2021春线代A卷参考答案

一、1. 2　2. $-\frac{16}{27}$　3. $\frac{1}{9}$　4. $-\frac{1}{7}(A-3I)$　5. $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\4\end{pmatrix}, k\in R$　6. 3

二、1-6 BBDDCD

三、1. 所有列加到第一列，然后按第一列展开得$(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$

2. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\2&2&0&2\\3&1&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

一个极大线性无关组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$;

秩：3;　$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$

3. $(I-A)X=B$　$I-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$

$(I-A,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)$, $X=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$

4. 设所求过渡矩阵为A，则$(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2)A=(\alpha_1-2\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_2)$

$(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}A=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$

因为α_1,α_2是R^2的一组基，所以(α_1,α_2)可逆。

于是$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&2\\2&1&-2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&2\\0&-1&-4&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&-3&-1\\0&1&4&3\end{array}\right)$，所以$A=\begin{pmatrix}-3&-1\\4&3\end{pmatrix}$.

四、假设$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$是$A$的特征向量，对应的特征值为$\lambda$，则$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$.

由已知$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2, A\alpha_3=\lambda_3\alpha_3$，则$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3= \lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2+\lambda\alpha_3$，于是$(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2+(\lambda-\lambda_3)\alpha_3=0$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$A$对应于不同特征值的特征向量

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，于是$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$,与已知矛盾

假设不成立，所以可证$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$不是$A$的特征向量。

五、(1) 由已知$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=3 \\ x_1+2x_2+ax_3=1 \\ x_1+2x_2+x_3=a \end{cases}$ 有解。

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&4&a^2&3\\1&2&a&1\\1&2&1&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&a-1&1\\0&0&1-a&a-1\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{array}\right)$$

因为方程组有解，所以$a=1$或$a=2$.

(2) $a=1$时，$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$, 公共解$\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 其中$k$为任意常数。

$a=2$时，$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$, 公共解 $\eta=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

六、(1) $A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$，由特征值性质知：$a+2-2=1,\begin{vmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{vmatrix}=-12$

所以，$a=1,b=2$

(2)$|\lambda I-A|=0$得特征值$\lambda_1=2$(二重根)，$\lambda_2=-3$

$$2I-A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

施密特正交化得：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$-3I-A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & -5 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, 单位化得$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$

可取正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$, 令$x=Qy$得标准形$2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$

(3) $z_1^2+z_2^2-z_3^2$

(4)因为特征值不是全大于 0，所以不是正定二次型。