ЛЕКЦ 6. Олон хувьсагчийн функцийн үндсэн ойлголт. Хязгаар ба тасралтгүй байх чанар. Тухайн уламжлал ба дифференциал

Тодорхойлолт 0.1. *D эрэмбэлэгдсэн хос бодит тоонуудын олонлог байг.*
$(x, y) \in D$ байх хос тоо бүрт $f(x, y)$ гэсэн цорын ганц бодит тоог харгалзуулж байгаа дүрмийг $x, y-$ээс хамаарсан хоёр хувьсагчийн функц гэнэ.

Тодорхойлолт 0.2. *D эрэмбэлэгдсэн гуравтууд байх бодит тоонуудын олонлог байг. $(x, y, z) \in D$ байх гуравт бүрт $f(x, y, z)$ гэсэн цорын ганц бодит тоог харгалзуулж байгаа дүрмийг x, y ба $z-$ээс хамаарсан гурван хувьсагчийн функц гэнэ.*

D олонлогийг f функцийн тодорхойлогдох муж, $f(x, y)$, $f(x, y, z)$ утгуудын олонлогийг функцийн утгын муж гэнэ.

Санамж 0.1. *Хувьсагч нь гурваас их байх үед $x_1, x_2, \ldots, x_n$ хувьсагчаас хамаарсан n хувьсагчийн функцийг (0.1) ба (0.2) -р тодорхойлолттой төстэйгээр өгч болно. Энэ талаар дэлгэрэнгүй авч үзэхгүй.*

Жишээ 0.1. *$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ бол $f(4, 3)$, $f(0, 2)$, $f(t, t)$ болон f функцийн тодорхойлогдох мужийг ол.*

Бодолт: $f(4, 3) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad f(0, 2) = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2,$
$f(t, t) = \sqrt{t^2 + t^2} = t\sqrt{2}$

$\forall(x, y)-$ийн хувьд $x^2 + y^2 \geq 0$ тул функцийн тодорхойлогдох муж нь Oxy хавтгай байна.

Жишээ 0.2. *$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ бол $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ болон функцийн тодорхойлогдох мужийг ол.*

Бодолт: $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2}} = 0$

$1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ байх $(x, y, z)-$ийн хувьд функц тодорхойлогдоно. Өөрөөр хэлбэл, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ гэсэн координатын эх дээр төвтэй 1 радиустай бөмбөрцөг байна.

Жишээ 0.3. *$f(x, y) = 1 - x - 2y$ функцийн графикийг $Oxyz$ огторгуйд дүрсэл.*

Бодолт: *Өгөгдсөн функцийн график нь $z = 1 - x - 2y$ тэгшитгэлийн график байна. Эндээс $x + 2y + z = 1$ гэсэн хавтгайн тэгшитгэл гарна. (Зураг 6.1)*

Жишээ 0.4. *$f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ функцийн графикийг байгуул.*

Бодолт: *Өгөгдсөн функцийн график нь $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ тэгшитгэлээр тодорхойлогдоно. Эндээс $z^2 = x^2 + y^2$ гэсэн шулуун дугуй конусын тэгшитгэл гарна. $z \leq 0$ тул график нь дараах зураг 6.2 хэлбэртэй байна.*

Жишээ 0.5. *$f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y$ функцийн графикийг байгуул.*

Бодолт: *Функцийн график нь $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ тэгшитгэлийн график байна. Энэ нь эллипслэг параболоид гарна. (Зураг 6.3)*

C нь $x = x(t)$, $y = y(t)$ параметрт тэгшитгэлтэй t параметрээрээ тасралтгүй уламжлалтай хавтгайн муруй ба $z = f(x, y)$ нь огторгуйн ямар нэг S гадаргуун тэгшитгэл байг. Тэгвэл $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = f(x(t), y(t))$ параметрт тэгшитгэлүүдээр Oxy хавтгай дээрх проекц нь C муруй байх S гадаргуу дээрх муруй зурагдана. (Зураг 6.4)

$f(x, y)$ хоёр хувьсагчийн функц, C нь Oxy хавтгайн $x = x(t)$, $y = y(t)$ параметрт тэгшитгэлтэй муруй. $(x_o, y_o) = (x(t_o), y(t_o))$ цэг C муруй дээрх цэг гэж үзье. C муруйн дагуу $(x, y) \to (x_o, y_o)$ ойртож байх $f(x, y)$ функцийн хязгаарыг

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y)$$

гэж тэмдэглэвэл $f(x, y)$ функцийн хязгаарыг

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = \lim_{t\to t_o} f(x(t), y(t)) \tag{1}$$

гэж тодорхойлно. Эндээс үзвэл параметрт тэгшитгэлээрээ өгөгдсөн C муруйн дагуух $f(x, y)$ функцийн хязгаарыг бодохдоо f функцэд $x(t), y(t)-$г орлуулж зөвхөн $t-$ээс хамаарсан нэг хувьсагчийн функцэд шилжүүлж бодно. Үүний геометр дүрслэл нь дараах зураг 6.5 хэлбэртэй дүрслэгдэнэ.

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x, y) = L$$

Үүний адил $f(x, y, z)$ гурван хувьсагчийн функцийн C гэсэн параметрт тэгшитгэлээрээ өгөгдсөн муруйн дагуух хязгаарыг

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_o,y_o,z_o)} f(x, y, z) = \lim_{t\to t_o} f(x(t), y(t), z(t)) \tag{2}$$

гэж тодорхойлж болно.

Жишээ 0.6. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x + y}$ *функцийн*

a. x тэнхлэгийн дагуу

b. y тэнхлэгийн дагуу

c. $y = x^2$ *параболын дагуу*

d. $y = x$ *шугамын дагуу* $(0, 0)$ *цэг рүү тэмүүлэх үеийн хязгаарыг бод.*

Бодолт:

a. x тэнхлэгийн параметрт тэгшитгэл $x = t$, $y = 0$. $(0, 0)$ *цэг нь* $t = 0$ *үед гарна. Иймд*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(t, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

b. y тэнхлэгийн параметрт тэгшитгэл $x = 0$, $y = t$. $(0, 0)$ *цэг нь* $t = 0$ *үед гарна. Иймд*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{t\to 0} f(0, t) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

c. $y = x^2$ *параболын параметрт тэгшитгэл* $x = t, \;\; y = t^2$. $(0,0)$ *цэг* $t = 0$ *үед гарна. Иймд*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{1+t} = 0$$

d. $y = x$ *шулууны параметрт тэгшитгэл нь* $x = t, \; y = t$. $(0,0)$ *цэг* $t = 0$ *байхад гарна. Иймд*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} t^3 = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Жишээ 0.7. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(1,0,2\pi) \\ C \text{ муруйн дагуу}}} \frac{x^2+y^2+x}{z+2\pi}$ *хязгаарыг бод.*

$C:\; x = \cos t, \; y = \sin t, \; z = t$ *параметрт тэгшитгэлээр өгөгдсөн шурган шугам.*

Бодолт: $(1,0,2\pi)$ *цэг нь* $t = 2\pi$ *утганд харгалзана. (1) томъёог ашиглавал*

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,2\pi)} \frac{x^2+y^2+x}{z+2\pi} = \lim_{t\to 2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t + \cos t}{t+2\pi} = \lim_{t\to 2\pi} \frac{1+\cos t}{t+2\pi} = \frac{2}{4\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

гарна.

Функцийн хязгаарын төлөв байдлыг дэлгэрэнгүй авч үзэхийн тулд хязгаарын тухай Кошийн тодорхойлолтыг авч үзье.

Тодорхойлолт 0.3. *Хэрэв дурын эерэг тоо* ε*−ийн хувьд* $\delta > 0$ *тоо олдоод* (x_o, y_o) *цэгийн* δ *орчин дурын* (x,y) *цэгүүдийн хувьд*

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon$$

нөхцөл биелж байвал L *тоог* $(x,y)\to(x_o,y_o)$ *үеийн* $f(x,y)$ *функцийн хязгаар гэнэ.*

Функцийн ерөнхий хязгаар болон муруйн дагуух хязгаарын холбоог тогтоосон дараах теоремыг авч үзье.

Теорем 0.1. *Хэрэв* $(x,y)\to(x_o,y_o)$ *үед* $f(x,y)$ *функц* L *хязгаартай байвал* f *функцийн тодорхойлогдох мужид байх муруйн дагуу* $(x,y)\to(x_o,y_o)$ *үеийн* $f(x,y)$ *функцийн хязгаар нь мөн* L *байна.*

Энэ теоремоос үзвэл хэрэв $(x,y)\to(x_o,y_o)$ үед $f(x,y)$ функц ялгаатай хязгаартай байх (x_o,y_o) цэгийг агуулсан хоёр өөр муруй олдож байх эсвэл (x_o,y_o) цэгийг агуулсан муруйн дагуу $(x,y)\to(x_o,y_o)$ үед $f(x,y)$−ийн хязгаар оршин байхгүй байвал

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$$

хязгаар оршихгүй.

Жишээ 0.8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ *функцийн хязгаар орших эсэхийг тодорхойл.*

Бодолт:

1. *x тэнхлэгийн дагуу $(x,y)\to(0,0)$ байх үеийн хязгаарыг авч үзье. $x=t,\ \ y=0$ нь $x-$ийн параметрт тэгшитгэл.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{t\to 0} f(t,0)=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t^2}=0$$

2. *$y=x$ шулууны дагуу $(x,y)\to(0,0)$ байх хязгаарыг авч үзье. $y=x-$ийн параметрт тэгшитгэл нь $x=t,\ \ y=t.$*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2t^2}=\frac{1}{2}$$

Эндээс үзвэл $(0,0)$ цэгийг агуулсан $y=0,\ y=x$ гэсэн $(x,y)\to(0,0)$ үед ялгаатай хязгаартай байх ялгаатай хоёр муруй олдож байгаа тул $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ функцийн $(x,y)\to(0,0)$ үеийн хязгаар оршихгүй.

Жишээ 0.9. *$f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+25}-5}$ функцийн хязгаарыг $(x,y)\to(0,0)$ үед бод.*

Бодолт:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+25}-5}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+25}+5)}{(\sqrt{x^2+y^2+25}-5)(\sqrt{x^2+y^2+25}+5)}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(\sqrt{x^2+y^2+25}+5)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{x^2+y^2+25}+5)=10$$

Тодорхойлолт 0.4. *$f(x,y)$ хоёр хувьсагчийн функцийн хувьд*

1. *$f(x_o,y_o)$ тодорхойлогдсон байх*

2. *$\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ оршин байх*

3. *$\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=f(x_o,y_o)$*

нөхцлүүд биелэгдэж байвал f функцийг (x_o,y_o) цэгт тасралтгүй гэнэ.

Теорем 0.2. **a)** *Хэрэв g ба h нэг хувьсагчийн тасралтгүй функцүүд бол*

$$f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$$

нь $x,y-$ээс хамаарсан тасралтгүй функц байна.

b) *g нэг хувьсагчийн тасралтгүй функц, h хоёр хувьсагчийн тасралтгүй функц бол*

$$f(x,y)=g(h(x,y))$$

нийлмэл функц $x,y-$ээс хамаарсан тасралтгүй функц байна.

Хэрэв (0.4) тодорхойлолтын ядаж нэг нөхцөл нь $f(x,y)$ функцийн хувьд (x_o,y_o) цэг дээр биелэхгүй байвал f функцийг энэ цэг дээр тасралттай гээд (x_o,y_o) цэгийг тасралтын цэг гэнэ.

Жишээ 0.10. $f(x,y)=\dfrac{x^2y^3}{9-xy}$ *функцийн тасралтгүй байх цэгүүдийг ол.*

Бодолт: *Бутархай функц тул* $9-xy\neq 0$ *байх цэгүүд дээр тасралтгүй байна.* $f(x,y)$ *функц* $yx\neq 9$ *буюу* $xy=9$ *гиперболын цэгүүдээс бусад цэгүүд дээр тасралтгүй.*

Жишээ 0.11. $f(x,y)=\begin{cases} x\neq 1,\;\; y\neq 2 \;\; \text{үед} \;\; x^2+y^2 \\ x=1,\;\; y=2 \;\; \text{үед} \;\; 7\end{cases}$ *функцийн тасралтын цэгийг ол.*

Бодолт: $f(1,2)=7$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=1+4=5$ *тул тодорхойлолт (0.4)-ын (3.) нөхцөл биелэгдэхгүй учир* $(1,2)$ *цэг функцийн тасралтын цэг болно.*

Жишээ 0.12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$ *хязгаарыг бод.*

Бодолт: *Энэ функц* $(0,0)$ *цэгт тасралттай. Энэ тохиолдолд хязгаарыг бодохын тулд туйлын координатын системд шилжих нь ашигтай байна.*

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{cases} \quad \text{тул } r^2=x^2+y^2 \implies r=\sqrt{x^2+y^2},\;\; r\geq 0 \;\text{ учир } r\to 0 \text{ байна.}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to 0+} r^2\ln r^2=\lim_{r\to 0+}\frac{2\ln r}{1/r^2}=\lim_{r\to 0+}\frac{2/r}{-2/r^3}=\lim_{r\to 0+}(-r^2)=0$$

(Лопиталын дүрмээр)

Теорем 0.3. *Хэрэв* $z=f(x,y)=f(M)$ *функц* D *гэсэн заагласдсан, битүү муж дээр тасралтгүй бол*

1. *Функц* D *дээр заагласдсан байна.*

$$|f(M)|\leq c<+\infty$$

2. *Функц* D *муж дээр хамгийн их ба хамгийн бага утгандаа хүрнэ.*

Теорем 0.4. $f(x,y)$ *функц нь* $M_0(x_0,y_0)$ *цэг дээр* A *хязгаартай байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь* $f(x,y)=A+\alpha$ *Үүнд*

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y),\quad \alpha=\alpha(x,y),\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\alpha(x,y)=0$$

$z=f(x,y)$ гэсэн хоёр хувьсагчийн функц авч үзье. Функцийн $M_o(x_o,y_o)$ цэг дээрх тухайн өөрчлөлтийг $y=y_o$ үед авч үзвэл,

$$\Delta_x z=f(x_o+\Delta x,y_o)-f(x_o,y_o)$$

болох ба үүнийг функцийн x аргументаар зохиосон тухайн өөрчлөлт гэж нэрлэнэ. Мөн y аргументийн хувьд тухайн өөрчлөлтийг бичвэл:

$$\Delta_y z=f(x_o,y_o+\Delta y)-f(x_o,y_o)$$

$\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ ноогдворын $\Delta x \to 0$ үеийн хязгаар орших бол түүнийг $f(x,y)$ функцийн $M_o(x_o,y_o)$ цэг дээрх $x-$ээр авсан тухайн уламжлал гэж нэрлэх ба

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \ \frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial x},\ \ z'_x,\ \ f'_x(x_o,y_o)$$

гэх мэтчилэн тэмдэглэнэ. Тэгвэл тодорхойлолт ёсоор:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial x}$$

Үүнтэй адилаар $f(x,y)$ функцийн $M_o(x_o,y_o)$ цэг дээр $y-$ээр авсан тухайн уламжлалыг тодорхойлно. Тодорхойлолт ёсоор

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_o,y_o+\Delta y)-f(x_o,y_o)}{\Delta y}=\frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial y}$$

болно. Тэмдэглэхдээ

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \ \frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial y},\ \ z'_x,\ \ f'_y(x_o,y_o)$$

Олон хувьсагчийн функцээс аль нэг хувьсагчаар нь авсан тухайн уламжлалыг олохдоо бусад хувьсагчдыг тогтмол гэж үзээд ердийн уламжлал авдаг дүрэм, томъёог ашиглана.

Жишээ 0.13. *$f(x,y)=xy+\dfrac{y}{x}$ функцийн тухайн уламжлалуудыг ол.*

Бодолт: *$f'_x(x,y)$-тухайн уламжлалыг олохдоо y хаувьсагчийг тогтмол ($y=const$) гэж үзэж, $f(x,y)$ функцээс x-ээр ердийн уламжлал авна. Иймд*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\Big(xy+\frac{y}{x}\Big)'_x=y-\frac{y}{x^2}$$

Үүнтэй төстэйгээр $f'_y(x,y)$-г олбол

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\Big(xy+\frac{y}{x}\Big)'_y=x+\frac{1}{x}$$

Хоёр хувьсагчийн функцийн тухайн уламжлалуудын геометр утгыг авч үзье. $z=f(x,y)$ хоёр хувьсагчийн функц нь огторгуйд ямар нэг гадаргууг дүрсэлдэг. XoY хавтгай дээр $M_0(x_0,y_0)$ цэгийг авч түүнд харгалзах гадаргуугийн цэг N-г олъё.

$z=f(x,y)$ гадаргууг $y=y_0$ хавтгайгаар огтлоход огтлолд үүссэн муруйг ANB гэж тэмдэглэе. Энэ муруйг $z=f(x,y)$ функцийн график гэж үзэж болно. Тэгвэл нэг хувьсагчийн функцийн уламжлалын геометр утга ёсоор $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{df(x,y_0)}{dx}\Big|_N$, үүнд α нь N цэгт ANB муруйд татсан шүргэгчийн OX тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй үүсгэсэн өнцөг. Тэгвэл

$$\frac{df(x,y_0)}{dx}=\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}$$

Эндээс $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha$ гэж гарна. Үүнтэй төсөөтэйгээр, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=$ $\operatorname{tg}\beta$ болно. Үүнд β нь $z=f(x,y)$ гадаргуу ба $x=x_0$ хавтгай хоёрын огтлолцлоор үүссэн CND муруйн N цэгт татсан шүргэгчийн OY тэнхлэгийн эерэг чиглэлтэй үүсгэж буй өнцөг.

Санамж 0.2. *Хоёроос дээш хувьсагчийн функцийн тухайн уламжлалыг ижилхэн зарчмаар томъёолж тэмдэглэнэ.*

Функцийн бүтэн дифференциал

$z = f(x, y)$ функц өгөгдсөн гэж үзье. $M(x, y)$ цэгээс $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$ цэг рүү шилжихэд гарах функцийн өөрчлөлтийг функцийн бүтэн өөрчлөлт гэж нэрлээд Δz гэж тэмдэглэе.

$$\Delta z = f(N) - f(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Одоо $f(x, y)$ функц $M(x, y)$ цэг дээр тасралтгүй тухайн уламжлалуудтай гэж үзээд функцийн бүтэн өөрчлөлтийг түүний тухайн уламжлалуудаар илэрхийлэх зорилго тавья. Үүний тулд Δz-ийг дараах хэлбэрт бичье.

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y)f(x, y)]$$

x-ийг бэхлэгдсэн гэж үзээд $f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$ илэрхийллийг хялбарчилъя. Дундаж утгын тухай Лагранжийн теоремыг ашиглавал

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y, \quad \exists \bar{y} \in (y, y + \Delta y)$$

Мөн $f(x + \Delta x, y + y\Delta y) - f(x, y + \Delta y)$ илэрхийллийн хувьд $y + \Delta y$-г тогтмол гэж үзээд энэ теоремыг ашиглавал

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x, \quad \bar{x} \in (x, x + \Delta x)$$

Тэгвэл Δz дараах хэлбэрт шилжинэ.

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}\Delta y$$

Нөгөөн талаас $\Delta x \to 0$ ба $\Delta y \to 0$ үед $\bar{x} \to x$, $\bar{y} \to y$ болох нь илэрхий юм. Тухайн уламжлалуудын тасралтгүй чанарыг ашиглан $\dfrac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}$ ба $\dfrac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}$ илэрхийллүүдэд хязгаарт шилжиж болно. Үүнд

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

теорем (0.4)-ийг дээрх илэрхийлэлд ашиглавал

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \alpha, \quad \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \beta$$

Үүнд

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0, \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0 = 0$$

Функцийн бүтэн өөрчлөлтийн томъёонд дээрх илэрхийллүүдийг орлуулбал

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \tag{3}$$

Одоо $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ хэмжигдэхүүн нь $\Delta x \to 0$ Ба $\Delta y \to 0$ үед

$$\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$$

-ийг бодвол дээд эрэмбийн багасаж барагдашгүй хэмжигдэхүүн гэдгийг харуулъя. Үүний тулд дараах хязгаарыг бодож үнэлье.

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta\rho} + \lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\beta\Delta y}{\Delta\rho}$$

Нөгөө талаас

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \le 1, \quad \left|\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right| \le 1$$

тул

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta\rho} = 0, \quad \lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\beta\Delta y}{\Delta\rho} = 0$$

болно. Иймд

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

байна. Мөн Δz-г дараах хэлбэрт бичиж болно.

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\Delta\rho \tag{4}$$

Үүнд $\varepsilon = \dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta\rho}, \quad \lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\varepsilon = 0$

Хэрэв $z = f(x,y)$ функцийн (x,y) цэг дээрх бүтэн өөрчлөлтийг

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \tag{5}$$

хэлбэрт тавьж болдог бол энэ функцийг тухайн (x,y) цэг дээр дифференциалчлагддаг функц гэж нэрлэдэг.

Функцийн бүтэн өөрчлөлтийн Δx, Δy-тэй шугаман хэсэг болох $A\Delta x + B\Delta y$ нэмэгдэхүүнийг бүтэн дифференциал гэж нэрлэж df буюу dz-ээр тэмдэглэнэ.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \tag{6}$$

Иймд функцийн дифференциал нь түүний бүтэн өөрчлөлтийн гол хэсэг болно.

$$\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

Теорем 0.5. *Хэрэв $z = f(x, y)$ функц (x, y) цэг дээр дифференциалчлагддаг бол энэ цэг дээр тасралтгүй байна.*

Теорем 0.6. *Хэрэв $z = f(x, y)$ функц (x, y) цэг дээр дифференциалчлагддаг бол $A = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $B = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ байна.*

Теорем 0.7. *Хэрэв өгөгдсөн цэг дээрх функцийн тухайн уламжлалууд оршдог бөгөөд тасралтгүй функцүүд бол функц энэ цэг дээр дифференциалчлагдана.*

(3 тэнцэтгэлийг функцийн тухайн уламжлалууд тасралтгүй гэсэн нөхцөлд гарган авсан билээ. Тухайн тохиолдолд $z = x$ гэвэл

$$dz = dx = x'\Delta x + x'_y \Delta y = \Delta x$$

болох ба $z = y$ гэж үзвэл $dz = \Delta y$ болно. Иймд функцийн бүтэн дифференциалыг

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

гэж тодорхойлно.

Жишээ 0.14. *Жишээ (0.13)-д өгөгдсөн $f(x, y) = xy + \dfrac{y}{x}$ функцийн бүтэн дифференциалыг ол.*

Бодолт: $dz = \left(y - \dfrac{y}{x^2}\right) dx + \left(x + \dfrac{1}{x}\right) dy$