第2讲：数学基础 & 变换

中国海洋大学 周佳然

上次课程内容

- 什么是计算机图形学?
- 为什么要学习/研究计算机图形学?
- 本课程涉及哪些图形学内容?
- 实验内容和实验要求是什么?

本次课程内容

- 计算机图形学中的线性代数

➢ 为什么线性代数在计算机图形学中如此重要?

➢ 数学定义的来源是什么？它的几何含义是什么?

- 二维 & 三维变换

➢ 是什么?

➢ 为什么?

为什么线性代数在计算机图形学中如此重要？

- 线性代数是几何、物理等领域与计算之间的桥梁
- 在图形学的很多领域中，一旦你可以用线性代数来表达问题的解决方案，你基本就解决了这个问题！

  剩下的就是要求计算机求解Ax=b！
- 快速的线性代数方法使得现代图形学成为可能（包括图像处理、几何处理、基于物理的动画等等）

计算机图形学中的线性代数

- 向量（Vector）

➢ 什么是向量?

➢ 怎么去度量一个向量?

➢ 我们可以用向量做什么?

……

- 矩阵（Matrix）

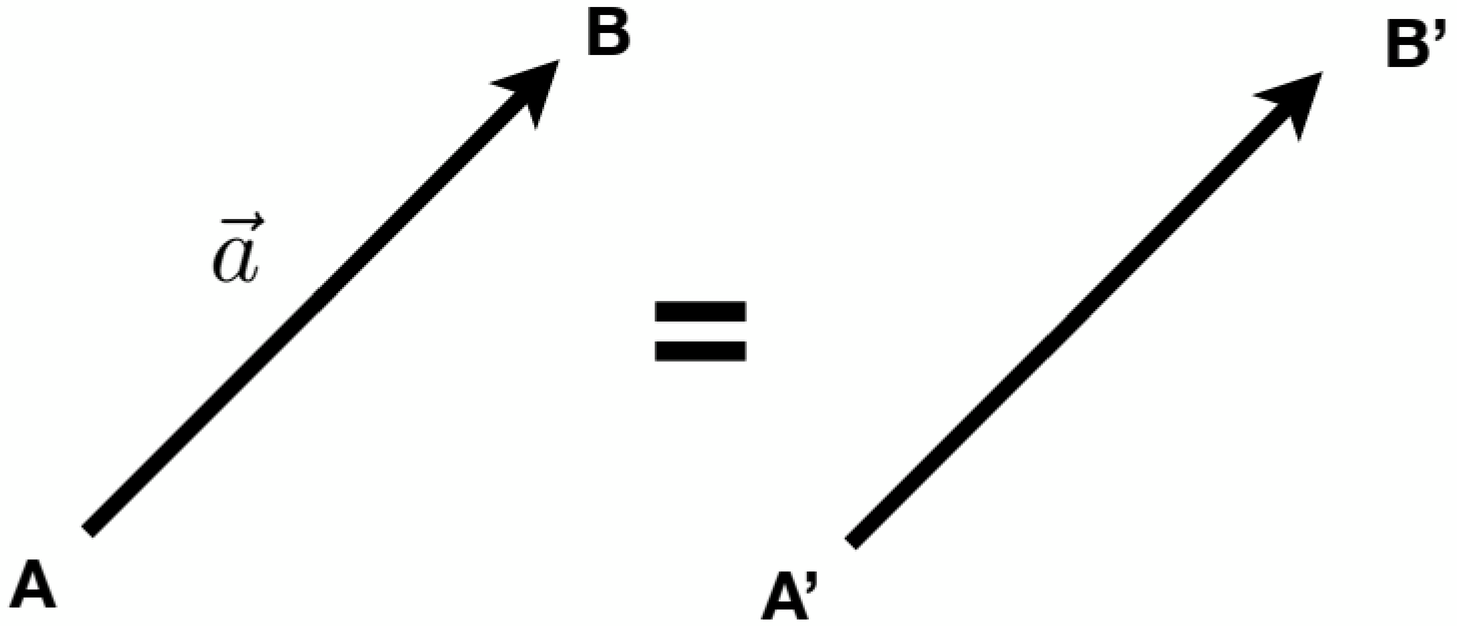
➢ 什么是矩阵?

➢ 我们可以用矩阵做什么?

……

什么是向量？

- 向量的表示
  - ➢ $\vec{a}$ 或者 $\boldsymbol{a}$
  - ➢ 利用起始点$\overrightarrow{AB} = B - A$



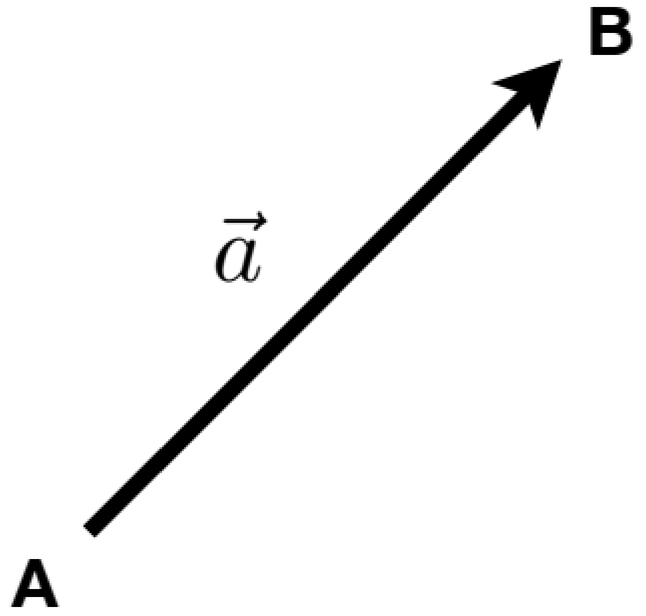
- 传统意义上的向量不包含基点（basepoint）

Q：有没有包含基点的向量呢？

怎么去度量一个向量？

- 向量携带了什么信息？
  - 方向（direction）
  - 长度/大小（length/magnitude）

- 向量的归一化（normalization）
  - 向量的长度可以写作$\|\vec{a}\|$
  - 单位向量：$\|\vec{a}\| = 1$
  - $\hat{a} = \vec{a}/\|\vec{a}\|$
  - 用来表示方向

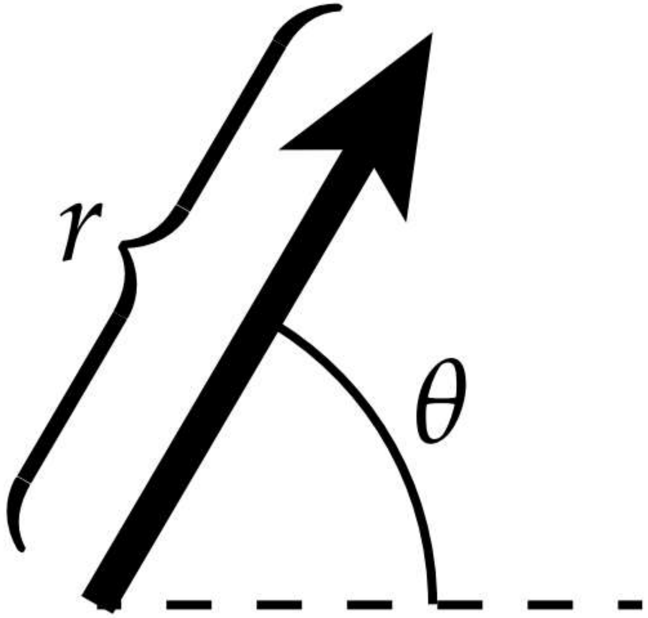


坐标系

- 例如，在二维空间中，一个向量可以通过一个长度和一个相对某固定方向的角度来编码

➢ (r, θ):极坐标（polar coordinates）

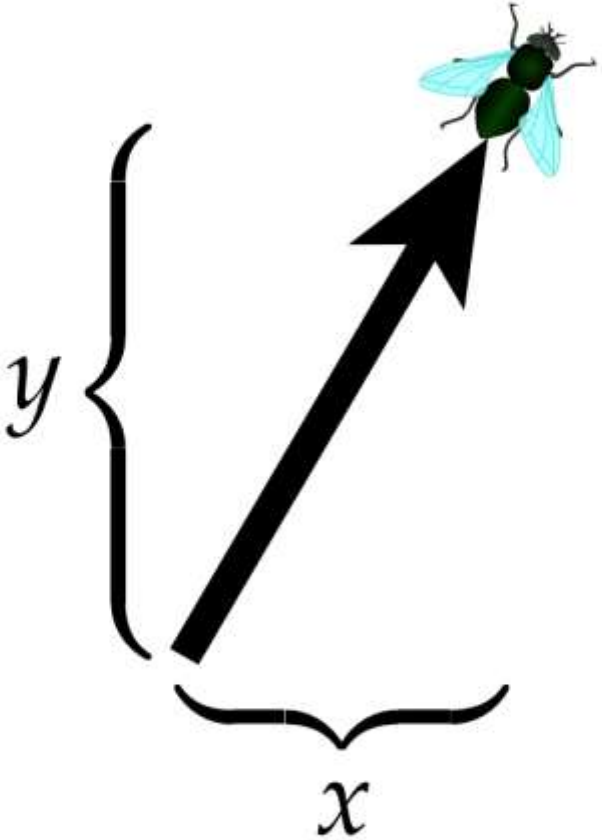
Q:除了利用极坐标系，还能怎样来编码一个向量？



OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

坐标系

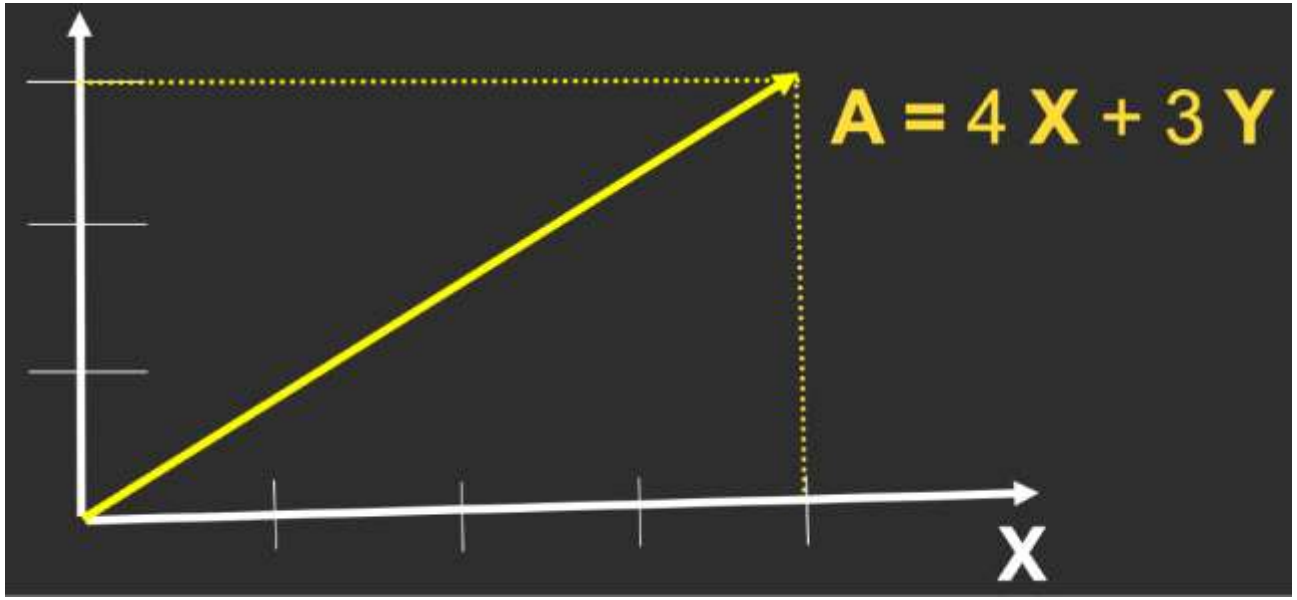
René Descartes, Est. 1596



中國海洋大學 OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

坐标系

- 笛卡尔坐标(Cartesian coordinates)，又称为直角坐标
  - $A = \binom{x}{y}$ $\quad A^T = (x \;\; y)$ $\quad \|A\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



我们可以用向量做什么？

- 向量的加法、向量的乘法

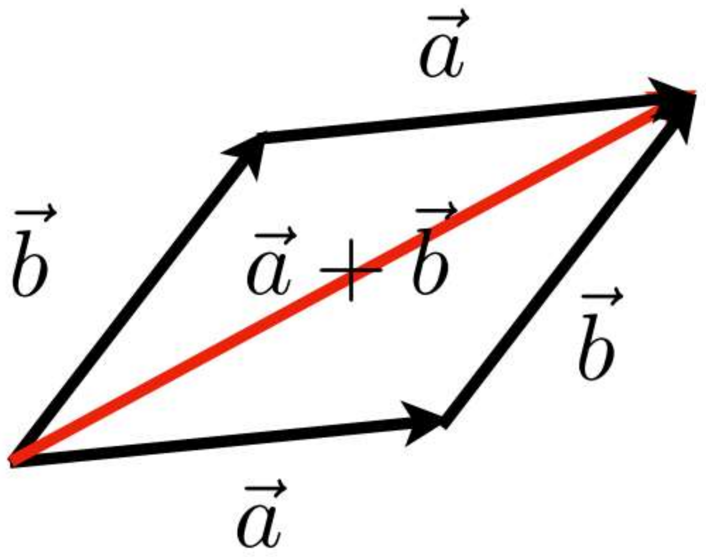
➢ 几何含义是什么？

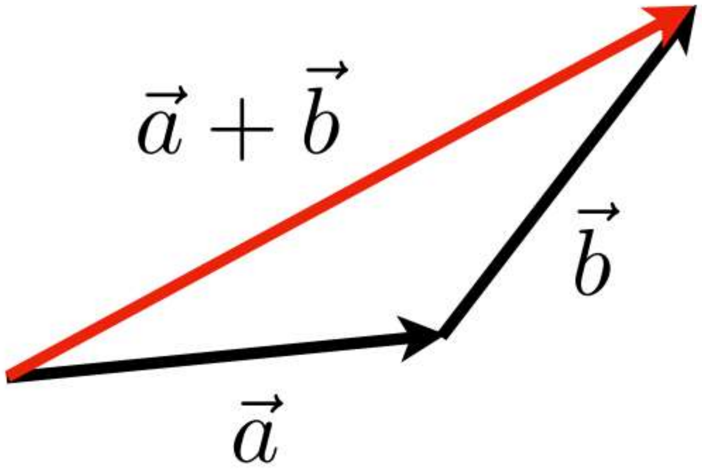
➢ 有什么性质？如何推导验证？

向量的加法

- 几何含义：平行四边形法则 & 三角形法则
- 笛卡尔坐标系下：对应坐标相加
- 满足交换律

Q:考虑多个向量相加?

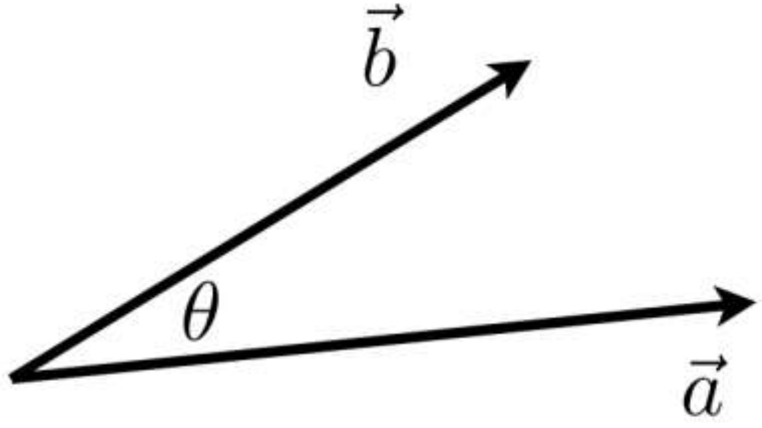




向量的乘法

- 点乘（dot product/scalar product/inner product）

Q:如果两个向量都是单位向量呢？



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$$

点乘

- 性质

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

点乘

- 在笛卡尔坐标系下的表示

In 2D

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a x_b + y_a y_b$$

In 3D

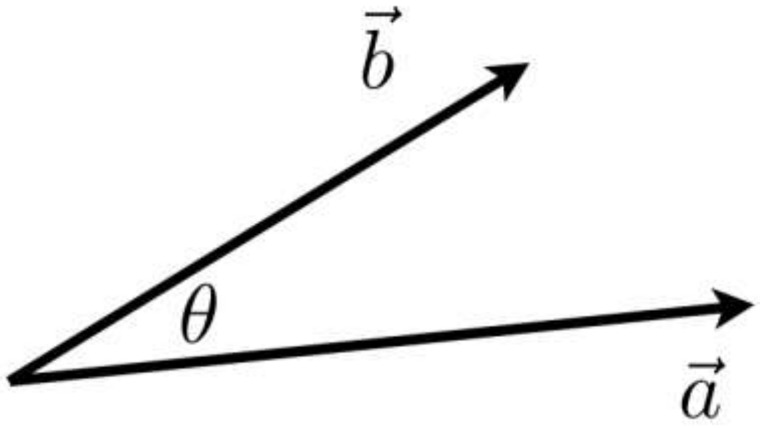
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

点乘在图形学中的应用

- 确定两向量间的夹角,判断两向量方向有“多近”

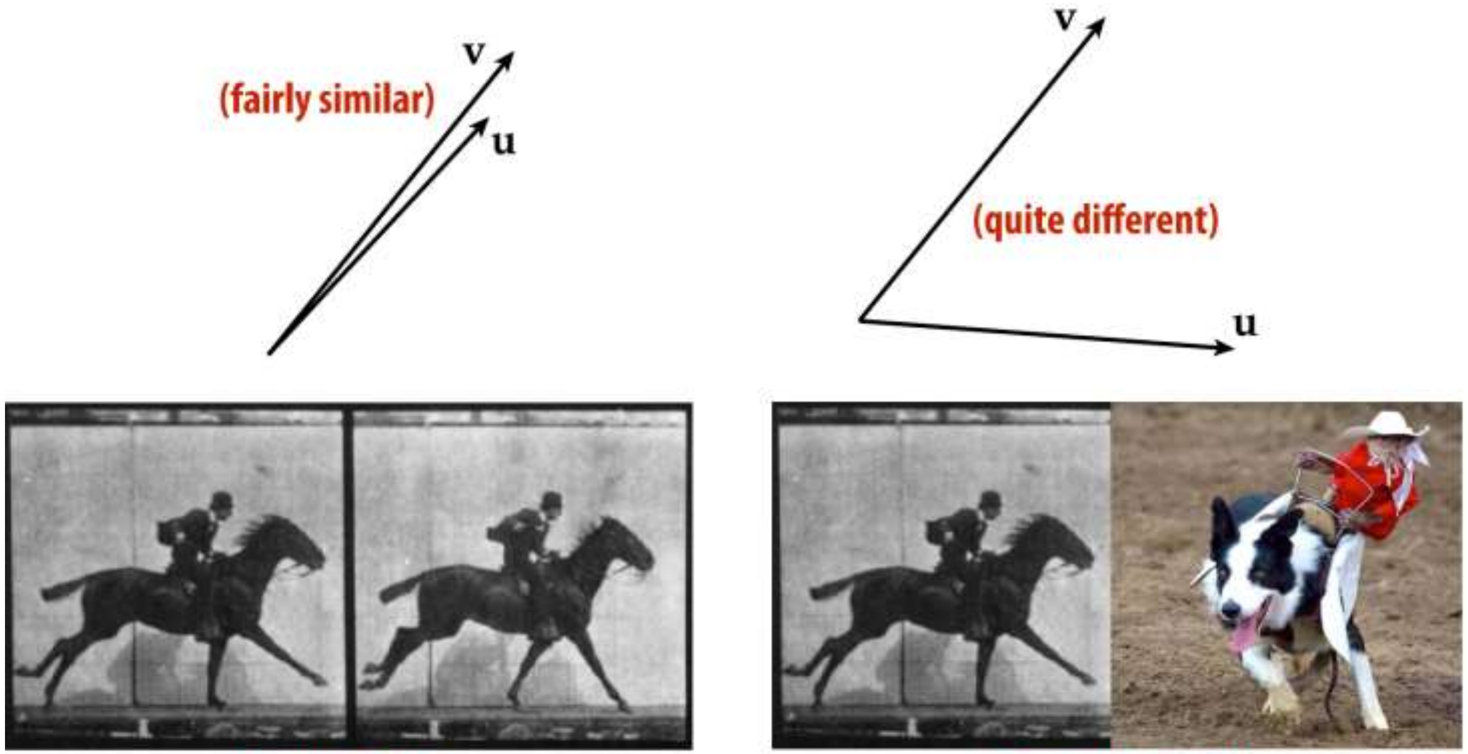
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$



点乘在图形学中的应用

- 确定两向量间的夹角，判断两向量方向有“多近”



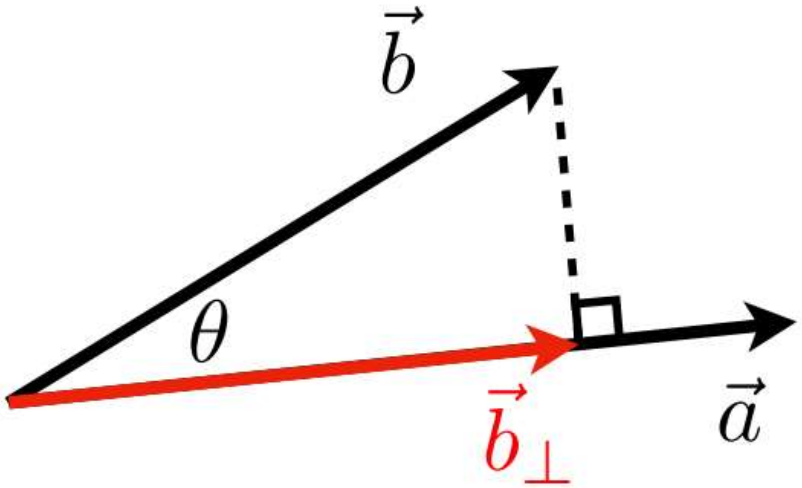
(fairly similar) (quite different!)

点乘在图形学中的应用

- 求一个向量在另一个向量上的投影

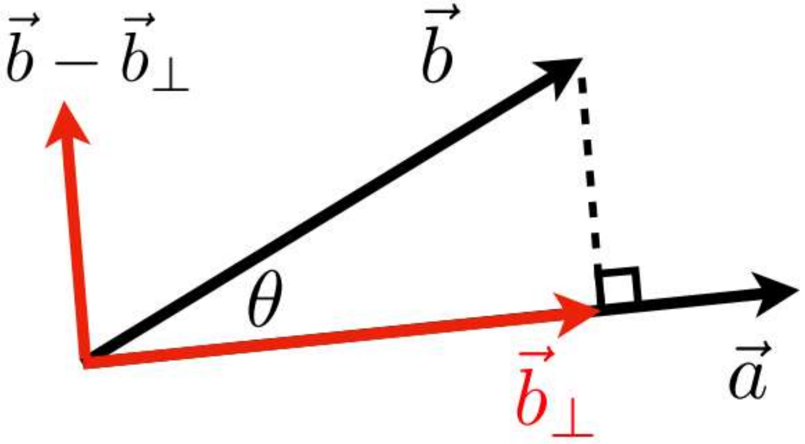
$$\vec{b}_\perp = k\hat{a}$$

$$k = \|\vec{b}_\perp\| = \|\vec{b}\| \cos\theta$$



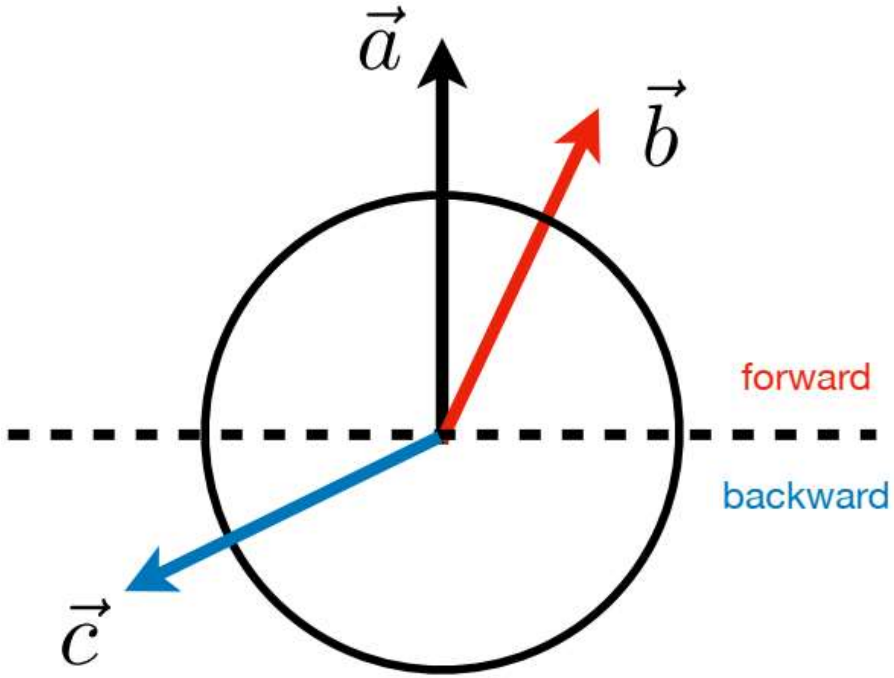
点乘在图形学中的应用

- 分解一个向量



点乘在图形学中的应用

- 通过点乘结果的正负判断两向量是“同向”还是“逆向”



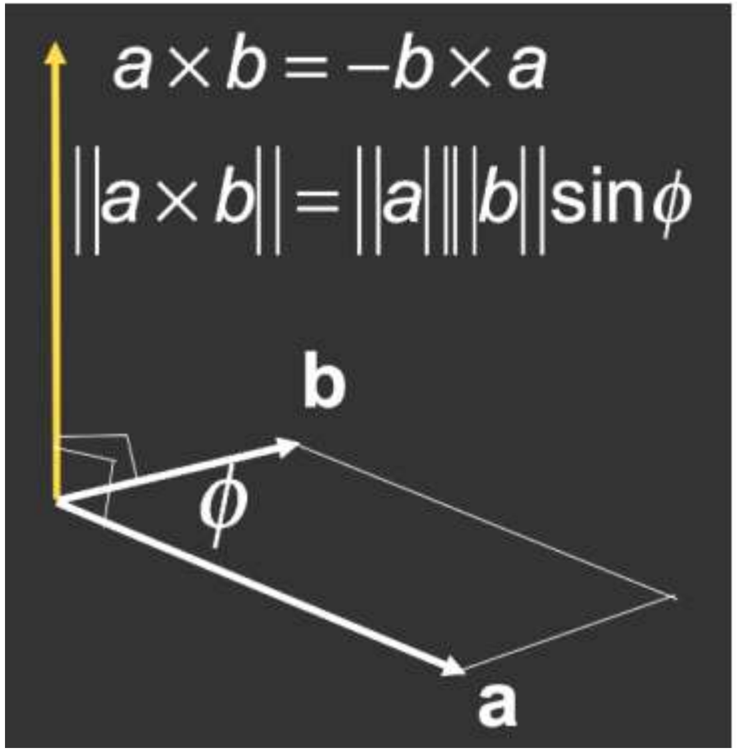
向量的乘法

- 叉乘（cross product/vector product）

➢ 叉乘结果垂直于做叉乘的两向量

➢ 叉乘结果的方向可由右手定则确定

➢ 在构建坐标系时很有用处



叉乘

- 性质

$$\vec{x} \times \vec{y} = +\vec{z}$$

$$\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{z}$$

$$\vec{y} \times \vec{z} = +\vec{x}$$

$$\vec{z} \times \vec{y} = -\vec{x}$$

$$\vec{z} \times \vec{x} = +\vec{y}$$

$$\vec{x} \times \vec{z} = -\vec{y}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

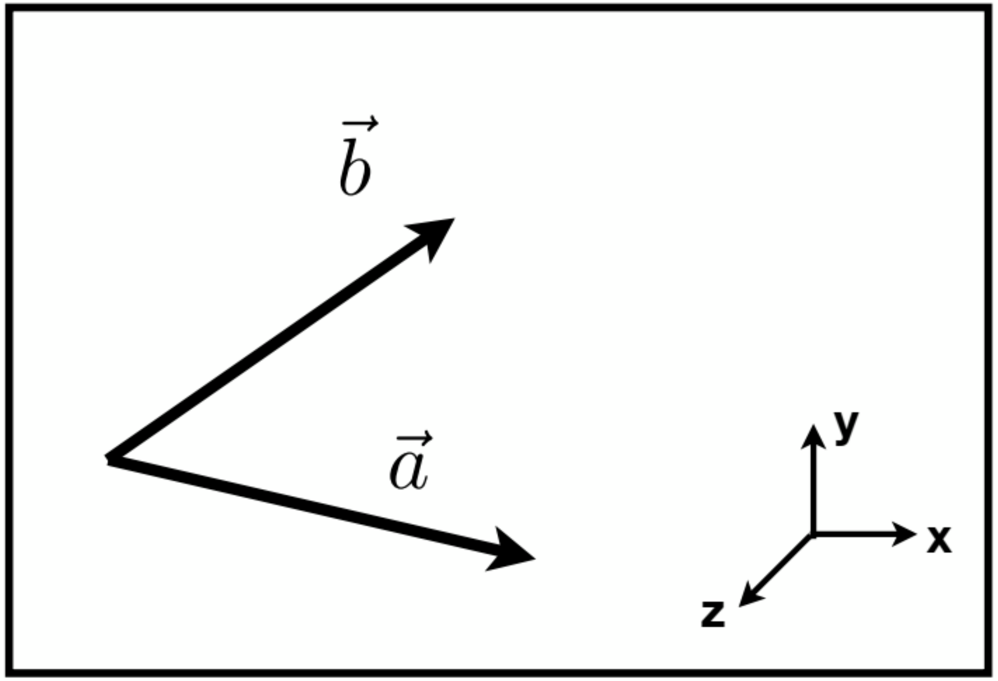
叉乘

- 在笛卡尔坐标系下的表示

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - y_b z_a \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

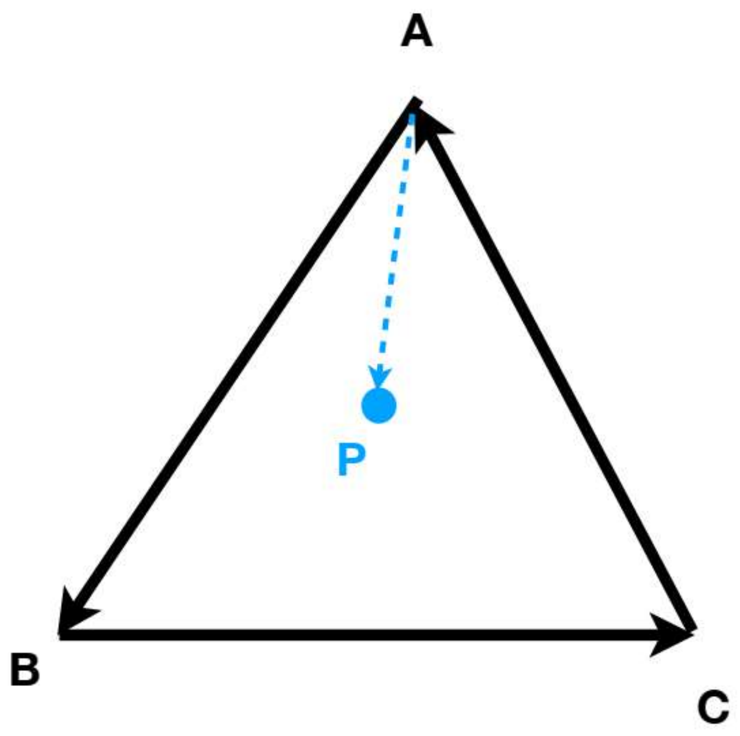
叉乘在图形学中的应用

- 判断“左右”



叉乘在图形学中的应用

- 判断“内外”



叉乘在图形学中的应用

- 构建坐标系

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$ (right-handed)

Q:怎么在这个坐标系下表示一个向量?

$$\vec{p} = (\vec{p} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{p} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{p} \cdot \vec{w})\vec{w}$$

(projection)

Q&A

中國海洋大學
OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

什么是矩阵？

- 矩阵的表示

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- $m \times n$的矩阵：m行n列的矩阵

我们可以用矩阵做什么？

- 矩阵相加、矩阵与数相乘
  - ➢ 逐元素进行
- 矩阵-矩阵相乘、矩阵-向量相乘
  - ➢ 用来做什么？
  - ➢ 有什么性质？如何推导验证？

矩阵–矩阵相乘

- 矩阵A与矩阵B相乘

➢ 矩阵A的列数=矩阵B的行数

➢ 运算结果是一个$(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$的矩阵，其中第i行第j列的元素是由A的第i行和B的第j列点乘得到的

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & ? & 33 & 13 \\ 19 & 44 & 61 & 26 \\ 8 & 28 & 32 & ? \end{pmatrix}$$

矩阵-矩阵相乘

- 性质

$$(AB)C=A(BC)$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(A+B)C = AC + BC$$

Q:是否满足交换律?

矩阵-向量相乘

- 把向量当做一个m行1列的矩阵

Q:为什么单独列出来?

矩阵的转置

- 交换矩阵的行和列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- 性质

$$(AB)^T = B^T A^T$$

单位矩阵

- 例如：

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的逆

- 利用单位矩阵来定义：

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- 性质

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

利用矩阵来表示向量相乘

- 点乘：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$$

$$= \begin{pmatrix} x_a & y_a & z_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \end{pmatrix}$$

- 叉乘：

$$\vec{a} \times \vec{b} = A^* b = \begin{pmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

dual matrix of vector a

计算机图形学中的线性代数

- 未回答的问题：

➢ 矩阵-矩阵相乘、矩阵-向量相乘用来做什么？

➢ 矩阵-向量相乘作为矩阵-矩阵相乘的特例为什么要单独列出来？

变换（Transformation）！

为什么要做变换?

- 模型变换

➢ 平移

➢ 旋转

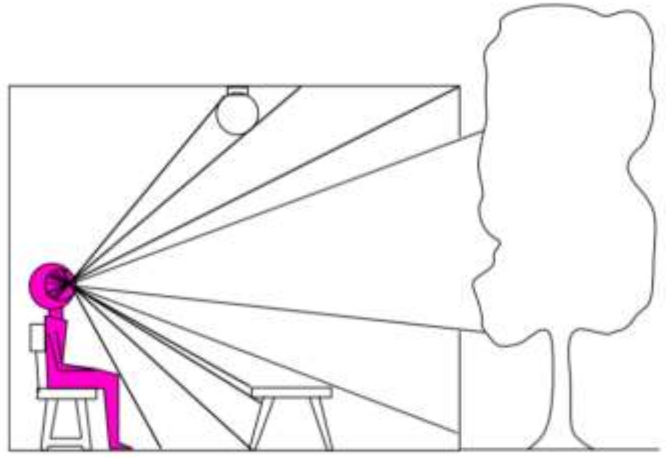
➢ 缩放

……

为什么要做变换?

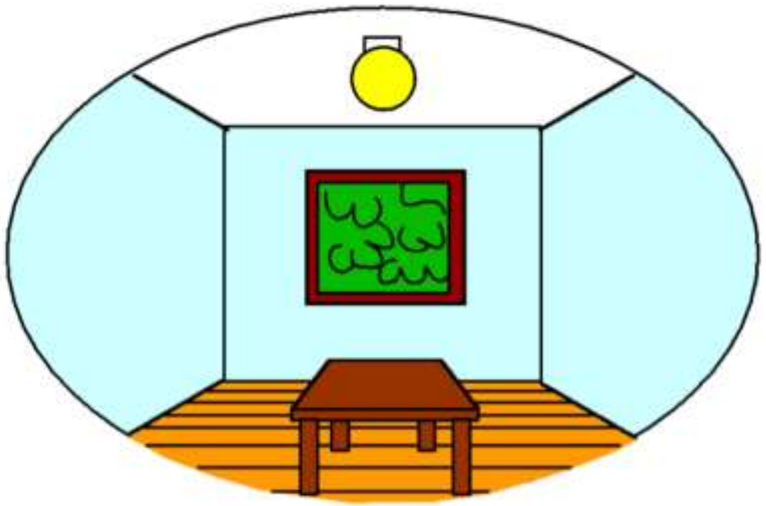
- 观测变换

3D world



Point of observation

2D image

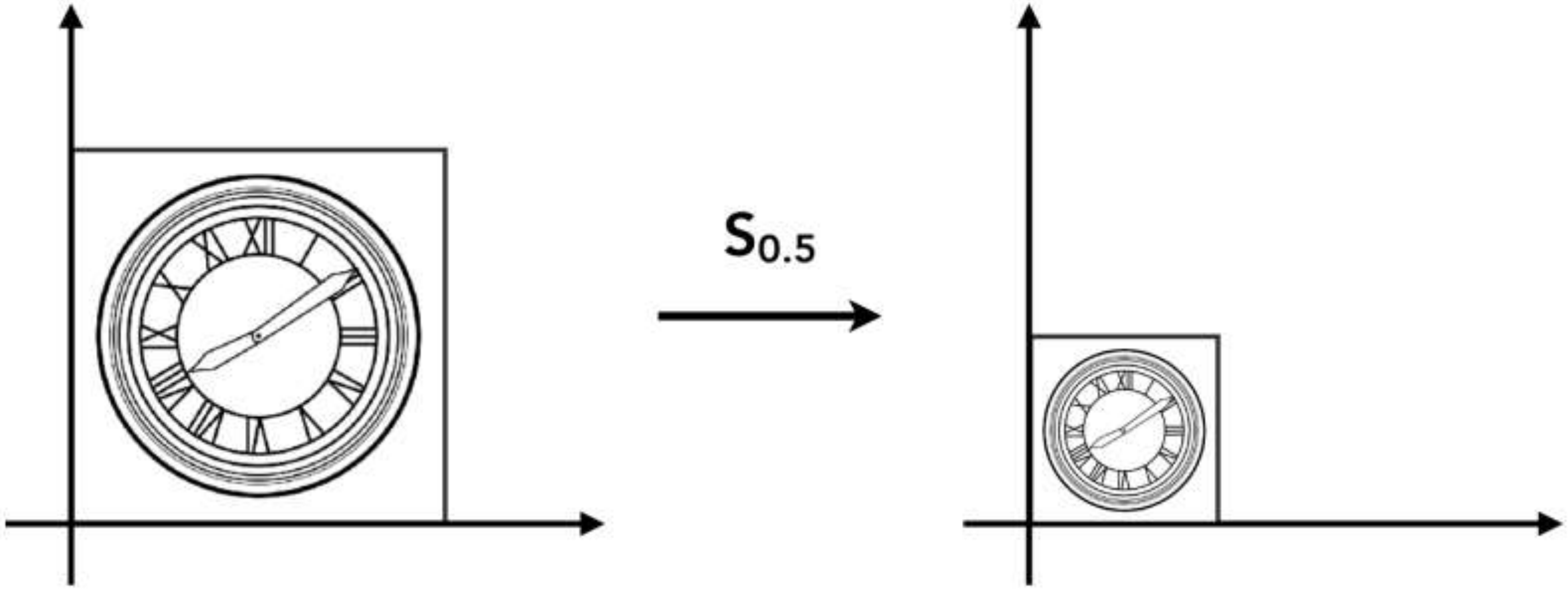


Figures © Stephen E. Palmer, 2002

Viewing: (3D to 2D) projection

二维变换

- 缩放（scale）

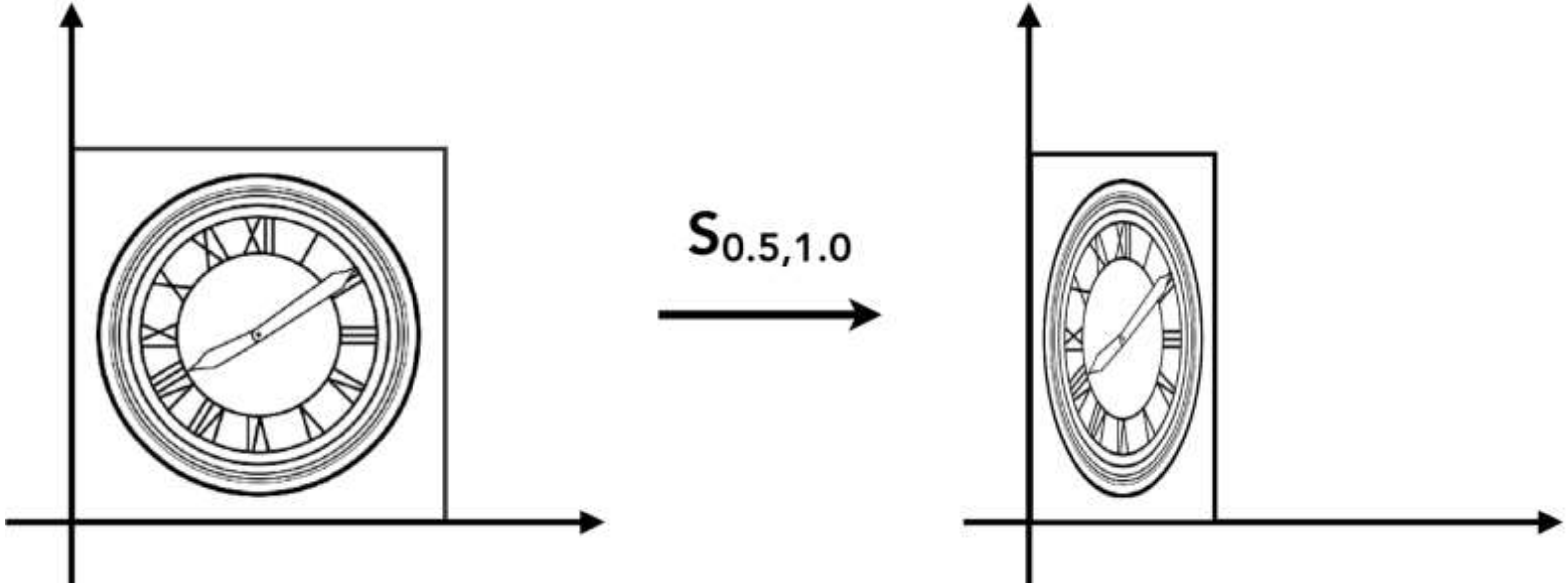


$$x' = sx$$
$$y' = sy$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

二维变换

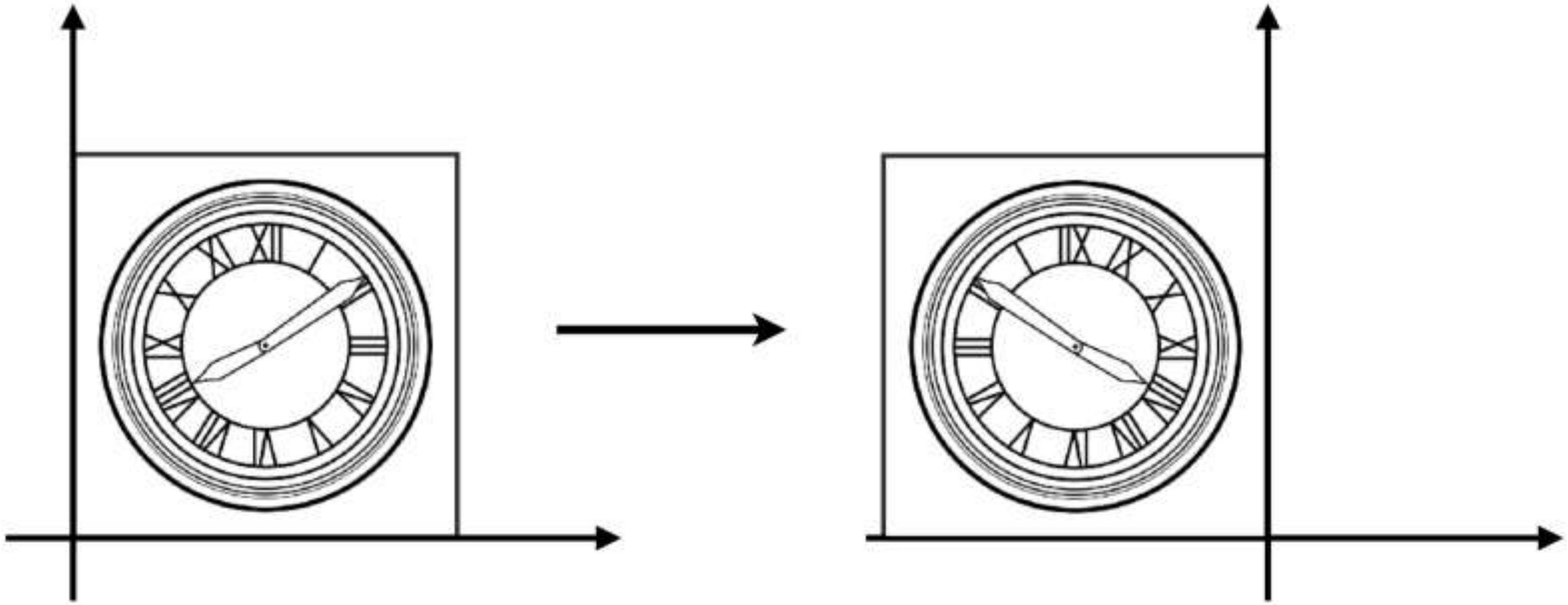
- 缩放（非均匀的）



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

二维变换

- 对称(reflection)

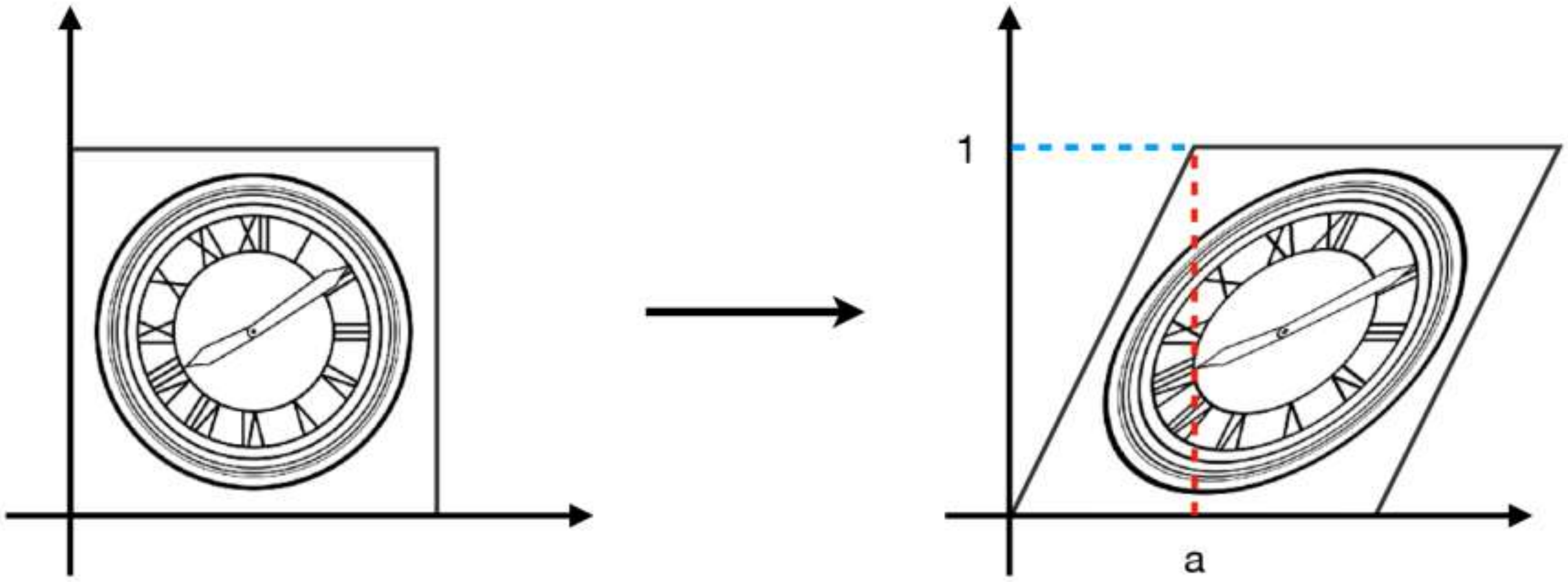


$$x' = -x$$
$$y' = y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

二维变换

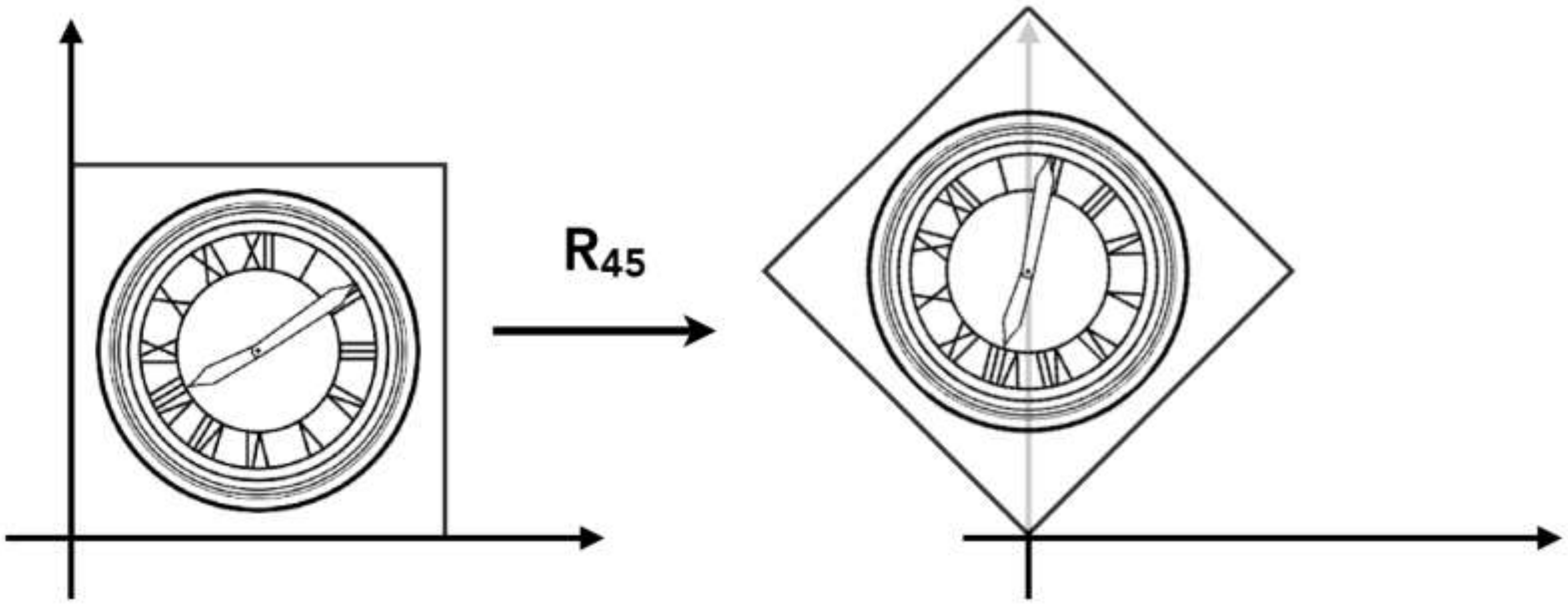
- 错切(shear)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

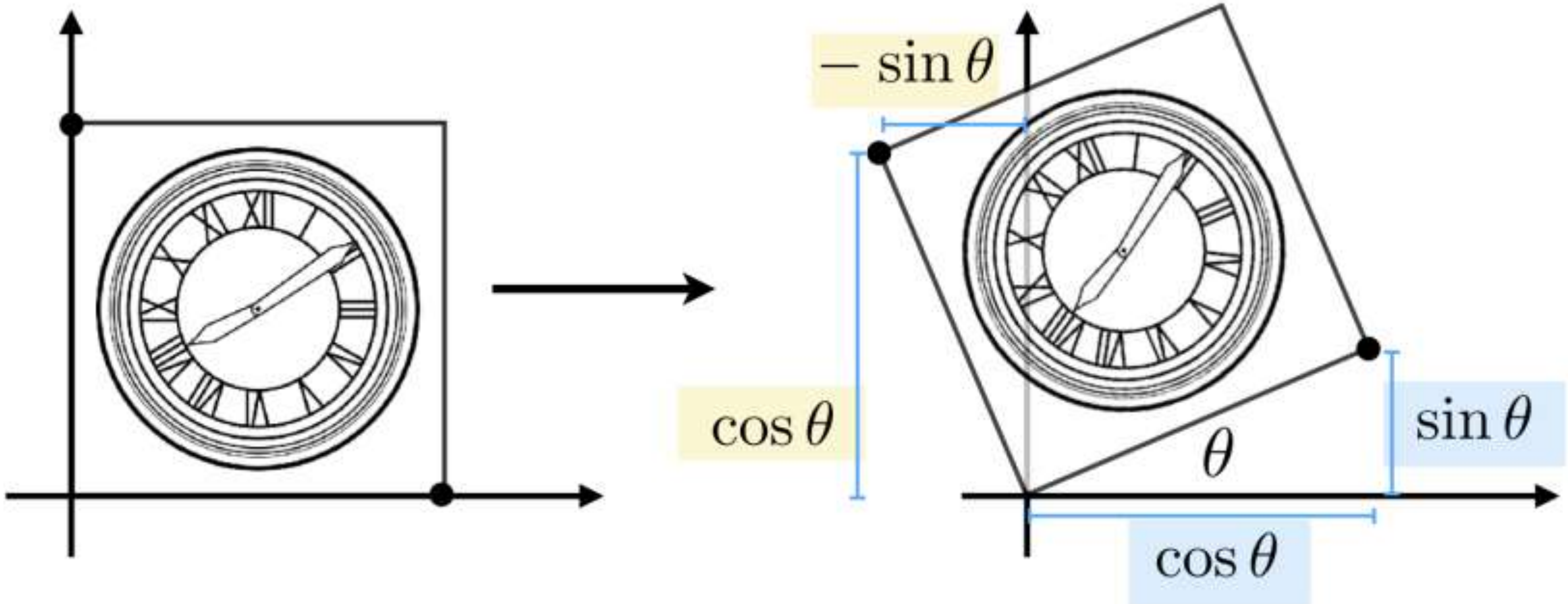
二维变换

- 旋转(rotation)：默认绕原点旋转，逆时针方向为正方向



二维变换

- 旋转(rotation)：默认绕原点旋转，逆时针方向为正方向



Q:这个旋转矩阵怎么得到的？

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

中國海洋大學 OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

有什么结论？

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{M}\,\mathbf{x}$$

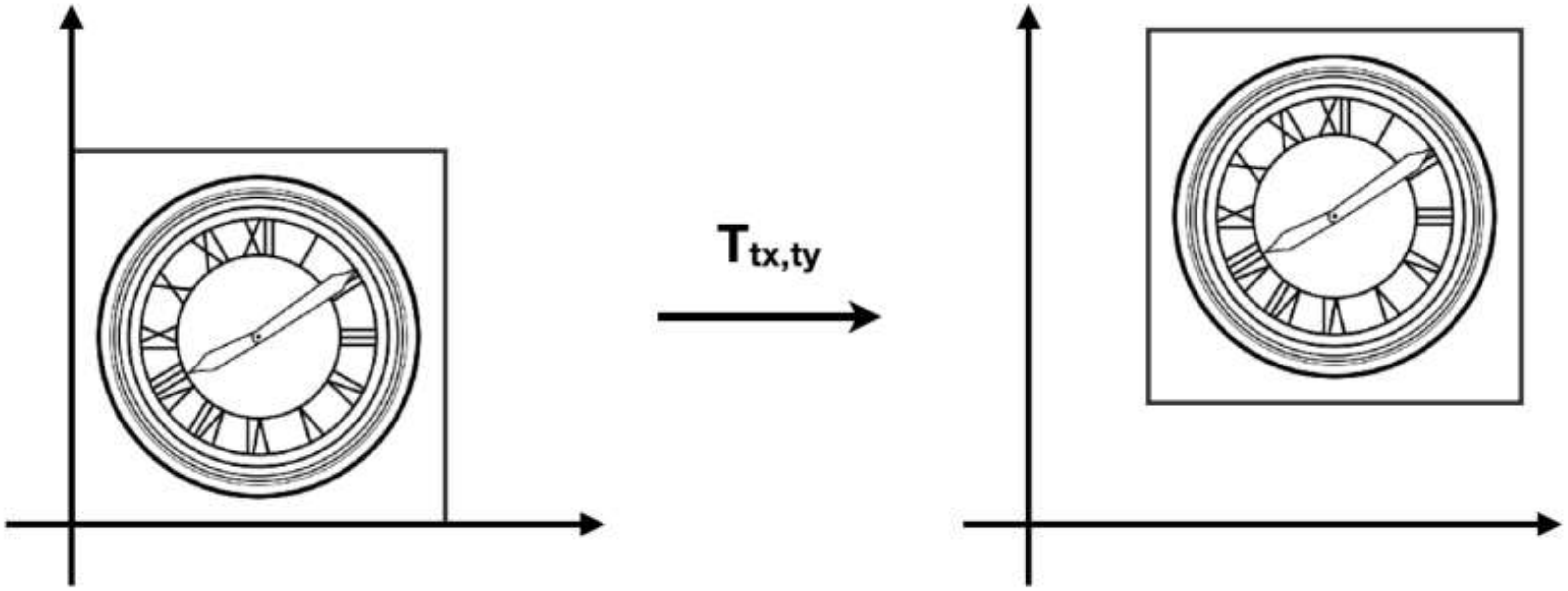
- 线性变换（linear transformation）
- 矩阵-向量相乘用来对一个点进行变换

Q&A

中國海洋大學
OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

二维变换

- 平移（translation）



Q：还是线性变换吗？

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

二维变换

- 平移（translation）

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Q:有没有一种方式可以使平移变换不再特殊？

齐次坐标（Homogeneous Coordinates）

- 加入第三维的坐标w

2D point $= (x, y, 1)^T$

2D vector $= (x, y, 0)^T$

- 再来表示平移变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q:如果平移的是一个向量呢？

齐次坐标（Homogeneous Coordinates）

- 对齐次坐标运算的结果

vector	+ vector	= vector
point	– point	= vector
point	+ vector	= point
point	+ point	= ??

- 齐次坐标表示的一个点：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \text{ is the 2D point } \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w \neq 0$$

齐次坐标

- 仿射变换（affine transformation）= 线性变换+平移

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

- 利用齐次坐标：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

齐次坐标

- 齐次坐标表示的二维变换矩阵

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆变换（Inverse Transform）