



Лекц 5

МЕХАНИК

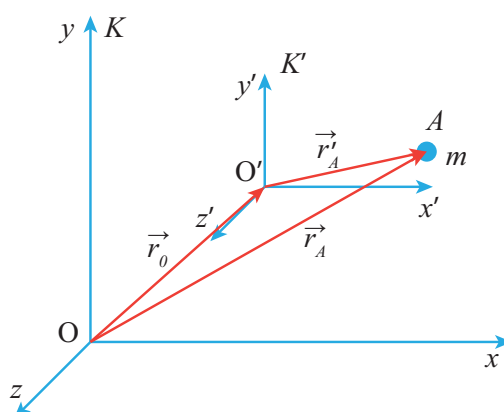
5.1 Инерциал бус тооллын систем

5.1.1 Үл эргэх инерциал бус тооллын систем

Механикийн хуулиуд нь Ньютоны I хууль биелэх тооллын систем буюу инерциал тооллын системд биелнэ. Харин Ньютоны I хууль биелэхгүй байгаа тооллын системийг инерциал бус тооллын систем гэдэг. Бүх инерциал тооллын системүүдэд физикийн хуулиуд ижилхэн биелдэг байна.

Инерциал бус тооллын систем нь инерциал тооллын системтэй харьцангуй хурдатгалтай хөдлөх тооллын системүүд байна. Шулуун замаар тогтмол хурдтай хөдлөх галт тэргэн доторх зорчигчийн хувьд түүнтэй харьцангуй тайван байгаа тооллын системийг авч үзье. Зорчигчийн өмнө ширээн дээрх биес тайван байна. Энд биест үйлчлэх хүчнүүдийн нийлбэр тэг байх нөхцөл биелнэ. Цонхоор ажиглахад ургаа мод, байшин барилга эсрэг зүгт тогтмол хурдтай хөдөлж байна. Энэ үед мөн тэдгээрт үйлчлэх хүчнүүдийн нийлбэр тэг учир Ньютоны I хууль биелнэ. Одоо галт тэрэг хурдсан хөдлөх үед галт тэрэг доторх зорчигчдын хувьд үзэгдэл хэрхэн ажиглагдахыг сонирхоё. Зорчигчдын хувьд хурдатгалтай хөдлөх инерциал бус тооллын системд байгаа бөгөөд түүний хувьд ширээн дээр тайван байсан алим өнхрөх, цонхоор харахад хүч үйлчлээгүй байхад ургаа мод, байшин барилга эсрэг зүгт хурдсан хөдлөх хөдөлгөөнүүд ажиглагдана.

Иймд илэрхий Ньютоны I хууль биелэхгүй байна. Зорчигчдын тооллын системд энэ үзэгдлийг хэрхэн тайлбарлаж, тооцоолох арга замыг судлая. Тайван байгаа буюу инерциал тооллын системийг K , түүнтэй харьцангуй \vec{a} хурдатгалтай хөдлөх (Галт тэрэг дотор тодорхойлогдох) тооллын системийг K' гэж нэрлэе (5.1 –р зураг). K' тоол-



Зураг 5.1. Инерциал ба инерциал бус тооллын систем



лын систем эргэлдэхгүй учир түүний x', y', z' тэнхлэгүүдийг K тооллын системийн x, y, z тэнхлэгүүдтэй ижилхэн чиглэлтэй сонгон авъя. А цэгт m масстай материал хөдөлж байвал түүнийг K инерциал тооллын системээс хөдөлгөөнийг нь судлая. А цэгийн радиус вектор K –Тооллын системд \vec{r}_A , K' –Тооллын системд \vec{r}'_A бол

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'_A \quad (5.1)$$

Энд K –д K' –н координатын эх O' цэгийн радиус вектор $\vec{r}_{O'}$ цаашид K' тооллын системд тодорхойлогдсон векторуудыг баруун дээд талд нь зурааслаж тэмдэглэнэ. А цэгийн хурдыг 5.1 – г ашиглан илэрхийлбэл

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}'_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} = \vec{v}'_A + \vec{v}_{O'}$$

Энд \vec{v}'_A нь А материал цэгийн K' –Тооллын системд тодорхойлогдсон хурд (зорчигчын тодорхойлох хурд) $\vec{v}_{O'}$ нь K' тооллын системийн хурд (үүнийг зөөлтийн хурд гэх ба өмнөх жишээгээр галт тэрэгний хурд) Одоо А материал цэгийн хурдатгалыг тодорхойлъё.

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}'_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} \quad (5.2)$$

Энд $\frac{d\vec{v}'_A}{dt} = \vec{a}'$ гэвэл энэ нь K' –Тооллын системд тодорхойлогдсон А материал цэгийн хурдатгал. Харин $\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = \vec{a}_{O'}$ гэе. Энэ нь K тооллын системд тодорхойлогдох K' тооллын системийн хурдатгал (галт тэрэгний хурдатгал)

$$\vec{a}_A = \vec{a}'_A + \vec{a}_{O'} \quad (5.3)$$

Ньютоны II хуулиар биед үйлчлэх хүч нь $\vec{F} = m\vec{a}_A$ учир 5.3 – г орлуулбал

$$\vec{F} = m\vec{a}'_A + m \cdot \vec{a}_{O'} \quad (5.4)$$

Энд $m\vec{a}_{O'}$ нь биеийн массыг, K' тооллын системийн хурдатгалаар үржүүлсэн учир хүчний нэгжтэй боловч бодит хүч биш юм (Өмнөх жишээгээр галт тэрэгний хурдатгалаар модны массыг үржүүлээд түүнд үйлчилж байгаа хүч гэж хэлж болохгүй шүү дээ).

Инерциал бус тооллын системд биед Ньютоны II хуулийг бичвэл $\vec{F}' = \vec{F}$ гэж бичнэ. Иймд 5.4 – ээс

$$\vec{F}' = m\vec{a}'_A - m\vec{a}_{O'} \quad (5.5)$$

Энд биед үйлчлэгч бодит хүч \vec{F} ба инерциал бус тооллын системд $\vec{F} = -m\vec{a}_{O'}$ гэсэн хуурмаг хийсвэр хүч үйлчилж байгаа гэж үзвэл Инерциал бус тооллын системд хүч нь

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_u$$

Энд нэмж тооцоолж байгаа F_u хийсвэр хүчийг *инерцийн хүч* гэж нэрлэнэ. Өмнө дурьдсан жишээнд алим өнхрөх, ургаа мод хурдатгалтай хөдөлж байгааг $\vec{F}_u = m\vec{a}'_{O'}$ инерцийн хүч үйлчилж байгаа мэтээр тайлбарлана. Өөрөөр хэлбэл инерциал бус тооллын системд инерцийн хүчийг тооцох замаар инерциал тооллын системтэй адилхан механикийн хуулиудыг хэрэглэх боломжтой болно. Жишээлбэл, цахилгаан шат хөдөлж эхлэх ба зогсох үед цахилгаан шаттай хамт хөдлөх тооллын системд биед үйлчлэх хүчнүүд дээр инерцийн хүчийг нэмж тооцоолно (5.2 –р зураг).

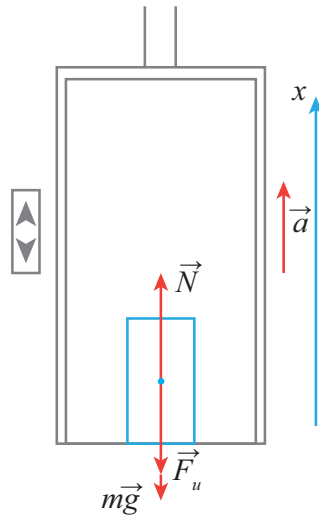
$$m\vec{a}' = \vec{F}' = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_u$$

Цахилгаан шатан дотор хөдлөхгүй байгаа биеийн хувьд $\vec{a}' = 0$ учир

$$\vec{N} = -m\vec{g} - (-m\vec{a}) = -m(\vec{g} - \vec{a})$$

$$N = m(g + a_x) \quad (5.6)$$

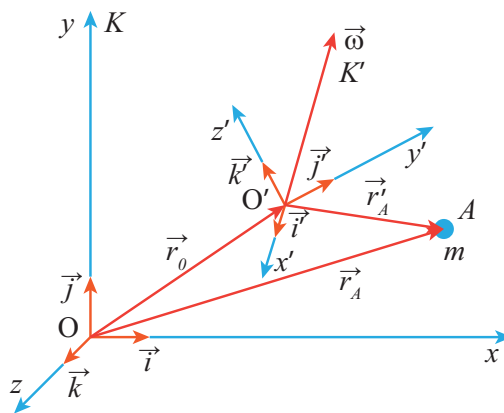
Энд цахилгаан шат дээш хурдатгалтай хөдөлбөл $a_x > 0$ учир биеийн жин нэмэгдэнэ. Харин доош хурдатгалтай хөдөлбөл $a_x < 0$ учир биеийн жин буурна.



Зураг 5.2. Цахилгаан шат

5.1.2 Эргэлдэж буй инерциал бус тооллын систем

Эргэлдэж байгаа системд физик механик үзэгдлийг хэрхэн тооцоолох болон инерциал тооллын системээс ямар ялгаа үүсдэг болохыг судлая. K инерциал тооллын системтэй харьцангуй \vec{a} хурдатгалтай $\vec{\omega}$ өнцөг хурдтай, $\vec{\varepsilon}$ өнцөг хурдатгалтай эргэх инерциал бус тооллын системийг K' гээ. (5.3 –р зураг) A цэг дээр байрлах m масстай материал цэгийн



Зураг 5.3. Эргэлдэж буй инерциал бус тооллын систем

радиус векторууд нь K ба K' тооллын системд

$$\vec{r}_A = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} \quad \vec{r}'_A = r'_x \vec{i}' + r'_y \vec{j}' + r'_z \vec{k}' \quad (5.7)$$

A цэгийн радиус векторууд нь

$$\vec{r}_A = \vec{r}'_A + \vec{r}_{O'} \quad (5.8)$$

A цэгийн хурдыг олбол

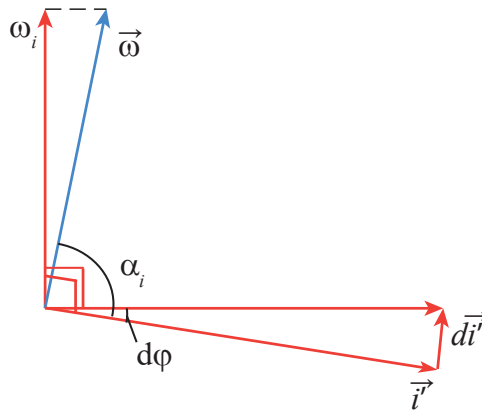
$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}'_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} \quad (5.9)$$

Энд $\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} = \vec{v}_{O'}$ энэ нь K инерциал тооллын системд тодорхойлогдох K' системийн координатын эхийн хурд байна. Харин $\frac{d\vec{r}'_A}{dt}$ уламжлал нь K' координатын системд тодорхойлогдсон векторын уламжлал учир K' тооллын системд \vec{r}'_A векторын проекцуудын

өөрчлөлтөөс гадна векторыг тодорхойлогч $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ нэгж векторуудын эргэлтээр үүсэх өөрчлөлтөөс хамаарч тодорхойлогдоно.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}'_A}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r}'_x \vec{i}' + \vec{r}'_y \vec{j}' + \vec{r}'_z \vec{k}') = \\ &= \left(\frac{dr'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dr'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{dr'_z}{dt} \vec{k}' \right) + \left(r'_x \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt} + r'_y \cdot \frac{d\vec{j}'}{dt} + r'_z \cdot \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Энд эхний хаалтанд байгаа илэрхийлэл нь A цэгийн K' тооллын системд тодорхойлогдсон хурд учир \vec{v}'_A гээ. Одоо $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ нэгж векторуудын эргэлтийн өөрчлөлтөөр уламжлалыг тодорхойлъё (5.4 –р зураг).



Зураг 5.4. Нэгж векторын эргэлт

$$\left| \frac{d\vec{i}'}{dt} \right| = \frac{1 \cdot d\varphi}{dt} = \omega_i = \omega \cdot \sin \alpha_i$$

энд α_i нь $\vec{\omega}$ вектор ба \vec{i}' векторуудын хоорондох өнцөг учир уламжлал нь вектор үржвэрээр дараах байдлаар

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}' \quad (5.11)$$

бичигдэнэ. Үүний адил $\frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}'$; $\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}'$ болох учир 5.10 – ийн хоёрдох хаалтанд байгаа илэрхийлэл нь

$$r'_x \cdot (\vec{\omega} \times \vec{i}') + r'_y \cdot (\vec{\omega} \times \vec{j}') + r'_z \cdot (\vec{\omega} \times \vec{k}') = \vec{\omega} \times \vec{r}'_A \quad (5.12)$$

Эдгээр илэрхийлэлүүдийг ашиглан 5.10 – д байгаа K' тооллын системд тодорхойлогдсон векторын уламжлалыг олбол

$$\frac{d\vec{r}'_A}{dt} = \vec{v}'_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'_A \quad (5.13)$$

A цэгийн хурд нь

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'_A + \vec{v}_{O'} \quad (5.14)$$

Одоо A цэгийн хурдатгалыг олъё.

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}'_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_A + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} \quad (5.15)$$



Энд хурдны оронд 5.14 –р илэрхийлэлийг орлуулан үржвэрийн уламжлалыг ээлжлэн уламжлал аваад нэмдэг дүрмээр задалж бичлээ. Зурааслагдсан векторууд нь K' тооллын системд тодорхойлогдох учир $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ нэгж векторуудын эргэлтээр үүсэх уламжлалын гишүүн гарч ирнэ. 5.13 – тэй адилтган бичвэл

$$\frac{d\vec{v}'_A}{dt} = \vec{a}'_A + \vec{\omega} \times \vec{v}'_A \quad (5.16)$$

болох учир 5.15 – д уламжлалуудыг олж бичвэл

$$\vec{a}_A = \vec{a}'_A + \vec{\omega} \times \vec{v}'_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_A - \vec{\omega} \times (\vec{v}'_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'_A) + \vec{a}'_O \quad (5.17)$$

Энд $\vec{\varepsilon}$ нь K' системийн эргэлтийн өнцөг хурдатгал ба \vec{a}_O нь K' координатын эхийн хурдатгал буюу инерциал бус тооллын системийн давших хөдөлгөөний хурдатгал болно. 5.17 –аас K' тооллын систем дэх A цэгийн хурдатгал \vec{a}'_A – г олбол

$$\vec{a}'_A = \vec{a}_A - \vec{a}_{O'} - \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_A - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_A) - 2(\vec{\omega} \times \vec{v}'_A) \quad (5.18)$$

Энд \vec{a}_A нь A материал цэгийн инерциал тооллын систем дэх хурдатгал, A цэгийн K' тооллын систем дэх давших хөдөлгөөний хурдатгал нь \vec{a}'_A , системийн эргэлтээс үүсэх тангенциал хурдатгал нь $-\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_A$, нормаль хурдатгал нь $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_A)$, Кориолисын хурдатгал $-2(\vec{\omega} \times \vec{v}'_A)$ K' инерциал бус тооллын системд хөдөлгөөний тэгшитгэлийг бичихийн тулд 5.18 –д байгаа хурдатгалыг биеийн массаар үржүүлбэ.

$$m\vec{a}'_A = m\vec{a}_A - m\vec{a}_{O'} - m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_A - m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_A) - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}'_A) \quad (5.19)$$

Энд биед үйлчлэгч бодит хүч

$F = m\vec{a}_A$ ба бусад нь инерцийн хүчнүүд юм.

$\vec{F}_n = -m\vec{a}_{O'}$ тооллын системийн давших хурдатгалаар үүсэх инерцийн хүч,

$\vec{F}_{\tau n} = -m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_A$ тооллын системийн эргэлтийн өнцөг хурдатгалаар үүсэх тангенциал инерцийн хүч,

$\vec{F}_{nn} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_A)$ тооллын системийн эргэлтийн улмаас үүсэх нормаль инерцийн хүч. Үүнийг *төвөөс зугтаах хүч* гэж нэрлэдэг.

$\vec{F}_{kn} = -2m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}'_A$ биеийн байрлал эргэлтийн тэнхлэг хүртэлх зайн өөрчлөлтөөр үүсэх инерцийн хүч үүнийг *Кориолисын хүч* гэнэ.

Дэлхий тэнхлэгээ эргэх учир эргэлдэгч инерциал бус систем юм. Тэгэхээр дэлхий дээрх бидний хувьд дэлхийн эргэлтээ мартаж тайван инерциал тооллын системд байгаа юм шиг төсөөлөхөд дээрх инерцийн хүчнүүдийг тооцоолж байж хөдөлгөөнүүд зөв тооцоологдоно. Дэлхийн эргэлтийн өнцөг хурд $\omega = \frac{2\pi}{24\text{цаг}}$, чиглэл нь урд туйлаас хойд туйлруу чиглэнэ. Энэ нь алтан гадас одны харагдах чиглэл юм. Төвөөс зугтах инерцийн хүчний улмаас дэлхий экваторын бүслүүрлүүгээ цүлхийсэн байхын зэрэгцээ биеийн жин туйл дээр, экватор дээр байхаас их байдаг.

Харин Кориолисын хүчний улмаас экватороос хойш орших гол мөрөн баруун эрэгрүүгээ шахаж урссаар ихэнхдээ баруун эргүүд нь хадан хавцалд тулсан нь элбэг байдаг бол эсрэгээрээ экватороос урагш гол мөрнүүд нь зүүн эрэгрүүгээ шахан урсдаг байна. Ваннтай усны бөглөөг авахад дэлхийн бөмбөрцгийн хойд хагасд цагийн зүүний дагуу, өмнөд хагасд цагийн зүүний эсрэг эргэн ордог нь Кориолисын хүчний илрэл бөгөөд энэ нь дэлхий эргэдгийн баталгаа юм.