1 СЕМИНАРЫН БОДЛОГО 2

1.1 ДАСГАЛ, БОДЛОГО

1. Цувааны нийлэлтийн радиус болон нийлэлтийн мужийг ол.

   1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (x-2)^k$
   2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} x^k$
   3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{4^k} x^k$
   4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} x^k$
   5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k3^k} (x-1)^k$
   6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k4^k} (x+2)^k$
   7. $\sum_{k=0}^{\infty} k! (x+1)^k$
   8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x-1)^{2k+1}$
   9. $\sum_{k=2}^{\infty} (k+3)^2 (2x-3)^k$
   10. $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^2} (3x+2)^k$
   11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{\sqrt{k}} (2x+1)^k$
   12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} (3x-1)^k$
   13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} (x+2)^k$
   14. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} (x+1)^k$
   15. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} x^k$
   16. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^{2k+1}$

2. $f(x)$ функцийн зэрэгт цуваанд задалж түүний нийлэлтийн радиус болон нийлэлтийн мужийг мөн $\sum_{k=0}^{3} a_k x^k$ болон $\sum_{k=0}^{6} a_k x^k$ хэсгийн нийлбэрүүдийг олж хэсгийн нийлбэрүүдийн графикийг байгуул.

   1. $f(x) = \frac{2}{1-x}$
   2. $f(x) = \frac{3}{x-1}$
   3. $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$
   4. $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$
   5. $f(x) = \frac{2x}{1-x^3}$
   6. $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$
   7. $f(x) = \frac{2}{4+x}$
   8. $f(x) = \frac{3}{6-x}$

3. $f(x)$ функцийг зэрэгт цуваанд задалж түүний нийлэлтийн радиус болон нийлэлтийн мужийг тодорхойлон цувааг дифференциалчил эсвэл интегралчил.

   1. $f(x) = 3\arctan x$
   2. $f(x) = 2\ln(1-x)$
   3. $f(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$
   4. $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$
   5. $f(x) = \ln(1+x^2)$
   6. $f(x) = \ln(4+x)$

4. Цувааны болон цувааны уламжлалын нийлэлтийн мужийг тодорхойл.

   1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k^3 x)}{k^2}$
   2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{k}$
   3. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$
   4. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kx}$

5. p_k магадлалтай k, $k = 1, 2, \ldots$ цэгүүд дээрх ямар нэг дискрет санамсаргүй хувьсагчийн таамагласан утга $\sum_{k=1}^{\infty} k p_k$ ба санамсаргүй хувьсагчийн үүсгэгч функц нь $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x^k$ байдаг. $F'(1)$ нь таамагласан утгатай тэнцүү гэдгийг батал.

6. Цахилгаан туйлууд $x = 1$ дээр q, $x = -1$ дээр $-q$ цэнэгтэй. $x > 1$ бүр дээрх цахилгаан хүчлэг $E(x) = \frac{kq}{(x-1)^2} - \frac{kq}{(x+1)^2}$. Энд k ямар нэг тогтмол тоо. $E(x)$ функцийг зэрэгт цуваанд задал.

1.2 ДАСГАЛ, БОДЛОГО

1. f функцийн Маклорены цувааг байгуулж нийлэлтийн мужийг ол.

    1. $f(x) = \cos x$
    2. $f(x) = \sin x$
    3. $f(x) = e^{2x}$
    4. $f(x) = \cos 2x$
    5. $f(x) = \ln(1 + x)$
    6. $f(x) = e^x$
    7. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$
    8. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

2. $x = x_0$ цэг дээр f функцийн Тейлорын цувааг байгуулж нийлэлтийн мужийг ол.

    1. $f(x) = e^{x-1}$, $x_0 = 1$
    2. $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$
    3. $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$
    4. $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$
    5. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$
    6. $f(x) = \frac{1}{x+5}$, $x_0 = 0$

3. f функц болон $x = x_0$ цэг дээр f функцийн n зэргийн Тейлорын олон гишүүнтийн графикийг байгуул.

    1. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$
    2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, $n = 4$
    3. $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$, $n = 3$
    4. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $n = 4$
    5. $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0$, $n = 3$
    6. $f(x) = \frac{2}{x-5}$, $x_0 = 6$, $n = 4$

4. Өгөгдсөн тоог дөхөх 4−р зэргийн Тейлорын олон гишүүнтийг тодорхойлж, дөхөлтийн алдааг үнэл. Алдаа 10^{-10}-с хэтрэхгүй байхын тулд хамгийн бага хэддүгээр зэргийн Тейлорын олон гишүүнтээр үнэлэх вэ?

    1. $\ln 1.05$
    2. $\ln 0.9$
    3. $\sqrt{1.1}$
    4. $\sqrt{1.2}$

5. Тейлорын цувааг хэрэглэн өгөгдсөн тэнцэтгэлийг батал.

    1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2$
    2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$
    3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$
    4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$

6. Практик хэрэглээний олон бодлогод алдааны функц

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

чухал үүрэг гүйцэтгэдэг. $x = 0$ цэг дээр $\operatorname{erf}(x)$ функцийн 4-р эрэмбийн Тейлорын олон гишүүнтийн утгыг тооцоолж, графикийг байгуул.

7. $f(x) = (1+x)^m$ функцийн Маклорены цуваа нь m дурын бодит тооны хувьд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k$$

болохыг харуул. Дээрх цувааг $m = 2$, $m = 3$ болон эерэг бүхэл тоо байх үед хялбарчил.

8. Интегралын ойролцоо утгыг $n-$р (өгөгдсөн) эрэмбийн Тейлорын олон гишүүнтээр дөхсөн дөхөлтөөр ол.

   1. $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$, $n = 5$
   2. $\int_0^1 \arctan x dx$, $n = 5$
   3. $\int_1^2 \ln x dx$, $n = 5$
   4. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$, $n = 4$