1 Тоон дараалал ба тоон цувааны үндсэн ойлголт, эерэг гишүүдтэй цуваа, тэмдэг сөөлжих цуваа, цувааны нийлэх шинжүүд

Тодорхойлолт 1.1 Натурал тоо n бүхэнд x_n тоо харгалзуулбал $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ тоон олонлог үүснэ. Үүнийг тоон дараалал гэх ба x_n-г дарааллын ерөнхий гишүүн гэнэ.

Жишээ 1.1 $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ ерөнхий гишүүн бүхий дарааллыг бич.

Бодолт: $x_1 = \dfrac{1^2}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{2^2}{2^2+1} = \dfrac{2}{5}$, $x_3 = \dfrac{3^2}{3^2+1} = \dfrac{9}{10}$, $x_4 = \dfrac{4^2}{4^2+1} = \dfrac{16}{17}$ гэх мэтчилэн бичигдэх тул дарааллыг

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \ldots, \frac{n^2}{n^2+1}, \ldots$$

гэж бичиж болно. Мөн дарааллын эхний гишүүд өгөгдсөнөөр тухайн дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог бичиж болно.

Жишээ 1.2 $3 \cdot 2,\ 5 \cdot 2^2,\ 7 \cdot 2^3,\ 9 \cdot 2^4,\ 11 \cdot 2^5,\ \ldots$ дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог бич.

Бодолт: $x_1 = 3 \cdot 2^1$, $x_2 = (3+2) \cdot 2^2$, $x_3 = (3+2+2) \cdot 2^3$, $x_4 = (3+2+2+2) \cdot 2^4$ гэх мэтчилэн дарааллын эхний гишүүдийг бичвэл эндээс дарааллын ерөнхий гишүүн нь

$$x_n = (3 + 2(n-1)) \cdot 2^n = (2n+1)2^n$$

байхаар байна.

Тодорхойлолт 1.2 $\{a_n\}$ гэсэн төгсгөлгүй тоон дараалал өгөгджээ. Тэгвэл

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

илэрхийллийг **тоон цуваа** гэж нэрлэх ба $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ тоонуудыг цувааны гишүүд гэнэ.

Тодорхойлолт 1.3 Өгөгдсөн цувааны гишүүдийг дэс дараалан нэмэх замаар тоон дараалал S_n-г байгуулъя.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{1.2}$$

(1.2)-г цувааны $n-$р **хэсгийн нийлбэр** гэнэ.

Тодорхойлолт 1.4 Хэрвээ өгөгдсөн цувааны хэсгийн нийлбэрүүдийн дараалал S_n нь төгсгөлөг хязгаартай, өөрөөр хэлбэл

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{1.3}$$

бол энэ хязгаарыг (1.1) цувааны нийлбэр гэж нэрлэх ба энэ үед цуваag нийлж байна гэнэ.

Хэрвээ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ хязгаар оршин байхгүй буюу төгсгөлөг биш байвал (1.1) цувааг сарниж байна гэнэ.

Жишээ 1.3 $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} + \ldots$ цувааны нийлбэрийг ол.

Бодолт: Энэ цувааны хэсгийн нийлбэрийг олохын тулд гишүүдийг нийлбэр ялгавар болгон задалъя.

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

Ингээд $n \to \infty$ үеийн хязгаар авбал цувааны нийлбэр S олдоно.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

Жишээ 1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ цувааны нийлэлтийг судал.

Бодолт: Энэ цувааны n−р хэсгийн нийлбэр нь геометр прогрессын нийлбэрийг олдог томъёо ёсоор:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1) \quad \text{буюу} \quad S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \quad \text{болно.}$$

Хэрвээ $|q| < 1$ байвал

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q} \quad \text{болно.}$$

Иймээс хэрвээ $|q| < 1$ бол өгөгдсөн цуваа нийлэх бөгөөд нийлбэр нь

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} \quad \text{байна.}$$

Хэрвээ $|q| > 1$ байвал

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a-aq^n}{1-q} = a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \pm\infty$$

байх тул өгөгдсөн цуваа сарнина.

Хэрвээ $q = \pm 1$ байвал өгөгдсөн цуваа бас сарнина. Учир нь $q = 1$ байх үед

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots \quad \text{ба} \quad S_n = na \text{ байх бөгөөд}$$

түүний нийлбэр нь $S = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$ болно.

Хэрвээ $q = -1$ бол $a - a + a - \ldots$ болох ба хэсгийн нийлбэр нь

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ a, & n = 2k-1 \end{cases}$$

болно. Иймд $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ хязгаар оршин байхгүй.

Жишээ 1.5 $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ цувааны нийлбэрийг ол.

Бодолт: Цувааны ерөнхий гишүүнийг нийлбэр болгож задлая.

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

Хэсгийн нийлбэр нь

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

байх тул цувааны нийлбэр $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$ болно.

Жишээ 1.6 $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ цувааны нийлбэрийг ол.

Бодолт: $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1} + \dfrac{C}{n+2}$ гэж задлаад тодорхой бус коэффициентийн аргаар A, B, $C-$г олъё.

$$1 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)$$

гэдгээс

$$A = \frac{1}{2},\ B = -1,\ C = \frac{1}{2}$$

болно. Ингээд өгсөн цувааны ерөнхий гишүүн нь

$$u_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

болно. Хэсгийн нийлбэрийг олохын тулд цувааны гишүүдийг дэс дараалан нэмж үзвэл

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{8} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

болох ба $n\to\infty$ үеийн хязгаар авч нийлбэрийг олбол: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$ байна.

1.2. Нийлдэг цуваан дээрх үйлдлүүд. Цуваа нийлэх зайлшгүй нөхцөл

Теорем 1.1 Хэрвээ (1.1) цувааны эхний m ширхэг гишүүдийг хаявал

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \tag{1.4}$$

гэсэн цуваа үүснэ. Энэ цувааг (1.1) цувааны $m-$ дүгээр гишүүнээс хойшхи үлдэгдэл гэнэ.

Хэрвээ (1.1) цуваа нийлж байвал түүний дурын үлдэгдэл нь бас нийлнэ.

Теорем 1.2 Хэрвээ (1.1) цуваа нийлдэг бөгөөд түүний нийлбэр нь S бол дурын төгсгөлөг C тооны хувьд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C\cdot a_n \tag{1.5}$$

цуваа нийлэх ба нийлбэр нь $C\cdot S$ байна.

Теорем 1.3 Хэрвээ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ба $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ цуваанууд нийлдэг бөгөөд нийлбэр нь харгалзан S ба $\bar{S}$ бол

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \tag{1.6}$$

цуваа мөн нийлэх ба нийлбэр нь $S \pm \bar{S}$ байна.

Теорем 1.4 Хэрвээ (1.1) цуваа нийлж байвал

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{1.7}$$

байна. Өөрөөр хэлбэл, нийлдэг цуваны ерөнхий гишүүн a_n нь $n \to \infty$ үед тэг рүү тэмүүлнэ. Энэ теоремоос $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ байхад $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ цуваа нийлнэ гэж хэлж болохгүй юм. Харин $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ бол анхны цуваа сарнина.

Жишээ 1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ цуваа нийлэх эсэхийг судалъя.

Бодолт: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$ боловч $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$ тул

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + [\ln(n+1) - \ln n]$$

байх ба

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

болж уг цуваа сарниж байна.

Жишээ 1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ гармоник цуваны нийлэлтийг судал.

Бодолт: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ боловч гармоник цуваа $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ нь сарнина.

Ерөнхий тохиолдолд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ цуваа $p > 1$ үед нийлж, $p \leq 1$ үед сарнина.

(Баталгааг 2.4. Интеграл шинж хэсэгт үзнэ үү.)

Жишээ 1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{5}{11} + \ldots$ цуваны нийлэлтийг судал.

Бодолт: Зайлшгүй нөхцлийг хангаж байгаа эсэхийг шалгахад

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3} \neq 0$$

байгаа тул уг цуваа сарнина.

1.1 ЦУВААНЫ НИЙЛЭЛТИЙГ ШИНЖИХ ШИНЖҮҮД ТЭМДЭГ ХУВЬСАХ ЦУВАА

Тодорхойлолт 2.1 Хэрвээ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ цуваны бүх гишүүн нь сөрөг биш тоонууд бол, өөрөөр хэлбэл $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$ бол түүнийг **эерэг гишүүнтэй цуваа** гэнэ.

Эерэг гишүүнтэй цуваны хэсгийн нийлбэрүүд нь өсөх тоон дарааллыг үүсгэнэ.

Теорем 2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ эерэг гишүүдтэй цуваа нийлэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний хэсгийн нийлбэрүүдийн дараалал S_n нь дээрээсээ зааглагдсан байх явдал юм.

Өөрөөр хэлбэл,

$$\exists M > 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < M$$

байна.

Эерэг гишүүнтэй цувааны хувьд биелдэг бүх чанар сөрөг гишүүнтэй цувааны хувьд мөн биелдэг. Эерэг гишүүнтэй цувааны нийлэлт, сарнилтын зарим чухал шинжүүдийг авч үзье.

2.2. Жиших шинж

Теорем 2.2*(Жиших шинж 1)* Эерэг гишүүдтэй

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2.2}$$

цуваанууд өгөгджээ. Хэрвээ (2.1) цувааны гишүүн бүр нь тодорхой нэг дугаар $N-$ээс эхлэн (2.2) цувааны ижил дугаартай гишүүн бүрээс ихгүй өөрөөр хэлбэл

$$a_n \le b_n \tag{2.3}$$

бол (2.2) цуваа нийлж байхад (2.1) нийлнэ, харин (2.1) цуваа сарниж байхад (2.2) сарнина.

Теорем 2.3*(Жиших шинж 2)* Хэрвээ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ба $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ эерэг цувааны хувьд

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C, \qquad (0 < C < +\infty) \tag{2.4}$$

хязгаар тэгээс ялгаатай төгсгөлөг оршин байдаг бол $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ цуваануудын нийлэх эсэх нь ижил байна.

Жишээ 2.1 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ цувааны нийлэлтийг жиших шинж 1-ийг ашиглан бод.

Бодолт: $\frac{n}{\geq}2$ натурал тооны хувьд $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ биелэх ба $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоник цуваа сарнина гэдгээс $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ цуваа сарнина.

Жишээ 2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ цуваа нийлэхийг батал.

Бодолт: Уг цувааг ихэсгэе.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

Тэгвэл $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ цувааны хувьд $p = \frac{3}{2} > 1$ учир нийлнэ (жишээ 1.8-г үз) гэдгээс анхны өгөгдсөн цуваа мөн нийлнэ.

Жишээ 2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}$ цувааны нийлэлтийг Жиших шинж 2-ыг ашиглан шинж.

Бодолт: Уг цувааг $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ цуваатай жишье. Энэ цуваа $q = \frac{1}{2} < 1$ хуваарьтай геометр прогресс тул нийлнэ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4 \cdot 2^n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4 - \frac{3}{2^n}} = \frac{1}{4}$$

Энэ хязгаар төгсгөлөг тоо гарч байгаа учир $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ цуваа $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ цуваатай адил нийлнэ.

Жишээ 2.4 Өгсөн $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \dots$ цувааг сарнихыг батал.

Бодолт: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \dots$ цувааг $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоник цуваатай жишье. Гармоник цуваа сарнидаг болохыг бид мэднэ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$$

Сарнидаг цуваатай жишихэд төгсгөлөг тоо гарч байгаа учир өгөгдсөн цуваа мөн сарнина.

2.3. Даламбер ба Кошийн шинж

Теорем 2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ эерэг гишүүдтэй цувааны хувьд

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \tag{2.5}$$

ба $L < 1$ бол цуваа нийлнэ, $L > 1$ бол цуваа сарнина. Мөн $L = +\infty$ бол сарнина. Харин $L = 1$ бол энэ шинжүүрээр уг цувааны нийлэх сарнихыг шинжиж болохгүй ба нэмэлт судалгаа хэрэгтэй.

Теорем 2.5 Хэрвээ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ эерэг гишүүдтэй цувааны хувьд

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \tag{2.6}$$

ба $L < 1$ бол цуваа нийлнэ, $L > 1$ бол цуваа сарнина. Мөн $L = +\infty$ бол сарнина. Харин $L = 1$ бол энэ шинжүүрээр уг цувааны нийлэх сарнихыг шинжиж болохгүй ба нэмэлт судалгаа хэрэгтэй.

Жишээ 2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ цувааны нийлэлтийг Даламберийн шинжээр шинж.

Бодолт:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e}$$

Иймд $L = \frac{2}{e} < 1$ учир өгсөн цуваа нийлнэ.

Жишээ 2.6 $\quad \dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\dfrac{7}{3^4}+\ldots+\dfrac{2n-1}{3^n}+\ldots$ цуваag нийлэхийг батал.

Бодолт:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}}:\frac{2n-1}{3^n}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(2n+1)}{3^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}<1$$

тул өгсөн цуваа нийлнэ.

Жишээ 2.7 $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ цувааны нийлэлтийг Кошийн шинжээр судал.

Бодолт:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Иймд $L=0<1$ учир уг цуваа нийлнэ.

Жишээ 2.8 $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$ цувааны нийлэлтийг судал.

Бодолт: Кошийн шинж ашиглая.

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{-(n+3)}\right]^{-\frac{n}{n+3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{n}{n+3}}=e^{-1}<1$$

L хязгаар төгсгөлөг, 1-ээс бага тоо гарч байгаа учир өгсөн цуваа нийлнэ.

2.4. Интеграл шинж

Теорем 2.6 Хэрвээ $f(x)$ функц $x\geq 1$ байхад тасралтгүй, монотон буурдаг, эерэг утгатай бол $f(n)=a_n$ ерөнхий гишүүнтэй $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ цувааны хувьд

а) өргөтгөсөн интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)dx$ интеграл нийлж байвал уг цуваа нийлнэ.

б) өргөтгөсөн интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)dx$ интеграл сарниж байвал цуваа мөн сарнина.

Жишээ 2.9 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ $p>0$ цувааны нийлэлтийг судал.

Бодолт: $\quad f(x)=\dfrac{1}{x\ln^p x}$ ба

$$\int_2^n\frac{1}{x\ln^p x}dx=\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{\ln^{p-1}x}\bigg|_2^n=\frac{1}{p-1}\cdot\left(\frac{1}{\ln^{p-1}2}-\frac{1}{\ln^{p-1}n}\right)$$

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{2}^{n} \frac{1}{x \ln^p x} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} \cdot \dfrac{1}{\ln^{p-1} 2}, & p > 1 \\ \infty, & p \leq 1 \end{cases}$$

Иймд $p > 1$ байхад өгсөн цуваа нийлнэ, $p \leq 1$ байхад өгсөн цуваа сарнина гэж гарч байна.

Жишээ 2.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ цувааны нийлэлт, сарнилтыг тогтоо.

Бодолт: $p \neq 1$ байх үед

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

болно. Харин $p = 1$ үед

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x \bigg|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty$$

Иймээс уг цуваа $p > 1$ байхад нийлж, $p \leq 1$ байхад сарнина.

2.5. Абсолют нийлдэг цуваа

Ерөнхий тохиолдолд цувааны гишүүдийн тэмдэг хувьсан өөрчлөгдөж байвал түүнийг **тэмдэг хувьсах цуваа** гэнэ.

Тодорхойлолт 2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (2.7) гэсэн тэмдэг хувьсах цувааны хувьд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2.8}$$

сөрөг биш гишүүнтэй цуваа нийлдэг бол (2.7) цуваа нийлэх ба түүнийг **абсолют нийлдэг цуваа** гэнэ.

Тодорхойлолт 2.3 Хэрвээ (2.8) цуваа сарних боловч $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ өөрөө нийлдэг бол уг цувааг **нөхцөлт нийлдэг цуваа** гэнэ.

Тэмдэг хувьсах цувааны тухайн нэг тохиолдол бол тэмдэг ээлжлэх цуваа юм.

Тодорхойлолт 2.4 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$ хэлбэрийн цувааг **тэмдэг ээлжлэх цуваа** гэнэ. Энд $a_n \geq 0$, $\frac{n}{\in} N$ байна.

Теорем 2.7 *(Лейбницийн шинж)* Хэрвээ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ тэмдэг ээлжлэх цувааны хувьд:

а) $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

нөхцлүүд биелж байвал уг цуваа нийлнэ.

Жишээ 2.11 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$ цуваа нь абсолют нийлэхийг батал.

Бодолт: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ болно. Энэ нь $q = \frac{1}{2} < 1$ хуваарьтай геометр прогресс учраас нийлнэ. Иймээс уг цуваа нь абсолют нийлдэг цуваа мөн.

Жишээ 2.12 $\frac{1}{1\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 4^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot(n+1)^2} - \ldots$ цувааны нийлэлтийг судал.

Бодолт: Энэ цуваа нь Лейбницийн шинжээр нийлнэ. Учир нь

1) $\frac{1}{1\cdot 2^2} > \frac{1}{2\cdot 3^2} > \frac{1}{3\cdot 4^2} > \ldots > \frac{1}{n\cdot(n+1)^2} > \ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 0$ нөхцлүүдийг хангаж байгаа учир теорем 2.7 ёсоор цуваа нийлнэ.