2020 秋 A

一．填空题(3×6=18 分)

1. 设3阶方阵$A=(\alpha \quad 2\gamma_1 \quad 3\gamma_2)$，$B=(\beta \quad \gamma_1 \quad \gamma_2)$，其中$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$均是3维列向量，已知$|A|=6,|B|=2,$，则$|A-B|=$ $\underline{-2}$.

解: $A-B=(\alpha-\beta,\ \gamma_1,\ 2\gamma_2)$

$|A-B|=|\alpha,\gamma_1,2\gamma_2|+(-1)\cdot|\beta,\gamma_1,2\gamma_2|$

$=2\underbrace{|\alpha,\gamma_1,\gamma_2|}_{\text{由}|A|=6,\text{知}=1}-2\underbrace{|\beta,\gamma_1,\gamma_2|}$ 由$|B|=2$,

$\therefore = 2-2\times2=-2$.

2. 设n阶方阵A满足$A^2-3A-2I=O$(其中O表示零矩阵)，则$(I-A)^{-1}=$________.

解: $A^2-3A+2I-4I=0$, $\therefore (A-I)(A-2I)=4I$

$\therefore (I-A)^{-1}=\frac{1}{4}(2I-A)$

3. 设$\alpha=(1,-2,3)^T,\beta=(-1,\frac{1}{2},0)^T,A=\alpha\beta^T$,则$A^{10}=$________.

$A^{10}=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)^9\beta^T=k^9\alpha\beta^T=(-2)^9\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\2&-1&0\\-3&\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}$

4.设A为3阶方阵，$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵，若交换A的第一行与第二行得矩阵B，则$BA^*=$______.

$B=E_{12}A$，右乘A^*，$BA^*=E_{12}\underbrace{AA^*}=|A|I$，$\therefore$ 原$=3E_{12}$

$=\begin{pmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

5. 从R^2的基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$到基$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$的过渡矩阵为________，若向量$\alpha$在基$\alpha_1,\alpha_2$下的坐标为$\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$，则$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2$下的坐标为________.

$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)A$. $\therefore \begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}A$. $\therefore A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2)\underbrace{A^{-1}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}}=$ $=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

6. 设A为n阶可逆矩阵，λ是A的一个特征值，则$(\frac{1}{3}A)^{-1}+I$必有特征值$\underline{\frac{3}{\lambda}+1}$.

$\frac{1}{3}\lambda$是$\frac{1}{3}A$的特征值. $(\frac{1}{3}\lambda)^{-1}+1$是$(\frac{1}{3}A)^{-1}+I$的.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则下列线性无关的向量组是(C).

A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3$　　B. $\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

C. $\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$　　D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 4\alpha_2$

$(\alpha_1-\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ A可逆.

∴ 线性无关.

2. 设A为4×3矩阵，$r(A)=1$，ξ_1, ξ_2, ξ_3是非齐次线性方程组$Ax=b$的三个线性无关解，下列哪个是$Ax=0$的基础解系？(A).

A. $\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2$　　B. $\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3$

C. $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$　　D. $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3$

r(A)=1，∴ AX=0 基础解系有2个LI的解. ∴ B. C (X)

D中向量 AX=b的解的和不是 AX=0的解. ∴ D (X)

A中两个均为AX=0的解. 且LI. ✓

3. 设A为$m\times n$矩阵，C是n阶可逆矩阵，矩阵A的秩为r，矩阵$B=AC$的秩为r_1，则(B).

A. $r > r_1$　　B. $r = r_1$　　C. $r < r_1$　　D. r与r_1的大小关系不确定

C可逆 ∴ AC的秩 = A的秩!

4. 齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0\end{cases}$的系数矩阵记为$A$，若存在3阶矩阵$B\neq O$使得$AB=O$(其中$O$表示零矩阵)，则(C).

A. $\lambda=-2$且$|B|=0$　　B. $\lambda=-2$且$|B|\neq 0$

C. $\lambda=1$且$|B|=0$　　D. $\lambda=1$且$|B|\neq 0$

$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{pmatrix}\neq 0$, $B\neq 0$,

∴ $|A|=0$, $|B|=0$. (A,B都不可逆. 否则可得另一矩阵为0)

解得 $\lambda=1$

5. 与矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$不相似的矩阵是(D).

A. $\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}3&7\\0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$

相似.特征值相同.秩相同. 此题不必求λ. A.B.C三阵r=2.
D中阵 r=1.

6. 设二次型$x^T Ax = x_1^2 + x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$，且$A$有特征值3，则$c$的取值为(D).

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&c\end{pmatrix}$, ∴ $|3I-A|=0$

即 $\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&3-c\end{vmatrix}=0$

∴ 解得 $c=1$.

三、计算题(共 4 题，共 28 分)

1.(6 分) 计算 n阶行列式的值：

加边

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1+a_1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2+a_2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & 1 & 2 & 3+a_3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$$

(其中，$a_i \neq 0, i=1,\cdots,n$).

$r_1\times(-1)$加至下面各行，化箭形，继续得

$$\left(1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{n}{a_n}\right)a_1\cdots a_n.$$

2. (8 分) 设向量组$\alpha_1=(2,0,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-1,2,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(-1,4,2,4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_5=(1,-1,1,2)^{\mathrm{T}}$,求此向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用其这个极大线性无关组线性表示.

$\boxed{解}$：$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

此向量组的秩：3; 一个极大线性无关组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;

$\alpha_4=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_3$

3. (8 分) 已知矩阵B满足$2BA^2=A^*BA^2+3A$，其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$A^*$为$A$的伴随矩阵，求矩阵$B$.

解：$2BA^2-A^*BA^2=3A \qquad (2I-A^*)BA^2=3A$

$|A|=2$，所以A可逆，于是$(2I-A^*)BA=3I$

$$B=3(2I-A^*)^{-1}A^{-1}=3(A(2I-A^*))^{-1}=3(2A-2I)^{-1}=\frac{3}{2}(A-I)^{-1}$$

$$A-I=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$B=\frac{3}{8}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (6 分) 已知$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -2 & -2 & 5\end{pmatrix}$是可对角化的，$\lambda=3$是$A$的二重特征值，求$x,y$.

∴ $\lambda=3$ 对应2个LI特征向量，即$(3I-A)X=\vec{0}$
基础解系含2个向量

解：因为A可对角化且$\lambda=3$是A的二重特征值，所以$r(3I-A)=1$.

∴

$$3I-A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -x & -1 & -y\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & x-1 & -x-y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ 于是，\begin{cases}x-1=0\\ -x-y=0\end{cases}$$

得：$x=1$，$y=-1$.

四、证明题(共 1 题， 8 分)

设α_1,α_2是3阶方阵A分别对应于特征值$-1,1$的特征向量，向量α_3满足$A\alpha_3=2\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

证：设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,(1)
同乘A得$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0$
由已知$A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=2\alpha_2+\alpha_3$,于是
$-k_1\alpha_1+(k_2+2k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$(2)
(1)− (2)得：$2k_1\alpha_1-2k_3\alpha_2=0$
因为α_1,α_2是A对应于不同特征值的特征向量，所以α_1,α_2线性无关。所以$k_1=0,k_3=0$.
代入(1)得：$k_2\alpha_2=0$. 因为α_2是特征向量，所以$\alpha_2\neq 0$，从而$k_2=0$.
综上可证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

五、解方程组（共 1 题，14 分）

设$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}c\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，已知方程组 $Ax=b$有无穷多解，

（1）求a,c的值；

(2) 求此方程组的一般解.

解：(1)$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}a & 1 & 1 & c\\ 0 & a-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & a & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-a^2 & c-a+1\end{array}\right)$

因为$Ax=b$有无穷多解，所以$\begin{cases}a-1\neq 0\\ 1-a^2=0\\ c-a+1=0\end{cases}$，于是$\begin{cases}a=-1\\ c=-2\end{cases}$.

(2) $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，可取自由变量$x_3$,

$x_3=0$得$\xi_0=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$，$x_3=\cancel{0}\ 1$得$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，所以此方程组一般解$\xi=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其

这是 AX=b的特解

这是导出组AX=0的基础解系，
有同学此处也求了一个AX=b的特解，
当作AX=0的基础解系了.(×)

中k为任意常数。

六、二次型（共 1 题，14 分）

已知$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^{T}(A^{T}A)x$，

(1) 求实数a的值；
(2) 用正交变换法将f化为标准型，并写出相应的正交矩阵Q；
(3) 写出规范型；
(4) 分析此二次型是否是正定二次型.

解：(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}$，因为$r(A)=2$，所以$a=-1$.

(2) $A^{T}A=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$，$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$,

所以$\lambda_1=0$(单根)，$\lambda_2=2$(单根)，$\lambda_3=6$(单根).

$\lambda_1=0$时，$\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&-2&-2\\-2&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=2$时，$\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，单位化得$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_3=6$时，$\begin{pmatrix}4&0&-2\\0&4&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以$\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

可取正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，令$x=Qy$得标准型：$2y_2^2+6y_3^2$.

(3)规范型为：$z_1^2+z_2^2$；这里有同学写 $z_2^2+z_3^2$. X

(4)因为特征值不是全都大于 0，所以此二次型不是正定二次型。