S.MT102 МАТЕМАТИК-II

ХИЧЭЭЛИЙН ЛЕКЦ-1

- **Тоон цувааны үндсэн ойлголт, түүний нийлбэр**
- **Цуваа нийлэх шинжүүрүүд**
- **Тэмдэг сөөлжлөх цуваа, түүний нийлэлт, абсолют ба нөхцөлт нийлэлт**

Тоон цувааны үндсэн ойлголт, түүний нийлбэр

Төгсгөлгүй цуваа ба түүний нийлбэрийн тухай ухагдахуун нь математик анализын үндсэн ойлголтын нэг бөгөөд онолын болон практик хэрэглээний ач холбогдолтой юм. Функцийн утгыг бодох, тодорхой интеграл болон дифференциал тэгшитгэл бодох бодох зэрэгт цувааг ашиглаж болно.

Тодорхойлолт 0.1 $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ тоон дараалал байг. Энэ дарааллын гишүүдийг нэмэх тэмдгээр холбосон

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

илэрхийллийг **тоон цуваа** гэнэ.

Тоон цуваа бүрийн хувьд **хэсгийн нийлбэрүүдийг дараах маягаар тодорхойлно.**

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

Хэрэв

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2}$$

гэсэн төгсгөлөг хязгаар оршин байвал (1) цувааг **нийлдэг** цуваа, (2) хязгаарыг энэ цувааны **нийлбэр** гэх ба

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

гэж тэмдэглэдэг. Хэрэв (2) гэсэн төгсгөлөг хязгаар оршихгүй байвал (1) цуваа **сарнина** хэмээн нэрлэнэ.

Жишээ 0.1

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \cdots$$

цуваа сарнина.

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + 2 = 3 \\
S_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\
&\vdots \\
S_n &= \sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Энэ хэсгийн нийлбэрүүдийн дараалал нь төгсгөлөг хязгаартай биш учраас өгөгдсөн цуваа сарниж байна.

Жишээ 0.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

цувааны нийлэх эсэхийг тогтоо.

Бодолт: Энэ цувааны гишүүн нь $a_1 = 1$ эхний гишүүнтэй $q = \dfrac{1}{2}$ хуваарьтай геометрийн прогресс үүсгэж байгаа учир $n-$р хэсгийн нийлбэр

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

болно.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$$

Иймд энэ цуваа нийлэх бөгөөд нийлбэр нь $S = 2$ өөрөөр хэлбэл

$$2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Жишээ 0.3

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$$

мөн нийлдэг цуваа юм. Үнэхээр энэ цувааны гишүүд нь геометр прогресс үүсгэх учир өмнөх жишээтэй адилаар хэсгийн нийлбэрийн хязгаарыг олж болно.

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right];$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ тул } \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$$

болох нь харагдаж байна. Өгөгдсөн цуваа $S = \dfrac{3}{4}$ үрүү нийлж байна.

Жишээ 0.4 Гишүүд нь мөн геометрийн прогресс үүсгэх

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

цуваа сарнидаг цуваа юм.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \lim_{n\to\infty} (2^{n+1} - 1) = +\infty$$

Жишээ 0.5

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + \cdots$$

цуваа сарнина. Үнэхээр хэсгийн нийлбэрүүдийг олбол

$$\begin{aligned} S_1 &= -1 \\ S_2 &= -1 + 1 = 0 \\ S_3 &= -1 + 1 - 1 = -1 \\ S_4 &= -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Эндээс харвал энэ дарааллын гишүүд нь -1 ба 0 тоонууд ээлжлэн гарах учраас хязгаар оршихгүй. Иймд энэ цуваа сарниж байна.

Геометр цуваа

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots \tag{3}$$

хэлбэрийн цувааг **геометр цуваа** гэнэ. Хэрэв $x = 1$ бол (3) цуваа нь

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1^k = 1 + 1 + 1 + \cdots$$

байх ба энэ цуваа сарних нь илэрхий. Хэрэв $x \neq 1$ бол (3) цувааны $n-$р хэсгийн нийлбэр нь

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} \qquad x \neq 1 \tag{4}$$

Хэрэв $|x| < 1$ бол $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ учир

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

буюу энэ үед (3) цуваа нийлж байна. Хэрэв $|x| > 1$ бол $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1}$ хязгаар төгсгөлөг биш учир (3) цуваа сарнина. $x = -1$ үед (3) цуваа сарних нь өмнөх жишээн дээрх цуваатай адилаар харагдана. Энэ бүхнээс дүгнээд дараах теоремыг томъёолж болно.

Теорем 0.1

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$$

геометр цуваа

i $|x| < 1$ үед $\dfrac{1}{1-x}$ рүү нийлнэ.

ii $|x| \geq 1$ үед сарнина.

Цуваа нийлэх зайлшгүй нөхцөл

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

цуваа нийлдэг ба нийлбэр нь S байг. Энэ цувааны ерөнхий гишүүнийг

$$a_k = S_k - S_{k-1}$$

хэлбэрт бичиж болох ба

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S.$$

Эндээс

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

болно. Ийнхүү нийлдэг цуваа бүр дараах нөхцлийг заавал хангана.

Теорем 0.2 (**Зайлшгүй нөхцөл.**) Хэрэв $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа нийлдэг бол $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

САНАМЖ 1. Энэ теорем нь нийлдэг цуваа бүрийн ерөнхий гишүүн a_k нь $k \to \infty$ үед тэг хязгаартай байхыг хэлж байна. Харин ерөнхий гишүүн нь тэг үрүү тэмүүлдэг боловч сарних цуваа байж болно. Өөрөөр хэлбэл өмнөх зайлшгүй нөхцөл нь цуваа нийлэх хүрэлцээтэй нөхцөл болж чадахгүй. Энэ нөхцөлийг хангахгүй цуваа бүр сарних нь ойлгомжтой.

Жишээ 0.6 (**Гармоник цуваа**)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

цувааг **гармоник цуваа** гэнэ.

Бодолт:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

Гэвч энэ цуваа сарнидаг болохыг цуваа нийлэх интеграл шинжийг ашиглан харуулж болно. Гармоник цувааны ерөнхий гишүүн нь тэг үрүү тэмүүлдэг боловч нийлдэггүй цуваа нь жишээ юм.

Жишээ 0.7 $\displaystyle\sum_{k\to 1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+k}$ цувааны сарних нь ерөнхий гишүүний хязгаарыг олсноор шийдвэрлэгдэнэ.

Бодолт:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = 1$$

Энэ хязгаар нь тэг биш учир **Санамж 1** ёсоор өгөгдсөн цуваа сарнина.

Нийлдэг цувааны чанарууд.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ба $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ цуваанууд нийлдэг бөгөөд c тогтмол тоо бол

i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c\, \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

ii $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$

тэнцэтгэлүүд биелнэ. Эхний чанар нь нийлдэг цувааны гишүүн бүрийг тогтмол c тоогоор үржүүлэхэд үүссэн гишүүдтэй цуваа нийлэх бөгөөд нийлбэр нь анхны нийлдэг цувааны нийлбэрийг c тоогоор үржүүлсэнтэй тэнцүү байхыг, дараах нь нийлдэг цуваануудын харгалзсан гишүүдийг нэмэх замаар үүсгэсэн цуваа нийлэх ба нийлбэр нь анхны цуваануудын нийлбэрүүдийн нийлбэртэй тэнцүү байхыг тус тус зааж байна.

САНАМЖ 2. Өмнөх чанарууд нь зөвхөн нийлдэг цуваануудын хувьд хүчинтэй байна. Нийлдэг ба сарнидаг цуваануудыг гишүүнчлэн нэмэхэд (харгалзсан гишүүдийг нэмэхэд) сарнидаг цуваа үүснэ.

Жишээ 0.8

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 5 \cdot 3^k}{4^k} = 6 + \frac{17}{4} + \frac{49}{16} + \frac{143}{64} + \cdots$$

цувааны нийлбэрийг ол.

Бодолт: (i) ба (ii) чанаруудыг ашиглан энэ цувааны нийлбэрийг олж болно.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 5 \cdot 3^k}{4^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k}{4^k} + \frac{5 \cdot 3^k}{4^k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{4^k} + 5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + 5 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^k \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + 5 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 2 + 5 \cdot 4 = 22\end{aligned}$$

Цуваа нийлэх шинжүүрүүд

Бид геометр цуваануудын нийлэх эсэхийг шийдвэрлэсэнээс гадна нийлдэг тоон цувааны нийлбэрийг олж чадах билээ.Гэвч бусад нийлдэг цуваануудын нийлбэрийг бодож олох нь тэр бүр амаргүйгээр барахгүй цувааны нийлэх, эсэхийг тогтоох асуудал хялбар биш байдаг. Энэ зүйлд эерэг гишүүдтэй цувааны нийлэх эсэхийг тогтоодог дараах дөрвөн шинжийг авч үзнэ.

Интеграл шинж

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ эерэг гишүүдтэй цуваа байг. Тэгвэл түүний $a_1, a_2, a_3, \cdots$ гишүүдийг харгалзан $a_1, a_1, a_3, \cdots$ өндрүүдтэй, нэгж сууриутай тэгш өнцөгтийн талбай гэж үзэж болно. (Зураг 11.1)

$$f(k) = a_k,\ k = 1, 2, \cdots$$

байх $y = f(x)$ тасралтгүй бөгөөд буурах функцийн графикийг мөн зураг дээр дүрсэлжээ.Эхний n тэгш өнцөгтийн талбайн нийлбэр $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ нь $y = f(x)$ функцийн график ба Ox тэнхлэгийн $x = 0$ ба $x = n$ цэгүүдийн хоорондох хэсгээр хязгаарлагдах муруй шугаман трапецын талбайгаас бага болохыг зураг харуулж байна.

Өөрөөр хэлбэл

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < \int_{0}^{n} f(x)dx \tag{5}$$

энэ тэнцэтгэл бишийн баруун гар талын интеграл нь $n \to \infty$ үед $\int_0^n f(x)dx$ өргөтгөсөн интеграл болно. (5) тэнцэтгэл бишийн зүүн гар тал нь $\sum_{k=1}^{n} a_k$ цувааны хэсгийн нийлбэр учир $\int_0^\infty f(x)dx$ өргөтгөсөн интеграл нийлж байвал $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа мөн нийлнэ. $a_1, a_1, a_3, \cdots$ гишүүдтэй тэгш өнцөгтийн талбайгаар дүрсэлсэн өөр нэг дүрслэл болон $y = f(x)$ функцийн графикийг зураг 11.2 дээр дүрслэв. Энд дээр дүрсэлснээс үзвэл эхний n тэгш өнцөгтийн талбайн нийлбэр буюу $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ цувааны n-р хэсгийн нийлбэр нь $y = f(x)$ буурах функцийн график ба Ox тэнхлэгийн $x = 1$ ба $x = n$ цэгүүдийн хоорондох тэгш өнцөгт трапецын талбайгаас их байна.

Өөрөөр хэлбэл

$$\int_{1}^{n+1} f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n \tag{6}$$

энэ тэнцэтгэл бишээс үзвэл $\int_1^\infty f(x)dx$ өргөтгөсөн интеграл сарних бол $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа мөн сарниж байна.

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

өргөтгөсөн интегралуудын нийлэх эсэх нь адилхан байх нь илэрхий тул дээрх хоёр тохиолдлыг нэгтгэн дүгнэвэл дараах интеграл шинж гарна.

Теорем 0.3 Хэрэв $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа эерэг гишүүдтэй бөгөөд $f(x)$ тасралтгүй, буурах функц ба $f(k) = a_k,\ k = 1, 2, \cdots$ нөхцлийг хангах бол $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа зөвхөн $\int_1^\infty f(x)dx$ интеграл нийлж байх үед л нийлнэ.

Өөрөөр хэлбэл, энэ цуваа болон өргөтгөсөн интеграл нийлнэ эсвэл хоёулаа сарнина.

Жишээ 0.9

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

гармоник цувааны нийлэх эсэхийг тогтоо.

Бодолт: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ цувааны нийлэх эсэхийг интеграл шинж ашиглан тогтоохын тулд $f(k) = a_k$ нөхцлийг хангах $f(x)$ гэсэн тасралтгүй, буурах функцийг (цувааны ерөнхйи гишүүний $k-$г $x-$ээр сольж) олох ёстой. Гармоник цувааны ерөнхий гишүүн нь $\frac{1}{k}$ учир $f(x) = \frac{1}{x}$ байна.

Энэ функц нь $[1, +\infty[$ завсар дээр тасралтгүй бөгөөд буурах функц байна.

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x}dx =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} (\ln b)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty$$

Өргөтгөсөн интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ сарниж байгаа учир

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

гармоник цуваа сарнидаг цуваа байна.

Жишээ 0.10

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$$

цуваа нийлнэ гэдгийг интеграл шинжийг ашиглан хялбархан тогтоож болно.

Бодолт: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цувааны нийлэх эсэхийг интеграл шинж ашиглан тогтоохын тулд $f(k) = a_k$ нөхцлийг хангах $f(x)$ гэсэн тасралтгүй, буурах функцийг (цувааны ерөнхйи гишүүний $k-$г $x-$ээр сольж) олох ёстой. Энэ цувааны ерөнхий гишүүн нь $\frac{1}{k^3}$ учир $f(x) = \frac{1}{x^3}$ байна. Энэ функц нь $[1, +\infty[$ завсар дээр тасралтгүй бөгөөд буурах функц байна.

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Өргөтгөсөн интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ нийлж байна. Нөгөө талаас $f(k) = \frac{1}{k^3}$ нөхцөл биелэх тул

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$$

цуваа нийлэх цуваа байна.

Жишээ 0.11 (Өргөтгөсөн гармоник цуваа)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots, \quad p > 0$$

цуваaг **өргөтгөсөн гармоник цуваа** гэнэ. Энэ цувааны нийлэх эсэхийг тогтоо.

Бодолт: $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $p > 0$ функц $[1, +\infty]$ завсар дээр тасралтгүй, буурах функц учир

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

өргөтгөсөн интегралын нийлэх, эсэхтэй өргөтгөсөн гармоник цуваагы нийлэх, эсэх нь адилхан байна.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{1-p}\right]\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right)$$

Энэ хязгаар нь b-ийн зэргийн илтгэгч $1-p$ сөрөг байх үед буюу $1-p<0$ тохиолдолд төгсгөлөг, $1-p>0$ тохиолдолд ∞ болно. Ийнхүү

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

өргөтгөсөн гармоник цуваа зөвхөн $p>1$ үед нийлж байна.

Даламберийн шинж

Эерэг гишүүдтэй цуваа нийлэх эсэхийг зөвхөн гишүүдийн төлөв байдал дээр үндэслэн тогтоодог дараах нэг хүрэлцээтэй нөхцлийг авч үзье.

Теорем 0.4 (Даламберийн шинж)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

эерэг гишүүдтэй цувааны хувьд

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = p$$

гэсэн төгсгөлөг хязгаар оршин байвал

(i) $p<1$ үед $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа нийлнэ.

(ii) $p>1$ үед $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа сарнина.

(iii) $p=1$ үед $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цувааны нийлэх эсэх талаар дүгнэлт өгч чадахгүй.

Жишээ 0.12

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

цувааны нийлэх эсэхийг тогтоо.

Бодолт: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ цувааны ерөнхий гишүүн нь

$$a_k = \frac{1}{k!} \text{ учир } a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \text{ болно.}$$

$$\begin{aligned} p &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)!} : \frac{1}{k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}{(k+1)k(k-1)\cdots 2\cdot 1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1 \end{aligned}$$

учир Даламберийн шинжүүр ёсоор $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ цуваа нийлнэ.

Жишээ 0.13

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$$

цувааны нийлэх эсэхийг тогтоо.

Бодолт: Өгөгдсөн цуваанд Даламберийн шинжийг хэрэглэвэл

$$a_k = \frac{2^k}{k} \text{ учир } a_{k+1} = \frac{2^{k+1}}{k+1}$$

$$\begin{aligned} p &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{k+1} : \frac{2^k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{k+1} : \frac{k}{2^k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{k+1} = 2 \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 2 > 1 \end{aligned}$$

учир $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$ цуваа сарнина.

Жишээ 0.14

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3}{k^3}$$

цувааны нийлэлтыг судал.

Бодолт: Өгөгдсөн цуваанд Даламберийн шинжийг хэрэглэвэл

$$\begin{aligned} p &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2+3}{(k+1)^3} \frac{k^3}{k^2+3} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{[(k+1)^2+3]k^3}{k^5}}{\frac{(k+1)^3(k^2+3)}{k^5}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{3}{k^2}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^3 \left(1+\frac{3}{k^2}\right)} = 1 \end{aligned}$$

$p = 1$ тул энэ шинжээр энэ цувааны нийлэх, эсэх талаар дүгнэлт өгч чадахгүй. Энэ цуваа нь сарнидаг болохыг дараах жиших шинжээр тогтоож болно.

Жиших шинж 1 ба 2

Эерэг гишүүдтэй цуваа нийлэх, эсэхийг тогтоохдоо нийлэх эсэх нь мэдэгдэж байгаа өөр цуваатай (эерэг гишүүдтэй) харьцуулж тогтоох боломжийг харуулсан дараах хоёр шинжийг авч үзье.

Теорем 0.5 (Жиших шинж 1) Хэрэв

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ , \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

эерэг гишүүдтэй цуваанууд бөгөөд k $(k = 1, 2, ...)$ бүрийн хувьд $0 \leq a_k \leq b_k$ нөхцөл биелэж байгаа үед

(i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ цуваа нийлдэг бол $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа нийлнэ.

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа сарниж байвал $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ цуваа сарнина.

Өөрөөр хэлбэл, эерэг гишүүдтэй цувааны гишүүн бүр нь ямар нэг нийлдэг цувааны харгалзсан гишүүнээс бага бол энэ цуваа нийлнэ, хэрэв цувааны гишүүн бүр нь ямар нэг сарнидаг цувааны (эерэг гишүүдтэй) харгалзсан гишүүнээс их бол цуваа сарнина. Энэ теоремын баталгааг хийхгүйгээр баталгааны санааг зураг 11.3 дээр тулгуурлан тайлбарлая. Хэрэв $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ цуваа нийлдэг бол түүний $b_1, b_2, \cdots$, гишүүдтэй тэнцүү талбайтай тэгш өнцөгтүүдийн талбайн нийлбэр нь төгсгөлөг байна. Энэ үед $a_1, a_2, \cdots$, талбайнуудтай тэгш өнцөгтүүдийн талбайн нийлбэр мөн төгсгөлөг байна. Өөрөөр хэлбэл $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа нийлнэ. Хэрэв $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа сарнидаг бол $a_1, a_2, \cdots$, өндөртэй тэгш өнцөгтүүдийн талбайнуудын нийлбэр төгсгөлөг биш байна. Энэ үед $b_1, b_2, \cdots$, өндрүүдтэй тэгш өнцөгтүүдийн талбайн нийлбэр мөн төгсгөлөг биш байх нь зуран 11.3-аас харагдаж байна.

Жишээ 0.15

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3}{k^3}$$

цувааны нийлэх эсэхийг тогтоо.

Бодолт:

$$b_k = \frac{k^2+3}{k^3} = \frac{k^2}{k^3} + \frac{3}{k^3} > \frac{1}{k}, \; k = 1, 2, ...$$

$a_k = \dfrac{1}{k}$ ерөнхий гишүүнтэй цуваа нь гармоник цуваа байна. Энэ цуваа сарнидаг болохыг бид тогтоосон. Тэгвэл гармоник цувааны харгалзсан гишүүдээс их гишүүдтэй $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2+3}{k^3}$ цуваа жиших шинж 1-ээр сарнина.

Жишээ 0.16 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2+k^2}$ цуваag $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ гэсэн нийлдэг өргөтгөсөн гармоник цуваатай жишвэл $\dfrac{1}{1+k^2} < \dfrac{1}{k^2}$ учраас уул цуваа мөн нийлнэ.

Зарим цуваануудын нийлэх эсэхийг дараах шинжийг ашиглан тодорхойлж болно.

Теорем 0.6 (Жиших шинж 2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ба } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

эерэг гишүүдтэй цуваанууд байг. Хэрэв

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

гэсэн тэгээс ялгаатай төгсгөлөг хязгаар $q \neq 0$ оршин байвал $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ба $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ цуваануудын нийлэх эсэх нь адилхан байна.

Өөрөөх хэлбэл, эерэг гишүүдтэй хоёр цувааны ерөнхий гишүүдийн харьцаа нь эерэг хязгаартай бол, эсвэл цуваа хоёулаа нийлдэг, эсвэл хоёр цуваа хоёулаа сарнидаг байх нь.

Жишээ 0.17

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k^2+3}$$

цувааны нийлэх эсэхийг тогтоо.

Бодолт: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ гармоник цуваag сонгон дараах хязгаарыг бодож гаргая.

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k^2+1} : \frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2k^2+1} = \frac{1}{2}$$

$q = \frac{1}{2} > 0$ учир жиших шинж 2-оор $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k^2+3}$ цуваа сарнина.

Тэмдэг сөөлжлөх цуваа, абсолют ба нөхцөлт нийлэл

Бидний өмнө авч үзсэн шинжүүд нь эерэг гишүүдтэй цуваанд хэрэглэдэг билээ. Эерэг болон сөрөг гишүүдтэй цувааны нийлэлтийг тогтоох асуудал гарч ирдэг. Дараах хоёр тохиолдолд сөрөг гишүүдтэй цувааны нийлэлтийг эерэг гишүүдтэй цувааны нийлэлт үрүү шилжүүлэн тогтоож болно гэдэг нь цуваа нийлэх тодорхойлолтоос төвөггүй харагдана.

a Бүх гишүүд нь сөрөг $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $(a_k < 0)$ цуваа, зөвхөн $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ цуваа нийлэх үед л нийлнэ.

b $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа төгсгөлөг тооны сөрөг гишүүдийг агуулсан бол эдгээр гишүүдийг оролцуулаад эхний N гишүүдийг орхиход үүсэх $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k$ цуваа нийлэх зөвхөн тэр үед л нийлнэ.

Эндээс үзвэл төгсгөлгүй тооны эерэг болон төгсгөлгүй тооны сөрөг гишүүдийг агуулсан цуваа сонирхолтой юм. Ийм цувааны жишээ нь тэмдэг сөөлжлөх цуваа юм.

Тэмдэг сөөлжлөх цуваа

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots, \ a_k > \ (k = 1, 2, ...)$$

энэ цувааг тэмдэг сөөлжлөх цуваа гэнэ. Дараах теорем нь тэмдэг сөөлжлөх цуваа нийлэх хүрэлцээтэй нөхцлийг өгч байна.

Теорем 0.7 (Лейбницийн шинж) Тэмдэг сөөлжлөх

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k, \ a_k > 0$$

цуваа нь

(i) Бүх $k = 1, 2, ...$-ийн хувьд $a_k > a_{k+1}$

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

нөхцлүүдийг хангаж байвал нийлнэ.

Жишээ 0.18 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ тэмдэг сөөлжлөх гармоник цуваа нийлэх цуваа юм. Үнэхээр

$$a_k = \frac{1}{k}; \ a_{k+1} = \frac{1}{k+1}; \quad \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1};$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

буюу манай цуваа өмнөх теоремын нөхцлийг хангах учир нийлнэ.Энэ цувааны нийлбэр 1-ээс бага байх нь ойлгомжтой.

Жишээ 0.19 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\phi}{\sqrt{k}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$
цуваа нийлдэг болохыг өмнөх жишээтэй адилаар хялбар үзүүлж болно. Харин энэ цувааны нийлбэр нь -1-ээс багагүй сөрөг тоо байна.

абсолют ба нөхцөлт нийлэл

Абсолют нийлдэг цувааны ойлголт нь зарим цувааны нийлэлтийг тогтоох боломж олгохоос гадна ийм цувааны гишүүдийн байрыг сэлгэх замаар шинэ цуваа үүсгэвэл эдгээр цувааны нийлбэр нь ижилхэн байх зэрэг чухал чанаруудтай.

Тодорхойлолт 0.2 Хэрэв $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ цуваа нийлдэг бол $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ цувааг **абсолют нийлдэг цуваа** гэнэ. Өөрөөр хэлбэл гишүүдийнх нь абсолют хэмжигдэхүүнээс зохиосон эерэг гишүүдтэй цуваа нийлдэг бол $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ цуваа абсолют нийлдэг цуваа гэнэ.

Жишээ 0.20 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\cdots$
цуваа ямарч бодит тоо $x-$ийн хувьд абсолют нийлдгийг үзүүл.
Бодолт: Өгөгдсөн цувааны гишүүдийн абсолют хэмжигдэхүүнүүдээс зохиосон

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin kx|}{k^2}=|\sin x|+\frac{|\sin 2x|}{2^2}+\frac{|\sin 3x|}{3^2}+\cdots$$

цувааг өргөтгөсөн гармоник цуваатай жишье.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

Бүх k $(k=1,2,...)-$ийн хувьд

$$\frac{|\sin kx|}{k^2}\leq\frac{1}{k^2}$$

учир жиших шинж 1 ёсоор

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin kx|}{k^2}$$

цуваа нийлнэ. ө.х

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}$$

цуваа бодит x бүрийн хувьд абсолют нийлдэг цуваа юм.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ цуваа абсолют нийлдэг цуваа байг. Энэ цувааны S_k хэсгийн нийлбэр дэх эерэг гишүүдийн нийлбэрийг S'_k, сөрөг гишүүдийн абсолют хэмжигдэхүүнүүдийн нийлбэрийг S''_k гэвэл

$$S_k=S'_k-S''_k \tag{7}$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ цуваа эхний k гишүүдийн нийлбэрийг S^*_k гэж тэмдэглэвэл

$$S^*_k=S'_k+S''_k$$

болно. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ цуваа нийлэх тул

$$S^*=\lim_{k\to\infty}S^*_k$$

гэсэн төгсгөлөг хязгаар оршин байна.$\{S_k^*\}, \{S_k'\}, \{S_k''\}$ дараалалууд монотон өсөх дараалллууд учир

$$S_k^* \leq S^*, \ S_k' \leq S^*, \ S_k'' \leq S^*$$

тэнцэтгэл хүчинтэй байна. Иймд $\{S_k''\}, \{S_k''\}$ дарааллууд төгсгөлөг хязгаартай. Тэгвэл $\{S_k\}$ дараалал төгсгөлөг хязгаартай болох нь 7 тэнцэтгэлээс харагдаж байна. Эндээс абсолют нийлдэг цуваа бүр нийлдэг цуваа байна гэсэн дараах дүгнэлт гарч ирнэ.

Теорем 0.8 Хэрэв $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ цуваа нийлдэг бол $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа нийлнэ.

Энэ теоремыг ашиглан сөрөг гишүүдтэй зарим цувааны нийлэлтийг абсолют хэмжигдэхүүнүүдээс зохиосон цувааны нийлэлтийг тогтоосны үндсэн дээр шийдвэрлэж болох нь. Өөрөөр хэлбэл, абсолют нийлдэг цуваа бүр нийлдэг байна. Харин абсолют нийлдэггүй цуваанууд дотор нийлдэг ч цуваа байдаг, харин бүх сарнидаг цуваанууд байх нь илэрхий. Жишээлбэл тэмдэг сөөлжлөх гармоник цуваа

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

нийлдэг болохыг өмнө харуулсан. Энэ цувааны гишүүдийн абсолют хэмжигдэхүүнүүдийн цуваа нь гармоник цуваа нь гармоник цуваа учир сарнина. Иймхүү тэмдэг сөөлжлөх гармоник цуваа нь абсолют нийлдэггүй бөгөөд нийлдэг цуваа байна. Ийм чанартай буюу $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ цуваа сарнидаг бөгөөд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ цуваа нийлдэг бол энэ цувааг **абсолют биш нийлдэг**, эсвэл нөхцөлт нийлдэг цуваа гэнэ.

Жишээ 0.21

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - \cdots$$

цуваа абсолют нийлдэггүй цуваа болно. Үнэхээр,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k+1}| = 1 + 1 + 1 + \cdots$$

цуваа сарних тул энэ өргөтгөсөн цуваа абсолют нийлдэггүй цуваа юм. Өгөгдсөн цуваа сарнидаг болохыг бид мэднэ.

Жишээ 0.22

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k^2}{(k+1)!}$$

цуваа абсолют нийлэхийг харуул.

Бодолт:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} k^2}{(k+1)!} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)!}$$

цуваанд Даламберийн шинжийг хэрэглэвэл

$$\begin{aligned} p &= \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(k+2)!} \frac{(k+1)!}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{(k+2)!} \frac{(k+1)^2}{k^2} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+2} \left(\frac{k+1}{k} \right)^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+2} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

$p = 0 < 1$ учраас

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} k^2}{(k+1)!} \right|$$

цуваа нийлнэ. Иймд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k^2}{(k+1)!}$$

цуваа авсолют нийлж байна.