座号：________ 考场教室号：________ 授课教师：________ 专业年级：________ 姓名：________ 学号：________

装 订 线

中国海洋大学全日制本科课程期末考试试卷

2021 年 秋 季学期 考试科目： 线性代数 学院： 数学科学学院

试卷类型： A 卷 命题人： 线性代数教研组 审核人：________

考试说明：本课程为闭卷考试，共 3 页，只可携带考场规定的必需用品。

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设3阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 2a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 2a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 2a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$________.

2.设3阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 $A^*=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$，则 $a=$________.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{11} =$________.

4.设 A,B 均为 3 阶方阵，O为3 阶零矩阵，且$|A|=\frac{1}{2}$，$|B|=2$，则

$\begin{vmatrix} O & (2A)^{\mathrm{T}} \\ B^* & O \end{vmatrix} =$________.

5.设A为5×4矩阵，且$\mathrm{r}(A)=3$，$(1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$(2,1,1,3)^{\mathrm{T}}$是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个不同的解，则对应齐次线性方程组$Ax=0$的一般解是________.

6.已知三阶方阵A与B相似，且方阵A的特征值为$1,2,3$，则$|2B-I|=$________.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1.设A,B均为n阶可逆方阵，A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵，则下列结论不正确的是(　　).

A. $|AB|=|BA|$　　B. $|A+B|=|A|+|B|$

C. $(AB)^*=B^*A^*$　　D. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

2.设n阶方阵A满足$A^2+A=5I$，则$(A-I)^{-1}=$(　　).

A. $\frac{1}{3}(A+2I)$　　B. $-\frac{1}{3}(A+2I)$　　C. $\frac{1}{3}(A+2I)^{-1}$　　D. $-\frac{1}{3}(A+2I)^{-1}$

3.设n维行向量$\alpha=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$,$I$为$n$阶单位矩阵，$O$为$n$阶零矩阵，$A=I-\alpha^{\mathrm{T}}\alpha,B=I+2\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$，则$AB=$(   ).

A. O　　B. $-I$　　C. I　　D. $I+\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$

4. 若向量组$\alpha_1=(1,t,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(0,0,6)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3$能由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，则$t=$(   ).

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. -2

5. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$A$与$B$一定满足(   ).

A. 不相似也不合同　　B. 合同但不相似

C. 相似但不合同　　D. 相似且合同

6. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)={x_1}^2+5{x_2}^2+4{x_3}^2+4x_1x_2-2tx_2x_3$是正定的，则$t$满足(   ).

A. $-2<t<2$　　B. $-3<t<3$　　C. $t>-2$　　D. $t<2$

三、计算题(共 4 题，共 28 分)

1.(6 分) 计算 n阶行列式的值：$\begin{vmatrix}-1&-1&\cdots&-1&n\\-1&-1&\cdots&n&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-1&n&\cdots&-1&-1\\n&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}$.

2. (8 分) 设向量组$\alpha_1=(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_3=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_4=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_5=(2,1,5,6)^{\mathrm{T}}$，求此向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

3. (8 分)设$\alpha_1=(2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(5,3)^{\mathrm{T}}$；$\beta_1=(1,-1)^{\mathrm{T}},\beta_2=(1,0)^{\mathrm{T}}$是$\mathrm{R}^2$中的两组基,

(1)求从基α_1,α_2到基β_1,β_2的过渡矩阵;

(2)若向量α在基α_1,α_2下的坐标为$(-1,1)^{\mathrm{T}}$，求α在基β_1,β_2下的坐标.

4. (6 分) 已知$\alpha=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$对应于特征值$\lambda$的一个特征向量，求$a,b,\lambda$的值.

四、证明题(共 1 题， 8 分)

已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 设$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=3\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+4\alpha_3$, 证明：向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

学号:________ 姓名:________ 专业年级:________ 授课教师:________ 考场教室号:________ 座号:________

装 订 线

五、解方程组（共 1 题，14 分）

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+4x_3-x_4=-1 \\ x_1+x_2-4x_3+x_4=6 \\ 2x_1+x_2+(a-1)x_3+(b-3)x_4=b+6 \\ -2x_1-x_2+(b-2)x_4=b-2 \end{cases}$$

试就a,b讨论方程组解的情况；当有无穷多解时，求出其一般解.

六、二次型（共 1 题，14 分）

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$，已知此二次型在正交变换$x=Qy$下的标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2(\lambda_1>\lambda_2)$,

(1)求a的值；

(2)求相应的正交矩阵Q；

(3)写出规范形.