第3讲：变换

中国海洋大学 周佳然

上次课程内容

- 计算机图形学中的线性代数

➢ 向量（点乘、叉乘……）

➢ 矩阵(矩阵的乘法……)

- 二维 & 三维变换

➢ 二维变换：缩放、对称、错切、旋转、平移（线性变换/仿射变换）

➢ 齐次坐标

➢ 逆变换

本次课程内容

- 二维 & 三维变换

➢ 二维组合变换

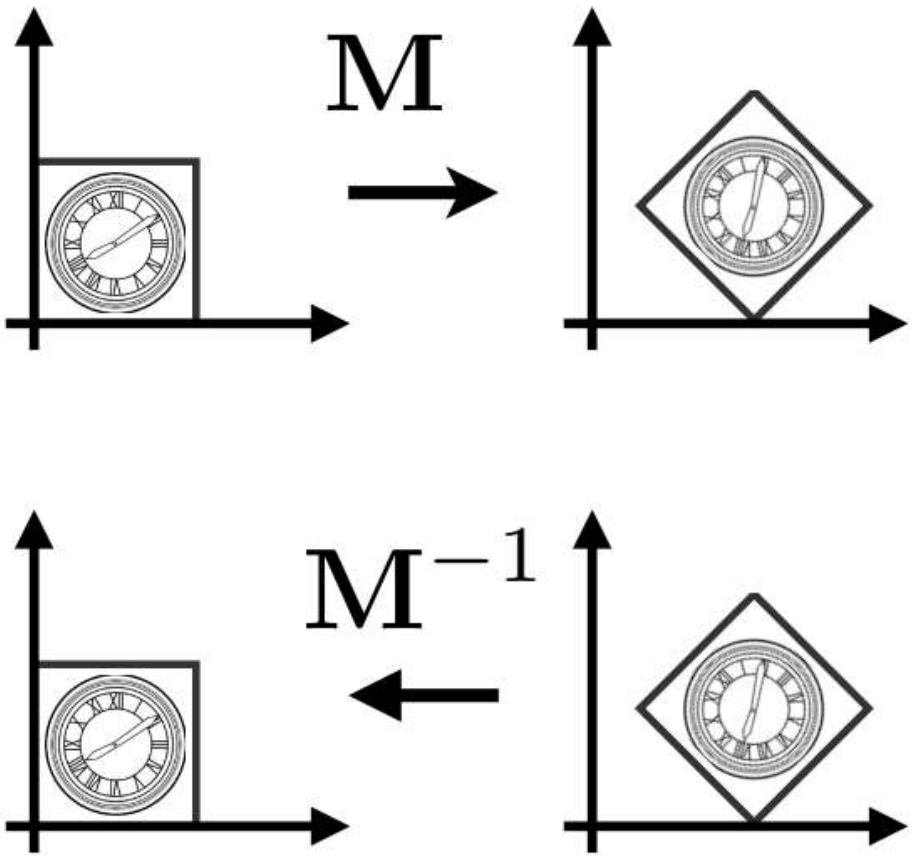
➢ 由二维变换推广到三维变换

- 观测变换

➢ 视图变换

➢ 投影变换（正交投影、透视投影）

逆变换（Inverse Transform）



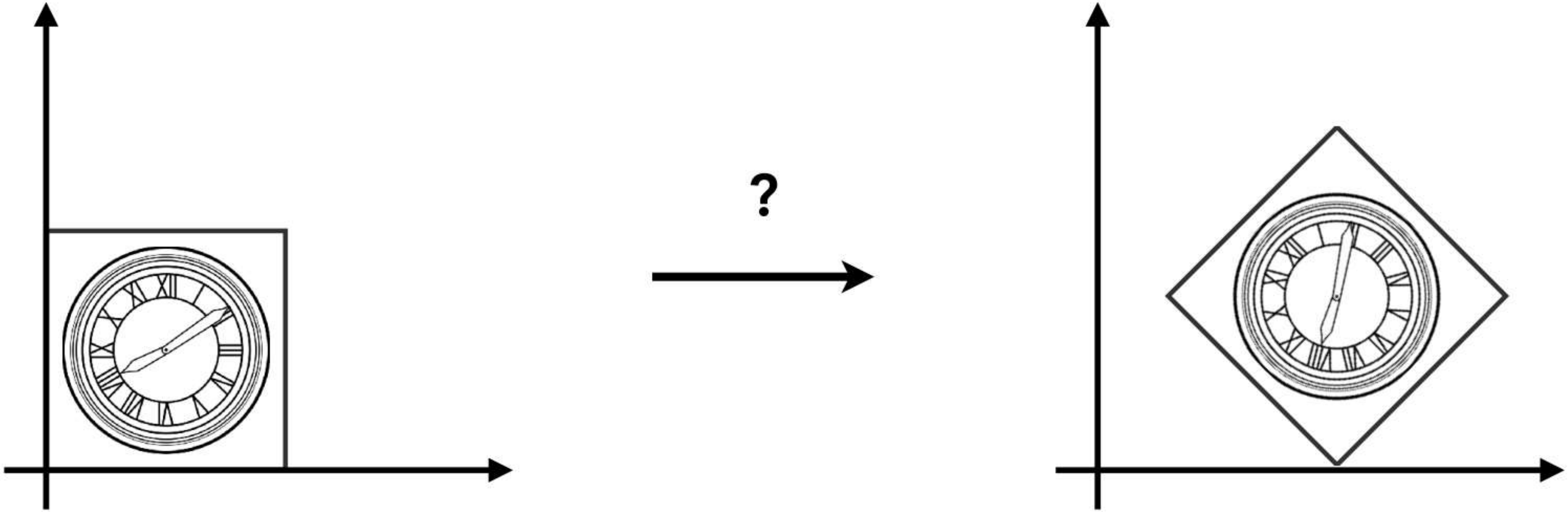
Q:旋转变换的逆变换?

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

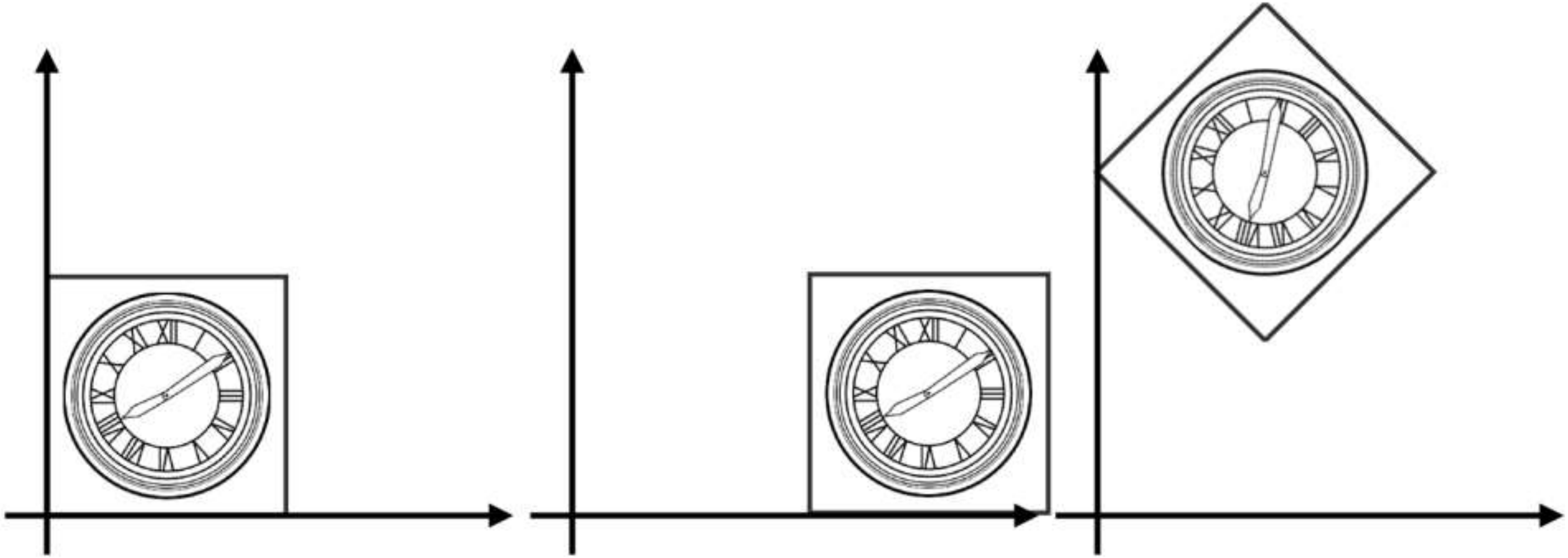
$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = R_\theta^T$$

$R_\theta^{-1} = R_\theta^T$ 正交矩阵

组合变换

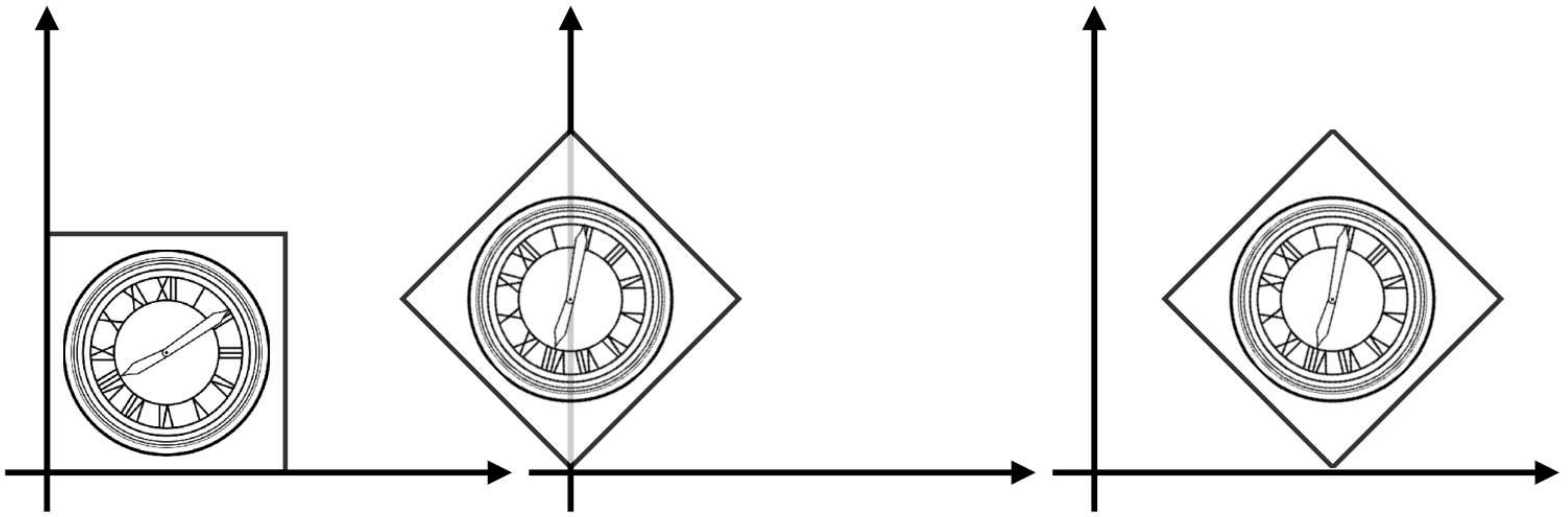


先平移后旋转？



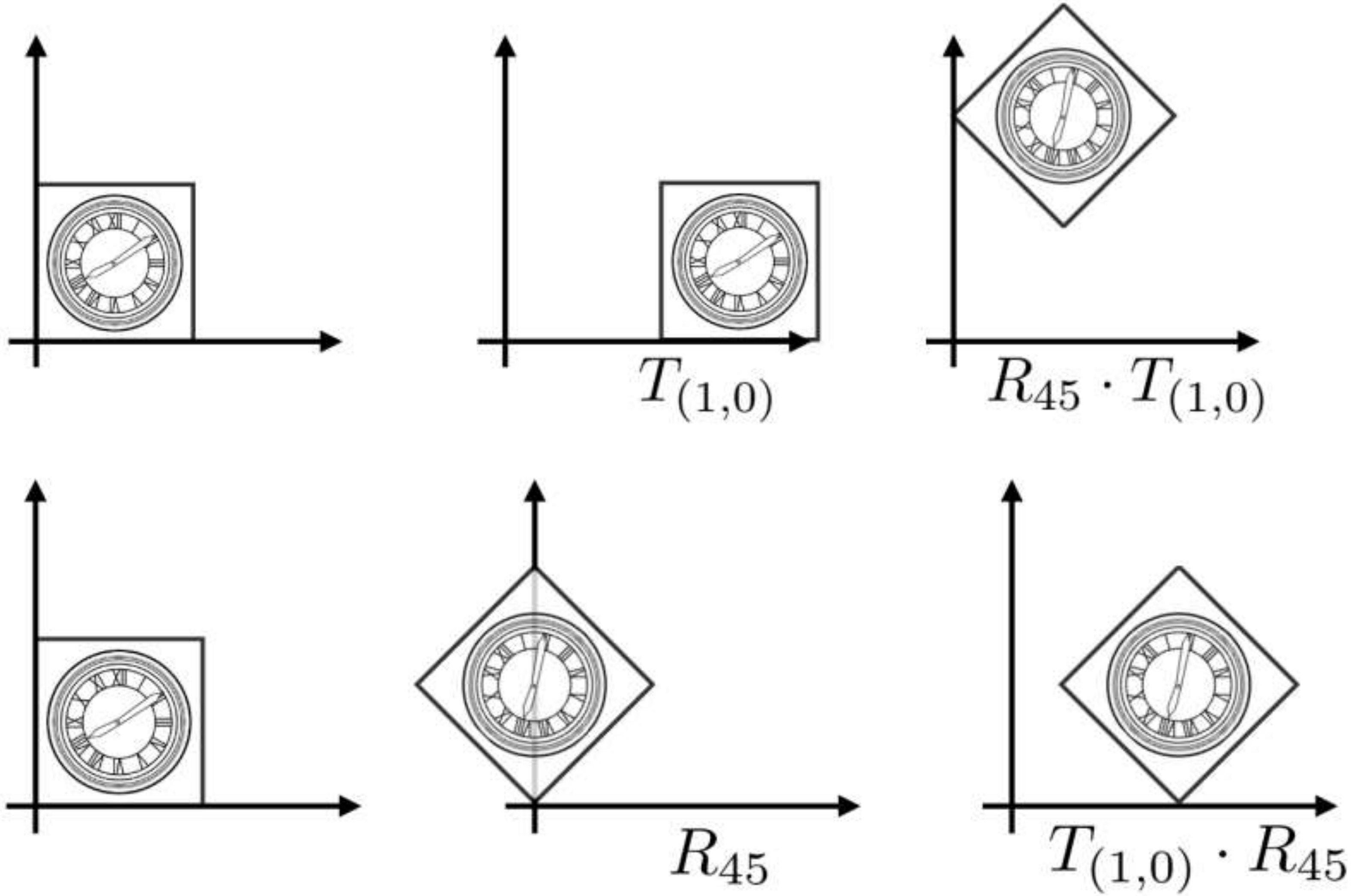
$T_{(1,0)}$ $\qquad$ $R_{45} \cdot T_{(1,0)}$

先旋转后平移?



R_{45} $\qquad$ $T_{(1,0)} \cdot R_{45}$

组合变换的顺序很重要



OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

组合变换的顺序很重要

- 不满足交换律

$$R_{45} \cdot T_{(1,0)} \neq T_{(1,0)} \cdot R_{45}$$

- 注意：变换矩阵从右向左应用

$$T_{(1,0)} \cdot R_{45} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

组合变换

- 一系列的仿射变换通过矩阵相乘做组合变换

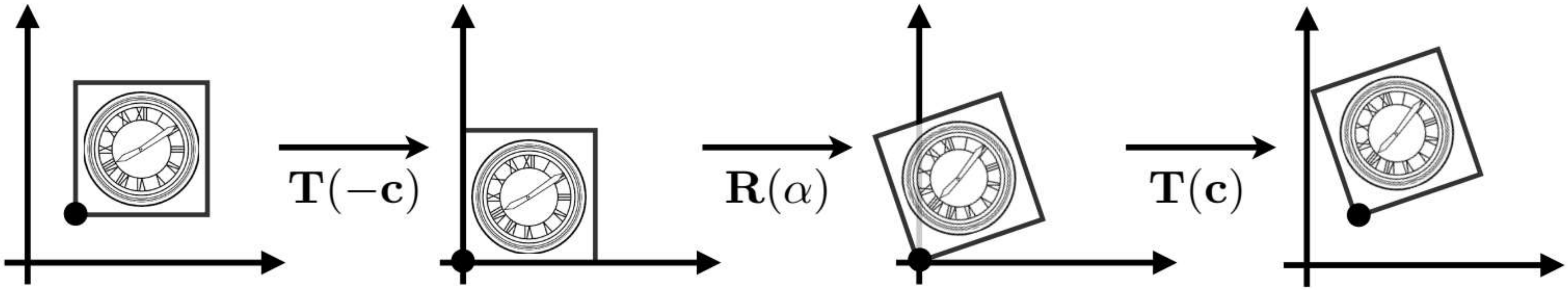
$$A_n(\ldots A_2(A_1(\mathbf{x}))) = \underbrace{\mathbf{A}_n \cdots \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1}_{} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pre-multiply *n* matrices to obtain a single matrix representing combined transform

- 矩阵相乘满足结合律

组合变换的分解

Q:绕任意点c的旋转?



$$\mathbf{T}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{T}(-\mathbf{c})$$

三维变换

- 使用齐次坐标

  3D point $= (x, y, z, 1)^T$

  3D vector $= (x, y, z, 0)^T$

- 齐次坐标表示的一个点

  (x, y, z, w) $(w \neq 0)$ is the 3D point:

  $(x/w, y/w, z/w)$

三维变换

- 利用4 × 4矩阵来表示仿射变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & i & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q：变换的顺序是什么？线性变换和平移变换哪个在前？

三维变换

- 缩放、平移

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

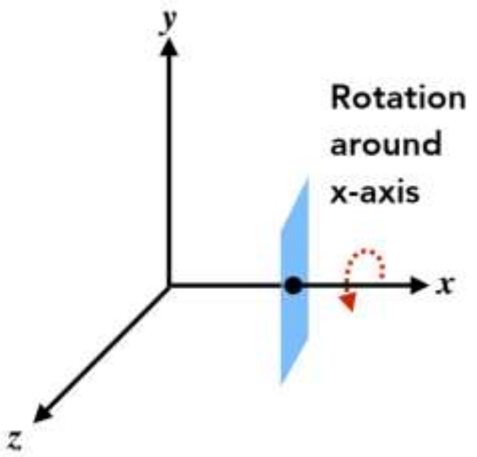
三维变换

- 旋转（绕x、y、z轴）

$$\mathbf{R}_x(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



Q:绕任意轴的旋转？

OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

Q&A

为什么要做变换?

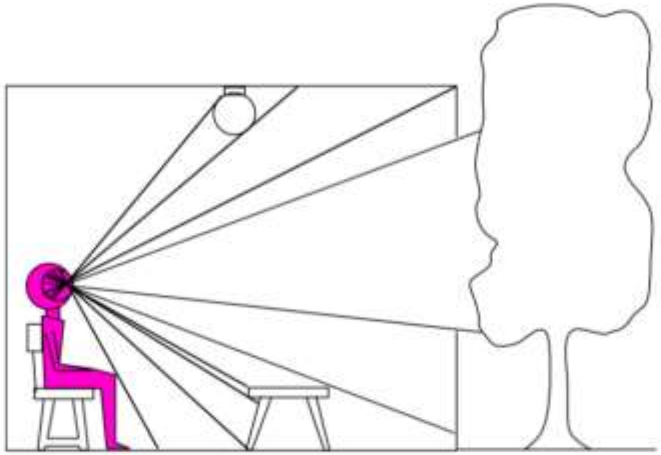
- 模型变换
  - 平移
  - 旋转
  - 缩放

  ……

为什么要做变换?

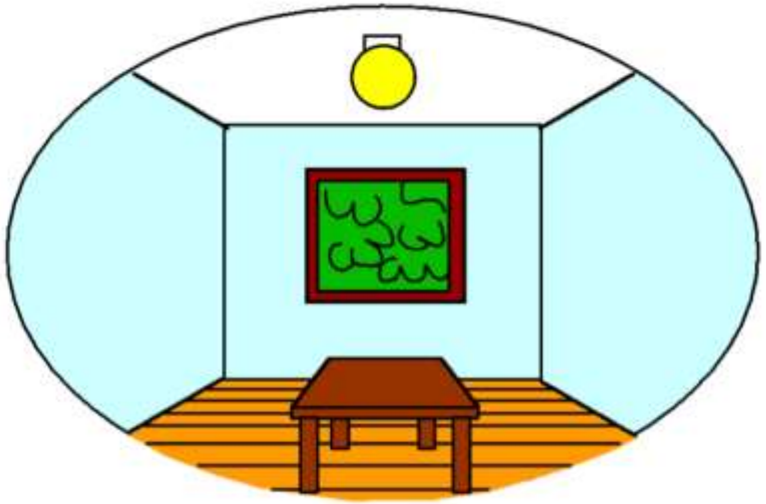
- 观测变换

3D world



Point of observation

2D image



Figures © Stephen E. Palmer, 2002

Viewing: (3D to 2D) projection

观测变换（Viewing Transformation）

- 视图变换（View/Camera Transformation）
- 投影变换（Projection Transformation）
  - 正交投影（Orthographic Projection）
  - 透视投影（Perspective Projection）

视图变换

- 什么是视图变换?
- 想像我们拍照的过程:

➢ 选景、安排好被拍人的位置（模型变换）

➢ 找好相机的角度（视图变换）

➢ 拍照（投影变换）

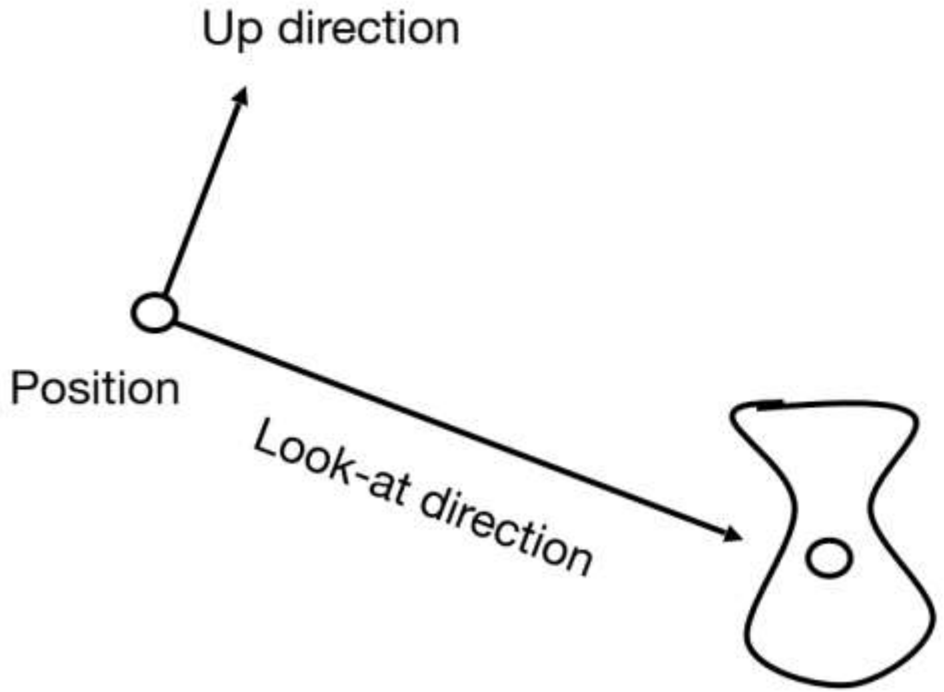
视图变换

- 怎么来表示视图变换?
- 首先定义相机:

➢ 相机的位置$\vec{e}$

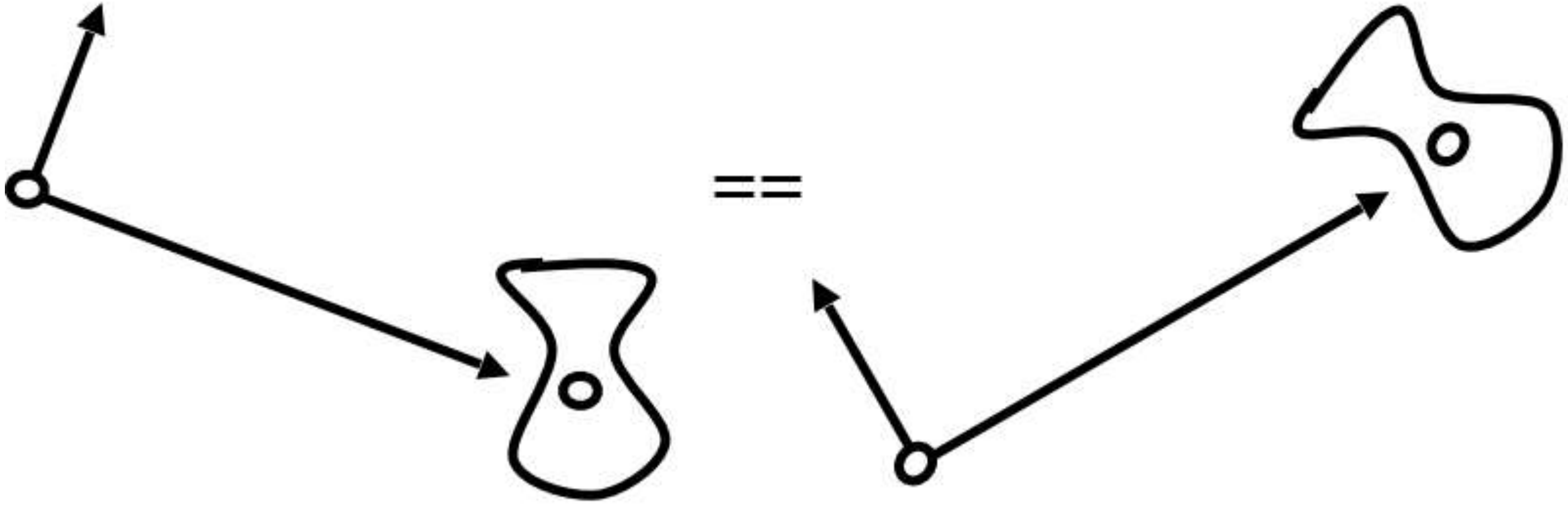
➢ 观察方向$\hat{g}$

➢ 向上方向$\hat{t}$（垂直观察方向）



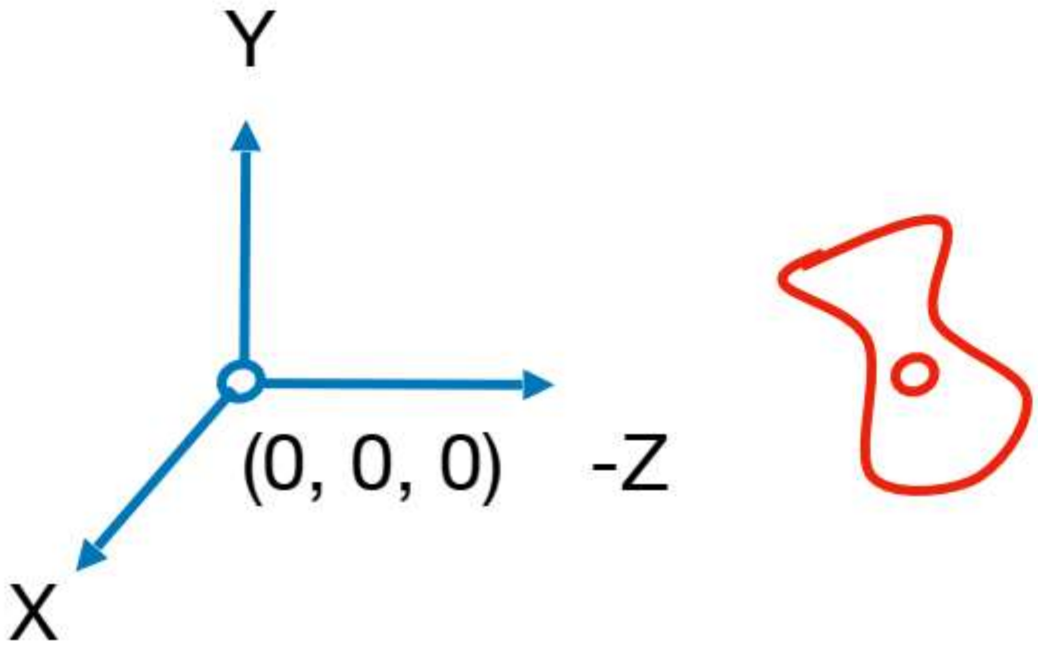
视图变换

Q:如果模型和相机的位置发生变化，如何保证“照片”不发生变化?



视图变换

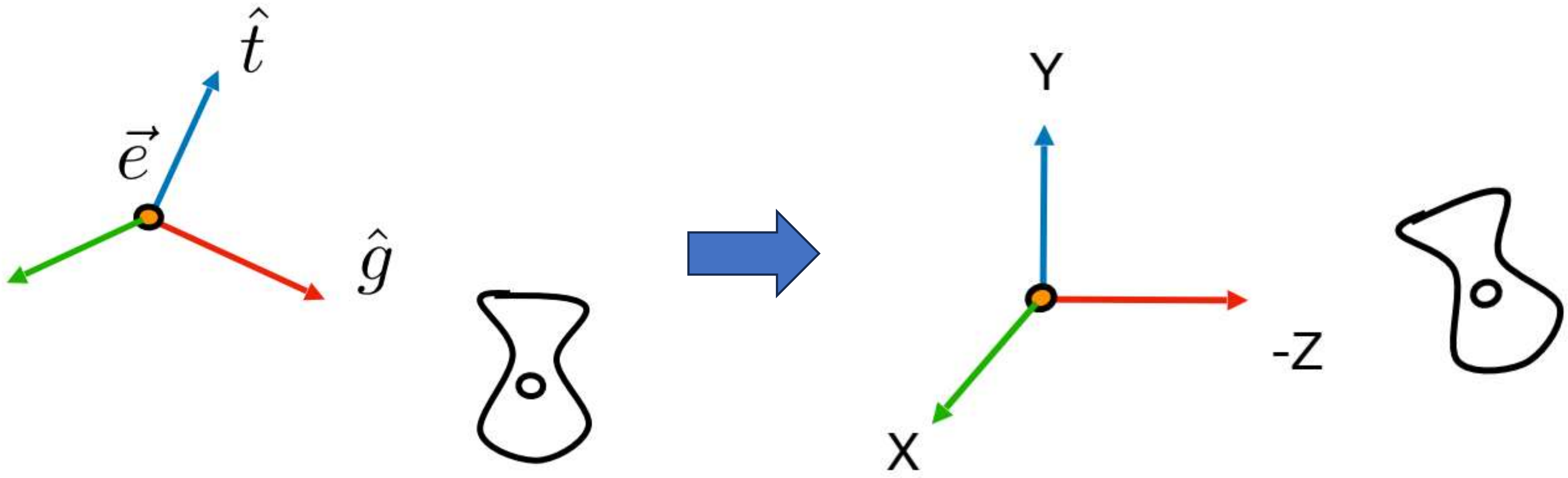
- 我们总是将相机的位置变换到坐标原点，向上方向为Y，观察方向为-Z
- 然后对模型进行相同的变换



视图变换

- 我们总是将相机的位置变换到坐标原点，向上方向为Y，观察方向为-Z
- 然后对模型进行相同的变换

Q：变换矩阵M_{view}?



OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

视图变换

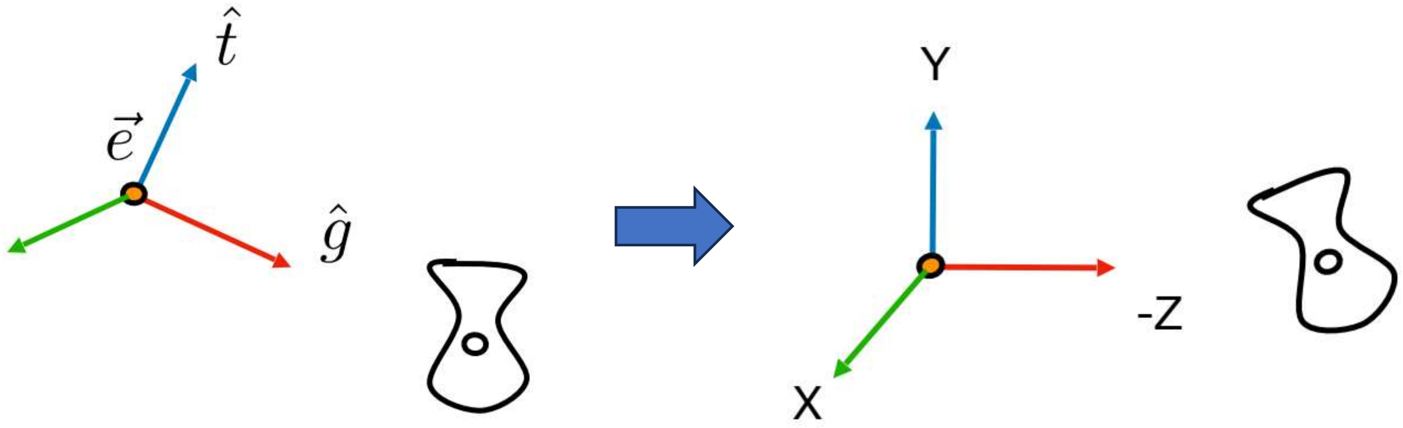
- 变换矩阵M_{view}

➢ 把$\vec{e}$移动到原点

➢ 旋转$\hat{g}$到−Z

➢ 旋转$\hat{t}$到Y

➢ 旋转$\hat{g}\times\hat{t}$到X



变换矩阵M_{view}写起来很复杂！

视图变换

- 变换矩阵$M_{view} = R_{view}T_{view}$

➢ 把$\vec{e}$移动到原点

➢ 旋转$\hat{g}$到-Z，$\hat{t}$到Y，$\hat{g} \times \hat{t}$到X

$$T_{view} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_e \\ 0 & 1 & 0 & -y_e \\ 0 & 0 & 1 & -z_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

视图变换

- 变换矩阵$M_{view} = R_{view}T_{view}$

➢ 把$\vec{e}$移动到原点

➢ 旋转$\hat{g}$到-Z，$\hat{t}$到Y，$\hat{g} \times \hat{t}$到X(考虑它的逆变换)

$$R_{view}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & x_t & x_{-g} & 0 \\ y_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_t & y_{-g} & 0 \\ z_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_t & z_{-g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

WHY?

$$R_{view} = \begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_{\hat{g}\times\hat{t}} & 0 \\ x_t & y_t & z_t & 0 \\ x_{-g} & y_{-g} & z_{-g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

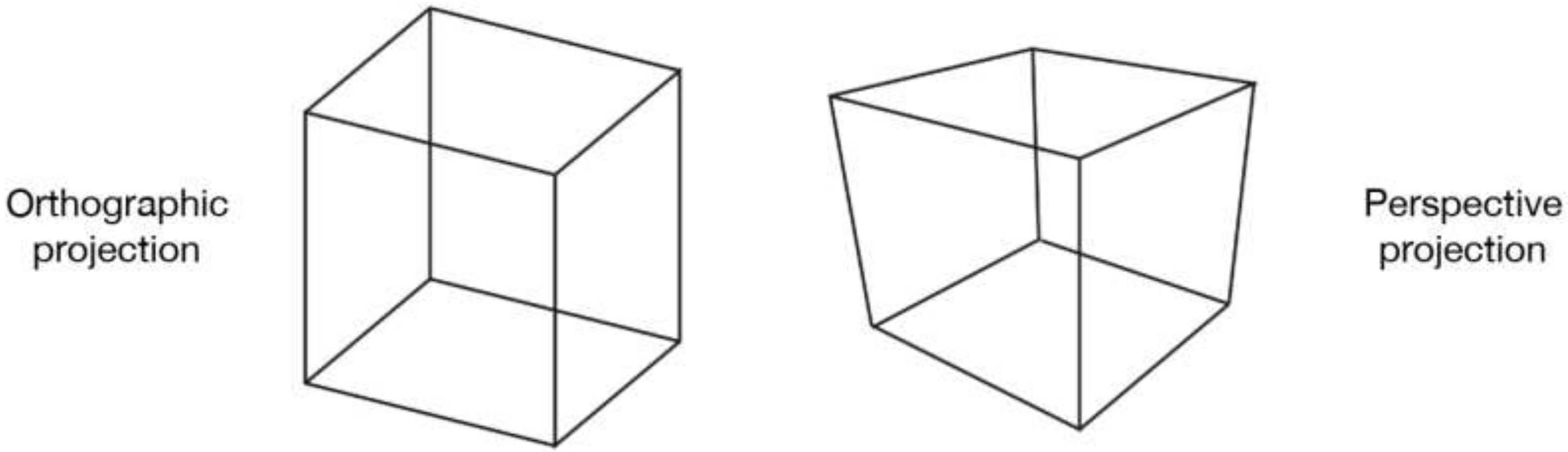
投影变换

- 图形学中的投影变换

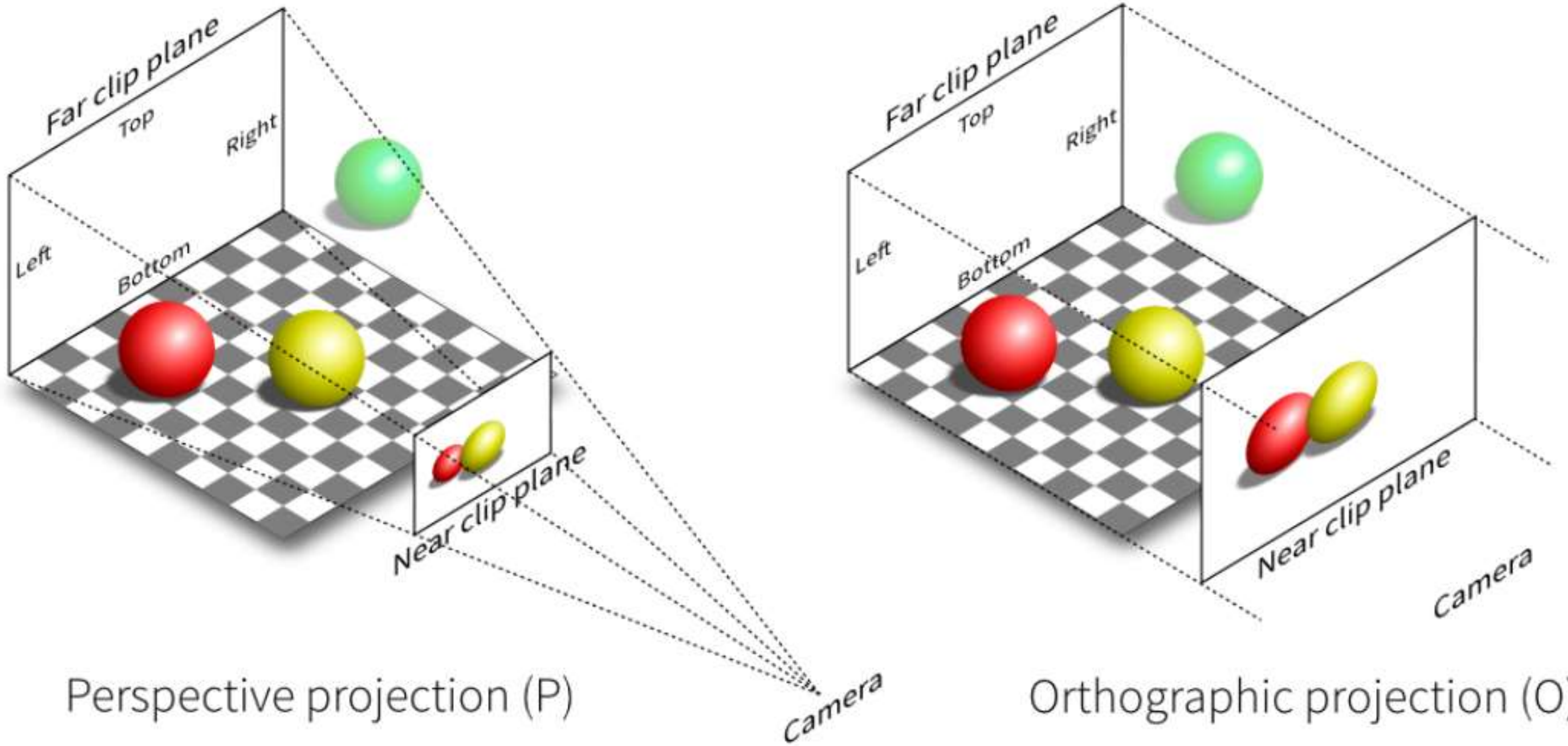
➢ 3D->2D

➢ 正交投影

➢ 透视投影



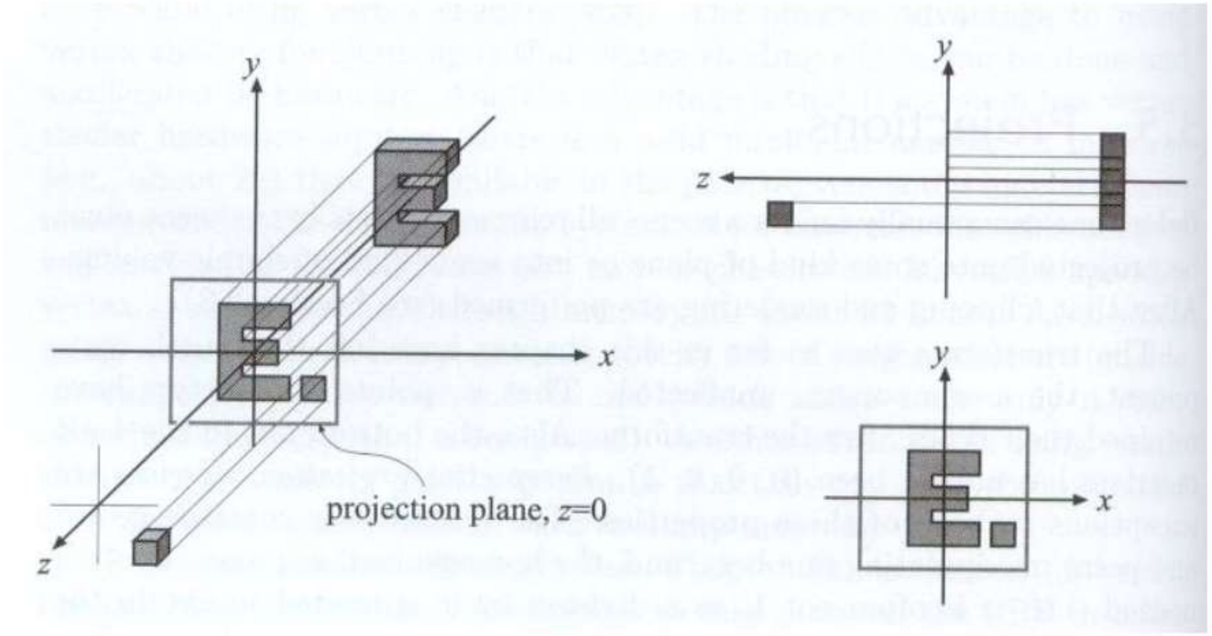
投影变换



OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

正交投影

- 简单理解为：
  - 将相机放在原点，观察方向取-Z，向上方向取Y
  - 舍弃掉Z坐标
  - 通过平移和缩放将结果变换到$[-1\ \ 1]^2$所在的矩形内

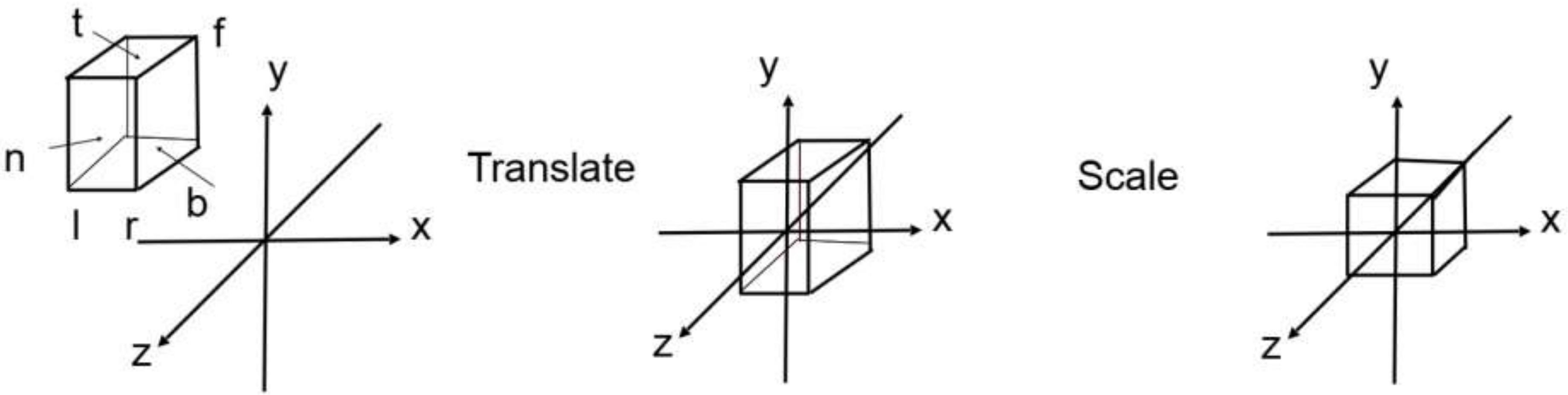


正交投影

- 正式来讲：

➢ 定义空间中的一个立方体$[l, r] \times [b, t] \times [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n}]$, 将它映射到一个标准（canonical）的立方体$[-1\ \ 1]^3$

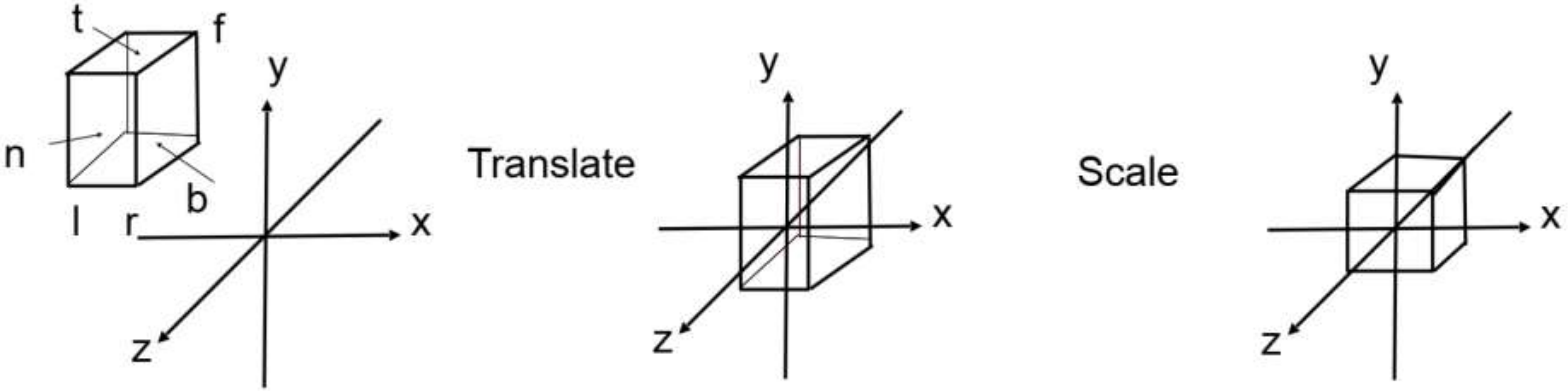
➢ 先将立方体中心平移到原点，再缩放成标准立方体



正交投影

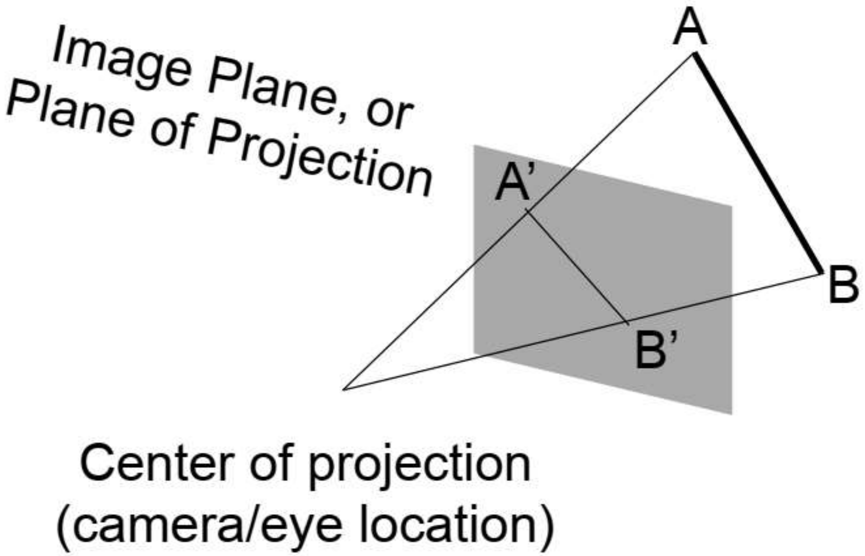
- 变换矩阵

$$M_{ortho} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{r+l}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{t+b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



透视投影

- 在图形学、美术领域应用广泛
- 近大远小的效果
- 平行线不再平行，其延长线相交到一点

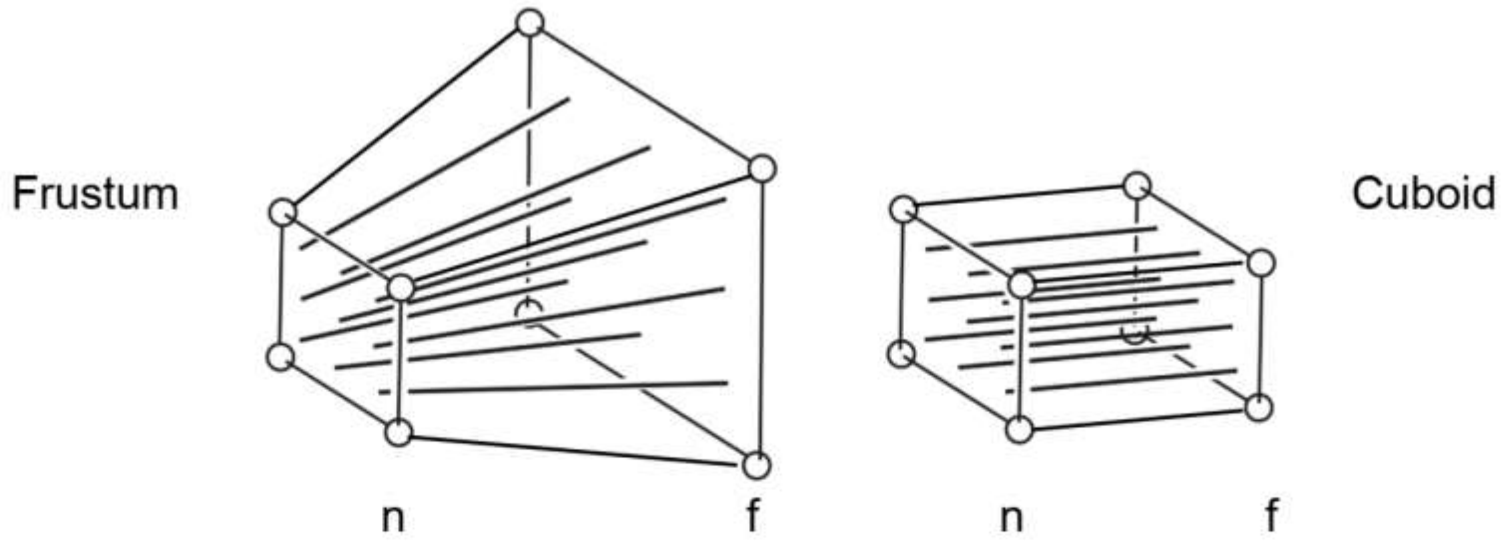


透视投影

- 怎么做透视投影？

➢ 将截头锥体“挤压”成一个立方体($n \rightarrow n,\ f \rightarrow f$)（$M_{persp\rightarrow \mathrm{ortho}}$）

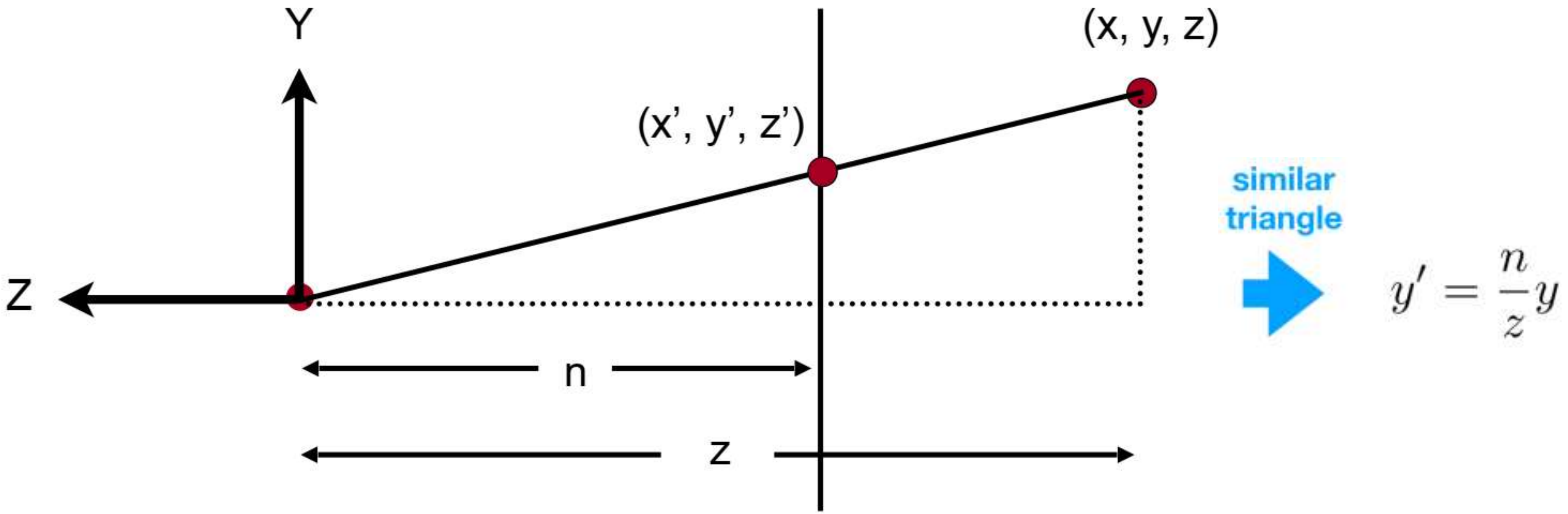
➢ 做正交投影（M_{ortho}）



透视投影

- $M_{persp\to\text{ortho}}$

➢ 确定点（x,y,z）和其变换后的点（x',y',z'）之间的关系



OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

透视投影

- $M_{persp \to \text{ortho}}$

➢ 确定点（x, y, z）和其变换后的点（x', y', z'）之间的关系

$$y' = \frac{n}{z} y \qquad x' = \frac{n}{z} x \text{ (similar to y')}$$

➢ 写成齐次坐标形式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} nx/z \\ ny/z \\ \text{unknown} \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\text{mult. by z}}{==} \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ \text{still unknown} \\ z \end{pmatrix}$$

透视投影

- $M_{persp \to \text{ortho}}$

$$M^{(4\times4)}_{persp\to ortho}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ \text{unknown} \\ z \end{pmatrix} \qquad M_{persp\to ortho} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

透视投影

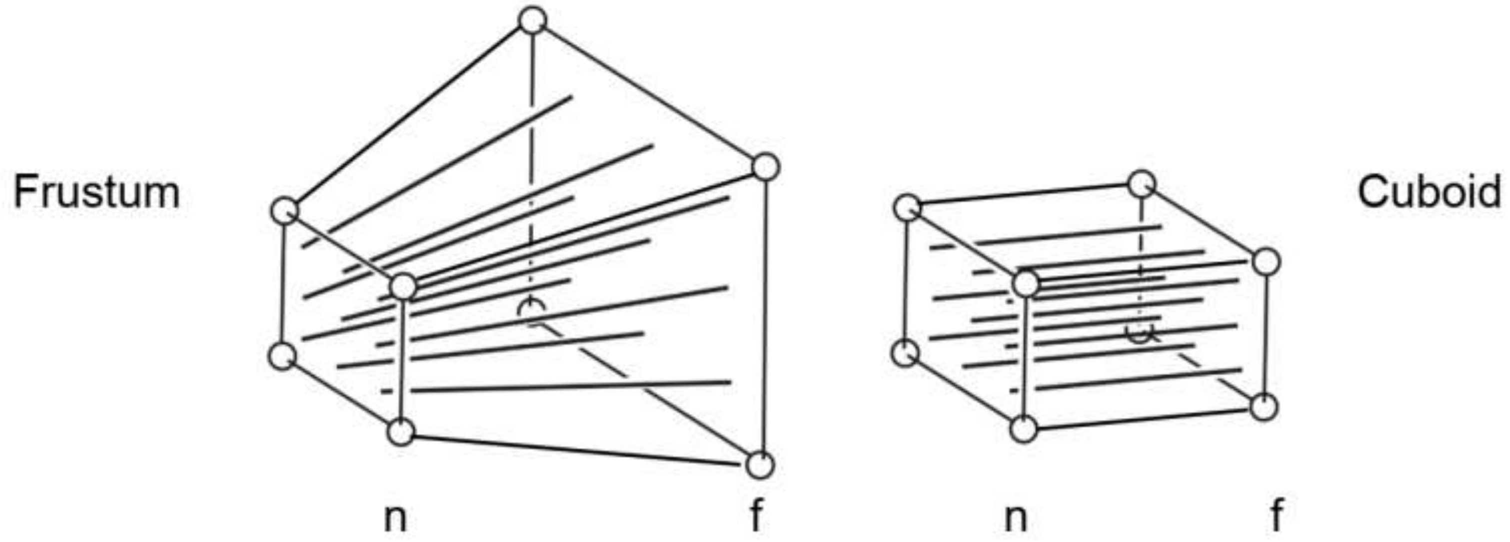
- $M_{persp \to \text{ortho}}$

➢ 第三行代表着z坐标的变换

➢ 变换时，近平面上的点不会变化

➢ 变换时，远平面上的点z坐标不会变化

$$M_{persp \to ortho} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



透视投影

- $M_{persp\to\text{ortho}}$

➢ 变换时，近平面上的点不会变化

$$M_{persp\to ortho}^{(4\times4)}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}nx\\ny\\\text{unknown}\\z\end{pmatrix}$$

replace
z with n

$$\begin{pmatrix}x\\y\\n\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\n\\1\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}nx\\ny\\n^2\\n\end{pmatrix}$$

➢ 所以第三行可以写成（0 0 A B）的形式

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\n\\1\end{pmatrix}=n^2$$

n^2 has nothing
to do with x and y

透视投影

- $M_{persp\rightarrow \text{ortho}}$

➢ 所以有

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\n\\1\end{pmatrix} = n^2 \quad \Rightarrow \quad An + B = n^2$$

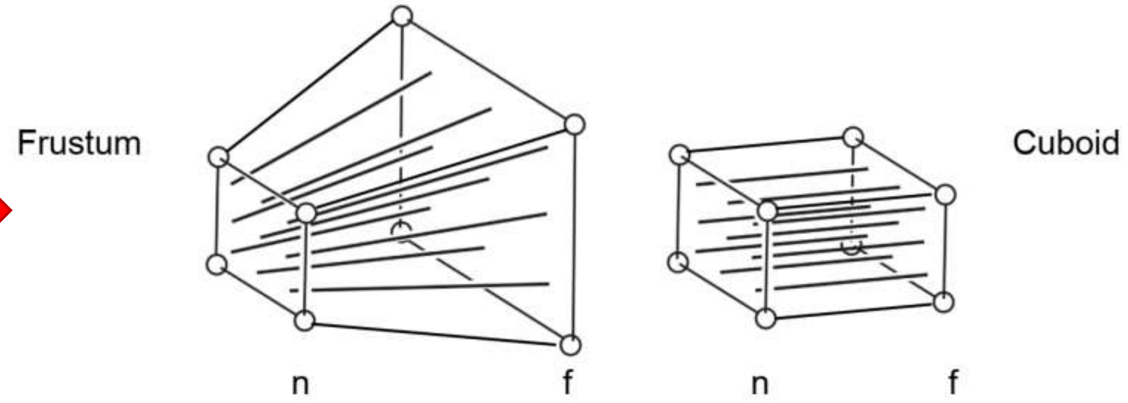
➢ 同理，变换时，远平面上的点z坐标不会变化

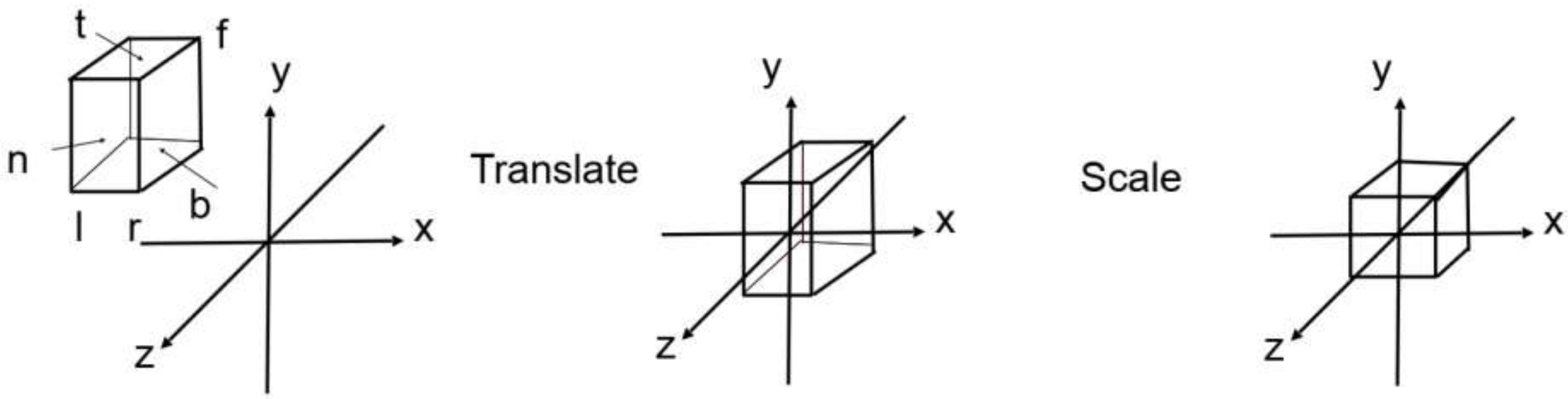
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= n + f \\ B &= -nf \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\f\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\f\\1\end{pmatrix} == \begin{pmatrix}0\\0\\f^2\\f\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Af + B = f^2$$

透视投影

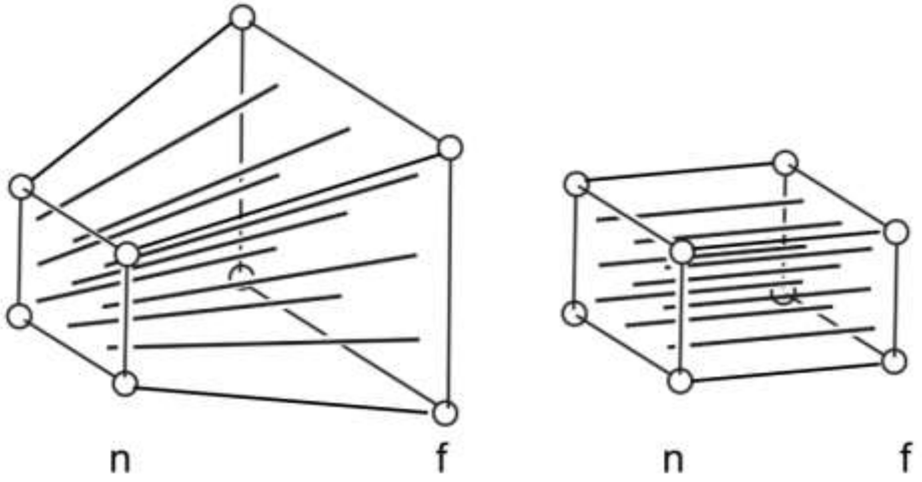
$$M_{persp} = \boxed{M_{ortho}}\boxed{M_{persp\to ortho}}$$

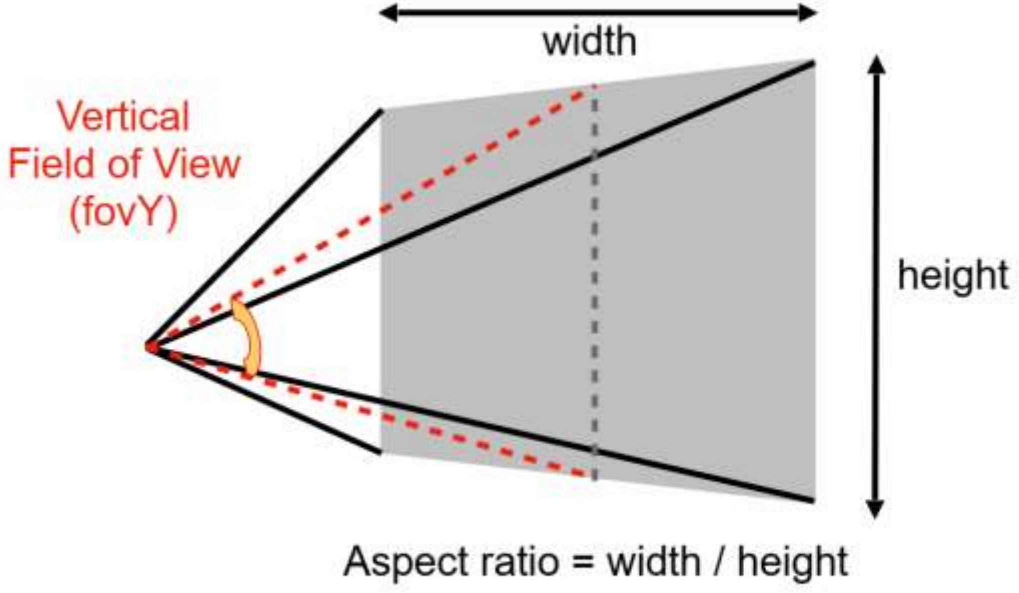




透视投影

Q:近平面的l,r,b,t还可以如何定义?



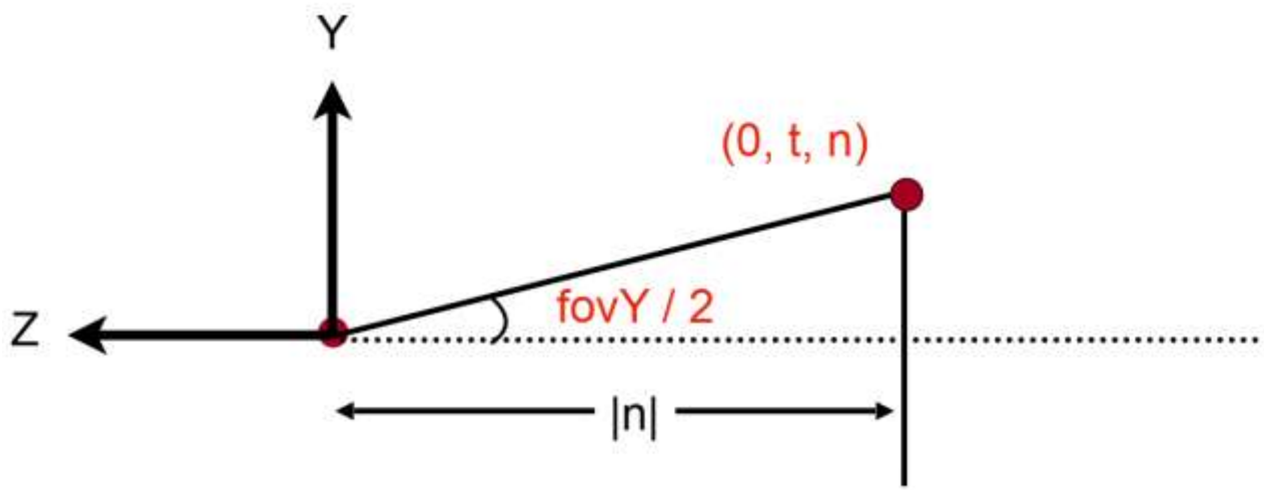


OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

透视投影

Q:近平面的l,r,b,t还可以如何定义?

- 假设对称，即l=-r，b=-t



$$\tan\frac{fovY}{2} = \frac{t}{|n|}$$

$$aspect = \frac{r}{t}$$

目前为止

- 我们完成了：

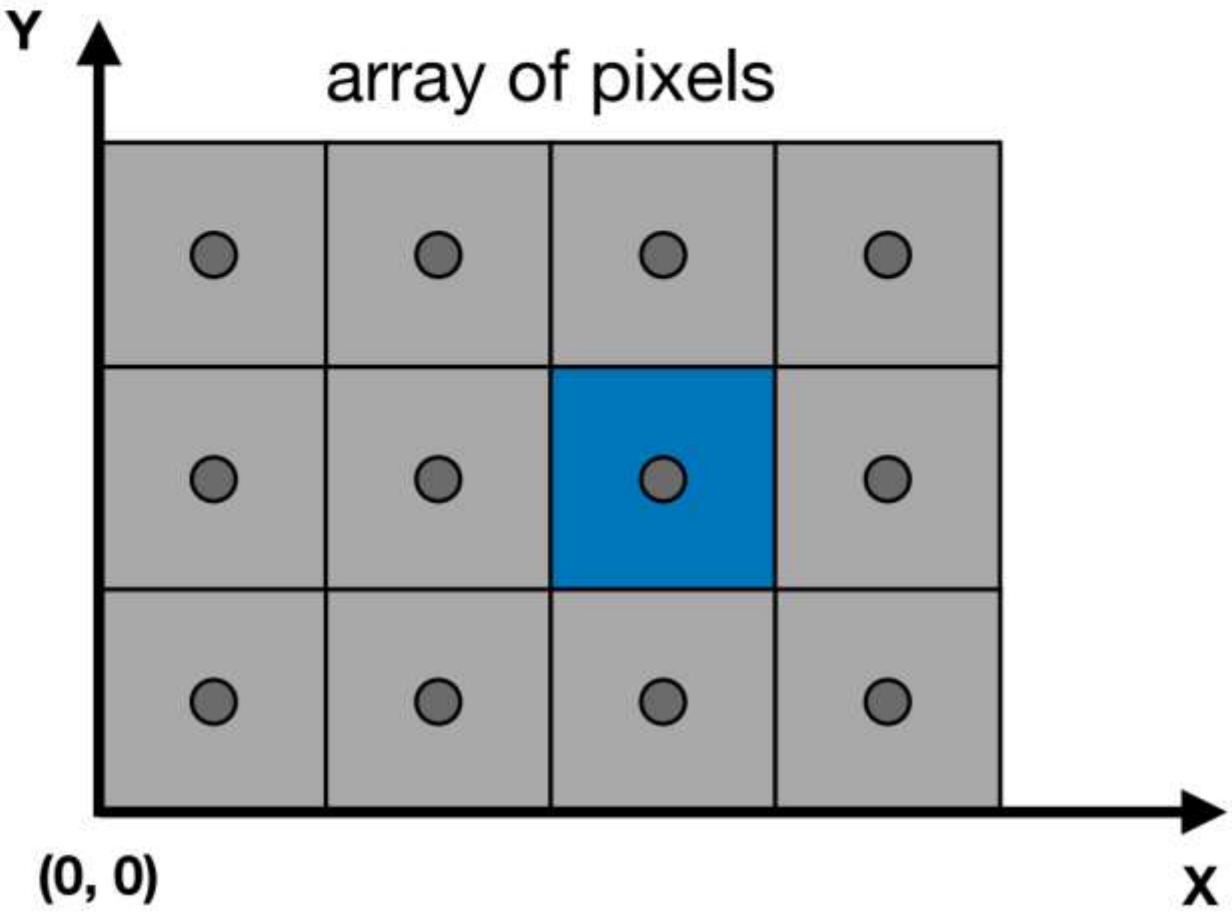
- ➢ 模型变换(放置好了模型)
- ➢ 视图变换（放置好了相机）
- ➢ 投影变换
- ✓ 正交投影（立方体->标准立方体）
- ✓ 透视投影（截头锥体->标准立方体）
- ➢ 标准立方体->?

标准立方体->屏幕

- 什么是屏幕？
  - 屏幕是由像素（数组）构成的
  - 数组的大小代表了屏幕的分辨率
  - 一种典型的光栅显示
- 光栅（Raster）=德语中的屏幕
  - 光栅化(Rasterize)：画在屏幕上
- 像素（Pixel:picture element）
  - 我们这里的像素指统一颜色的小正方形
  - 颜色可以用RGB形式表示

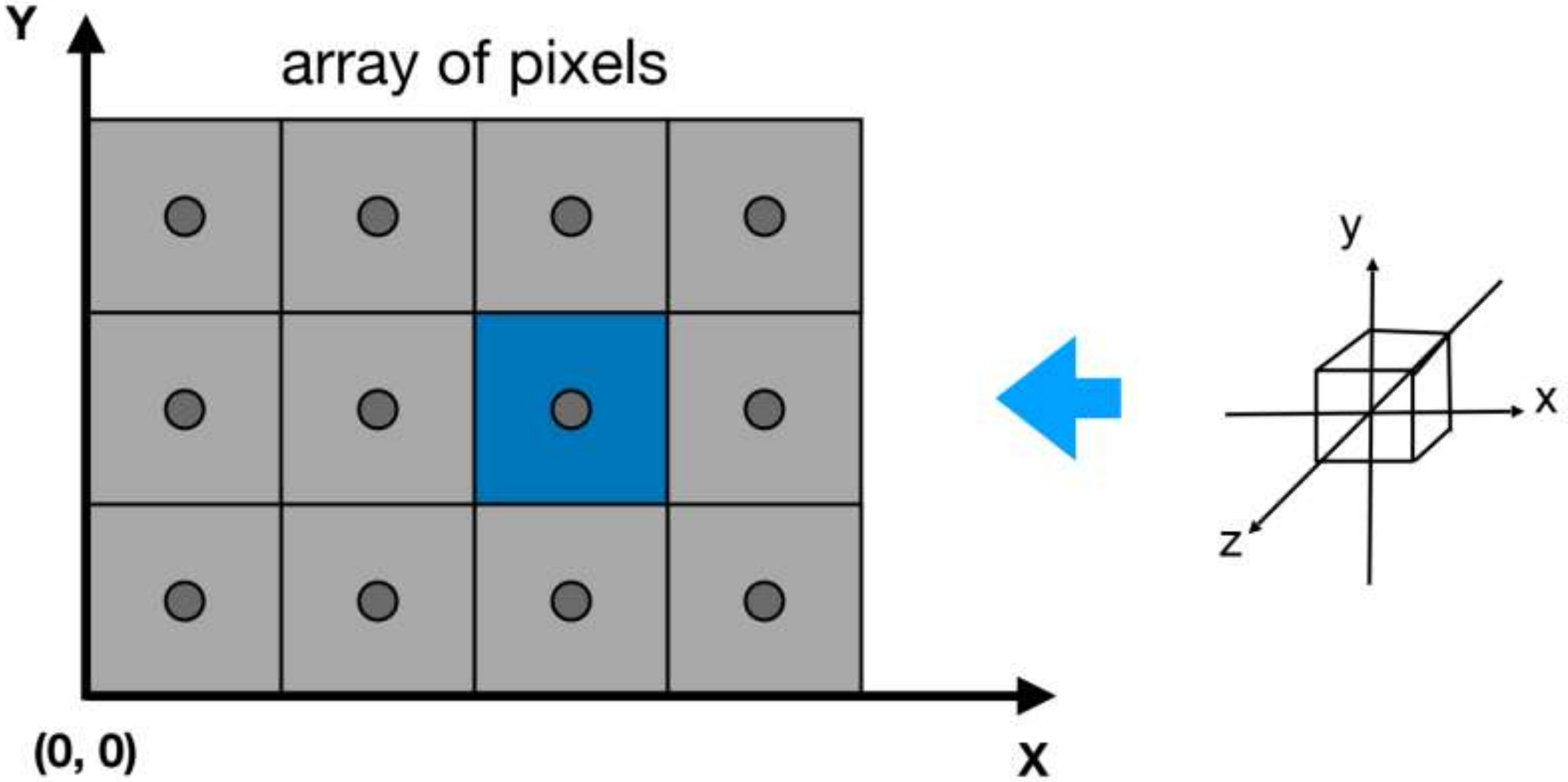
视口变换（Viewport Transformation）

- 定义屏幕空间
  - 像素的索引(x,y)：x,y都是整数；由（0,0）到(width-1,height-1)
  - 像素（x,y）的中心是（x+0.5, y+0.5）
  - 屏幕的覆盖的区域由（0,0）到(width,height)



视口变换

- 与Z坐标无关
- XY平面内的变换：由$[-1\ \ 1]^2$到$[0\ \ width]\times[0\ \ height]$



视口变换

- 与Z坐标无关
- XY平面内的变换：由$[-1\ \ 1]^2$到$[0\ \ width]\times[0\ \ height]$
- 变换矩阵

$$M_{viewport}=\begin{pmatrix}\frac{width}{2} & 0 & 0 & \frac{width}{2}\\ 0 & \frac{height}{2} & 0 & \frac{height}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Q&A

中國海洋大學
OCEAN UNIVERSITY OF CHINA