ЛЕКЦ 8: Дээд эрэмбийн тухайн уламжлал, функцийн хамгийн их, хамгийн бага утга. Хоёр хувьсагчийн функцийн экстремум. Нөхцөлт экстремум.

Дээд эрэмбийн уламжлал ба дифференциал

$z = f(x, y)$ функцийн тухайн уламжлалууд нь $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ба $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ нь мөн x ба y-ээс хамаарсан хоёр хувьсагчийн функцүүд байдаг. Иймд эдгээр тухайн уламжлалуудаас авсан тухайн уламжлалуудыг функцийн 2-р эрэмбийн тухайн уламжлалууд гэж нэрлэнэ. 2-р эрэмбийн тухайн уламжлалуудыг z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{y^2} гэх мэтчилэн тэмдэглэдэг.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (f'_x(x, y))'_x = f''_{x^2}(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (f'_y(x, y))'_y = f''_{y^2}(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (f'_x(x, y))'_y = f''_{xy}(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (f'_y(x, y))'_x = f''_{yx}(x, y)$$

$f''_{xy}(x, y)$ ба f''_{yx} уламжлалуудыг функцийн холимог уламжлалууд гэж нэрлэнэ. Функцийн 2-р эрэмбийн уламжлалуудаас x ба y-ээр авсан тухайн уламжлалуудыг функцийн 3-р эрэмбийн уламжлалууд гэнэ.

Жишээлбэл:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x^2}\right) = (z''_{x^2}(x, y))'_x$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y^2}\right) = (z''_{y^2}(x, y))'_x$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = (z_{xy}(x, y)'')'_x$$

гэх мэт. Ерөнхийдөө n-р эрэмбийн тухайн уламжлалыг $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ гэж тэмдэглэнэ. Энэ нь z функцээс x хувьсагчаар p удаа, y хувьсагчаар $n - p$ удаа тус тус тухайн уламжлал авсан гэсэн үг юм.

Жишээ 0.1. *$z = x^3 + 3xy^2 - 15x^2y^3 - 12y$ функцийн 1, 2, 3-р эрэмбийн тухайн уламжлалуудыг ол.*

Бодолт: *Эхлээд функцийн 1-р эрэмбийн тухайн уламжлалуудыг олъё.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 45x^2y^2 - 12$$

Эндээс 2-р эрэмбийн тухайн уламжлалуудыг олбол:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 30y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y - 90xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6y - 90xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x - 90x^2y$$

3-р эрэмбийн тухайн уламжлалууд нь

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -90y^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = -90y^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 6 - 180xy,$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = -90y^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = 6 - 180xy, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 6 - 180xy, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -90x^2$$

болно.

Эндээс

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} &= \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} \end{aligned}$$

гэдгийг ажиглаж болно. Үүнтэй холбоотойгоор дараах теоремыг баталгаагүйгээр авч үзье.

Теорем 0.1. *Хэрэв $z = f(x, y)$ функц ба түүний f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} тухайн уламжлалууд $M(x, y)$ цэг дээр тасралтгүй функцүүд бол энэ цэг дээрх функцийн холимог уламжлалууд тэнцүү байна. Өөрөөр хэлбэл*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

байна.

Хэрэв $z = f(x, y)$ функц $M(x, y)$ цэг дээр тасралтгүй тухайн уламжлалуудтай бол функц дифференциалчлагдах бөгөөд бүтэн дифференциал нь

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

хэлбэртэй байдаг.

x Ба y нь үл хамаарах хувьсагчууд бол dx Ба dy нь тогтмол бөгөөд dz нь x ба y-ээс хамаарсан 2 хувьсагчийн функц болно. dz функцийн дифференциалыг функцийн 2-р эрэмбийн дифференциал гэж нэрлээд $d^2 z$-ээр тэмдэглэнэ. Тодорхойлолт ёсоор

$$\begin{aligned} d^z = d(dz) = \quad & d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy \\ = \quad & \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy \\ = \quad & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \end{aligned}$$

Энд $(dx)^2 = dx^2,\ (dy)^2 = dy^2$ гэж тэмдэглэсэн.

Мөн функцийн 3-р эрэмбийн дифференциал

$$d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

болно.

Мөн функцийн дээд эрэмбийн холбогдох тухайн уламжлалууд тасралтгүй функцүүд үед n-р эрэмбийн дифференциалыг

$$d^nz = d(d^{n-1}z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} z$$

формаль хэлбэрээр бичиж болно.

Олон хувьсагчийн функцийн Тейлорын томъёо

Хоёр хувьсагчийн функцийн экстремум

Функцийн экстремум байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл

D муж дээр тодорхойлогдсон хоёр хувьсагчийн функц $z = f(x, y)$ авч үзье. Хэрэв $M_0(x_0, y_0) \in D$ цэгийн ямар нэг δ орчин олдох бөгөөд энэ орчны бүх цэгүүд дээрх функцийн утга $M_0(x_0.y_0)$ цэг дээрх утгаас ихгүй бол M_0 цэгийг функцийн максимумын цэг гэж нэрлэнэ. Өөрөөр хэлбэл, дараах тэнцэтгэл биш хүчинтэй байна.

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in B(M_0, \delta) \cap D,$$
$$B(M_0, \delta) = \left\{(x, y) \middle| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

Мөн үүнтэй ижилээр функцийн орчны минимумын цэг $M(x^*, y^*)$ тодорхойлогдоно.

$$\exists \overline{\delta} > 0,\ \forall (x, y) \in D \cap B(M_0, \overline{\delta}) \qquad f(x, y) \geq f(x^*, y^*)$$

Функцийн орчны минимумын ба максимумын цэгүүд дээрх утгуудыг функцийн экстремум гэж нэрлэнэ. Орчны минимум ба максимумын цэгүүдийг экстремумын цэгүүд гэж нэрлэнэ. Функцийн D муж дээрх экстремум олох бодлогыг томъёолж тэмдэглэвэл

$$f(x) \to \min(\max),\ x \in D \tag{1}$$

хэлбэртэй болно. $D = R^2$ бол (1) бодлого нь нөхцөлт биш экстремумын бодлого болно. Энэ бодлогыг томъёолбол

$$f(x, y) \to \min(\max),\ (x, y) \in R \times R \tag{2}$$

Теорем 0.2. *(Экстремум болох зайлшгүй нөхцөл) $f(x, y)$ функц нь $M_0(x_0, y_0)$ цэг дээр дифференциалчлагддаг бөгөөд M_0 цэг нь (2) бодлогын хувьд функцийн экстремумын цэг болог. Тэгвэл*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

байна.

Санамж 0.1. *(3) нөхцлийг хангадаг (x_0, y_0) цэгүүд нь экстремумын цэг байх албагүй. Жишээлбэл: $z = f(x, y)$ функцийн тухайн уламжлалууд нь $(0, 0)$ цэг дээр тэгтэй тэнцүү боловч $(0, 0)$ цэг нь экстремумын цэг болж чадахгүй. Учир нь $f(0, 0) = 0$ бөгөөд $(0, 0)$ цэгийн дурын орчинд функцийн утгууд эерэг ба сөрөг утгуудыг авах боломжтой. Иймд экстремум болох зайлшгүй нөхцөл нь экстремумын хүрэлцээтэй нөхцөл болж чадахгүй. Функцийн тухайн уламжлалуудыг тэгтэй тэнцүү байлгах (x, y) цэгүүдийг цаашид экстремум байх сэжигтэй цэгүүд гэж нэрлэнэ. Өөрөөр хэлбэл (x, y) цэгүүд нь дараах систем тэгшитгэлийн шийд болно гэсэн үг. Үүнд*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Одоо экстремум байх хүрэлцээтэй нөхцлийг томъёолъё. $M_0(x_0, y_0)$ цэг нь экстремум байх сэжигтэй цэг бөгөөд энэ цэг дээр функцийн 2-р эрэмбийн тухайн уламжлалууд оршдог гэж үзээд дараах тэмдэглэгээг хийе.

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

Теорем 0.3. *(Экстремум байх хүрэлцээтэй нөхцөл)*

$$\Delta = AC - B^2$$

байг.

а) Хэрэв $\Delta > 0$ үед $M_0(x_0, y_0)$ цэг нь экстремумын цэг болох ба $A > 0$ үед минимумын, $A < 0$ үед максимумын цэг болно.

б) Хэрэв $\Delta < 0$ бол $M_0(x_0, y_0)$ цэг нь экстремумын цэг болж чадахгүй.

Санамж 0.2. *Хэрэв $\Delta = 0$ бол нэмэлт шинжилгээ хийж экстремумын цэг болох эсэхийг тогтооно.*

Жишээ 0.2. *$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ функцийн экстремумыг ол.*

Бодолт: *Функцийн тухайн уламжлалууд нь:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$$

болох ба сэжигтэй цэгийг олбол

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 = 2 \\ y_3 = 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 = -2 \\ y_4 = -1 \end{pmatrix}$$

Функцийн 2-р эрэмбийн тухайн уламжлалуудыг олбол:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

$M_1(1;2)$ цэг дээрх 2-р эрэмбийн уламжлалуудыг олъё.

$$A = f''_{x^2}(1;2) = 6,\ B = f''_{xy}(1;2) = 12,\ C = f''_{y^2}(1;2) = 6$$

$\Delta = AC - B^2 = 6\cdot 6 - 12^2 = -108 < 0$ *тул $M_1(1;2)$ цэг нь экстремумын цэг болж чадахгүй.*

$M_2(-1;-2)$ цэг дээрх 2-р эрэмбийн уламжлалуудыг олъё.

$$A = f''_{x^2}(-1;-2) = -6,\ B = f''_{xy}(-1;-2) = -12,\ C = f''_{y^2}(-1;-2) = -6$$

$\Delta = AC - B^2 = -6\cdot(-6) - (-12)^2 = -108 < 0$ *тул $M_2(-1;-2)$ цэг нь экстремумын цэг болж чадахгүй.*

$M_3(2;1)$ цэг дээрх 2-р эрэмбийн уламжлалуудыг олъё.

$$A = f''_{x^2}(2;1) = 12,\ B = f''_{xy}(2;1) = 6,\ C = f''_{y^2}(2;1) = 12$$

$\Delta = AC - B^2 = 12\cdot 12 - 6^2 = 108 > 0$ *Ба $A = 12 > 0$ тул $M_3(2;1)$ цэг нь минимумын цэг болно.* $f_{\min}(2;1) = 2^3 + 3\cdot 2\cdot 1^2 - 15\cdot 2 - 12\cdot 1 = -28$

$M_4(-2;-1)$ цэг дээрх 2-р эрэмбийн уламжлалуудыг олъё.

$$A = f''_{x^2}(-2;-1) = -12,\ B = f''_{xy}(-2;-1) = -6,\ C = f''_{y^2}(-2;-1) = -12$$

$\Delta = AC - B^2 = -12\cdot(-12) - (-6)^2 = 108 > 0$ *Ба $A = -12 < 0$ тул $M_3(2;1)$ цэг нь максимумын цэг болно.* $f_{\max}(-2;-1) = (-2)^3 + 3\cdot(-2)\cdot(-1)^2 - 15\cdot(-2) - 12\cdot(-1) = 28$

Нөхцөлт экстремумын арга

$z = f(x,y)$ функцийн экстремумыг $\varphi(x,y) = 0$ гэсэн нөхцөлд олъё. Өөрөөр хэлбэл

$$f(x,y) \to \min(\max) \tag{5}$$

$$\varphi(x,y) = 0 \tag{6}$$

бодлогыг бодно гэсэн үг.

Хэрэв (6) нөхцлөөс $y = y(x)$ илэрхийллийг олж чаддаг гэж үзвэл (5)-д орлуулбал энэхүү (5)-(6) бодлого нь нөхцөлт биш экстремумын бодлого болж хувирна.

$$z = z(x) = f(x, y(x)) \to \min(\max)$$

Энэ бодлогын хувьд экстремум байх зайлшгүй нөхцлийг бичвэл

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

Нөгөө талаар $y = y(x)$-ийн хувьд $\varphi(x,y) = \varphi(x, y(x)) \equiv 0$ тул энэ илэрхийллээс уламжлал авбал

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

илэрхийллийн 2 талыг ямар нэг тэгээс ялгаатай λ тоогоор үржүүлж (7) тэнцэтгэл дээр нэмбэл

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$$

болох ба бүлэглэн дараах хэлбэрт бичье.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

λ тоог $\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$ нөхцлийг хангасан байхаар сонгож авъя. Тэгвэл

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\[2ex] \varphi(x,y)=0\end{cases}\tag{9}$$

систем тэгшитгэлийг (x,y) гэсэн экстремумын цэг хангана. Одоо (9) нөхцлийг Лагранжийн функцийн тусламжтайгаар бичье. Лагранжийн функц зохиовол

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)\tag{10}$$

λ-г Лагранжийн үржигдэхүүн гэнэ. Тэгвэл (9) нөхцлийг дахин бичвэл

$$\begin{cases}L'_x(x,y,\lambda)=0\\ L'_y(x,y,\lambda)=0\\ L'_\lambda=\varphi(x,y)=0\end{cases}\tag{11}$$

Иймд хэрэв (x,y) цэг нь (5)-(6) бодлогын хувьд экстремумын цэг бол, энэ цэг нь Лагранжийн функцийн экстремумын цэг болно. (10) системийг хангадаг (x,y) цэгүүдийг Лагранжийн функцийн сэжигтэй цэгүүд гэж нэрлэнэ. Сэжигтэй цэг бүр (5)-(6) бодлогын хувьд орчны минимум ба максимум цэг болох албагүй. (5)-(6) бодлогын хувьд экстремум байх хүрэлцээтэй нөхцлийг дараах дүрмээр тогтооно.

(x_0,y_0) цэг нь Лагранжийн функцийн сэжигтэй цэг байг. Өөрөөр хэлбэл

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(x_0,y_0,\lambda_0)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L(x_0,y_0,\lambda_0)}{\partial y}=0\end{cases}$$

λ_0 нь (x_0,y_0) цэгт харгалзах Лагранжийн үржигдэхүүн.

$$\tilde{A}=\frac{\partial^2L(x_0,y_0,\lambda_0)}{\partial x^2},\quad \tilde{B}=\frac{\partial^2L(x_0,y_0,\lambda_0)}{\partial x\partial y},\quad \tilde{C}=\frac{\partial^2L(x_0,y_0,\lambda_0)}{\partial y^2},$$
$$\Delta=\tilde{A}\tilde{C}-\tilde{B}^2,\quad \delta=A-2B\frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}+C\frac{(\varphi'_x(x_0,y_0))^2}{(\varphi'_y(x_0,y_0))^2}$$

1. Хэрэв $\Delta>0$ үед

   a) $\tilde{A}>0$ бол (x_0,y_0) цэг нь орчны минимумын цэг б) $\tilde{A} < 0$ бол (x_0, y_0) цэг нь орчны максимумын цэг

2. Хэрэв $\Delta \leq 0$ үед

а) $\delta < 0$ бол (x_0, y_0) цэг нь орчны максимумын цэг

б) $\delta > 0$ бол (x_0, y_0) цэг нь орчны минимумын цэг

Жишээ 0.3. $\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 + y^2 \to \min(\max) \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \end{array}$ *бодлогын хувьд экстремумыг хоёр аргаар ол.*

1) ***Хувьсагчийг зайлуулах арга:***

Бодлогын нөхцөлөөс y-г x-ээр илэрхийлбэл $y = 3 - \dfrac{3x}{2}$ *Үүнийг зорилгын функц* $f(x,y) = x^2 + y^2$*-д орлуулбал x-ээс хамаарсан нэг хувьсагчийн функцийн экстремум олох бодлого гарна.*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = x^2 + \left(3 - \frac{3x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(13x^2 - 36x + 36)$$

Функцийн сэжигтэй цэгийг олбол

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{4}(26x - 36) = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{18}{13}$$

Нөгөө талаар $f''_{x^2} = \dfrac{13}{2} > 0$ *тул* $x_0 = \dfrac{18}{13}$ *цэг нь минимумын цэг болно. Иймд* $x_0 = \dfrac{18}{13}$ *үед* $y_0 = \dfrac{12}{13}$ *байх ба* $f_{\min} = \dfrac{36}{13}$ *болно.*

2) ***Лагранжийн арга:*** *Лагранжийн функц зохиоё.*

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1\right)$$

сэжигтэй цэгүүдийг олбол:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \dfrac{1}{2}\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \dfrac{1}{3}\lambda = 0 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 1 = 0 \end{cases}$$

Эндээс $x_0 = \dfrac{18}{13}, \quad y_0 = \dfrac{12}{13}, \quad \lambda_0 = -\dfrac{72}{13}$ *байх ба*

$$\tilde{A} = \frac{\partial^2 L(x_0,y_0,\lambda_0)}{\partial x^2} = 2, \quad \tilde{B} = \frac{\partial^2 L(x_0,y_0,\lambda_0)}{\partial x \partial y} = 0, \quad \tilde{C} = \frac{\partial^2 L(x_0,y_0,\lambda_0)}{\partial y^2} = 2,$$

$$\Delta = \tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}^2 = 4 > 0, \quad \tilde{A} = 2 > 0$$

тул $\left(\dfrac{18}{13}, \dfrac{12}{13}\right)$ *цэг нь минимумын цэг болно.*

$$f_{\min} = \left(\frac{18}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{36}{13}$$