ЛЕКЦ 5. Вектор хэмжигдэхүүн. Векторууд дээрх шугаман үйлдлүүд тэдгээрийн чанарууд, проекц. Векторуудын шугаман эвлүүлэг, шугаман хамаарал. Шугаман хамааралгүй векторуудын чанарууд. Вектор огторгуй ба суурь. Векторыг сууриар задлах. Векторын координат. Ортогональ нормчлогдсон суурь. Хэрчмийг өгөгдсөн харьцаанд хуваах.

Багш С. Уранчимэг

2021 он

1. Вектор хэмжигдэхүүн.
2. Векторууд дээрх шугаман үйлдлүүд тэдгээрийн чанарууд, проекц.
3. Векторуудын шугаман эвлүүлэг, шугаман хамаарал.Шугаман хамааралгүй векторуудын чанарууд.
4. Вектор огторгуй ба суурь. Векторыг сууриар задлах. Векторын координат. Ортогональ нормчлогдсон суурь.
5. Хэрчмийг өгөгдсөн харьцаанд хуваах.

Тодорхойлолт

Тоон утгаараа бүрэн тодорхойлогддог хэмжигдэхүүнийг скаляр хэмжигдэхүүн гэнэ.

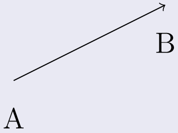
Тодорхойлолт

Тоон утга болон чиглэлээрээ бүрэн тодорхойлогддог хэмжигдэхүүнийг вектор хэмжигдэхүүн гэнэ.

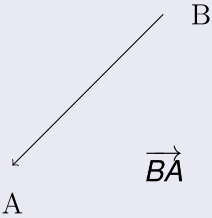
Тодорхойлолт

Чиглэлтэй хэрчмийг вектор гэнэ.

Вектор хэмжигдэхүүн.



$\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{BA}$

A эхлэлийн цэг,
B төгсгөлийн цэг.

B эхлэлийн цэг,
A төгсгөлийн цэг.

Мөн $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ латин цагаан толгойн жижиг үсгээр тэмдэглэнэ. Векторын уртыг түүний модул гээд

$$|\overrightarrow{AB}| \quad \text{эсвэл} \quad |\vec{a}|$$

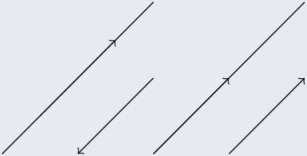
гэж тэмдэглэнэ.

Урт нь тэгтэй тэнцүү векторыг дурын чиглэлтэйгээр тооцон тэг вектор гээд $\vec{0}$ гэж тэмдэглэнэ.

$\vec{a} = \vec{b} \iff$ векторын урт тэнцүү, чиглэл нь ижил.

$\vec{a} = -\vec{b} \iff$ векторын урт тэнцүү, чиглэл нь эсрэг.

Нэг эсвэл параллель шулуун дээр орших векторуудыг коллинеар векторууд гээд $\vec{a} \parallel \vec{b}$ гэж тэмдэглэнэ.



Тэг вектор бүх вектортой коллинеар.

Урт нь нэг байх векторыг нэгж вектор гэнэ.

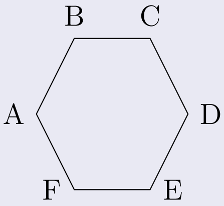
$\vec{a} \neq 0$ вектортой ижил чиглэлтэй, нэгж векторыг $\vec{a}$ векторын орт гээд $\hat{a}$ гэж тэмдэглэнэ.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Вектор хэмжигдэхүүн.

Жишээ (1.)

Зөв зургаан өнцөгтийн талуудаас тэнцүү болон эсрэг векторуудаас тус бүр 3-г бич.



Тэнцүү векторууд:

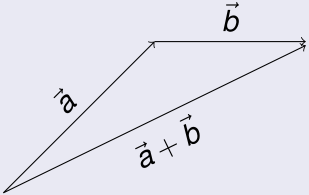
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}, \quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DE}$$

Эсрэг векторууд:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}, \quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{ED}$$

Векторуудыг нэмэх, хасах, тоогоор үржих үйлдлүүдийг вектор дээрх шугаман үйлдэл гэнэ.

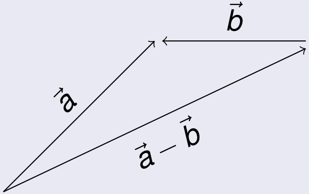
1. Векторуудыг нэмэх
   $\vec{a}$ векторын төгсгөлийн цэгийг $\vec{b}$ векторын эхлэлийн цэгтэй давхцуулна. $\vec{a}$-ын эхлэлийн цэгийг $\vec{b}$ -ын төгсгөлийн цэгтэй холбосон вектор нь $\vec{a}+\vec{b}$ болно.



- Чанар

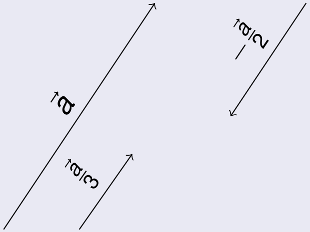
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
3. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

3. Векторуудыг хасах



4. Векторыг тоогоор үржих
   $\vec{a}$ -г λ бодит тоогоор үржүүлэхэд
   - $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ урттай
     - $\lambda > 0$ бол ижил чиглэлтэй
     - $\lambda < 0$ бол эсрэг чиглэлтэй

   $\lambda\vec{a}$ вектор гарна.



- Чанар $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ хувьд

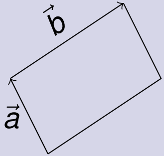
1. $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
3. $(\vec{a} + \vec{b})\lambda = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Хэрэв $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеар бол

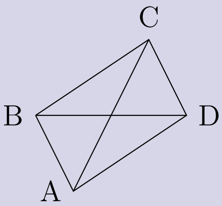
$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \qquad \lambda \neq 0$$

Жишээ (2.)

$\vec{a}, \vec{b}$ векторуудаар байгуулагдсан параллелограмын диагоналиудыг эдгээр вектороор илэрхийл.

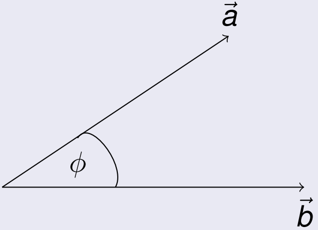


Жишээ (2.)



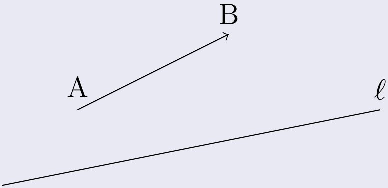
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \implies \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \implies \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ векторуудыг парраллель зөөж, эхийг давхцуулна. Тэдгээрийг давхцтал эргүүлэхэд үүсэх эргэлтийн бага өнцгийг векторуудын хоорондох өнцөг гэнэ.

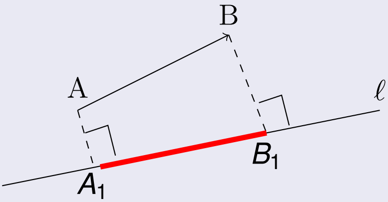


$$\vec{a} \frown \vec{b} = \phi \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

Огторгуйн дурын байрлалтай $\vec{\ell}$ тэнхлэг, $\overrightarrow{AB}$ векторыг авъя.



A, B цэгүүдийн $\vec{\ell}$ тэнхлэг дээрх проекцийг A_1, B_1-ээр тэмдэглэе.

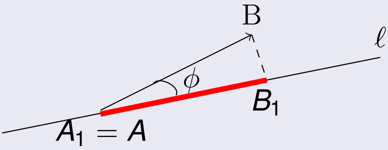


Тодорхойлолт

A_1B_1 хэрчмийн уртыг $\pm$ тэмдэгтэй авсныг $\overrightarrow{AB}$-ын ℓ тэнхлэг дээрх проекц гээд

$$\text{пр}_\ell \overrightarrow{AB}$$

гэж тэмдэглэнэ.



$$\cos\phi = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} \implies |A_1B_1| = |AB|\cos\phi$$

$$\text{пр}_\ell\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\phi$$

- Чанар

1. $\text{пр}_\ell(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_\ell\vec{a} + \text{пр}_\ell\vec{b}$
2. $\text{пр}_\ell(\lambda\vec{a}) = \lambda\text{пр}_\ell\vec{a}$

Тодорхойлолт

$$\lambda_1 \cdot \vec{e_1} + \lambda_2 \cdot \vec{e_2} + ... + \lambda_n \cdot \vec{e_n} = 0 \quad (1)$$

тэнцэтгэл зөвхөн

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

үед л биелвэл $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ векторуудыг шугаман хамааралгүй векторууд гэнэ. Харин (1)

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 \neq 0$$

үед биелвэл $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ векторуудыг шугаман хамааралтай векторууд гэнэ.

(1)-ийн зүүн талын илэрхийллийг $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ векторуудын шугаман эвлүүлэг гэнэ.

Теорем

Хавтгай дээрх $\forall$ 3-н вектор шугаман хамааралтай байна.

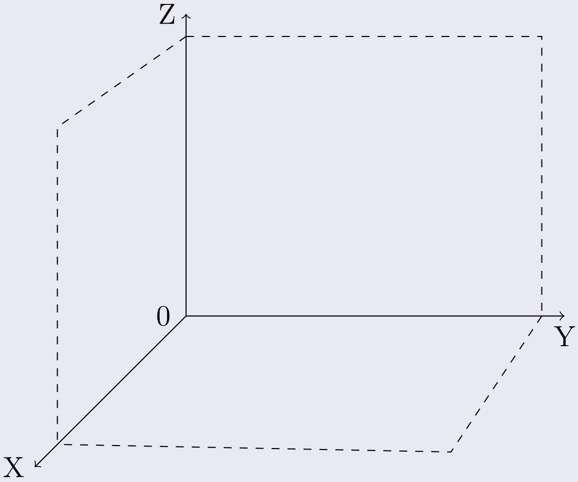
Тодорхойлолт

Нэг хавтгай дээр оршдог эсвэл нэг хавтгайтай параллелль векторуудыг компланар векторууд гэнэ.

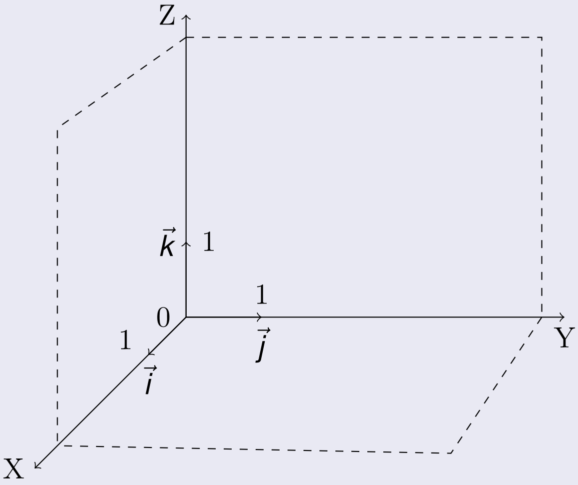
Теорем

Огторгуйн дурын дөрвөн вектор шугаман хамааралтай байна.

Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын систем $\mathbb{R}^3$.



Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын систем $\mathbb{R}^3$.



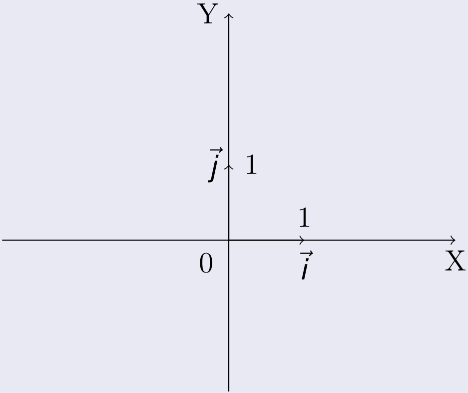
$\vec{i} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}} \quad \vec{j} = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}} \quad \vec{k} = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$

Нэгж матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
ортогональ нормчлогдсон $(A \cdot A^{\mathrm{T}} = I)$ баганuудтай буюу

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ортогональ нормчлогдсон векторууд юм. Огторгуйн дурын вектор нэгж векторуудын шугаман эвлүүлгээр нэг утгатай илэрхийлэгдэх тул $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ суурь болно.
Иймд $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ нь $\mathbb{R}^3$ -ын ортогональ нормчлогдсон суурь болно.

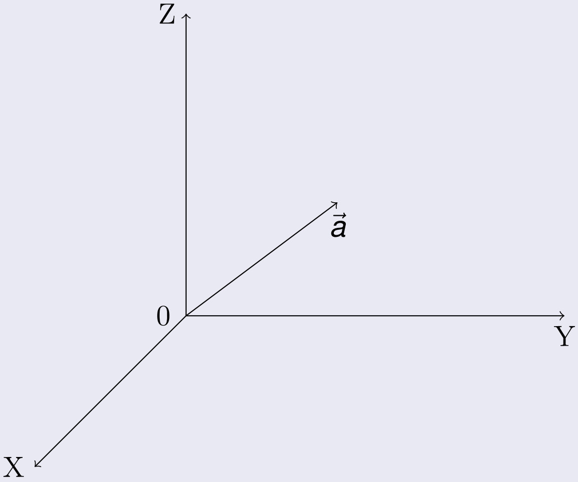
Хавтгайн тэгш өнцөгт координатын систем $\mathbb{R}^2$.



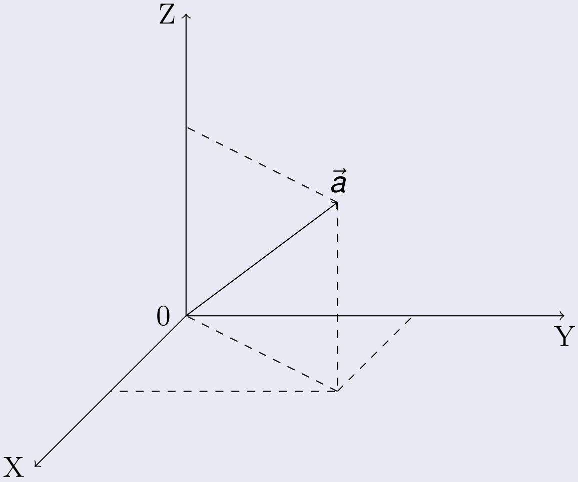
$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(\vec{i}, \vec{j})$ нь $\mathbb{R}^2$ -ын ортогональ нормчлогдсон суурь болно.

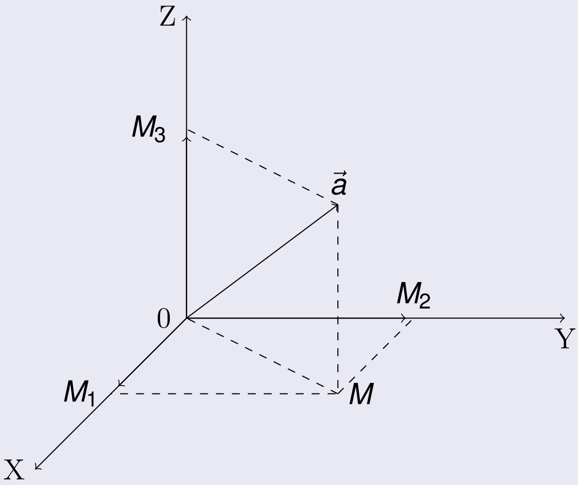
$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ авъя.



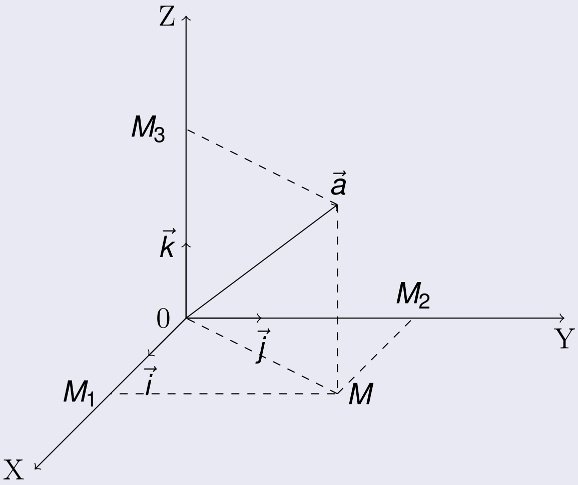
$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$.



$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$



$$\vec{a} = \overrightarrow{0M_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$



$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{i} \cdot \text{пр}_{O_x} \vec{a}, \qquad \overrightarrow{OM_2} = \vec{j} \cdot \text{пр}_{O_y} \vec{a}, \qquad \overrightarrow{OM_3} = \vec{k} \cdot \text{пр}_{O_z} \vec{a}$$

$$x = \text{пр}_{O_x}\vec{a}, \qquad y = \text{пр}_{O_y}\vec{a}, \qquad z = \text{пр}_{O_z}\vec{a}$$

гэж тэмдэглэвэл:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \iff \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Энэ томьёог $\vec{a}$ -ын декартын ортогональ суурьиар задарсан задаргаа гэнэ.
x, y, z -ийг $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ векторын декартын тэгш өнцөгтийн координатууд гэнэ.

Координатаар өгөгдсөн векторуудын шугаман үйлдэл нь тэдгээрийн координатууд дээрх үйлдэлд шилжинэ.

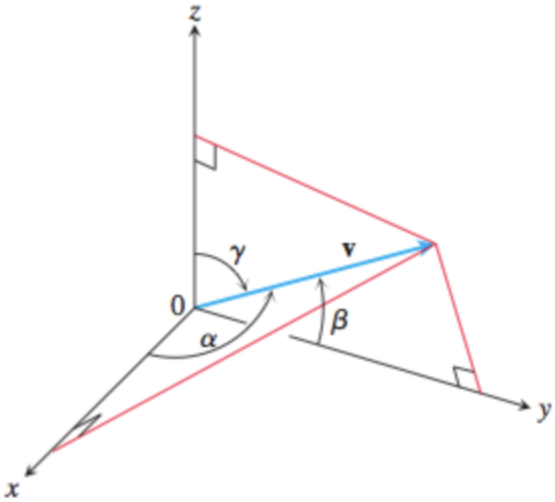
$\forall \vec{a} = \{x_1, y_1\}, \vec{b} = \{x_2, y_2\} \in \mathbb{R}^2$

1. $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$
2. $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2\}$
3. $\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1\}$
4. $\vec{a} = \vec{b} \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2$
5. $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} = \lambda\vec{b} \iff \begin{cases} \mathrm{x}_1 = \lambda x_2 \\ \mathrm{y}_1 = \lambda y_2 \end{cases} \iff \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$
6. $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$\forall\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}\in\mathbb{R}^3$

1. $\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}$
2. $\vec{a}-\vec{b}=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\}$
3. $\lambda\vec{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$
4. $\vec{a}=\vec{b}\iff x_1=x_2,y_1=y_2,z_1=z_2$
5. $\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}=\lambda\vec{b}\iff\begin{cases}\mathrm{x}_1=\lambda x_2\\ \mathrm{y}_1=\lambda y_2\\ \mathrm{z}_1=\lambda z_2\end{cases}\iff\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$
6. $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

Чиглүүлэгч косинус.



$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ векторын

- α нь $\vec{v}$ векторын O_x тэнхлэгийн эерэг чиглэлд үүсгэх өнцөг $(0 \le \alpha \le \pi)$
- β нь $\vec{v}$ векторын O_y тэнхлэгийн эерэг чиглэлд үүсгэх өнцөг $(0 \le \beta \le \pi)$
- γ нь $\vec{v}$ векторын O_z тэнхлэгийн эерэг чиглэлд үүсгэх өнцөг $(0 \le \gamma \le \pi)$

байх α, β, γ-г чиглүүлэгч өнцгүүд гэнэ. Чиглүүлэгч өнцгүүдийн косинусыг векторын чиглүүлэгч косинус гэнэ.

$$\cos\alpha = \frac{x}{|v|} \qquad \cos\beta = \frac{y}{|v|} \qquad \cos\gamma = \frac{z}{|v|}$$

$$x = |v|\cos\alpha \qquad y = |v|\cos\beta \qquad z = |v|\cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\vec{v}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

Вектор огторгуй ба суурь. Векторыг сууриар задлах. Векторын координат. Ортогональ нормчлогдсон суурь.

Жишээ (3.)

$\vec{a} = \{-1, 2, 0\}, \ \vec{b} = \{3, 4, 0\}, \ \vec{c} = \{2, 0, 1\}, \ \vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ векторууд өгөгджээ.

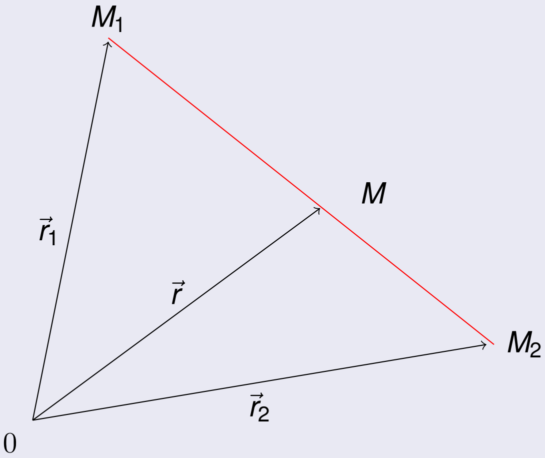
- $|\vec{a}|$
- $\vec{b}_0$
- $\cos(\vec{c} \widehat{\ } \vec{j})$
- пр$_{O_y}\vec{d}$ ол.

Вектор огторгуй ба суурь. Векторыг суурииар задлах. Векторын координат. Ортогональ нормчлогдсон суурь.

Жишээ (3.)

$\vec{a} = \{-1, 2, 0\},\ \vec{b} = \{3, 4, 0\},\ \vec{c} = \{2, 0, 1\},\ \vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$
векторууд өгөгджээ.

- $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0} = \sqrt{5}$
- $|\vec{b}| = \sqrt{9 + 16 + 0} = 5 \implies \vec{b}_0 = \{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\}$
- $\cos(\vec{c}\,\widehat{}\,\vec{j}) = 0 \implies \vec{c}\,\widehat{}\,\vec{j} = 90^\circ$
- $\vec{d} = \{-1 - 2 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2, 2 - 8 + 0, 0 - 0 + \frac{1}{3}\} = \{-\frac{19}{3}, -6, \frac{1}{3}\}$
  $\text{пр}_{O_y}\vec{d} = -6$


M_1
M
$\vec{r}_1$
$\vec{r}$
M_2
$\vec{r}_2$
0

$$\overrightarrow{M_1 M} = \vec{r} - \vec{r_1} \qquad \overrightarrow{MM_2} = \vec{r_2} - \vec{r}$$

$$\overrightarrow{M_1 M} \parallel \overrightarrow{MM_2} \iff \overrightarrow{M_1 M} = \lambda \overrightarrow{MM_2} \implies \vec{r} - \vec{r_1} = \lambda(\vec{r_2} - \vec{r})$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{r_1} + \lambda \vec{r_2}}{1 + \lambda}$$

Энэ томьёог координатаар бичвэл:
$M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \vec{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad \vec{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Хэрэв М цэг $M_1 M_2$ хэрчмийн гадна байвал $\lambda < 0$ байна.