ЛЕКЦ 15. Тодорхой интегралыг бодох аргууд, өргөтгөсөн интеграл

Багш С. Уранчимэг

2021 он

1. Тодорхой интегралыг бодох аргууд.
2. Өргөтгөсөн интеграл.

Ньютон-Лейбницийн томьёо нь тодорхой интегралыг тодорхойгүй интегралыг боддог бүх аргаар бодох боломж олгоно.

Теорем

$[a, b]$ дээр дифференциалчлагдах $u(x), v(x)$ функцүүд өгөгдсөн гэе. Тэгвэл,

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

хэсэгчлэн интегралчлах томьёо хүчинтэй.

Жишээ (1.)

$\int\limits_1^e x\ln x dx$ хэсэгчлэн интегралчлах аргаар бод.

$$\int\limits_1^e x\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \implies v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x \,\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1) = 2.1$$

Теорем

$[a, b]$ дээр тасралтгүй $f(x)$ функц, $[\alpha, \beta]$ дээр тасралтгүй дифференциалчлагддаг ба $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ байх $x = \phi(t)$ функц өгөдсөн гэе.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt$$

хувьсагч солих томьёо хүчинтэй.

Жишээ (2.)

$\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$ орлуулах аргаар бод.

$$\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{1+x^2} \implies x=\pm\sqrt{t^2-1} \\ dx=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt,\ t_1=1,\ t_2=\sqrt{2} \end{array} \right|$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{2}} t\sqrt{t^2-1}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int\limits_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} = 0.61$$

Теорем

Хэрэв $f(x)$ функц $[-a, a]$ дээр дифференциалчлагддаг бол

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) - \text{тэгш бол} \\ 0, & f(x) - \text{сонгой бол} \end{cases}$$

Хэрэв $f(x)$ нь T үетэй функц ба $\forall a \in \mathbb{R}$ хувьд $[a, a+T]$ дээр интегралчлагддаг бол

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

Жишээ (4.)

$\int\limits_{-2022}^{2022} x^{2021} dx$ тодорхой интегралыг бод.

$$\int\limits_{-2022}^{2022} x^{2021} dx = 0$$

Жишээ (5.)

$\int\limits_{-1}^{1} x^{4} dx$ тодорхой интегралыг бод.

$$\int\limits_{-1}^{1} x^{4} dx = 2\int\limits_{0}^{1} x^{4} dx = 2\frac{x^5}{5}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Жишээ (6.)

$\int_0^{6\pi} \sin x dx$ тодорхой интегралыг бод.

$$\int_0^{6\pi} \sin x dx = 3\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

Интегралчлах завсар төгсгөлгүй эсвэл $f(x)$ функц интегралчлах завсар дээр тасралттай үед өргөтгөсөн интеграл гарна.

Тодорхойлолт

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_a^t f(x)dx \tag{1}$$

хязгаарыг I төрлийн өргөтгөсөн интеграл гэнэ. Тэмдэглэгээ,

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_a^\infty f(x)dx \tag{2}$$

Төгсгөлгүй завсраар авах өргөтгөсөн интеграл нь I төрлийн өргөтгөсөн интеграл юм.

Хэрэв (1) хязгаар төгсгөлөг бол (2) өргөтгөсөн интегралыг нийлэх, харин (1) хязгаар төгсгөлгүй эсвэл оршин байхгүй бол (2)-ыг сарнидаг өргөтгөсөн интеграл гэнэ.
Үүнтэй төсөөтэйгээр,

$$\lim_{t\to-\infty}\int_A^b f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

I төрлийн өргөтгөсөн интеграл байна.

Нийлэх өргөтгөсөн интегралын хувьд тодорхой интегралын бүх чанар биелнэ.

$F(x)$ нь $f(x)$ функцийн эх функц ба $[a, \infty]$ дээр тасралтгүй бол

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty = \lim_{t\to\infty} F(t) - F(a)$$

Жишээ (7.)

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ өргөтгөсөн интегралын нийлэлт эсвэл сарнилтыг тогтоо.

Бодолт.

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_1^t \frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^t =$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2} - \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{x=1} = 0 + \frac{1}{2} = 0.5$$

Нийлдэг өргөтгөсөн интеграл байна.

Тодорхойлолт (II төрлийн өргөтгөсөн интеграл.)

1. $f(x)$ функц $[a, b)$ дээр тасралтгүй гэе. Тэгвэл,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

2. $f(x)$ функц $(a, b]$ дээр тасралтгүй гэе. Тэгвэл,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Хэрэв хязгаар төгсгөлөг бол өргөтгөсөн интегралыг нийлдэг, хэрэв хязгаар төгсгөлгүй эсвэл оршихгүй бол өргөтгөсөн интегралыг сарнидаг гэнэ.

Тодорхойлолт (II төрлийн өргөтгөсөн интеграл.)

3. Хэрэв $f(x)$ функц $[a, b]$ хэрчмийн $c \in [a, b]$ цэгээс бусад цэг дээр тасралтгүй бол

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Хэрэв хоёр хязгаар хоёул төгсгөлөг бол өргөтгөсөн интегралыг нийлдэг, ядаж нэг нь төгсгөлгүй эсвэл оршин байхгүй бол сарнидаг гэнэ.

Жишээ (8.)

$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ өргөтгөсөн интегралын нийлэлт эсвэл сарнилтыг тогтоо.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to 0} \int\limits_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to 0} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = 2\sqrt{x}\Big|_{x=1} - \lim_{t \to 0} 2\sqrt{t} = 2$$

Нийлдэг өргөтгөсөн интеграл байна.

Өргөтгөсөн интегралын нийлэлтийг тогтоох шинжүүр.

Теорем (Кошийн шинжүүр.)

$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ өргөтгөсөн интеграл нийлнэ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ тоо авахад $\exists B > 0$ тоо олдоод $B' > B,\ B'' > B$ байх B', B'' хувьд

$$\left| \int\limits_{B'}^{B''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

биелнэ.

Теорем (Жиших шинжүүр 1.)

$f(x), g(x)$ функцүүд $[a, \infty)$ дээр тасралтгүй ба $x \geq a$ үед $g(x) \geq f(x) \geq 0$ гэе.
Хэрэв

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx = +\infty$$

бол

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t g(x)dx = +\infty$$

байна.

Теорем (Жиших шинжүүр 1.-ийн үргэлжлэл)

$f(x), g(x)$ функцууд $[a, \infty)$ дээр тасралтгүй ба $x \geq a$ үед $g(x) \geq f(x) \geq 0$ гэе.
Хэрэв

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t g(x)dx = L$$

L бодит тоо бол

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx = M$$

байна. Энд, $L \geq M$ байх бодит тоо.

Теорем (Жиших шинжүүр 2.)

$f(x), g(x)$ функцүүд $[a, \infty)$ дээр тасралтгүй, эерэг ба $[a, b]$ дээр интегралчлагддаг байг.
Хэрэв

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$$

L бодит тоо бол

$$\int\limits_a^\infty g(x)dx, \quad \int\limits_a^\infty f(x)dx$$

өргөтгөсөн интегралууд зэрэг нийлнэ эсвэл зэрэг сарнина.

Тодорхойлолт

Хэрэв

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

нийлж байвал

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

абсолют нийлдэг өргөтгөсөн интеграл гэнэ.

Тодорхойлолт

Хэрэв

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

сарниад

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

нийлбэл нөхцөлт нийлдэг өргөтгөсөн интеграл гэнэ.