

ЛЕКЦ 13. Иррациональ болон Тригонометрийн
функцийг интегралчлах.

Багш С. Уранчимэг

2021 он

- ① Иррациональ функцийг интегралчлах.
- ② Иррациональ функцийг интегралчлах Эйлерийн орлуулга.
- ③ Бином дифференциалыг интегралчлах.
- ④ Тригонометрийн функцийг интегралчлах.

Язгуур доорх олон гишүүнтийг (нэг эсвэл олон) агуулсан алгебрийн функцийг иррациональ функц гэнэ. Иррациональ функцийг интегралчлахдаа тохирох орлуулгаар рациональ-чилна.

1. $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ агуулсан интеграл.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \implies t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \implies x = \frac{td-b}{a-tc} \implies dx = \frac{ad-bc}{(a-tc)^2} dt$$

Жишээ (1.)

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$$

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \quad x = \frac{1}{t^2+1} \\ dx = -\frac{2tdt}{(t^2+1)^2} \end{array} \right| = - \int \frac{2t^2}{t^2+1} dt$$

$$= -2 \int \left(\frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = -2 \int dt + 2 \int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= -2t + 2\operatorname{arctg}(t) + C = 2 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} - \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) + C$$

Жишээ (2.)

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{ax+b}} dx$$

2. $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ агуулсан интеграл

$\sqrt{a^2 - x^2}$ хувьд $x = a \sin \theta$ орлуулна.

$\sqrt{a^2 + x^2}$ хувьд $x = a \operatorname{tg} \theta$ орлуулна.

$\sqrt{x^2 - a^2}$ хувьд $x = \frac{a}{\cos \theta}$ орлуулна.

3. $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx$ хэлбэртэй интеграл

$$\frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx - \left(\frac{Mp}{2} - N \right) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$$

$$= M\sqrt{x^2 + px + q} - \left(\frac{Mp}{2} - N \right) \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{2x + p}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + px + q \\ dt = (2x + p)dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C$$
$$= 2\sqrt{x^2 + px + q} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} =$$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

$$t = x + \frac{p}{2} \quad dt = dx \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$$

$$x^2 + px + q = t^2 + a^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + a^2}}$$

4. $\int \frac{dx}{(px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ хэлбэртэй интеграл.

$$t = \frac{1}{px + q}$$

орлуулна.

5. $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ иррациональ функцийг агуулсан рациональ илэрхийлэлийг интегралчлах Эйлерийн орлуулга.

$$a > 0 \text{ бол } t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}$$

$$c > 0 \text{ бол } t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x} \pm \frac{\sqrt{c}}{x}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ бол } t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1}$$

Тодорхойлолт

$$x^m(ax^n + b)^p dx$$

илэрхийлэлийг бином дифференциал гэнэ. Энд, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
 $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Хэрэв

$$p, \frac{m+1}{n}, p + \frac{m+1}{n}$$

ядаж нэг нь бүхэл тоо бол

$$\int x^m(ax^n + b)^p dx \tag{1}$$

интегралыг бодно.

Тохирох орлуулгаар (1) рациональ функцийн интегралруу хувирна.

1. $p \in \mathbb{Z}$ бол

$$x^n = t$$

2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ бол

$$ax^n + b = t^s \quad p = \frac{q}{s}$$

3. $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ бол

$$a + bx^{-n} = t^s \quad p = \frac{q}{s}$$

$R(\cos x, \sin x)$ илэрхийлэлийг интегралчлах универсал орлуулга.

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg}(t) \implies dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Хэрэв $\sin x$ сондгой зэрэгтэй байвал: $t = \cos x$

Хэрэв $\cos x$ сондгой зэрэгтэй байвал: $t = \sin x$

Хэрэв $\sin x, \cos x$ хоёул тэгш зэрэгтэй байвал: $t = \operatorname{tg} x$

Хэрэв $R(\sin x) \cos x dx$ байвал: $t = \sin x$

Хэрэв $R(\cos x) \sin x dx$ байвал: $t = \cos x$

Хэрэв илэрхийлэлд

$$\cos mx \cdot \sin nx, \cos mx \cdot \cos nx, \sin mx \cdot \sin nx$$

байвал интегралчлахдаа:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\cos mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x - \sin(m-n)x]$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = -\frac{1}{2} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$$