中国海洋大学全日制本科课程期末考试试卷

2019 年 春 季学期 考试科目： 线性代数 学院： 数学科学学院

试卷类型： A 卷 命题人： 线性代数教研组 审核人： 赵元章

考试说明：本课程为闭卷考试，共 3 页，只可携带考场规定的必需用品。

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设3阶方阵A的行列式$|A|=3$，则$|2A^{-1}A^T|=$__________.

2. 设3阶方阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}$的伴随矩阵为$A^*=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\-6&3&-1\\4&-2&2\end{pmatrix}$，则$a=$______.

3. 设n阶方阵A满足$A^2+3A+2I=O$, 则$(A-I)^{-1}=$____________.

4. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为 3 阶方阵，若$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，且$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则齐次线性方程组$Ax=0$的一般解为____________.

5. 设3阶方阵A的秩$r(A)=2$, 且$A\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\\3&-2\end{pmatrix}$, 则$A$的特征值为____________.

6. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&3&-5\\0&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}$可对角化，则$a=$______.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 已知A,B均为n阶可逆方阵，k为常数，则下列命题正确的是（ ）.

   A. $|A+B|=|A|+|B|$ B. $(A+B)^T=A^T+B^T$

   C. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ D. $|kAB|=k|A||B|$

2. 设A是3阶方阵，将A的第 2 列加到第 1 列得矩阵B，再交换B的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 则$A=$（ ）.

   A. P_1P_2 B. $P_1^{-1}P_2$ C. P_2P_1 D. $P_2P_1^{-1}$

3. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的，则下列向量组中相关的是（　　）.

A. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　B. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

C. $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3$　　D. $\alpha_1+2\alpha_3,3\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3$

4. 设A为$m\times n$型矩阵，B为$n\times p$型矩阵，则下列条件中，不能推出线性方程组$(AB)X=0$有非零解的是（　　）.

A. $m<p$　　B. 线性方程组$AY=0$有非零解

C. $n<p$　　D. 线性方程组$BX=0$有非零解

5. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$A$与$B$（　　）

A. 合同，且相似　B. 合同，但不相似 C. 不合同，但相似 D. 既不合同，也不相似

6. 设A是3阶实对称矩阵，E是3阶单位矩阵，O是3阶零矩阵，若$A^2+A-2E=O$，且$|A|=4$，则二次型x^TAx的规范型是（　）.

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

三、计算题(共 5 题，每题 6 分，共 30 分)

1. 计算n阶行列式$\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}$

2. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-3\\0&0&2&0\end{pmatrix}$，$A_{ij}$表示元素$a_{ij}$的代数余子式，求$A_{11}-A_{12}$.

3. 设向量组$\alpha_1=(1,-1,1,2)^T,\alpha_2=(-1,2,0,0)^T,\alpha_3=(1,2,4,8)^T,\alpha_4=(-1,1,1,1)^T,\alpha_5=(2,-1,1,3)^T$. 求此向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

4. 已知2维向量空间的两组基为$\mathbf{B_1}=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$\mathbf{B_2}=\{\beta_1,\beta_2\}$，其中

$\alpha_1=(1,-1)^T$，$\alpha_2=(1,0)^T$，

$\beta_1=(1,2)^T$，$\beta_2=(3,5)^T$.

(1) 求从基$\mathbf{B_1}$到基$\mathbf{B_2}$的过渡矩阵;

(2) 若2维向量γ在基$\mathbf{B_1}$下的坐标为$(-1,1)^T$，求γ在基$\mathbf{B_2}$下的坐标.

5. 设$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&1\\4&0&5\end{pmatrix}$，$B$与$A$相似，求$|B|,|B^{-1}+E|$，其中$B^{-1}$是$B$的逆矩阵，$E$是3阶单位矩阵。

四、证明题(共 1 题，每题 8 分，共 8 分)

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$n$阶方阵$A$的 3 个特征向量，且它们对应的特征值互不相等，若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关。

五、解方程组（共 1 题，14 分）

讨论a,b取何值时，以下线性方程组无解、有无穷多解、有唯一解，并且在有无穷多解时写出方程组的一般解.

$$\begin{cases} x_2+2x_3-2x_4=-1 \\ x_1+x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_2+(a+1)x_3+bx_4=b-2 \\ x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+3 \end{cases}$$

六、化二次型为标准型（共 1 题，12 分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1x_2-6x_1x_3-6x_2x_3$，利用正交变换法，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型，并写出相应的正交矩阵.

中国海洋大学全日制本科课程期末考试试卷答案

2019 年 春 季学期　考试科目：线性代数 A 卷　学院：数学科学学院

一、填空题

1. 8　**2.** 3　**3.** $-\frac{1}{6}(A+4I)$　**4.** $k(-1,2,-1)^T$　**5.** 1,2,0　**6.** 0

二、选择题　BDCBBC

三、计算题

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} =$
$(-1)^{n-1}(n-1)$

2. $A_{11}-A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，秩为3，极大线性无关组
$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$，$\alpha_3 = 4\alpha_1+3\alpha_2$，$\alpha_5 = 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4$.

4. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right)$，所求过渡矩阵为$\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,所求坐标为$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

5. A的特征值为1,1,6，因为B与A相似，所以B的特征值也是1,1,6，因此$|B| = 6$.
$B^{-1}+E$的特征值为$2,2,\frac{7}{6}$，所以$|B^{-1}+E| = \frac{14}{3}$.

四、证明题

证：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$对应的特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2, A\alpha_3=\lambda_3\alpha_3$。设$l_1\beta+l_2A\beta+l_3A^2\beta=0$，则$l_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+l_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)+l_3(\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3)=0$

于是$(l_1+\lambda_1l_2+\lambda_1^2l_3)\alpha_1+(l_1+\lambda_2l_2+\lambda_2^2l_3)\alpha_2+(l_1+\lambda_3l_2+\lambda_3^2l_3)\alpha_3=0$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$A$对应于不同特征值的特征向量，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

所以$\begin{cases} l_1+\lambda_1l_2+\lambda_1^2l_3=0 \\ l_1+\lambda_2l_2+\lambda_2^2l_3=0 \\ l_1+\lambda_3l_2+\lambda_3^2l_3=0 \end{cases}$

因为系数行列式的值等于$(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\neq 0$，所以此方程组仅有零解，即$l_1=l_2=l_3=0$

所以可证$\beta, A\beta, A^2\beta$线性无关。

五、解方程组

$$\begin{pmatrix}0&1&2&-2&-1\\1&1&2&-1&1\\0&1&a+1&b&b-2\\1&1&2&b-2&b+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&-1&1\\0&1&2&-2&-1\\0&1&a+1&b&b-2\\1&1&2&b-2&b+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&-1&1\\0&1&2&-2&-1\\0&0&a-1&b+2&b-1\\0&0&0&b-1&b+2\end{pmatrix}$$

$\to\begin{pmatrix}1&1&2&-1&1\\0&1&2&-2&-1\\0&0&a-1&3&-3\\0&0&0&b-1&b+2\end{pmatrix}$ 于是，$\begin{cases}a-1\neq 0\\b-1=0\end{cases}$无解；$\begin{cases}a-1\neq 0\\b-1\neq 0\end{cases}$唯一解

当$a=1$时，$\begin{pmatrix}1&1&2&-1&1\\0&1&2&-2&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&b-1&b+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&-1&1\\0&1&2&2&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&2b+1\end{pmatrix}$

于是$\begin{cases}a=1\\b\neq-\frac{1}{2}\end{cases}$无解；$\begin{cases}a=1\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}$有无穷多个解。

当有方程组有无穷多解时，$\begin{pmatrix}1&1&2&-1&1\\0&1&2&-2&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&2&0&-3\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系为$X_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，非齐次

特解为$X_0=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-1\end{pmatrix}$，通解为$X=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，其中$k$为任意常数。

六、化二次型为标准型

$A=\begin{pmatrix}1&-3&-3\\-3&1&-3\\-3&-3&1\end{pmatrix}$，$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&3\\3&\lambda-1&1\\3&3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda+5)$；$A$的特征值为$\lambda_1=4$(二重根)，

$\lambda_2=-5$(单根).

$\lambda_1=4$时，$4I-A\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系$X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\beta_1=X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=X_2-\frac{(X_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=$

$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$；

$\lambda_2=-5$时，$-5I-A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

所以$f(x_1,x_2,x_3)$标准型为$4y_1^2+4y_2^2-5y_3^2$，正交矩阵为$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.