ЛЕКЦ 4. НЭГЭН ТӨРЛИЙН ШТС, ТЭГ БИШ ШИЙДТЭЙ БАЙХ ТЕОРЕМ. ХУВИЙН УТГА, ХУВИЙН ВЕКТОР ОЛОХ. ОРТОГОНАЛЬ МАТРИЦ, МАТРИЦЫГ ДИАГОНАЛЬЧЛАХ.

Багш С. Уранчимэг

2021 он

1. Нэгэн төрлийн ШТС тэг биш шийдтэй байх теорем.
2. Хувийн утга, хувийн вектор.
3. Ортогональ матриц.
4. Матрицыг диагональчлах.

n хувьсагчтай, m нэгэн төрлийн ШТС-ийг бичье.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Энд, $m \neq n$ байж болно.
$x_1, x_2, ..., x_n$ – үлмэдэгч,
$a_{11}, ..., a_{mn}$ – системийн коэффициентууд, бүх сул гишүүд тэг.

(1) ямагт $rang(A) = rang(A|0)$ тул нийцтэй байна.

$$(\underbrace{0\ 0\quad \dots\quad 0}_{n})^{\mathrm{T}}$$

тэг шийдийг илэрхий шийд гэнэ.
Шугаман матрицан тэгшитгэл:

$$A \cdot X = 0$$

Теорем

Нэгэн төрлийн ШТС тэгээс ялгаатай шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$rang(A) < n$$

Жишээ (1.)

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0\\ 4x_1+7x_2+5x_3=0\\ x_1+x_2-4x_3=0\\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$$

ШТС-ийн шийдийг ол.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2\\ 4 & 7 & 5\\ 1 & 1 & -4\\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{M_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4\\ 4 & 7 & 5\\ 3 & 5 & 2\\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[M_2-4M_1,M_3-3M_1]{M_4-2M_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4\\ 0 & 3 & 21\\ 0 & 2 & 14\\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}M_3]{\frac{1}{3}M_2,\frac{1}{7}M_4}$$

Жишээ (1.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[M_3-M_2]{M_4-M_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow rang(A) = 3$$

$rang(A) = n = 3$ тул ШТС цор ганц шийдтэй.

Нэгэн төрлийн ШТС илэрхий шийдтэй. $\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тодорхойлолт

$A_{n\times n}$ матрицын хувьд

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \tag{2}$$

ШТС тэгээс ялгаатай X шийдтэй байвал

- λ бодит тоог хувийн утга
- X векторыг λ хувийн утганд харгалзах хувийн вектор

гэнэ.

(2)-ын матрицан хэлбэр нь

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot X = 0 \tag{3}$$

$$det(A - \lambda \cdot I) = 0 \tag{4}$$

үед л (1) илэрхий биш шийдтэй байна. (4)-ийг A матрицын характеристик тэгшитгэл гэнэ.

Матрицын хувийн утга, хувийн векторыг олохдоо:

1. (4) -ийг бодож хувийн утгыг олно.
2. Хувийн утгыг (3)-д орлуулан $X \neq 0$ хувийн векторыг олно.

Жишээ (2)

$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$
матрицын хувийн утга, хувийн векторыг ол.

$$\det(A-\lambda\cdot I)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -7 & 8-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+6=0 \implies \begin{matrix} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=6 \end{matrix}$$

$\lambda_1=1$ үед

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0 \implies \begin{cases} -2x_1+2x_2=0 \\ -7x_1+7x_2=0 \end{cases} \implies x_1=x_2=t$$

$$X_1=\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}=(t \quad t)^T \quad t\neq 0 \quad X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Жишээ (2)

$\lambda_2 = 6$ үед

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -7x_1 + 2x_2 = 0 \\ -7x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{7}x_2 = \frac{2}{7}t$$

$$\mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}t \\ t \end{pmatrix} = (\frac{2}{7}t \quad t)^{\mathrm{T}} \quad t \neq 0 \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Хэрэв A матрицын хувийн утга, харгалзах хувийн векторууд

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad X_1, \quad X_2$$

бол A^{-1} матрицын хувийн утга, харгалзах хувийн векторууд

$$\frac{1}{\lambda_1}, \quad \frac{1}{\lambda_2}, \quad X_1, \quad X_2$$

байна.

Тодорхойлолт

A бөхөөгүй матрицын хувьд

$$A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$$

буюу

$$AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I$$

байвал ортогональ матриц гэнэ.

Жишээ (3)

$A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
матриц ортогональ уу ?

Жишээ (3)

$$AA^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{A} \quad \text{матриц ортогональ.}$$

Жишээ (4)

$$\mathrm{A}= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

матриц ортогональ уу ?

$$AA^{\mathrm{T}}= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \mathrm{A}$ ортогональ матриц биш.

Хэрэв A ортогональ матриц бол тодорхойлолтоор

$$\mathrm{AA^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} = I$$

$i \neq k$ байх $\forall i, k$ хувьд:

$$a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + a_{i3}a_{k3} + ... + a_{in}a_{kn} = 0 \tag{5}$$

$i = \overline{1, m}$ хувьд:

$$a_{i1}a_{i1} + a_{i2}a_{i2} + a_{i3}a_{i3} + ... + a_{in}a_{in} = 1 \tag{6}$$

Хэрэв матрицын багануудын хувьд (5) нөхцөл биелвэл ортогональ багануud гэнэ.

Үүний зэрэгцээ, (6) нөхцөл биелвэл ортогональ нормчлогдсон багана гэнэ.

A ортогональ матрицын багана бүр ортогональ нормчлогдсон байдаг.

Теорем

$A_{n\times n}$ матриц ортогональ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний баганан вектор бүр ортогональ нормчлогдсон байх.

Теорем

$A_{n\times n}$ матриц тэгшхэмтэй бол түүний ялгаатай хувийн утганд харгалзах хувийн векторууд ортогональ байна.

Жишээ (5)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
матрицын хувийн утгуудаас ортогональ матриц үүсгэ.

- $\det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 5$

- $\lambda_1 = -3$ үед $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x_1 = -x_2 = 1$

$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ортогональ нормчлогдсон вектор үүсгэе.

Жишээ (5)

- $\lambda_2 = 5$ үед $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x_1 = x_2 = 1$

$X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ортогональ нормчлогдсон вектор үүсгэе.

- $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $B^T = B^{-1}$ шалга.

Тодорхойлолт

$A_{n\times n}$ хувьд

$$Q^{-1}AQ = D \qquad (D \text{ – диагональ матриц})$$

байх бөхөөгүй Q матриц олдож байвал A-г диагональчлагдах матриц, Q-г диагональчлах матриц гэнэ.

Санамж: Матриц бүр диагональчлагдах албагүй.

Теорем

$A_{n\times n}$ матриц диагональчлагдах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь n шугаман хамааралгүй хувийн вектортой байх.

Теорем

$A_{n\times n}$ матриц ортоганаль диагональчлагдах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $A = A^{\mathrm{T}}$ байх.

Жишээ (6)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

матрицыг диагональчил. Жишээ 5-ыг хар.

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$$

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$