ЛЕКЦ 3. ШУГАМАН ТЭГШИТГЭЛИЙН СИСТЕМ. КРОНЕКЕР-КАППЕЛЛЫН ТЕОРЕМ. ШУГАМАН ТЭГШИТГЭЛИЙН СИСТЕМИЙГ БОДОХ АРГУУД.

Багш С. Уранчимэг

2021 он

1. Шугаман тэгшитгэлийн систем. (ШТС)
2. Кронекер-Каппеллын теорем.
3. ШТС-ийг бодох аргууд.

n хувьсагчтай, m шугаман тэгшитгэлийн системийг бичье.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Энд, $m \neq n$ байж болно.
$x_1, x_2, ..., x_n$ – үлмэдэгч,
$a_{11}, ..., a_{mn}, b_1, ..., b_m$ – системийн коэффициентууд,
($a_{11}, ..., a_{mn}$ – системийн коэффициентууд, $b_1, b_2, ..., b_m$ – сул гишүүд.)

Тодорхойлолт

Хэрэв (1)−д тодорхой эрэмбэлэгдсэн $x_1, \dots, x_n$ тоог орлуулахад бүх тэгшитгэл нь адилтгал болбол $x_1, x_2, \dots, x_n$−г системийн шийд гэнэ.

$$\text{Хэрэв (1)} \left\langle \begin{array}{ccc} \text{шийдтэй} & & \textcolor{red}{\text{нийцтэй}} \\ & \text{бол} & \\ \text{шийдгүй} & & \textcolor{red}{\text{нийцгүй}} \end{array} \right\rangle \text{ШТС гэнэ.}$$

Хэрэв (1)

$$\left\langle \begin{array}{ccc} \text{цор ганц} & & \textcolor{red}{\text{тодорхой}} \\ & \text{шийдтэй бол} & \\ \text{төгсгөлгүй олон} & & \textcolor{red}{\text{тодорхойгүй}} \end{array} \right\rangle \text{ШТС гэнэ.}$$

Шийдүүдийн олонлог нь давхцах системүүдийг тэнцүү чанартай гээд $\sim$ гэж тэмдэглэнэ.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицыг системийн үндсэн матриц гэнэ.

Дараах матрицыг ШТС-ийн өргөтгөсөн матриц гэнэ.

$$(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Өргөтгөсөн матрицад элементар мөрөн (багана хувиргалт хийхгүй!) хувиргалт хийхэд тэнцүү чанартай системд шилжинэ.

Теорем (Кронекер-Капелл)

Хэрэв (1) ШТС хувьд

$$rang(A) = rang(A|B)$$

бол нийцтэй байна. Хэрэв (1)-ийн хувьд

$rang(A) < rang(A\|B)$	нийцгүй	
$rang(A) = rang(A\|B) = n$	тодорхой	байна.
$rang(A) = rang(A\|B) < n$	тодорхойгүй	

Тодорхойлолт

Хэрэв матриц

1. Тэг биш мөрийн эхний тэг биш элемент 1 байна.
2. Дараалсан тэг биш мөрүүдийн доод мөрийн эхний 1 дээд мөрийн эхний 1-ийн баруун талд байрлана.
3. Тэг мөрүүд матрицын сүүлийн мөрүүдэд байрлана.

гэсэн нөхцөлүүдийг хангавал шаталсан мөр хэлбэртэй матриц гэнэ.

Гауссын арга нь ШТС-ийн өргөтгөсөн матрицыг шаталсан мөр хэлбэрт шилжтэл элементар мөрөн хувиргалтыг хийнэ.

Жишээ (1.)

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

ШТС-ийг Гауссын аргаар бод.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{M_{13}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[M_4-2M_1]{M_2-3M_1}$$

Жишээ (1.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[M_{24}]{-M_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 10 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[M_4-3M_2]{M_3-M_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 29 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}M_3}$$

Жишээ (1.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 29 \end{array}\right) \xrightarrow{M_4-3M_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{10}M_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow rang(A) = rang(A|B) =$$

$4 \Longrightarrow$ ШТС тодорхой ба шийд:

Жишээ (1.)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Тодорхойлолт

Хэрэв матриц

1. Шаталсан мөр хэлбэртэй
2. Мөр бүрд ганц тэг биш элемент байна.

гэсэн нөхцөлүүдийг хангавал эмхэтгэсэн шаталсан мөр хэлбэртэй матриц гэнэ.

Гаусс-Жорданы арга нь ШТС-ийн өргөтгөсөн матрицыг эмхэтгэсэн шаталсан мөр хэлбэрт шилжтэл элементар мөрөн хувиргалтыг хийнэ.

Жишээ (2.)

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

ШТС-ийг Гаусс-Жорданы аргаар бод.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \text{Жишээ1-ийг хар}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[M_3-M_4]{M_2+M_4, M_1-2M_4}$$

Жишээ (2.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[M_2+M_3]{M_1-M_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{M_1-M_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rang(A)=rang(A|B)=4 $\Longrightarrow$ ШТС тодорхой

Теорем

Хэрэв ШТС-ийн үндсэн матриц A квадрат ба бөхөөгүй бол

$$A \cdot X = B$$

ШТС цор ганц шийдтэй байна.

Энэ шийдийг урвуу матрицын аргаар олъё.

$$A \cdot X = B$$

тэгшитгэлийн хоёр талыг зүүнээс нь A^{-1} матрицаар үржүүлбэл:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

буюу

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Жишээ (3.)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

ШТС-ийг урвуу матрицын аргаар бод.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$ буюу тэг биш тул ШТС тодорхой.

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Хэрэв ШТС-ийн үндсэн матриц A квадрат ба бөхөөгүй бол

$$A \cdot X = B$$

ШТС-ийн цор ганц шийдийг

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad i = 1, 2, ...,$$

Крамерын дүрмээр олж болно. Энд, Δ_i нь A матрицын i-р баганыг сул гишүүдийн баганаар солиход гарсан матрицын тодорхойлогч.

Жишээ (4.)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 & = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 & = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 & = 4 \end{cases}$$

ШТС-ийг Крамерын дүрмээр бод.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{тэг биш тул ШТС тодорхой.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -1 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -1 \implies X = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \\ \Delta_3/\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$