ЛЕКЦ 15. Хоёрдугаар төрлийн гадаргуугийн интеграл

Эхлээд нэгдүгээр төрлийн гадаргуугийн интеграл авъя.

$$\iint\limits_{(S)} f(M)ds \tag{1}$$

үүний чиглэл тогтоосон гөлгөр S гадаргуугийн цэг бүр дээр тасралтгүй функц $f(M)$ тодорхойлогдсон бөгөөд гадаргуугийн элементийн талбай ds болог. S гадаргуугийн чиглэл $\overline{n_0}$-ээр тодорхойлогдож, бас энэ гадаргуу дээр тасралтгүй вектор функц $\overline{F}(M)$ тодорхойлогдсон байг.

Тодорхойлолт 0.1. *Хэрэв f нь $f = \overline{F} \cdot \overline{n_0}$ скаляр үржвэрээр олдох бол (1) интегралыг $\overline{F}$ вектороос S гадаргуугаар бодсон хоёрдугаар төрлийн гадаргуугийн интеграл гэж нэрлэнэ.*

$$\iint\limits_{(S)} \overline{F} \cdot \overline{n_0} ds \tag{2}$$

Заримдаа $\overline{n_0}$ нэгж нормаль вектортой чиглэлээрээ давхцах гадаргуугийн ds-ийн талбайтай тоон утгаараа тэнцүү модуль бүхий $\overline{ds}$ векторыг авч хэрэглэдэг. Ийм үед (2)-ыг дараах хэлбэрээр бичнэ.

$$\iint\limits_{(S)} \overline{F} \cdot \overline{n_0} ds = \iint\limits_{(S)} \overline{F} \cdot \overline{ds} \tag{3}$$

Хэрэв гадаргуугийн чиглэл өөрчлөгдвөл, хоёрдугаар төрлийн гадаргуугийн интеграл тэмдгээ эсрэгээр өөрчилнө. Хэрэв S гадаргуу дээр $\overline{n_0}$ нэгж нормалийг сонгосон бол S^+-ээр, $-\overline{n_0}$ нэгж нормалийг сонгосон бол S^--аар тус тус тэмдэглэнэ.

$$\iint\limits_{S^+} \overline{F} \cdot \overline{n_0} ds = -\iint\limits_{S^-} \overline{F} \cdot \overline{n_0} ds \tag{4}$$

Энд $\overline{F} = F_x i + F_y j + F_z k,\ \overline{n_0} = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma$ тул

$$\iint\limits_{(S)} \overline{F} \cdot \overline{n_0} ds = \iint\limits_{(S)} (F_x\cos\alpha + F_y\cos\beta + F_z\cos\gamma) ds \tag{5}$$

болно. Гадаргуугийн элемент ds-ийн координатын $yOz,\ xOz,\ xOy$ хавтгайнууд дээрх проекцууд нь харгалзан $\cos\alpha ds,\ \cos\beta ds,\ \cos\gamma ds$ юм. өөрөөр хэлбэл $\overline{ds} = dydz \cdot i + dxdz \cdot j + dxdy \cdot k$ тул

$$\cos\alpha ds = dydz,\ \cos\beta ds = dxdz,\ \cos\gamma ds = dxdy \tag{6}$$

Иймээс ()-ыг дараах байдлаар бичиж болно.

$$\iint\limits_{(S)} F_x dydz + F_y dxdz + F_z dxdy = \iint\limits_{(S)} (F_x\cos\alpha + F_y\cos\beta + F_z\cos\gamma) d\sigma \tag{7}$$

(7)-аас үзвэл хоёрдугаар төрлийн гадаргуугийн интегралыг бодохын тулд уг гадаргууг координатын хавтгай тус бүрт проекцлож бодож болхоос гадна (7) тэнцэтгэлийн баруун хэсгийг нэгдүгээр төрлийн гадаргуугийн интегралд шилжүүлж бодож болно.

Жишээ 0.1. $J = \iint\limits_{(S)} \frac{y^2}{z} dxdy$ гадаргуугийн интегралыг a радиустай бөмбөрцгийн xOy хавтгайн доод талд орших хэсгийн дээд талаар бод.

Бодолт: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ бөмбөрцгийн доод хагасын тэгшитгэл $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ байна. Түүний xOy хавтгай дахь проекц нь $x^2 + y^2 = a^2$ тойргоор хүрээлэгдсэн a радиус бүхий дугуй юм.

$J = -\iint\limits_{(D)} \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$

D нь бөмбөрцгийн xOy хавтгай дээрх проекц юм. Туйлын координатад бодъё. $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le a,\ \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \rho^2}$

$$J = -\iint\limits_{D} \frac{\rho^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi = -\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^{a} \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho$$

Дотоод интегралыг хэсэгчлэн интегралчлая.

$\int\limits_0^{a} \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho = \left| \begin{array}{ll} u = \rho^2 & du = 2\rho d\rho \\ dv = \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho & v = -\sqrt{a^2 - \rho^2} \end{array} \right| = \left. -\rho^2\sqrt{a^2 - \rho^2}\right|_0^a + \int\limits_0^{a} 2\rho\sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho =$
$\left. -\frac{2}{3}(a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right|_0^a = \frac{2}{3}a^3$

$J = -\frac{2}{3}a^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = -\frac{2}{3}a^3 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \left. -\frac{2}{3}a^3 (\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi) \right|_0^{2\pi} = -\frac{2}{3}a^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi =$
$-\frac{2}{3}\pi a^3$

Жишээ 0.2. $J = \iint\limits_{(S)} \frac{x^2 y^2}{z^2} dxdy$ гадаргуугийн интегралыг бод. S бол $z^2 = x^2 + y^2$ конусаас $z = h$ хавтгайгаар таслагдсан хэсэг юм.

Бодолт: $J = \iint\limits_{(S)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} dxdy$

D бол өгсөн гадаргуугийн xOy хавтгай дахь проекц юм. Энэ нь $x^2 + y^2 = h^2$ тойргоор хүрээлэгдэнэ. Туйлын координатад шилжүүлбэл

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le h,\ x^2 + y^2 = \rho^2,\ |J| = \rho$$

$$J = \iint\limits_{D} \frac{(\rho\cos\varphi)^2 (\rho\sin\varphi)^2}{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D} \cos^2\varphi \sin^2\varphi \rho^3 d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^{h} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^h =$$

$$= \frac{h^4}{16} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}[1 - \cos 4\varphi] d\varphi = \left. \frac{h^4}{32} \left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi \right) \right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{h^4}{32}\left[2\pi - \frac{1}{4}(\sin 8\pi - \sin 0)\right] = \frac{\pi}{16}h^4$$