

1 Семинар 6: Бодлого, Дасгал

1. Хэрэв $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$ ба $\vec{c} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ бол тоон утга буюу векторын компонентуудыг ол.

a. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b. $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

c. $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot \vec{c}$

d. $2\vec{i} \cdot \hat{a}$

e. $|2\vec{a}|\vec{b} \cdot \vec{c}$

f. $(3\vec{a} - 4\vec{c}) \cdot (2\vec{i} + 3\vec{a} - 2\vec{b})$

g. $\vec{c} \cdot \hat{c}$

h. $\frac{(105\vec{a} + 240\vec{b}) \cdot (105\vec{a} + 240\vec{b})}{|105\vec{a} + 240\vec{b}|^2}$

i. $|\vec{a} - \vec{b} + \vec{k}|(\vec{j} + \vec{c}) \cdot \vec{k}$

l. $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - (\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b}$

2. Хэрэв $\vec{a} = (3, 1, 4)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ ба $\vec{c} = (-2, -3, 5)$ бол тоон утга буюу векторын компонентуудыг ол.

a. $\vec{b} \times \vec{c}$

b. $(-3\vec{a}) \times (2\vec{b})$

c. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

d. $\hat{a} \times \hat{c}$

e. $((3\vec{a}) \times \vec{c}) + (\vec{a} \times \vec{b})$

f. $\vec{a} \times (3\vec{b} - \vec{c})$

g. $\frac{\vec{c} \times \vec{a}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

h. $(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times (2\vec{a} + \vec{b}))$

i. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

l. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

3. Өгөгдсөн векторууд перпендикуляр эсэхийг тогтоо.

a. $(1, 2), (3, 5)$

b. $(2, 4), (-8, 4)$

c. $(1, 3, 6), (-2, 1, -4)$

d. $(2, 3, -6), (-6, 6, 1)$

4. Өгөгдсөн векторуудын хоорондох өнцгийг ол.

a. $(3, 4), (2, -5)$

b. $(1, 6), (-4, 7)$

c. $(4, 2, 3), (1, 5, 6)$

d. $(3, 1, -1), (-2, 1, 4)$

e. $(2, 0, 5), (0, 3, 0)$

f. $(1, 3, -2), (-2, -6, 4)$

5. Тухайн векторын компонентуудыг ол.

a. $(1, 3, 5), (-2, 1, 4)$ векторуудад перпендикуляр байх

b. Oy тэнхлэг ба $(2, 4, -3), (1, 5, 6)$ цэгүүдийг холбох векторт перпендикуляр байх

c. $(-1, 0, 3), (5, 1, 2)$ ба $(-6, 2, 4)$ цэгүүд дээр оройтой гурвалжинд перпендикуляр байх

6. (??) тэнцэтгэл зөв эсэхийг шалга.

7. (??) тэнцэтгэлийг ашиглан

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$$

тэнцэтгэлийг батал. Энэ тэнцэтгэлийг ихэвчлэн параллелограммын дүрэм гэдэг.

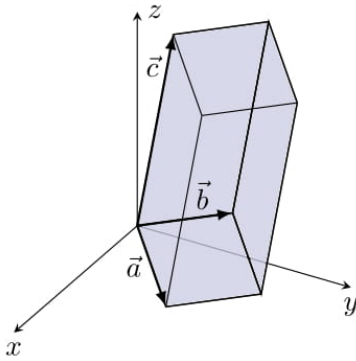
8. Өгөгдсөн векторын чиглүүлэгч өнцгүүдийг ол.

a. $(1, 2, -3)$

b. $(0, 1, -3)$

c. $(-1, -2, 6)$

d. $(-2, 3, 4)$



Зураг 1

9. Вектор үржвэр ассоциатив биш өөрөөр хэлбэл ерөнхий тохиолдолд $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ гэж харуул.

10. a. Хэрэв $\vec{a} \neq \vec{0}$ бол $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ хоёр нөхцөл үнэн гэдгээс $\vec{b} = \vec{c}$ байна гэж харуул.

b. (a.) өгүүлбэрт буй нөхцөлүүдийн аль нэг үнэн, харин нөгөө нөхцөл үл биелэгдэх бол \vec{b} нь \vec{c} вектортой тэнцэхгүй гэж харуул.

11. $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ тоог \vec{a} ба \vec{b}, \vec{c} векторуудын холимог үржвэр юм.

a. Хэрэв $\vec{a} = (6, -1, 0)$ ба $\vec{b} = (1, 3, 4)$, $\vec{c} = (-2, -1, 4)$ бол $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ холимог үржвэрийн утгыг ол.

b. $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$ тэнцэтгэлийг батал.

c. $|\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$ нь Зураг1-т үзүүлсэн параллелепипедийн эзлэхүүнтэй тэнцүү болохыг харуул.

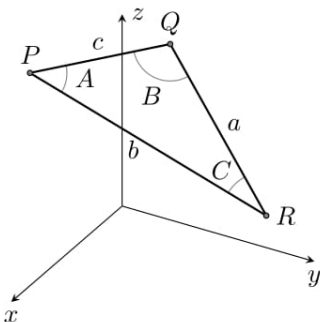
d. Тэг биш \vec{a} ба \vec{b}, \vec{c} гурван вектор нэг хавтгай дээр орших зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл бол $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$ гэдгийг шалга.

12. Өгөгдсөн адилтгалуудыг батал.

a. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{r}) - (\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

b. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

13. Зураг 2-т үзүүлсэн гурвалжны хувьд $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ синусийн теоремыг вектор ашиглан батал.



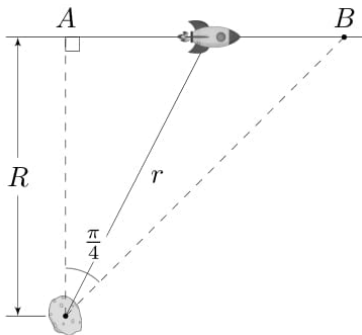
Зураг 2

14. $(|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b})/||\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}||$ вектор нэгж вектор бөгөөд \vec{a} ба \vec{b} векторуудын хоорондох өнцгийг таллан хуваана гэж үзүүл.
15. Өгөгдсөн оройнууд бүхий гурвалжны талбайг ол.
- $(1, 0), (4, 2), (2, 6)$
 - $(-1, 0, 3), (5, 1, 2), (-6, 2, 4)$
 - $(1, 1, 1), (-3, 4, -2), (-1, -2, 3)$
 - $(1, 2, 3), (3, 5, 10), (-3, -4, -11)$
16. Өгөгдсөн оройнууд бүхий параллелограммын талбайг ол.
- $(1, 2, 3), (4, 3, 7), (-1, 3, 6), (2, 4, 10)$
 - $(1, -2, 4), (3, 5, 7), (4, 6, 8), (2, -1, 5)$
17. $\vec{b} = (1, -4, 3)$ векторын заагдсан чиглэл дэх проекцыг (буюу компонент) ол.
- $(1, 2, -3)$
 - $(-1, 2, 3)$ цэгээс $(4, -3, 2)$ цэгт хүрэх чиглэлд
18. Хүчний моментыг ол.
- $(-1, 4, 2)$ цэгийг тойрон эргэх $(1, 3, 2)$ цэгт үйлчлэх $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ хүчний момент
 - $(2, 1, -5)$ цэгийг тойрон эргэх $(1, 1, 0)$ цэгт үйлчлэх $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j}$ хүчний момент
 - $(-1, 3, 0)$ цэгийг тойрон эргэх $(0, 0, 0)$ цэгт үйлчлэх $\vec{F} = -\vec{i} + 3\vec{k}$ хүчний момент
 - $(2, 2, 2)$ цэгийг тойрон эргэх $(1, 1, 1)$ цэгт үйлчлэх $\vec{F} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ хүчний момент
 - $(2, 0, 0)$ цэгийг тойрон эргэх $(0, 1, 3)$ цэгт үйлчлэх $\vec{F} = 6\vec{i}$ хүчний момент
19. \hat{b} ба \hat{c} векторуудыг перпендикуляр эсэхийг шалгаж $\vec{a} = \lambda\hat{b} + \rho\hat{c}$ байх λ, ρ тоонуудыг ол.
- $\hat{b} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \hat{c} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ба $\vec{a} = (2, 1)$
 - $\hat{b} = (\vec{i} - 2\vec{j})/\sqrt{5}, \hat{c} = (2\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{5}$ ба $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$
20. \hat{a}, \hat{b} ба \hat{c} векторууд хос хосоороо харилцан перпендикуляр эсэхийг шалгаж $\vec{r} = \lambda\hat{a} + \rho\hat{b} + \mu\hat{c}$ байх λ, ρ ба μ тоонуудыг ол.
- $\hat{a} = (2, 1, 0)/\sqrt{5}, \hat{b} = (-1, 2, 3)/\sqrt{14}$ ба $\hat{c} = (3, -6, 5)/\sqrt{70}$, ба $\vec{r} = (1, 3, -4)$
 - $\hat{a} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})/\sqrt{3}, \hat{b} = (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})/\sqrt{6}$ ба $\hat{c} = (\vec{i} - \vec{j})/\sqrt{2}$, ба $\vec{r} = 2\vec{i} - \vec{k}$
21. $\vec{a} = (3, 2), \vec{b} = (1, -3)$ ба $\vec{c} = (6, 2)$ бол \vec{b}, \vec{c} векторууд перпендикуляр болохыг шалгаад, $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \rho\vec{c}$ байх λ, ρ тоонуудыг ол. \vec{b} ба \vec{c} нэгж векторууд биш гэдгийг шалгаарай.

22. Хэрэв $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$, $\vec{c} = (-1, 2, 1)$ ба $\vec{r} = (-2, -3, 4)$ бол \vec{a} , \vec{b} ба \vec{c} векторууд хос хосоороо харилцан перпендикуляр болохыг шалгаж $\vec{r} = \lambda\vec{a} + \rho\vec{b} + \mu\vec{c}$ байх λ , ρ ба μ тоонуудыг ол. Өмнөх бодлогын адил \vec{a} , \vec{b} ба \vec{c} нэгж векторууд биш гэдгийг шалгаарай.

23. Хэрэв пүрш бүрэн агшсан үедээ (ачаа зүүгээгүй) l урттай байх ба энэ нь AC -ын уртаас бага бол Жишээ ??-т буй бодлогыг дахин бодно уу?

24. Oxy хавтгайн $(5, 5)$ ба $(-2, 3)$ координаттай цэгүүд дээр харгалзан q_1 ба q_2 цэнэгүүд (эерэг) байрлаж байв. Ox тэнхлэгийн дагуу $x = 1$ байрлалаас $x = -1$ байрлал руу хөдөлж буй гурав дах q_3 цэнэгт (эерэг) q_1 ба q_2 цэнэгүүдийн цахилгаан статик орны хүчний зүгээс хийх нийт ажлыг ол.

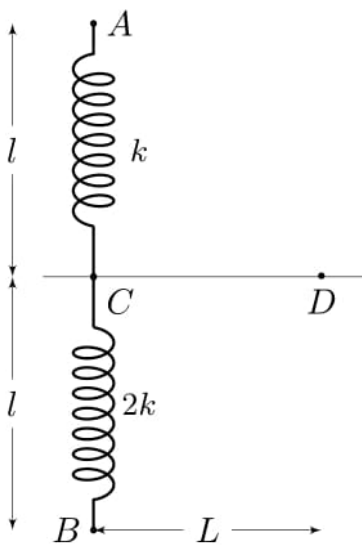


Зураг 3

25. Зураг 3-д бөмбөрцөг хэлбэртэй жижиг гарагийн хажуугаар пуужин нисэн өнгөрч байна. Ингэхдээ пуужин уг гарагт гравитацийн хүчний нөлөөгөөр GmM/r^2 хэмжээгээр татагдана. Энд m ба M харгалзан пуужин болон жижиг гарагийн масс бөгөөд G гравитацийн тогтмол, харин r нь пуужингаас жижиг гарагийн төв хүртэлх зай юм. Пуужин A цэгээс B цэг хүртэл шулуун замаар нисэхийн тулд гравитацийн хүчний эсрэг хийх ажлыг тодорхойл.

26. Хэрэв \vec{F} нь тогтмол хүч бол дурын битүү тахир шугамын (полигон) дагуу биет хөдлөхөд \vec{F} хүчний хийх ажил тэгтэй тэнцүү гэдгийг харуул.

27. Уян харимхайн коэффициентууд нь харгалзан k ба $2k$ байх хоёр пүрш C цэг дээр хоорондоо залгагдах ба тэдгээрийн нөгөө төгсгөлүүд A ба B цэгүүд дээр Зураг 4-д үзүүлсний адилаар бэхлэгджээ. Тэдгээр пүршний залгаа C цэг дээр байх үед хоёр пүрш сунгагдахгүй бас шахагдахгүй. Хэрэв залгаасыг CD шулууны дагуу AB -д перпендикуляраар татвал ямар ажил хийгдэх вэ?



Зураг 4

Хариу

- 1 a. -4 b. $(-10, 15, -5)$ c. 57 d. $4/\sqrt{14}$ e. $-10\sqrt{14}$ f. -178 g. 7
h. 1 i. $3\sqrt{29}$ l. 0
- 2 a. $10\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$ b. $(48, 24, -42)$ c. 63 d. $(2\sqrt{247})^{-1}(17, -23, -7)$ e. $(43, -73, -14)$ f. $(-41, 11, 28)$ g. $1/\sqrt{129}(-17, 23, 7)$ h. $(17, -23, -7)$ i. $(1, 26, 16)$ l. $(-10, 19, 5)$
- 3 a. Перпендикуляр биш b. Перпендикуляр c. Перпендикуляр биш d. Перпендикуляр
- 4 a. 2.12 b. 0.684 c. 0.716 d. 2.20 e. $\pi/2$ f. π
- 5 a. $\lambda(1, -2, 1)$ b. $\lambda(9, 0, 1)$ c. $\lambda(3, -1, 17)$
- 7 a. $1.30, 1.01, 2.50$ b. $\pi/2, 1.25, 2.82$ c. $1.73, 1.89, 0.36$ d. $1.95, 0.980, 0.734$

10 а. 108

14 а. 8 б. $\sqrt{299}/2$ в. $\sqrt{529}/2$ д. 0

15 а. $3\sqrt{35}$ б. $\sqrt{42}$

16 а. $-16/\sqrt{14}$ б. $22/\sqrt{51}$

17 б. $(-10, 5, -2)$ д. $(-5, 1, 4)$

18 б. $7/\sqrt{5}$, $4/\sqrt{5}$

19 б. $1/\sqrt{3}$, $4/\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$

21 1, -3, 0

23 $q_3(4\pi\epsilon_0)^{-1}[q_1(1/\sqrt{41} - 1/\sqrt{61}) + q_2(\sqrt{2}/6 - 1/\sqrt{10})]$