2021秋A卷参考答案

一、1. -3　 2. 3　 3. $\begin{pmatrix}-9&-1&1\\12&1&3\\11&1&-1\end{pmatrix}$ 4. -16　5. $k(-1,1,-1,-2)^{\mathrm{T}}$　6. 15

二、1-6 BACBAA

三、1. $\begin{vmatrix}-1&-1&\cdots&-1&n\\-1&-1&\cdots&n&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-1&n&\cdots&-1&-1\\n&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\-1&-1&\cdots&n&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-1&n&\cdots&-1&-1\\-1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&n+1&0\\\vdots&\vdots&⋰&\vdots&\vdots\\0&n+1&\cdots&0&0\\n+1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n+1)^{n-1}$$

2. $\begin{pmatrix}1&0&1&3&2\\-1&3&-1&0&1\\2&1&2&7&5\\0&2&4&14&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&2\\0&1&0&1&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

向量组的秩为3. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为向量组的一个极大无关组，$\alpha_4=\alpha_2+3\alpha_3$，$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

3. (1)设所求矩阵为A，则$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc}2&5&1&1\\1&3&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&-1&0\\0&-1&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&8&3\\0&1&-3&-1\end{array}\right)$, 所以$A=\begin{pmatrix}8&3\\-3&-1\end{pmatrix}$.

(2) $\alpha=-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

设所求坐标为$(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$,则$x_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

4. $A\alpha=\lambda\alpha$得$a=-3,b=0,\lambda=-1$.

四、证明：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，
即$k_1(2\alpha_1+\alpha_2)+k_2(3\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_1+4\alpha_3)=0$
整理得
$$(2k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+3k_2)\alpha_2+(k_2+4k_3)\alpha_3=0，$$
因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，
所以 $\begin{cases}2k_1\qquad +k_3=0\\k_1+3k_2\qquad =0\\\qquad k_2+4k_3=0\end{cases}$，因 $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&3&0\\0&1&4\end{vmatrix}=25\neq0$，所以$k_1=k_2=k_3=0$，从而向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

五、$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4&-1&-1\\1&1&-4&1&6\\2&1&a-1&b-3&b+6\\-2&-1&0&b-2&b-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4&-1&-1\\0&1&-8&2&7\\0&0&a-1&b-3&b+1\\0&0&0&b-2&b+3\end{array}\right)$
当$a\neq1,b=2$时，方程组无解；当$a\neq1,b\neq2$时，方程组有唯一解.

当$a=1$时，$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-4&1&6\\0&1&-8&2&7\\0&0&0&b-3&b+1\\0&0&0&b-2&b+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-4&1&6\\0&1&-8&2&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&7-b\end{array}\right)$

当$a=1$，$b\neq 7$时，方程组无解；

当$a=1,b=7$时，方程组有无穷多解.

综上，当$b=2$或$\begin{cases}a=1\\b\neq 7\end{cases}$时，方程组无解；当$\begin{cases}a\neq 1\\b\neq 2\end{cases}$时，方程组有唯一解；当$\begin{cases}a=1\\b=7\end{cases}$时，方程组有无穷多解.

$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-4&1&6\\0&1&-8&2&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4&0&1\\0&1&-8&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

可取自由变量x_3，

(1)$Ax=b$特解为：$\boldsymbol{\xi}_0=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}$，(2) $Ax=0$基础解系为:$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-4\\8\\1\\0\end{pmatrix}$,

(3) $Ax=b$一般解$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-4\\8\\1\\0\end{pmatrix}$，其中$k$为任意常数。

六、$A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$

1. 因为有一个特征值是 0，所以$|A|=0\Rightarrow a=2$.

2. $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda+3)\lambda$，故特征值是 $6,-3,0$

当$\lambda=6$时，$6I-A=\begin{pmatrix}4&-1&4\\-1&7&-1\\4&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$单位化得$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

当$\lambda=-3$时，$-3I-A=\begin{pmatrix}-5&-1&4\\-1&-2&-1\\4&-1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$单位化得$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

当$\lambda=0$ 时，$0I-A=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\-1&1&-1\\4&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$，得$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$单位化得$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，

故得正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

3. 规范形为$z_1^2-z_2^2$.