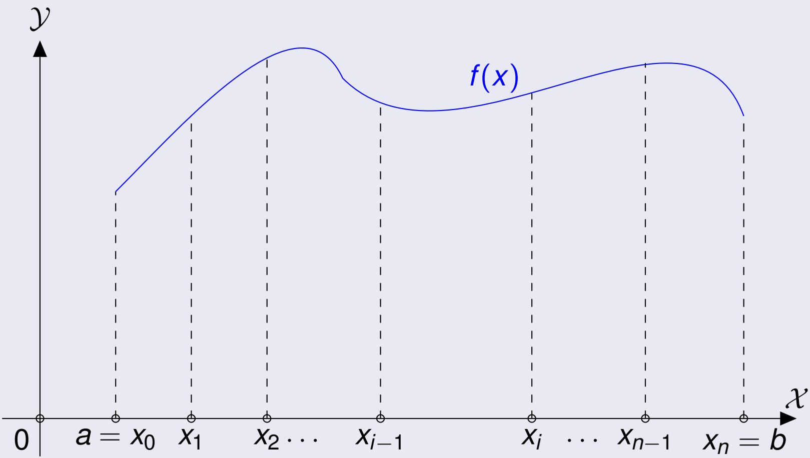
ЛЕКЦ 14. Тодорхой интеграл, түүний оршин байх нөхцөл, чанарууд. Ньютон-Лейбницийн томъёо.

Багш С. Уранчимэг

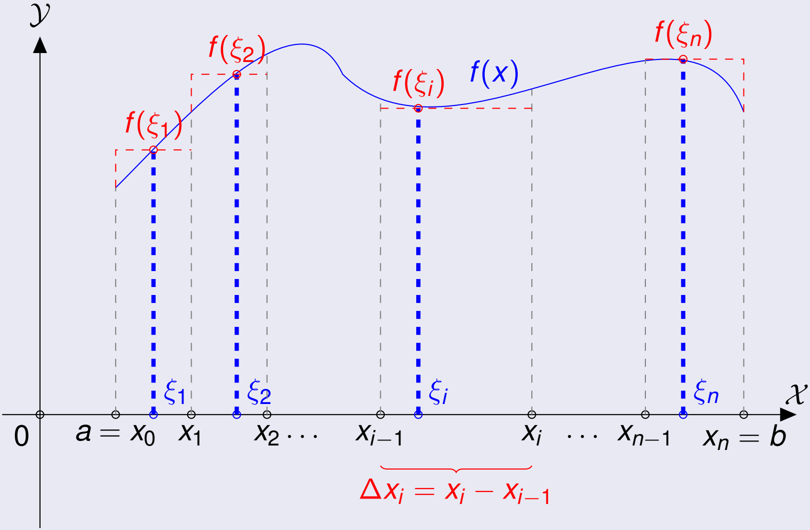
2021 он

1. Тодорхой интеграл, түүний оршин байх нөхцөл, чанарууд.
2. Ньютон-Лейбницийн томъёо.

$[a, b]$ хэрчим дээр тасралтгүй, $f(x)$ функц авъя.
$[a, b]$ хэрчмийг $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ цэгүүдээр n хуваая.



$\forall \xi_i \in \Delta x_i$ авъя.



$$f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \quad (1)$$

(1)-ийг $f(x)$ функцийн [a,b]-г хуваасан хуваалт, ξ_i цэгийн сонголтонд харгалзсан Риманы интеграл нийлбэр гэнэ.

Тодорхойлолт

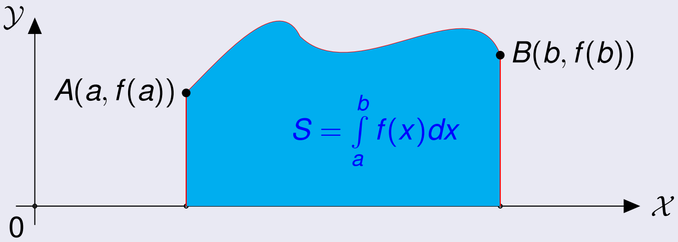
Хэрэв $\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)\to 0$ үед (1) интеграл нийлбэр $[a,b]$-г хуваасан арга, ξ_i цэгийн сонголтоос үл хамааран төгсгөлөг хязгаартай байвал $f(x)$ функцийг $[a,b]$ хэрчим дээр интег -ралчлагддаг функц, уг хязгаарыг тодорхой интеграл гэнэ. Тэмдэглэгээ,

$$\int_a^b f(x)dx$$

Тодорхойлолт ёсоор

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{max\Delta x_i \to 0 \\ 1\leq i\leq n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

Тодорхой интегралын геометр утга нь дараах муруй шугаман трапецийн талбай юм.



Тодорхой интегралын механик утга нь материаллаг цэг $\vec{F}(x)$ хүчний үйлчлэлээр $S = [a, b]$ замыг туулахад гүйцэтгэх ажил юм.

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

- Чанар.

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$
3. $\int\limits_a^b dx = b - a$
4. $\int\limits_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$
   $\forall \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \in \mathbb{R}$
5. $\forall x \in [a, b]$ хувьд $f(x) \geq 0$ бол $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$

- Чанар.

6. $\forall x \in [a, b]$ хувьд $f(x) \geq g(x)$ бол $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$
7. $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx, \quad a < b$
8. $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} [f(x)]$, $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} [f(x)]$ бол

   $$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

9. $a < c < b$ хувьд $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Теорем (Дундаж утгын тухай)

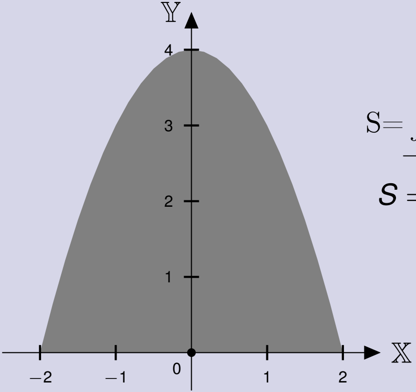
$[a, b]$ дээр тасралтгүй $f(x)$ функцийн тодорхой интегралын утга (a, b) хэрчмийн ямар нэг c цэг дээрх утгыг хэрчмийн уртаар үржүүлсэнтэй тэнцүү.

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$$

энд, $f(c)$ нь $f(x)$ функцийн $[a, b]$ дээрх дундаж утга байна.

Жишээ (1.)

$y = 4 - x^2,\ x \in [-2, 2]$ дундаж утгыг ол.

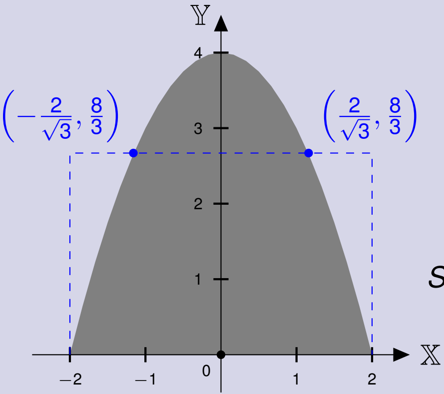


$$\mathrm{S} = \int_{-2}^{2} 4 - x^2 dx = \frac{32}{3}$$

$$S = S_{\text{муруй шугаман трапец}}$$

Жишээ (1.)

$y = 4 - x^2,\ x \in [-2, 2]$ дундаж утгыг ол.



$$4 \cdot f(c) = \frac{32}{3}$$

$$f(c) = \frac{8}{3} \implies c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$S_{\text{тэгш өнцөгт}} = 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

$$f_{\text{дундаж утга}} = \frac{8}{3}$$

Тодорхойлолт

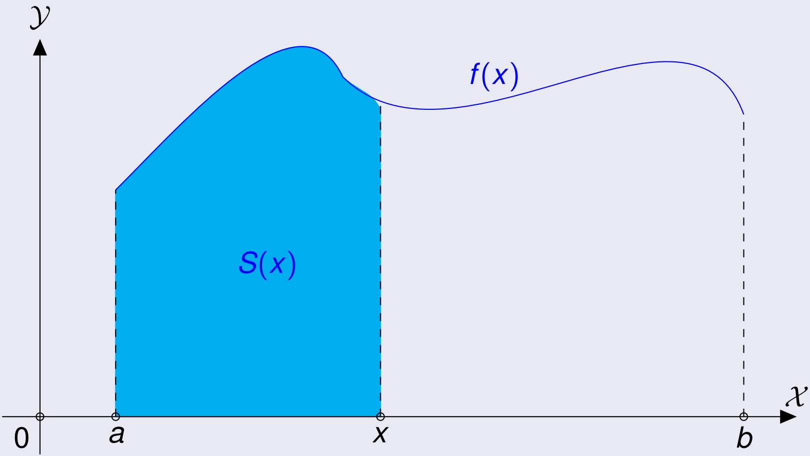
$[a, b]$ дээр дифференциалчлагддаг $f(x)$ функц өгөгдсөн. Тэгвэл $\forall x \in [a, b]$ хувьд $f(x)$ функц $[a, x]$ дээр интегралчлагдана.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Үүнийг хувьсах дээд хязгаартай интеграл гэнэ.

Геометр утгаараа

$$\Phi(x) = S(x)$$



Теорем

Хэрэв $f(x)$ функц нь $[a, b]$ дээр тасралтгүй интегралчлагддаг бол $\Phi(x)$ функц x цэг дээр дифференциалчлагдах ба

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

байна.

Жишээ (2.)

$$\left(\int_0^x \operatorname{arctg}(t)dt \right)' = \operatorname{arctg} x$$

Теорем

Хэрэв $[a, b]$ дээр тасралтгүй $f(x)$ функцийн эх функц $F(x)$ бол

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

байна. Үүнийг Ньютон-Лейбницийн томьёо.

Жишээ (3.)

$\int\limits_1^2 x^3 dx$ тодорхой интегралыг бод.

$$\int\limits_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \mid_1^2 = \frac{1}{4}(2^4 - 1) = \frac{15}{4} = 3.75$$