec{r} = \vec{r}(t)$ эсвэл

$$\vec{S} = \vec{S}(t) \tag{1.6}$$



Зураг 1.5. Материал цэгийн траектор

байх ба энд $\vec{S} = \vec{r} - \vec{r_0}$ байна. Өөрөөр хэлбэл радиус ба шилжилтийн векторууд нь вектор функцээр тодорхойлогдох юм.

Жишээ нь $\vec{r} = St \cdot \vec{i} + (6t^2 + 2)\vec{j} + 3\vec{k}$ эсвэл

$$\vec{S} = \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\vec{r} = \vec{b} \cdot \sin(\omega t + \phi_0) + \vec{c}$$

гэх мэт. Өөрөөр хэлбэл тодорхойлогдсон векторуудын тусламжтайгаар радиус эсвэл шилжилтийн векторыг илэрхийлж байна. Биеийн хөдөлгөөнийг тодорхойлохдоо түүний хугацааны тухайн эгшин бүрд байрлалыг нь тодорхойлох векторыг илэрхийлж чадах вектор тэгшитгэлийг хөдөлгөөний вектор тэгшитгэл буюу хөдөлгөөнийг тодорхойлох вектор арга гэнэ.

Координатын арга

Энэ арга нь биеийн байрлалыг хугацааны эгшин бүрд координат бүрээр нь тодорхойлох арга юм. 1.6 –р зурагт үзүүлсэн нь M цэгийн координат нь тэгш өнцөгт координатын системд дараах байдлаар тодорхойлогдож байвал координатын арга гэнэ.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.7}$$

Цилиндр координатад

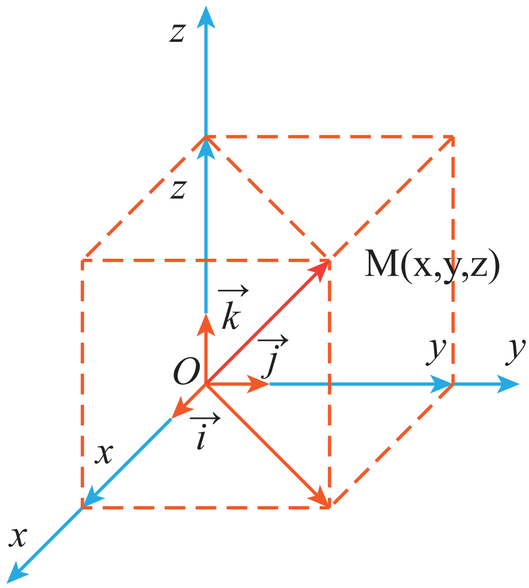
$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.8}$$

Сфер координатын системд

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \tag{1.9}$$

хэлбэрээр бичигдэх юм. Жишээлбэл тэгш өнцөгт координатын системд

$$\begin{cases} x = x_o + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \\ y = y_o + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} \end{cases}$$



Зураг 1.6. Тэгш өнцөгт координатын систем

Цилиндр координатын системд

$$\begin{cases} \rho = 4t^2 \\ \phi = 3t \\ z = 0 \end{cases}$$

гэх мэт бичнэ. Хөдөлгөөний тэгшитгэлийг координатын аргаас вектор хэлбэрт шилжүүлбэл

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{1.10}$$

Энд $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ –нь x, y, z тэнхлэгүүд дээрх нэгж вектор болно.

Траекторын арга

Энэ аргаар тодорхойлохдоо траекторыг гаргасны дараа түүн дээр дурын нэг цэг сонгон авч түүнээс эхлэн траектор дээр тогтоосон чиглэлд шилжих замаар биеийн хөдөлгөөнийг тодорхойлно.

$$S = S(t) \tag{1.11}$$

Энэ аргыг траектор нь тодорхойлогдох хөдөлгөөний хувьд ашигладаг. Жишээ нь бие шулуунаар хөдлөх үед зам нь $S = 7 + 2t^2$ хуулиар хувьсана. Тойргоор эргэх биеийн зам $S = 3t^2$ гэх мэт.

1.2.3 Хурд

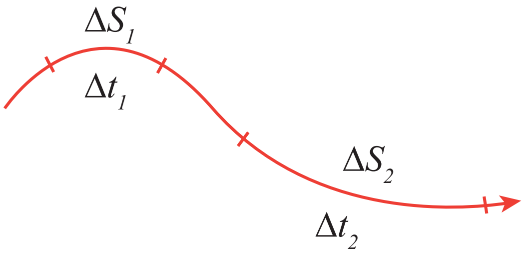
Биеийн хөдөлгөөнийг судлахад түүний байрлал хэрхэн хувьсан өөрчлөгдөж байгааг илэрхийлэх нэг хэмжигдэхүүн нь хурд юм.

Хурд нь нэгж хугацаанд туулах замаар тодорхойлогдоно. Биеийн туулсан замыг хугацаанд хуваавал дундаж хурд гарна.

$$v_{\text{д}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{1.12}$$

Хурд нь тогтмол хөдөлгөөнийг жигд хөдөлгөөн гэнэ. Шулуунаар жигд хөдлөх, тойргоор жигд эргэх гэх мэт хөдөлгөөний хувьд хөдөлгөөний траекторын аль ч хэсэгт дундаж хурд нь адилхан байна (1.7 –р зураг).

$$v_{\text{д}} = \frac{\Delta S_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta S_2}{\Delta t_2} \tag{1.13}$$

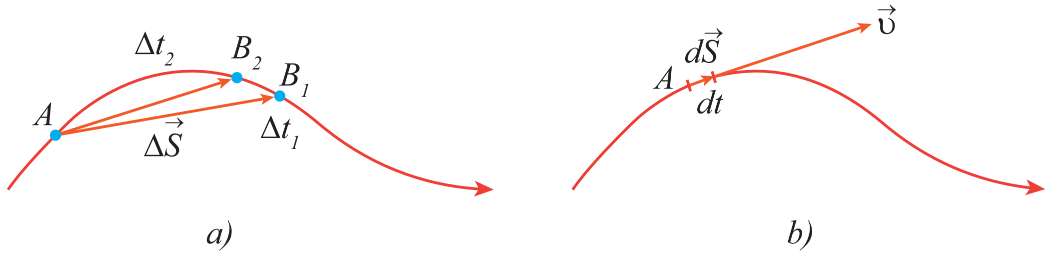


Зураг 1.7. Хөдөлгөөний траектор

Хөдөлгөөний траекторын олон хэсэг болгон хувааж хэсэг бүрд нь дундаж хурдыг тодорхойлоход өөр өөр хэмжээтэй байвал ийм хөдөлгөөнийг жигд бус хөдөлгөөн буюу хувьсах хөдөлгөөн гэнэ.

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta t_1} \neq \frac{\Delta S_2}{\Delta t_2} \tag{1.14}$$

Хувьсах хөдөлгөөний траекторын цэг бүрийг бие дайран өнгөрөх хурд нь ялгаатай байна.Тухайн цэгийг дайран өнгөрөх хурдыг эгшин зуурын хурд гэнэ. Одоо эгшин зуурын хурдыг тодорхойлъё. Материал цэгийн траекторын хэсгийг 1.8 –р зурагт үзүүлжээ. A цэгийг дайран өнгөрөх хурдыг олъё. A цэгийг t, B_1 цэгийг $t+\Delta t_1$ хугацааны эгшинд дайран өнгөрнө. Харин $\Delta t_1 > \Delta t_2$ хугацаанд B_2 цэгт хүрнэ (1.8a –р зураг). A цэгээс цааш хөдлөх хугацаа Δt –г багасгах замаар A цэгийн орчим



Зураг 1.8. Шилжилт ба хурд

хурдыг олбол.

$$\upsilon_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \tag{1.15}$$

Энд хугацааны өчүүхэн бага өөрчлөлтийг dt, түүнд харгалзах зам нь dS болно. Иймд Δt хугацааг маш бага авбал түүнд харгалзах замын хэмжээ, шилжилтийн хэмжээтэй давхацна. Мурийн өчүүхэн бага хэсгийг шулуунаар төсөөлж болох бөгөөд түүнийг агуулсан шулууныг шүргэгч шулуун гэдэг. Энэ үед өчүүхэн бага шилжилтийн вектор $d\vec{S}$ нь траектортой давхцах ба түүнд харгалзах хугацаа нь dt бол шилжилтийн хэмжээ нь замын хэмжээтэй тэнцэхийн зэрэгцээ чиглэл нь хөдөлгөөний буюу хурдны чиглэлийг тодорхойлно. Иймд хурдыг вектор хэлбэрээр тодорхойлбол. (1.8b –р зураг).

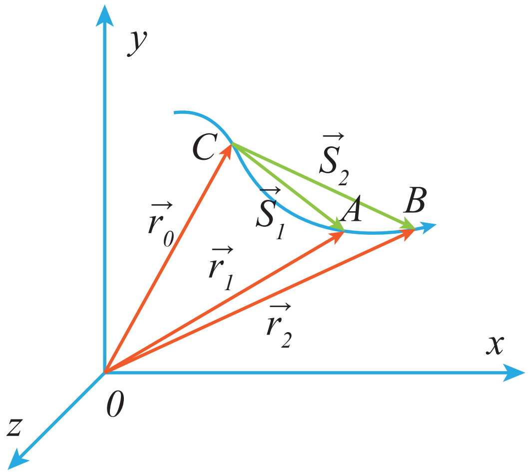
$$\vec{\upsilon}_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{1.16}$$

Энэхүү томьёонд шилжилтийн өөрчлөлтийг хугацааны өөрчлөлтөд харьцуулсан хязгаарыг товчлон $\frac{d\vec{S}}{dt}$ гэж тэмдэглэх ба энэ хязгаар нь математикийн хувьд шилжилтийн вектороос хугацаагаар авсан уламжлал юм. Шилжилтийн өөрчлөлтийг радиус векторoор илэрхийлье. 1.9 –р зурагт дүрсэлснээр материал цэг A цэгээс B цэгт шилжих үед

$$\overrightarrow{AB} = \vec{S}_2 - \vec{S}_1 = \Delta\vec{S}, \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r} \tag{1.17}$$

Эндээс

$$\Delta\vec{S} = \Delta\vec{r} \tag{1.18}$$



Зураг 1.9. Шилжилт

болох ба өчүүхэн бага өөрчлөлтийн хувьд

$$d\vec{S} = d\vec{r} \tag{1.19}$$

Иймд эгшин зуурын хурд нь

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.20}$$

Эгшин зуурын хурд нь шилжилт, эсвэл радиус вектороос хугацаагаар авсан уламжлалаар тодорхойлогдох траекторын шүргэгчээр чиглэх вектор юм. Радиус векторыг байгуулагчаар нь илэрхийлж 1.20 –р томьёогоор хурдыг олъё.

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k} \tag{1.21}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{1.22}$$

1.22 –р томьёоноос байгуулагчдыг олбол.

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad \upsilon_z \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z} \tag{1.23}$$

x, y, z байгуулагчдаас хугацаагаар авсан уламжлалууд нь харгалзах тэнхлэг дээрх хурдны байгуулагч болно. Физикт заримдаа хугацааны уламжлалыг товчлон цэгээр тэмдэглэдэг. Хурдны вектор нь байгуулагчаараа

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k} \tag{1.24}$$

болох тул хурдны хэмжээ буюу шугаман хурд нь

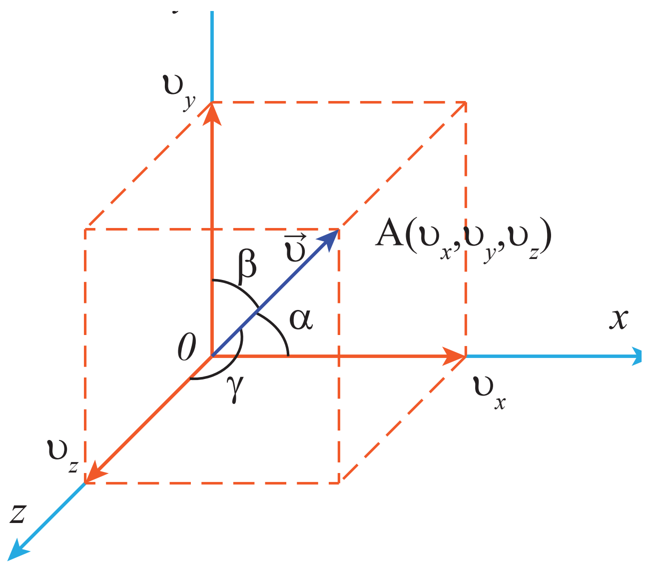
$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} \tag{1.25}$$

Хурдны байгуулагчдыг 1.10 –р зурагт үзүүлснээр хурдны хэмжээ ба тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгөөр илэрхийлье.

$$\upsilon_x = \upsilon\cos\alpha \qquad \upsilon_y = \upsilon\cos\beta \qquad \upsilon_z = \upsilon\cos\gamma \tag{1.26}$$

1.25 –р тэгшитгэлд орлуулбал α, β, γ өнцөгтүүдийн хувьд дараах адилтгал биелнэ.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1.27}$$



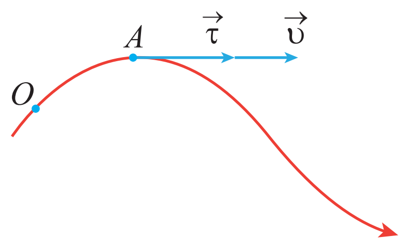
Зураг 1.10. Хурдны байгуулагчид

Хөдөлгөөний тэгшитгэлийг вектор хэлбэрээр 1.6 –аар өгсөн бол 1.20 –р томьёогоор, харин 1.7, 1.10 –аар хэлбэрээр илэрхийлэгдэх бол 1.22, 1.23 –р томьёогоор хурдыг уламжлал авч тодорхойлно.

Хөдөлгөөний тэгшитгэлийг траекторын аргаар (1.11) хэлбэрээр өгсөн бол хурдыг дараах байдлаар илэрхийлнэ.

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \tag{1.28}$$

Энд S зам учир давхар функцын уламжлалын томьёогоор хурдыг олж байна. $\frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{\tau}$ гэе. $\vec{\tau}$ нь 1.11 –р зурагт үзүүлснээр шүргэгчийн дагуу чиглэх нэгж вектор байна үүнийг тангенциал нэгж вектор гэнэ. 1.28 –р тэгшитгэлийг шугаман хурдаар илэрхийлбэл.



Зураг 1.11. Хурд ба траектор

$$\vec{\upsilon} = \frac{dS}{dt} \cdot \vec{\tau} = \upsilon \cdot \vec{\tau} \tag{1.29}$$

Биеийн шугаман хурд буюу хурдны хэмжээ нь замаас хугацаагаар авсан уламжлалтай тэнцүү болох нь харагдаж байна.

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} \tag{1.30}$$

Эндээс dt хугацаанд туулсан зам нь $dS = \upsilon dt$ болох учир. Нийт замыг дараах байдлаар интегралчилж олно.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon dt \tag{1.31}$$

Дундаж хурд нь

$$\upsilon_{\text{д}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t) dt \tag{1.32}$$

1.2.4 Хурдатгал

Хурд нь хэрхэн хувьсан өөрчлөгдөж байгааг хурдатгалаар илэрхийлнэ.

Хурдатгал нь нэгж хугацаан дахь хурдны өөрчлөлт буюу хурднаас хугацаагаар авсан уламжлал юм.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \tag{1.33}$$

Хурдатгал нь хурдны хэмжээ болон чиглэлийн өөрчлөлтөөр үүсэх хэмжигдэхүүн болно. 1.20 –р илэрхийллээс уламжлал авч хурдатгалыг олбол.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\upsilon}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \tag{1.34}$$

Хурдатгал нь радиус вектороос хугацаагаар авсан хоёрдугаар эрэмбийн уламжлал болох нь байна. Хурдатгал нь вектор хэмжигдэхүүн учир түүний байгуулагчдыг дараах байдлаар илэрхийлж болно.

$$\begin{array}{l} a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \dot{\upsilon}_x \\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = \dot{\upsilon}_y \\ a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} = \dot{\upsilon}_z \end{array} \tag{1.35}$$

Энд хурдатгалын x, y, z тэнхлэг дээрх байгуулагчдыг хурдны байгуулагчаас нэгдүгээр эрэмбийн уламжлалаар, координатаас нь хугацаагаар хоёрдугаар эрэмбийн уламжлал авч тодорхойлох илэрхийллийг бичих хэд хэдэн хэлбэрийг хамт бичлээ. Хурдатгалын хэмжээ нь

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.36}$$

вектор хэлбэрээр бичвэл

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{1.37}$$