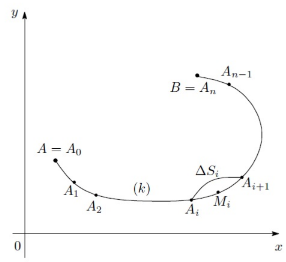
ЛЕКЦ 12. Нэгдүгээр төрлийн муруй шугаман интеграл, түүний хэрэглээ

xOy хавтгай дээр тасралтгүй, шулуусах задгай (K) муруй авъя. (K)-ийн цэг бүрт $z = f(x,y)$ функц тодорхойлогдсон байг. (K) муруйн (AB) нумыг $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ цэгүүдээр n хэсэгт хувааж (A_iA_{i+1}), $(i = \overline{1,n})$ хэсэг бүрээс $M_i(x_i, y_i)$ цэгийн сонгон авъя. (A_iA_{i+1}) хэсгийн нумын уртыг ΔS_i-ээр тэмдэглэе. M_i цэг бүр дээрх функцийн утга $f(x_i, y_i)$-ыг ΔS_i-ээр үржүүлж нэмбэл (зураг 3.1)



Зураг 1:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \tag{1}$$

болно. Энэ нийлбэрийг $z = f(x,y)$ функцээс (AB) нумын дагуу зохиосон интеграл нийлбэр гэнэ.

Тодорхойлолт 0.1. *Хэрэв (1) интеграл нийлбэр нь $\max \Delta S_i \to 0$ үед (K) муруйг хэсгүүдэд хуваасан аргаас болон (A_iA_{i+1}) хэсгээс M_i цэгийг сонгон авснаас үл хамаарч төгсгөлөг хязгаартай бол тэр хязгаарыг $z = f(x,y)$ функцээс (K) муруйн дагуу авсан нэгдүгээр төрлийн муруй шугаман интеграл гэж нэрлээд*

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)ds$$

гэж тэмдэглэнэ.

Иймд тодорхойлолт ёсоор

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)ds = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \tag{2}$$

болно. үүнд S нь муруйн нумын урт, dS нь нумын дифференциал юм.

$$dS = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx \tag{3}$$

Хэрэв (AB) огторгуйн муруй бол өмнөхтэй төстэйгээр

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dS$$

муруй шугаман интегралыг тодорхойлно.

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dS = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i \tag{4}$$

$f(x,y,z)$ нь (AB) муруйн цэг бүрт тодорхойлогдсон гурван хувьсагчийн функц юм.

Нэгдүгээр төрлийн муруй шугаман интегралыг бодох

Хэрэв (AB) муруй $y = f(x),\ a \le x \le b$ тэгшитгэлээр өгөгдсөн бол нэгдүгээр төрлийн муруй шугаман интегралыг

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dS = \int\limits_{a}^{b} f(x,f(x)) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} \cdot dx \tag{5}$$

томъёогоор боддог. Хэрэв (AB) муруй $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t_1 \le t \le t_2$ параметрт тэгшитгэлээр өгөгдсөн бол дараах томъёогоор нэгдүгээр төрлийн муруй шугаман интегралыг бодно.

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t),\psi(t)] \cdot \sqrt{(\varphi(t))^2+(\psi(t))^2} \cdot dt \tag{6}$$

Хэрэв огторгуйн (AB) муруй $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ (t_1 \le t \le t_2)$ муруйн дагуу $u = f(x,y,z)$ функцээс авсан нэгдүгээр төрлийн муруй шугаман интеграл байвал түүнийг дараах томъёогоор бодно.

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t),z(t)] \cdot \sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2+(z(t))^2} \cdot dt \tag{7}$$

Хэрэв (AB) дээр $f(x,y) > 0$ бол $\int\limits_{(AB)} f(x,y)dS$ интеграл нь (AB) муруйн массыг тодорхойлох ба энэ үед $\gamma = f(x,y)$ нь муруйн нягт болно.

Үндсэн чанарууд

1. $\int\limits_{(AB)} f(x,y)dS = \int\limits_{(BA)} f(x,y)dS$

2. $\int\limits_{(AB)} [f_1(x,y)+f_2(x,y)]dS = \int\limits_{(AB)} f_1(x,y)dS + \int\limits_{(AB)} f_2(x,y)dS$

3. $\int\limits_{(AB)} c \cdot f(x,y)dS = c \cdot \int\limits_{(AB)} f(x,y)dS,\ c-$ **тогтмол**

4. $K = K_1 \bigcup K_2$ **бол** $\int\limits_{(K)} f(x,y)dS = \int\limits_{(K_1)} f(x,y)dS + \int\limits_{(K_2)} f(x,y)dS$

Механикт хэрэглэх тухай

1. **$\gamma = f(x,y)$ нь (K) муруйн массын тархалтын нягт бол (K)-ийн массыг олж болно.**
$$m = \int\limits_{(K)} f(x,y)dS \tag{8}$$

2. **(K) муруйн координатын тэнхлэгүүдтэй харьцуулсан статик моментыг олж болно.**
$$S_x = \int\limits_{(K)} \gamma y dS, \quad S_y = \int\limits_{(K)} \gamma x dS \tag{9}$$

3. **Материаллаг муруйн хүндийн төвийг олох томъёо**
$$x_0 = \frac{\int\limits_{(K)} \gamma x dS}{\int\limits_{(K)} \gamma dS}, \quad y_0 = \frac{\int\limits_{(K)} \gamma y dS}{\int\limits_{(K)} \gamma dS} \tag{10}$$

   (x_0, y_0)-хүндийн төв цэг.

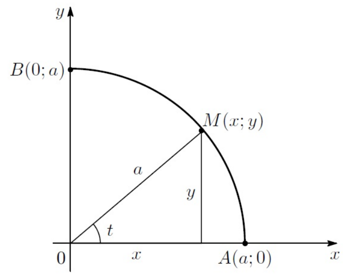
4. **Инерцийн моментыг олж болно.**
$$J_x = \int\limits_{(K)} \gamma y^2 dS, \quad J_y = \int\limits_{(K)} \gamma x^2 dS \tag{11}$$

Жишээ 0.1. $\int\limits_{(K)} yxdS$ бод. $K:\ A(1;2),\ B(4;6)$ цэгүүдийг холбосон хэрчим.

Бодолт: (AB) шулууны тэгшитгэл
$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{6-2} \qquad y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3};$$
$$y' = \frac{4}{3},\ (1 \le x \le 4),\ dS = \sqrt{1+y'^2}dx = \frac{5}{3}dx$$
$$\int\limits_{(K)} yxdS = \int\limits_1^4 x\left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right)\frac{5}{3}dx = \frac{5}{9}\int\limits_1^4 (4x^2+2x)dx = 55$$

Жишээ 0.2. $\int\limits_{(K)} (y+x)dS$ бод. K нь тойргийн $A(a;0),\ B(0;a)$ цэгүүдийг холбосон богино нум (зураг 3.2)

Бодолт: Тойргийн параметрт тэгшитгэл ашиглая.
$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$$
$$dS = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt = adt$$

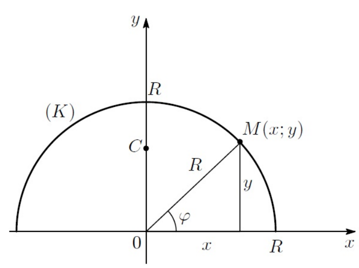


Зураг 2:

$$\int\limits_{(K)} (y+x)dS = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin t + a\cos t)adt = 2a^2$$

Жишээ 0.3. R радиустай $y \geq 0,\ x^2+y^2=R^2$ нэгэн төрлийн тойргийн нумын хүндийн төвийг ол.

Бодолт: $\rho = 1$ гэе. Хүндийн төв $C(x_0, y_0)$ бологə. Хагас тойргийн нум, тэгш хэмтэй тул хүндийн төв Oy дээр оршино. Иймд $x_0 = 0$ байна. $y_0 = ?$ (зураг 3.3) Тойргийн параметрт тэгшитгэл авъя.



Зураг 3:

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ (0 \leq \varphi \leq \pi)$$
$$dS = \sqrt{(-R\sin\varphi)^2 + (R\cos\varphi)^2}d\varphi = Rd\varphi$$
$$m = \int\limits_{(K)} 1\cdot dS = \int\limits_0^{\pi} Rd\varphi = R\varphi|_0^{\pi} = R\pi$$
$$S_x = \int\limits_{(K)} ydS = \int\limits_0^{\pi} R\sin\varphi Rd\varphi = R^2(-\cos\varphi)\big|_0^{\pi} = 2\pi^2$$
$$y_0 = \frac{S_x}{m} = \frac{2R^2}{R\pi} = \frac{2R}{\pi} \approx \frac{2}{3}R,\ C(x_0, y_0) = C\left(0; \frac{2}{3}R\right)$$