ЛЕКЦ 16. Оронгийн онолын үндэс. Чиглэлээр авсан уламжлал, градиент, дивергенц , ротор. Гауссын томъёо

Скаляр орон ба вектор орон. Түвшний шугам

Тодорхойлолт 0.1. *Хэрэв огторгуйн G мужийн цэг бүрт орны гэж нэрлэх $u = f(x, y, z)$ функц тодорхойлогдсон бол огторгуйн G мужид* **скаляр орон** *өгөгдсөн байна гэнэ. Скаляр оронтой төстэйгээр вектор орон гэсэн ухагдхууныг авч хэрэглэдэг.*

Тодорхойлолт 0.2. *Хэрэв хавтгайн G мужид $u = f(x, y)$ скаляр орныг тогтмол $f(x, y) = C$ утгатай байлгах $P(x, y)$ цэгүүдийн олонлогийг энэ скаляр орны* ***түвшний шугам*** *гэнэ.*

Жишээ нь: Температурын тархалт(изотерм), даралтын тархалт(изобар) зэргийн түвшний шугамуудын бүлийг өргөн хэрэглэдэг.

Тодорхойлолт 0.3. *$f(x, y, z) = C$ байх огторгуйн $P(x, y, z)$ цэгүүдийн олонлогийг $u = f(x, y, z)$* **скаляр орны түвшний гадаргуу** *гэнэ.*

Жишээ 0.1. *$z = 2x + y$ функцийн түвшний шугамыг олж тайлбарла.*

Бодолт: *Түвшний гадаргуугийн тэгшитгэл нь $2x + y = c$ байна. $C-$ийн дурын утганд параллель шулуунууд үүсэх бөгөөд үүнийг параллель шулууны бүл гэнэ.*

Тодорхойлолт 0.4. *Хэрэв огторгуйн G мужийн цэг бүрт $\overrightarrow{F}(M)$, $M \in G$ вектор тодорхойлогдсон бол огторгуйн G мужид* ***вектор орон*** *өгөгдсөн байна гэнэ.*

Тодорхойлолт 0.5. *Хэрэв Γ муруйн цэг бүрийн шүргэгч нь өгөгдсөн орны вектор $\overrightarrow{F}$-ын дагуу чиглэж байвал Γ муруйг $\overrightarrow{F}(M)$* **вектор орны хүчний шугам буюу вектор шугам** *гэнэ.*

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \tag{1}$$

дифферециал тэгшитгэлээс орны вектор шугамуудыг тодорхойлно.

Жишээ 0.2. *$\overrightarrow{F} = x^2y^2i - x^2j + y^2zk$ вектор орны хүчний вектор шугамуудын бүлийг тодорхойл.*

Бодолт:

$F_x = x^2y^2, \quad F_y = -x^2, \quad F_z = y^2z,$

$\dfrac{dx}{x^2y^2} = \dfrac{dy}{-x^2} = \dfrac{dz}{y^2z}$. *Эндээс*

$\dfrac{dx}{x^2y^2} = \dfrac{dy}{-x^2} \Rightarrow dx = -y^2dy \Rightarrow x + \dfrac{y^3}{3} = c_1$ *мөн* $\dfrac{dx}{x^2y^2} = \dfrac{dz}{y^2z} \Rightarrow \dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dz}{z} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{3}{x^3} + c_2 = \ln|z| \Rightarrow z = c_2e^{-\frac{3}{x^3}}$

болно.Иймд вектор шугамуудын бүл нь

$$x + \frac{y^3}{3} = c_1, \quad z = c_2e^{-\frac{3}{x^3}}$$

байна.

Тодорхойлолт 0.6. *Хэрэв* $\overrightarrow{r}(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ *вектор функцийн хувьд аргументийн* t_0 *утганд* $\Delta t\neq 0$ *өөрчлөлт өгөхөд функцийн өөрчлөлт*

$$\Delta\overrightarrow{r}(t)=\overrightarrow{r}(t_0+\Delta t)-\overrightarrow{r}(t_0) \tag{2}$$

байна.

Хэрэв $\triangle l\to 0$ үед $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ харьцаа төгсгөлөг хязгаартай бол тэр хязгаарыг $u=f(P)$ скаляр функцээс өгөдсөн P цэг дээрх $\overrightarrow{l}$ векторын чиглэлээр авсан уламжлал гэж нэрлээд

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{\triangle l\to 0}\frac{\triangle u}{\triangle l} \tag{3}$$

гэж тэмдэглэнэ.

Тодорхойлолт 0.7. $u=f(x,y,z)$ *функцийн тухайн уламжлалуудаар координат хийсэн*

$$\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k$$

векторыг $u=f(P)$ **скаляр орны градиент** *гэнэ.*

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k \tag{4}$$

гэж тэмдэглэнэ. Товчоор $\mathrm{grad}u=\nabla u$ гэж бичиж болно. Энд бичигдсэн

$$\nabla=i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial u}{\partial z}=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\} \tag{5}$$

тэмдэглэгээг **Гамильтоны оператор буюу ∇ оператор** гэж нэрлэнэ.

Жишээ 0.3. $f=1+x^2y^3$ *функцийн градиентийг* $M(-1,1)$ *цэг дээр ол.*

Бодолт:
$\nabla f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}(1+x^2y^3)i+\dfrac{\partial}{\partial y}(1+x^2y^3)j=2xy^3i+3x^2y^2$ *байна. Одоо* $(-1,1)$ *цэг дээр бодвол*

$$\nabla f(-1,1)=gradf(-1,1)=-2i+3j$$

болно.

Хэрэв $\overrightarrow{l}$ −ийн чиглэлд авсан уламжлал $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ нь градиентийн векторын $\overrightarrow{l}$ дээрх проекцтой тэнцүү байна.

Теорем 0.1. *Хэрэв* $\vec{l}$*-ийн чиглэлийн дагуух нэгж вектор* $\vec{l_0}$ *нь декартын координатын тэнхлэгүүдтэй харгалзан* α,β,γ *өнцгүүд үүсгэх бол* $\vec{l}$*-ийн чиглэлд авсан уламжлалыг*

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{l}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{6}$$

томъёогоор олно.

Тодорхойлолт 0.8. *$u = f(x, y, z)$ скаляр функцээс $\vec{l_0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ чиглэлд авсан уламжлал нь*

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = gradu \cdot \vec{l_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{7}$$

байна.

Жишээ 0.4. *$f(x, y, z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ функцийн $\overrightarrow{l} = 6i + 2j + 3k$ векторын чиглэл дэх уламжлалыг $(1, -1, 2)$ цэг дээр ол.*

Бодолт:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 8xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 4x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$$\nabla f = (y^2 - 8xy)i + (2xy - 4x^2)j + 2zk$$

Одоо $(1, -1, 2)$ цэг дээр бодвол

$$\nabla f(1, -1, 2) = 9i - 6j + 4k$$

болно. $|\overrightarrow{l}| = 7$ *тул* $\overrightarrow{l_0} = \frac{6}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{3}{7}k$ *байна.*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{l_0}}\right)_{(1,-1,2)} = (9i - 6j + 4k)\left(\frac{6}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{3}{7}k\right) = \frac{54}{7}$$

болно.

Вектор орны ротор

Тодорхойлолт 0.9. *Хэрэв $\overrightarrow{F(r)} = F_x(x, y, z)i + F_y(x, y, z)j + F_z(x, y, z)k$ вектор орон тасралтгүй дифференциалчлагддаг бол $\nabla, \overrightarrow{F}$ векторуудийн вектор үржвэрийг энэ* **орны ротор (хуйлралын вектор)** *гээд*

$$rot\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{8}$$

гэж тэмдэглэнэ.

Жишээ 0.5. *$F = 2zi + xj - yk$ векторын роторыг ол.*

Бодолт: $F_x = 2z, \quad F_y = x, \quad F_z = -y$ *тул*

$$rot\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & -y \end{vmatrix} = \left[-\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right]i + \left[2\frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial x}\right]j + \left[\frac{\partial x}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y}\right]k = -i + 2j + k$$

байна.

Вектор орны урсгал

Тодорхойлолт 0.10.

$$\Pi = \iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_0} ds = \iint\limits_S (F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma) ds \tag{9}$$

2-р төрлийн гадаргуугийн интегралыг S гадаргуугаар нэвтрэх $\overrightarrow{F}$ вектор орны **урсгал** *гэнэ.*

Урсгалыг $\Pi-$ээр тэмдэглэнэ. Энд S чиглэл тогтоосон гөлгөр гадаргуу, $\overrightarrow{n_0}$ нь уг гадаргуугийн нормалийн дагуух нэгж вектор байна. Вектор урсгалыг нэгдүгээр болон хоёрдугаар төрлийн гадаргуугийн интеграл бодох аргуудаар бодно.
Хэрэв гадаргуу $\psi(x, y, z) = 0$ далд тэгшитгэлээр өгөгдвөл урсгалыг

$$\Pi = \pm \iint\limits_S \frac{\overrightarrow{F} \cdot grad\psi}{|grad\psi|} ds, \quad \overrightarrow{n_0} = \pm \frac{grad\psi}{|grad\psi|} \tag{10}$$

томъёогоор олно. Учир нь $\psi(x, y, z) = 0$ тэгшитгэлээр өгөгдсөн гадаргууг $\psi = \psi(x, y, z)$ скаляр орны түвшний гадаргуу $\psi(M) = C$ мэтээр үзвэл гадаргуугийн нормал $\overrightarrow{n_0}$ нь $C-$ийн өсөх чиглэлд градиентийн дагуу чиглэнэ.

Жишээ 0.6. *$z = x^2 + y^2$ параболойдоос $z = 4$ хавтгайгаар таслагдсан гадаргуугийн гадна талаар дайран өнгөрөх радиус $\overrightarrow{r} = xi + yj - 3zk$ векторын урсгалыг ол.*

Бодолт:
$\psi = x^2 + y^2 - z$ скаляр орны градиент $grad\psi = 2xi + 2yj - k$ байх ба модуль $|grad\psi| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ байна.$\overrightarrow{n_0} = \pm \dfrac{grad\psi}{|grad\psi|} = \dfrac{2xi + 2yj - k}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$
$F_x = x^2, \quad F_y = y^2, \quad F_z = -z$ байх тул $ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$ байна.

$$\Pi = \pm \iint\limits_S \frac{\overrightarrow{F} \cdot grad\psi}{|grad\psi|} ds = \iint\limits_D \frac{2x^2 + 2y^2 + 3z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy =$$

$$\iint\limits_D 2x^2 + 2y^2 + 3z dxdy = \iint\limits_D 2x^2 + 2y^2 + 3(x^2 + y^2) dxdy = 5 \iint\limits_D x^2 + y^2 dxdy$$

болно. Эндээс $D : x^2 + y^2 \leq 4$ учир туйлын координатын системд шилжүүлж бодъё.
$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, dxdy = \rho d\rho d\varphi, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ болно.

$$5 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho = 5 \cdot 2\pi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho = 10\pi \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 = 40\pi$$

болно.

Гаусс-Остроградскийн томъёо

Огторгуйн G мужийн xOy хавтгай дахь проекц нь G_{xy} квадратчлагдах муж байг. Хэрэв G муж нь G_{xy} суурь бүхий цилиндр гадаргуун хэсэг ба $z = z_1(x, y),\ z = z_2(x, y)$ гадаргуунуудаар хязгаарлагдах бол түүнийг Oz тэнхлэгийн хувьд энгийн муж гэнэ.

$z_1(z, y),\ z_2(x, y)$ нь G_{xy} мужид тасралтгүй, $z_1(x, y) < z_2(x, y)$ гэж үзье. Хэрэв G мужийг $Ox,\ Oy$ ба Oz тэнхлэгүүдийн хувьд нэгэн зэрэг энгийн муж байхаар төгсгөлөг тооны мужид хуваах болох бол түүнийг энгийн муж гэнэ.

G мужийг хүрээлж буй гадаргуу $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ юм.

Теорем 0.2. *Хэрэв вектор функц $\bar{F} = F_x i + F_u j + F_z k$ нь $\dfrac{\partial F_x}{\partial x},\ \dfrac{\partial F_y}{\partial y},\ \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$ тухайн уламжлалуудынхаа хамт энгийн битүү муж $\bar{G}_1$ дээр тасралтгүй бол Гаусс-Остроградскийн дараах томъёо хүчинтэй байдаг.*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dV = \iint\limits_S F_x dydz + F_y dxdz + F_z dxdy \tag{11}$$

(11) томъёонд гадаргуугийн интегралыг S гадаргуугийн гадна талаар авах болно. Битүү гадаргуугаар авсан гадаргуугийн интеграл, энэ гадаргуугаар хязгаарлагдсан мужаар авсан гурвалсан интегралын хоорондын холбоог уг томъёо илэрхийлнэ.

Санамж 0.1. *Хэрэв $\bar{F} = F_x i + F_y j + F_z k$ функц, битүү G мужид тасралтгүй ба $\dfrac{\partial F_x}{\partial x},\ \dfrac{\partial F_y}{\partial y},\ \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$ уламжлалууд задгай мужид G тасралтгүй бол*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dV$$

интеграл оршино.

Санамж 0.2. *Гаусс-Остроградскийн томъёо нь төгсгөлөг тооны хэсэг хэсгээр гөлгөр гадаргуунуудаас бүтсэн гадаргуугаар хучигдсан олон холбоост мужид ч биелнэ.*

$$S = S_b^+ + \bigcup_{i=1}^{n} S_i^-$$

Вектор орны циркуляци

Тодорхойлолт 0.11. *Вектор орон $\overrightarrow{F}$-ийн γ муруйн дагуу гүйцэтгэх ажлыг $\overrightarrow{F}$ векторийн γ муруйн дагуух* **циркуляци** *гэнэ.*

Циркуляцийг Ц-ээр тэмдэглэвэл

$$\text{Ц} = \int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \int\limits_\gamma F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{12}$$

байна.

Жишээ 0.7. $\overrightarrow{F} = y^2 i + xj$ *вектор орны* $x = 3\cos t, \quad y = \sin t$ *муруйн дагуу цагийн зүүний эргэлтийн дагуу тойрох үеийн циркуляцийг ол.*

Бодолт:

Өгөгдсөн эллипсээр цагийн зүүний эргэлтийн дагуу тойроход

$2\pi \le t \le 0$ *завсарт хувирна. Иймд*

$$Ц = \int\limits_{\gamma} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \int\limits_{\gamma} y^2 dx + xdy = \int\limits_{2\pi}^{0} (-3\sin^3 t + 3\cos^2 t)dt = \frac{3}{2}\int\limits_{2\pi}^{0}(1-\cos 2t)dt = -3\pi$$

байна.

Тодорхойлолт 0.12. *Огторгуйн нэг холбоост* G *мужид чиглэл тогтоосон хэсэг хэсгээр гөлгөр гадаргуу* S, *түүний хөвөө чиглэл тогтоосон хэсэг хэсэг гөлгөр хүрээ* Γ *байг. Хэрэв* G *мужид вектор орон* $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M)$ *өгөгдөөд түүн дээр* $\overrightarrow{F}(M)$ *ба* $rot\overrightarrow{F}(M)$ *тасралтгүй бол* S *гадаргууг нэвтрэх* $rot\vec{F}$ *урсгал нь* $\overrightarrow{F}(M)$ *орны* Γ *хүрээний дагуух циркуляцитай тэнцүү байна. Томъёолбол*

$$\int\limits_{\Gamma} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \iint\limits_{S} rot\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n_0} ds \tag{13}$$

болно. Үүнийг **Стоксын томьёо***ны вектор хэлбэр гэнэ.*

Декартын тэгш өнцөгт координатын системд Стоксын томьёо дараах хэлбэртэй байна.

$$\int\limits_{\Gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) dzdy + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dydx \tag{14}$$

Вектор орны Дивергенц

Тодорхойлолт 0.13. *Хэрэв*

$$\overrightarrow{F(r)} = F_x(x,y,z)i + F_y(x,y,z)j + F_z(x,y,z)k$$

вектор орон тасралтгүй дифференциалчлагддаг бол $\nabla, \overrightarrow{F}$ *векторуудийн скаляр үржвэрийг энэ орны* **дивергенци** *гэнэ. Дивергенцийг*

$$div\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{15}$$

гэж тэмдэглэнэ.

Жишээ 0.8. $F = (x^2y^3 - z^4)i + (4x^5y^2z)j - y^4z^6k$ *векторын дивергенцийг ол.*

Бодолт:

$F_x = x^2y^3 - z^4, \quad F_y = 4x^5y^2z, \quad F_z = -y^4z^6$

$\dfrac{\partial F_x}{\partial x} = 2xy^3, \quad \dfrac{\partial F_y}{\partial y} = 8x^5yz, \quad \dfrac{\partial F_z}{\partial z} = -6y^4z^5$ *тул*

$$divF = 2xy^3 + 8x^5yz - 6y^4z^5$$

байна.

Потенциалт орон

Тодорхойлолт 0.14. *Хэрэв G мужийн бүх цэг дээр $\overrightarrow{F}(M) = gradu(M), \quad M \in G$ байх скаляр функц $u(M)$ орших бол*

$$\overrightarrow{F}(M) = F_x i + F_y j + F_z k \tag{16}$$

вектор оронг **потенциалт орон** *гэнэ.*

Нэг холбоост G мужид вектор орон $\overrightarrow{F}(M) = F_x i + F_y j + F_z k$ потенциалт орон байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\overrightarrow{F}(M)$ хуйлралгүй орон байх явдал юм. Өөрөөр хэлбэл $rot\overrightarrow{F}(M) = 0, \quad \forall M \in G$ байх явдал юм.

$\overrightarrow{F}(M)$ потенциалт оронд муруй шугаман интегралын утга нь орны $u(M)$ потенциалын ялгавартай тэнцүү. Өөрөөр хэлбэл

$$\int_{(M_o)}^{(M)} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = u(M)\Big|_{M_o}^{M} = u(M) - u(M_o)$$

байна. Энд M_o нь өгөгдсөн цэг, M нь хувьсах цэг .

Жишээ 0.9. *Хүндийн хүчний орон потенциалт орон болохыг баталж, потенциалыг ол.*

Бодолт:
Хүндийн хүчний орны вектор нь $\vec{P} = -mgk$ байх ба энд m- материал цэгийн масс, g- хүндийн хүчний хурдатгал, k- Oz тэнхлэгийн орт байна. $\overrightarrow{P}$−потенциалт орон байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл $rot\overrightarrow{F}(M) = 0$ байх эсэхийг шалгая. Өгөгдсөн нөхцөл ёсоор $P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -mg$ байна.

$$rot\overrightarrow{P} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = 0$$

Иймд $\overrightarrow{P}$ потенциалт орон юм. Потенциалыг олохын тулд өгсөн M_o цэгээр координатын эхийг авъя. Тэгвэл

$$u(x,y,z) = \int_{MM_o} P_x dx + P_y dy + P_z dz = -\int_{MM_o} mgdz = -mgz|_z^0 = mgz + C$$

Эндээс $u(x,y,z) = mgz + C$ болно.