ЛЕКЦ 7. Хавтгай дахь шулууны тэгшитгэл, түүний төрлүүд. Хавтгай дахь шулууны харилцан байршил. Цэгээс шулуун хүртлэх зай олох. Огторгуй дахь хавтгай ба шулууны тэгшитгэлүүд, тэдгээрийн харилцан байршил. Цэгээс огторгуй дахь хавтгай хүртэлх зай, цэгээс огторгуй дахь шулуун хүртлэх зай олох.

Багш С. Уранчимэг

2021 он

1. Хавтгай дахь шулууны тэгшитгэл, түүний төрлүүд.
2. Хавтгай дахь шулууны харилцан байршил.
3. Цэгээс шулуун хүртлэх зай олох.
4. Огторгуй дахь хавтгай ба шулууны тэгшитгэлүүд, тэдгээрийн харилцан байршил.
5. Цэгээс хавтгай хүртэлх зай олох.
6. Цэгээс огторгуй дахь шулуун хүртлэх зай олох.

$\mathbb{R}^2$-д L шугам,

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

хоёр хувьсагчийн функц өгөгдсөн гэе.

Тодорхойлолт

L шугамын цэг бүр (1) тэгшитгэлийг хангадаг, харин энэ шугам дээр оршдоггүй цэгийн координат (1)-ийн шийд биш байвал (1)-ийг L шугамын тэгшитгэл гэнэ.

Жишээ (1.)

$(0, 0)$ цэг дээр төвтэй, 2 радиустай тойргийн тэгшитгэл бич. Тойрог дээр орших $\forall M(x, y)$ цэг авъя.

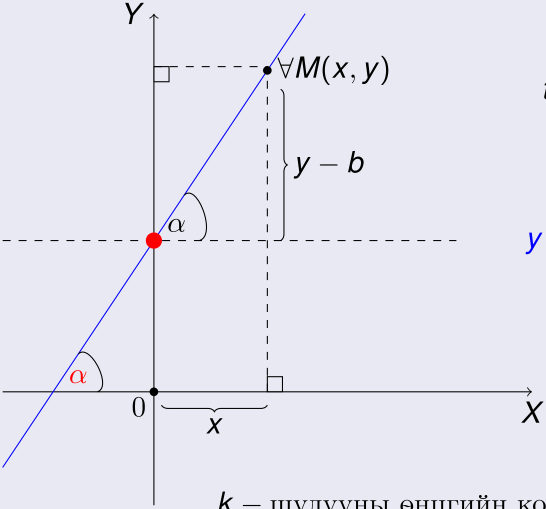
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2 \implies x^2 + y^2 = 4$$

$\mathbb{R}^2$-д

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

шугаман тэгшитгэл бүр ℓ шулуун дүрслэнэ. Мөн шулуун бүр хоёр хувьсагчийн шугаман тэгшитгэлээр тодорхойлогдоно.

1. Өнцгийн коэффициенттэй шулууны тэгшитгэл.



$$tg\alpha = \frac{y-b}{x}$$

$$k = tg\alpha$$

$$y = k \cdot x + b$$

k – шулууны өнцгийн коэффициент

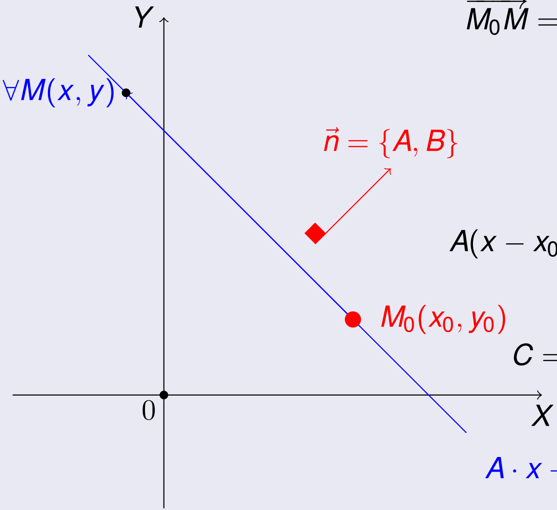
Тодорхойлолт

Өгөгдсөн шулуунд $\perp$ векторыг уг шулууны нормал буюу $\vec{n}$ вектор гэнэ.

Тодорхойлолт

Өгөгдсөн шулуунд $\parallel$ векторыг уг шулууны чиглүүлэгч буюу $\vec{s}$ вектор гэнэ.

2. Шулууны ерөнхий тэгшитгэл.



$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

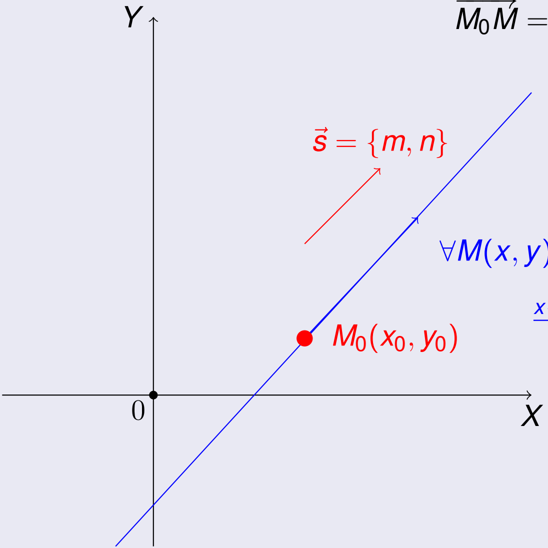
$$\Updownarrow$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$C = -Ax_0 - By_0$$

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

3. Шулууны хялбар тэгшитгэл.



$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$

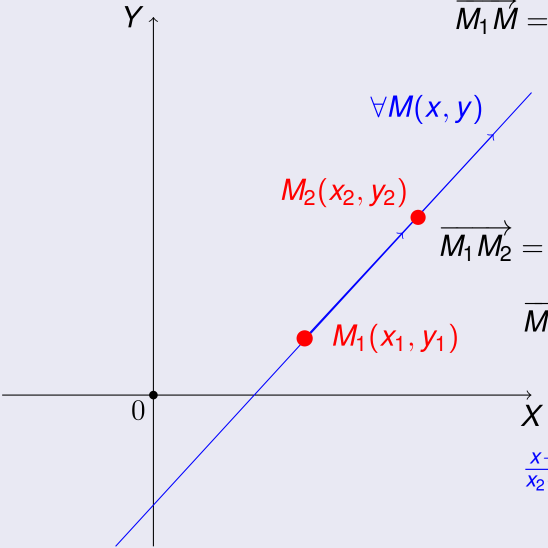
$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\forall M(x, y) \quad \Updownarrow$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

4. Хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэл.

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$$



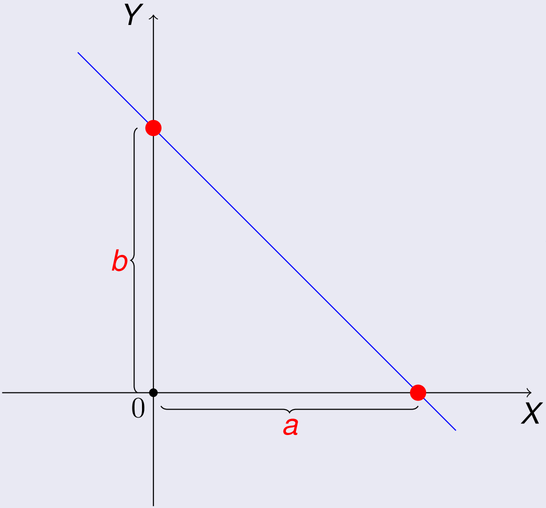
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

5. Шулууны хэрчимт тэгшитгэл.



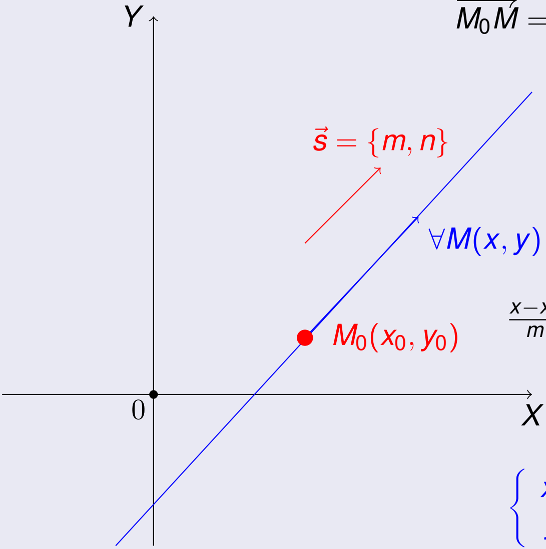
$(a, 0)$

$(0, b)$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Хавтгай дахь шулууны тэгшитгэл, түүний төрлүүд.

6. Шулууны t параметрт тэгшитгэл.



$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t$$

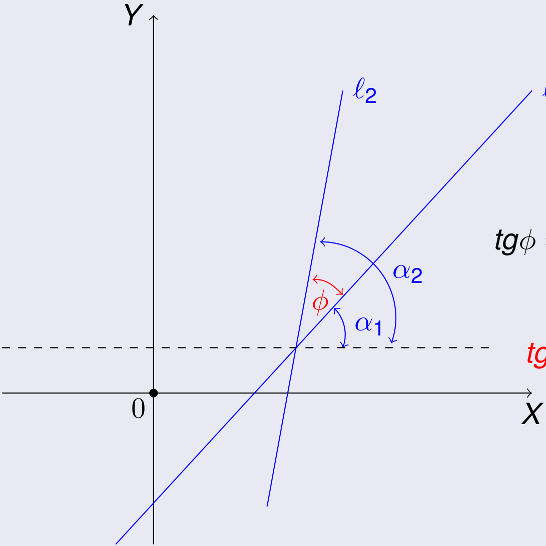
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

Хоёр шулуун $\nparallel$ бол огтлолцлын цэг нь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

системийн шийд байна.

Өнцгийн коэффициенттэй тэгшитгэлээр өгөгдсөн ℓ_1, ℓ_2 шулуунуудын харилцан байршлыг тогтооё.
$\ell_1 : y = k_1x + b_1$
$\ell_2 : y = k_2x + b_2$



$$tg\phi = tg(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$tg\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

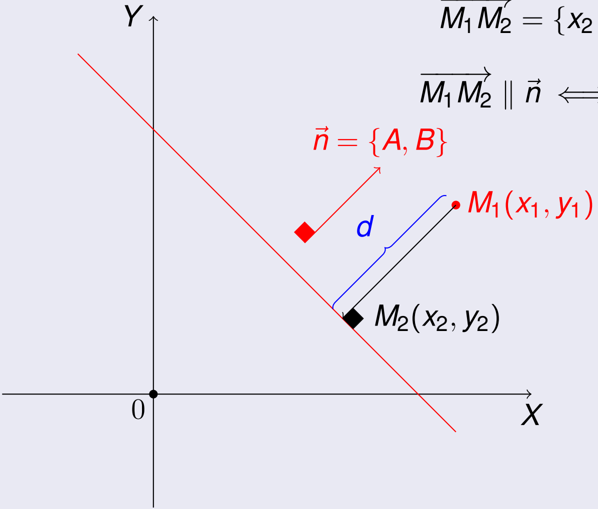
Хэрэв $\ell_1 \parallel \ell_2 \iff \mathrm{k}_1 = k_2$

$$\ell_1 \perp \ell_2 \iff \mathrm{k}_1 \cdot k_2 = -1$$

$Ax + By + C = 0$ шулуунаас $M_1(x_1, y_1)$ цэг хүртэлх зайг ол.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{n} \iff \frac{x_2-x_1}{A} = \frac{y_2-y_1}{B}$$



Цэгээс шулуун хүртлэх зай олох.

$\frac{x_2-x_1}{A} = \frac{y_2-y_1}{B} = t \implies \begin{cases} x_2 = x_1 + At \\ y_2 = y_1 + Bt \end{cases}$

M_2 шулууны цэг тул

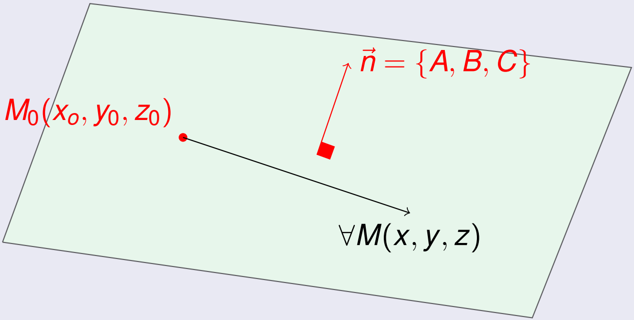
$$0 = Ax_2 + By_2 + C = A(x_1 + At) + B(y_1 + Bt) + C$$

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}$$

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_1 + At - x_1)^2 + (y_1 + Bt - y_1)^2} = |t|\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

1. Хавтгайн ерөнхий тэгшитгэл.



$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

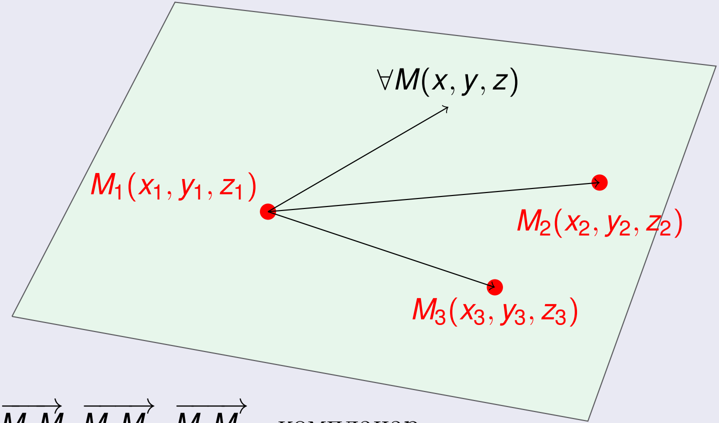
$$\vec{n} = \{A, B, C\}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \iff A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

2. Гурван цэгийг дайрсан хавтгайн тэгшитгэл.



$\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланар

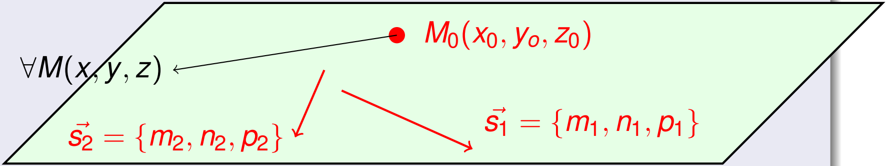
$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Өгөгдсөн цэгийг дайрсан, өгөгдсөн векторуудтай $\parallel$ хавтгайн тэгшитгэл.

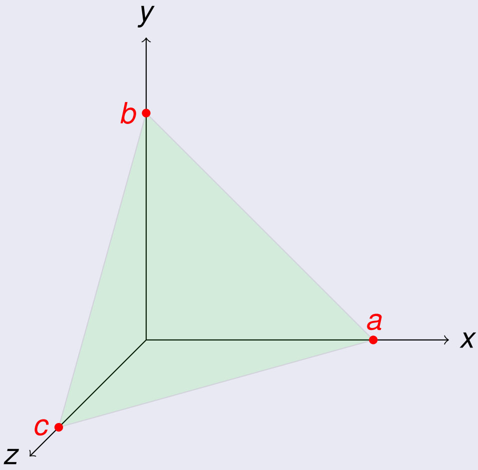


$$\vec{s_1},\ \vec{s_2},\ \overrightarrow{M_0M} \quad \text{компланар}$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

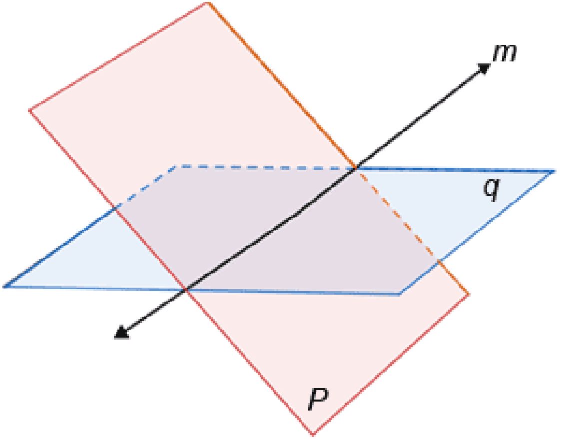
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

4. Хавтгайн хэрчимт тэгшитгэл.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Хавтгайнуудын харилцан байршил.



$$q : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \implies \vec{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$$

$$P : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \implies \vec{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$$

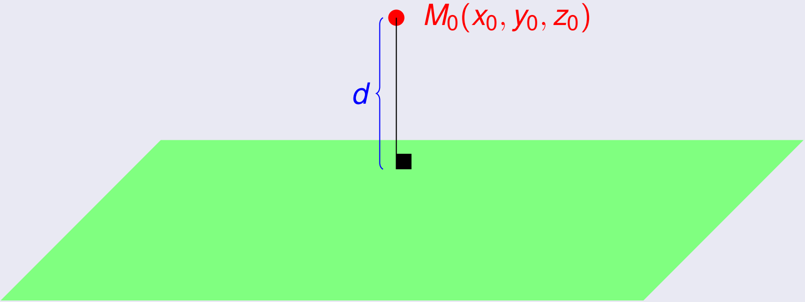
$$q \,\widehat{}\, P = \vec{n_1} \,\widehat{}\, \vec{n_2} = \phi$$

$$\cos\phi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$q \parallel P \quad \text{бол} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

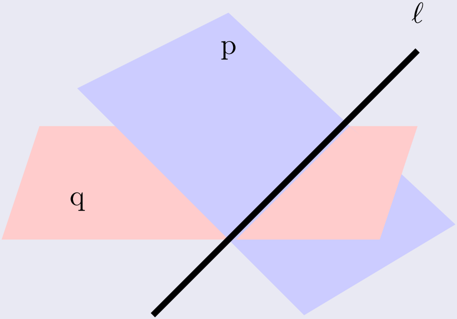
$$q \perp P \quad \text{бол} \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ цэгээс $Ax + By + Cz + D = 0$ хавтгай хүртэлх зайг ол.



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1. $\mathbb{R}^3$ дахь шулууны ерөнхий тэгшитгэл.



$$q : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$P : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\ell : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

ℓ шулууны чиглүүлэгч вектор

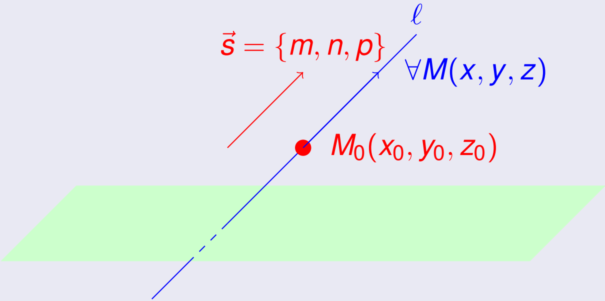
$$\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$$

Энд,

$$\vec{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$$

$$\vec{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$$

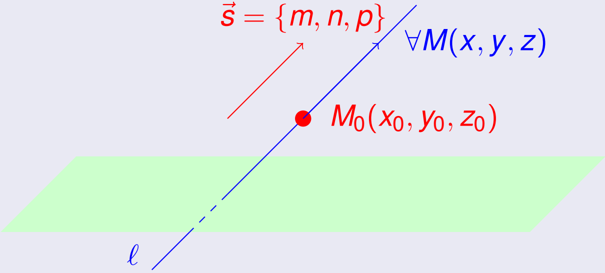
2. $\mathbb{R}^3$ дахь өгөгдсөн цэгийг дайрсан, $\vec{s} \parallel \ell$ шулууны тэгшитгэл.



$$\vec{s} \parallel \overrightarrow{M_0M}, \qquad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

3. $\mathbb{R}^3$ дахь шулууны параметрт тэгшитгэл.

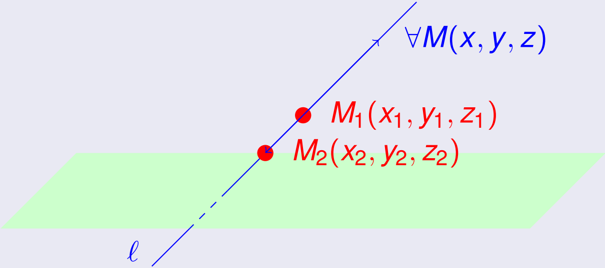


$$\vec{s} \parallel \overrightarrow{M_0M}, \qquad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

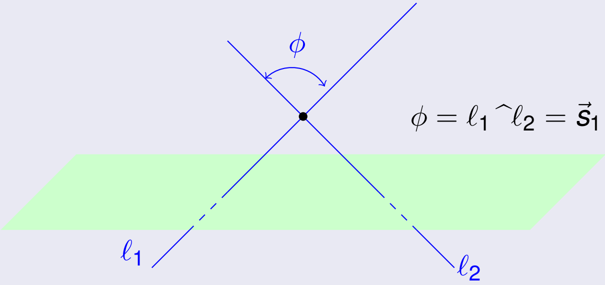
4. $\mathbb{R}^3$ дахь хоёр цэгийг дайрсан шулууны тэгшитгэл.



$$\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}, \qquad \overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$



$$\phi = \ell_1 \widehat{\ } \ell_2 = \vec{s}_1 \widehat{\ } \vec{s}_2$$

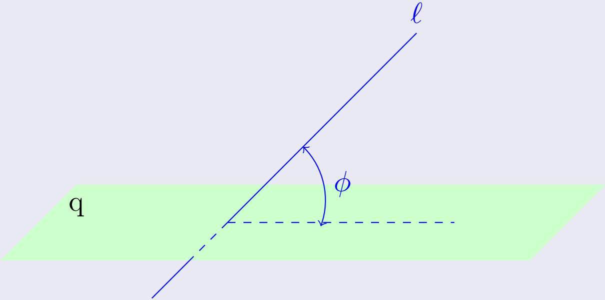
$$\ell_1 : \quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \implies \vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$$

$$\ell_2 : \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \implies \vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$$

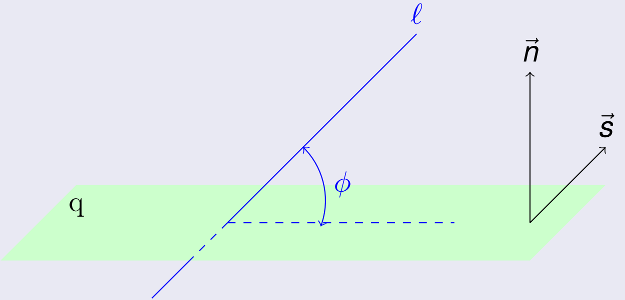
$$\cos\phi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Тодорхойлолт

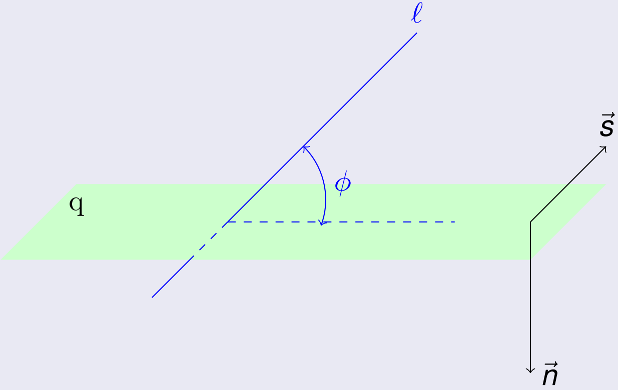
Шулууны хавтгай дээрх проекцтэйгээ үүсгэх өнцгийг шулуун, хавтгайн хоорондох өнцөг гэнэ.



$$q: \; Ax + By + Cz + D = 0 \implies \vec{n} = \{A, B, C\}$$
$$\ell: \; \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \implies \vec{s} = \{m, n, p\}$$



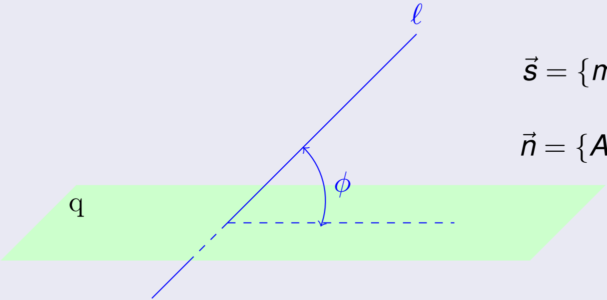
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi = \frac{(\vec{s}, \vec{n})}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$$



$$\cos(\frac{\pi}{2}+\phi) = -\sin\phi = \frac{(\vec{s},\vec{n})}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}$$

Тодорхойлолт

Шулууны хавтгай дээрх проекцтэйгээ үүсгэх өнцгийг шулуун, хавтгайн хоорондох өнцөг гэнэ.



$$\vec{s} = \{m, n, p\}$$

$$\vec{n} = \{A, B, C\}$$

$$\sin\phi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$