# ЛЕКЦ 1. КОМПЛЕКС ТОО ТҮҮНИЙ ХЭЛБЭРҮҮД. КОМПЛЕКС ТООН ДЭЭРХ ҮЙЛДЛҮҮД. МУАВРЫН ТОМЪЁО.

Багш С. Уранчимэг

2020 он

1. Комплекс тоо, түүний хэлбэрүүд
2. Комплекс тоон дээрх үйлдлүүд
3. Муаврын томьёо
4. Комплекс тооноос язгуур гаргах

### Тодорхойлолт

$x, y$ бодит тоонууд бол $(x, y)$ эрэмбэлэгдсэн хосыг комплекс тоо гэнэ.

Комплекс тоон хавтгайг $\mathbb{C}$, комплекс тоог $z$-ээр тэмдэглэнэ. ө.х $z = (x, y)$

$$x = Re(z) \quad \text{бодит хэсэг}$$

$$y = Im(z) \quad \text{хуурмаг хэсэг}$$

Бодит тоо нь комплекс тоо юм. Бодит хэсэг нь тэг байх $(0, 1)$ комплекс тоог хуурмаг нэгж гээд $i$-ээр тэмдэглэнэ.

$$i = \sqrt{-1} \quad i = (0, 1) \quad i^2 = -1$$

$z = (x, y) \iff z = x + iy$ комплекс тооны сдандарт хэлбэр гэнэ.

**Тодорхойлолт**

$\overline{z} = x - iy$ тоог $z = x + iy$ тооны хосмог комплекс тоо гэнэ. Харилцан хосмог комплекс тоонууд $O_x$ тэнхлэгийн хувьд тэгшхэмтэйгээр $\mathbb{R}^2$ хавтгайд байрлана.

$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\dfrac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} =$ $\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

- Байр солих чанар
  - $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
  - $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Хэсэглэн нэгтгэх чанар
  - $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
  - $z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2)z_3$
- Хаалт нээх чанар
  - $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

$z_1$ , $z_2$ комплекс тооны хувьд

$$Re(z_1) = Re(z_2) \quad Im(z_1) = Im(z_2)$$

үед л тэнцэнэ: $z_1 = z_2$
$Im(z_1) \neq 0 \quad Im(z_2) \neq 0$ бол жишигдэхгүй.

$z_1$ , $z_2$ комплекс тооны хувьд гурвалжны тэнцэтгэлбиш

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

биелэх ба эндээс

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2| \implies |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$$

Төгсгөлөг $z_1, z_2, ..., z_n$ комплекс тоонуудын хувьд төсөөтэйгээр

$$|z_1| + |z_2| + ... + |z_n| \geq |z_1 + z_2 + ... + z_n|$$

### Жишээ

$z_1 = 8 + 2i \quad z_2 = 5 - 4i$ комплекс тоонууд хувьд дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

a. $z_1 + z_2 =$

## Жишээ

$z_1 = 8 + 2i \quad z_2 = 5 - 4i$ комплекс тоонууд хувьд дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

b. $z_1 + z_2$=(8+5)+(2-4)i=13-2i

## Жишээ

$z_1 = 8 + 2i \quad z_2 = 5 - 4i$ комплекс тоонууд хувьд дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

c. $z_1 - z_2 =$

**Жишээ**

$z_1 = 8 + 2i \quad z_2 = 5 - 4i$ комплекс тоонууд хувьд дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

d. $z_1 - z_2 = (8 - 5) + (2 + 4)i = 3 + 6i$

**Жишээ**

$z_1 = 8 + 2i \quad z_2 = 5 - 4i$ комплекс тоонууд хувьд дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

e. $z_1 \cdot z_2 =$

## Жишээ

$z_1 = 8 + 2i \quad z_2 = 5 - 4i$ комплекс тоонууд хувьд дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

f. $z_1 \cdot z_2 = (40 + 8) + (10 - 32)i = 48 - 22i$

## Жишээ

$z_1 = 8 + 2i \quad z_2 = 5 - 4i$ комплекс тоонууд хувьд дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

g. $\frac{z_1}{z_2} =$

**Жишээ**

$z_1 = 8 + 2i \quad z_2 = 5 - 4i$ комплекс тоонууд хувьд дараах үйлдлийг гүйцэтгэ.

- h. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8+2i}{5-4i} = \frac{8+2i}{5-4i}\frac{5+4i}{5+4i} = \frac{32}{41} + \frac{42}{41}i$

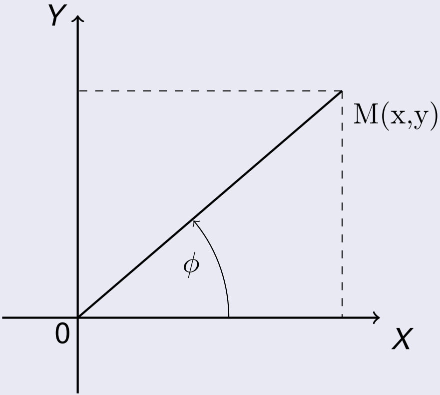
Хосмог комплекс тооны үржвэр ямагт бодит тоо байна.

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$$

Зарим хосмог биш комплекс тооны үржвэр бодит тоо байна.

**Жишээ**

(2+3i)(4-6i)=26




$$\boxed{tg\phi = \frac{y}{x}}$$

$$\boxed{|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$\overrightarrow{OM}$ векторын уртыг $z = x + yi$ комплекс тооны модул гээд $|z|$-ээр, $\overrightarrow{OM}$ векторын $O_x$ тэнлэгтэй үүсгэх өнцөг $\phi$-г аргумент гээд $Arg(z)$-ээр тэмдэглэнэ.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \phi = Arg(z)$$

## Тодорхойлолт

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

# Комплекс тоо, түүний хэлбэрүүд

$z = x + yi$ комплекс тоог модул, аргументаар нь илэрхийлье.

$$\cos\phi = \frac{x}{|z|} \implies x = |z|\cos\phi$$

$$\sin\phi = \frac{y}{|z|} \implies y = |z|\sin\phi$$

$$z = x + yi = |z| \cdot (\cos\phi + i\sin\phi)$$

комплекс тооны тригонометр хэлбэр.

$$Arg(z) = \phi \pm 2\pi k \quad k = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm n$$

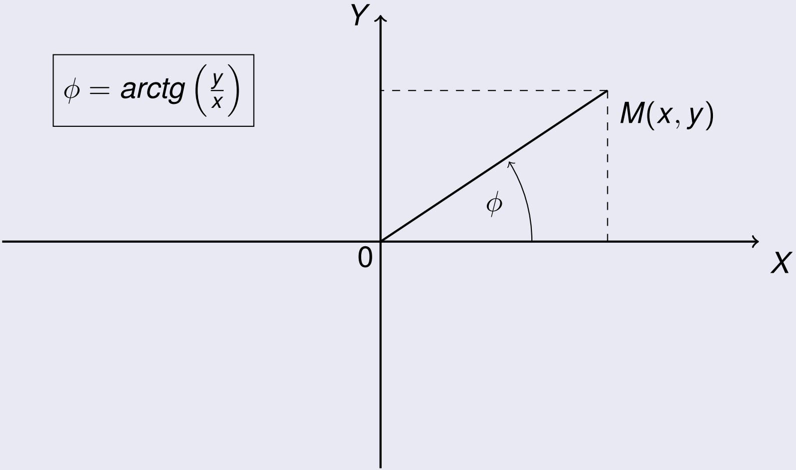
$$-\pi < \phi \leq \pi$$

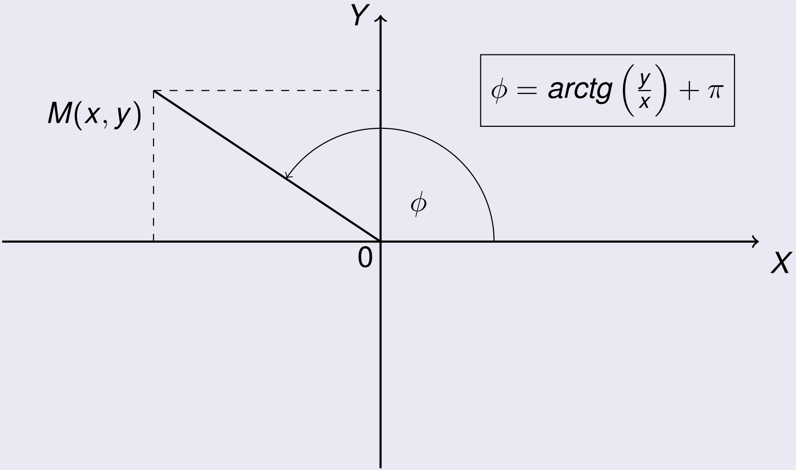
өнцгийг $z$ комплекс тооны аргументийн гол утга гээд

$$\phi = arg(z)$$

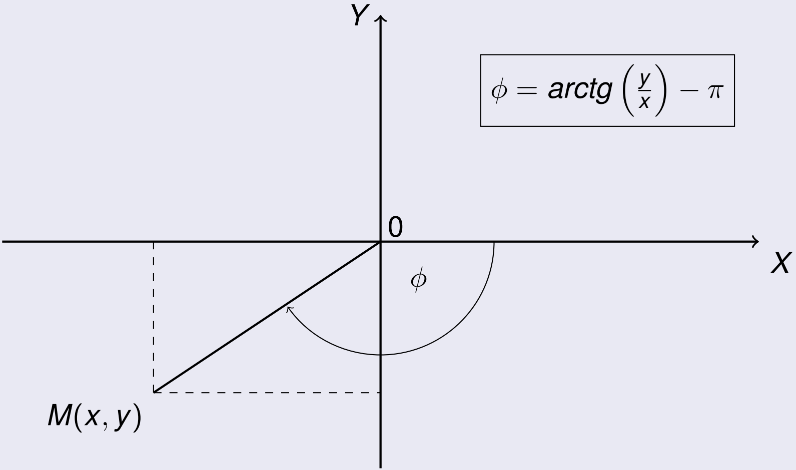
# Комплекс тооны гол аргументийн утга

$$\boxed{\phi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)}$$

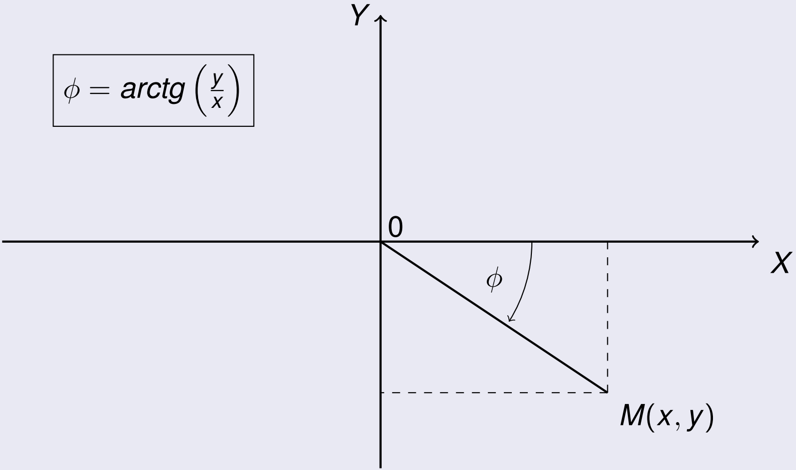





$$\boxed{\phi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi}$$


$Y$
$\phi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$
0
$X$
$\phi$
$M(x, y)$

$$\boxed{\phi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)}$$



## Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $arg(z_1 \cdot z_2) =$

### Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{3} + i \implies arg(z_1 \cdot z_2) = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

## Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $arg(z_1) + arg(z_2) =$

## Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $arg(z_1) = -\frac{\pi}{2} \quad arg(z_2) = arctg\frac{\sqrt{3}}{-1} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$

## Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $arg(z_1) + arg(z_2) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

### Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2) =$

## Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $Arg(z_1) = \frac{3\pi}{2} \quad Arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} \implies Arg(z_1) + Arg(z_2) = \frac{13\pi}{6}$

### Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $arg(\frac{z_1}{z_2}) =$

## Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-i}{-1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i} = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

**Жишээ**

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $arg(\frac{z_1}{z_2}) = arctg\frac{1/4}{-\sqrt{3}/4} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$

## Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $arg(z_1) - arg(z_2) = -\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{7\pi}{6}$

## Жишээ

$z_1 = -i \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ бол

- $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2) = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$$arg(z_1 \cdot z_2) \neq arg(z_1) + arg(z_2)$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \neq arg(z_1) - arg(z_2)$$

$z_1 = |z_1|(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \quad z_2 = |z_2|(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$

1. Тригонометр хэлбэртэй комплекс тооны үржих үйлдэл
   - $$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$$
2. Тригонометр хэлбэртэй комплекс тооны хуваах үйлдэл
   - $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$$

$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ тоог $n$ зэрэгт дэвшүүлье.

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$

$|z| = 1$ үед Муаврын томъёо гэнэ.

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$$

Зэрэг дэвшүүлэх үйлдлийн урвуу нь язгуур гаргах үйлдэл тул

$$\sqrt[n]{|z|(\cos\phi + i\sin\phi)} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\phi}{n} + i\sin\frac{\phi}{n})$$

$z \neq 0$ комплекс тооноос $n$ зэргийн язгуур гаргахад $n$ ялгаатай язгуур гарна.

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$\phi = arg(z) \quad k = \overline{0,(n-1)}$$

$n$ зэргийн язгуурын гол язгуур $k = 0$ үед дээрх томьёоноос гарна.

## Жишээ

$z = 16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ бол $\sqrt[4]{z}$ ол.

$\omega_0 = \sqrt[4]{16}\left(\cos \frac{120^\circ}{4} + i \sin \frac{120^\circ}{4}\right) = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i$

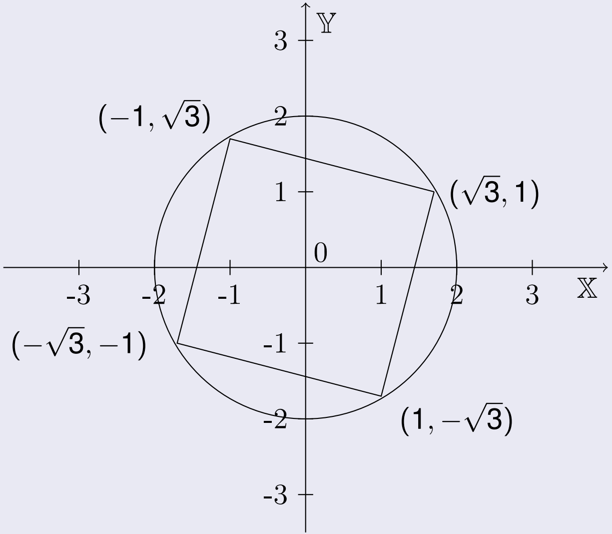
$$\omega_1 = 2(\cos(30^\circ + 90^\circ) + i \sin(30^\circ + 90^\circ)) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$\omega_2 = 2(\cos(120^\circ + 90^\circ) + i \sin(120^\circ + 90^\circ)) = -\sqrt{3} - i$$

$$\omega_3 = 2(\cos(210^\circ + 90^\circ) + i \sin(210^\circ + 90^\circ)) = 1 - \sqrt{3}i$$

$\sqrt[n]{z}$ харгалзах цэгүүд нь $\sqrt[n]{|z|}$ радиустай $(0, 0)$ төвтэй тойрогт багтсан зөв $n$ өнцөгтийн оройн цэгүүд байна

## Жишээ



$\mathbb{Y}$
$\mathbb{X}$
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3
$(-1, \sqrt{3})$
$(\sqrt{3}, 1)$
$(-\sqrt{3}, -1)$
$(1, -\sqrt{3})$