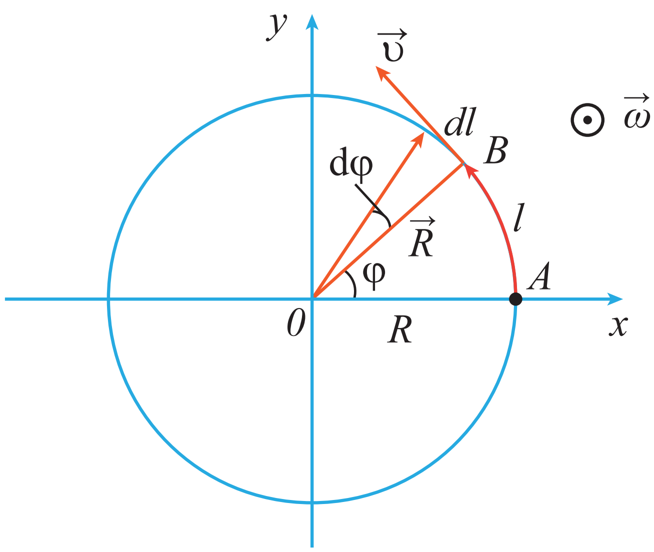
Лекц 1

МЕХАНИК

1.0.1 Эргэх хөдөлгөөн

Материал цэг мурий траектороор хөдөлж байвал траекторын багахан хэсгийг тойргоор хөдлөх хөдөлгөөн гэж үзэж болно. Траекторын тухайн хэсэгт харгалзах тойргийн радиусыг муриилтын радиус гэдэг. R радиустай тойргоор жигд эргэх материал цэгийн хөдөлгөөнийг авч үзье. Эргэлтийн өнцөг нь тойргийн нумын уртыг радиусад нь харьцуулсантай тэнцүү байна (1.1 –р зураг).



Зураг 1.1. Тойргоор эргэх хөдөлгөөн

$$\varphi = \frac{l}{R} \tag{1.1}$$

Тойргоор эргэх хөдөлгөөний хувьд l нь зам учир хурд нь

$$\upsilon = \frac{l}{t} \tag{1.2}$$

(1.1) –аас l –ийг орлуулбал

$$\upsilon = \frac{\varphi}{t} R = \omega R \tag{1.3}$$

Эндээс

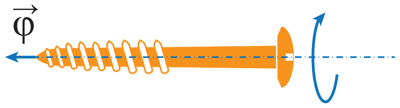
$$\omega = \frac{\varphi}{t} \tag{1.4}$$

ω нь өнцөг хурд болно. Тухайн эгшинд өнцөг хурдыг олбол.

$$\omega = \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{1.5}$$

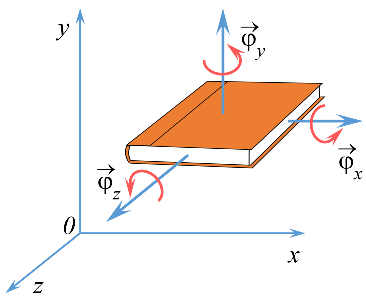
Эргэх өнцгөөс хугацаагаар авсан уламжлал нь өнцөг хурд болно.

Эргэлтийн өнцгийг чиглэлтэй авснаар псевдовектор үүсгэдэг. Эргэлтийн өнцгийн вектор нь эргэлтийн тэнхлэгийн дагуу, эргэлтээр (баруун шураг) зөв шургийн давших чиглэл рүү чиглэнэ. (Зураг 1.2) ба (Зураг 1.1) –р зурагт эргэлтийн өнцөг A –аас B рүү буюу цагийн зүүний эсрэг эргэх үед шураг хуудасны хавтгайд перпендикуляраар нааш чиглэн давших учир $\vec{\varphi}$ нь эгц нааш чиглэнэ. Эсрэг тохиолдолд цагийн зүүний дагуу эргүүлбэл эргэлтийн өнцгийн вектор цааш чиглэнэ. 1.3 –р зурагт номны x, y, z тэнхлэгүүдтэй параллель тэнхлэгүүдийг тойрон эргүүлэхэд харгалзах



Зураг 1.2. Баруун шургийн эргэлтийн өнцөг вектор

эргэлтийн өнцгийн векторуудыг дүрслэн харуулав. Дурын чиглэлийг тойрон эргэх бол эргэлтийн



Зураг 1.3. Эргэлтийн өнцгийн векторууд

өнцгийн вектор нь $\vec{\varphi}_x, \vec{\varphi}_y, \vec{\varphi}_z$ эргэлтийн өнцгүүдийн нийлбэрээр тодорхойлогдоно.

$$\vec{\varphi} = \varphi_x\vec{i} + \varphi_y\vec{j} + \varphi_z\vec{k} \tag{1.6}$$

Өнцөг хурдны векторын чиглэл эргэлтийн өнцгийн вектортой ижилхэн байна.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \tag{1.7}$$

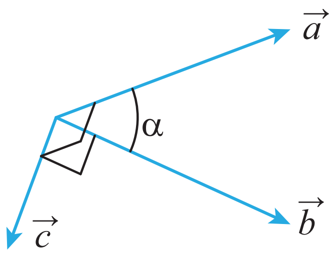
Хурдсах болон удаашран эргэх хөдөлгөөний үед өнцөг хурдатгал үүснэ. Өнцөг хурдатгал нь нэгж хугацаан дахь өнцөг хурдны өөрчлөлт буюу өнцөг хурднаас хугацаагаар авсан уламжлалтай тэнцүү байна.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{1.8}$$

Өнцөг хурдатгал нь проекцуудын хувьд дараах байдлаар илэрхийлэгдэнэ.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d^2\varphi_x}{dt^2} = \ddot{\varphi}_x \\ \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d^2\varphi_y}{dt^2} = \ddot{\varphi}_y \\ \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi_z}{dt^2} = \ddot{\varphi}_z \end{cases} \tag{1.9}$$

Тойргоор эргэх материал цэгийн шугаман хурд ба өнцөг хурдны харилцан хамаарлыг олъё. Үүний тулд бидэнд вектор үржвэрийн тодорхойлогчийг санах шаардлагатай (1.4 –р зураг).



Зураг 1.4. Вектор үржвэр

Огторгуйд байрлах $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторууд хоорондоо α өнцөг үүсгэсэн байг. $\vec{a}$ векторыг $\vec{b}$ вектороор вектор үржүүлбэл үүсгэх $\vec{c}$ вектор нь $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторт хоёуланд нь перпендикуляраар чиглэнэ. Энэ нь $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторын орших хавтгайн нормаль вектор байна. $\vec{c}$ вектор нь $\vec{a}$ вектороос $\vec{b}$ вектор руу эргүүлэх бага эргэлтийн өнцгийн вектортой ижилхэн чиглэлтэй байна. Харин хэмжээ нь

$$|\vec{c}| = c = a \cdot b \cdot \sin\alpha \tag{1.10}$$

Харин $\vec{c}$ векторыг $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторын байгуулагчаар шууд тодорхойлбол.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \tag{1.11}$$

Энд вектор үржвэрийг $(\times)$ хэрээс үржвэрийн тэмдгээр тэмдэглэх ба $\vec{a}$ ба $\vec{b}$ векторуудын байгуулагчаар дээрх тодорхойлогчийг бодож $\vec{c}$ вектор олдоно. Иймд 1.11 –аас $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$ векторын байгуулагчдыг олбол

$$c_x = a_y b_z - a_z b_x \qquad c_y = -(a_x b_z - a_z b_x) \qquad c_z = a_x b_y - a_y b_x \tag{1.12}$$

Одоо шугаман хурдны $\vec{\upsilon}$ векторыг 1.5 –р зурагт дүрсэлснээс тодорхойлбол. $\vec{\upsilon}$ векторт $\vec{R}$ вектор ба $\vec{\omega}$ вектор перпендикуляр учир

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{R} \tag{1.13}$$

1.5 –р зурагт $\vec{\omega} \perp \vec{R}$ учир хурдны модуль нь $\upsilon = \omega \cdot R$ болж 1.3 –р илэрхийлэлтэй таарч байна. (1.13) илэрхийлэл нь эргэлтийн тэнхлэгээс татсан $\vec{r}$ вектор үед биелнэ (1.5 –р зураг).

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1.14}$$

Энэ үед хурдны хэмжээ нь

$$\upsilon = \omega \cdot r \sin\alpha \tag{1.15}$$

Харин $\vec{r}$ вектор эргэлтийн хавтгай дээрээ байх үед эргэлтийн буюу траекторын мурийлтын радиус $\vec{R}$ болно.

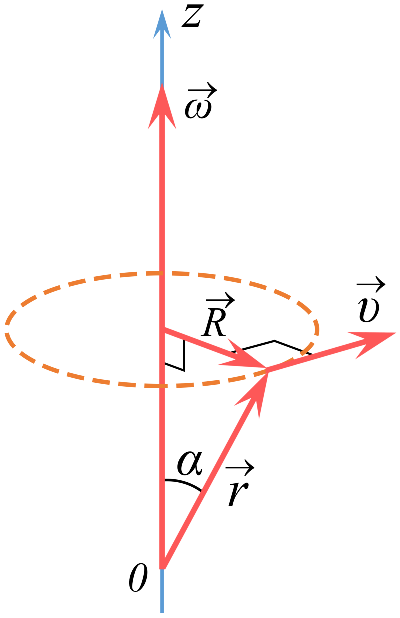
1.0.2 Траекторын мурийлт

Мурий траектороор хөдлөх материал цэгийн хөдөлгөөнийг авч үзье. Мурийгаар хөдлөх хөдөлгөөнийг олон жижиг тойрог хэлбэрийн хөдөлгөөн мэтээр загварчлан ойлгож болно (1.6 –р зураг).

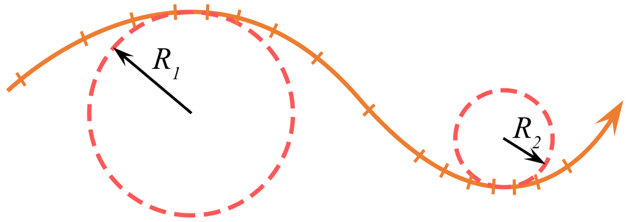
Ийм тойргоор эргэх хөдөлгөөнийг дахин авч үзье. 1.7 –р зурагт үзүүлснээр $\vec{\varphi}$ бага өнцгөөр эргэх хөдөлгөөний үед хурдыг **??** –р томьёоноос хурдатгалыг олъё.

$\vec{\tau}$ нь хурдны чиглэлийг тодорхойлох нэгж вектор

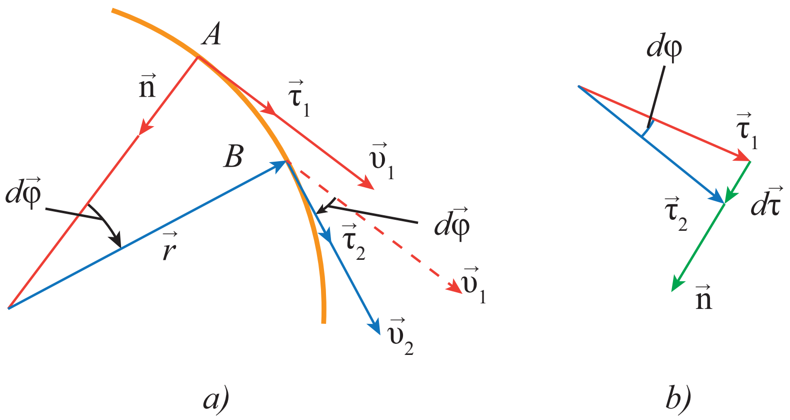
$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon \cdot \vec{\tau}) = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} \tag{1.16}$$



Зураг 1.5. Өнцөг хурд



Зураг 1.6. Траекторын муруйлтын радиус



Зураг 1.7. Хурдны нормаль өөрчлөлт

Энд эхний нэмэгдэхүүн нь $\vec{a}_\tau$ –тангенциал хурдатгал, хоёрдох нь $\vec{a}_n$ болно.

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau}, \qquad a_\tau = \dot{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \tag{1.17}$$

a_τ хурдатгал нь хурдны хэмжээний өөрчлөлтөөр тодорхойлогдож байна. Энэ хурдатгал $\vec{\tau}$ нэгж векторын дагуу буюу траекторын шүргэгчээр чиглэнэ. Хурдсах хөдөлгөөний үед $\vec{a}_\tau$ хурдатгал нь хурдны векторын дагуу, удаашрах хөдөлгөөний үед хурдны векторын эсрэг чиглэнэ.

1.7б –р зурагт үзүүлснээр адил хажуут гурвалжны суурь болох $d\vec{\tau}$ нь $d\vec{\varphi}$ тэг рүү дөхөх үед $\vec{\tau}$ буюу траекторын шүргэгчид перпендикуляраар чиглэнэ. 1.16 –илэрхийллийн $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ уламжлалыг тодруулъя.

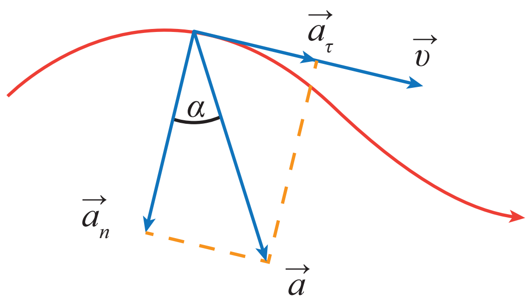
$|d\vec{\tau}| = |\tau| \cdot d\varphi = d\varphi$ $d\vec{\tau}$ векторын чиглэлийг тодорхойлох нэгж векторыг $d\vec{n}$ –нормаль вектор гэвэл.

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \vec{n} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{n} = \omega \cdot \vec{n} \tag{1.18}$$

Энд $\vec{\upsilon}$ ба $\vec{\omega}$ векторуудыг ашиглан нормаль хурдатгалыг олбол

$$\vec{a}_n = \upsilon \cdot \omega \cdot \vec{n} = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon} \tag{1.19}$$

$\vec{a}_n$ нормаль хурдатгал нь траекторын шүргэгчид перпендикуляр буюу муриийлтын радиус векторын эсрэг чиглэнэ. Энэ хурдатгал нь траектор муриийлтаас буюу хурдны чиглэл өөрчлөгдсөнөөр үүсэж байгаа хурдатгал юм. Шулуунаар хөдлөх үед $\vec{a}_n = 0$ байна. Бүрэн хурдатгал нь нормаль ба тангенциал хурдатгалуудын нийлбэр байна (1.8 –р зураг).



Зураг 1.8. Хурдатгал

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \qquad a_n = a \cdot \cos\alpha, \qquad a_\tau = a \cdot \sin\alpha \tag{1.20}$$

Одоо $\vec{a}_n$ ба $\vec{a}_\tau$ хурдатгалыг муриийлтын радиус вектор $\vec{r}$ ба $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ векторуудээр илэрхийлье. 1.17 –өөс $\vec{a}_\tau$ нь $\vec{\tau}$ векторын дагуу чиглэх ба 1.3 –ийг орлуулбал

$$\vec{a}_\tau = \frac{d}{dt}(\omega \cdot r)\vec{\tau} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r \cdot \vec{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \tag{1.21}$$

$\vec{a}_n$ хурдатгалын 1.19 –д 1.13 –г орлуулбал

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{1.22}$$

Ингээд бүрэн хурдатгал нь:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \tag{1.23}$$

Энд вектор үржвэрүүдийн дүрмээр задалж бичвэл.

$$\vec{a}_\tau = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}, \qquad \vec{a}_n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \end{vmatrix} \tag{1.24}$$

болох ба хэмжээг муриийлтын радиус R –ээр олбол

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R; \qquad a_n = \omega \cdot \upsilon = \omega^2 R \tag{1.25}$$

a_n хурдатгал нь төвд тэмүүлэх хурдатгал юм. Нормаль буюу төвд тэмүүлэх хурдатгал нь муриийлтын радиусаар дараах байдлаар илэрхийлэгдэнэ.

$$a_n = a_{\text{тт}} = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R} \tag{1.26}$$