线代 2022 春 A 卷参考答案

一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1、-6；　2、1；　3、8；4、$(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(1,1,5,4)^{\mathrm{T}}$，$k$ 任意.（答案不唯一）；　5、$\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$；　6、$-1$.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1-6、 DBCDDA

三、计算题(共 4 题，共 28 分)

1. (6 分)

解：$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_i-r_1}(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1);$$

所以，$|A^{-1}|=|A|^{-1}=\dfrac{1}{(-1)^{n-1}(n-1)}=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n-1}$.

2. (8 分)

解：$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-2&-1&1&-1\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&-5\\0&1&0&-3&-3\\0&0&1&5&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

①秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=3$；

②$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

③$\alpha_4=-4\alpha_1-3\alpha_2+5\alpha_3$，

$\alpha_5=-5\alpha_1-3\alpha_2+7\alpha_3$.

3. （8 分）解：$A^*B=A^{-1}+B\Longrightarrow(A^*-I)B=A^{-1}\Longrightarrow B=(|A|I-A)^{-1}$

又 $|A|=\begin{vmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{vmatrix}=8$，则 $|A|I-A=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=6C$；　于是$B=\frac{1}{6}C^{-1}$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xRightarrow{\mathrm{r}_2+\mathrm{r}_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}, \text{ 于是} B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

4. (6 分) 解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\-3&\lambda-1&-1\\-4&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-6)=0$

所以$\lambda_1=1$(二重根)，$\lambda_2=6$(单根)

$$I-A=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-3&0&-1\\-4&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，$\mathrm{r}(I-A)=2$，$3-\mathrm{r}(I-A)=1<2$. 于是A不可对角化.

四、证明题(共 1 题， 8 分)

证：设 $k\alpha_0+k_1\alpha_1+\cdots+k_p\alpha_p=0$ (∗) $\Longrightarrow kA\alpha_0+k_1A\alpha_1+\cdots+k_pA\alpha_p=0$;
已知 $A\alpha_0=b$，$A\alpha_i=0$，$i=1,\cdots,p$.
于是有 $kb=0$，而 $b\neq 0$，所以 $k=0$;
代入(∗)，得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_p\alpha_p=0$，
而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 是基础解系，故线性无关，则 $k_1=\cdots=k_p=0$，
于是，向量组 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性无关.

五、解方程组（共 1 题，14 分）

解：将解向量 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 代入方程组，得 $a=b$;

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&a&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+a&4+a&4&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&a&1&0\\0&1-2a&1-2a&0&0\\0&2-2a&4-2a&1&1\end{array}\right)$$

(1)若 $a=\frac{1}{2}$， $\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

取 x_3，x_4 为自由未知量，则方程组的一般解 $\xi=\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$

$=(-\dfrac{1}{2},1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-\dfrac{1}{2},-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$ 任意.

(2)若 $a\neq\frac{1}{2}$， $\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&a&1&0\\0&1&1&0&0\\0&2-2a&4-2a&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$

取 x_4 为自由未知量，则原方程组的一般解$\eta=\eta_0+k\eta_1=(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}+$

$k\left(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$，$k$ 任意.

六、二次型（共 1 题，14 分）

解：二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & b \end{pmatrix}$，

(1) 由已知得 $A\alpha=\lambda\alpha$，

即 $\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ \lambda=6 \end{cases}$；则 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) 显然，$\mathrm{r}(A)=1$，则$|A|=0\Longrightarrow 0$ 是 A 的特征值，

因为 $0+\lambda_2+6=1+1+4$，得 $\lambda_2=0$；所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=6$.

①对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由 $(\lambda_1 I-A)x=0\Leftrightarrow Ax=0$

即 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，得一个基础解系 $\begin{cases} \xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}} \\ \xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}} \end{cases}$

1) 正交化：取 $\beta_1=\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$；

令 $\beta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

2)单位化：令 $\eta_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)^{\mathrm{T}}$；

$\eta_2=\dfrac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$；

②对 $\lambda_3=6$，解得 $\xi_3=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\eta_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$；

记矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，则 Q 为正交矩阵，且 $Q^{\mathrm{T}}AQ=$

$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$；

做正交变换 $x=Qy$，得标准形$y^{\mathrm{T}}\left(Q^{\mathrm{T}}AQ\right)y=6y_3^2$.

(3) 因为A 的特征值不是全都大于0, 所以此二次型不是正定的.