

ЛЕКЦ 12. Эх функц. Тодорхойгүй интеграл, чанарууд.
Интегралчлах үндсэн аргууд. Хялбар рациональ
бутархайнууд, рациональ илэрхийллийг интегралчлах.

Багш С. Уранчимэг

2021 он

- 1 Эх функц.
- 2 Тодорхойгүй интеграл, чанарууд.
- 3 Интегралчлах үндсэн аргууд.
- 4 Хялбар рациональ бутархайнууд, рациональ илэрхийллийг интегралчлах.

Тодорхойлолт

Хэрэв $F(x)$ функц $\forall M(x, y) \in (a, b)$ дээр дифференциалч-лагддаг бөгөөд уламжлал нь өгсөн $f(x)$ функцтэй тэнцүү байвал $F(x)$ -ийг $f(x)$ функцийн (a, b) дээрх эх функц гэнэ.

Жишээ (1.)

a.) $f(x) = 2x$ бол эх функцийг ол.

$$F(x) = x^2$$

b.) $f(x) = \sin x$ бол эх функцийг ол.

$$F(x) = -\cos x$$

Теорем

Хэрэв (a, b) дээр $f(x)$ -ийн эх функц $F_1(x), F_2(x)$ бол

$$F_2(x) - F_1(x) = \text{ТОГТМОЛ} .$$

Тодорхойлолт

$f(x)$ функцийн (a, b) дээрх бүх эх функцийн олонлогийг $f(x)$ функцийн тодорхойгүй интеграл гэнэ. Тэмдэглэгээ:

$$\int f(x)dx$$

$f(x)$ функцийн ямар нэг эх функц $F(x)$ бол

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C = \text{constant})$$

Тодорхойгүй интегралын чанарууд.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\textcircled{1} \quad d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx$$

$$\textcircled{2} \quad d(F(x) + C) = f(x)$$

$$\textcircled{3} \quad \int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

$$\textcircled{4} \quad \int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$$

$$\forall \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Жишээ (2.)

a). $\int 2x \, dx = x^2 + C$

b). $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

Хялбар интегралын таблиц.

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \quad (n \neq -1)$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

Хялбар интегралын таблиц.

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C. \quad |x| < 1$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \quad a \neq 0$$

$$12'. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C. \quad a \neq 0$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C. \quad a \neq 0$$

Хялбар интегралын таблиц.

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

$$14'. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad |x| < a$$

Жишээ (3.)

$$\int (3x + 5)^{2021} dx = \frac{(3x + 5)^{2022}}{6066} + C$$

Жишээ (4.)

$$\int \sin(2x - 1) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x - 1) + C$$

Жишээ (5.)

$$\int \frac{dx}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5} \tan(5x) + C$$

Жишээ (6.)

$$\int e^{11x-10} dx = \frac{1}{11} e^{11x-10} + C$$

Хувьсагч солих арга.

$f(t)$ тасралтгүй функц, $t = \varphi(x)$ тасралтгүй дифференциалч-лагддаг бөгөөд утгын муж нь $f(t)$ -ийн тодорхойлогдох мужид харъяалагддаг байг.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt + C$$

Томьёонд, $x \leftrightarrow t$

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Эх функцэд

$$t = \varphi^{-1}(x)$$

буцааж орлуулна.

Жишээ (7.)

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

Жишээ (8.)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \\ \int \frac{dt}{t^2 - 1} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

Хэсэгчлэн интегралчлах арга. (ХИА)

(a, b) дээр $u(x), v(x)$ тасралтгүй дифференциалчлагддаг функцүүд байвал

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Жишээ (9.)

$$\int x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx =$$
$$\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$$

Жишээ (10.)

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & dv = e^x dx \\ du = -\sin x dx & v = e^x \end{array} \right| =$$

$$e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

дахин ХИА:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & dv = e^x dx \\ du = \cos x dx & v = e^x \end{array} \right| =$$

$$e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C$$

Хоёр олон гишүүнтийн харьцааг рациональ функц гэнэ.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Зөв рациональ функц:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad m < n$$

Засагдах рациональ функц:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad m < n$$

Хуваарьт дан болон давхар бодит шийдтэй шугаман, дан болон давхар комплекс шийдтэй квадратын үржвэртэй зөв бутархайнуудыг хялбар рациональ бутархайнууд гэнэ.

1. $\frac{A}{x - a}$

2. $\frac{A}{(x - a)^k}$

3. $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$

4. $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$

- $A, M, N, a, p, q \in \mathbb{R}. \quad k \in \mathbb{Z}$
- $x^2 + px + q = 0 \implies D = p^2 - 4q < 0$

$$1. \int \frac{A dx}{x - a} = A \ln |x - a| + C$$

$$2. \int \frac{A dx}{(x - a)^k} = \left| \begin{array}{l} t = x - a \\ dt = dx \end{array} \right| = A \int \frac{dt}{t^k} = A \frac{t^{-k+1}}{-k+1}$$

$$= A \frac{(x - a)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

$$t = x + \frac{p}{2} \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$$

$$x^2 + px + q = t^2 + a^2$$

$$Mx + N = \frac{M}{2}(2x + p) - \left(\frac{Mp}{2} - N\right)$$

$$\begin{aligned} 3. & \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx - \left(\frac{Mp}{2} - N \right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{t^2 + a^2} - \left(\frac{Mp}{2} - N \right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} \\ &= \frac{M}{2} \ln|t^2 + a^2| + \left(\frac{Mp}{2} - N \right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C \\ &= \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(\frac{Mp}{2} - N \right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{2a} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. & \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx - \left(\frac{Mp}{2} - N \right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2 + a^2)^k} - \left(\frac{Mp}{2} - N \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} \\ &= \frac{M}{2} \frac{(t^2 + a^2)^{-k+1}}{-k+1} - \left(\frac{Mp}{2} - N \right) I_k \end{aligned}$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \left(\frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + (2k - 1)I_k \right)$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

Жишээ (11.)

$$F(x) = \int \frac{x^4}{x^3 - 2x^2 - 7x - 4} dx$$

$$\frac{x^4}{x^3 - 2x^2 - 7x - 4} = x + 2 + \frac{11x^2 + 14x + 12}{(x+1)^2(x-4)}$$

$$\frac{11x^2 + 14x + 12}{(x+1)^2(x-4)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-4}$$

$$11x^2 + 14x + 12 = A(x-4) + B(x+1)(x-4) + C(x+1)^2$$

$$11x^2 + 14x + 12 = (B+C)x^2 + (A-3B+2C)x + (-4A-4B+C)$$

Жишээ (11.)

$$\begin{cases} 11 = B + C \\ 14 = A - 3B + 2C \\ 12 = -4A - 4B + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{9}{5} \\ B = \frac{31}{25} \\ C = \frac{244}{25} \end{cases}$$

Жишээ (11.)

$$\frac{11x^2 + 14x + 12}{(x+1)^2(x-4)} = \frac{-9/5}{(x+1)^2} + \frac{31/25}{x+1} + \frac{244/25}{x-4}$$

- $-\frac{9}{5} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{9}{5} \frac{1}{x+1} + C$
- $\frac{31}{25} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{31}{25} \ln|x+1| + C$
- $\frac{244}{25} \int \frac{dx}{x-4} = \frac{244}{25} \ln|x-4| + C$
- $\int x + 2 dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$

Жишээ (11.)

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{9}{5(x+1)} + \ln \sqrt[25]{|(x+1)^{31}(x-4)^{244}|} + C$$