

第13讲：光线追踪

上次课程内容

- 辐射度量学 (Radiometry)
- 光线传播理论
 - 反射方程
 - 渲染方程
- 全局光照
- 概率知识



本次课程内容

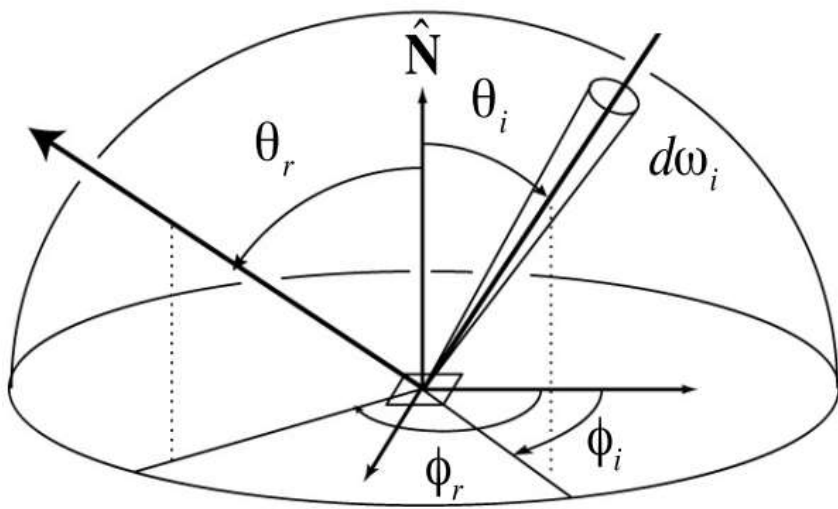
- 蒙特卡洛积分 (Monte Carlo Integration)
- 路径追踪 (Path Tracing)
- 实验7发布
- 实验5/6/7提交截止 (12.28/1.4/1.11)
- 实验5-7报告提交截止 (1.11)
- 期末考试时间 (1.21)



回顾

- 渲染方程：描述光的传输

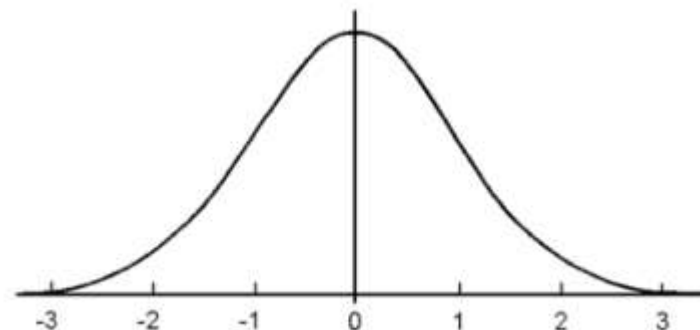
$$L_o(p, \omega_o) = L_e(p, \omega_o) + \int_{\Omega^+} L_i(p, \omega_i) f_r(p, \omega_i, \omega_o) (n \cdot \omega_i) d\omega_i$$



回顾

- 连续型随机变量的概率密度函数PDF

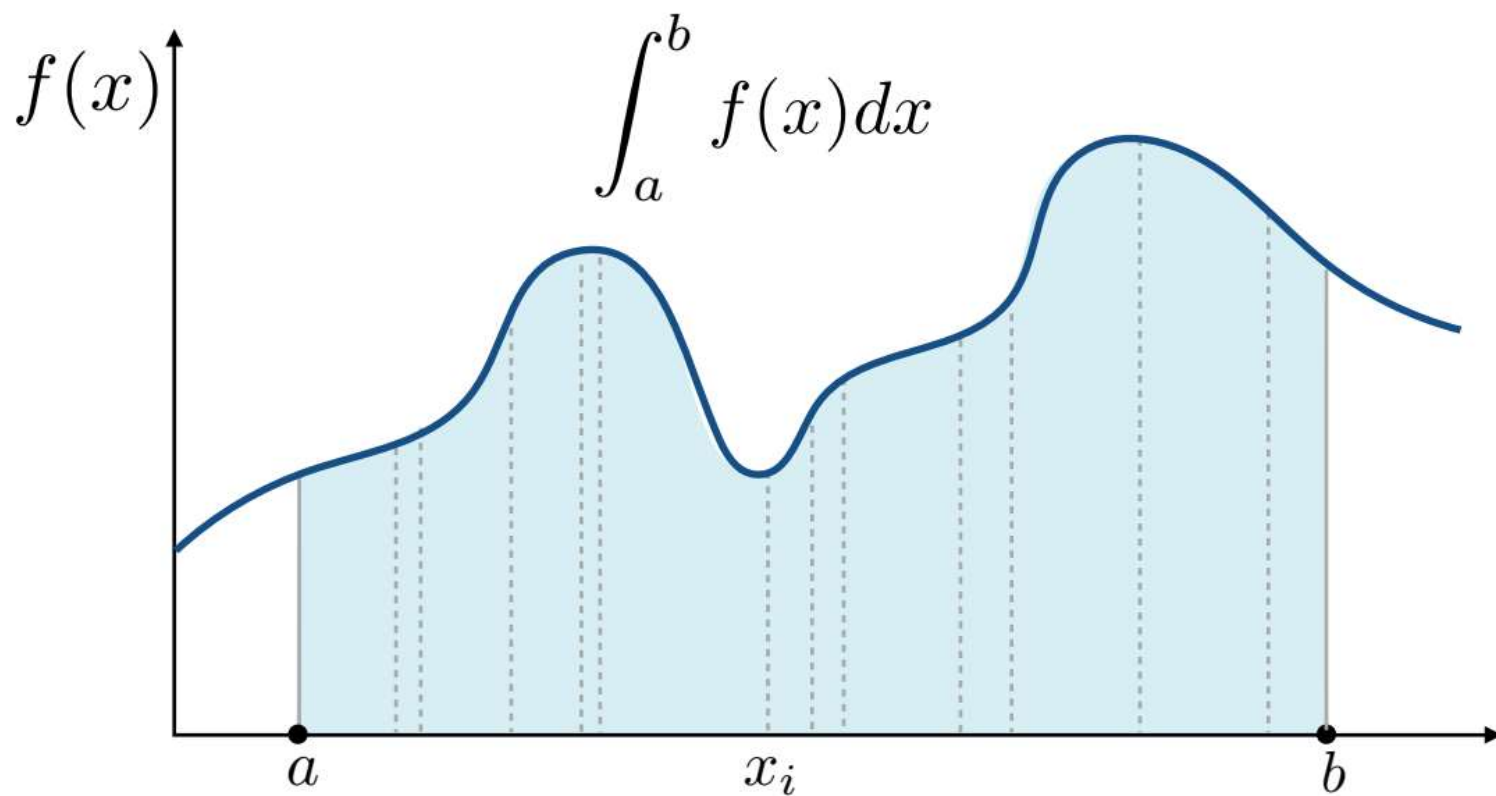
$$X \sim p(x)$$



- 满足 $p(x) \geq 0$ and $\int p(x) dx = 1$
- 期望 $E[X] = \int x p(x) dx$

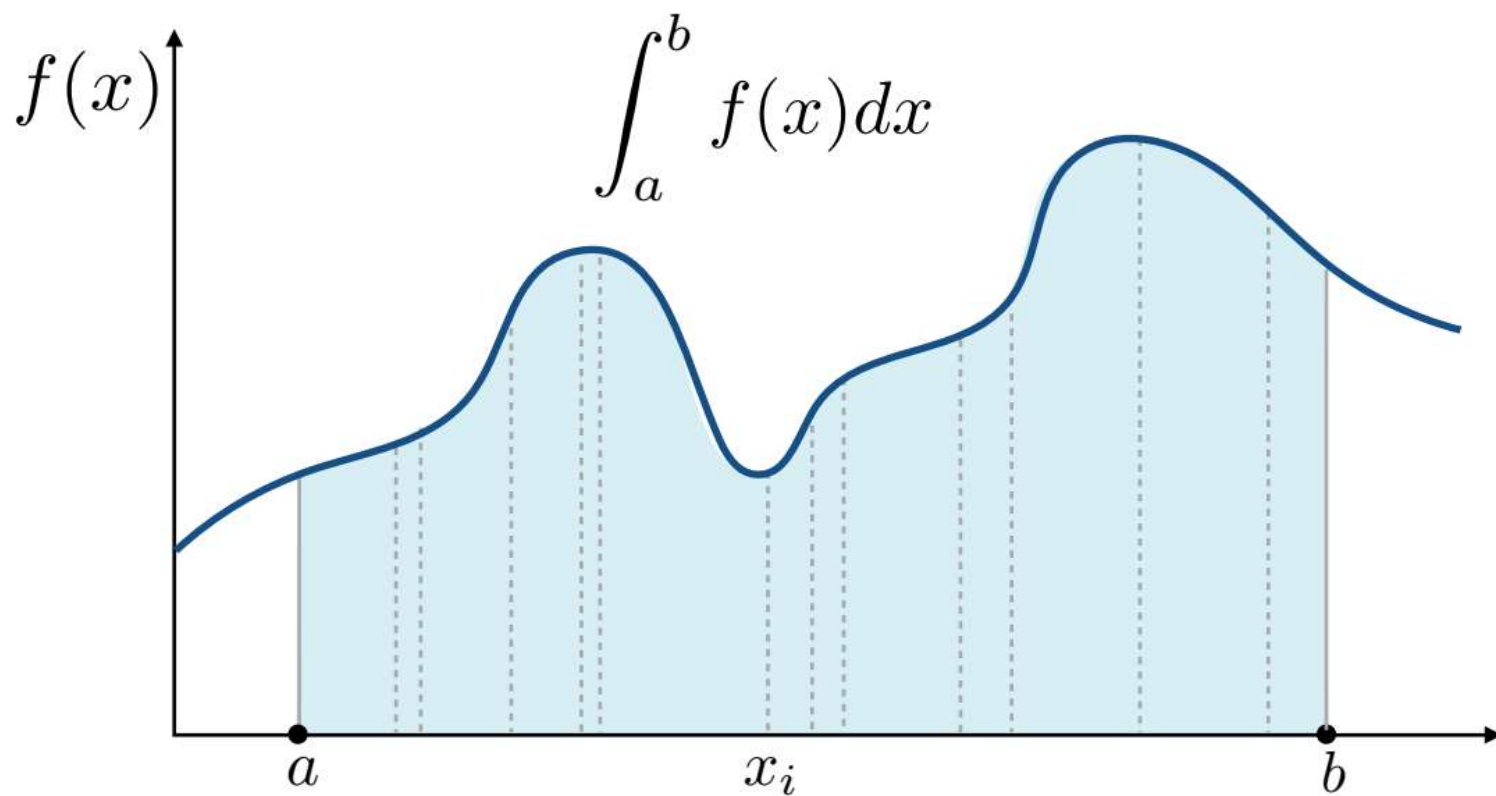
蒙特卡洛积分

Q: 如何求解定积分?



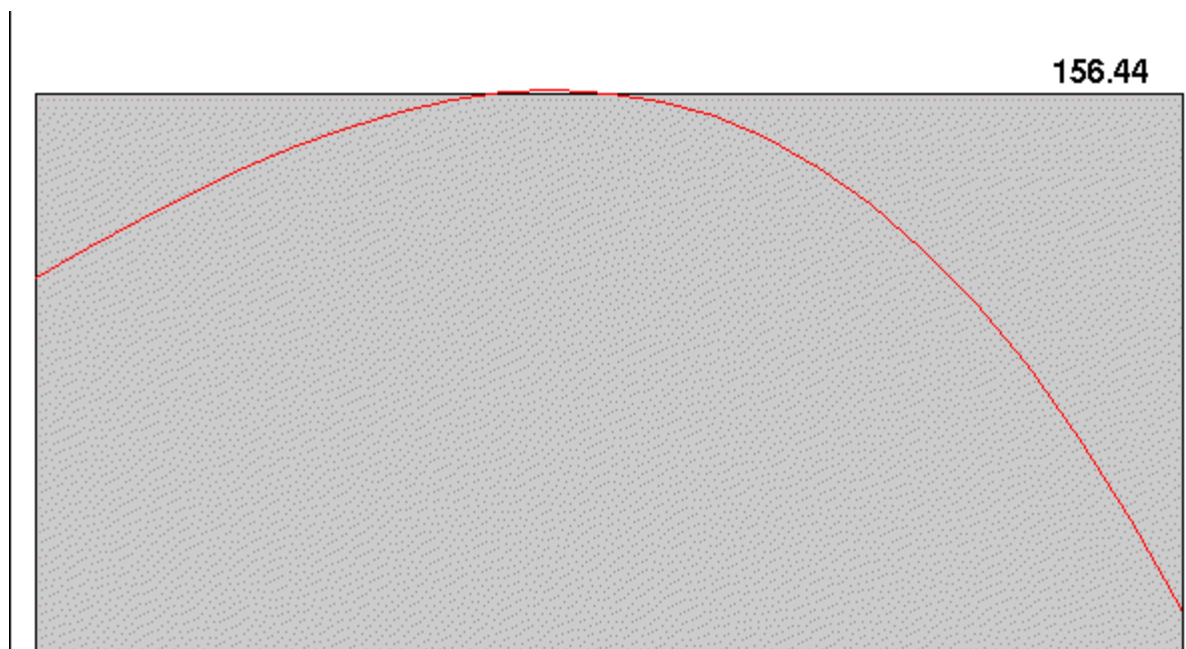
蒙特卡洛积分

Q: 想要求解定积分，但解析求解很困难，怎么办？



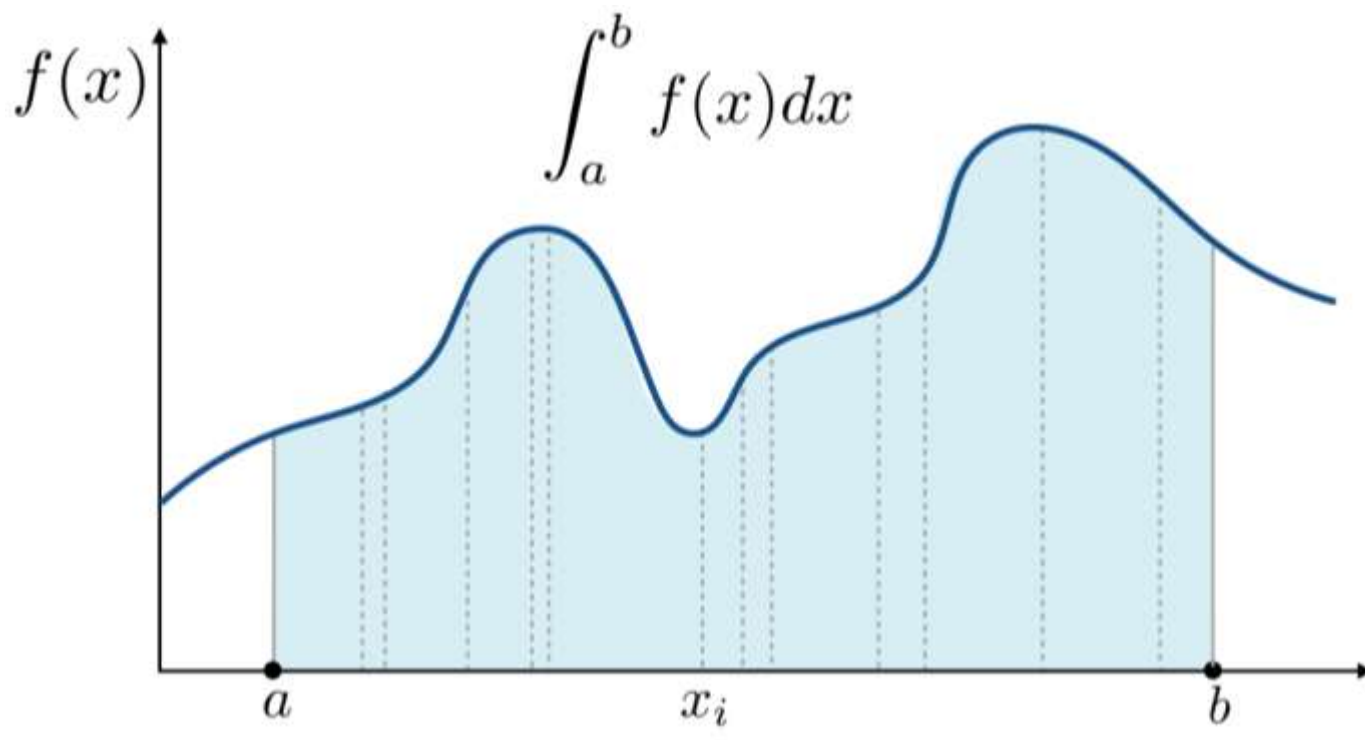
蒙特卡洛积分

- 黎曼积分



蒙特卡洛积分

- 蒙特卡洛积分是一种使用概率理论（通过大量随机数采样）进行数值计算以求取积分的方法。通过对函数值的随机样本进行平均来估计函数的积分。



蒙特卡洛积分

- 对于给定函数 $f(x)$ 求解定积分 $\int_a^b f(x)dx$
- 定义随机变量、概率密度函数 $X_i \sim p(x)$
- 蒙特卡洛积分

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)}$$

蒙特卡洛积分

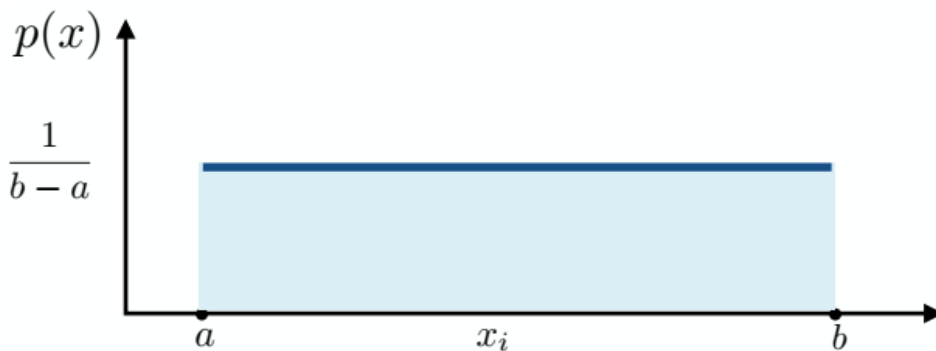
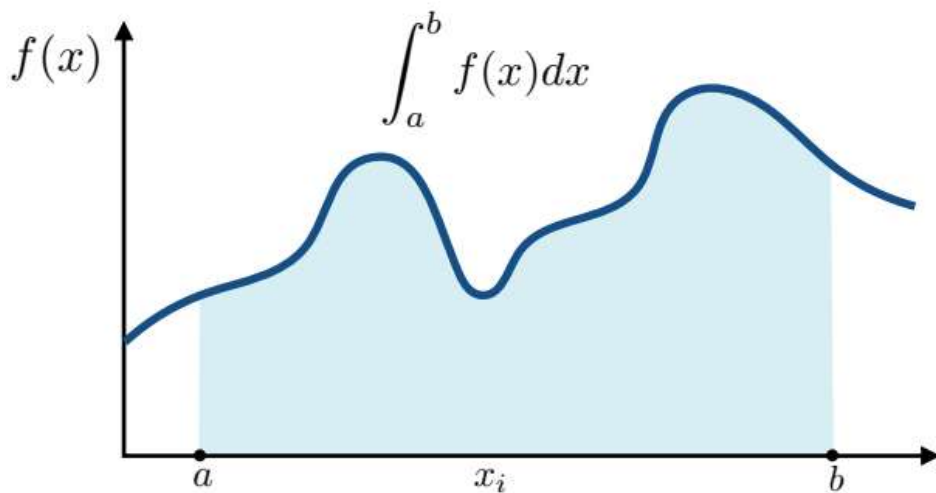
- 例子：均匀随机变量

$$X_i \sim p(x) = C$$

$$\int_a^b p(x) dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_a^b C dx = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{b-a}$$



蒙特卡洛积分

- 对于给定函数 $f(x)$ 求解定积分 $\int_a^b f(x)dx$

- 定义均匀的随机变量、概率密度函数 $X_i \sim p(x) = \frac{1}{b-a}$

- 蒙特卡洛积分

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)} \quad \Rightarrow \quad F_N = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i)$$

蒙特卡洛积分

$$\int f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)} \quad X_i \sim p(x)$$

- 采样 (N) 越多, 方差越小
- 在x上采样, 就在x上积分

Q&A



路径追踪

Q: 为什么要研究路径追踪算法?

- Whitted-Style光线追踪算法
 - 总是做镜面反射、折射
 - 在漫反射表面停止弹射

Q: 这样的简化是否合理?

Whitted-Style光线追踪算法存在的问题

Q: 在Utah teapot的例子中，对于Glossy材质光线应该如何反射？



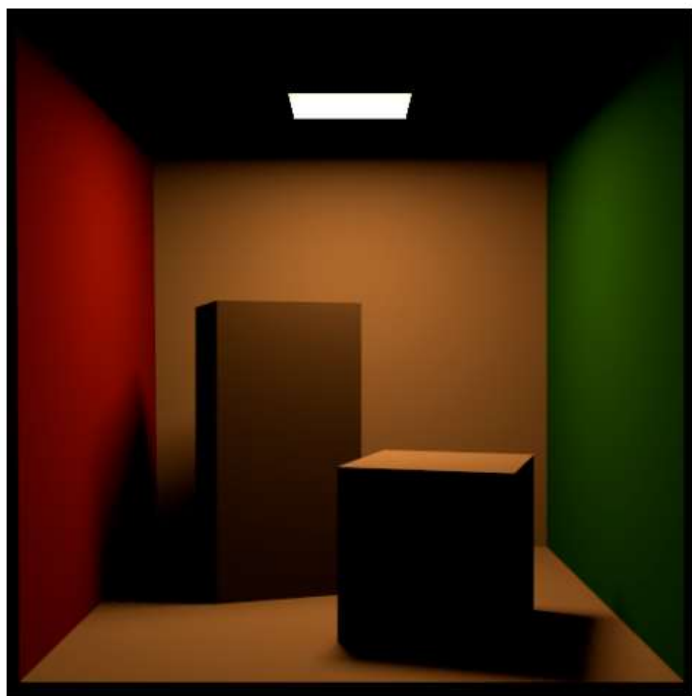
Mirror reflection



Glossy reflection

Whitted-Style光线追踪算法存在的问题

Q: 在Cornell box的例子中，漫反射材质之间没有反射吗？



Path traced:
direct illumination



Path traced:
global illumination

Whitted-Style 光线追踪算法是错误的！

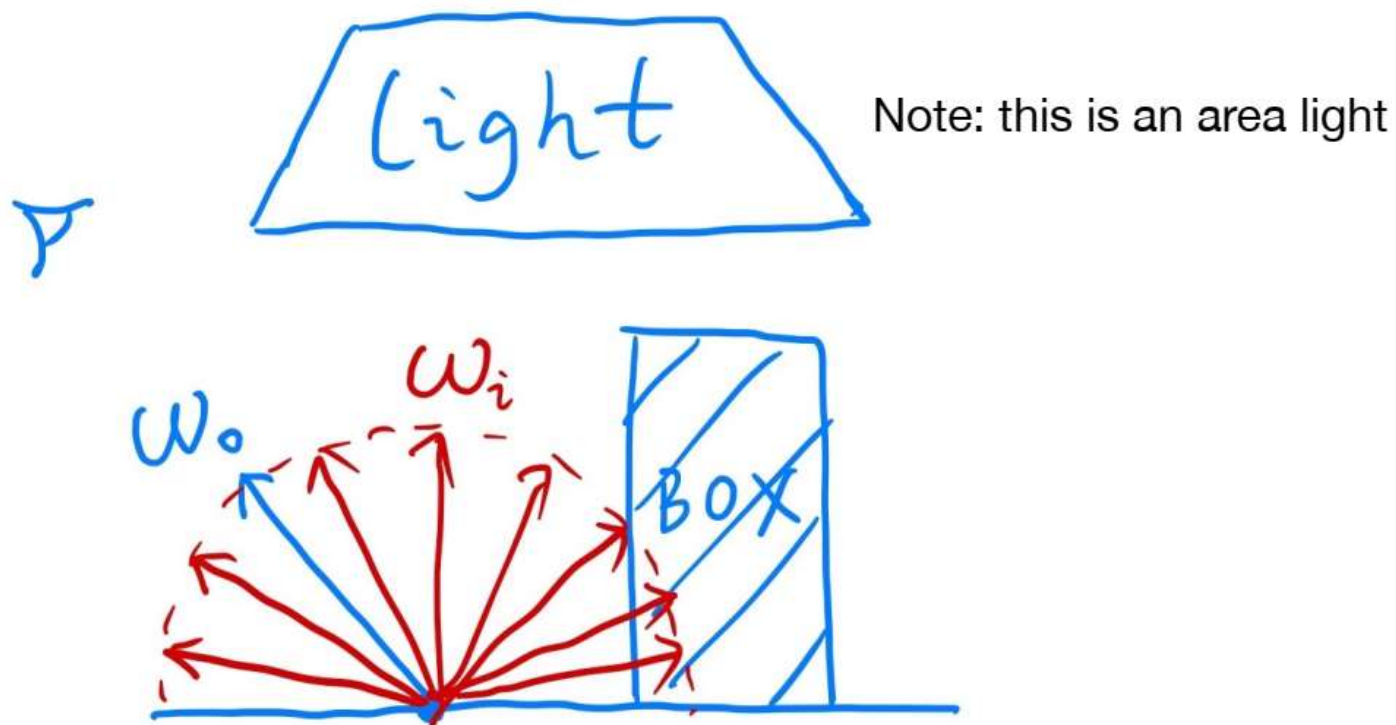
- 渲染方程是正确的！

$$L_o(p, \omega_o) = L_e(p, \omega_o) + \int_{\Omega^+} L_i(p, \omega_i) f_r(p, \omega_i, \omega_o) (n \cdot \omega_i) d\omega_i$$

- 渲染方程的求解
 - 如何求解半球上的积分？
 - 如何解决递归问题？

计算一点处的直接光照

- 假设我们要渲染以下场景中的一点，仅考虑直接光照

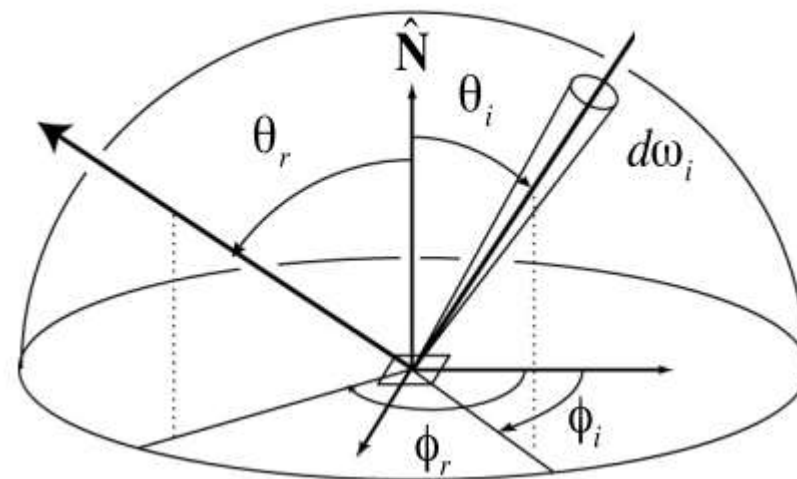


计算一点处的直接光照

- 不考虑自身发光

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{\Omega^+} L_i(p, \omega_i) f_r(p, \omega_i, \omega_o) (n \cdot \omega_i) d\omega_i$$

- 利用数值方法求解积分——蒙特卡洛积分！



简单的蒙特卡洛积分求解

- 计算点p处射向相机的Radiance

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{\Omega^+} L_i(p, \omega_i) f_r(p, \omega_i, \omega_o) (n \cdot \omega_i) d\omega_i$$

- 蒙特卡洛积分

$$\int_a^b \boxed{f(x)} dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{f(X_k)}{\boxed{p(X_k)}} \quad X_k \sim p(x)$$



$$\boxed{p(\omega_i) = 1/2\pi}$$

$$\boxed{L_i(p, \omega_i) f_r(p, \omega_i, \omega_o) (n \cdot \omega_i)}$$

简单的蒙特卡洛积分求解

- 计算一点处直接光照的正确方式:

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{\Omega^+} L_i(p, \omega_i) f_r(p, \omega_i, \omega_o) (n \cdot \omega_i) d\omega_i$$
$$\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{L_i(p, \omega_i) f_r(p, \omega_i, \omega_o) (n \cdot \omega_i)}{p(\omega_i)}$$

简单的蒙特卡洛积分求解

- 计算一点处直接光照的正确方式:

```
shade(p, wo)
```

```
    Randomly choose N directions  $w_i \sim \text{pdf}$ 
```

```
     $L_o = 0.0$ 
```

```
    For each  $w_i$ 
```

```
        Trace a ray  $r(p, w_i)$ 
```

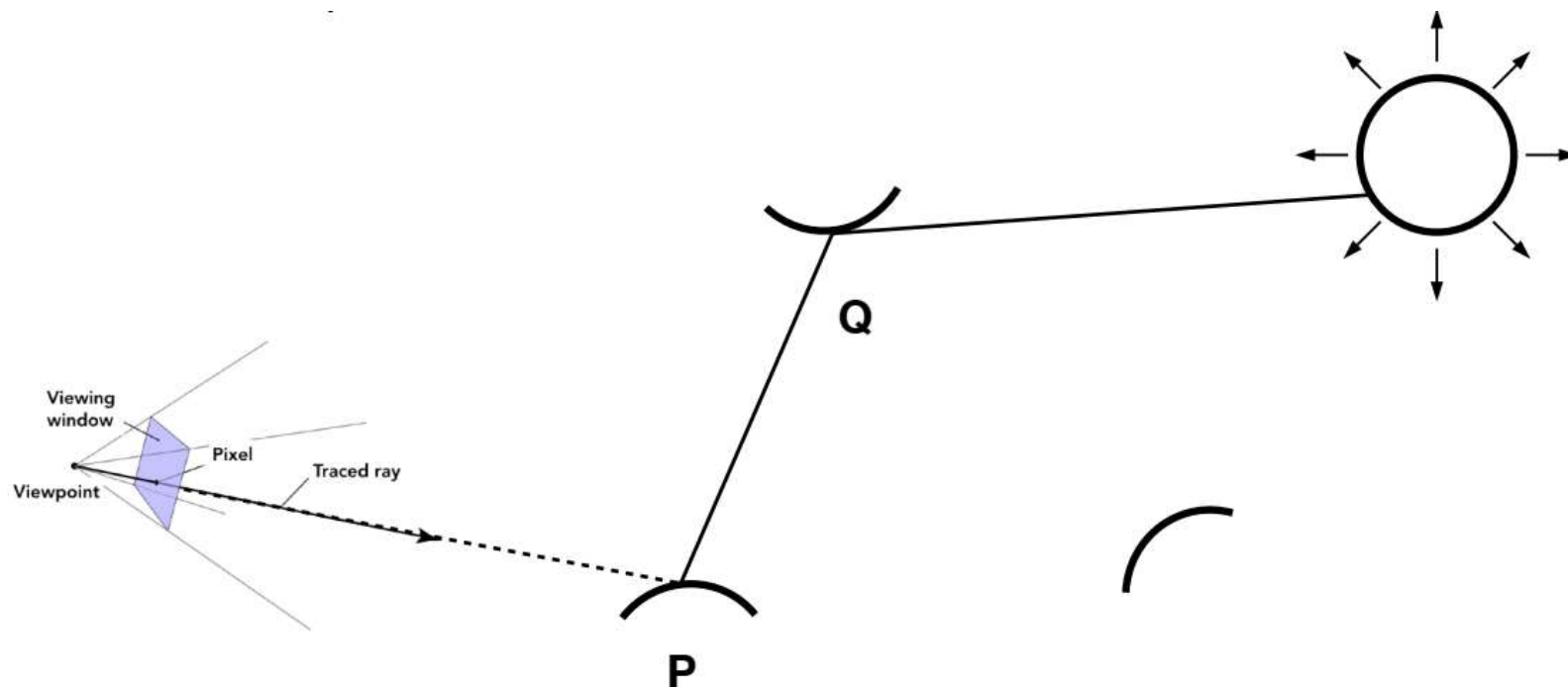
```
        If ray  $r$  hit the light
```

```
             $L_o += (1 / N) * L_i * f_r * \text{cosine} / \text{pdf}(w_i)$ 
```

```
    Return  $L_o$ 
```

计算全局光照

- 考虑光线打到物体上的情况
- Q点反射光线到P点，反射了多少？ Q点的直接光照！



计算全局光照

```
shade(p, wo)
```

```
    Randomly choose N directions  $w_i \sim \text{pdf}$ 
```

```
    Lo = 0.0
```

```
    For each  $w_i$ 
```

```
        Trace a ray  $r(p, w_i)$ 
```

```
        If ray  $r$  hit the light
```

```
            Lo +=  $(1 / N) * L_i * f_r * \text{cosine} / \text{pdf}(w_i)$ 
```

```
Return Lo
```

计算全局光照

```
shade(p, wo)
```

```
  Randomly choose N directions  $w_i \sim \text{pdf}$ 
```

```
  Lo = 0.0
```

```
  For each  $w_i$ 
```

```
    Trace a ray  $r(p, w_i)$ 
```

```
    If ray  $r$  hit the light
```

```
      Lo += (1 / N) * L_i * f_r * cosine / pdf( $w_i$ )
```

```
    Else If ray  $r$  hit an object at  $q$ 
```

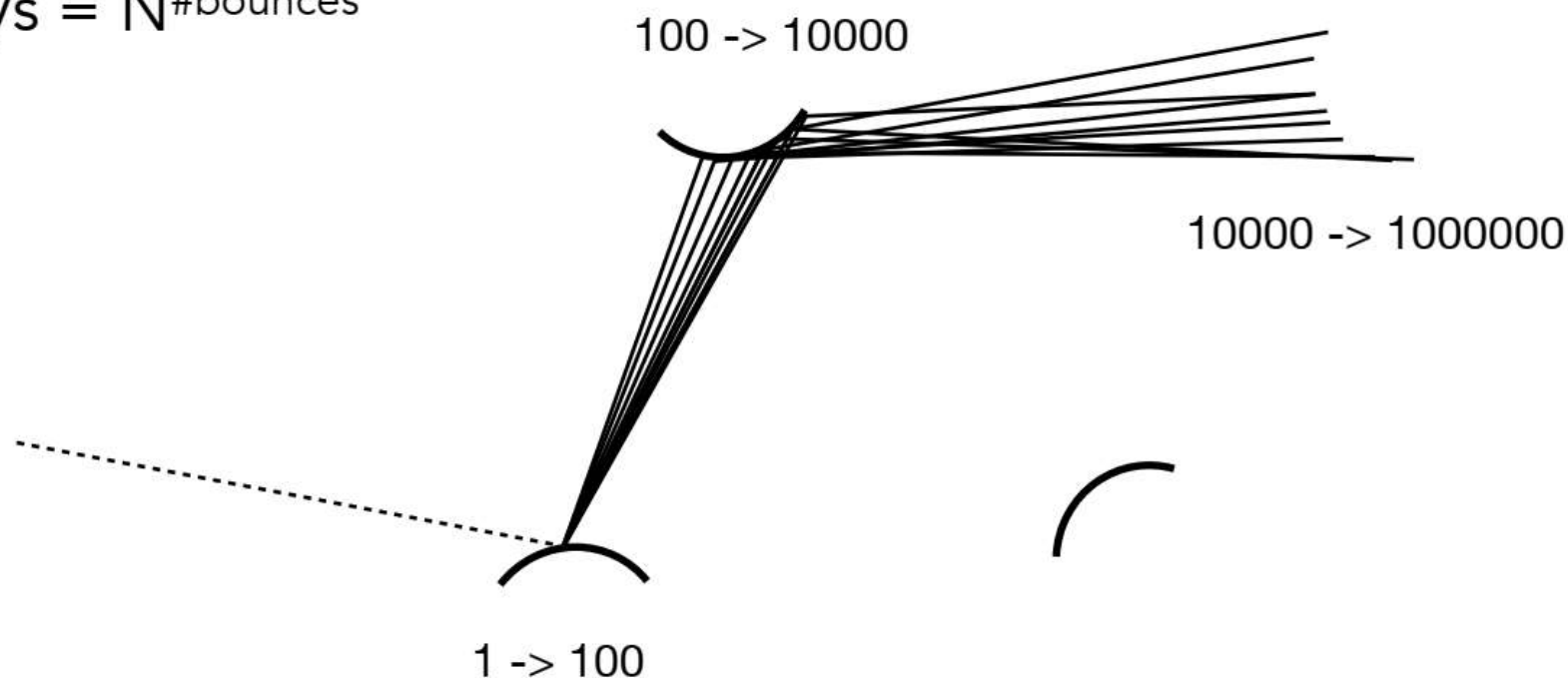
```
      Lo += (1 / N) * shade( $q, -w_i$ ) * f_r * cosine  
      / pdf( $w_i$ )
```

```
  Return Lo
```

计算全局光照

问题1：光线的数目随着弹射次数的增加而爆炸

$$\#rays = N^{\#bounces}$$



Q: N取值多少时可以避免这个问题?

计算全局光照

- 假设每个着色点只追踪一条光线

shade(p, wo)

Randomly choose **ONE** direction $w_i \sim \text{pdf}(w)$

Trace a ray $r(p, w_i)$

If ray r hit the light

Return $L_i * f_r * \text{cosine} / \text{pdf}(w_i)$

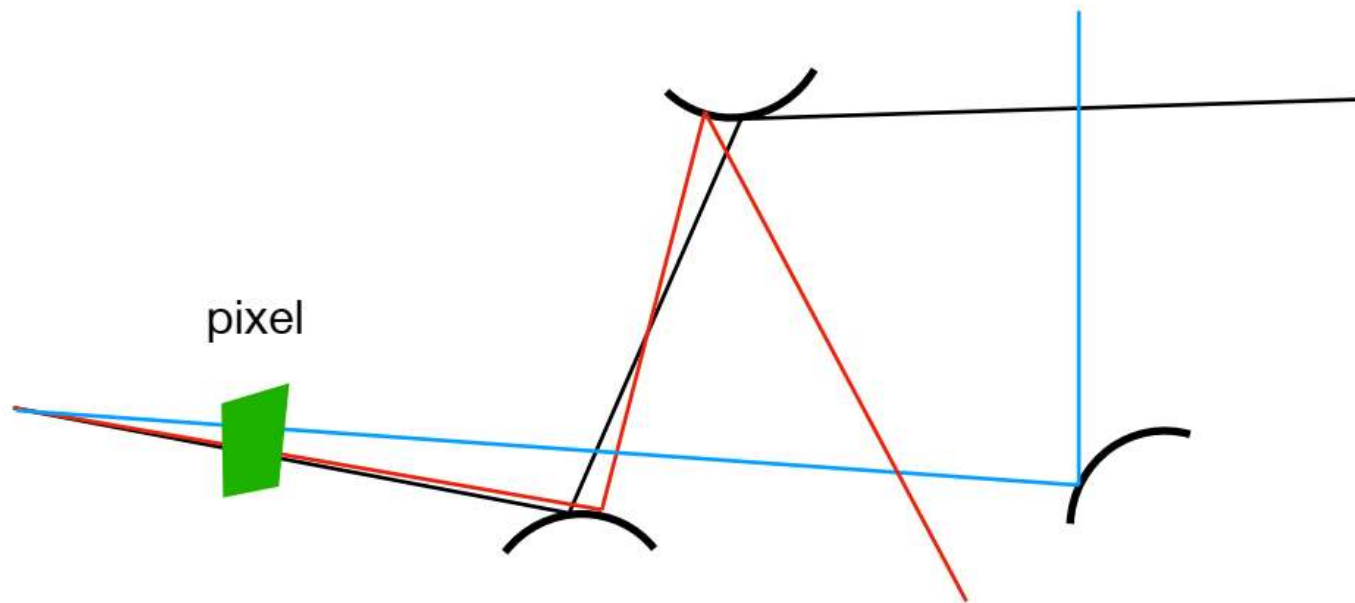
Else If ray r hit an object at q

Return $\text{shade}(q, -w_i) * f_r * \text{cosine} / \text{pdf}(w_i)$

- 这就叫做路径追踪！（ $N! = 1$ 时，称为分布式光线追踪）

计算全局光照

- 假设每个着色点只追踪一条光线，会有噪声问题！



- 只需要通过每一像素跟踪多条路径，求平均即可

计算全局光照

- 与光线投射类似

```
ray_generation(camPos, pixel)
```

```
    Uniformly choose N sample positions within the pixel
```

```
    pixel_radiance = 0.0
```

```
    For each sample in the pixel
```

```
        Shoot a ray r(camPos, cam_to_sample)
```

```
        If ray r hit the scene at p
```

```
            pixel_radiance += 1 / N * shade(p, sample_to_cam)
```

```
    Return pixel_radiance
```

计算全局光照

问题2: 递归算法永远不会停止!

shade(p, wo)

Randomly choose ONE direction $w_i \sim \text{pdf}(w)$

Trace a ray $r(p, w_i)$

If ray r hit the light

Return $L_i * f_r * \text{cosine} / \text{pdf}(w_i)$

Else If ray r hit an object at q

Return **shade**(q, $-w_i$) * $f_r * \text{cosine} / \text{pdf}(w_i)$

计算全局光照

- 光线的弹射确实不会停止，减少弹射次数=减少能量！

3 bounces



计算全局光照

- 光线的弹射确实不会停止，减少弹射次数=减少能量！

17 bounces



计算全局光照

- 俄罗斯轮盘赌 (Russian Roulette, RR)
 - P 概率生存, $1 - P$ 概率死亡, $0 < P < 1$ (例如: 2枚子弹, 生存概率 $P = 4/6$)



计算全局光照

- 之前我们总是在着色点发射光线，并得到着色结果 L_o
- 手动设置一个概率 P ，以概率 P 发射一条光线并返回着色结果 L_o/P
- 如果概率是 $1 - P$ ，不发射光线，返回结果0
- 以上述方式，我们依然期望得到结果 L_o

$$E = P * (L_o / P) + (1 - P) * 0 = L_o$$

计算全局光照

shade(p, wo)

Manually specify a probability P_{RR}

Randomly select ksi in a uniform dist. in $[0, 1]$

If (ksi > P_{RR}) return 0.0;

Randomly choose ONE direction $w_i \sim \text{pdf}(w)$

Trace a ray $r(p, w_i)$

If ray r hit the light

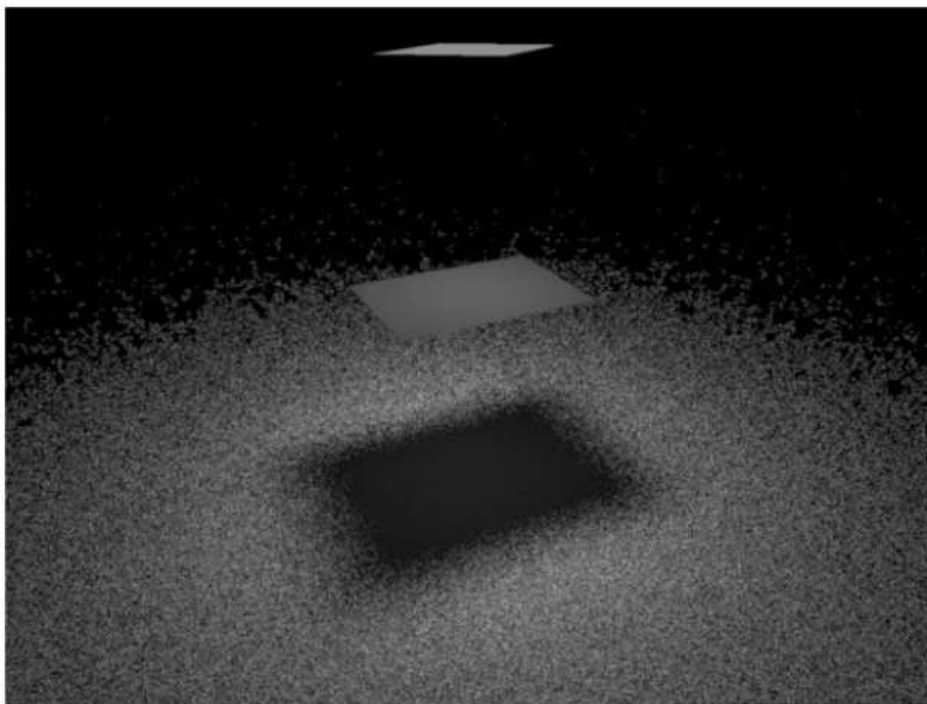
Return $L_i * f_r * \text{cosine} / \text{pdf}(w_i) / P_{RR}$

Else If ray r hit an object at q

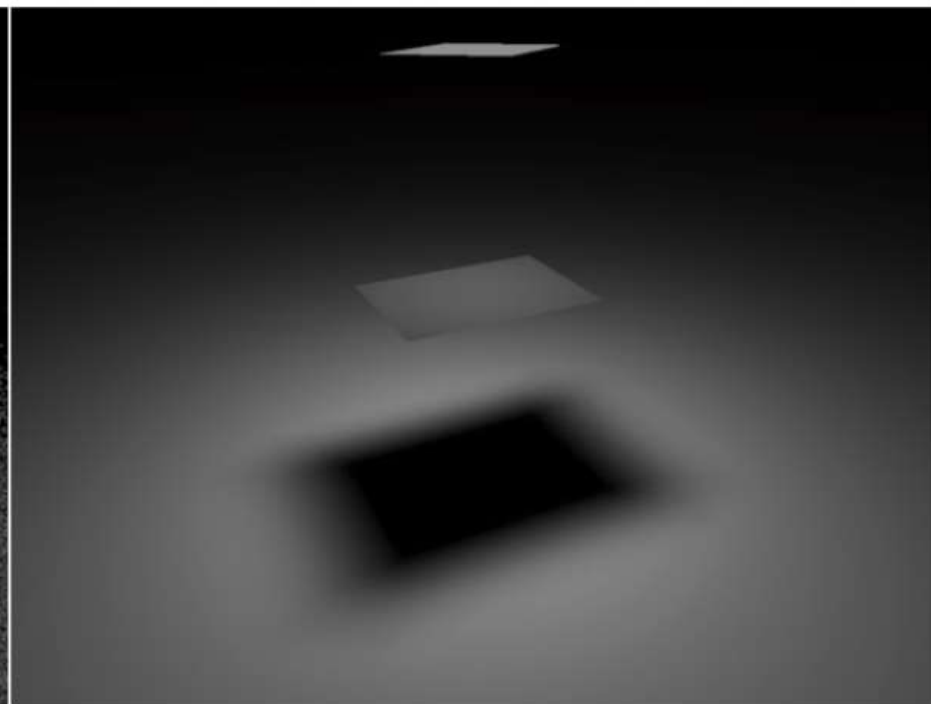
Return $\text{shade}(q, -w_i) * f_r * \text{cosine} / \text{pdf}(w_i) / P_{RR}$

路径追踪

- 目前为止，我们得到了一个正确版本的路径追踪，但还存在着效率问题



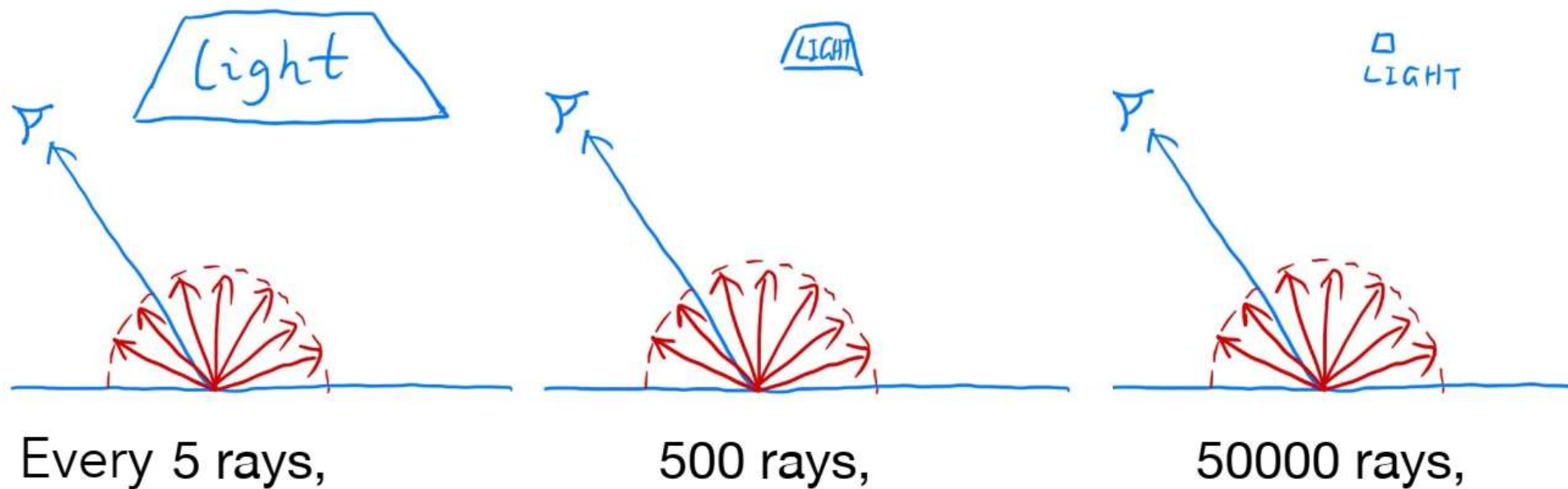
Low SPP (samples per pixel)
noisy results



High SPP

路径追踪

Q: 效率低的原因是什么?

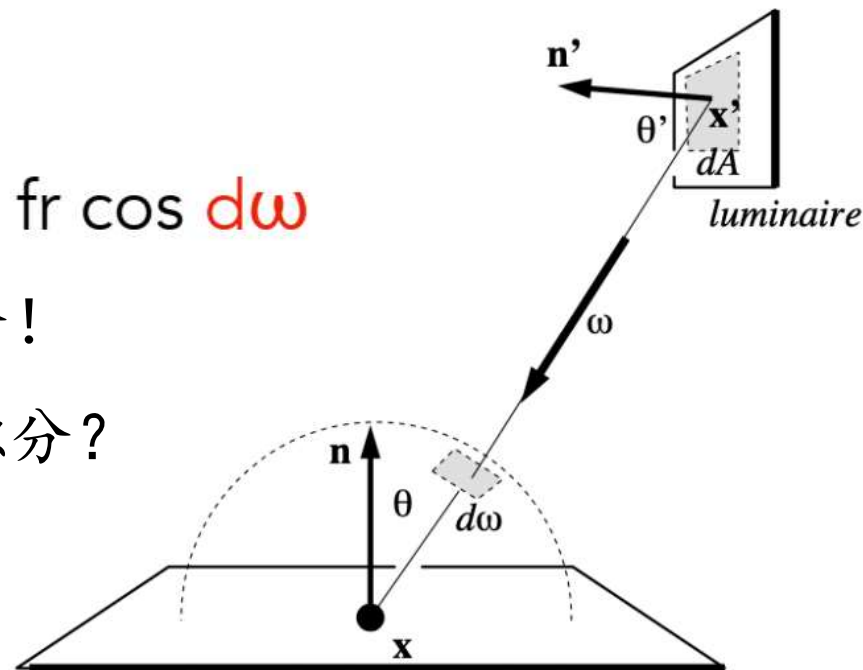


路径追踪

- 可能只有一条光线打到光源，在着色点均匀采样，会“浪费”很多光线，考虑对光源均匀采样！

$$\text{pdf} = 1 / A \text{ (because } \int \text{pdf } dA = 1)$$

- 但渲染方程是对立体角的积分 $L_o = \int L_i f_r \cos d\omega$
- 蒙特克洛积分：在 x 上采样，就在 x 上积分！
- 我们是否可以在光源上采样，在光源上积分？

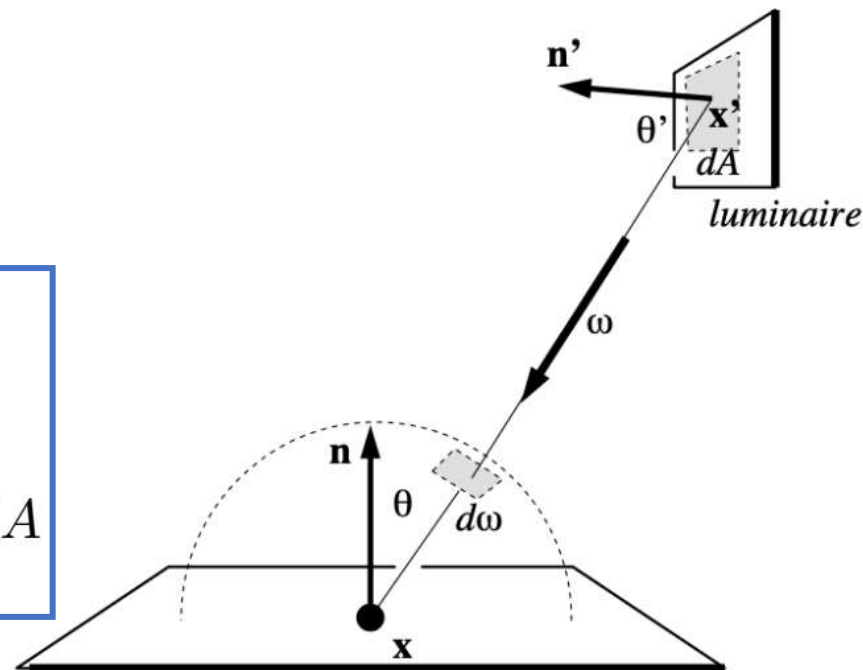


路径追踪

- 需要把渲染方程改写成对 dA 的积分，即明确 $d\omega$ 和 dA 的关系
- 根据立体角的定义：单位球上的投影面积

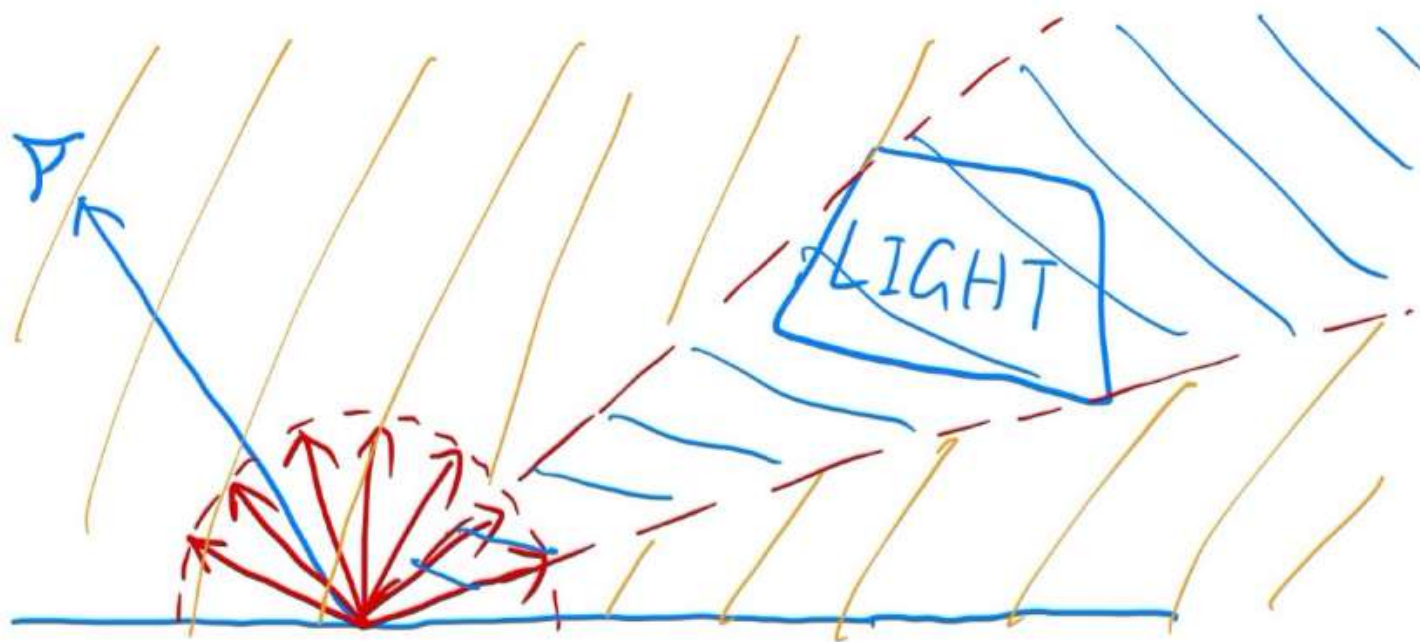
$$d\omega = \frac{dA \cos \theta'}{\|x' - x\|^2}$$

$$\begin{aligned} L_o(x, \omega_o) &= \int_{\Omega^+} L_i(x, \omega_i) f_r(x, \omega_i, \omega_o) \cos \theta \, d\omega_i \\ &= \int_A L_i(x, \omega_i) f_r(x, \omega_i, \omega_o) \frac{\cos \theta \cos \theta'}{\|x' - x\|^2} \, dA \end{aligned}$$



路径追踪

- 之前我们假设光线是通过均匀半球采样射出的，现在我们考虑两部分：
 - 光源（直接光照，不需要RR）
 - 其他反射光（间接光照，需要RR）



路径追踪

shade(p, wo)

Contribution from the light source.

Uniformly sample the light at x' ($\text{pdf_light} = 1 / A$)

$L_{\text{dir}} = L_{\text{i}} * f_{\text{r}} * \cos \theta * \cos \theta' / |x' - p|^2 / \text{pdf_light}$

Contribution from other reflectors.

$L_{\text{indir}} = 0.0$

Test Russian Roulette with probability P_{RR}

Uniformly sample the hemisphere toward w_{i} ($\text{pdf_hemi} = 1 / 2\pi$)

Trace a ray $r(p, w_{\text{i}})$

If ray r hit a **non-emitting** object at q

$L_{\text{indir}} = \text{shade}(q, -w_{\text{i}}) * f_{\text{r}} * \cos \theta / \text{pdf_hemi} / P_{\text{RR}}$

Return $L_{\text{dir}} + L_{\text{indir}}$

路径追踪

Q: 最后一个问题，如果对光源的采样被遮挡？

Contribution from the light source.

$L_{\text{dir}} = 0.0$

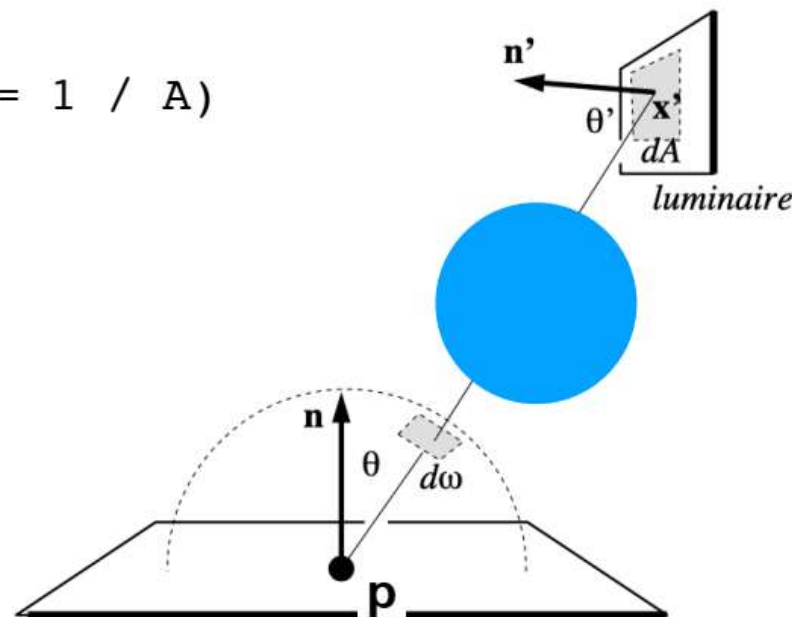
Uniformly sample the light at x' ($\text{pdf}_{\text{light}} = 1 / A$)

Shoot a ray from p to x'

If the ray is not blocked in the middle

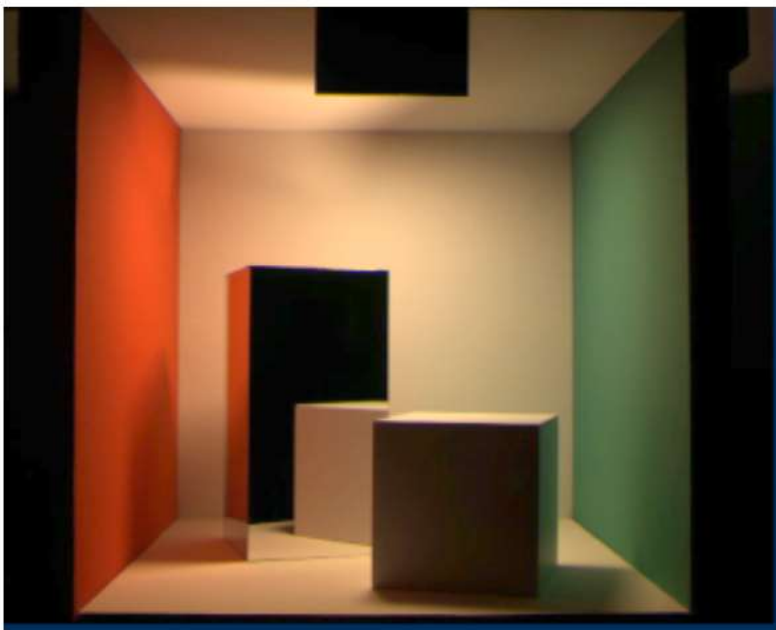
$L_{\text{dir}} = \dots$

- 这样我们得到了最终版本的路径追踪！

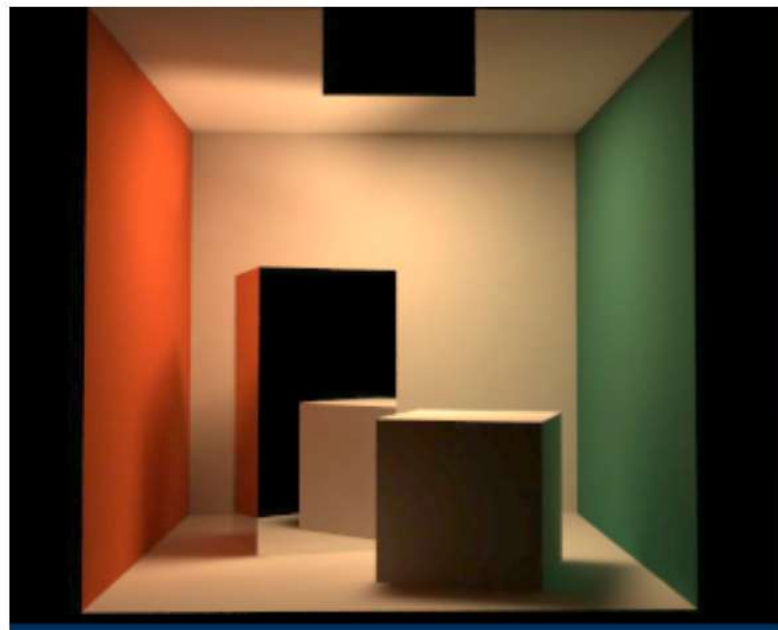


路径追踪

- 路径追踪是正确的吗？
- 几乎100%正确，照片级别的真实感！



Photo



Path traced:
global illumination

The Cornell box — <http://www.graphics.cornell.edu/online/box/compare.html>

Q&A

