ЛЕКЦ 13. Хоёрдугаар төрлийн муруй шугаман интеграл. Замаас үл хамаарах нөхцөл, Грины томъёо

Чиглэл тогтоосон гөлгөр муруй γ-ийн цэг бүрт скаляр функц $f(M)$ тодорхойлогдсон бөгөөд M цэгт татсан шүргэгчийн дагуух нэгж вектор $\overline{\tau_0} = \overline{\tau_0}(M)$ болог. Түүнчлэн γ муруй дээр $\overline{F}(M)$ вектор функц тодорхойлогдсон ба тасралтгүй байг. Дараах нэгдүгээр төрлийн муруй шугаман интеграл авъя.

$$\int\limits_{\gamma} f(M) \cdot dl \qquad (ds = dl) \tag{1}$$

Тодорхойлолт 0.1. *Хэрэв (1) интегралын f функц нь $\overline{\tau_0}$ ба $\overline{F}$ векторын скаляр үржвэр болж байвал*

$$\int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot \overline{\tau_0} dl, \quad f = (\overline{F}, \overline{\tau_0}) \tag{2}$$

интегралыг $\overline{F}$ векторoос γ муруйгаар авсан хоёрдугаар төрлийн муруй шугаман интеграл гэж нэрлэнэ.

$$\overline{\tau_0} \cdot dl = d\overline{r} \tag{3}$$

хамаарлыг ашиглавал (2) томъёо дараах хэлбэрт шилжинэ.

$$\int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot \overline{\tau_0} dl = \int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} \tag{4}$$

Декартын координатын системд

$$\begin{cases} \overline{F} = F_x i + F_y j + F_z k \\ d\overline{r} = dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k \\ \overline{\tau_0} = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k \end{cases} \tag{5}$$

байх тул (4)-ийг дараах байдлаар бичиж болно.

$$\int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int\limits_{\gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int\limits_{\gamma} (F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma) dl \tag{6}$$

Чанарууд:

1. Муруйн чиглэл солигдоход хоёрдугаар төрлийн муруй шугаман интеграл тэмдгээ эсрэгээр өөрчилнө.

   $$\int\limits_{(AB)} \overline{F} \cdot d\overline{r} = - \int\limits_{(BA)} \overline{F} \cdot d\overline{r} \tag{7}$$

   Учир нь (AB) муруйн шүргэгчийн дагуух нэгж вектор $\overline{r_0}$ гэвэл муруйн чиглэл солигдоход шүргэгчийн дагуу орших нэгж вектор $\overline{\tau_0^1} = -\overline{\tau_0}$ болох тул

   $$\int\limits_{(BA)} \overline{F} \cdot d\overline{r} = - \int\limits_{(BA)} \overline{\tau_0^1} \cdot \overline{F} dl = - \int\limits_{(AB)} \overline{F} \cdot \overline{\tau_0} dl = - \int\limits_{(AB)} \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

   байна.

2. Хэрэв γ муруй нь төгсгөлөг тооны гөлгөр муруйгаас бүрдэж байвал $\left(\gamma = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k\right)$, энэхүү хэсэг хэсгээр гөлгөр муруйн хувьд хоёрдугаар төрлийн муруй шугаман интеграл бас тодорхойлогдоно.
$$\int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} \tag{8}$$

3. Хоёрдугаар төрлийн муруй шугаман интеграл (6) нь физик утгаараа хүчний тасралтгүй оронд материал цэг γ муруйгаар шилжих үеийн ажлын илэрхийлнэ.
$$A = \int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot \overline{\tau_0} \cdot dl = \int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} \tag{9}$$

   а) Хэрэв муруй вектор төсөөллөөр $\overline{r} = \overline{r}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ өгөгдсөн бол ажлыг дараах томъёогоор бодно.
$$A = \int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \overline{F}(M(t)) \cdot \overline{r}'(t) \cdot dt \tag{10}$$

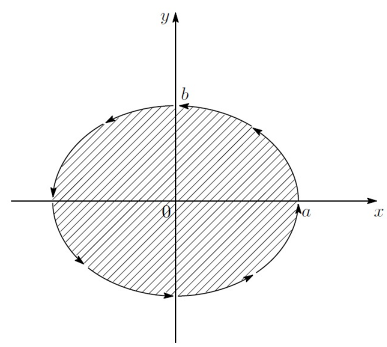
   Энэ томъёонд $\overline{r}'(t)$-ийн утгыг тавибал Декартын координатын системд ажлыг олох томъёо гарна.
$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [F_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + F_y(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + \\ + F_z(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)] \cdot dt\end{aligned} \tag{11}$$

   б) Хэрэв $\overline{F}$ нь хавтгайн орон бөгөөд γ нь ил тэгшитгэлээр $y = y(x),\ a \le x \le b$ өгөгдсөн бол ажлыг дараах томъёогоор бодно.
$$A = \int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x)) \cdot y'(x)] \cdot dx \tag{12}$$

   Хэрэв γ нь $x = x(y),\ c \le y \le d$ тэгшитгэлтэй бол
$$A = \int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int\limits_{c}^{d} [f_x(x(y), y) \cdot x'(y) + F_y(x(y), y)] \cdot dy \tag{13}$$

   томъёогоор бодно.

Санамж: Битүү (C) хүрээгээр хязгаарлагдсан хавтгайн дүрс (D)-ийн талбайг муруй шугаман интегралаар дараах томъёо ашиглан тодорхойлж болно.
$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{(C)} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int\limits_{(C)} \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} \tag{14}$$



Зураг 1:

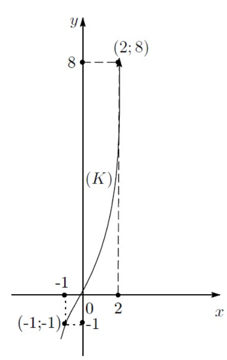
Жишээ 0.1. $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ (0 \le t \le 2\pi)$ эллипсээр хүрээлэгдсэн талбайг муруй шугаман интегралаар тодорхойл.

Бодолт: $dx = -a\sin t dt,\ dy = b\cos t dt$ (зураг 3.4)

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t \\ -a\sin t dt & b\cos t dt \end{vmatrix} = abdt$$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{(C)} abdt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} abdt = \pi ab \quad \text{(кв.нэгж)}$$

Жишээ 0.2. $\int\limits_{(K)} xydx + x^2dy = ?,\ K:\ y = x^3$ муруйн $-1 \le x \le 2$ завсар орших нум (зураг 3.5)



Зураг 2:

Бодолт: $dy = 3x^2dx$

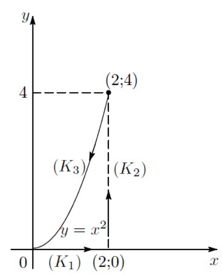
$$\int\limits_{(K)} xydx + x^2dy = \int\limits_{-1}^{2} x(x^3)dx + x^2(3x^2)dx = \int\limits_{-1}^{2} 4x^4dx = \frac{4}{5}x^5\Big|_{-1}^{2} = \frac{132}{5}$$

Жишээ 0.3. $\oint\limits_{(K)} xdx = ?,\ K:\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$

Бодолт: $\oint\limits_{(K)} xdx = \int\limits_0^{2\pi} \cos t(-\sin t)dt = \frac{1}{2}\cos^2 t\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$

Жишээ 0.4. $\oint\limits_{(K)} y^2dx - x^2dy = ?,\ K:$ зурагт үзүүлсэн битүү шугам

$(K = K_1 \bigcup K_2 \bigcup K_3)$ (зураг 3.6)



Зураг 3:

Бодолт: $\int\limits_{(K)} = \int\limits_{(K_1)} + \int\limits_{(K_2)} + \int\limits_{(K_3)}$

$$\int\limits_{(K_1)} y^2dx - x^2dy = \int\limits_0^2 0\cdot dx - x^2 \cdot 0 = 0$$

$$\int\limits_{(K_2)} y^2dx - x^2dy = \int\limits_0^4 y^2\cdot 0 - \int\limits_0^4 4dy = -4y\Big|_0^4 = -16$$

$K_3:\ y = x^2,\ dy = 2xdx$

$$\int\limits_{(K_3)} y^2dx - x^2dy = \int\limits_2^0 x^4dx - x^2(2xdx) = \int\limits_2^0 (x^4 - 2x^3)dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}\right)\Big|_2^0 = \frac{8}{5}$$

$$\oint\limits_{(K)} y^2dx - x^2dy = 0 + (-16) + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}$$

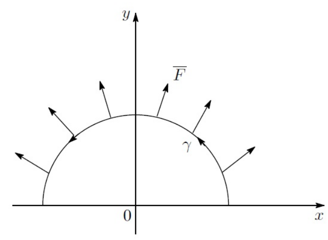
Жишээ 0.5. $\int\limits_{(\gamma)} ydx + xdy + zdz = ?,$

$\gamma:\ x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t,\ (0 \le t \le 2\pi)$

Бодолт: $dx = -2\sin tdt,\ dy = 2\cos tdt,\ dz = dt,\ \overline{F}(y,x,z),\ d\overline{r} = idx + jdy + kdz$ тул

$\int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int\limits_{(\gamma)} ydx + xdy + zdz = \int\limits_{0}^{2\pi} 2\sin t(-2\sin tdt) + 2\cos t 2\cos tdt + tdt = \int\limits_{0}^{2\pi} (-4\sin^2 t +$
$4\cos^2 t)dt + tdt = \int\limits_{0}^{2\pi} (4\cos 2t + t)dt = (2\sin 2t + \frac{t^2}{2})\Big|_{0}^{2\pi} = 2\pi^2$

Жишээ 0.6. $\overline{r}(t) = \cos t \cdot i + \sin t \cdot j,\ 0 \le t \le \pi$ тэгшитгэл бүхий γ муруйн цэгүүдэд үйлчлэх $\overline{F} = xi + yj$ хүчний гүйцэтгэх ажлыг ол.



Зураг 4:

Бодолт: $\overline{r}(t)$ вектор функц, $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le \pi$ параметрт тэгшитгэлээр өгөгдсөн хагас тойргийг өгч байна. $x^2 + y^2 = 1$ $\overline{F}$ нь γ-ийн цэгт бүрт перпендикуляраар чиглэх тул түүний шүргэгч дээрх (зураг 3.7) байгуулагч тэг байх ба $\overline{F}$-ийн гүйцэтгэх ажил тэгтэй тэнцүү байх болно. үүнд:
$A = \int\limits_{\gamma} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int\limits_{(\gamma)} (xi + yj)d\overline{r} = \int\limits_{0}^{\pi} (\cos t \cdot i + \sin t \cdot j)(-\sin t \cdot i + \cos t \cdot j)dt = \int\limits_{0}^{\pi} (-\cos t \sin t +$
$\cos t \sin t)dt = 0$

Муруй шугаман интеграл замаас үл хамаарах нөхцөл

Теорем 0.1. *Муруй шугаман интеграл*

$$\int\limits_{L} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int\limits_{L} F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{15}$$

интегралчлах замын хэлбэрээс хамаарахгүй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь интегралын доорхи дифференциал илэрхийлэл, нэг холбоост G мужид гурван хувьсагчийн ямар нэг $u(x, y, z)$ функцийн бүтэн дифференциал

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = du \tag{16}$$

болж байх явдал болно.

Хэрэв (16) нөхцлийг хангах $u(x, y, z)$ функц орших бол

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F_x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = F_y,\ \frac{\partial u}{\partial z} = F_z$$

ба II эрэмбийн тухайн уламжлалууд тасралтгүй байхад

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x},\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \tag{17}$$

нөхцлүүд нь $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ илэрхийлэл u функцийн бүтэн дифференциал болж байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл байдаг.

Теорем 0.2. *Нэг холбоост G мужид муруй шугаман интеграл (15) интегралчлах замаас үл хамаарах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь тасралтгүй дифференциалчлагдах компонентууд бүхий вектор орон $\overline{F} = F_x i + F_y j + F_z k$ хуйлралгүй (орон) байх явдал юм. өөрөөр хэлбэл*

$$rot\overline{F} = 0 \tag{18}$$

байхад оршино.

Жишээ 0.7. $\int\limits_{\gamma}(x^2-2y^3)dx+(x+5y)dy$ интеграл γ замаас хамаарах эсэхийг үзүүл.

Бодолт: $\overline{F}(P;Q)$ гэвэл $P = x^2-2y^3,\ Q = x+5y$ тул

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

болж үндсэн теоремын нөхцөл биелэхгүй байна. Иймд интеграл замаас хамаарна. Өөрөөр хэлбэл $(x^2-2y^3)dx+(x+5y)dy$ дифференциал илэрхийлэл ямар нэг функцийн бүтэн дифференциал биш юм.

Жишээ 0.8. $\int\limits_{\gamma}(y^2-6xy+6)dx+(2xy-3x^2)dy$ интеграл, $(-1;0)$ ба $(3;4)$ цэгүүдийг холбосон ямар ч замаас өөрөөр хэлбэл замын хэлбэрээс хамаарахгүй болохыг үзүүлж, интегралыг бод.

Бодолт: 1) $\overline{F}(P;Q)$ гэвэл $P = y^2-6xy+6,\ Q = 2xy-3x^2$ тул

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y-6x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y-6x,\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

нөхцөл биелэх учир интегралын утга замаас хамаарахгүй.

2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2-6xy+6,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy-3x^2$ байх u функцийг олъё.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$-ийг x-ээр интегралчилбал $u = y^2x-3x^2y+6x+g(y)$ болно. $g(y)$-интегралчлалын тогтмол. u-аас y-ээр авсан тухайн уламжлал Q-тэй тэнцүү гэдгээс:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy-3x^2+g'(y) = 2xy-3x^2 = Q,\ g'(y) = 0$$

тул $g(y) = C$ байна. C-тогтмол.

$(y^2-6xy+6)dx+(2xy-3x^2)dy$ илэрхийллээс $d(y^2x-3x^2y+6x+C)$ буюу $d(y^2x-3x^2y+6x)$ гарч байгаа тул $u = xy^2-3x^2y+6x$ байна.

$$\int\limits_{(-1;0)}^{(3;4)}(y^2-6xy+6)dx+(2xy-3x^2)dy = \int\limits_{(-1;0)}^{(3;4)} d(xy^2-3x^2y+6x) =$$

$$= \left(xy^2 - 3x^2y + 6x\right)\Big|_{(-1;0)}^{(3;4)} = (48 - 108 + 18) - (-6) = -36$$

3) Эсвэл $(-1;0)$ ба $(3;4)$ цэгүүдийг холбосон хэрчмээр интегралыг бодож болно. Энэ хэрчмийн тэгшитгэл

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-0}{4-0}$$

буюу $y = x+1$ тул $[-1;3]$ завсарт

$$\int_\gamma (y^2-6xy+6)dx+(2xy-3x^2)dy = \int_{-1}^{3} \left[(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6\right] dx + \left[2x(x+1) - 3x^2\right]\cdot 1\cdot dx =$$

$$\int_{-1}^{3} (-6x^2 - 2x + 7)dx = -36$$

Жишээ 0.9. $\overline{F} = (y^2+5)i + (2xy-8)j$ орны вектор нь орны градиент болохыг үзүүл. $\overline{F}$ орны потенциал функцийг ол.

Бодолт: $P = y^2+5,\ Q = 2xy-8$ тул $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ байна. Иймд $\overline{F}$ нь орны градиент юм.

Одоо u потенциалыг олъё.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2+5,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy-8$$

Дээрх жишээнд үзүүлсэн зарчмаар потенциалын функцийг олоход $u = x^2y - 8y + 5x$ байна.

Потенциалт орон, потенциалыг тодорхойлох

Хэрэв G мужийн бүх цэг дээр

$$\overline{F}(M) = grad\ u(M), \quad M \in G \tag{19}$$

байх скаляр функц $u(M)$ орших бол

$$\overline{F}(M) = F_x(x,y,z)i + F_y(x,y,z)j + F_z(x,y,z)k$$

векторийн оронг потенциалт орон гэнэ. Вектор тэнцэтгэл (19) нь дараах гурван скаляр тэнцэтгэл өгөгдөхтэй адил юм. Үүнд:

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial u}{\partial y},\ F_z = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{20}$$

өөрөөр хэлбэл

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = du \tag{21}$$

байна. Эндээс u потенциалыг тогтмол хэмжигдэхүүний нарийвчлалтайгаар тодорхойлно.

Теорем 0.3. *Нэг холбоост G мужид вектор орон*

$$\overline{F}(M) = F_x i + F_y j + F_z k$$

потенциалт орон байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\overline{F}(M)$ орон хуйлралгүй байхад оршино. Өөрөөр хэлбэл

$$rot\overline{F}(M) = 0,\ \forall M \in G \tag{22}$$

байхад оршино.

(22) нь теорем (0.2) биелэх нөхцөл тул хуйлралгүй оронд

1) **интеграл $\int\limits_L \overline{F}d\overline{r}$ интегралчлах замын хэлбэрээс хамаарахгүй, зөвхөн замын эх ба төгсгөлийн цэгийн байрлалаас хамаарна.**

2) **Хэрэв $\overline{F}$ хүчний вектор бол түүний AB муруйн дагуу гүйцэтгэх ажлыг циркуляци [1] гэнэ. Дурын битүү L хүрээгээр бодсон $\overline{F}$ хүчний векторын циркуляци тэгтэй тэнцүү байдаг, циркуляцийг Ц-ээр тэмдэглэе.**

$$\text{Ц} = \oint\limits_L \overline{F}d\overline{r} = 0 \tag{23}$$

Теорем 0.4. *$\overline{F}(M)$ потенциалт оронд муруй шугаман интегралын утга нь орны $u(M)$ потенциалын ялгавартай тэнцүү.*

$$\int\limits_{(M_0)}^{(M)} \overline{F}d\overline{r} = u(M)\Big|_{(M_0)}^{(M)} = u(M) - u(M_0) \tag{24}$$

Циркуляцийн физик утгаас потенциалт орны бас нэгэн тодорхойлолт гаргаж болно.

Тодорхойлолт 0.2. *Хэрэв вектор оронд дурын битүү муруйн дагуух орны ажил тэгтэй тэнцэж байвал түүнийг потенциалт орон гэнэ.*

Орны потенциалыг дараах томъёогоор тодорхойлно.

$$\overline{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)i + F_y(x, y, z)j + F_z(x, y, z)k$$

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z} F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{25}$$

Интегралчлах хүрээг сонгохдоо эхний цэгийг бэхэлнэ. Гэхдээ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ цэгийн координат нь $\overline{F}$ ба $rot\overline{F}$ векторууд орших нөхцөлүүдийг заавал хангах ёстой. M_0-ийг хувьсах цэг $M(x, y, z)$-тэй тахир шугамаар холбохдоо, координатын тэнхлэгүүдтэй параллель талуудтай байхаар гүйцэтгэе. (зураг 3.8)

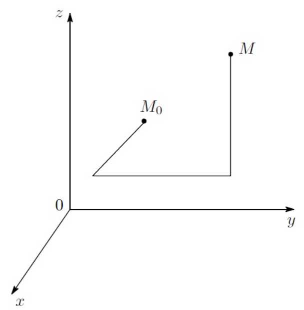
$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} F_z(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x, y, z)dz$$

Энэ зарчмаар потенциалт оронд ажлыг тооцно.

[1]

(a) латин үг (оросоор бол круговащение, круговое двишение гэх мэт утгатай юм. Жишээ нь: циркуляция крови-цусны эргэлт)

(b) Хий ба шингэний эргэлдэн урсах хөдөлгөөн юм



Зураг 5:

Жишээ 0.10. Вектор орон

$$\overline{F} = (y+z)i + (x+z)j + (x+y)k$$

потенциалт орон болохыг баталж, түүний потенциалыг ол.

Бодолт: $\overline{F}$ потенциал орон байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл $rot\overline{F}(M) = 0$-ыг шалгая.

$$rot\overline{F}(M) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k = 0$$

Иймд энэ нь потенциалт орон болно. потенциалыг олохын тулд бэхлэгдсэн M_0 цэгээр координатын эхийг авъя. Тэгвэл

$$u(x,y,z) = \int\limits_0^x (0+0)dx + \int\limits_0^y (x+0)dy + \int\limits_0^z (x+y)dz = xy + xz + yz + C$$

$$u(x,y,z) = xy + xz + yz + C$$

Жишээ 0.11. Вектор орон

$$\overline{F} = yz^2 i + xz^2 j + 2xyzk$$

потенциал орон болохыг баталж, $M_0(0;0;0)$ цэгээс $M(1;2;1)$ цэгт шилжих үеийн орны ажлыг бод.

Бодолт: $F_x = yz^2,\ F_y = xz^2,\ F_z = 2xyz$ тул

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = 2yz = \frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = 2zx = \frac{\partial F_z}{\partial y},\ \frac{\partial F_x}{\partial y} = z^2 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

болно. Орон потенциалт орон байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл биелэв. Орны ажлыг олъё.

$$A = \int\limits_{(0;0;0)}^{(1;2;1)} \overline{F}d\overline{r} = \int\limits_0^1 yz\Big|_{y=0,z=0} dx + \int\limits_0^2 xz^2\Big|_{x=1,z=0} dy + \int\limits_0^1 2xyz\Big|_{x=1,y=2} dz = 2$$

Жишээ 0.12. $\int\limits_{\gamma}(y+yz)dx+(x+3z^3+xz)dy+(9yz^2+xy-1)dz$ интеграл замаас хамаарахгүй болохыг үзүүлж, интегралыг бод. $\gamma:$ $(1;1;1)$ ба $(2;1;4)$ цэгүүдийг холбосон ямар нэг муруй.

Бодолт: $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ интеграл нь зөвхөн

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

байхад л γ замаас үл хамаардаг.

$$P = y + yz, \quad Q = x + 3z^3 + xz, \quad R = 9yz^2 + xy - 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 9z^2 + x = \frac{\partial R}{\partial y}$$

тул өгсөн интеграл замаас үл хамаарна. Интегралын доорхи илэрхийлэл ямар функцийн бүтэн дифференциал болохыг тогтоогоод өгсөн интегралыг бодъё.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial u}{\partial z} = R$$

байх $u(x,y,z)$-ийг олъё. Энэ гурван тэгшитгэлийн эхнийхийг x-ээр интегралчилбал

$$u = xy + xyz + g(y,z)$$

Эндээс

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = Q = x + 3z^3 + xz$$

тул

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 3z^3, \quad g = 3z^3y + h(z)$$

байна. Иймд

$$u = xy + xyz + 3z^3y + h(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy + 9yz^2 + h'(z) = R = 9yz^2 + xy - 1$$

Эндээс $h'(z) = -1$ буюу $h(z) = -z + C$ байна. C-г орхивол

$$u = xy + xyz + 3yz^3 - z$$

$$\int\limits_{(1;1;1)}^{(2;1;4)} (y+yz)dx + (x+3z^3+xz)dy + (9yz^2+xy-1)dz =$$

$$= \int\limits_{(1;1;1)}^{(2;1;4)} d(xy + xyz + 3yz^3 - z) =$$

$$= \left. (xy + xyz + 3yz^3 - z)\right|_{(1;1;1)}^{(2;1;4)} = 198 - 4 = 194$$

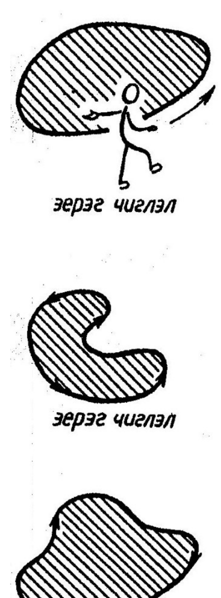
$$\overline{F}(x,y,z) = (y + yz)i + (x + 3z^3 + xz)j + (9yz^2 + xy - 1)k$$

$\overline{F} = \overline{\nabla} u$ тул u нь потенциал юм.

Грины томъёо

Битүү мужаар авсан хоёрлосон интеграл ба уг мужийн хөвөө болох битүү хүрээгээр бодсон муруй шугаман интегралын хоорондын холбоог Грины томъёо тогтооно.

Хэрэв мужийн хүрээний дагуу тойроход муж зүүн гар талд үлдэх бол хүрээний чиглэлийг эерэг, эсрэг тохиолдолд сөрөг гэнэ. Эерэг чиглэл тогтоосон хүрээг γ^+-ээр, сөрөг чиглэл тогтоосон хүрээг γ^--аар тэмдэглэнэ. Хэрэв G мужийн хөвөө нь $[a,b]$ хэрчим дээр тасралтгүй $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ функцүүд, $x = a$, $x = b$ шулуунаас тус тус бүрдэж байвал G мужийг Oy тэнхлэгийн хувьд энгийн муж гэнэ. (зураг 3.9) Хэрэв хэсэгчилсэн гөлгөр хүрээ бүхий мужийг координатын тэнхлэгүүдийн хувьд энгийн муж байх төгсгөлөг тоотой мужид хуваах болох бол түүнийг бас энгийн муж гэнэ.



Зураг 6:

Теорем 0.5. *Хэрэв G энгийн муж бөгөөд*

$$\overline{F} = F_x(x,y)i + F_y(x,y)j$$

вектор функц, $\dfrac{\partial F_x}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ *тухайн уламжлалуудынхаа хамт битүү* $\overline{G} = G + \gamma$ *мужид* *тасралтгүй бол*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{\gamma^+} F_x dx + F_y dy \tag{26}$$

Грины томъёо хүчинтэй байна.

Баталгаа: Эхлээд Oy тэнхлэгийн хувьд энгийн $G = G_y$ мужид батлая. Энэ мужид $\iint\limits_G \frac{\partial F_x}{\partial y} dxdy$ хоёрлосон интегралыг цуварсан тодорхой интегралуудаар солъё.

$$\iint\limits_{\gamma^+} \frac{\partial F_x}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial F_x}{\partial y} dy = \int\limits_a^b F_x(x,\psi(x))dx - \int\limits_a^b F_x(x,\varphi(x))dx \tag{27}$$

Тодорхой интеграл тус бүрийг муруй шугаман интегралаар солъё.

$$\int\limits_a^b F_x(x,\psi(x))dx = \int\limits_{MKN} F_x(x,y)dx = -\int\limits_{NKM} F_x(x,y)dx$$

$$\int\limits_a^b F_x(x,\varphi(x))dx = \int\limits_{ABC} F_x(x,y)dx$$

MA **ба** CN **хэрчмүүд дээр** $dx = 0$ **тул** $\int\limits_{MA} F_x dx = 0$, $\int\limits_{CN} F_x dx = 0$ **байна. Иймд (27) дараах байдлаар бичигдэнэ.**

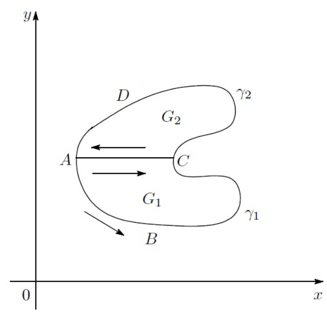
$$\iint\limits_{G_y} \frac{\partial F_x}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{AC} F_x dx - \int\limits_{CN} F_x dx - \int\limits_{NM} F_x dx - \int\limits_{MA} F_x dx = -\oint\limits_{\gamma} F_x dx \tag{28}$$

Хэрэв G мужийг Ox тэнхлэгийн хувьд энгийн муж гэж үзвэл $G = G_x$ мужийн хувьд дээрхийн адил дүгнэлтээр

$$\iint\limits_{G_x} \frac{\partial F_y}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{\gamma} F_y dy \tag{29}$$

болно. Эцэст нь (28) ба (29) тэнцлүүдийг нэмэхэд (26) гарч батлагдана. Одоо $G = G_1 \bigcup G_2$ байх тохиолдолд баталъя. (зураг 3.10) G_1 мужийн хөвөө нь $\gamma_1 = ABCA$ хүрээ, G_2 мужийн хөвөө $\gamma_2 = ACDA$ хүрээ юм. G_1 ба G_2 муж бүрд Грины томъёо биелэгдэх тул дараах тэнцлийг бичиж болно.

$$\iint\limits_{G_1} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dxdy + \iint\limits_{G_2} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{\gamma_1} F_x dx + F_y dy + \oint\limits_{\gamma_2} F_x dx + F_y dy \tag{30}$$



Зураг 7:

$G = G_1 \bigcup G_2$ тул (30)-ийн зүүн хэсэг нь G мужаар авсан хоёрлосон интеграл юм. (30) дахь хүрээгээр авсан интегралуудыг дараах байдлаар бичиж болно.

$$\oint\limits_{\gamma_1} F_x dx + F_y dy = \int\limits_{ABC} F_x dx + F_y dy + \int\limits_{CA} F_x dx + F_y dy$$

$$\oint\limits_{\gamma_2} F_x dx + F_y dy = \int\limits_{CDA} F_x dx + F_y dy + \int\limits_{AC} F_x dx + F_y dy$$

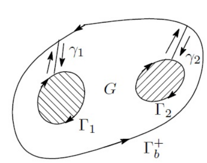
$$\int\limits_{CA} F_x dx + F_y dy = -\int\limits_{AC} F_x dx + F_y dy$$

тул

$$\oint\limits_{\gamma_1} F_x dx + F_y dy + \oint\limits_{\gamma_2} F_x dx + F_y dy = \oint\limits_{ABCDA} F_x dx + F_y dy = \oint\limits_{\gamma} F_x dx + F_y dy$$

Ийнхүү энэ тохиолдолд Грины томъёо батлагдав.

Санамж 1: Хөвөө нь хэсэгчилсэн гөлгөр хүрээнүүдээс бүрдэх олон холбоост муж G-ийн хувьд Грины томъёо биелнэ. (зураг 3.11)



Зураг 8:

Жишээ 0.13. Грины томъёогоор

$$\oint\limits_{C} (6xy + 5y)dx + (3x^2 + 5x)dy$$

интеграл тэгтэй тэнцэхийг үзүүл.

Бодолт: $\overline{F}\{P;Q\}$ гэвэл

$$P(x,y) = 6xy + 5y, \quad Q(x,y) = 3x^2 + 5x$$

тул

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x + 5, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 5$$

Иймд Грины томъёогоор

$$\oint\limits_C (6xy + 5y)dx + (3x^2 + 5x)dy = \iint\limits_D [(6x+5) - (6x+5)]dxdy = \iint\limits_D 0 \cdot dxdy = 0$$

болж байна. Эсвэл шууд $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ нөхцөл биелсэн тул өгсөн интегралын доорхи илэрхийлэл, ямар нэгэн функцийн бүтэн дифференциал болно. Иймд битүү хүрээгээр бодсон муруй шугаман интеграл тэгтэй тэнцэнэ.

Жишээ 0.14. Дараах интегралыг Грины томъёогоор бод.

$$J = \oint\limits_C \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy$$

C нь $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ (y > 0)$ тойргуудын нум, $y = x,\ y = \sqrt{3}x,\ (y > 0)$ шулууны хэрчмүүдээс бүрдсэн битүү хүрээ юм.

Бодолт: $\overline{F}\{P.Q\}$ гэвэл

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{x^2 + y^2},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

тул

$$J = \oint\limits_C \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy = \iint\limits_D \frac{1}{x^2 + y^2} dxdy$$

Туйлын координатын системд бодвол D мужид

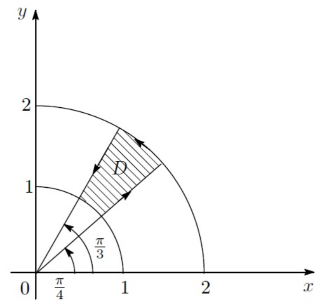
$$\left(\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right), \quad 1 \le \rho \le 2, \quad x^2 + y^2 = \rho^2$$

байна. (зураг 3.12)

$$J = \iint\limits_D \frac{1}{\rho^2} |\rho| d\rho d\varphi = \iint\limits_D \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_1^2 \frac{1}{\rho} d\rho = \varphi \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \ln \rho \Bigg|_1^2 = \frac{\pi}{12} \ln 2$$

Жишээ 0.15. Дараах интегралыг Грины томъёогоор бод.

$$J = \oint\limits_\gamma -x^2 y dx + xy^2 dy$$



Зураг 9:

$\gamma:\ x^2+y^2=a^2$ тойргийн эерэг чиглэл

Бодолт: $\overline{F}\{P,Q\}$ гэвэл

$$P(x,y)=-x^2y,\ Q(x,y)=xy^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=-x^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$$

тул Грины томъёогоор

$$J=\oint\limits_{\gamma}-x^2ydx+xy^2dy=\iint\limits_{D}[y^2-(-x^2)]dxdy=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$$

Туйлын координатад шилжүүлж бодвол:

$$0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le a,\quad |J|=\rho,\quad x^2+y^2=\rho^2$$

тул

$$J=\iint\limits_{D}\rho^2\cdot\rho\cdot d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}\rho^3d\rho=\frac{\pi a^4}{2}$$

Санамж 2: $J=\oint\limits_{\gamma^+}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ интегралыг Грины томъёогоор бодохдоо $P(x,y),\ Q(x,y)$ функцүүд $\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}$ тухайн уламжлалуудынхаа хамт γ хүрээ ба энэ хүрээгээр хязгаарлагдсан мужийн цэгүүд дээр тасралтгүй байхыг шалгах хэрэгтэй.