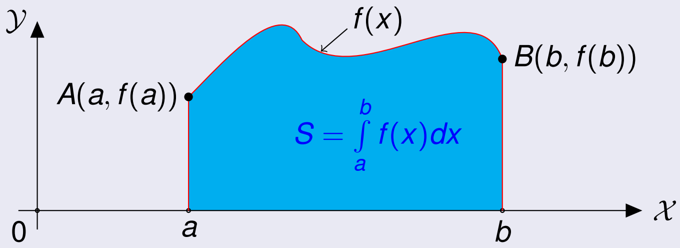
ЛЕКЦ 16. Тодорхой интегралын геометр ба физик хэрэглээ

Багш С. Уранчимэг

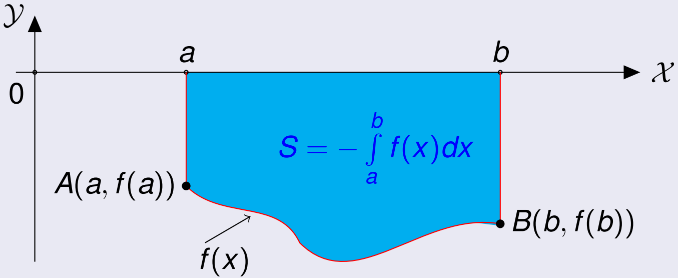
2021 он

1. Тодорхой интегралын геометр хэрэглээ.
   - Муруй шугаман трапецийн талбай олох
   - Нумын урт олох
   - Биеийн эзлэхүүн олох
   - Эргэлтийн биеийн эзлэхүүн олох
   - Эргэлтийн биеийн гадаргуугийн талбай олох
2. Тодорхой интегралын физик хэрэглээ.
   - Масс олох
   - Хүндийн төв олох
   - Инерцийн момент олох

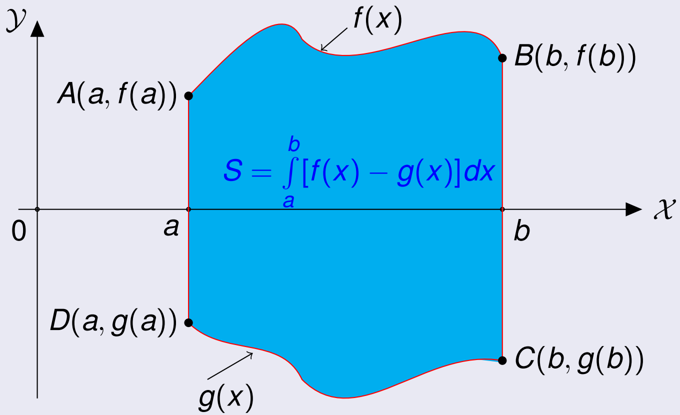
Тодорхой интегралын геометр утга нь муруй шугаман трапецийн талбай юм.



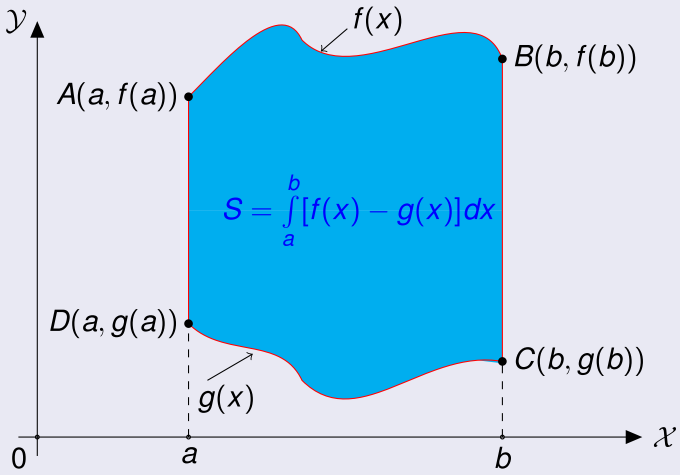
Тодорхой интегралын геометр утга нь муруй шугаман трапецийн талбай юм.



Тодорхой интегралын геометр утга нь $ABCD$ муруй шугаман трапецийн талбай юм.

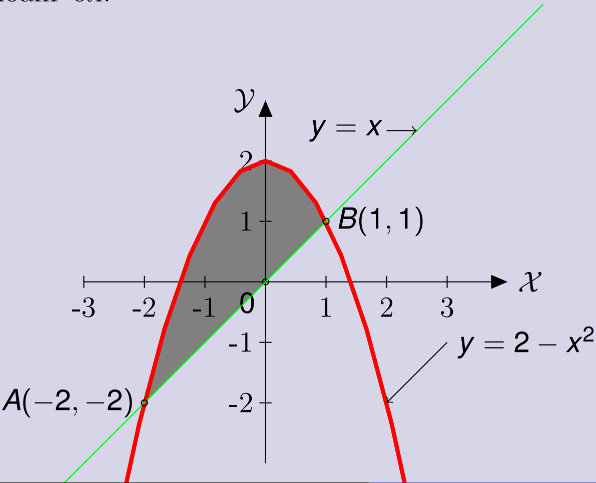


Тодорхой интегралын геометр утга нь $ABCD$ муруй шугаман трапецийн талбай юм.



Жишээ (1.)

$y = x,\ y = 2 - x^2$ муруйнуудаар хүрээлэгдсэн дүрсийн талбайг ол.



Жишээ (1.)

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 4.5$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

t параметрт тэгшитгэлтэй муруй шугаман трапецийн талбайг олъё.

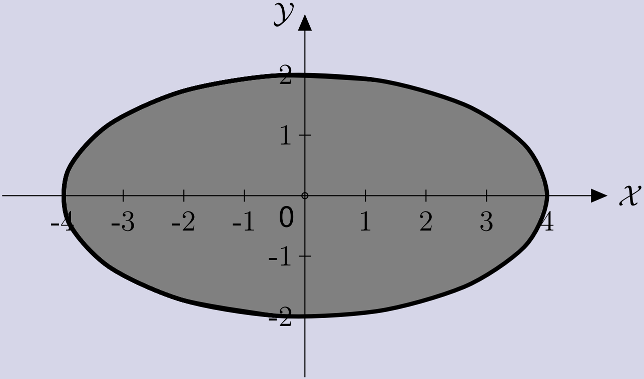
$$S = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$$

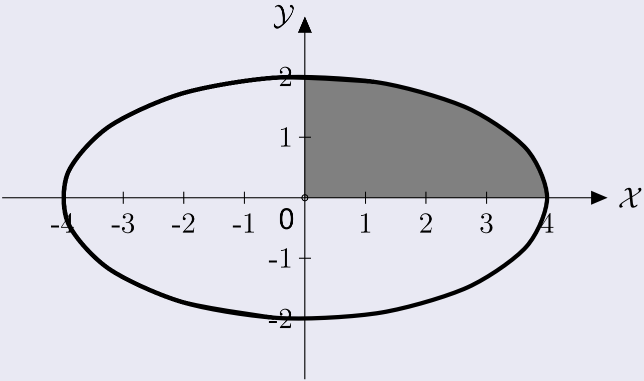
энд, $a = \varphi(\alpha),\ b = \psi(\beta)$

Жишээ (2.)

$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

дүрсийн талбайг ол.





$$S = 4\int_0^{\pi/2} 2sin(t)\cdot 4cos'(t)dt = 32\int_0^{\pi/2} sin^2(t)dt = 32\int_0^{\pi/2} \frac{1-cos(2t)}{2}dt =$$

$$16\int_0^{\pi/2}[1-cos(2t)]dt = 16\left(t-\frac{sin(2t)}{2}\right)_0^{\pi/2} = 8\pi$$

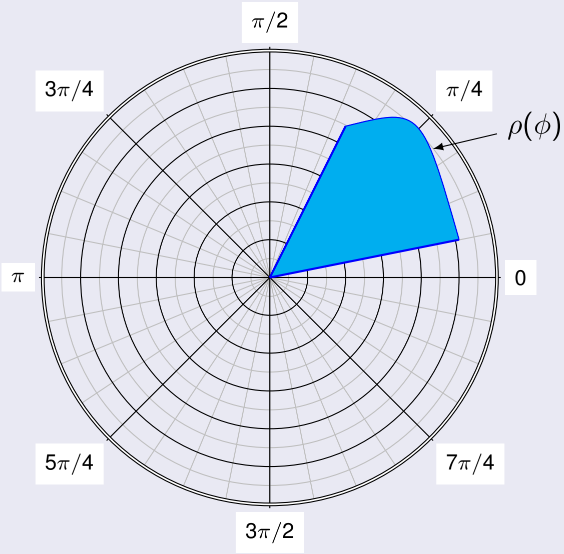
Туйлын координатын системд дүрсийн талбай олох.

$$\begin{cases} \rho = \rho(\phi) \\ \alpha \leq \phi \leq \beta \end{cases}$$

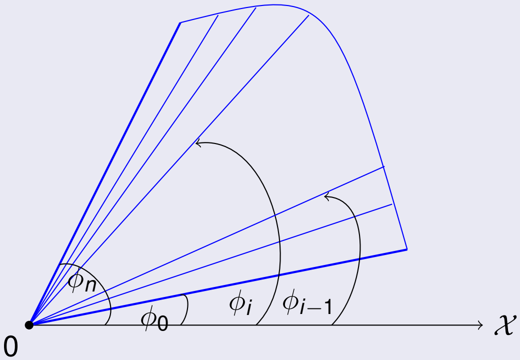
муруй болон цацрагуудаар хүрээлэгдсэн дүрсийн талбайг олъё.

$(0, 0)$ туйл.

O_x туйлын тэнхлэг.

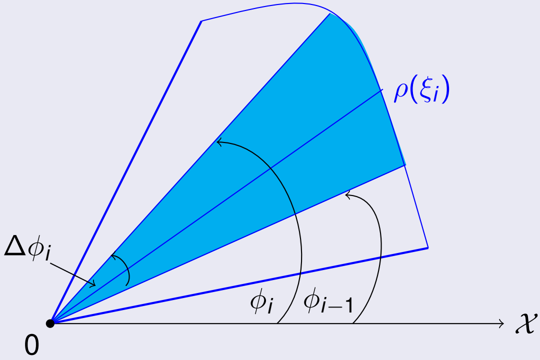

$\pi/2$
$3\pi/4$
$\pi/4$
$\rho(\phi)$
π
0
$5\pi/4$
$7\pi/4$
$3\pi/2$

Дүрсийг $\alpha = \phi_0 < \phi_1 < ... < \phi_{n-1} < \phi_n = \beta$ цацрагуудаар n хэсэгт хуваая.



$$\Delta\phi_i = \phi_i - \phi_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}$$

$\Delta\phi_i$-д харгалзах секторын талбай ΔS_i-г олъё.

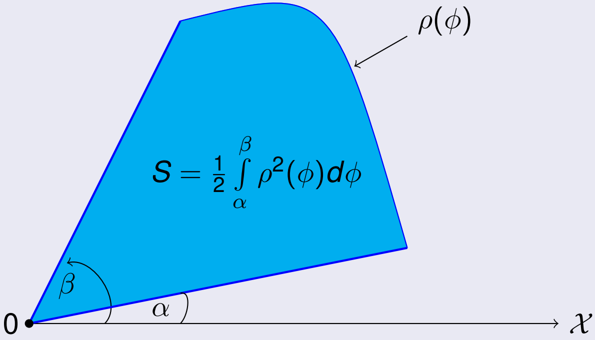


$\forall \xi_i \in \Delta\phi_i$ сонгоно.

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i) \cdot \Delta\phi_i$$

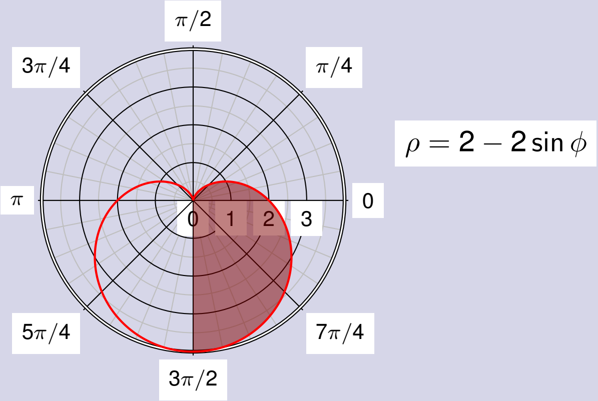
n секторын талбайн нийлбэр ойролцоогоор бидний олох дүрсийн талбайтай тэнцүү.

$$S = \lim_{\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta\phi_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\phi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi)d\phi$$



Жишээ (3.)

$\rho = 2(1 - \sin\phi)$, $0 \le \phi \le 2\pi$ кардоидын талбайг ол.



Жишээ (3.)

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi)d\phi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(2-2\sin\phi)^2 d\phi = \frac{8}{2}\int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2}(1-\sin\phi)^2 d\phi =$$

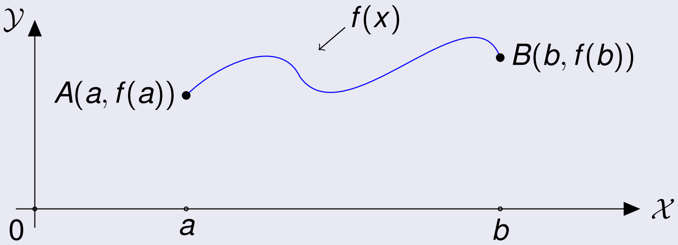
$$4\int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2}(1-2\sin\phi+\sin^2\phi)d\phi =$$

$$4\int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2} d\phi - 8\int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2}\sin\phi d\phi + 4\int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2}\frac{1-\cos(2\phi)}{2}d\phi =$$

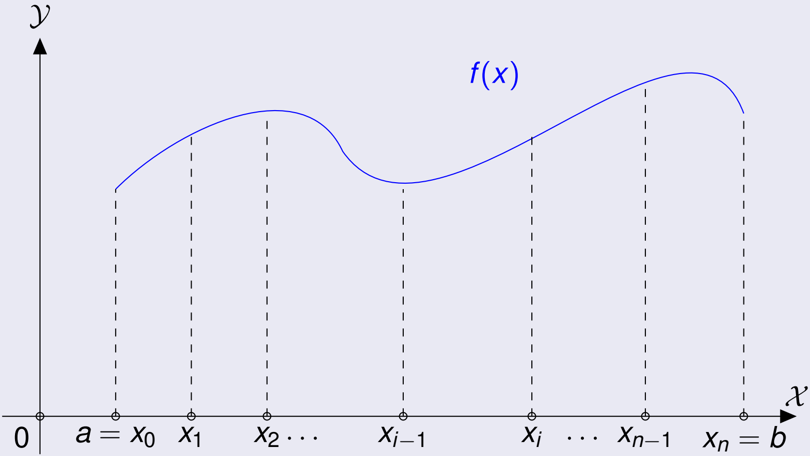
$$6\int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2} d\phi - 8\int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2}\sin\phi d\phi - 2\int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2}\cos(2\phi)d\phi =$$

$$\left(6\phi+8\cos\phi-\sin(2\phi)\right)\Big|_{3\pi/2}^{5\pi/2} = 15\pi - 9\pi = 6\pi$$

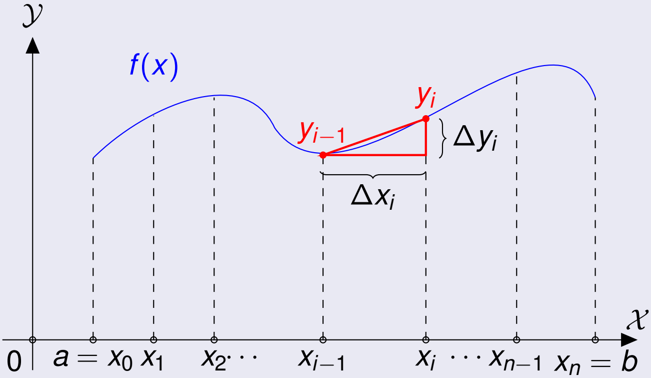
Тэгш өнцөгт координатын системд $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ тэгшитгэлтэй нумын уртыг олъё.



$[a, b]$ хэрчмийг $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ цэгүүдээр n хуваая. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1},\ \ y_i = f(x_i)$$



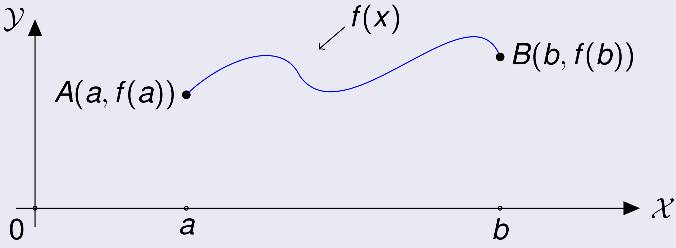
$$\widehat{y_{i-1}y_i} \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$\widehat{y_{i-1}y_i} \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$$

$$\lim_{\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Санамж: Лагранжийн теоремыг хэрэглэв.

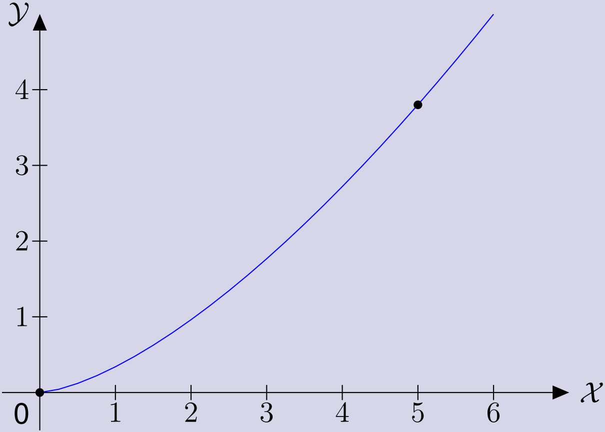
Тэгш өнцөгт координатын системд $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ тэгшитгэлтэй нумын уртыг ℓ, нумын дифференциалыг $d\ell$ гэе.



$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx, \quad d\ell = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Жишээ (4.)

$y = \frac{1}{3}\sqrt{x^3}$, $0 \le x \le 5$ нумын уртыг ол.



Жишээ (4.)

$$\ell = \int_0^5 d\ell = \int_0^5 \sqrt{1 + \left[\left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\right)'\right]^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]^2} dx =$$

$$\int_0^5 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x dx} = \left| \begin{array}{ll} t = 1 + \frac{x}{4} & t_1 = 1 \\ dt = \frac{1}{4}dx & t_2 = \frac{9}{4} \end{array} \right| = \int_1^{9/4} 4\sqrt{t}dt =$$

$$4 \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2}\Big|_1^{9/4} = \frac{8}{3}\left(\sqrt{\frac{3^6}{2^6}} - 1\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{27}{8} - 1\right) = \frac{19}{3} = 6.33$$

Хэрэв муруй

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

параметрт тэгшитгэлээр өгөгдсөн бол нумын дифферен циалыг олъё.

$$d\ell = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \implies$$

$$d\ell = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$d\ell = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

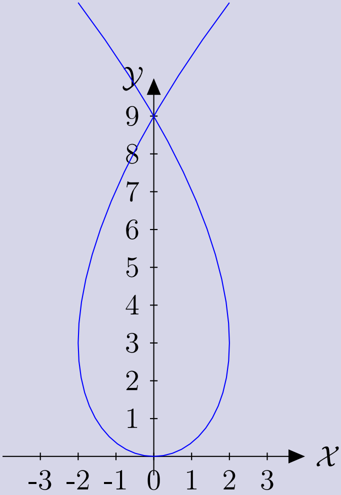
Жишээ (5.)

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = 3t^2 \\ -2 \le t \le 2 \end{cases}$$

нумын уртыг ол.

Жишээ (5.)

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = 3t^2 \\ -2 \leq t \leq 2 \end{cases}$$



Жишээ (5.)

$$d\ell = \sqrt{(t^3 - 3t)'^2 + (3t^2)'^2}dt = \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + (6t)^2}$$

$$= 3(t^2 + 1)dt$$

$$\ell = \int\limits_{-2}^{2} d\ell = 2\int\limits_{0}^{2} d\ell = 6\int\limits_{0}^{2}(t^2 + 1)dt = 6\left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_0^2 = 28$$

Хэрэв муруй туйлын координатын системд

$$\begin{cases} \rho = \rho(\theta) \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \end{cases}$$

тэгшитгэлээр өгөгдсөн бол нумын дифференциалыг олъё.

ТӨКС-ээс ТКС-д шилжих

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = \rho(\theta)\sin\theta \\ \alpha \leq \theta \leq \beta \end{cases}$$

томьёогоор

$$d\ell = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \implies$$

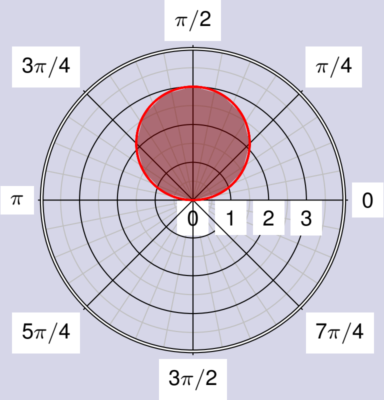
$$d\ell = \sqrt{[\rho(\theta)\cos\theta]'^2 + [\rho(\theta)\sin\theta]'^2}d\theta$$

$$= \sqrt{[\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta]^2 + [\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta]^2}d\theta$$

$$d\ell = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}d\theta$$

Жишээ (6.)

$\begin{cases} \rho = 3\sin\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$ муруйн нумын уртыг ол.



$\rho = 3\sin\theta$

Жишээ (6.)

$$d\ell = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}d\theta = \sqrt{(3\cos\theta)^2 + (3\sin\theta)^2}d\theta = 3d\theta$$

$$\ell = \int\limits_0^{\pi} d\ell = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\ell = 6\int\limits_0^{\pi/2} d\theta = 6\theta\Big|_0^{\pi/2} = 3\pi$$

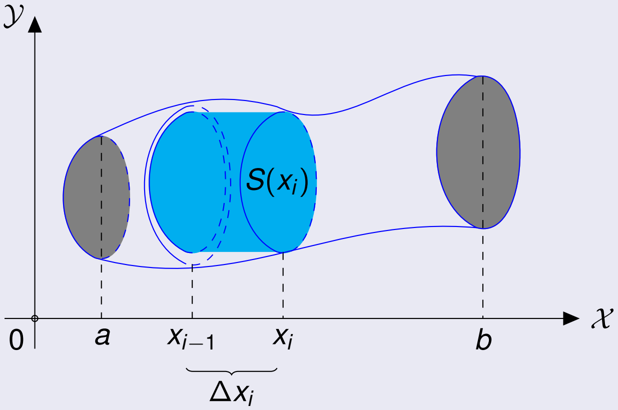
$x = a$, $x = b$ хавтгайнууд ба битүү гадаргуугаар хүрээлэгдсэн биеийн O_x тэнхлэгтэй $\perp$ хавтгай дээрх хөндлөн огтлолын талбай нь цэг бүр дээр мэдэгдэнэ гээд эзлэхүүнийг олъё.
$[a, b]$-г

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

байх цэгүүдээр n хэсэгт хуваая.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}$$

x_{i-1}, x_i цэгүүдэд харгалзах хөндлөн огтлолын талбайг харгалзан $S(x_{i-1})$, $S(x_i)$ гэе.
Δx_i -д харгалзах эзлэхүүн нь $S(x_i)$ суурьтай Δx_i өндөртэй шулуун цилиндрийн эзлэхүүнтэй ойролцоогоор тэнцүү байна.



$$V_i \approx S(x_i) \cdot \Delta x_i$$

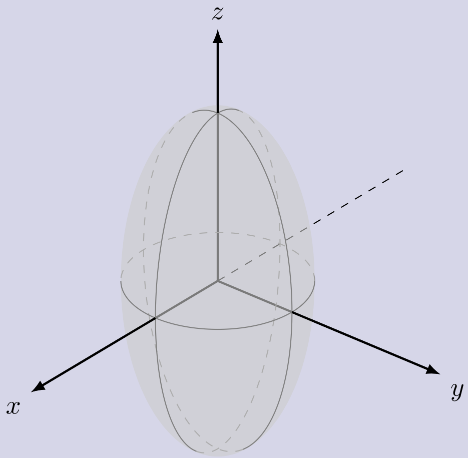
$$V = \lim_{\max\limits_{1 \le i \le n} (\Delta x_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx$$

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Энд, $S(x)$ биеийн хөндлөн огтлолын талбай.

Жишээ (7.)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсиодын эзлэхүүнийг ол.



Жишээ (7.)

Эллипсиодын хөндлөн огтлолын талбайг олъё.
O_x тэнхлэгтэй перпендикуляр хавтгай, эллипсиодын огтлолцлоор

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

эллипс үүснэ.

$$S_{\text{эл}}=\pi bc=\pi\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})$$

Жишээ (7.)

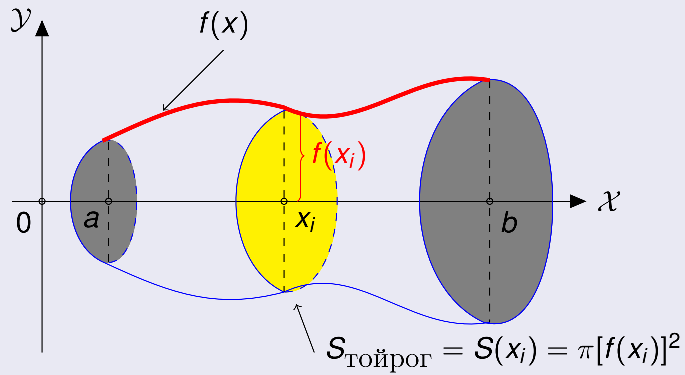
$$V = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc$$

$[a, b]$ дээр тасралтгүй $f(x)$ тэгшитгэлтэй муруй O_x тэнхлэгийг тойрон эргэхэд үүсэх эргэлтийн биеийн эзлэхүүнийг олъё.

$[a, b]$ хэрчмийг $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ цэгүүдээр n хуваая.

x_i цэгийг дайрсан O_x тэнхлэгтэй $\perp$ хавтгай, эргэлтийн бие хоёрын огтлолцол $f(x_i)$ радиустай тойрог.ө.х

Хөндлөн огтлол бүр нь тойрог байна.



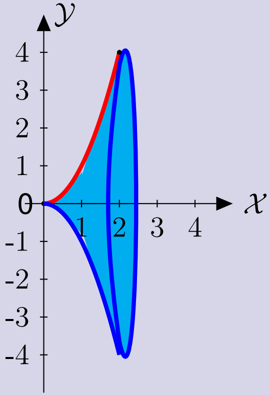
y
$f(x)$
$f(x_i)$
x
0
a
x_i
b
$S_{\text{тойрог}} = S(x_i) = \pi[f(x_i)]^2$

$$V = \lim_{\max\limits_{1 \le i \le n} (\Delta x_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Жишээ (8.)

$y = x^2, \ x \in [0, 2]$ муруй O_x тэнхлэгийг тойрон эргэхэд үүсэх эргэлтийн биеийн эзлэхүүнийг ол.

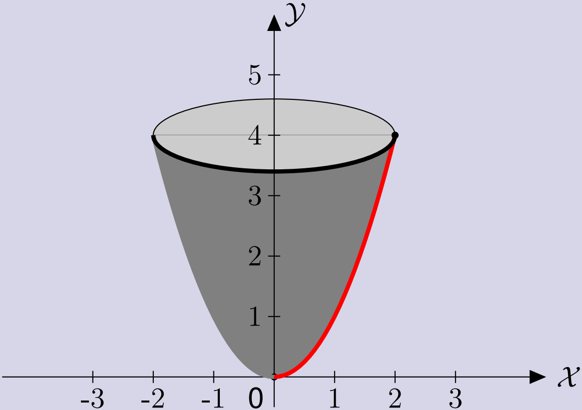


Жишээ (8.)

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^2 = \frac{2^5}{5} = 6.4;$$

Жишээ (9.)

$y = x^2, \ x \in [0, 2]$ муруй O_y тэнхлэгийг тойрон эргэхэд үүсэх эргэлтийн биеийн эзлэхүүнийг ол.



Жишээ (9.)

$$V = \pi \int_0^4 \sqrt{y}^2 dy = \pi \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^4 = \pi \frac{4^2}{2} = 8\pi;$$

$[a, b]$ дээр тасралтгүй уламжлалтай $f(x)$ функцийн график O_x тэнхлэгийг тойрон эргэхэд үүсэх эргэлтийн биеийн гадаргуугийн талбайг олъё.

$[a, b]$ хэрчмийг $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ цэгүүдээр n хуваая.

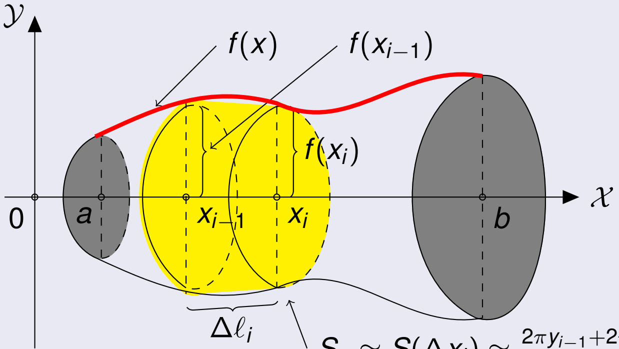
$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

хэсгийн гадаргуугийн талбай ойролцоогоор

$$y_{i-1} = f(x_{i-1}), y_i = f(x_i)$$

суурийн радиусуудтай, $\Delta\ell_i$ байгуулагчтай огтлогдсон конусын гадаргуугийн талбайтай тэнцүү байна.



$$S_\Gamma \approx S(\Delta x_i) \approx \frac{2\pi y_{i-1} + 2\pi y_i}{2} \cdot \Delta\ell_i$$

$$\Delta\ell_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$\Delta x_i \to 0 \implies \Delta\ell_i \to 0$$

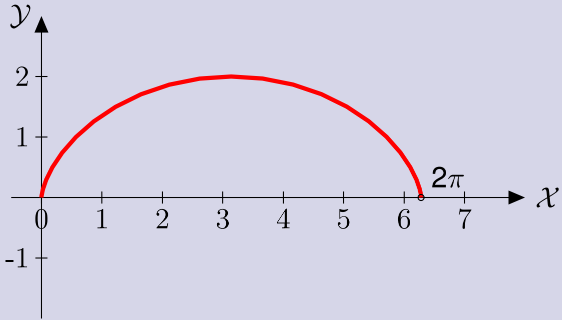
$$V = \lim_{\substack{\max\limits_{1\le i\le n} (\Delta \ell_i) \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi (y_{i-1} + y_i) \cdot \Delta \ell_i$$

$$S_\Gamma = 2\pi \int_a^b f(x) d\ell = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Жишээ (10.)

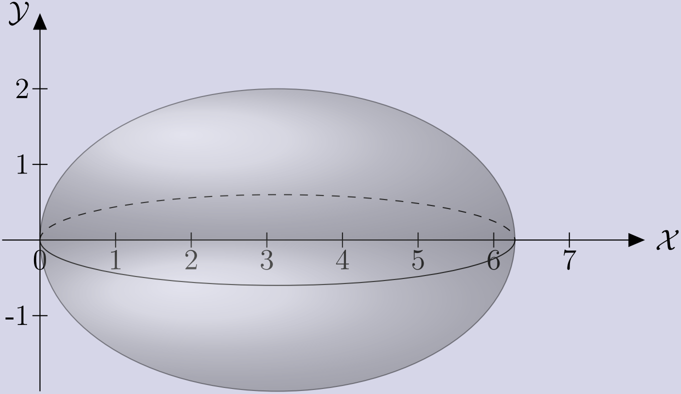
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$a = 1$ циклоидын нэг арк абцисс тэнхлэгийг тойрон эргэхэд үүсэх эргэлтийн биеийн гадаргуугийн талбайг ол.



Жишээ (10.)

Циклоидийн нэг арк 0_x тэнхлэгийг тойрон эргэхэд дараах бие үүснэ.



Жишээ (10.)

$$S_\Gamma = 2\pi \int\limits_a^b f(x) d\ell =$$

$$2\pi \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{[(t-\sin t)']^2 + [(1-\cos t)']^2} dt =$$

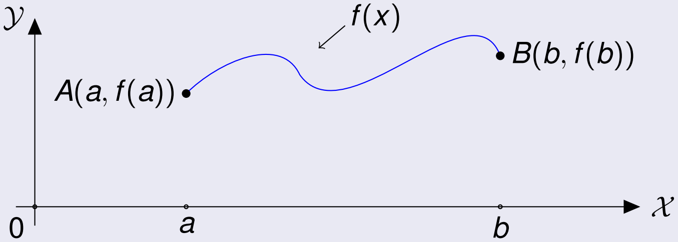
$$4\pi \int\limits_0^{\pi} (1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} dt =$$

$$4\pi \int\limits_0^{\pi} (1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t} dt = 4\sqrt{2}\pi \int\limits_0^{\pi} (1-\cos t)^{3/2} dt =$$

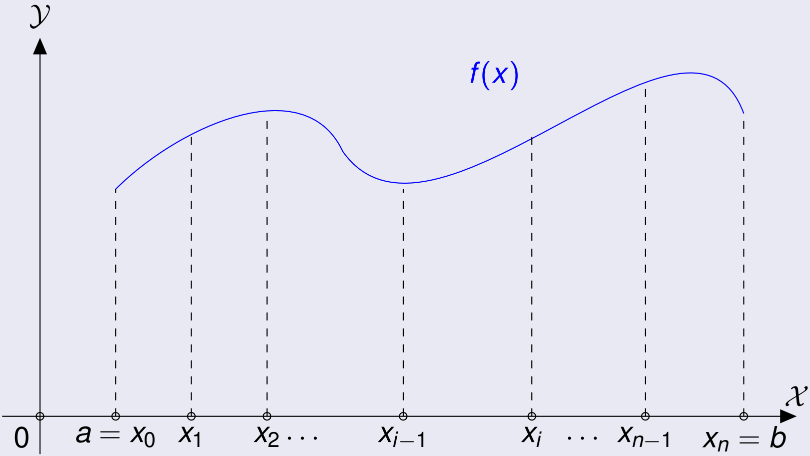
$$16\pi \int\limits_0^{\pi} (\sin \tfrac{t}{2})^3 dt = 32\pi \int\limits_0^{\pi} [(\cos \tfrac{t}{2})^2 - 1] d(\cos \tfrac{t}{2}) =$$

$$32\pi \left(\frac{(cos \frac{t}{2})^3}{3} - \cos \frac{t}{2} \right)_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi = 21.33\pi$$

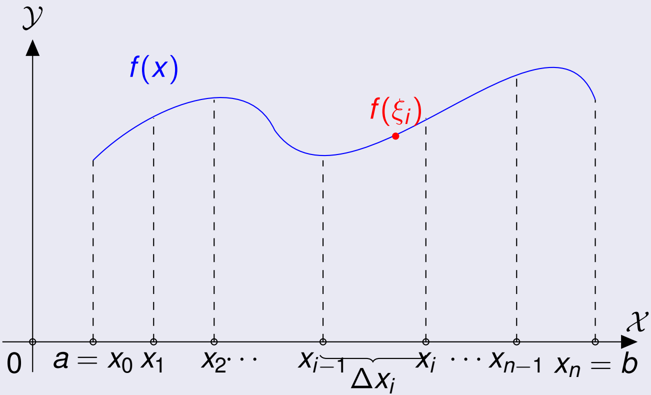
Тэгш өнцөгт координатын системд $\rho = f(x)$ тасралтгүй нягттай саваа 0_x тэнхлэгийн $[a, b]$ хэрчмийн дагуу байрласан бол савааны массыг ол.



$[a, b]$ хэрчмийг $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ цэгүүдээр n хуваая. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



$\forall \xi_i \in \Delta x_i$ авъя. Δx_i хэсэгт тогтмол $f(\xi_i)$ нягттай гээд массыг олъё.



$$m_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$m = \lim_{\max\limits_{1\leq i\leq n} (\Delta x_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$m = \int_a^b f(x)dx$$

Жишээ (11.)

Савааны массын нягт $\rho(x) = 1 + 0.1x^2$ (кг/м) бол 5м урттай савааны массыг ол.

$$m = \int_a^b f(x)dx = \int_0^5 (1 + 0.1x^2)dx = \left(x + 0.1\frac{x^3}{3}\right)_0^5 = 9.16 \text{ кг}$$

Тэгш өнцөгт координатын системд $\rho = \rho(x)$ тасралтгүй нягттай саваа 0_x тэнхлэгийн $[a, b]$ хэрчмийн дагуу байрласан бол савааны хүндийн төв $M(x_0, y_0)$-ийг ол.

$$x_0 = \frac{\int\limits_a^b x \cdot \rho(x) d\ell}{\int\limits_a^b \rho(x) d\ell}, \quad y_0 = \frac{\int\limits_a^b y \cdot \rho(x) d\ell}{\int\limits_a^b \rho(x) d\ell}$$

Тэгш өнцөгт координатын системд $f(x)$ муруй, $x = a, x = b$ шулуунуудаар хүрээлэгдсэн $[a, b]$ суурьтай муруй шугаман трапецид $\rho = \rho(x)$ тасралтгүй нягттай тархсан биеийн хүндийн төв $M(x_0, y_0)$-ийг ол.

$$x_0 = \frac{\int_a^b x \cdot \rho(x) f(x) dx}{\int_a^b \rho(x) f(x) dx}, \quad y_0 = \frac{\int_a^b y \cdot \rho(x) f(x) dx}{\int_a^b \rho(x) f(x) dx}$$

Тэгш өнцөгт координатын системд [a,b] дээр $\rho = \rho(x)$ тасралтгүй нягттай савааны $0_x, 0_y$ тэнхлэгтэй харьцуулсан инерцийн моментийг I_x, I_y-г ол.

$$I_x = \int_a^b y^2 \cdot \rho(x) d\ell, \quad I_y = \int_a^b x^2 \cdot \rho(x) d\ell$$

Тэгш өнцөгт координатын системд $f(x)$ муруй, $x = a, x = b$ шулуунуудаар хүрээлэгдсэн $[a, b]$ суурьтай муруй шугаман трапецид $\rho = \rho(x)$ тасралтгүй нягттай тархсан биеийн $0_x, 0_y$ тэнхлэгтэй харьцуулсан инерцийн моментийг I_x, I_y-г ол.

$$I_x = \int_a^b y^2 \cdot \rho(x) f(x) dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 \cdot \rho(x) f(x) dx$$

Теорем (Papus-Guldin)

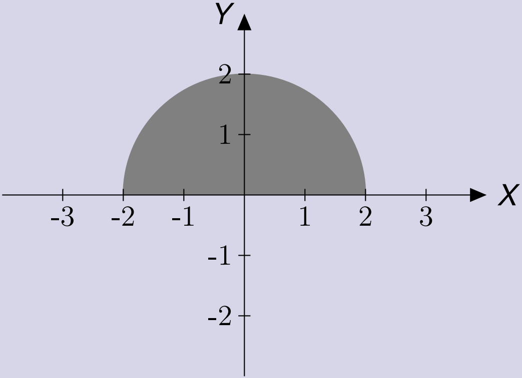
$\overset{\frown}{AB}$ нумыг түүнтэй үл огтлолцох тэнхлэгийг тойруулан эргүүлэхэд үүсэх биеийн гадаргуугийн талбай нь нумын уртыг, нумын хүндийн төвийн явсан замаар үржүүлсэнтэй тэнцүү .

Теорем (Papus-Guldin)

$\overset{\frown}{AB}$ нум ба түүнтэй үл огтлолцох тэнхлэгээр хүрээлэгдсэн трапецийг уг тэнхлэгийг тойруулан эргүүлэхэд үүсэх биеийн эзлэхүүн нь трапецийн талбайг, трапецийн хүндийн төвийн явсан замаар үржүүлсэнтэй тэнцүү.

Жишээ (12.)

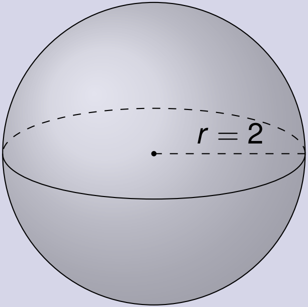
$y \geq 0$ хавтгайд орших $(0,0)$ төвтэй, $r = 2$ радиустай, нэгэн төрлийн (тогтмол нягттай) хагас дугуйн хүндийн төвийг ол.



$$S_{\text{хагас дугуй}} = 2\pi$$

Жишээ (12.)

Хагас дугуй 0_x тэнхлэгийг тойрон эргэхэд бөмбөрцөг үүснэ.



$$V_{\text{бөмбөрцөг}} = \frac{32\pi}{3}$$

Жишээ (12.)

хүндийн төв (0,y)-ийн явсан зам

$$2\pi y$$

$$V = 2\pi y \cdot S \implies y = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{32\pi}{3}}{4\pi^2} = \frac{8}{3\pi} = 0.85$$

Жишээ (12.)

$y \geq 0$ хавтгайд орших $(0,0)$ төвтэй, $r = 2$ радиустай, нэгэн төрлийн (тогтмол нягттай) хагас дугуйн хүндийн төвийг ол.